



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS  
CÂMPUS CIMBA ARAGUAÍNA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**



**DANIEL REIS DA SILVA**

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO MÉTODO DAS  
CASCAIS CILÍNDRICAS COM USO DE IMPRESSÃO 3D E  
TECNOLOGIAS DIGITAIS**

**Araguaína  
2025**

DANIEL REIS DA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO MÉTODO DAS  
CASCAIS CILÍNDRICAS COM USO DE IMPRESSÃO 3D E TECNOLOGIAS  
DIGITAIS

**Dissertação de Mestrado** apresentada ao  
Programa de Pós-Graduação stricto sensu em  
Matemática, câmpus Araguaína, da UFNT,  
como parte dos requisitos necessários para a  
obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Deive Barbosa Alves

Araguaína  
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Geração de Ficha Catalográfica SGFC-UFNT  
**Gerado automaticamente mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

S586s Silva, Daniel Reis da.

Uma sequência didática para o ensino do método das cascas cilíndricas com uso de impressão 3D e tecnologias digitais / Daniel Reis da Silva. - Centro de Ciências Integradas - CCI, TO, 2025.

100 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) (Pós-Graduação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática - ProfMat) -- Universidade Federal do Norte do Tocantins, 2025.

Orientador: Deive Barbosa Alves.

1. Sequência didática. 2. Método das cascas cilíndricas. 3. Impressão 3D.

**CDD 510**

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

**DANIEL REIS DA SILVA**

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO  
MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS COM USO DE  
IMPRESSÃO 3D E TECNOLOGIAS DIGITAIS**

**Dissertação de Mestrado** apresentada ao Programa de Pós-Graduação stricto sensu em Matemática, câmpus Araguaína, da UFNT, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado em: 18 de agosto de 2025

BANCA EXAMINADORA:

---

**Prof. Dr. Deive Barbosa Alves (UFNT)**  
Orientador

---

**Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (UFNT)**  
Membro Interno

---

**Prof. Dr. Caleb da Silva Araujo Campelo (UEMASUL)**  
Membro Externo

Araguaína  
2025

*Dedico este trabalho aos meus pais, Cleonice e José, que me adotaram e me deram o mais puro amor; às minhas irmãs, Sandra, Sônia e Suely, que sempre me incentivaram nos estudos; e à minha querida Assislaine, que foi o meu pilar para a realização deste sonho.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus.

Agradeço aos meus pais, Cleonice e José, por me adotarem e me amarem incondicionalmente. Me proporcionando uma vida repleta de carinhos e aprendizado. Além de nunca medirem esforços para que eu tivesse o melhor estudo que eles podiam me proporcionar, me incentivando continuamente em cada conquista acadêmica.

Às minhas irmãs, Sandra, Sonia e Suely, por todo o carinho e amor, e por sempre me apoiarem nas minhas escolhas como estudante e acadêmico, me ajudando todas as vezes que necessitei, fosse em uma atividade ou me levando para a escola e universidade.

À minha amada Assislaine, que desde o primeiro dia de graduação, me olhou com outros olhos, me fazendo mostrar sempre o melhor de mim. Agradeço por ser minha parceira, companheira, amiga e amor, me ajudando e sendo meu pilar em todos os projetos que inicio.

Agradeço ao meu orientador, Deive, que mesmo sabendo de todos os problemas que enfrentei no último ano, foi paciente e um completo mentor para que eu pudesse escrever esta dissertação.

Aos meus amigos de viagem, Gabriela, Matheus, Carlos e Onofre, que dividiram comigo todas as aflições e alegrias deste mestrado.

Aos professores do curso, que me mostraram a verdadeira matemática e que me tornaram um professor e acadêmico melhor.

*“Toda ideia nova foi moderna um dia — até deixar de ser.”*

**Matthew Cuthbert – *Anne with an E***

# RESUMO

Esta dissertação apresenta a construção de uma sequência didática voltada para o ensino do cálculo do volume de sólidos de revolução, através do método das cascas cilíndricas no ensino médio, com o apoio da impressão 3D e de recursos digitais, de forma a tornar a aprendizagem mais didática e contextualizada, sem a perda do rigor matemático. Foram desenvolvidos modelos tridimensionais impressos em 3D de sólidos com diferentes níveis de aproximação e planilhas no Excel como ferramentas para a visualização e cálculo do volume dos sólidos. Essa abordagem busca promover ao aluno a autonomia e participação ativa no processo de construção de conhecimento, onde ele investiga e toma as conclusões a respeito dos cálculos, ligando teoria à prática. A principal contribuição do trabalho está na elaboração de uma proposta metodológica que alia recursos tecnológicos e práticas inovadoras ao ensino de matemática, ampliando as possibilidades de aprendizagem. Os resultados esperados incluem uma maior participação dos estudantes, o aprofundamento sobre os conceitos de volume e o desenvolvimento de novas habilidades no saber matemático.

**Palavras-chaves:** Sequência didática. Método das cascas cilíndricas. Impressão 3D.

# ABSTRACT

This dissertation presents the construction of a didactic sequence aimed at teaching the calculation of the volume of solids of revolution, through the method of cylindrical shells in high school, supported by 3D printing and digital resources, in order to make learning more didactic and contextualized without losing mathematical rigor. Three-dimensional models of solids with different levels of approximation were developed and printed in 3D, as well as Excel spreadsheets used as tools for the visualization and calculation of the volumes. This approach seeks to promote students' autonomy and active participation in the process of knowledge construction, where they investigate and draw conclusions about the calculations, linking theory and practice. The main contribution of this work lies in the development of a methodological proposal that combines technological resources and innovative practices in mathematics education, expanding the possibilities of learning. The expected results include greater student engagement, a deeper understanding of the concepts of volume, and the development of new skills in mathematical knowledge.

**Keywords:** Didactic Sequence. Cylindrical Shell Method. 3D Printing.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 4.1 – Tabela Excel para o cálculo do volume do cone. . . . .	33
Figura 4.2 – Valores (a) e (b) da função afim estudada. . . . .	34
Figura 4.3 – Valores dos raios inicial e final da função afim estudada. . . . .	34
Figura 4.4 – Características das cascas do sólido. . . . .	34
Figura 4.5 – Valor do raio interno da primeira casca do sólido. . . . .	35
Figura 4.6 – Valor do raio externo da primeira casca do sólido. . . . .	35
Figura 4.7 – Valor do raio interno da segunda casca do sólido. . . . .	36
Figura 4.8 – Valor dos raios internos das cascas 3 a 20 do sólido. . . . .	36
Figura 4.9 – Valor do raio externo da segunda casca do sólido. . . . .	37
Figura 4.10–Valor dos raios externos das cascas 3 a 20 do sólido. . . . .	37
Figura 4.11–Valor do raio médio da primeira casca do sólido. . . . .	38
Figura 4.12–Valor da altura da casca do sólido. . . . .	38
Figura 4.13–Valor do produto entre o raio médio e a altura da casca. . . . .	38
Figura 4.14–Soma dos produtos da primeira até a vigésima casca. . . . .	39
Figura 4.15–Volume do sólido com 20 cascas. . . . .	39
Figura 4.16–Coeficientes $a$ , $b$ e $c$ da função quadrática. . . . .	40
Figura 4.17–Raios inicial e final do sólido. . . . .	40
Figura 4.18–Características das cascas do sólido. . . . .	41
Figura 4.19–Raio interno da primeira casca. . . . .	41
Figura 4.20–Raio externo da primeira casca. . . . .	41
Figura 4.21–Raios interno e externo das cascas do sólido. . . . .	42
Figura 4.22–Raio médio da primeira casca. . . . .	42
Figura 4.23–Altura das cascas do sólido. . . . .	43
Figura 4.24–Valor do produto entre o raio médio e a altura da casca. . . . .	43
Figura 4.25–Calculo do volume do sólido. . . . .	44
Figura 4.26–Página inicial de um projeto no Fusion 360. . . . .	45
Figura 4.27–Configurando a unidade padrão de medida do Fusion. . . . .	46
Figura 4.28–Criando o ambiente do esboço. . . . .	47
Figura 4.29–Tabela do Excel baseada no cone configurada para 4 cascas. . . . .	48
Figura 4.30–Primeiro retângulo do esboço do sólido de 4 cascas. . . . .	48
Figura 4.31–Esboço do restante dos retângulos do sólido. . . . .	49
Figura 4.32–Esboço do sólido de 4 cascas finalizado. . . . .	49
Figura 4.33–Botão de revolução do Fusion. . . . .	49
Figura 4.34–Revolução da primeira casca do sólido com 4 cascas. . . . .	50
Figura 4.35–Botão de revolução do Fusion. . . . .	51

Figura 4.36–Observações na revolução da segunda casca do sólido com 4 cascas. . . . .	51
Figura 4.37–Sólido de revolução com 4 cascas concluído. . . . .	52
Figura 4.38–Construção do sólido de revolução com 8 cascas. . . . .	53
Figura 4.39–Construção do sólido de revolução com 16 cascas. . . . .	54
Figura 4.40–Primeira linha do esboço do cone. . . . .	55
Figura 4.41–Segunda linha do esboço do cone. . . . .	56
Figura 4.42–Linha que fecha o esboço do cone. . . . .	56
Figura 4.43–Cone gerado. . . . .	57
Figura 4.44–Selecionando a ferramenta “Curva Cônica”. . . . .	57
Figura 4.45–Construindo a parábola interna da taça. . . . .	58
Figura 4.46–Construindo a parábola externa da taça. . . . .	59
Figura 4.47–Fechando as parábolas. . . . .	59
Figura 4.48–Delimitando a área de revolução da parábola. . . . .	60
Figura 4.49–Esboço para a construção do copo da taça pronto. . . . .	60
Figura 4.50–Pé da taça. . . . .	61
Figura 4.51–Selecionando novas ferramentas. . . . .	61
Figura 4.52–Círculo que faz parte do tronco da taça. . . . .	62
Figura 4.53–Linha que delimita o esboço do tronco da taça pela esquerda. . . . .	63
Figura 4.54–Formação da elipse do tronco da taça. . . . .	63
Figura 4.55–Fechando o esboço da base da taça. . . . .	64
Figura 4.56–Esboço da base da taça pronto. . . . .	64
Figura 4.57–Selecionando o esboço do copo da taça e o eixo que ele será revolucionado. . . . .	65
Figura 4.58–Sólido do copo da taça pronto. . . . .	65
Figura 4.59–Selecionando os esboços da base da taça que serão revolucionados. . . . .	66
Figura 4.60–“Novo corpo” na opção “Operação” na revolução da base da taça. . . . .	66
Figura 4.61–Selecionando as cascas da primeira parte dos arquivos que serão salvos para a impressão 3D. . . . .	67
Figura 4.62–Exportando o arquivo. . . . .	68
Figura 4.63–Exportando as partes da taça. . . . .	69
Figura 5.1 – Sólidos para a primeira aula. . . . .	71
Figura 5.2 – Tabela Excel para o cálculo do volume do cone. . . . .	76
Figura 5.3 – Configuração da função afim. . . . .	82
Figura 5.4 – Volume do cone para 8 e 16 cascas. . . . .	83
Figura 5.5 – Taça de bebida . . . . .	85
Figura 5.6 – Tabela em Excel com os dados e todos os passos do cálculo do volume da taça	85
Figura 5.7 – Projeção da função $f(x)$ que define o interior da taça, em azul. . . . .	86
Figura 5.8 – Tabela do Excel que calcula o volume do parabolóide com 5 cascas . . . . .	88
Figura 5.9 – Tabela do Excel que calcula o volume do parabolóide com 10 cascas . . . . .	88
Figura A.1 –Lista de seleção da Impressora 3D. . . . .	96

Figura A.2–Impressora 3D Anet A8. . . . .	97
Figura A.3–Página inicial - Ultimaker Cura. . . . .	97
Figura A.4–Sólido a ser fatiado para a impressão. . . . .	98
Figura A.5–Sólido a fatiado pronto para a impressão. . . . .	99
Figura A.6–Base da taça na fatiadora. . . . .	99
Figura A.7–Base da taça de ponta-cabeça. . . . .	100
Figura A.8–Base da taça rotacionada em 180°. . . . .	100

# LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 3.1 – Gráfico da função $f$ e a área embaixo de sua curva no intervalo $[a,b]$ . . . . .	23
Gráfico 3.2 – Sólido gerado pela revolução da função $f$ em torno do eixo $y$ . . . . .	23
Gráfico 3.3 – Retângulo formado limitado em $x$ por $[x_{i-1}, x_i]$ e em $y$ por $f(\bar{x}_i)$ . . . . .	24
Gráfico 3.4 – Casca da função $f$ revolucionada em torno do eixo $y$ . . . . .	24
Gráfico 3.5 – Cone gerado pela revolução da função $f$ em torno do eixo $y$ . . . . .	27
Gráfico 3.6 – Parabolóide gerado pela revolução da função $f$ em torno do eixo $y$ . . . . .	29
Gráfico 5.1 – Retângulos resultantes da fatia do sólido de cascas, no plano cartesiano. . . . .	78
Gráfico 5.2 – Reta encontrada através da intersecção dos raios médio com as alturas dos retângulos. . . . .	79

# LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Cálculo do volume do sólido com 4 cascas. . . . .	73
Tabela 5.2 – Cálculo do volume do sólido com 8 cascas. . . . .	73
Tabela 5.3 – Cálculo do volume do sólido com 16 cascas . . . . .	74
Tabela 5.4 – Raio externo e interno, espessura e altura das cascas do sólido com 4 cascas. . . . .	77
Tabela 5.5 – Cálculo do volume do sólido com 4 cascas . . . . .	81
Tabela 5.6 – Cálculo do volume da Taça com 5 cascas . . . . .	87
Tabela 5.7 – Cálculo do volume da Taça com 10 cascas . . . . .	87
Tabela A.1 – Configurações específicas para a impressão. . . . .	98

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>19</b>
2.1	A matemática e sua relação com o mundo real	19
2.2	O método das cascas cilíndricas no ensino médio	19
2.3	Cultura <i>maker</i> e impressão 3D no ensino da matemática	20
2.4	Recursos digitais: O uso de planilhas no ensino	20
2.5	A sequência didática como recurso metodológico	21
<b>3</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO MATEMÁTICO</b>	<b>23</b>
3.1	O método das cascas cilíndricas	23
3.2	Melhorando a Equação 3.6	26
3.3	O volume do cone	27
3.4	O volume de um parabolóide	29
<b>4</b>	<b>RECURSOS E MATERIAIS</b>	<b>32</b>
4.1	Tabelas do cone e parabolóide	32
4.1.1	A tabela de construção e cálculo do volume do cone	32
4.1.2	A tabela de construção e cálculo do volume do parabolóide	40
4.2	Sólidos de revolução	45
4.2.1	Conhecendo o Fusion 360	45
4.2.2	Construção do sólido baseado no cone	46
4.2.2.1	Sólido com 4 cascas	47
4.2.2.2	Sólido com 8 e 16 cascas	52
4.2.3	Cone base para os sólidos	55
4.2.4	Construção da taça de bebida através do parabolóide	57
4.2.5	Salvando os sólidos para impressão 3D	67
<b>5</b>	<b>A SEQUÊNCIA DIDÁTICA</b>	<b>70</b>
5.1	Aula 1 – Introdução ao volume por cascas cilíndricas	70
5.1.1	Objetivo da aula	70
5.1.2	Conteúdos abordados	70
5.1.3	Materiais e recursos	71
5.1.4	Desenvolvimento da aula	72
5.1.5	Avaliação	75

<b>5.2</b>	<b>Aula 2 - A Equação do método das cascas para o cálculo do volume de um cone</b>	<b>75</b>
5.2.1	Objetivo da aula	75
5.2.2	Conteúdos abordados	76
5.2.3	Materiais e recursos	76
5.2.4	Desenvolvimento da aula	77
5.2.5	Avaliação	84
<b>5.3</b>	<b>Aula 3 - A capacidade de uma taça de bebida</b>	<b>84</b>
5.3.1	Objetivo de aula	84
5.3.2	Conteúdo abordados	84
5.3.3	Materiais e recursos	84
5.3.4	Desenvolvimento da aula	86
5.3.5	Avaliação	89
<b>5.4</b>	<b>Sugestões para contornar limitações quanto à Impressora 3D</b>	<b>90</b>
<b>5.5</b>	<b>Observações e sugestões a respeito da sequência didática</b>	<b>90</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>92</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>93</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>96</b>
	<b>APÊNDICE A – PREPARANDO O ARQUIVO PARA IMPRESSÃO NA FATIADORA ULTIMAKER CURA</b>	<b>96</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A matemática estudada em sala de aula, quando desconectada do mundo real, pode facilmente se tornar um conjunto de equações e conteúdos abstratos que, aos olhos dos alunos, não possuem significado algum. Essa desconexão se torna ainda mais forte quando o aluno se torna apenas um receptor daquele conteúdo, sem ter uma participação em sua construção e sem uma contextualização com a realidade em que ele está inserido. Com afirma Maccarini (2015, p. 15):

Com uma matemática extremamente formal, centrada em sua estrutura e no rigor das suas regras, símbolos e procedimentos, os alunos começaram a apresentar dificuldades na aprendizagem, não conseguindo estabelecer conexão entre o que era ensinado e a realidade vivida. Para os alunos, a matemática ensinada nas escolas passa a estar distante da realidade, fora do contexto no qual eles viviam.

Esse distanciamento é ainda mais notável quando se trata de assuntos específicos, como o cálculo de volumes de sólidos de revolução. Esse conteúdo, quando não trabalhado com ferramentas educacionais, principalmente visuais e palpáveis, se torna de difícil entendimento e interesse por parte dos alunos, fazendo com que não haja uma “conversa” entre o professor e o aluno.

Com isso, torna-se interessante buscar novos métodos que reaproximem o aluno dos conteúdos matemáticos, mantendo o rigor dos cálculos de modo que os alunos entendam não só as operações realizadas pelo professor, mas se interessem pelo que está sendo estudado e aprofundem-se buscando investigar o porquê dos resultados encontrados em cada etapa do cálculo, podendo assim, construir uma conexão e reconhecer o sentido que cada um daqueles cálculos tem com objetos reais.

Nos últimos anos, as tecnologias digitais e a cultura *maker* têm se tornado cada vez mais presentes no ambiente escolar. Essa realidade faz com que ferramentas provenientes desses ramos sejam instrumentos poderosos para aproximar o aluno do conteúdo abordado na matemática. Como dizem Cunha e Santos (2024, p. 4): “A cultura maker, ao ser associada à Educação Matemática, possibilita um aprendizado mais dinâmico onde os alunos assumem o protagonismo, tornam-se mais autônomos e reflexivos, promovendo um ensino transformador”. E é isso que é proposto neste trabalho, o uso desses materiais junto da matemática para permitir que o aluno não só compreenda o conteúdo, em específico, o cálculo do volume de sólidos de revolução utilizando o método das cascas cilíndricas, mas que ele possa “ver” e “tocar” em cada elemento desse assunto.

Uma das ferramentas que pode ser um ótimo instrumento para o educador é a Impressora 3D, com ela se torna possível uma nova forma de visualização de vários elementos matemáticos através da construção de objetos palpáveis, para observação e estudo, aproximando teoria de realidade, como diz Rocha (2018, p. 34):

As possibilidades de uso da impressão 3D, possíveis nas principais disciplinas da Educação Básica, podem através da criação de modelos e representações mais tangíveis, aproximar a teoria de sala de aula com a realidade dos estudantes e tornar possível a construção de conhecimento Matemático.

Desse modo, definimos a questão norteadora desta proposta pedagógica em: “Como podemos usar recursos da cultura maker, em especial a impressão 3D, como ferramenta para facilitar o ensino do método das cascas cilíndricas para o ensino médio, sem abrir mão do rigor matemático envolvido no cálculo do volume de sólidos de revolução?”. Esse questionamento abre espaço para que possam ser pensadas várias metodologias de ensino que exploram a relação aluno e professor e, também, o “como” os alunos absorvem e entendem os conteúdos matemáticos e até onde eles compreendem o que está sendo executado nos passos do cálculo.

O objetivo geral desse trabalho é construir uma sequência didática para o ensino do cálculo do volume de sólidos de revolução utilizando o método das cascas cilíndricas, com apoio de objetos impressos em 3D e recursos digitais.

Como objetivos específicos, busca-se explorar o método das cascas cilíndricas como uma nova ferramenta para o cálculo de sólidos de revolução no ensino médio; desenvolver modelos tridimensionais de sólidos com cascas, com diferentes níveis de aproximação do sólido baseado, que sirvam como ferramenta na sequência didática; estudar funções geradoras de sólidos de revolução e a presença destes sólidos em objetos vistos no cotidiano do aluno; e utilizar planilhas como ferramenta para observação da aproximação dos cálculos através das variáveis envolvidas.

A metodologia adotada pelo autor é de caráter qualitativo, visto que o trabalho é centrado no desenvolvimento de um produto educacional, em específico, uma sequência didática que tem como ferramenta principal a impressão 3D, para fazer com que os estudantes compreendam as definições e significados além dos números e fórmulas do conteúdo. Segundo Gerhardt e Silveira (2009, p. 32), a pesquisa qualitativa busca explicar o porquê das coisas, além de trabalhar aspectos que não podem ser quantificados, desse modo, o foco não é testar hipóteses por meio de dados estatísticos, mas sim construir e documentar um possível roteiro de ensino que se baseie na integração entre cultura maker, teoria matemática e recursos digitais, para que se possa tentar compreender os conceitos e cálculos nos conteúdos estudados obtendo, assim, uma nova ferramenta para a aplicação em sala de aula. Com isso, essa proposta tem uma abordagem descritiva e construtiva para o ensino da matemática.

A estrutura desta dissertação foi organizada em cinco capítulos. O primeiro capítulo é esta introdução, que traz as primeiras ideias e noções do que será abordado nos próximos capítulos. No Capítulo 2, é apresentado a fundamentação teórica que sustenta o uso de recursos como a impressão 3D e as planilhas de excel como ferramentas para o ensino. Também é discutido o uso dessas tecnologias no ensino da matemática além de apresentar a sequência didática como o método e parte do produto educacional do trabalho, justificando o seu uso. O Capítulo 3 traz todo o referencial teórico matemático necessário para o desenvolvimento das aulas da sequência

didática, dando ênfase na dedução da equação para o cálculo do volume de sólidos de revolução através do método das cascas cilíndricas e a sua adaptação para ser utilizada no ensino médio, além de apresentar a dedução das equações para o cálculo do volume do cone e de um parabolóide. No Capítulo 4 é apresentado o passo a passo para a construção dos materiais didáticos que serão utilizados nas aulas, são eles as planilhas no excel para o cálculo do volume das cascas e os sólidos que devem ser impressos em 3D. Por fim, o Capítulo 5 traz a sequência didática e todas as aulas que a compõem, contendo os objetivos, materiais utilizados, desenvolvimentos previsto, roteiros para as aulas e as formas de avaliação.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 A matemática e sua relação com o mundo real

A matemática, quando ensinada sem uma contextualização com o meio, tende a ser vista pelos alunos como um conjunto de equações e regras que não tem sentido ou importância para sua formação. Isso colabora para o desinteresse e para a dificuldade de aprendizagem dos conteúdos da matéria. Cabral (2017, p. 11) afirma que é preciso que o professor seja incansável na promoção de um diálogo que estimule o estudante na identificação de propriedades, reconstrução de conceitos e até no estabelecimento de generalizações, mesmo que de forma intuitiva.

Esse diálogo está inteiramente ligado à forma como os conceitos são apresentados e ao nível de envolvimento do aluno. Como diz Luccas e Batista (2008, p. 9):

A contextualização dos objetos matemáticos pode estimular os alunos para que se sintam motivados a aprender, principalmente quando envolve um contexto diferente do puramente matemático – tão enfatizado pela perspectiva formalista.

Outro aspecto possibilitado pela contextualização consiste em saciar determinados questionamentos presentes no âmbito escolar, tais como: Por que é importante aprender isto? Em que situações cotidianas eu vou utilizar o que estou aprendendo? O que tem a ver isto que estou estudando em Matemática com a minha vida?

Dessa forma, se torna interessante que os conteúdos de matemática ensinados possam partir de contextos reais, promovendo o pensamento crítico e a curiosidade por parte do estudante. Assim, utilizar representações visuais, com objetos palpáveis, e recursos digitais para ensinar o cálculo de volumes de sólidos de revolução, pode tornar o conteúdo mais interessante e cativante para o aluno.

### 2.2 O método das cascas cilíndricas no ensino médio

O método das cascas cilíndricas é um conteúdo normalmente estudado no ensino superior, mais precisamente no cálculo de volumes através de integral, mas que possui um potencial didático notável para o ensino médio quando usado como método para o ensino do cálculo de volumes na Geometria. A proposta de apresentar esse método, usando de apoio visual por meio dos sólidos impressos em 3D, permite que o estudante desenvolva a percepção visual de todos os elementos pertencente àquele sólido e, assim, tenha uma nova visão sobre a ideia de aproximação no cálculo de áreas e volumes.

Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 43) apontam a mudança no método de ensino da matemática no decorrer dos anos, com o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação e as Tecnologias Educacionais cada vez mais presentes no cotidiano da sala de aula. Destacam também a importância de materiais manipuláveis para tornar a matemática mais significativa. Quando os alunos analisam as cascas cilíndricas impressas, podem visualizar como cada casca,

a medida que se afina, se torna uma parte do sólido em que elas se basearam, compreendendo melhor como aquele sólido se forma e como o cálculo de seu volume é estudado, sendo assim uma nova forma de entender e validar os cálculos realizados pelos estudantes, aproximando o aprendizado desse processo experimental.

### 2.3 Cultura *maker* e impressão 3D no ensino da matemática

A cultura *maker* propõe uma abordagem pedagógica que se baseia na resolução de problemas e experimentação por meio da análise e construção de protótipos.

A base do movimento *maker*, então, encontra-se na atividade prática, na experimentação. Na educação, as práticas experimentais podem significar processos de aprendizagem mais significativos, promovendo o trabalho coletivo e a resolução de problemas de forma crítica, estimulando o conhecimento de métodos, técnicas de investigação e análise de dados, além de facilitar a compreensão de conceitos e estimular a criatividade. No âmbito da cultura *maker* essas práticas são chamadas de atividades *maker*. Reis, Brandão e Santos (2024, p. 66)

Com isso, essa cultura defende e oferta uma aprendizagem significativa através da interação ativa do aluno com o conhecimento e com o meio em que ele se insere. Assim, se torna enriquecedor utilizar do movimento *maker* para o desenvolvimento e ensino de conteúdos na disciplina de matemática, principalmente quando se pode construir modelos palpáveis para análise em sala de aula, que é o caso apresentado na proposta didática deste trabalho.

Em especial, inserido no movimento *maker*, o uso da impressão 3D como ferramenta que possibilita a criação de objetos geométricos, proporciona ao aluno uma experiência tátil e visual do conteúdo estudado. Santos e Andrade (2020) dizem que o crescimento no uso da impressão 3D está agregado especialmente pelo fato dos objetos impressos serem muito precisos em sua construção, tornando os objetos muito úteis para a experimentação e testes reais e funcionais. Tudo isso, faz com que o uso dessa ferramenta seja o ideal para a sequência didática desenvolvida, por conta das atividades que são propostas, sendo elas observação e a medição dos sólidos geométricos impressos.

Pesquisas como Rocha (2018) mostram que materiais preparados e impressos em 3D podem se tornar uma ferramenta facilitadora no aprendizado de conceitos da geometria e cálculo por meio da manipulação de modelos. É isso que este trabalho busca utilizar, propondo o uso dessa ferramenta como facilitadora para a compreensão do método das cascas cilíndricas.

### 2.4 Recursos digitais: O uso de planilhas no ensino

As planilhas, se tornam um aliado didático potente quando se quer explorar a matemática através de aproximações e execução de cálculos de forma automática. Macêdo e Silva (2016) apontam que o Excel se torna um recurso notável pois faz com o que o aluno seja o protagonista, testando valores e os modificando dependendo da sua necessidade, além de facilitar os cálculos

matemáticos, que muitas vezes são extensos e repetitivos, por serem feitos de forma automática. Isso, pode fazer com que os conteúdos sejam aprofundados de forma mais rápida sem a perda do significado e do entendimento de cada parte do processo.

O uso de planilhas eletrônicas, como o Excel, nesta proposta será principalmente como ferramenta para a construção dos modelos geométricos em 3D e como comprovação dos cálculos realizados pelos alunos. Essa abordagem permite que os alunos explorem conceitos de variação, soma e modificação de parâmetros de forma mais interativa, o que pode facilitar a compreensão da lógica de aproximação envolvida nos cálculos do método das cascas cilíndricas.

## 2.5 A sequência didática como recurso metodológico

A sequência didática é “um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos” Peretti e Costa (2013, p. 6). Para tal, é interessante que tais atividades sejam organizadas de modo a promover uma aprendizagem significativa e progressiva, para que o aluno desenvolva as competências desejadas pelo professor durante as aulas que envolvem essa sequência.

Nesta dissertação, a sequência didática proporciona aos alunos a introdução e aprendizagem do método das cascas cilíndricas como método para calcular volumes. Ela se baseia, como será explanado nos próximos capítulos, de uma abordagem que une a teoria, modelagem computacional e manipulação de modelos físicos como ferramentas para a realização de seus passos. Toda essa organização favorece a compreensão não apenas dos cálculos, mas também dos conceitos por trás da equação principal para o cálculo dos volumes dos sólidos de revolução.

Cabral (2017, p. 11) vem nos falar que ao desenvolvermos uma sequência didática, é importante que durante o processo de desenvolvimento das atividades, o professor faça com que os alunos experimentem, observem e deduzam os saberes sobre aquele conteúdo mas que isso seja feito de modo que não “fira” o rigor matemático presente em cada definição. E é isso que é proposto neste trabalho, o desenvolvimento dos alunos através de experimentos e testes matemáticos, mas que eles ainda executem a matemática propriamente dita, com a utilização de todos os conceitos e equações necessárias no processo do cálculo dos volumes dos sólidos estudados.

Desse modo, o aluno transcende à ideia de apenas copiar o que é posto para ele como verdade e pode começar a questionar o real sentido de cada elemento que compõe uma determinada equação, deixando de ser apenas um receptor e passando a ser um agente no processo de construção do conhecimento. Como relata Libâneo (2013, p. 78):

O professor passa a matéria, o aluno recebe e reproduz mecanicamente o que absorveu. O elemento ativo é o professor que fala e interpreta o conteúdo. O aluno, ainda que responda o interrogatório do professor e faça os exercícios pedidos, tem uma atividade muito limitada e um mínimo de participação na elaboração dos conhecimentos. Subestima-se a atividade mental dos alunos

privando-os de desenvolverem suas potencialidades cognitivas, suas capacidades e habilidades, de forma a ganharem independência de pensamento. O ensino deve ser mais do que isso. Compreende ações conjuntas do professor e dos alunos pelas quais estes são estimulados a assimilar, consciente e ativamente, os conteúdos e os métodos, de assimilá-los com suas forças intelectuais próprias, bem como a aplicá-los, de forma independente e criativa, nas várias situações escolares e na vida prática.

Essa visão reforça o papel do aluno na proposta desta dissertação como um atuante na formação de conhecimento, em que a sequência didática é construída para que ele explore, teste e valide cálculos com apoio de modelos impressos em 3D e recursos digitais, evitando uma aprendizagem passiva.

### 3 REFERENCIAL TEÓRICO MATEMÁTICO

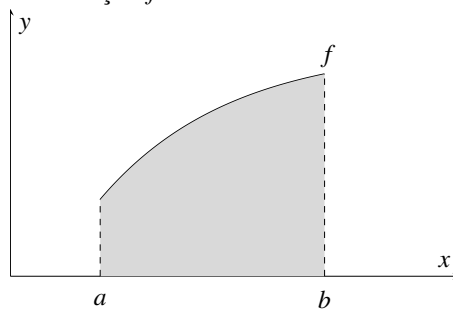
O propósito deste capítulo é apresentar todo o desenvolvimento das equações matemáticas que serão usadas para a realização das atividades propostas no Capítulo 5. Como referências, temos Stewart (2013), Leithold (1994) e Guidorizzi (2001), onde o desenvolvimento a seguir pode ser verificado.

O método das cascas cilíndricas nos apresenta um formato diferente para o cálculo de volumes dos sólidos geométricos, mas o mais interessante deste método é que, através dele, também podemos encontrar os modelos que são usados no Ensino Médio para o cálculo do volume de sólidos geométricos com corpos redondos. E é esta sequência de provas que faremos no decorrer deste capítulo.

#### 3.1 O método das cascas cilíndricas

Considere uma função  $f$  contínua em um intervalo  $[a, b]$  do eixo  $x$ , onde  $0 \leq a < b$  e  $f(x) > 0$  no intervalo  $[a, b]$ , e a área formada pela sombra abaixo dessa curva, como ilustra o Gráfico 3.1:

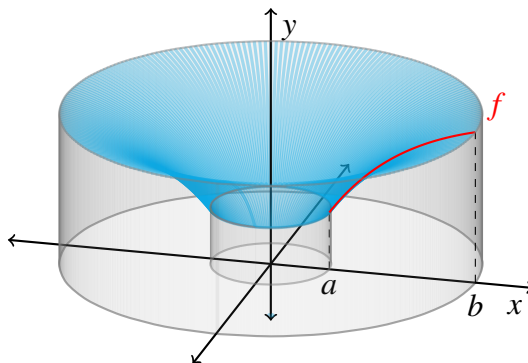
**Gráfico 3.1** – Gráfico da função  $f$  e a área embaixo de sua curva no intervalo  $[a, b]$ .



**Fonte:** Elaboração própria.

Ao revolucionar essa função e sua sombra em torno do eixo  $y$ , obtém-se o Gráfico 3.2:

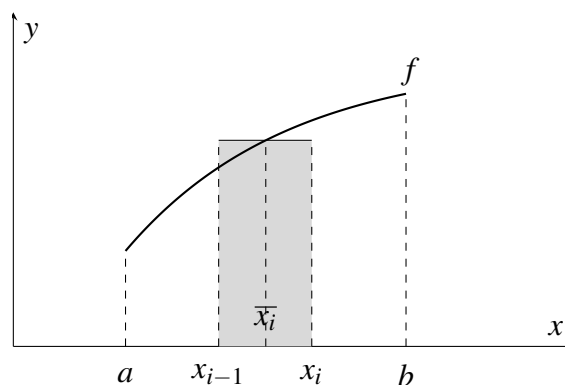
**Gráfico 3.2** – Sólido gerado pela revolução da função  $f$  em torno do eixo  $y$ .



**Fonte:** Elaboração própria.

Observe que a revolução dessa função gerou um sólido de revolução. Através do método das cascas cilíndricas, conseguimos construir uma equação que calcule o volume desse sólido. A ideia é fatiar essa função paralelamente ao eixo  $y$ , formando retângulos limitados em  $x$  por  $x_{i-1} < x_i$  e de altura  $f(\bar{x}_i)$  onde  $\bar{x}_i$  é o valor médio desse intervalo<sup>1</sup>, como representado no Gráfico 3.3:

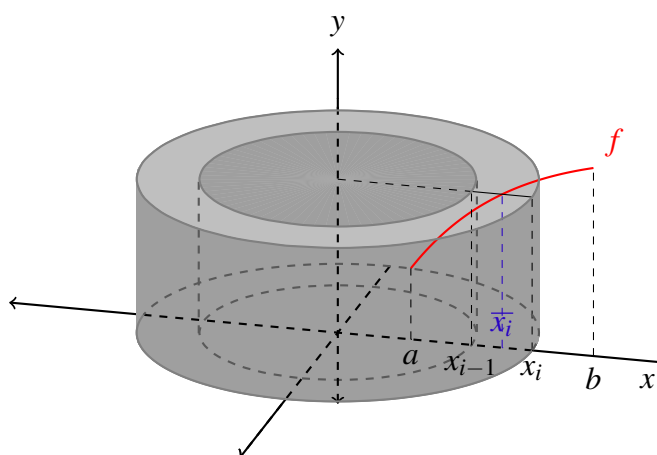
**Gráfico 3.3** – Retângulo formado limitado em  $x$  por  $[x_{i-1}, x_i]$  e em  $y$  por  $f(\bar{x}_i)$ .



**Fonte:** Elaboração própria.

Ao revolucionar esse retângulo em torno do eixo  $y$ , obtemos um cilindro vazado por outro cilindro interno, como ilustra o Gráfico 3.4 e, a partir daqui, começamos o desenvolvimento. Chamaremos esse cilindro vazado de casca, e, ao preencher todo o intervalo da função com essas cascas, deixando a espessura da casca o mais fino quanto quisermos, mais nos aproximaremos do real formato do sólido gerado no Gráfico 3.2 e, ao calcularmos a soma dos volumes dessas cascas, mais nos aproximaremos do volume real do sólido inicial.

**Gráfico 3.4** – Casca da função  $f$  revolucionada em torno do eixo  $y$ .



**Fonte:** Elaboração própria.

<sup>1</sup> Vale ressaltar que a escolha de  $\bar{x}_i$  de forma que ele seja ponto médio do subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  foi definida para que os cálculos sejam facilitados no desenvolvimento da equação, não sendo obrigatório, em outros casos, que esse ponto seja ponto médio no intervalo definido.

Para calcular o volume de uma casca, podemos subtrair o volume do cilindro externo pelo volume do cilindro interno:

$$V_c = V_{ce} - V_{ci}.$$

Aqui, devemos relembrar a equação para o cálculo do volume de um cilindro. Por Dolce e Pompeo (2013, p. 212), podemos afirmar que o volume de um cilindro qualquer pode ser calculado por

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h, \quad (3.1)$$

onde  $r$  é o raio da base do cilindro e  $h$  a sua altura.

Denotaremos como  $V_c$  o volume da casca que queremos calcular,  $V_{ce}$  e  $V_{ci}$  como os volumes dos cilindros externo e interno respectivamente, seus raios como  $R$  e  $r$ , e a altura por  $h$ . Dessa forma, pela Equação 3.1, temos

$$V_c = \pi \cdot R^2 \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Colocando  $\pi \cdot h$  em evidência

$$V_c = \pi \cdot h(R^2 - r^2).$$

Note que  $R^2 - r^2$  é um produto notável, o produto da soma pela diferença de dois termos, assim, podemos fazer

$$V_c = \pi \cdot h(R + r)(R - r).$$

Multiplicando o segundo membro da equação por  $1 = \frac{2}{2}$ ,

$$V_c = \pi \cdot h(R + r)(R - r) \cdot \frac{2}{2} \Rightarrow$$

$$V_c = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \frac{(R + r)}{2} \cdot (R - r). \quad (3.2)$$

A partir daqui, é válido algumas observações. Note que  $R$  é a distância da origem até  $x_i$ ,  $r$  é a distância da origem até  $x_{i-1}$  e  $h$  é a distância da origem até  $f(\bar{x}_i)$ . Daí,

$$R = x_i - 0 \Rightarrow R = x_i;$$

$$r = x_{i-1} - 0 \Rightarrow r = x_{i-1};$$

$$h = f(\bar{x}_i) - 0 \Rightarrow h = f(\bar{x}_i).$$

Assim, a Equação 3.2, pode ser escrita na forma

$$V_c = 2 \cdot \pi \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \frac{(x_i + x_{i-1})}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}). \quad (3.3)$$

Perceba, também, que

$$\frac{(x_i + x_{i-1})}{2} = \bar{x}_i$$

nos dá o ponto médio  $\bar{x}_i$  do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  e que  $x_i - x_{i-1}$  é a variação entre  $x_{i-1}$  e  $x_i$ , assim podemos escrever

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_{i-1,i}.$$

Para facilitar e padronizar a espessura das cascas, é interessante que escolhamos os valores para  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de forma que

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1},$$

com

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i = b.$$

Assim,  $\Delta x_{0,1} = \Delta x_{1,2} = \dots = \Delta x_{n-1,n} = \Delta x$ . Logo, reescrevendo a Equação 3.3, temos

$$V_c = 2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x. \quad (3.4)$$

A Equação 3.4 calcula o volume da casca de índice  $i$ . Agora, considere que dividimos o sólido de revolução em  $n$  cascas, o somatório do volume de todas as  $n$  cascas nos dá o volume aproximado do sólido. Assim, considerando  $V_s$  o volume do sólido de revolução e  $V_{cn}$  o volume da  $n$ -ésima casca

$$V_s = V_{c1} + V_{c2} + \dots + V_{cn} \Rightarrow$$

$$V_s = 2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) \cdot \Delta x + 2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) \cdot \Delta x + \dots + 2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_n \cdot f(\bar{x}_n) \cdot \Delta x. \quad (3.5)$$

Colocando  $2 \cdot \pi \cdot \Delta x$  em evidência

$$V_s = 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) + \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) + \dots + \bar{x}_n \cdot f(\bar{x}_n)]. \quad (3.6)$$

E é exatamente esta última equação que usaremos para desenvolver as atividades da sequência didática.

### 3.2 Melhorando a Equação 3.6

Apesar da Equação 3.6 já nos fornecer um método interessante para o cálculo do volume de um sólido de revolução, podemos desenvolver ainda mais esse modelo, de modo que o resultado calcule com precisão o volume desejado. Para isso, vamos observar a Equação 3.5 e colocar apenas  $2 \cdot \pi$  em evidência

$$\begin{aligned} V_s &= 2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) \cdot \Delta x + 2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) \cdot \Delta x + \dots + 2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_n \cdot f(\bar{x}_n) \cdot \Delta x \\ &= 2 \cdot \pi \cdot [\bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) \cdot \Delta x + \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) \cdot \Delta x + \dots + \bar{x}_n \cdot f(\bar{x}_n) \cdot \Delta x]. \end{aligned}$$

Observe que a expressão dentro dos colchetes é um somatório de  $n$  termos, assim, podemos escrever

$$V_s = 2 \cdot \pi \cdot \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x. \quad (3.7)$$

A expressão  $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$  é uma soma de Riemann e o limite dessa soma quando  $n$  tende a infinito existe pois a função  $f$  é contínua no intervalo  $[a, b]$ . Esse limite é a integral

$$\int_a^b xf(x) dx.$$

Tal definição e prova podem ser encontrados em Guidorizzi (2001, p. 299), fica à curiosidade do leitor a consulta para mais aprofundamento da afirmação acima.

Reescrevendo a Equação 3.7, temos

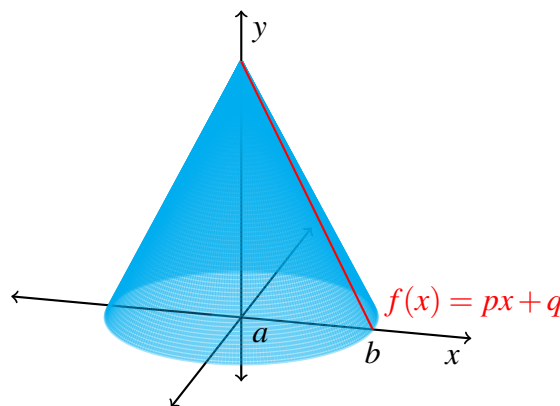
$$V_s = 2\pi \int_a^b xf(x) dx. \quad (3.8)$$

Esta última equação serve para calcularmos o volume de qualquer sólido de revolução, gerado pela revolução de uma função  $f$  contínua no intervalo  $[a, b]$ , com  $f(x) > 0$  no mesmo intervalo, em torno do eixo  $y$ .

### 3.3 O volume do cone

A partir da Equação 3.8 podemos calcular também o volume de alguns sólidos conhecidos, adaptando uma determinada função para que gire em torno do eixo  $y$ . Por exemplo, vamos eleger uma função afim  $f(x) = px + q$  decrescente como modelo, limitando ela ao intervalo  $[a, b]$  em  $x$ , onde  $a = 0$  e  $b$  é raiz da função, ao revolucioná-la em torno do eixo  $y$  formamos um cone, como mostra o Gráfico 3.5:

**Gráfico 3.5** – Cone gerado pela revolução da função  $f$  em torno do eixo  $y$ .



**Fonte:** Elaboração própria.

Agora, usando a Equação 3.8, podemos calcular o volume do sólido do Gráfico 3.5. Como  $f(x) = px + q$ , então

$$\begin{aligned} V_s &= 2\pi \int_a^b xf(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^b x(px + q) dx. \end{aligned}$$

Distribuindo  $x$  para os termos dentro dos parêntesis:

$$V_s = 2\pi \int_0^b px^2 + qx dx.$$

A partir desse ponto, podemos integrar a função resultante no intervalo da integral definida:

$$\begin{aligned} V_s &= 2\pi \left( \frac{px^{2+1}}{2+1} + \frac{qx^{1+1}}{1+1} \right) \Big|_0^b \\ &= 2\pi \left( \frac{px^3}{3} + \frac{qx^2}{2} \right) \Big|_0^b. \end{aligned}$$

Agora, substituindo os limites de integração e simplificando a expressão, temos:

$$\begin{aligned} V_s &= 2\pi \left[ \left( \frac{p \cdot b^3}{3} + \frac{q \cdot b^2}{2} \right) - \left( \frac{p \cdot 0^3}{3} + \frac{q \cdot 0^2}{2} \right) \right] \Rightarrow \\ V_s &= 2\pi \left[ \frac{p \cdot b^3}{3} + \frac{q \cdot b^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aqui, vale algumas observações sobre a função  $f(x)$ , como ela gera um cone ao ser revolucionada no eixo  $y$ , podemos comparar alguns elementos do cone com alguns elementos e coeficientes da equação. Note que  $f(0)$  nos dá o ponto em que  $f$  toca o eixo  $y$ , que também é a altura  $h$  do cone gerado, então

$$f(0) = p \cdot 0 + q \Rightarrow f(0) = h = q.$$

Daí, também podemos isolar o coeficiente  $p$  em termos de elementos do cone. Observe que  $x = b \Rightarrow f(x) = 0$  e que o raio  $r$  do cone é a distância de  $b$  até a origem. Então

$$r = b - 0 \Rightarrow r = b.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} p \cdot b + q &= f(b) \Rightarrow \\ p \cdot r + h &= 0 \Rightarrow \\ p \cdot r &= -h \Rightarrow \\ p &= -\frac{h}{r}. \end{aligned}$$

Substituindo,  $p$ ,  $q$  e  $b$  na Equação 3.9:

$$V_s = 2\pi \left[ \frac{\left(-\frac{h}{r}\right) \cdot r^3}{3} + \frac{h \cdot r^2}{2} \right].$$

A partir daqui, basta desenvolvermos e simplificarmos a expressão:

$$\begin{aligned}
 V_s &= 2\pi \left[ \frac{(-h) \cdot r^2}{3} + \frac{h \cdot r^2}{2} \right] \\
 &= 2\pi \left[ \frac{2 \cdot (-h) \cdot r^2 + 3 \cdot h \cdot r^2}{6} \right] \\
 &= 2\pi \left[ \frac{-2hr^2 + 3hr^2}{2 \cdot 3} \right] \\
 V_s &= \frac{\pi hr^2}{3}. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Que, por Dolce e Pompeo (2013, p. 230), podemos afirmar ser a fórmula para o cálculo do volume de um cone de raio  $r$  e altura  $h$ .

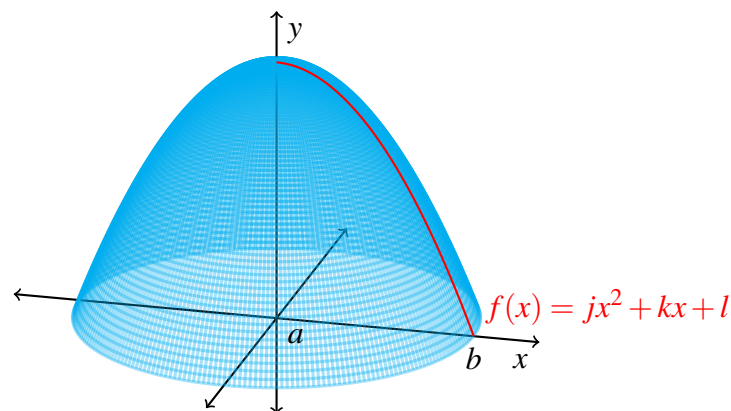
Tal demonstração serve como base para que o leitor entenda o processo e os passos de adaptação das funções para o cálculo do volume de um sólido de revolução pelo método das cascas cilíndricas.

Usaremos o cone como o nosso primeiro objeto de estudo no Capítulo 5, com ele será feito o estudo das cascas com 4, 8 e 16 camadas, por isso a necessidade de entender como se calcula o seu volume.

### 3.4 O volume de um parabolóide

Os passos para se calcular o volume de um parabolóide de raio  $r$  e altura  $h$ , que é a revolução de uma parábola, de concavidade voltada para baixo e em que o vértice está no eixo  $y$ , de função  $f(x) = jx^2 + kx + l$  em torno do eixo  $y$ , ilustrado no Gráfico 3.6, são análogos aos já feitos para calcular o volume do cone.

**Gráfico 3.6** – Parabolóide gerado pela revolução da função  $f$  em torno do eixo  $y$ .



**Fonte:** Elaboração própria.

Usando novamente a Equação 3.8, podemos calcular o volume do parabolóide pela

integral:

$$V_s = 2\pi \int_0^b x(jx^2 + kx + l) dx.$$

Desenvolvendo essa equação, e calculando a integral no intervalo  $[a, b]$ , encontramos

$$V_s = 2\pi \left( \frac{jb^4}{4} + \frac{kb^3}{3} + \frac{lb^2}{2} \right).$$

Observe que o raio  $r$  desse parabolóide é a distância de  $b$  até a origem, logo

$$r = b - 0 \Rightarrow r = b.$$

Assim,

$$V_s = 2\pi \left( \frac{jr^4}{4} + \frac{kr^3}{3} + \frac{lr^2}{2} \right). \quad (3.11)$$

A respeito dos coeficientes  $j$ ,  $k$  e  $l$  da função, temos algumas observações. Observe que o termo independente  $l$  indica onde a função toca o eixo  $y$  e esse ponto coincide com o vértice da parábola, que também é a sua altura. Logo,

$$l = y_v = h.$$

Para encontrar os outros dois coeficiente em termos de  $r$  e  $h$ , basta montarmos o sistema para  $f(-b)$  e  $f(b)$  que são os valores de  $f$  para as raízes da função. Assim,

$$\begin{cases} jb^2 + kb + l = f(b) \\ j(-b)^2 + k(-b) + l = f(-b) \end{cases}.$$

Dadas as observações feitas acima, podemos então desenvolver a última expressão:

$$\begin{cases} jr^2 + kr + h = 0 \\ j(-r)^2 + k(-r) + h = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} jr^2 + kr = -h \\ jr^2 - kr = -h \end{cases}.$$

Pelo método da soma em um sistema de equações, temos:

$$2jr^2 = -2h \Rightarrow j = -\frac{2h}{2r^2} \Rightarrow j = -\frac{h}{r^2}.$$

Substituindo  $j$  na primeira equação do sistema, encontramos

$$\left( -\frac{h}{r^2} \right) r^2 + kr = -h \Rightarrow -h + kr = -h \Rightarrow kr = 0.$$

Como  $r \neq 0$  para que exista o parabolóide, então  $k = 0$ . Encontrados os valores dos coeficientes e substituindo na Equação 3.11, segue:

$$\begin{aligned} V_s &= 2\pi \left[ \frac{\left(-\frac{h}{r^2}\right)r^4}{4} + \frac{0 \cdot r^3}{3} + \frac{hr^2}{2} \right] \\ &= 2\pi \left[ \frac{-hr^4}{4} + \frac{hr^2}{2} \right] \\ &= 2\pi \left[ \frac{-hr^4 + 2hr^2}{4} \right] \\ V_s &= \frac{\pi hr^2}{2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por fim, a Equação 3.12 nos dá o volume de um parabolóide de raio  $r$  e altura  $h$ . Esse sólido é relevante pois podemos usá-lo como exemplo para calcular quantos  $mL$  cabem em uma taça na qual o interior se assemelha a ele, e é o que faremos como atividade no Capítulo 5.

## 4 RECURSOS E MATERIAIS

Este capítulo tem como objetivo apresentar ao leitor a construção de todos os materiais usados como ferramenta para o desenvolvimento das atividades da sequência didática exibida no próximo capítulo.

Os materiais são de total autoria do autor desta dissertação. Para a sua construção foram utilizadas as equações e definições do Capítulo 3, junto de definições dos livros Iezzi e Murakami (2013), Iezzi (2013) e Dolce e Pompeo (2013). Os materiais construídos também serão disponibilizados através de links no decorrer do capítulo.

### 4.1 Tabelas do cone e parabolóide

Apesar do material principal utilizado na sequência didática serem os objetos impressos em 3D, outra ferramenta que será apresentada aos alunos no decorrer das aulas são as tabelas para o cálculo do volume dos sólidos estudados. Essas tabelas calculam automaticamente os valores dos raios médios das cascas, a altura de cada casca, o produto  $\bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i)$  também de cada casca, essencial para o desenvolvimento da Equação 3.6, bem como a soma de todos esses produtos e o volume total do sólido estudado.

Neste processo, essa ferramenta é poderosa para fazer com que os alunos possam observar cada um dos elementos da equação e como eles variam dependendo da quantidade de cascas que escolhemos dividir o sólido, pois nas tabelas também poderemos variar a quantidade de cascas que queremos dividir o sólido.

Dois dos elementos que as tabelas nos proporciona também são essenciais para construirmos os sólidos 3D, são eles a espessura e a altura de cada casca. Com elas conseguimos construir cada um dos sólidos de revolução, com a quantidade de cascas que quisermos.

Nas subseções a seguir, temos o passo a passo para a construção das tabelas e a explicação dos elementos que as compõe.

#### 4.1.1 A tabela de construção e cálculo do volume do cone

A seguir, será dado o passo a passo para a construção da tabela que nos dá o cálculo do volume do sólido que se aproxima do cone pelo método das cascas. Os passos aqui desenvolvidos foram executados no Microsoft Office Excel, versão do Office 365. Pode haver algumas variações no programa dependendo da versão utilizada pelo leitor.

Inicialmente, observe a imagem da tabela<sup>1</sup> já com cada célula nomeada (Figura 4.1).

<sup>1</sup> Nas imagens onde aparece “Intervalo de rotação”, entenda como “Intervalo de revolução”.

**Figura 4.1** – Tabela Excel para o cálculo do volume do cone.

Tabela para a construção do sólido geométrico (cone) pelo método das cascas cilíndricas							
Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Valor (a) da função afim		Casca 1					
Valor (b) da função afim		Casca 2					
Valor do raio inicial		Casca 3					
Valor do raio final		Casca 4					
Intervalo de rotação		Casca 5					
Quantidade de cascas		Casca 6					
Espessura da casca		Casca 7					
		Casca 8					
		Casca 9					
		Casca 10					
		Casca 11					
		Casca 12					
		Casca 13					
		Casca 14					
		Casca 15					
		Casca 16					
		Casca 17					
		Casca 18					
		Casca 19					
		Casca 20					
						Soma total:	
						Volume do sólido	

Fonte: Registrado pelo autor.

Algumas coisas devem ser observadas nessa tabela. Inicialmente, observe que ela tem uma parte para a configuração da função e também do sólido que será gerado. Nela, é possível alterar os coeficientes da função, bem como o início e o fim do intervalo que define os raios inicial e final do sólido, que representam o intervalo  $[a, b]$  mencionado no Capítulo 3. Agora, observando a Equação 3.6

$$V_s = 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) + \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) + \dots + \bar{x}_n \cdot f(\bar{x}_n)]$$

note, junto da Figura 4.1, que temos uma célula para definir o módulo do intervalo de revolução, esse valor servirá para calcularmos, junto da quantidade de cascas, a espessura de cada casca do sólido ( $\Delta x$ , na Equação). Já na parte que informa os módulos do raio interno, externo, médio ( $\bar{x}_i$ , na equação), altura da casca ( $f(\bar{x}_i)$ , na equação) e o produto do raio médio pela altura da casca ( $\bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i)$ , na equação), são plotados automaticamente por fórmulas que serão definidas no decorrer dessa subseção. Assim, cada um desses elementos nos dá uma parte calculada da Equação 3.6, assim basta usarmos esses elementos para calcular o valor do sólido.

Seguindo agora para a configuração de cada célula da tabela, vamos começar modificando as células da parte “configuração do sólido”.

Definimos inicialmente os valores (a), célula C5, e (b), célula C6, da função que queremos estudar, considerando que essa tabela trabalha com funções afim da forma  $f(x) = ax + b$ . Esses valores devem ser modificados manualmente (Figura 4.2).

**Figura 4.2** – Valores (a) e (b) da função afim estudada.

	A	B	C
1			
2		Tabela	
3			
4		Configuração do sólido	Valor
5		Valor (a) da função afim	-1,5
6		Valor (b) da função afim	6
7		Valor do raio inicial	

Fonte: Registrado pelo autor.

Observe que os valores de (a) e (b) foram modificados para -1,5 e 6 respectivamente. Esses números serão os que formarão a função que estudaremos no Capítulo 5.

Os módulos do raio inicial, célula C7, e final, célula C8, do sólido também devem ser inseridos manualmente digitando-os nas respectivas células (Figura 4.3).

**Figura 4.3** – Valores dos raios inicial e final da função afim estudada.

	A	B	C
1			
2		Tabela	
3			
4		Configuração do sólido	Valor
5		Valor (a) da função afim	-1,5
6		Valor (b) da função afim	6
7		Valor do raio inicial	0
8		Valor do raio final	4
9		Intervalo de rotação	

Fonte: Registrado pelo autor.

Os valores 0 e 4 para o raios inicial e final, respectivamente, também obedecem ao cone que estudaremos no Capítulo 5.

Agora, observe a Figura 4.4.

**Figura 4.4** – Características das cascas do sólido.

	A	B	C
1			
2		Tabela	
3			
4		Configuração do sólido	Valor
5		Valor (a) da função afim	-1,5
6		Valor (b) da função afim	6
7		Valor do raio inicial	0
8		Valor do raio final	4
9		Intervalo de rotação	4
10		Quantidade de cascas	20
11		Espessura da casca	0,2

(a) Quantidade de cascas.

(b) Intervalo de revolução.

(c) Espessura da casca.

Fonte: Registrado pelo autor.

Observe as três células marcadas na Figura 4.4a, com elas temos algumas informações que definem o formato do nosso sólido. A Primeira delas, marcada de vermelho (célula C9), nos diz o módulo do intervalo no qual o sólido se forma ao revolucionar em torno do eixo  $x$ , que é

definido pelo comando “=C8-C7” marcado de vermelho na Figura 4.4b, ele calcula a distância entre o raio final e inicial do sólido. A segunda, marcada de azul (célula C10), nos diz em quantas cascas queremos dividir o sólido, esse valor é colocado manualmente e, para esta tabela, varia de 1 a 20. A terceira, marcada de verde (célula C11), nos dá a espessura da casca ( $\Delta x$ ), que é um dos elementos mais importantes no cálculo do volume do sólido. Na tabela, ela é definida pelo comando “=C9/C10” marcado de vermelho na Figura 4.4c, ou seja, ele faz uma divisão do intervalo em  $x$  do sólido pela quantidade de cascas e, assim, calcula a espessura das cascas.

Dessa forma, finalizamos a configuração do sólido. Agora, vamos configurar a tabela em si, para que os valores sejam plotados automaticamente quando os dados na tabela de configuração forem colocados.

Iniciamos colocando o valor do raio interno da primeira casca, que será o raio inicial. Para isso, basta configurarmos para a célula F5 “pegar” o valor da célula C7, usando o comando “=C7” em F5, como ilustra a Figura 4.5.

**Figura 4.5 –** Valor do raio interno da primeira casca do sólido.

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	R
Valor (a) da função afim	-1,5	Casca 1	0	
Valor (b) da função afim	6	Casca 2		
Valor do raio inicial	0	Casca 3		

Fonte: Registrado pelo autor.

Após isso, vamos definir o raio externo da primeira casca. Aqui, colocamos uma condicional, para o comando funcionar apenas quando o raio interno da casca for menor que o raio externo, pois, caso contrário, aquela casca não existiria. Com a célula G5 selecionada, digitamos o comando “=SE(F5<C8;F5+C11;0)”, como mostra a Figura 4.6.

**Figura 4.6 –** Valor do raio externo da primeira casca do sólido.

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	R
Valor (a) da função afim	-1,5	Casca 1	0	0,2	
Valor (b) da função afim	6	Casca 2			
Valor do raio inicial	0	Casca 3			
Valor do raio final	4	Casca 4			
Intervalo de rotação	4	Casca 5			
Quantidade de cascas	20	Casca 6			
Espessura da casca	0,2	Casca 7			

Fonte: Registrado pelo autor.

Agora, vamos entender esse comando. No Excel, o comando “SE” é uma regra condicional “se, senão”, que tem a configuração “=SE(teste lógico;[Valor se verdadeiro];[Valor se

falso]”, ou seja, ele faz um teste lógico, que no caso representado na Figura 4.6 é testar se a Célula F5 tem um valor menor que a célula C8, se for verdadeiro, então ele vai imprimir o resultado da soma do valor da célula F5 com C11, ou seja, efetuar a soma do raio interno com a espessura da casca gerando, assim, o valor do raio externo da casca, se for falso, ele imprimirá 0 na célula, pois aquela casca não existirá.

Para raio interno da segunda casca, célula F6, usaremos o comando condicional dado por “=SE(G5<C\$8;G5;0)”, como ilustra a Figura 4.7.

**Figura 4.7** – Valor do raio interno da segunda casca do sólido.

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca
Valor (a) da função afim	-1,5	Casca 1	0
Valor (b) da função afim	6	Casca 2	0,2
Valor do raio inicial	0	Casca 3	
Valor do raio final	4	Casca 4	

Fonte: Registrado pelo autor.

Nesse comando, ele testa se o raio externo da casca anterior é menor que o raio final do sólido, se sim, então ele copia esse valor, pois o raio externo da casca anterior é o raio interno da casca em questão, se não for menor, então ele imprime 0 pois aquela casca não existe.

Para o restante dos raios internos, o comando será similar, sempre testando o valor do raio externo da casca menor, então ele pode ser copiado pra o restante das células. Para isso, basta clicar no canto inferior direito da célula F6 e arrastar até a célula da última casca naquela coluna, como mostra a Figura 4.8.

**Figura 4.8** – Valor dos raios internos das cascas 3 a 20 do sólido.

(a) Canto inferior direito da célula.

Casca	Raio interno da casca
Casca 1	0
Casca 2	0,2
Casca 3	
Casca 4	
Casca 5	
Casca 6	
Casca 7	
Casca 8	
Casca 9	
Casca 10	
Casca 11	
Casca 12	
Casca 13	
Casca 14	
Casca 15	
Casca 16	
Casca 17	
Casca 18	
Casca 19	
Casca 20	

(b) Arrastar até a última célula.

Casca	Raio interno da casca
Casca 1	0
Casca 2	0,2
Casca 3	
Casca 4	
Casca 5	
Casca 6	
Casca 7	
Casca 8	
Casca 9	
Casca 10	
Casca 11	
Casca 12	
Casca 13	
Casca 14	
Casca 15	
Casca 16	
Casca 17	
Casca 18	
Casca 19	
Casca 20	

(c) Cascas com o comando funcionando.

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca
Casca 1	0	0,2
Casca 2	0,2	
Casca 3	0	
Casca 4	0	
Casca 5	0	
Casca 6	0	
Casca 7	0	
Casca 8	0	
Casca 9	0	
Casca 10	0	
Casca 11	0	
Casca 12	0	
Casca 13	0	
Casca 14	0	
Casca 15	0	
Casca 16	0	
Casca 17	0	
Casca 18	0	
Casca 19	0	
Casca 20	0	

Fonte: Registrado pelo autor.

O Excel irá alterar automaticamente as células do comando para que a lógica sempre seja em relação ao raio externo da casca anterior e o raio final do sólido, assim, na casca 2, G5 passa a ser G6 e assim por diante, o único valor que não irá se alterar é G8, pois está com “\$” na escrita, travando o comando para sempre ler o valor dessa célula.

Para o raio externo da segunda casca, usaremos a condicional do raio externo da primeira casca dentro de outra condicional. Além de testar se o raio interno é menor que o raio interno da casca, que é o comando “SE(F6<C\$8;F6+C\$11;0)”, também devemos testar se esse raio é maior que o raio inicial, pois se não for, então essa casca será a primeira casca. Assim, o comando para a célula G6 é “=SE(C\$7<F6;SE(F6<C\$8;F6+C\$11;0);0)” (Figura 4.9).

**Figura 4.9** – Valor do raio externo da segunda casca do sólido.

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca
Valor (a) da função afim	-1,5	Casca 1	0	0,2
Valor (b) da função afim	6	Casca 2	0,2	0,4
Valor do raio inicial	0	Casca 3		
Valor do raio final	4	Casca 4		
Intervalo de rotação	4	Casca 5		
Quantidade de cascas	20	Casca 6		
Espessura da casca	0,2	Casca 7		

Fonte: Registrado pelo autor.

Note que o primeiro comando do parágrafo anterior só é testado se F6 for maior que C7, pois ele está no resultado verdadeiro da condição.

Para o restante das cascas externas, basta fazer o procedimento já realizado na Figura 4.8 e copiar os dados para as outras células da coluna (Figura 4.10).

**Figura 4.10** – Valor dos raios externos das cascas 3 a 20 do sólido.

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca
Casca 1	0	0,2
Casca 2	0,2	0,4
Casca 3	0,4	0,6
Casca 4	0,6	0,8
Casca 5	0,8	1
Casca 6	1	1,2
Casca 7	1,2	1,4
Casca 8	1,4	1,6
Casca 9	1,6	1,8
Casca 10	1,8	2
Casca 11	2	2,2
Casca 12	2,2	2,4
Casca 13	2,4	2,6
Casca 14	2,6	2,8
Casca 15	2,8	3
Casca 16	3	3,2
Casca 17	3,2	3,4
Casca 18	3,4	3,6
Casca 19	3,6	3,8
Casca 20	3,8	4

(a) Canto inferior direito da célula.

(b) Arrastar até a última célula.

(c) Cascas com o comando funcionando.

Fonte: Registrado pelo autor.

Para calcular o raio médio da primeira casca ( $\bar{x}_1$ ), que é o ponto que precisaremos para encontrar a altura daquela casca e que também está presente na Equação 3.6, usaremos o comando “=(F5+G5)/2”, que nos dá a coordenada média em  $x$  dos raios interno e externo casca (Figura 4.11).

**Figura 4.11** – Valor do raio médio da primeira casca do sólido.

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca
Valor (a) da função afim	-1,5	Casca 1	0	0,2	0,10
Valor (b) da função afim	6	Casca 2	0,2	0,4	
Valor do raio inicial	0	Casca 3	0,4	0,6	
Valor do raio final	1	Casca 4	0,6	0,8	

Fonte: Registrado pelo autor.

Para calcular os outros raios médios basta repetir os passos das Figuras 4.8 e 4.10. Esse passo se repetirá para a altura e também para o produto entre o raio médio e altura da casca.

No calculo da altura da casca 1 ( $f(\bar{x}_1)$ ), devemos usar uma condicional para saber a existência da casca. Usaremos o comando “=SE(H5>0;(C\$5\*H5)+C\$6;0)”. Esse comando testa se existe um raio médio, existindo e ele calcula a altura dessa casca, substituindo o raio médio na equação da função estudada, por isso são usadas as células C5 e C6, pois são os coeficientes da função. Não existindo o raio médio, não existe a altura (Figura 4.12).

**Figura 4.12** – Valor da altura da casca do sólido.

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca
Valor (a) da função afim	-1,5	Casca 1	0	0,2	0,10	5,85
Valor (b) da função afim	6	Casca 2	0,2	0,4	0,30	

Fonte: Registrado pelo autor.

Com o raio médio e a altura da casca calculados, podemos calcular o produto  $\bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1)$ . Para isso, usamos na célula J5 o comando “=H5\*I5” (Figura 4.13).

**Figura 4.13** – Valor do produto entre o raio médio e a altura da casca.

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Valor (a) da função afim	-1,5	Casca 1	0	0,2	0,10	5,85	0,59
Valor (b) da função afim	6	Casca 2	0,2	0,4	0,30	5,55	

Fonte: Registrado pelo autor.

Com todos os elementos da Equação 3.6, podemos calcular a soma  $\bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) + \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) + \dots + \bar{x}_{20} \cdot f(\bar{x}_{20})$  e depois o volume do sólido.

Para calcular a soma dos produtos, na célula J25, basta usarmos o comando “SOMA” do excel, na forma “=SOMA(J5:J24)”. Os dois pontos fazem com que o comando some todas as células de J5 até J24 (Figura 4.14).

**Figura 4.14** – Soma dos produtos da primeira até a vigésima casca.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data tables:

Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função afim	-1,5
Valor (b) da função afim	6
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	4
Intervalo de rotação	4
Quantidade de cascas	20
Espessura da casca	0,2

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0,2	0,10	5,85	0,59
Casca 2	0,2	0,4	0,30	5,55	1,67
Casca 3	0,4	0,6	0,50	5,25	2,63
Casca 4	0,6	0,8	0,70	4,95	3,47
Casca 5	0,8	1	0,90	4,65	4,19
Casca 6	1	1,2	1,10	4,35	4,79
Casca 7	1,2	1,4	1,30	4,05	5,27
Casca 8	1,4	1,6	1,50	3,75	5,63
Casca 9	1,6	1,8	1,70	3,45	5,87
Casca 10	1,8	2	1,90	3,15	5,99
Casca 11	2	2,2	2,10	2,85	5,99
Casca 12	2,2	2,4	2,30	2,55	5,87
Casca 13	2,4	2,6	2,50	2,25	5,63
Casca 14	2,6	2,8	2,70	1,95	5,27
Casca 15	2,8	3	2,90	1,65	4,79
Casca 16	3	3,2	3,10	1,35	4,19
Casca 17	3,2	3,4	3,30	1,05	3,47
Casca 18	3,4	3,6	3,50	0,75	2,62
Casca 19	3,6	3,8	3,70	0,45	1,66
Casca 20	3,8	4	3,90	0,15	0,58
Soma total:					80,10

Fonte: Registrado pelo autor.

Por fim, usamos “=2\*PI()\*C11\*J25”, na célula J26, para calcular o volume do sólido (Figura 4.15).

**Figura 4.15** – Volume do sólido com 20 cascas.

The screenshot shows the same Excel spreadsheet as Figure 4.14, but with the following changes:

- The formula bar for cell J26 contains the formula: `=2*PI()*C11*J25`
- The value in cell J26 is 100,66.

Fonte: Registrado pelo autor.

Com esses passos, conseguimos calcular o volume do sólido de cascas que se aproxima do cone, com até “20 cascas de aproximação”. Além disso, essa tabela também nos dá a altura e espessura de cada casca o sólido, isso nos permite construir o sólido com as cascas no aplicativo Fusion 360, que ainda faremos neste capítulo.

#### 4.1.2 A tabela de construção e cálculo do volume do parabolóide

Para o parabolóide, a tabela não tem muitas mudanças, apenas alguns elementos e células mudam de posição, pois o parabolóide é gerado por uma função quadrática da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ou seja, tem três coeficientes. Com isso, a tabela de configuração do sólido ganha mais uma célula. Observe pela Figura 4.16 como fica a tabela com os três coeficientes.

**Figura 4.16** – Coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da função quadrática.

	A	B	C
1			
2	Tabela par		
3			
4	Configuração do sólido		Valor
5	Valor (a) da função quadrática		-0,25
6	Valor (b) da função quadrática		0
7	Valor (c) da função quadrática		6,25
8	Valor do raio inicial		0

Fonte: Registrado pelo autor.

Observe que  $a = -0,25$ ,  $b = 0$  e  $c = 6,25$ . Esses valores foram colocados propositalmente pois a parábola formada pela função com esses coeficientes é a parábola que usaremos para formar a parte interna da taça de bebida, que usaremos como ferramenta no Capítulo 5.

Essa taça tem  $5\text{cm}$  como raio de sua borda, então os raios inicial e final do parabolóide são 0 e 5 respectivamente (Figura 4.17).

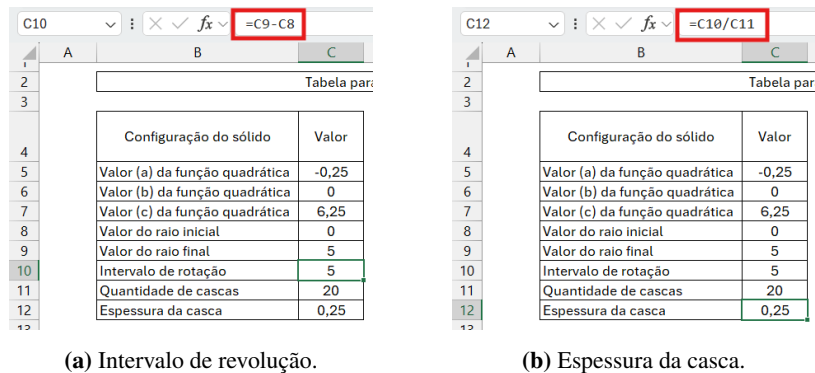
**Figura 4.17** – Raios inicial e final do sólido.

	A	B	C
1			
2	Tabela par		
3			
4	Configuração do sólido		Valor
5	Valor (a) da função quadrática		-0,25
6	Valor (b) da função quadrática		0
7	Valor (c) da função quadrática		6,25
8	Valor do raio inicial		0
9	Valor do raio final		5
10	Intervalo de rotação		5

Fonte: Registrado pelo autor.

Da mesma forma que foi feito para o cálculo do intervalo de revolução e espessura das cascas sólido inspirado no cone, aqui vamos subtrair o raio final pelo inicial, usando “=C9-C8”, para calcular o intervalo de revolução do sólido e “=C10/C11” para calcular a espessura de cada casca. A quantidade de cascas deve ser colocada manualmente. (Figura 4.18).

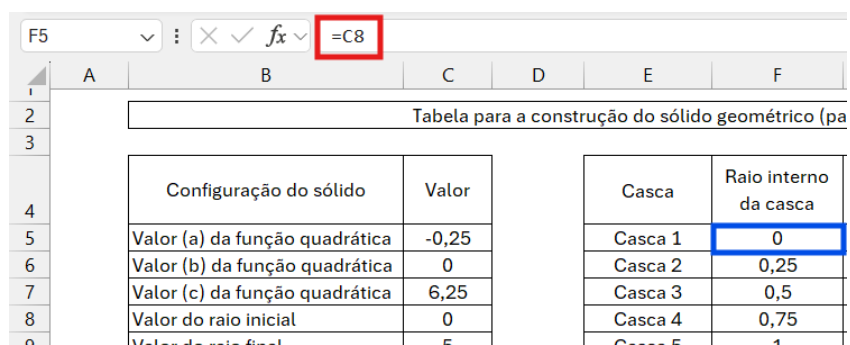
**Figura 4.18** – Características das cascas do sólido.



Fonte: Registrado pelo autor.

Em relação aos raios de cada casca, também tivemos algumas alterações por conta da mudança de posicionamento nas células de configuração do sólido. Usaremos “=C8” para indicar o raio interno da primeira casca (Figura 4.19).

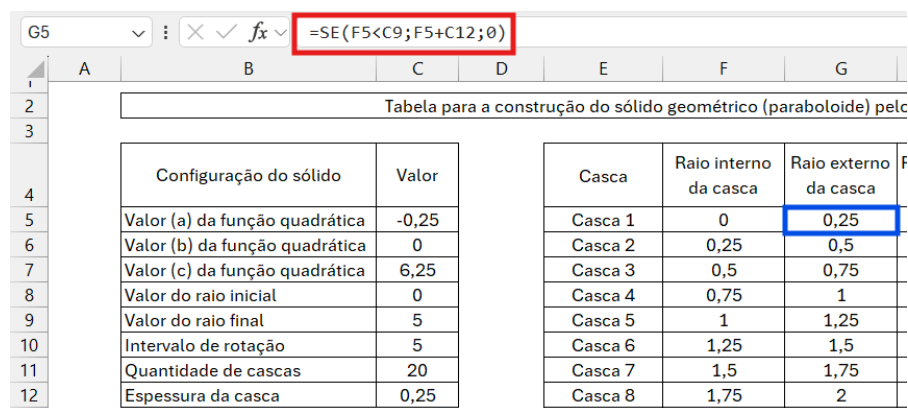
**Figura 4.19** – Raio interno da primeira casca.



Fonte: Registrado pelo autor.

Para definir o raio externo da primeira casca, usaremos “=SE(F5<C9;F5+C12;0)” (Figura 4.20).

**Figura 4.20** – Raio externo da primeira casca.



Fonte: Registrado pelo autor.

A lógica por trás dessa condicional é a mesma apresentada na definição do raio externo da primeira casca do sólido derivado do cone.

Essa mesma lógica se mantém para definir os comandos para definir o restante dos raios interno e externo das cascas, pondo, respectivamente, as fórmulas “=SE(G5<C\$9;G5;0)” e “=SE(C\$8<F6;SE(F6<C\$9;F6+C\$12;0);0)” para a segunda casca e arrastando esses comandos para o restante das cascas (Figura 4.21).

**Figura 4.21 – Raios interno e externo das cascas do sólido.**

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca
Valor (a) da função quadrática	-0,25	Casca 1	0	0,25
Valor (b) da função quadrática	0	Casca 2	0,25	0,5
Valor (c) da função quadrática	6,25	Casca 3	0,5	0,75
Valor do raio inicial	0	Casca 4	0,75	1
Valor do raio final	5	Casca 5	1	1,25
Intervalo de rotação	5	Casca 6	1,25	1,5

(a) Comando para o raio interno.

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca
Valor (a) da função quadrática	-0,25	Casca 1	0	0,25
Valor (b) da função quadrática	0	Casca 2	0,25	0,5
Valor (c) da função quadrática	6,25	Casca 3	0,5	0,75
Valor do raio inicial	0	Casca 4	0,75	1
Valor do raio final	5	Casca 5	1	1,25
Intervalo de rotação	5	Casca 6	1,25	1,5
Quantidade de cascas	20	Casca 7	1,5	1,75
Espessura da casca	0,25	Casca 8	1,75	2

(b) Comando para o raio externo.

Fonte: Registrado pelo autor.

Para o cálculo do raio médio, o comando não se altera em nada comparado ao do sólido anterior, sendo “=(F5+G5)/2” (Figura 4.22).

**Figura 4.22 – Raio médio da primeira casca.**

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca
Valor (a) da função quadrática	-0,25	Casca 1	0	0,25	0,13
Valor (b) da função quadrática	0	Casca 2	0,25	0,5	0,38
Valor (c) da função quadrática	6,25	Casca 3	0,5	0,75	0,63
Valor do raio inicial	0	Casca 4	0,75	1	0,88

Fonte: Registrado pelo autor.

Para o restante das cascas, basta arrastar o comando para as outras células, como já feito com os outros comandos, isso se repetirá nas células da altura das cascas e do produto entre raio médio e altura das cascas.

A maior mudança é para o cálculo da altura da casca. Aqui, usamos o comando “=SE(H5>0;(C\$5\*(H5^2))+(C\$6\*H5)+C\$7;0)”. Observe que o teste lógico da condicional “SE” se mantém, o que muda é a fórmula para no caso quando é verdadeiro, nele, é usado o modelo da função quadrática, já que aqui estamos formando um sólido baseado no parabolóide. Assim, temos os coeficientes C5, C6 e C7 sendo usados para formar a equação, com o raio médio da casca sendo substituído no lugar de  $x$  (Figura 4.23).

Figura 4.23 – Altura das cascas do sólido.

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca
Valor (a) da função quadrática	-0,25	Casca 1	0	0,25	0,13	6,25
Valor (b) da função quadrática	0	Casca 2	0,25	0,5	0,38	6,21
Valor (c) da função quadrática	6,25	Casca 3	0,5	0,75	0,63	6,15
Valor do raio inicial	0	Casca 4	0,75	1	0,88	6,06

Fonte: Registrado pelo autor.

Para o produto entre o raio médio e a altura da casca, o comando não sofre alterações, continuando “=H5\*I5” (Figura 4.24).

Figura 4.24 – Valor do produto entre o raio médio e a altura da casca.

Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Valor (a) da função quadrática	-0,25	Casca 1	0	0,25	0,13	6,25	0,78
Valor (b) da função quadrática	0	Casca 2	0,25	0,5	0,38	6,21	2,33
Valor (c) da função quadrática	6,25	Casca 3	0,5	0,75	0,63	6,15	3,85
Valor do raio inicial	0	Casca 4	0,75	1	0,88	6,06	5,33

Fonte: Registrado pelo autor.

Com os todos os elementos definidos, podemos calcular a soma dos produtos e o volume do sólido. Para isso, somamos os produtos do raio médio com a altura de todas as cascas, usando “=SOMA(J5:J24)” e, por fim, calculamos o volume do sólido usando “=2\*PI()\*C12\*J25” (Figura 4.25).

**Figura 4.25 –** Cálculo do volume do sólido.

Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função quadrática	-0,25
Valor (b) da função quadrática	0
Valor (c) da função quadrática	6,25
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	5
Intervalo de rotação	5
Quantidade de cascas	20
Espessura da casca	0,25

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0,25	0,13	6,25	0,78
Casca 2	0,25	0,5	0,38	6,21	2,33
Casca 3	0,5	0,75	0,63	6,15	3,85
Casca 4	0,75	1	0,88	6,06	5,30
Casca 5	1	1,25	1,13	5,93	6,68
Casca 6	1,25	1,5	1,38	5,78	7,94
Casca 7	1,5	1,75	1,63	5,59	9,08
Casca 8	1,75	2	1,88	5,37	10,07
Casca 9	2	2,25	2,13	5,12	10,88
Casca 10	2,25	2,5	2,38	4,84	11,49
Casca 11	2,5	2,75	2,63	4,53	11,88
Casca 12	2,75	3	2,88	4,18	12,03
Casca 13	3	3,25	3,13	3,81	11,90
Casca 14	3,25	3,5	3,38	3,40	11,48
Casca 15	3,5	3,75	3,63	2,96	10,75
Casca 16	3,75	4	3,88	2,50	9,67
Casca 17	4	4,25	4,13	2,00	8,23
Casca 18	4,25	4,5	4,38	1,46	6,41
Casca 19	4,5	4,75	4,63	0,90	4,17
Casca 20	4,75	5	4,88	0,31	1,50
Soma total:					156,45

(a) Soma dos produtos da primeira até a vigésima casca.

Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função quadrática	-0,25
Valor (b) da função quadrática	0
Valor (c) da função quadrática	6,25
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	5
Intervalo de rotação	5
Quantidade de cascas	20
Espessura da casca	0,25

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0,25	0,13	6,25	0,78
Casca 2	0,25	0,5	0,38	6,21	2,33
Casca 3	0,5	0,75	0,63	6,15	3,85
Casca 4	0,75	1	0,88	6,06	5,30
Casca 5	1	1,25	1,13	5,93	6,68
Casca 6	1,25	1,5	1,38	5,78	7,94
Casca 7	1,5	1,75	1,63	5,59	9,08
Casca 8	1,75	2	1,88	5,37	10,07
Casca 9	2	2,25	2,13	5,12	10,88
Casca 10	2,25	2,5	2,38	4,84	11,49
Casca 11	2,5	2,75	2,63	4,53	11,88
Casca 12	2,75	3	2,88	4,18	12,03
Casca 13	3	3,25	3,13	3,81	11,90
Casca 14	3,25	3,5	3,38	3,40	11,48
Casca 15	3,5	3,75	3,63	2,96	10,75
Casca 16	3,75	4	3,88	2,50	9,67
Casca 17	4	4,25	4,13	2,00	8,23
Casca 18	4,25	4,5	4,38	1,46	6,41
Casca 19	4,5	4,75	4,63	0,90	4,17
Casca 20	4,75	5	4,88	0,31	1,50
Soma total:					156,45
Volume do sólido					245,74

(b) Volume do sólido com 20 cascas.

**Fonte:** Registrado pelo autor.

Com isso, conseguimos o volume do sólido baseado no paraboloide e também a espessura e altura de cada casca, elementos bastante úteis para a construção dos sólidos no aplicativo Fusion 360.

Dessa forma, as tabelas para calcular o volume dos sólidos baseados no cone e no paraboloide estão construídas<sup>2</sup>, podendo variar a quantidade de cascas de uma até vinte. Essa variação se torna uma ferramenta poderosíssima para trabalhar com os alunos, pois eles podem comparar o valor do volume dos sólidos com cada quantidade de casca e, assim, observar para que valor esse volume está se encaminhando.

Como sugestão, o leitor pode tentar construir essa mesma tabela para outros tipos de função, exponencial, logarítmica e até mesmo circular e elíptica, sempre isolando o termo y nas duas últimas para que a equação fique em função de x.

<sup>2</sup> Link para download do arquivo em formato .xls das tabelas. Disponível em: <[https://docs.google.com/spreadsheets/d/1vf26\\_IR2xIuNXsksJyRotHZhGBGbk\\_97/edit?usp=sharing&ouid=109630566864520703501&rtpof=true&sd=true](https://docs.google.com/spreadsheets/d/1vf26_IR2xIuNXsksJyRotHZhGBGbk_97/edit?usp=sharing&ouid=109630566864520703501&rtpof=true&sd=true)>. Acesso em: 08 jul. 2025.

## 4.2 Sólidos de revolução

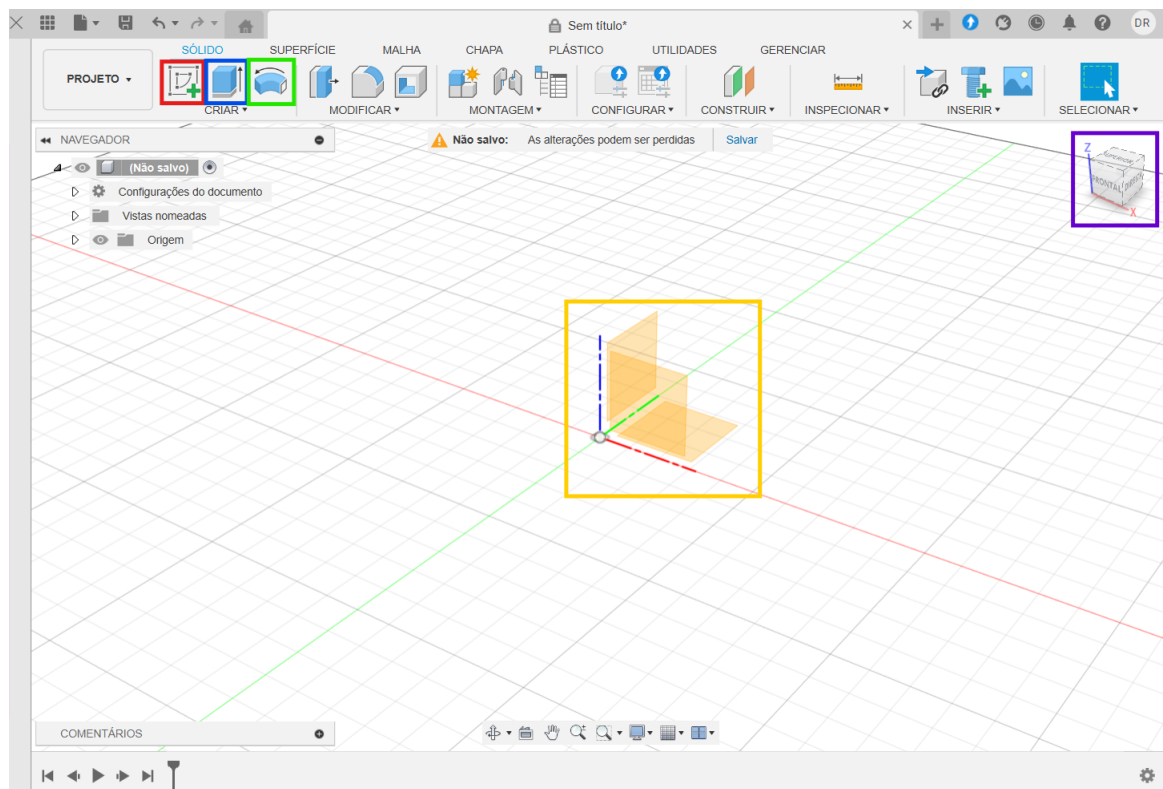
A construção dos sólidos de revolução e da taça que usaremos como ferramentas no próximo capítulo será realizada no programa de computador chamado Fusion 360<sup>3</sup>. Ele é um programa desenvolvido pela Autodesk e é gratuito para uso não comercial. Fica como sugestão ao leitor o aprofundamento sobre o programa e suas ferramentas.

Nesta seção será exposto o passo a passo para a construção dos sólidos mencionados e como deixá-los prontos para colocar em uma fatiadora<sup>4</sup> para a Impressão 3D.

### 4.2.1 Conhecendo o Fusion 360

Com o programa instalado no computador e o usuário tendo feito o cadastro no programa, a página inicial de projetos pode ser observada na Figura 4.26.

Figura 4.26 – Página inicial de um projeto no Fusion 360.



Fonte: Registrado pelo autor.

Algumas funções estão marcadas na imagem, são funções que usaremos com frequência para a construção dos sólidos. Em vermelho, esse botão cria um novo esboço, que será o passo inicial para a construção dos nossos objetos. Em azul, temos o botão de extrusão, como ele

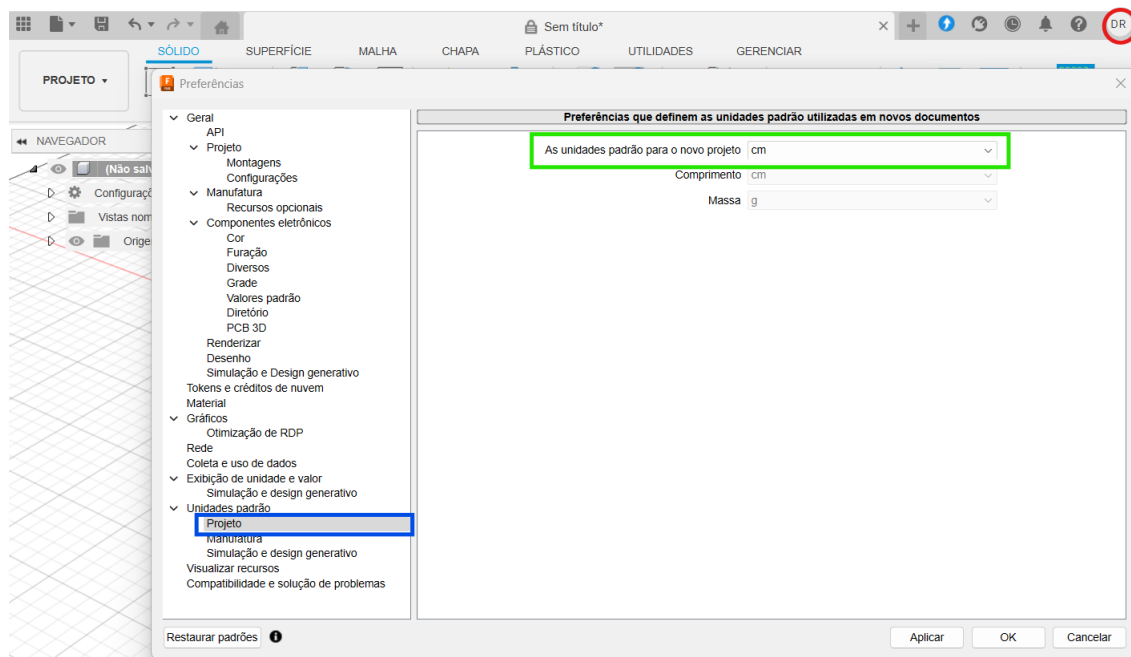
<sup>3</sup> Link para download do programa. Disponível em: <<https://www.autodesk.com/br/products/fusion-360/overview>>. Acesso em: 09 jul. 2025.

<sup>4</sup> Fatiador é o programa onde o arquivo do sólido a ser impresso é configurado de acordo com as especificações da impressora 3D utilizada. Alguns dos fatiadores mais conhecidos são o Ultimaker Cura, PrusaSlicer e OrcaSlicer.

conseguimos elevar um afundar uma superfície. Em Verde, temos o botão de revolução, que é o botão que usaremos para revolucionar as figuras geométricas em torno do eixo  $y$ . Em roxo, esse objeto é capaz de mudarmos a vista que temos do sólido, se uma das faces forem clicadas, então a vista será daquela face do sólido, se for arrastada, então o posicionamento do sólido muda. Em amarelo, temos o centro e os eixos do espaço cartesiano. Trataremos o eixo  $z$  do programa como o nosso eixo  $y$  de revolução.

Antes de iniciar a construção do sólido, para melhor desenvolvimento, a medida padrão do programa deve ser alterada, para isso, basta clicar no botão de “opções de usuário” no canto superior direito do programa (em vermelho) e selecionar “Preferências”, com a janela aberta, busque por “Unidades padrão/ Projeto” (em azul) e altere “As unidades padrão para novos projetos” para “cm” (em verde). Assim todas as medidas serão colocadas em centímetros nos projetos (Figura 4.27).

**Figura 4.27** – Configurando a unidade padrão de medida do Fusion.



**Fonte:** Registrado pelo autor.

Feita a configuração, o aplicativo está pronto para a construção dos sólidos.

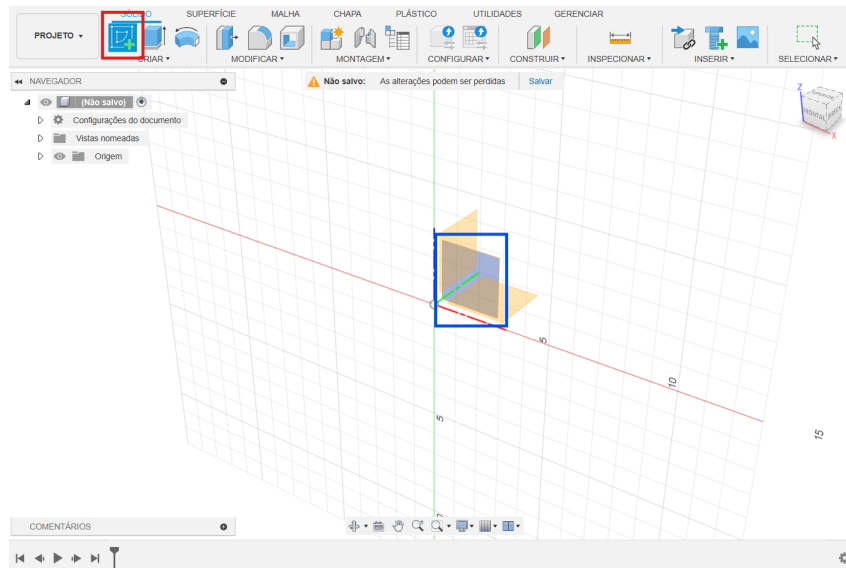
#### 4.2.2 Construção do sólido baseado no cone

O primeiro passo para construir o sólido é iniciar um esboço. Com esse esboço, formamos os retângulos com a espessura e altura das cascas e revolucionamos elas em torno do eixo  $y$ , dessa forma, cada casca é gerada. Para todos os tipos de sólidos, o primeiro passo será o esboço.

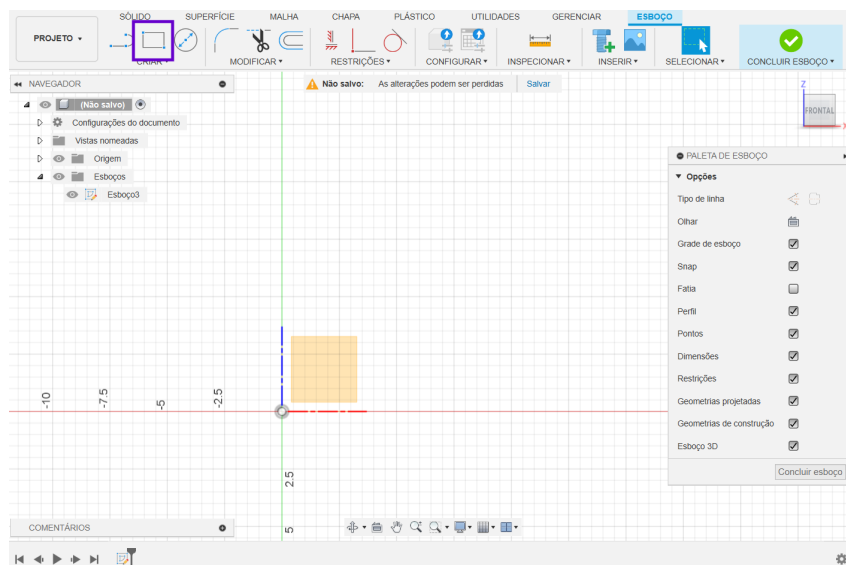
Para configurarmos o esboço, clicamos em “novo esboço” (em vermelho) no canto superior esquerdo da barra de criações do projeto. Em seguida, escolhemos o plano em que

queremos criar o esboço (retângulo azul) (Figura 4.28a), assim, o ambiente está pronto para a construção do sólido de revolução (Figura 4.28b).

**Figura 4.28** – Criando o ambiente do esboço.



**(a)** Selecionando um novo esboço.



**(b)** Ambiente do esboço pronto.

**Fonte:** Registrado pelo autor.

Observe a ferramenta destacada em roxo na Figura 4.28b, ela é a ferramenta para criar retângulos, que é o que usaremos para criar as cascas.

#### 4.2.2.1 Sólido com 4 cascas

Para a construção do sólido de 4 cascas, precisamos de duas informações cruciais, a espessura e a altura de cada casca. Essas informações podem ser consultadas na tabela já

construída no Excel. Basta colocarmos as informações na configuração da tabela e teremos automaticamente as informações que necessitamos. Como já informado, os coeficientes da função são  $a = -1,5$  e  $b = 6$ , os raios inicial e final são 0 e 4, respectivamente, e queremos dividir o sólido em 4 cascas. assim, obtemos as informações que queremos (Figura 4.29).

**Figura 4.29** – Tabela do Excel baseada no cone configurada para 4 cascas.

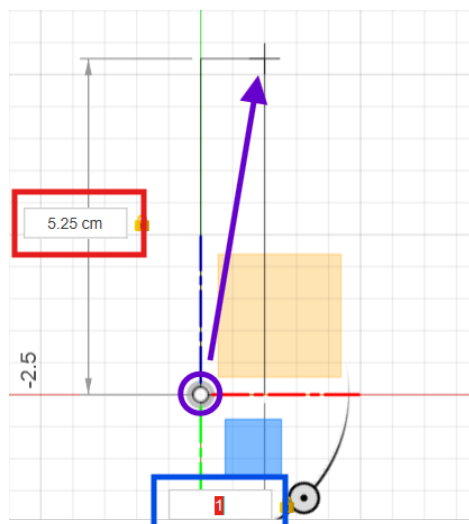
Tabela para a construção do sólido geométrico (cone) pelo método das cascas cilíndricas							
Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	R
Valor (a) da função afim	-1,5	Casca 1	0	1	0,50	5,25	
Valor (b) da função afim	6	Casca 2	1	2	1,50	3,75	
Valor do raio inicial	0	Casca 3	2	3	2,50	2,25	
Valor do raio final	4	Casca 4	3	4	3,50	0,75	
Intervalo de rotação	4	Casca 5	0	0	0,00	0,00	
Quantidade de cascas	4	Casca 6	0	0	0,00	0,00	
Espessura da casca	1	Casca 7	0	0	0,00	0,00	

Fonte: Registrado pelo autor.

Observe na figura que a espessura e as alturas das 4 cascas estão definidas, assim, podemos começar a construção do esboço.

Com o ambiente pronto, selecionamos a ferramenta de retângulo em dois pontos, já destacado na Figura 4.28b. Em seguida, clicamos na origem do gráfico e arrastamos diagonalmente para a direita e para cima (em roxo), com isso, aparecerão dois ambientes para digitarmos a altura (em vermelho) e o comprimento (em azul) daquele retângulo, nesse momento, observando as informações da Figura 4.29, digitamos 5,25 para a altura e 1 para o comprimento, lembrando que o comprimento é a espessura da casca, pressionamos “Enter” no teclado. Desse modo o primeiro retângulo está pronto Figura 4.30.

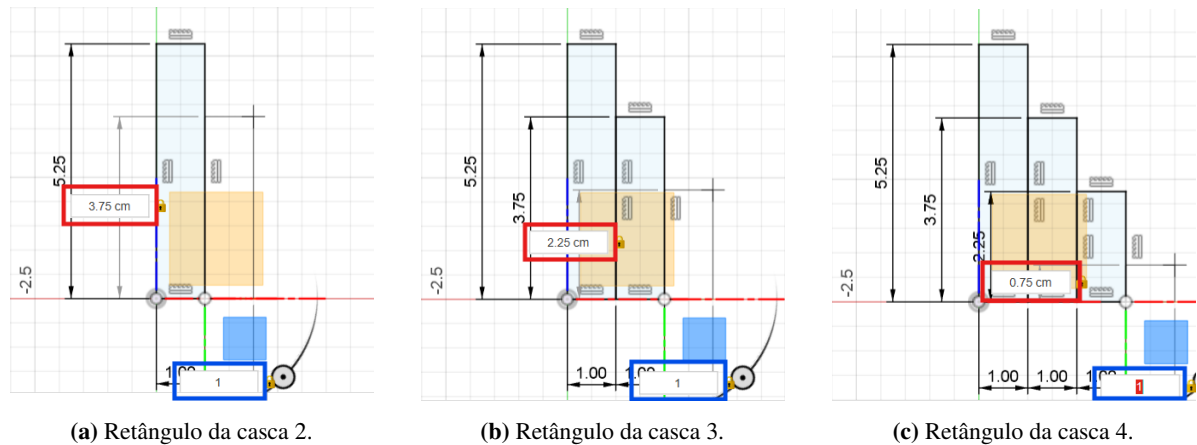
**Figura 4.30** – Primeiro retângulo do esboço do sólido de 4 cascas.



Fonte: Registrado pelo autor.

Para o restante dos retângulos, basta seguir os mesmos passos de construção, sempre observando as informações da tabela. Lembrando de puxar o retângulo a partir o ponto em  $x$  que seja o raio externo da casca anterior (Figura 4.31).

**Figura 4.31** – Esboço do restante dos retângulos do sólido.



(a) Retângulo da casca 2.

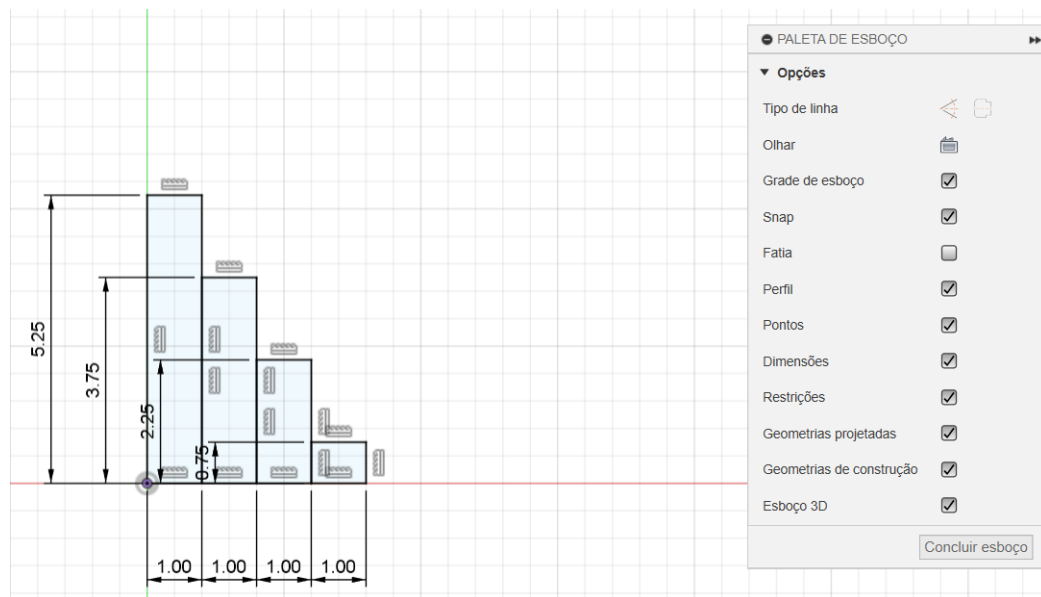
(b) Retângulo da casca 3.

(c) Retângulo da casca 4.

Fonte: Registrado pelo autor.

Com os retângulos finalizados, basta clicar em “Concluir esboço” do lado direito da tela e podemos passar para a revolução das cascas (Figura 4.32).

**Figura 4.32** – Esboço do sólido de 4 cascas finalizado.



Fonte: Registrado pelo autor.

Para criar os sólidos, usaremos a ferramenta de revolução, no canto superior, próximo da ferramenta de esboço, em vermelho (Figura 4.33).

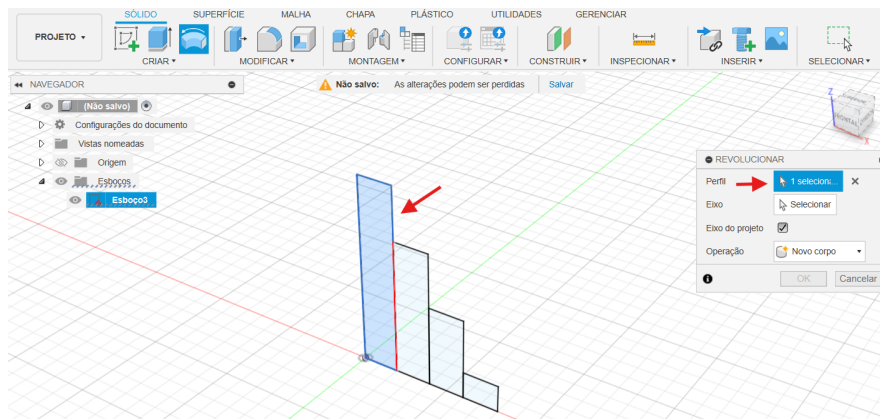
**Figura 4.33** – Botão de revolução do Fusion.



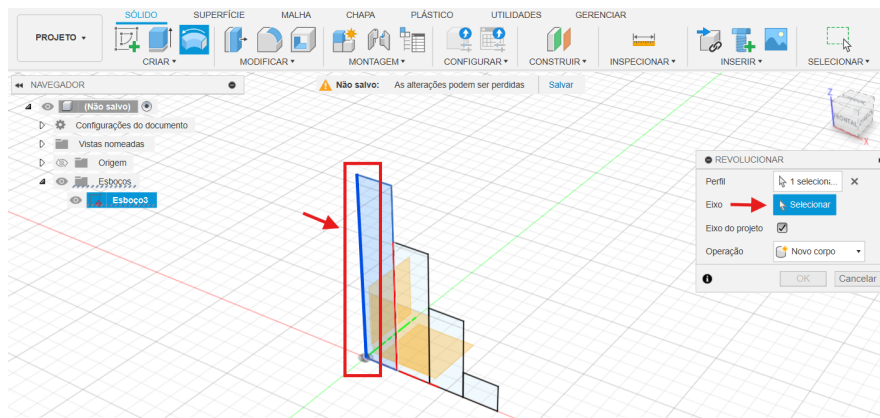
Fonte: Registrado pelo autor.

Com a ferramenta selecionada, e com a opção “Perfil” selecionada no quadro “Revolucionar”, escolhemos primeiro a figura do plano que queremos revolucionar, apontado pela seta na Figura 4.34a. Em seguida, devemos selecionar a opção “Eixo” no quadro “Revolucionar” e selecionar o eixo marcado de azul, na Figura 4.34b. Por fim, devemos Digitar a angulação que queremos revolucionar o sólido, como queremos fazer um sólido fechado, digitamos 360 (Figura 4.34c. Após isso, basta clicar em “OK” que o sólido da primeira casca estará concluído.

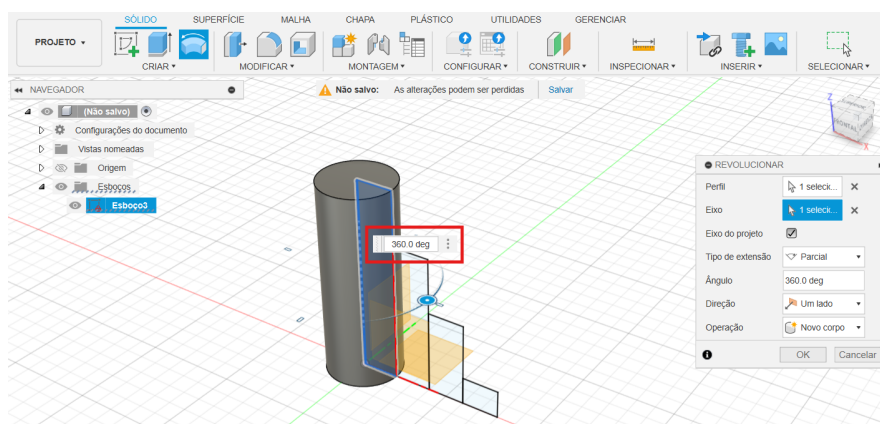
**Figura 4.34 –** Revolução da primeira casca do sólido com 4 cascas.



(a) Selecionar o retângulo.



(b) Selecionar o Eixo.

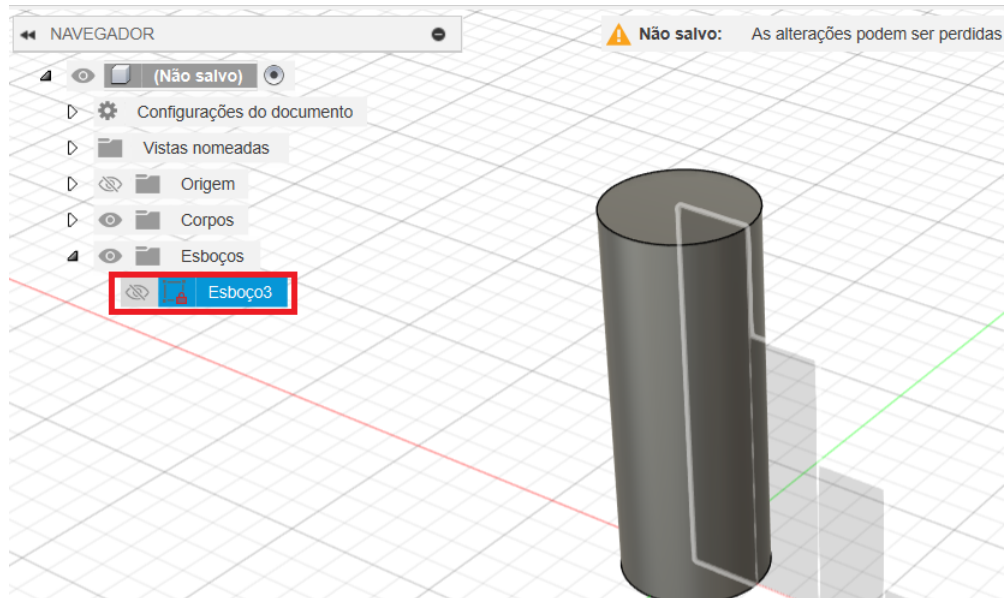


(c) Digitar a angulação de revolução.

**Fonte:** Registrado pelo autor.

Antes de iniciar a construção, observe que o esboço desaparece. Isso acontece pois ele é desabilitado automaticamente. Para habilitá-lo novamente, basta clicar no olho ao lado da opção do esboço na aba “Navegador”, destacado em vermelho na Figura 4.35.

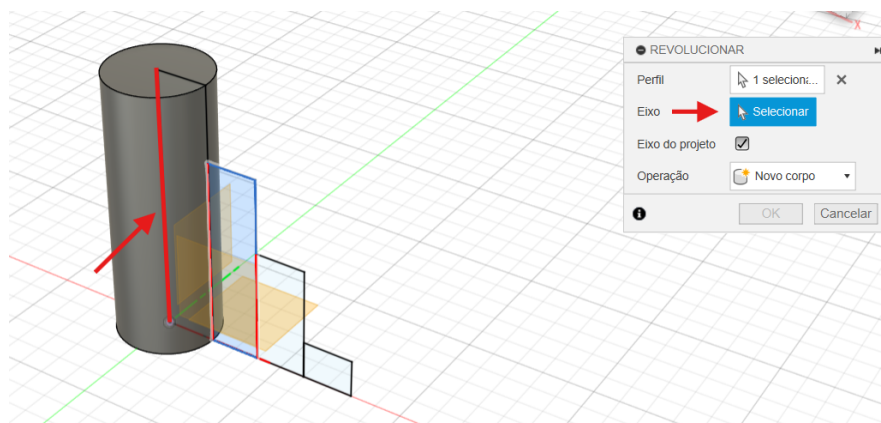
**Figura 4.35** – Botão de revolução do Fusion.



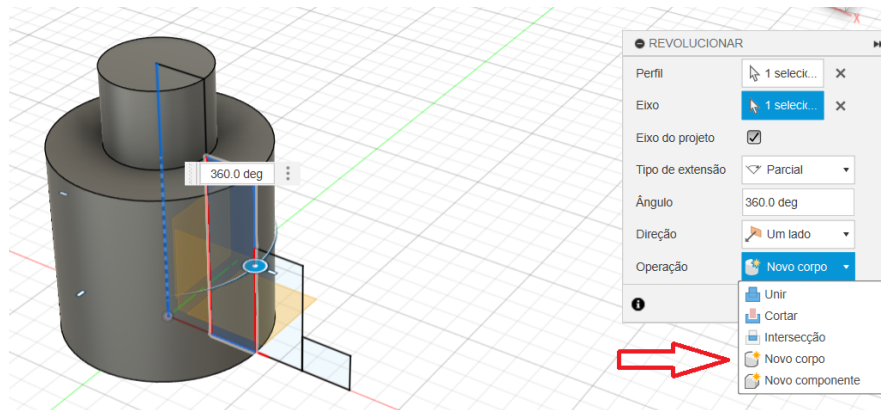
Fonte: Registrado pelo autor.

Os passos para a construção da segunda casca são os mesmos da primeira, mas devemos dar atenção a duas partes na revolução, essas observações valem para a construção de todas as cascas restantes. Primeiro, ao selecionar o eixo de revolução, devemos selecionar o mesmo eixo da primeira casca, como ilustra a Figura 4.36a. Segundo, após a definição da angulação, em “Operação” na caixa “Revolução” devemos selecionar “Novo corpo”, dessa forma, as cascas não se mesclarão entre elas (Figura 4.36b). Após isso, basta clicar em “OK” que o sólido da segunda casca estará concluído.

**Figura 4.36** – Observações na revolução da segunda casca do sólido com 4 cascas.



(a) Selecionar o eixo.

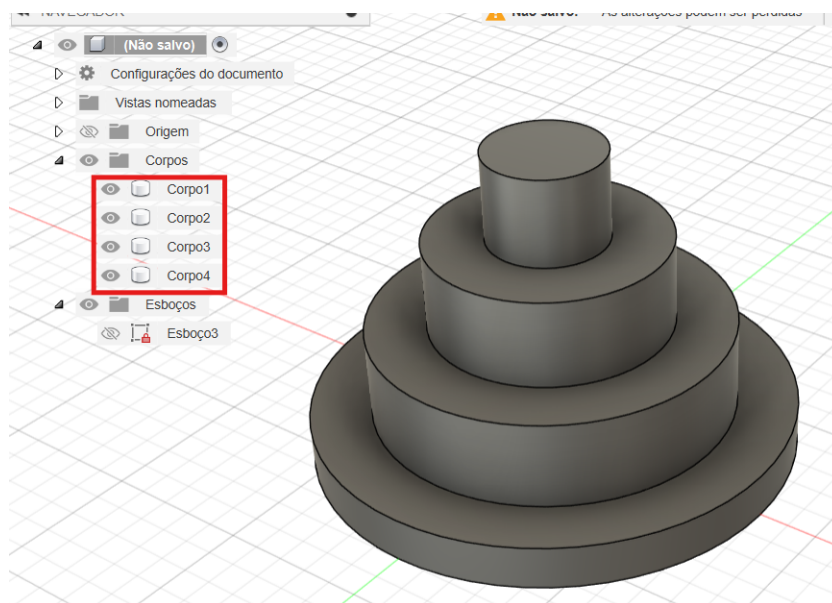


(b) Selecionar o tipo de operação.

Fonte: Registrado pelo autor.

As cascas restantes seguem os mesmos passos. Após finalizado a formação das cascas, o sólido ficará como na Figura 4.37. Observe que cada uma das cascas ficou como um “Corpo” separado.

Figura 4.37 – Sólido de revolução com 4 cascas concluído.



Fonte: Registrado pelo autor.

#### 4.2.2.2 Sólido com 8 e 16 cascas

A forma de construção dos outros dois sólidos, de 8 cascas e 16 cascas, segue exatamente os mesmos passos. Sendo o primeiro a análise da espessura e das alturas das cascas na tabela, o segundo a construção do esboço das cascas no plano no fusion e, por fim, a revolução das cascas em torno do eixo y também feita no fusion.

A Figura 4.38 ilustra os três pontos para o sólido de 8 cascas.

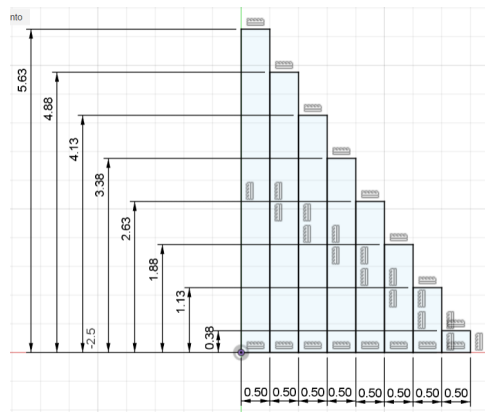
**Figura 4.38** – Construção do sólido de revolução com 8 cascas.

Tabela para a construção do sólido geométrico (cone) pelo método das cascas cilíndricas	
Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função afim	-1,5
Valor (b) da função afim	6
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	4
Intervalo de rotação	4
Quantidade de cascas	8
Espessura da casca	0,5

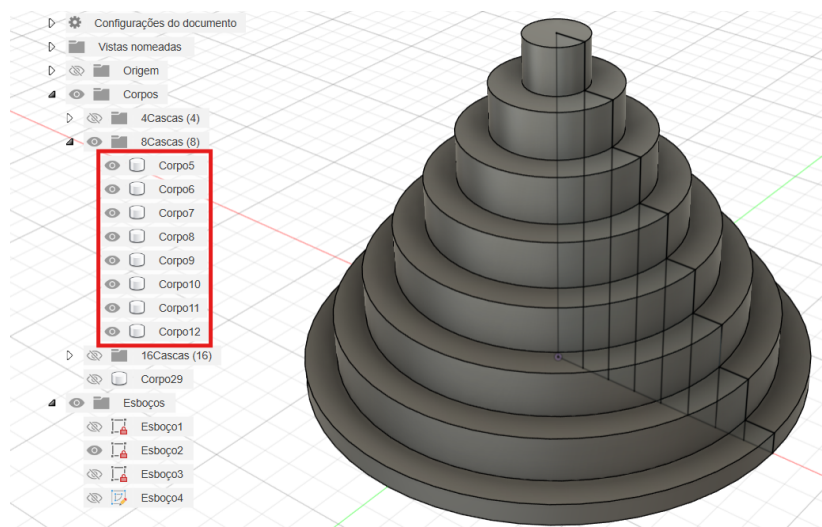
  

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0,5	0,25	5,63	1,41
Casca 2	0,5	1	0,75	4,88	3,66
Casca 3	1	1,5	1,25	4,13	5,16
Casca 4	1,5	2	1,75	3,38	5,91
Casca 5	2	2,5	2,25	2,63	5,91
Casca 6	2,5	3	2,75	1,88	5,16
Casca 7	3	3,5	3,25	1,13	3,66
Casca 8	3,5	4	3,75	0,38	1,41
Casca 9	0	0	0,00	0,00	0,00

(a) Tabela da espessura e altura das cascas para sólido com 8 cascas.



(b) Esboço das cascas do sólido de 8 cascas.



(c) Sólido de revolução com 8 cascas concluído.

**Fonte:** Registrado pelo autor.

Observe que ao fazer a revolução das cascas, foram criados novos “corpos” para cada casca, esse método será útil quando esses sólidos forem preparados para a impressão 3D e também deve ser feito no sólido de 16 cascas.

Outra observação que deve ser feita é na quantidade de cascas dos três sólidos, ela não foi escolhida ao acaso e sim para facilitar os cálculos e medidas, pois assim teremos espessuras de 1cm para o sólido de 4 cascas, 0,5cm para o de 8 cascas e 0,25cm para o de 16 cascas.

Na Figura 4.39 Vemos os passos finalizados para a construção do sólido de 16 cascas.

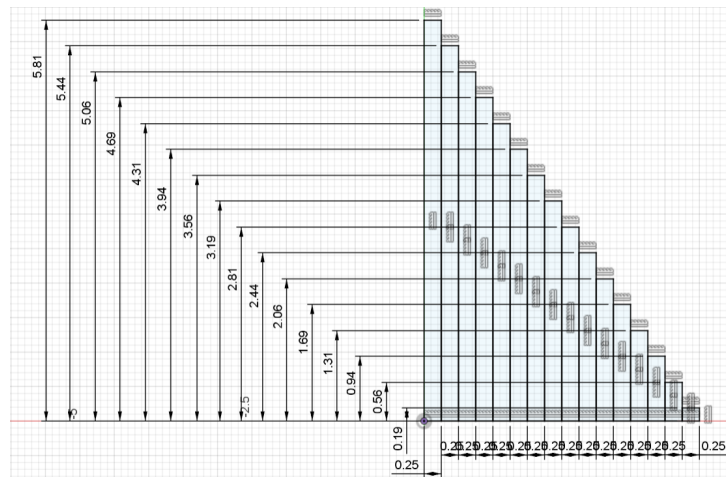
**Figura 4.39** – Construção do sólido de revolução com 16 cascas.

Configuração do sólido		Valor
Valor (a) da função afim	-1,5	
Valor (b) da função afim	6	
Valor do raio inicial	0	
Valor do raio final	4	
Intervalo de rotação	4	
Quantidade de cascas	16	
Espessura da casca	0,25	

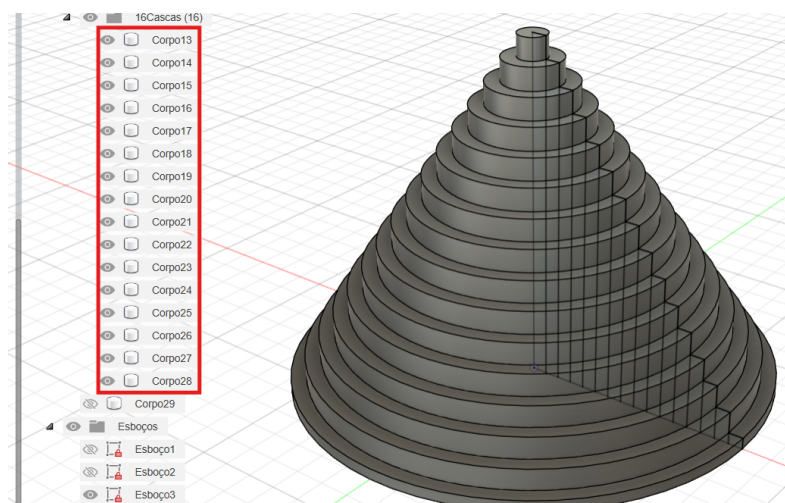
  

Tabela para a construção do sólido geométrico (cone) pelo método das cascas cilíndricas					
Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0,25	0,13	5,81	0,73
Casca 2	0,25	0,5	0,38	5,44	2,04
Casca 3	0,5	0,75	0,63	5,06	3,16
Casca 4	0,75	1	0,88	4,69	4,10
Casca 5	1	1,25	1,13	4,31	4,85
Casca 6	1,25	1,5	1,38	3,94	5,41
Casca 7	1,5	1,75	1,63	3,56	5,79
Casca 8	1,75	2	1,88	3,19	5,98
Casca 9	2	2,25	2,13	2,81	5,98
Casca 10	2,25	2,5	2,38	2,44	5,79
Casca 11	2,5	2,75	2,63	2,06	5,41
Casca 12	2,75	3	2,88	1,69	4,85
Casca 13	3	3,25	3,13	1,31	4,10
Casca 14	3,25	3,5	3,38	0,94	3,16
Casca 15	3,5	3,75	3,63	0,56	2,04
Casca 16	3,75	4	3,88	0,19	0,73

(a) Tabela da espessura e altura das cascas para sólido com 16 cascas.



(b) Esboço das cascas do sólido de 16 cascas.



(c) Sólido de revolução com 16 cascas concluído.

**Fonte:** Registrado pelo autor.

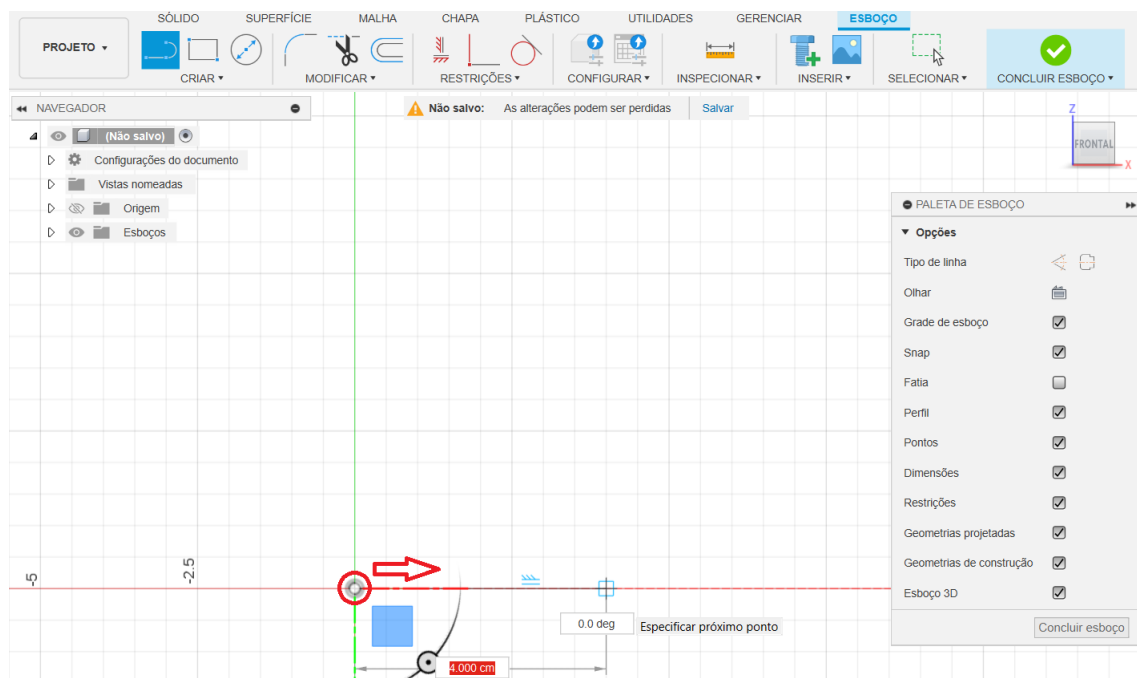
Com os três sólidos criados, basta exportá-los em formato .stl para que possam ser colocados para impressão 3D, esse passo será trabalhado nas próximas subseções.

### 4.2.3 Cone base para os sólidos

Outro sólido muito importante é o cone que foi base para os sólidos de cascas. Assim, é interessante que também se tenha ele impresso, com as medidas estudadas, ou seja, 4 centímetros de raio e 6 centímetros de altura.

Para construirmos o cone, precisaremos usar outra ferramenta no esboço. Com “Novo esboço” selecionado, aperte a tecla “L” ou selecione o primeiro botão no canto superior esquerdo (em azul), essa ferramenta nos permite criar linhas. Com a ferramenta selecionada, clique em cima da origem do plano e arraste sobre o eixo  $x$ , ela criará a linha, como nosso cone tem 4 centímetros de raio, então arraste até que marque 4 cm na linha e solte o botão do mouse (Figura 4.40).

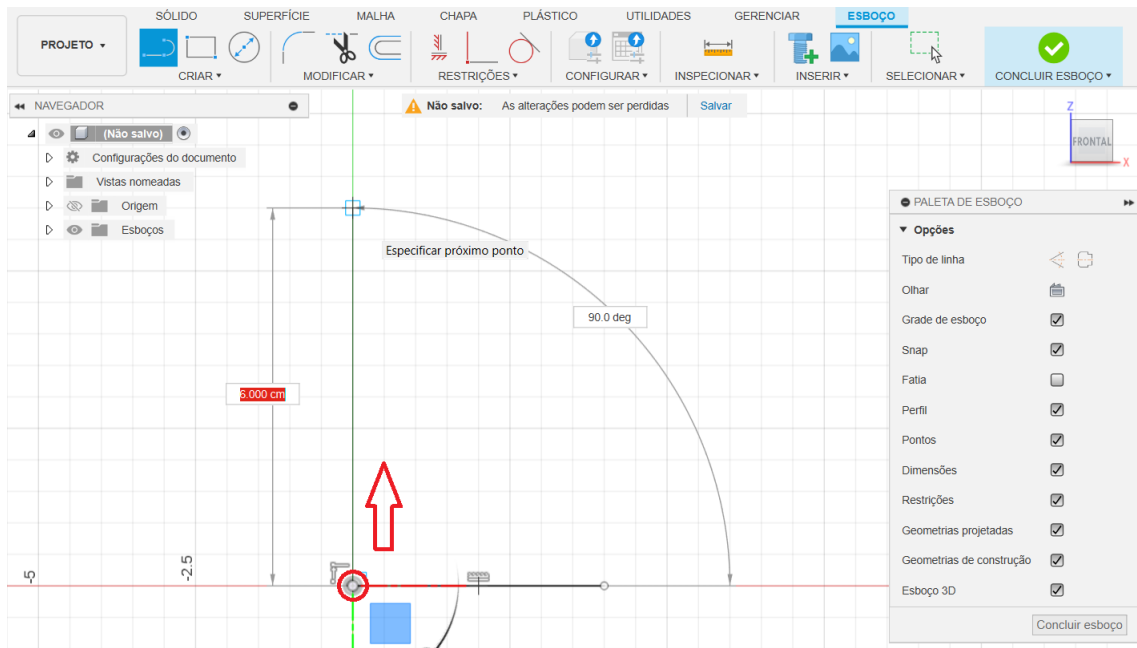
Figura 4.40 – Primeira linha do esboço do cone.



Fonte: Registrado pelo autor.

Para construir a segunda linha, com a função de criar linha selecionada, vamos novamente partir da origem do plano, mas agora vamos seguir pelo eixo  $y$  para definirmos a altura do sólido. Então deslizamos a linha verticalmente até que ela marque 6 centímetros. Após isso, basta soltarmos o botão do mouse e a linha se forma (Figura 4.41).

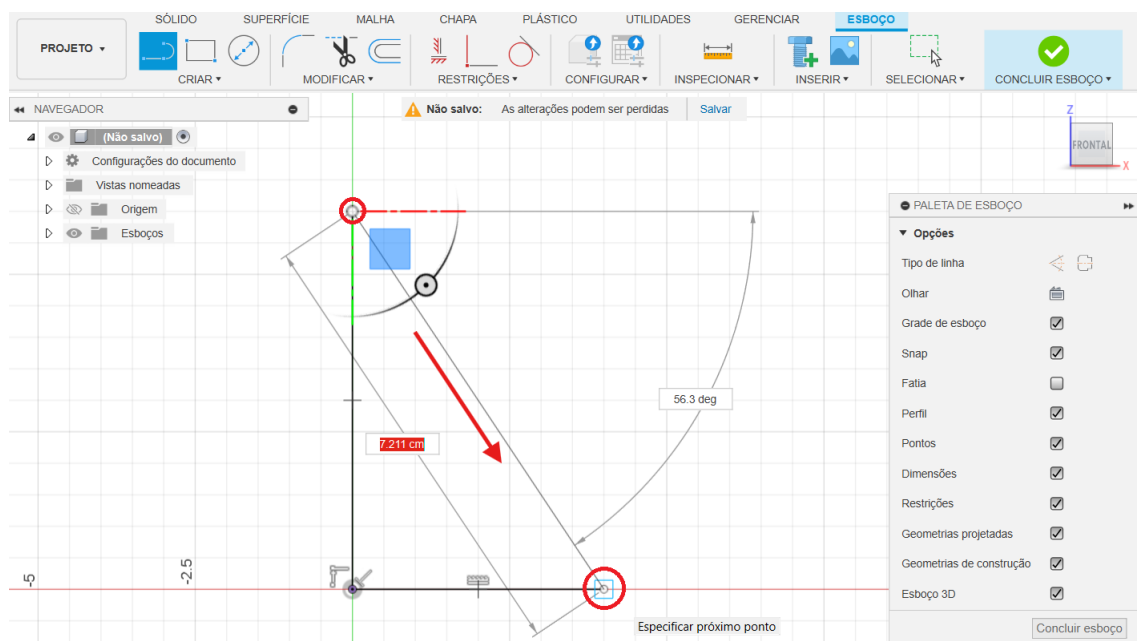
Figura 4.41 – Segunda linha do esboço do cone.



Fonte: Registrado pelo autor.

Observe que as duas linhas ficaram com pontas soltas, essas pontas servirão para fecharmos o esboço. Para isso, com a opção de criar linha selecionada, vamos clicar em uma das pontas e ligar com a outra, assim o figura geométrica do esboço fechará. Após isso, basta clicar em “concluir esboço” (Figura 4.42).

Figura 4.42 – Linha que fecha o esboço do cone.

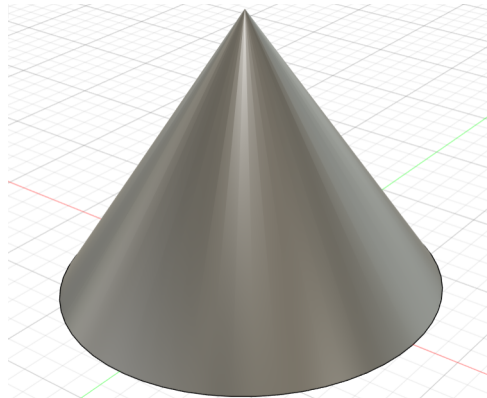


Fonte: Registrado pelo autor.

O restante da construção segue os passos que já conhecemos. Basta clicar no botão de

revolução, selecionar a figura no plano, selecionar o eixo y e colocar a angulação para 360 graus e o sólido se formará, temos a sua visualização na Figura 4.43

**Figura 4.43 – Cone gerado.**



**Fonte:** Registrado pelo autor.

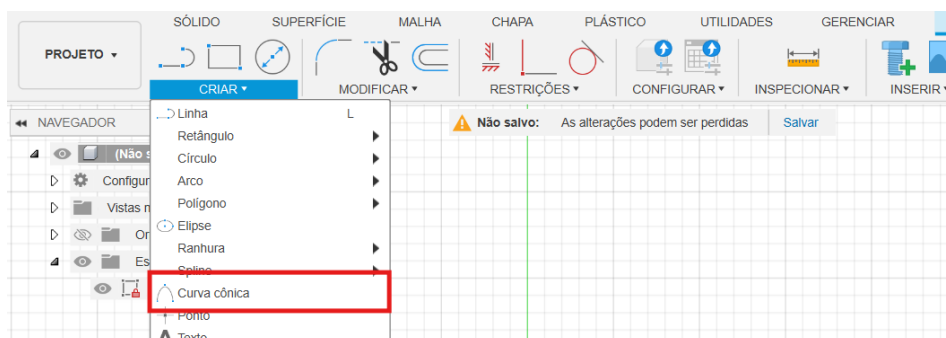
#### 4.2.4 Construção da taça de bebida através do parabolóide

Outra ferramenta que será utilizada nas aulas é uma taça de bebida. Essa taça foi desenvolvida para que o interior de seu copo seja um parabolóide. Dessa forma, é possível calcular sua capacidade através do método das cascas. O método de construção dessa taça se baseia também em montar o seu esboço e revolucioná-lo em volta do eixo y.

Iniciamos construindo a parábola do inferior do copo da taça. A função que gera essa parábola é a que projetamos na tabela que construímos nesse capítulo, ou seja,  $y = -0,25x^2 + 6,25$ . Essa função tem como y do vértice 6,25, que coincide com o eixo y, e tem como raízes -5 e 5 que também coincidem com o raio do parabolóide que essa função gera<sup>5</sup>.

Iniciando a construção, selecionamos “Novo esboço” no menu, e, no menu superior clicamos em “CRIAR” e depois a opção “Curva cônica” (Figura 4.44).

**Figura 4.44 – Selecionando a ferramenta “Curva Cônica”.**

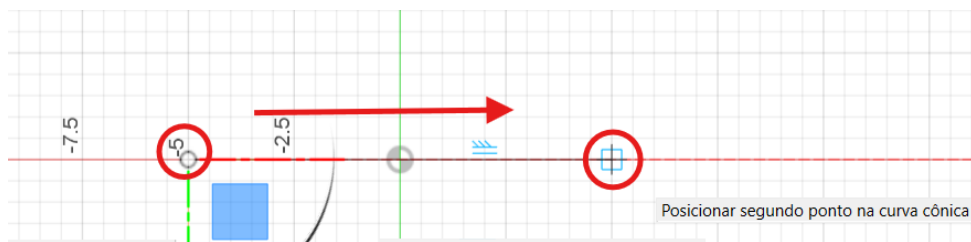


**Fonte:** Registrado pelo autor.

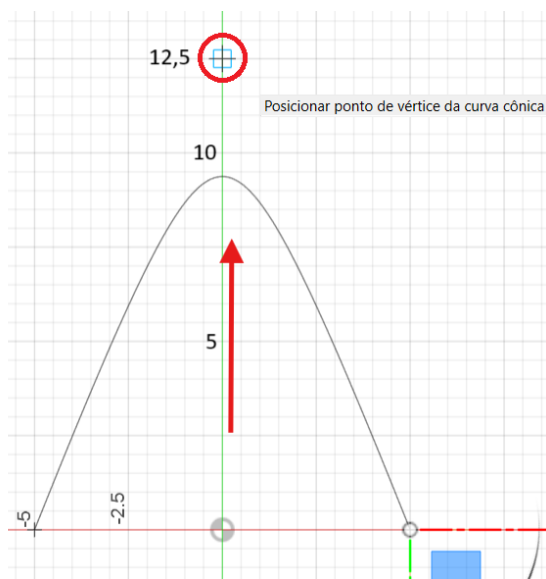
<sup>5</sup> Essa função foi montada de forma que seu parabolóide tivesse um volume próximo de  $250\text{cm}^3$  e que suas medidas de raio e altura fossem fáceis de se usar

Para construir a parábola interna, faremos três passos: primeiro definiremos os extremos da parábola em  $x$  que no caso são as raízes da função  $f$ , clicando em  $-5$  em  $x$  e arrastando até  $5$  também em  $x$  (Figura 4.45a); em seguida, definiremos o vértice dessa curva, no Fusion para definirmos a altura da parábola sendo  $6,25$ , devemos colocar o ponto no dobro desse valor, ou seja, em  $12,5$  no eixo  $y$  (Figura 4.45b); por fim, vamos definir o tipo de curva estamos formando, no Fusion, para desenharmos uma parábola, a constante de construção da curva deve ser  $0,5$ , como indicado na Figura 4.45c. Dessa forma, a parábola está construída.

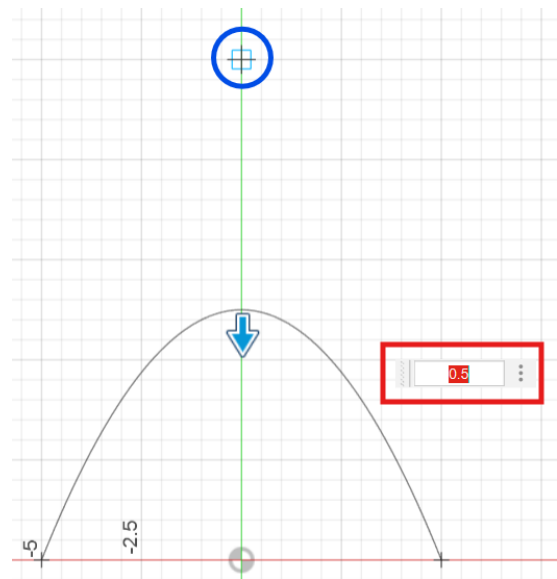
**Figura 4.45** – Construindo a parábola interna da taça.



(a) Delimitando a base da parábola interna.



(b) Definindo a altura da parábola.

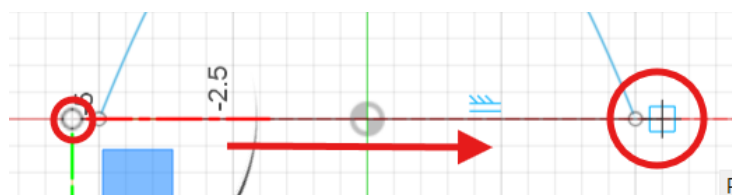


(c) Definindo o coeficiente da curva cônica.

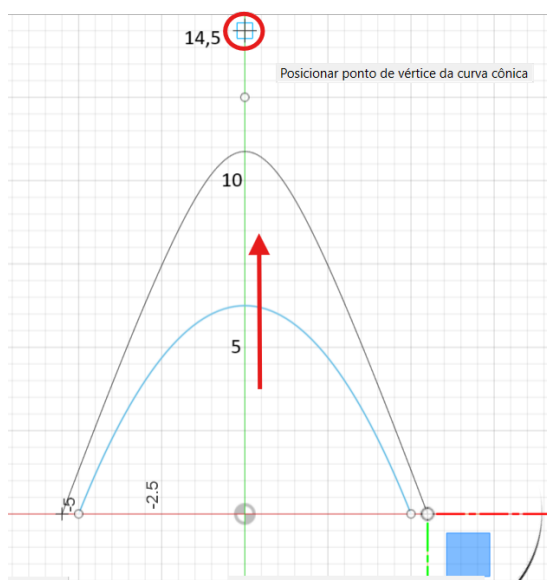
**Fonte:** Registrado pelo autor.

Os passos para construir a parábola externa do copo da taça são os mesmos. Nela, definiremos os extremos da base como  $-5,5$  e  $5,5$ , dessa forma, a borda da taça terá  $0,5\text{cm}$  de espessura (Figura 4.46a). Aqui, como topo ou altura dessa parábola, definiremos  $7,25$  como o  $y$  de seu vértice, dessa forma, o ponto do vértice será  $14,5$  em  $y$  (Figura 4.46b). Com essa curva também se trata de uma parábola, a sua constante continua sendo  $0,5$  (Figura 4.46c). Assim, a parábola externa também fica construída.

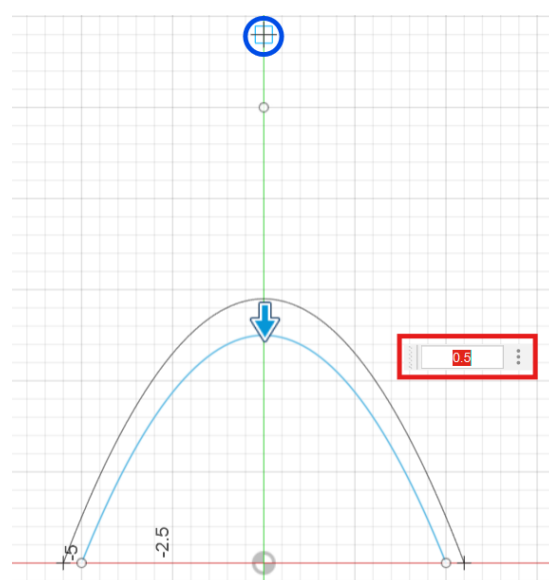
**Figura 4.46 – Construindo a parábola externa da taça.**



(a) Delimitando a base da parábola interna.



(b) Definindo a altura da parábola.

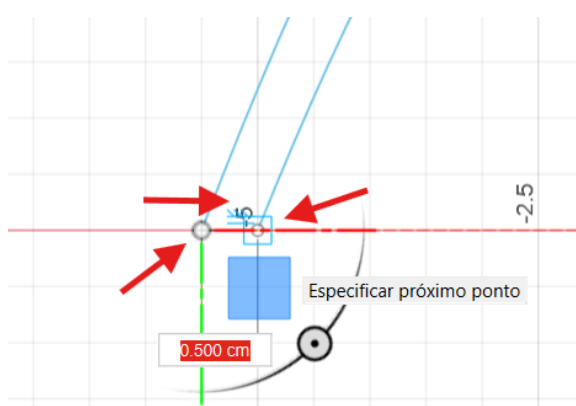


(c) Definindo o coeficiente da curva cônica.

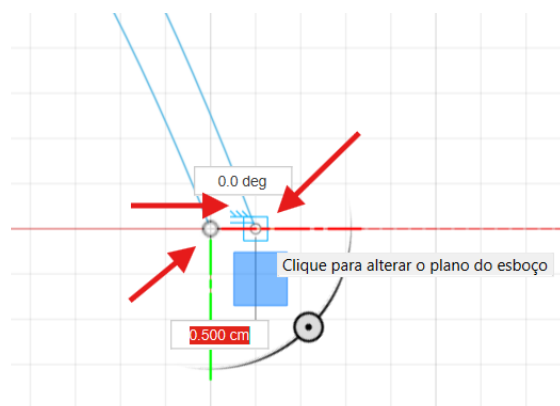
Fonte: Registrado pelo autor.

Para fechar essas parábolas em uma figura, basta ligarmos os pontos com a ferramenta “linha” no menu de ferramentas. Ligamos o ponto -5,5 ao -5 (Figura 4.47a) e o ponto 5 ao 5,5 (Figura 4.47b) no eixo x.

**Figura 4.47 – Fechando as parábolas.**



(a) Fechando as pontas da esquerda.



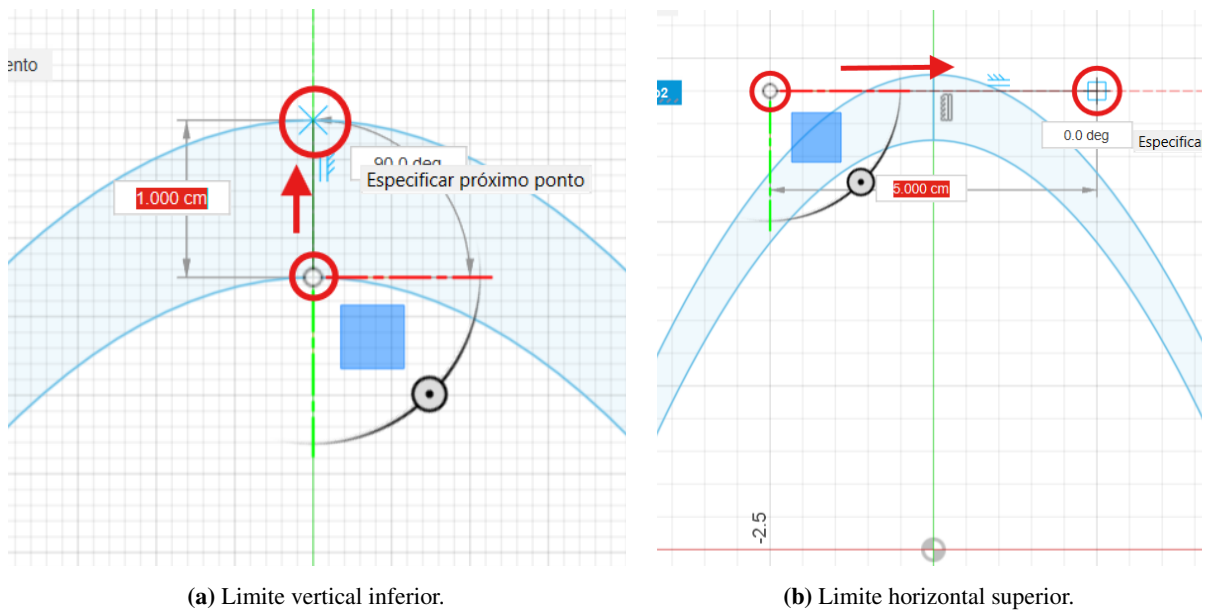
(b) Fechando as pontas da direita.

Fonte: Registrado pelo autor.

Com a parábola fechada, vamos traçar dois segmentos, com a ferramenta “linha” ainda

nesse esboço que servirão para delimitar nossa área de revolução. O primeiro deles deve partir do vértice de uma parábola e ir até a outra, perceba que esse segmento é traçado exatamente em cima do eixo y, ele é feito pois servirá como limite inferior da nossa figura (Figura 4.48a). O segundo deve delimitar o limite superior horizontal que revolucionaremos, essa reta também servirá para criar uma área quando a figura for revolucionada, para que possa ser colada na base da taça. Para isso, devemos traçar um segmento paralelo ao eixo x que passe em 7 no eixo y como ilustra a Figura 4.48b.

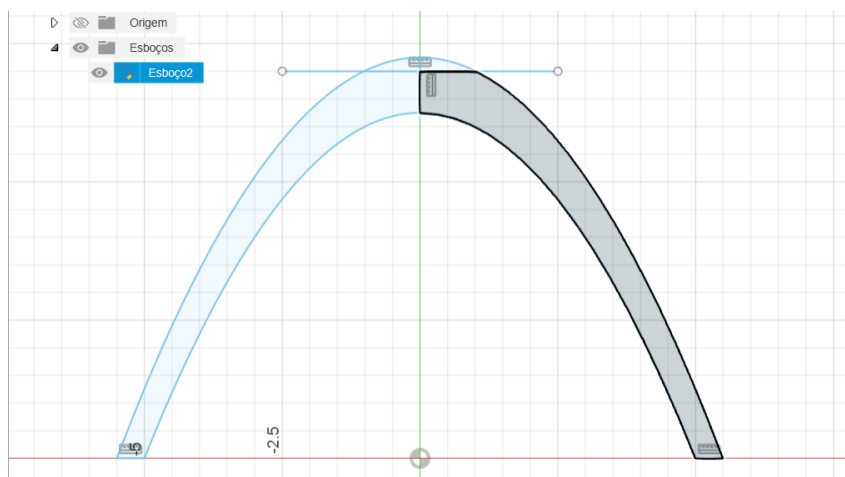
**Figura 4.48** – Delimitando a área de revolução da parábola.



Fonte: Registrado pelo autor.

Com isso, basta clicar em “Concluir esboço” e o esboço que servirá para criar o copo da taça está pronto. Observe destacado em cinza na Figura 4.49.

**Figura 4.49** – Esboço para a construção do copo da taça pronto.

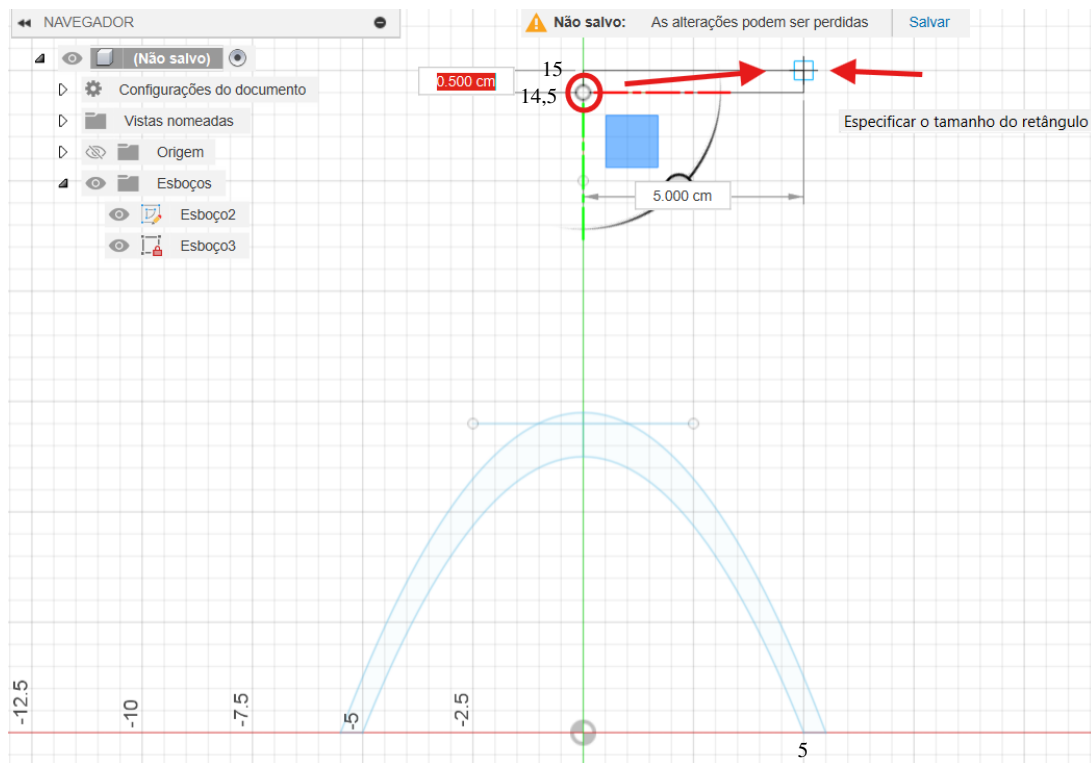


Fonte: Registrado pelo autor.

Para a base da taça, faremos um novo esboço. A ideia de separar a modelagem da taça em dois sólidos é para que fique mais fácil de imprimir as partes.

Com “Novo esboço” selecionado, vamos usar a ferramenta “Retângulo” para formar o pé da taça. Para isso, clicamos na coordenada (0, 14.5) e arrastamos até a coordenada (5, 15) do gráfico, formando um retângulo, como ilustra a Figura 4.50.

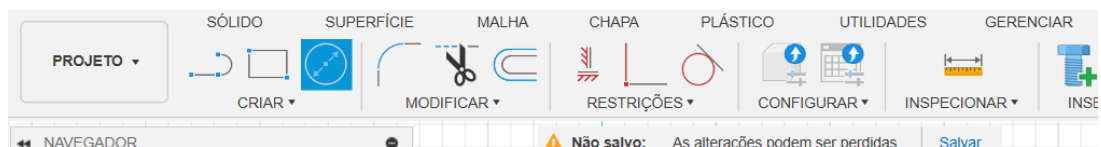
**Figura 4.50** – Pé da taça.



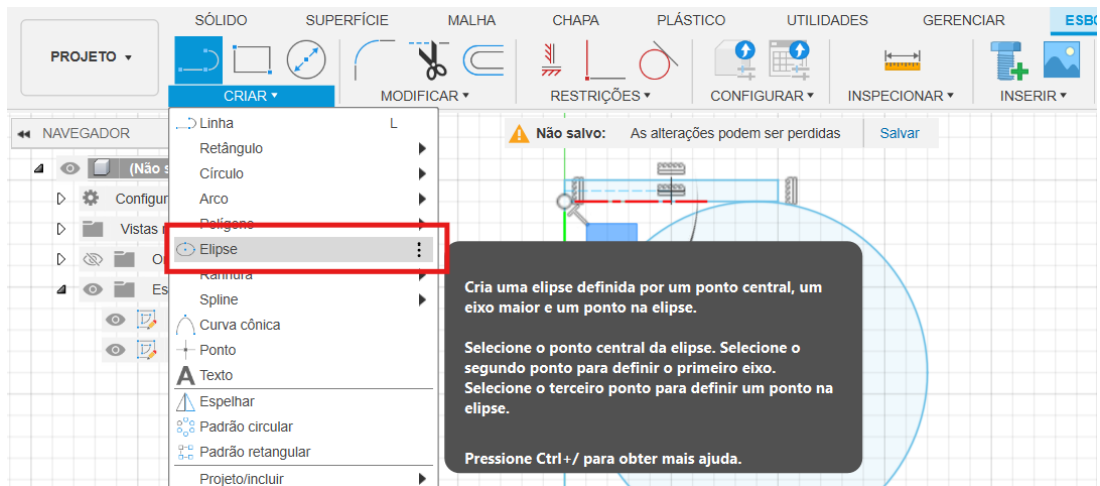
Fonte: Registrado pelo autor.

O próximo passo será fazer o tronco da taça, para isso, precisaremos usar a ferramenta “Linha”, que já conhecemos, e duas novas ferramentas, o “Círculo” e “Elipse”, os três no menu de ferramentas do esboço. A seleção dessas novas ferramentas pode ser vista na Figura 4.51.

**Figura 4.51** – Selecionando novas ferramentas.



(a) Ferramenta “Círculo por diâmetro central” em azul.

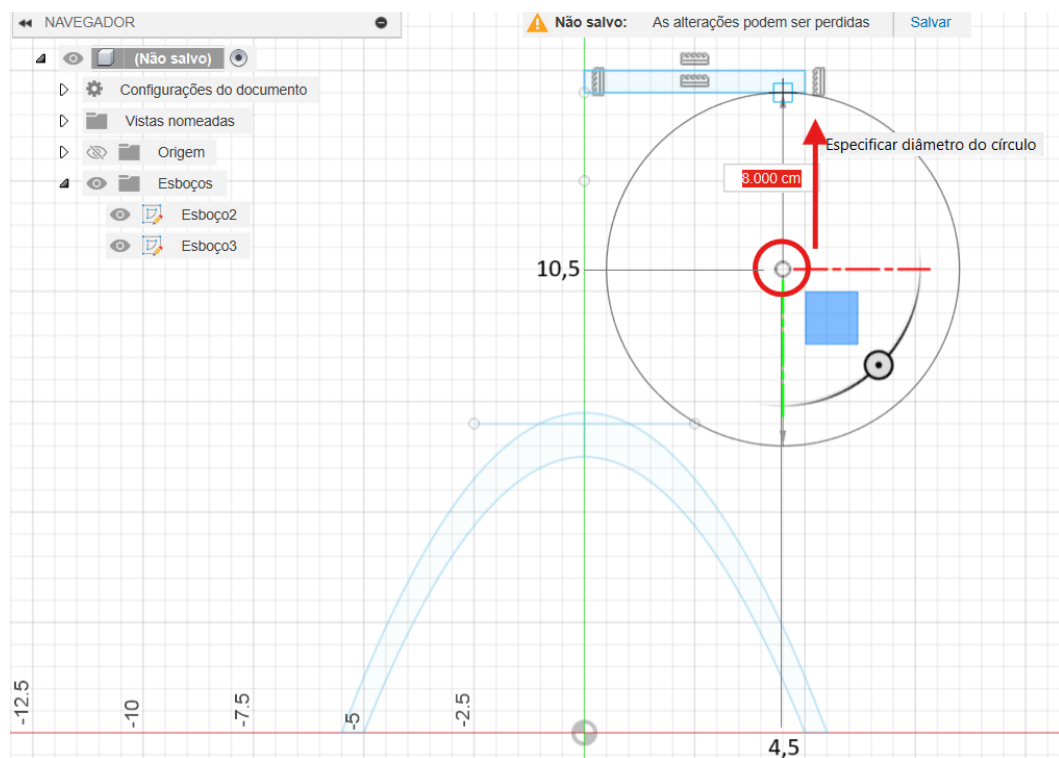


(b) Ferramenta “Elipse”.

Fonte: Registrado pelo autor.

Com a ferramenta “Círculo por diâmetro central” selecionamos o centro do círculo, clicando na coordenada (4,5, 10,5), e arrastamos para cima formando seu raio até que o círculo tangencie o retângulo do pé da base, como mostra a Figura 4.52.

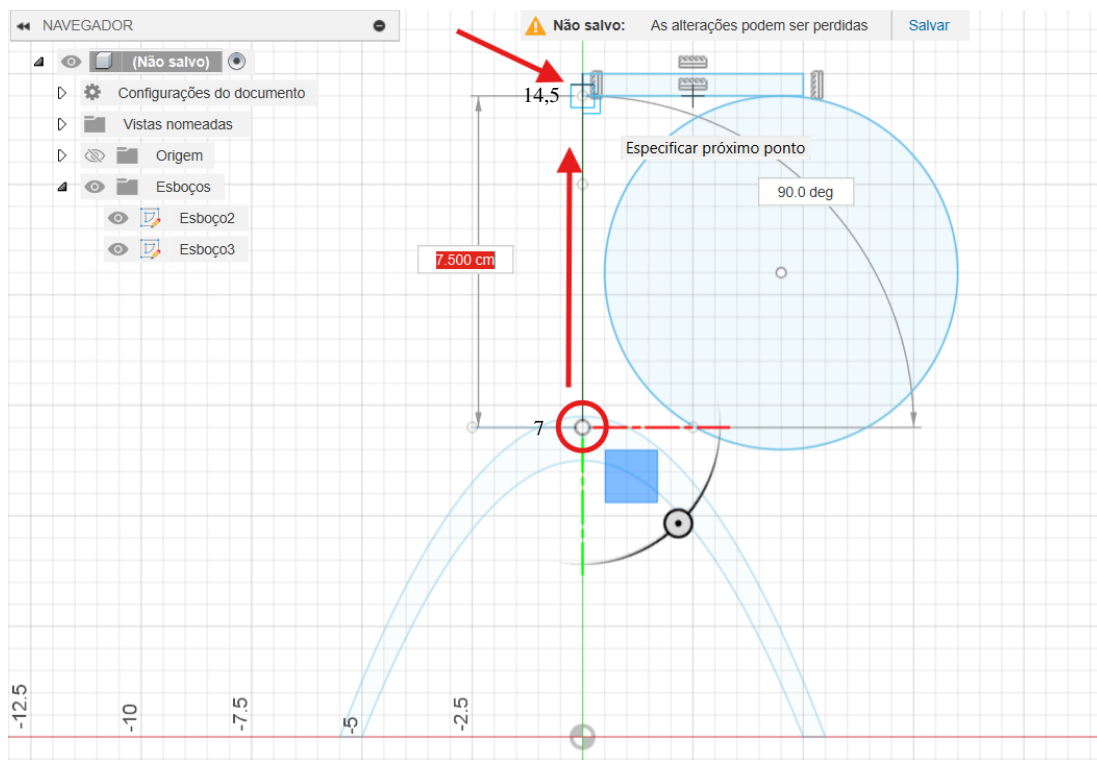
Figura 4.52 – Círculo que faz parte do tronco da taça.



Fonte: Registrado pelo autor.

Com “Linha” selecionado, vamos traçar uma linha sobre o eixo y, essa linha servirá para delimitar a base da taça pela esquerda no eixo x. Para isso, clicamos na coordenada (0,7) e arrastamos a linha até que encontre o pé da base na coordenada (0, 14,5), como ilustra a Figura 4.53.

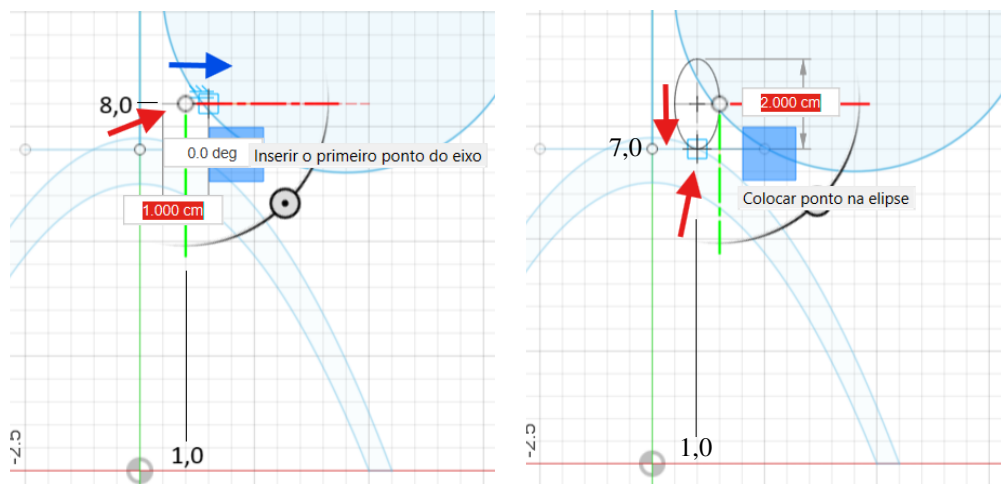
**Figura 4.53** – Linha que delimita o esboço do tronco da taça pela esquerda.



Fonte: Registrado pelo autor.

Já com a ferramenta “Elipse” selecionada, como descrito na Figura 4.51b, vamos executar três passos: primeiro selecionamos o ponto central da elipse na coordenada (1, 8); em seguida selecionamos o primeiro eixo da elipse, arrastando e clicando na coordenada (1.5, 8) (Figura 4.54a); por fim, arrastamos e clicamos na coordenada (1, 7) definindo o segundo eixo da elipse (Figura 4.54b).

**Figura 4.54** – Formação da elipse do tronco da taça.



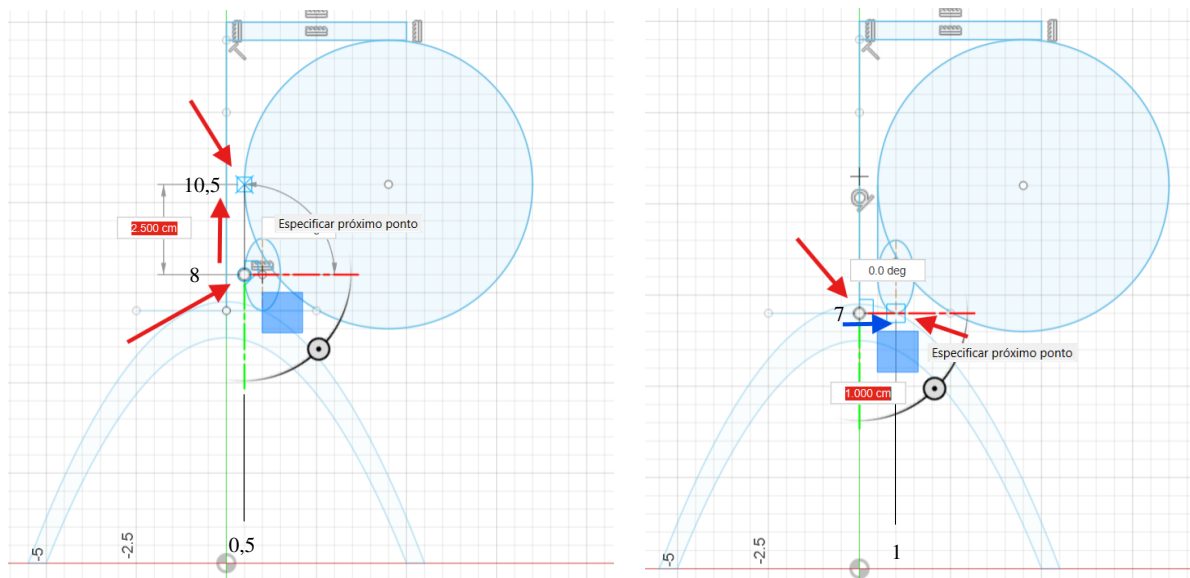
(a) Primeiro eixo.

(b) Segundo eixo.

Fonte: Registrado pelo autor.

Para fechar o esboço da base da taça, vamos usar “Linha” e ligar dois pontos de encontro. Primeiro, criamos uma reta que tangencia tanto a elipse quanto o círculo, ligando esses dois elementos, para isso, traçamos a linha partindo da coordenada (0,5, 8) até chegar em (0,5, 10,5) (Figura 4.55a). Em seguida, traçamos uma linha que conecte o ponto inicial da linha central, na coordenada (0, 7) com a curva da elipse em (1, 7), tangenciando a elipse (Figura 4.55b).

**Figura 4.55** – Fechando o esboço da base da taça.



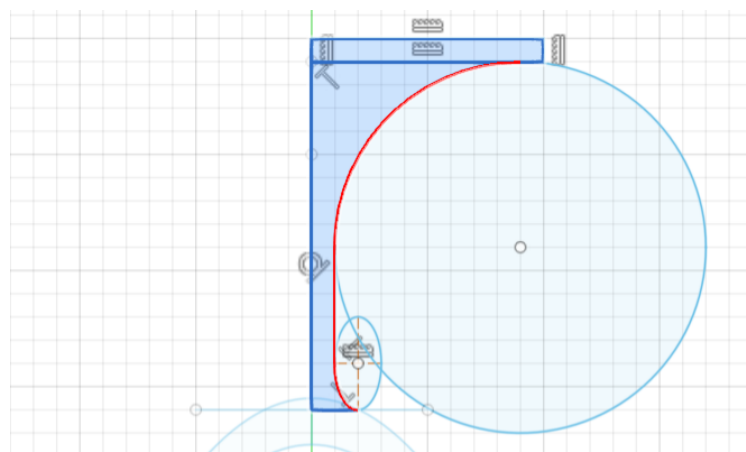
(a) Linha que liga a elipse ao círculo.

(b) Linha que fecha a base da taça.

Fonte: Registrado pelo autor.

Dessa forma, o esboço da base do tronco está pronta, e usaremos a forma destacada de azul na Figura 4.56 para gerar essa base.

**Figura 4.56** – Esboço da base da taça pronto.

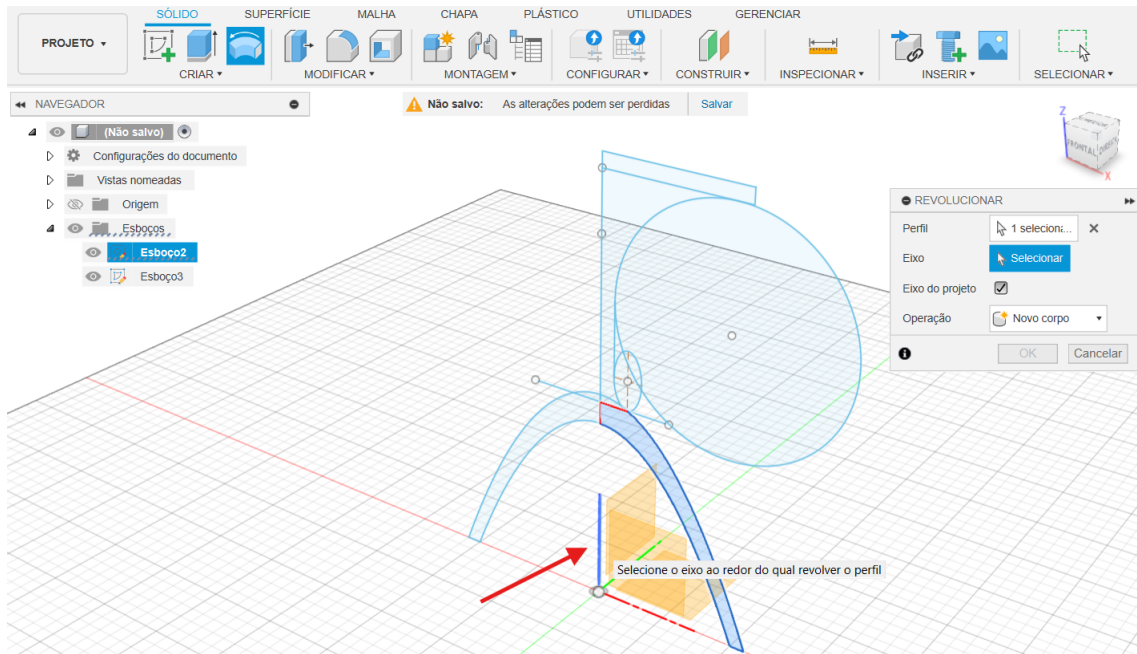


Fonte: Registrado pelo autor.

Para gerar o sólido da taça, usaremos a ferramenta “Revolução”, assim como nos outros sólidos já construídos. Os passos para gerar o sólidos são os mesmos usados nos sólidos anteriores.

Inciaremos revolucionando o copo da taça, para isso, selecionamos o objeto destacado na Figura 4.49 e revolucionamos ele em torno do eixo y, como mostra a Figura 4.57.

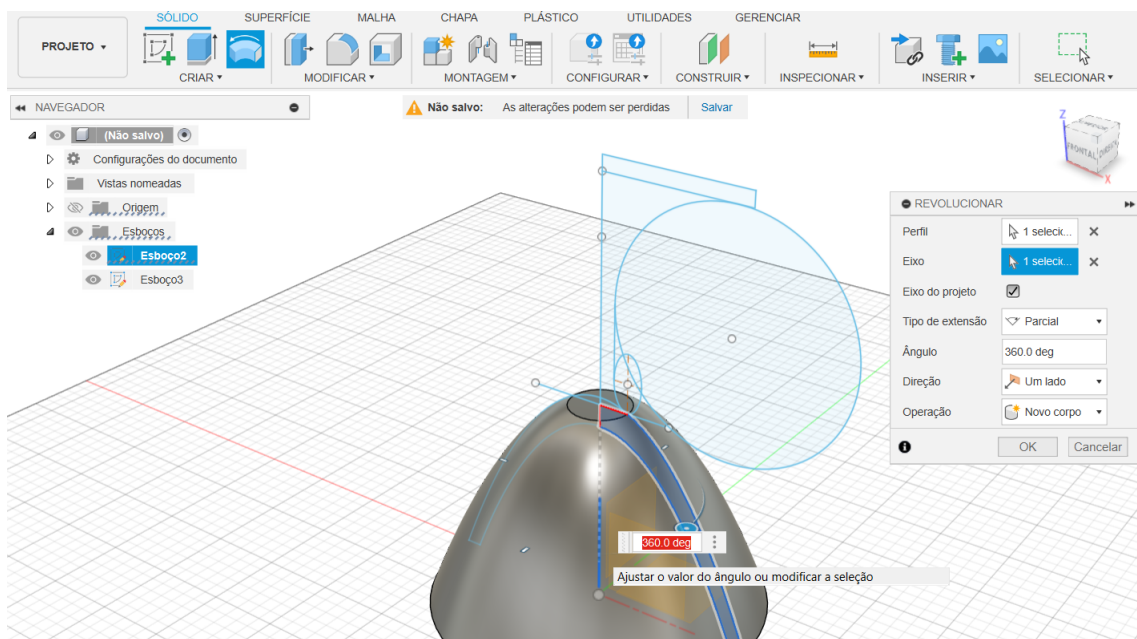
**Figura 4.57** – Selecionando o esboço do copo da taça e o eixo que ele será revolucionado.



Fonte: Registrado pelo autor.

Com o eixo selecionado, basta colocarmos o ângulo como 360 e clicar em “OK” na caixa “Revolucionar” e o sólido estará pronto (Figura 4.58).

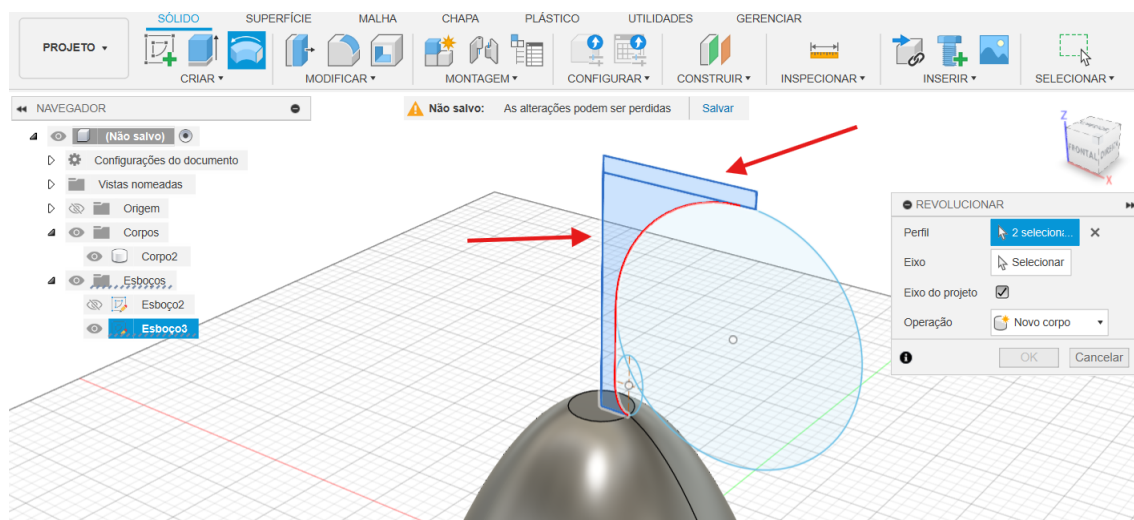
**Figura 4.58** – Sólido do copo da taça pronto.



Fonte: Registrado pelo autor.

Para a base da taça, é preciso lembrar de selecionar os dois objetos do esboço, o pé da base e o tronco da base, apontados na Figura 4.59. A seleção do do eixo e o valor do ângulo são os mesmos do sólido passado.

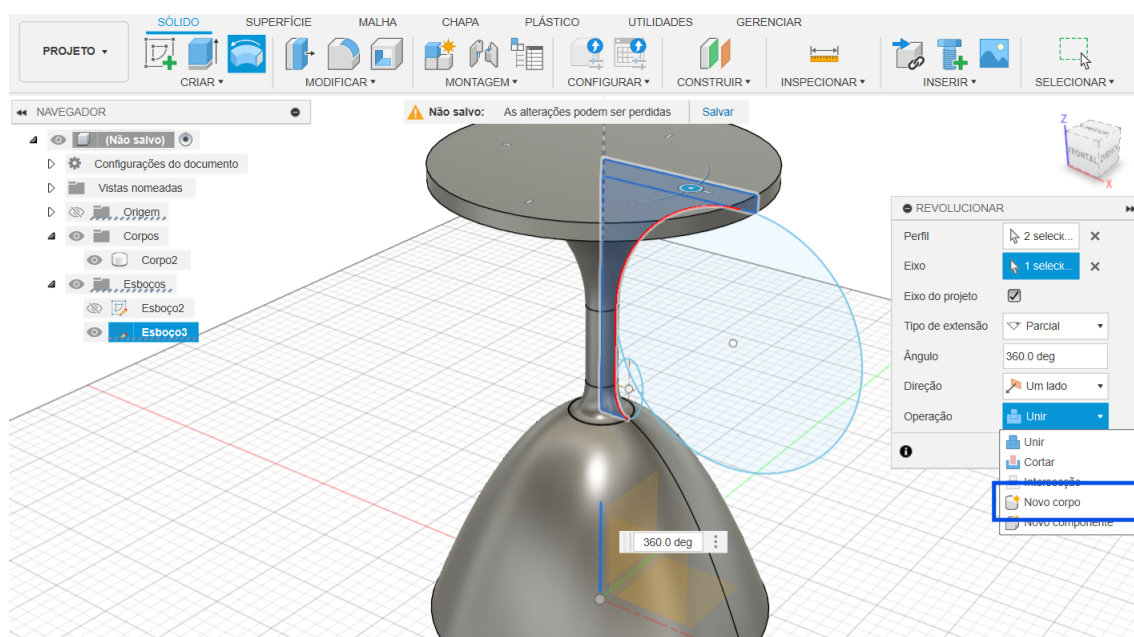
**Figura 4.59** – Selecionando os esboços da base da taça que serão revolucionados.



Fonte: Registrado pelo autor.

Uma observação durante a criação desse sólido, é que na opção “Operação” na caixa “Revolucionar”, devemos selecionar “Novo corpo”, para que esse sólido fique separado do copo, assim, facilitamos a impressão do sólido, como será explicado adiante (Figura 4.60).

**Figura 4.60** – “Novo corpo” na opção “Operação” na revolução da base da taça.



Fonte: Registrado pelo autor.

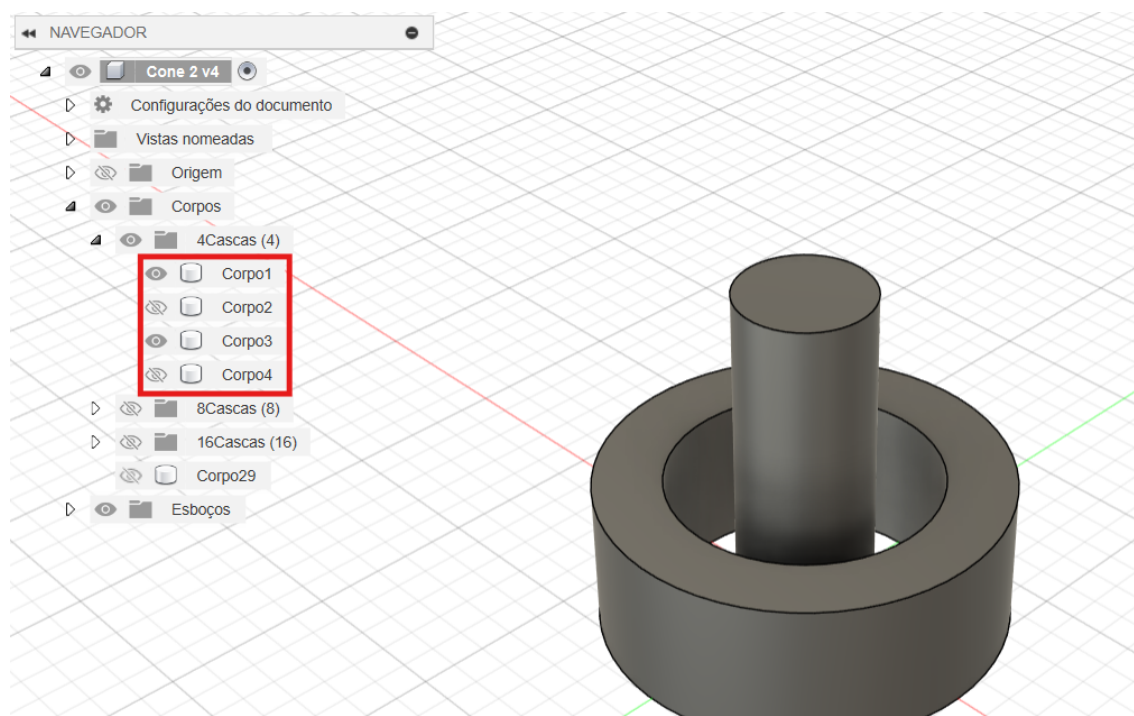
Com isso, a construção da taça está concluída.

#### 4.2.5 Salvando os sólidos para impressão 3D

Para que possamos imprimir as cascas dos sólidos baseados no cone, de modo que cada casca fique separada das outras, devemos separar a impressão em duas parte, imprimindo as cascas alternadamente, justamente por isso, ao criar os sólidos, criamos cada casca como um novo corpo, pois dessa forma, ao salvar o sólido para impressão, podemos escolher quais cascas queremos selecionar.

Usando esse método, vamos salvar o sólido de quatro cascas. Para isso, no menu “navegador” do lado esquerdo do sólido, na aba “corpos”, observe que cada cascas está numerada de 1 a 4. Devemos ocultar alternadamente as cascas e depois salvar cada um desses modelos. Primeiramente, ocultamos o “Corpo2” e “Corpo4”, como mostra a Figura 4.61.

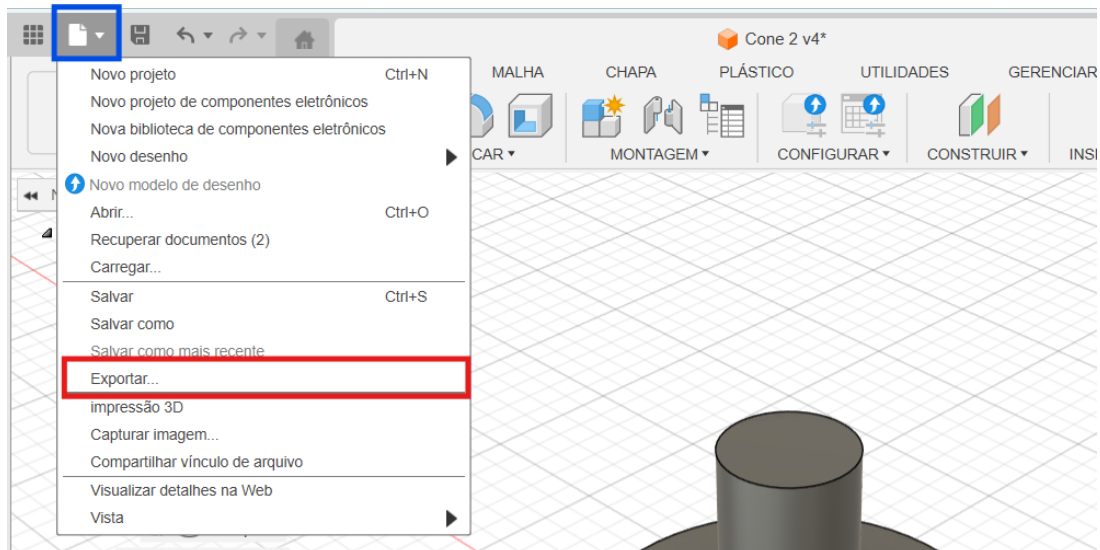
**Figura 4.61** – Selecionando as cascas da primeira parte dos arquivos que serão salvos para a impressão 3D.



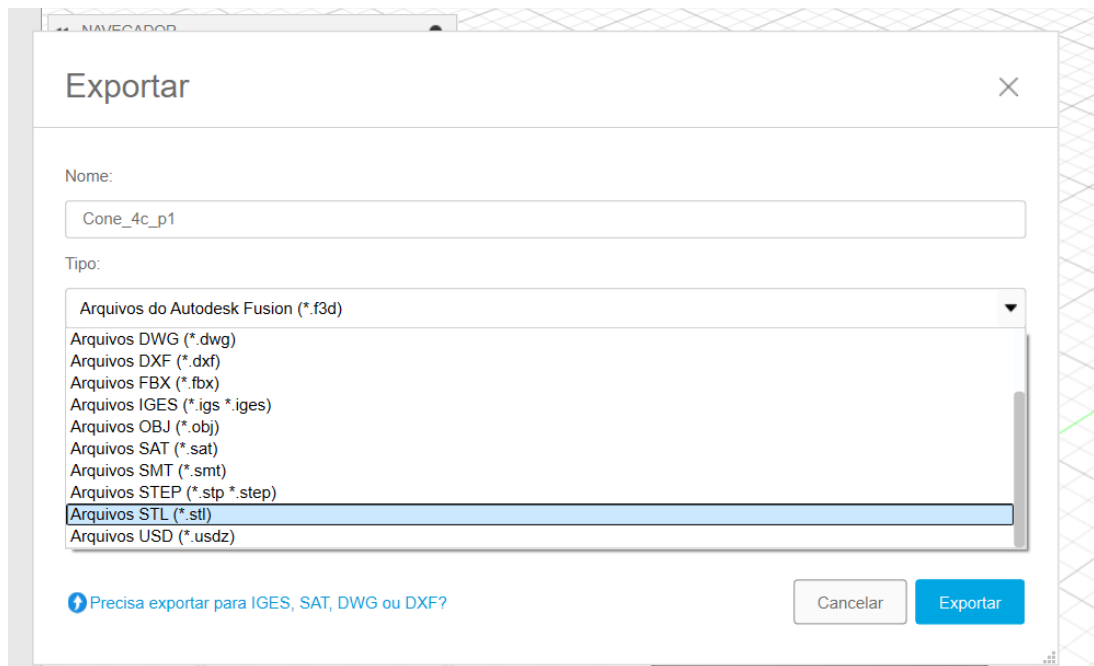
**Fonte:** Registrado pelo autor.

Para salvar a Figura, clicamos em “Arquivo”, no canto inferior direito e selecionamos “Exportar” (Figura 4.62a). Em seguida, colocamos um nome para o arquivo, no caso desse sólido, foi escolhido “Cone\_4c\_p1”, “4c” refere-se às 4 cascas e “p1” é a parte 1 da impressão desse sólido. Abaixo, em “Tipo”, devemos escolher o formato que o arquivo será salvo, selecionamos o formato “.stl”, que é o formato lido pelas fatiadoras de impressão 3D. Por fim, basta escolher a pasta para salvar o arquivo e clicar em “Exportar” (Figura 4.62b).

Figura 4.62 – Exportando o arquivo.



(a) Selecionando a opção “Exportar” no menu do programa.



(b) Selecionando o formato .stl para salvar o arquivo.

Fonte: Registrado pelo autor.

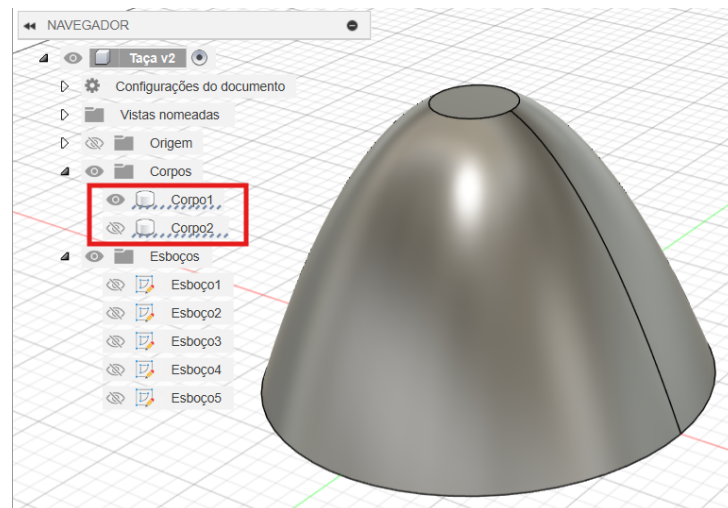
A parte 2 do sólido segue os mesmos passos para exportação, ocultando o “Corpo1” e o “Corpo3” e deixando à amostra o “Corpo2” e o “Corpo4” e, ao exportar, salvando o nome do arquivo como “Cone\_4c\_p2”.

Com os sólidos de 8 cascas e 16 cascas o método é o mesmo, dividindo a exportação em duas partes, alternando as cascas que ficam à amostra na parte 1, e trocando as cascas que ficam à amostra pelas que foram ocultas na parte 2. O método de exportação é o mesmo já utilizado para exportar o sólido de 4 cascas.

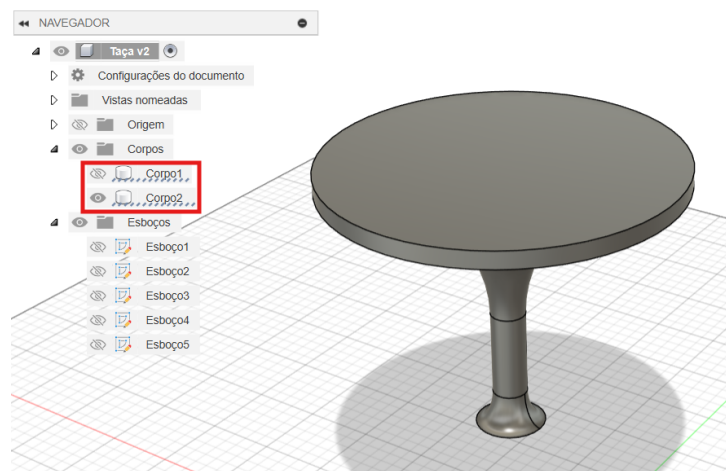
O preparo da taça para ser exportada também é dividida em duas partes. Na parte 1,

colocamos apenas o copo da taça para ser exportada, ocultando a base da taça (Figura 4.63a). Na parte 2, ocultamos o copo e exportamos apenas a base da taça (Figura 4.63b). Esse método é usado aqui para que, quando o arquivo for para a impressão, a impressora use menos material com suportes para partes da taça, economizando filamento e tempo de impressão.

**Figura 4.63** – Exportando as partes da taça.



(a) Selecionando o copo da taça para a exportação.



(b) Selecionando a base da taça para a exportação.

**Fonte:** Registrado pelo autor.

A partir daqui, o leitor deve escolher o fatiador que usa em sua impressora para preparar o arquivo para impressão e configurar o arquivo de acordo com as suas preferências. Como sugestão, os passos preparando o arquivo na fatiadora Ultimaker Cura podem ser observados no Apêndice A.

Para que os sólidos com cascas encaixem, pode ser necessário lixar a superfície das bases usando uma lixa a base de água. Com as duas partes da taça impressas, basta colá-las com supercola ou algum outro material autocolante.

## 5 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, é feito o desenvolvimento de todas as aulas necessárias para abordar o uso da impressão 3D como ferramenta para o cálculo do volume de sólidos geométricos pelo método das cascas cilíndricas no ensino médio. Os livros usados para estruturar todas as aulas e conteúdos são 3 volumes da coleção Fundamento de Matemática Elementar, Volume 1 - Conjuntos e Funções - Iezzi e Murakami (2013), Volume 7 - Geometria Analítica - Iezzi (2013) e Volume 10 - Geometria Espacial - Dolce e Pompeo (2013) e o livro Cálculo - Stewart (2013), mencionados no capítulo de referencial teórico matemático desta dissertação.

Cada aula contém título, tempo estimado, objetivos, materiais necessários, desenvolvimentos detalhado, atividades propostas e avaliação. Todos os links para acessar os arquivos para impressão dos modelos 3D ou outros arquivos necessários para a realização das aulas também estão disponibilizados no decorrer no capítulo.

### 5.1 Aula 1 – Introdução ao volume por cascas cilíndricas

Esta aula pode ser trabalhada tanto no segundo ano do ensino médio, após a aula sobre volume de sólidos geométricos, como no terceiro ano do ensino médio, como uma extensão do conteúdo de geometria analítica. O tempo estimado dessa aula é de 50 minutos, podendo ser adaptado e estendido, dependendo da necessidade da turma e do professor.

#### 5.1.1 Objetivo da aula

- Apresentar o conteúdo de cálculo do volume de sólidos geométricos;
- Introduzir ao aluno a construção de sólidos geométricos através da revolução de uma função sobre um eixo do plano cartesiano;
- Induzir os alunos a observar, manipular e refletir sobre o sólido gerado a partir da revolução sobre o eixo  $y$ , da função  $y = -\frac{3}{2}x + 6$ , por meio de sólidos impressos em uma impressora 3D a partir de cascas cilíndricas;
- Trabalhar com a ideia de “afinar” as cascas para observar que o sólido se aproxima da forma de um cone;
- Desafiar os alunos a propor uma forma, através de uma fórmula geral, de calcular o volume total de qualquer cone usando o método das cascas cilíndricas.

#### 5.1.2 Conteúdos abordados

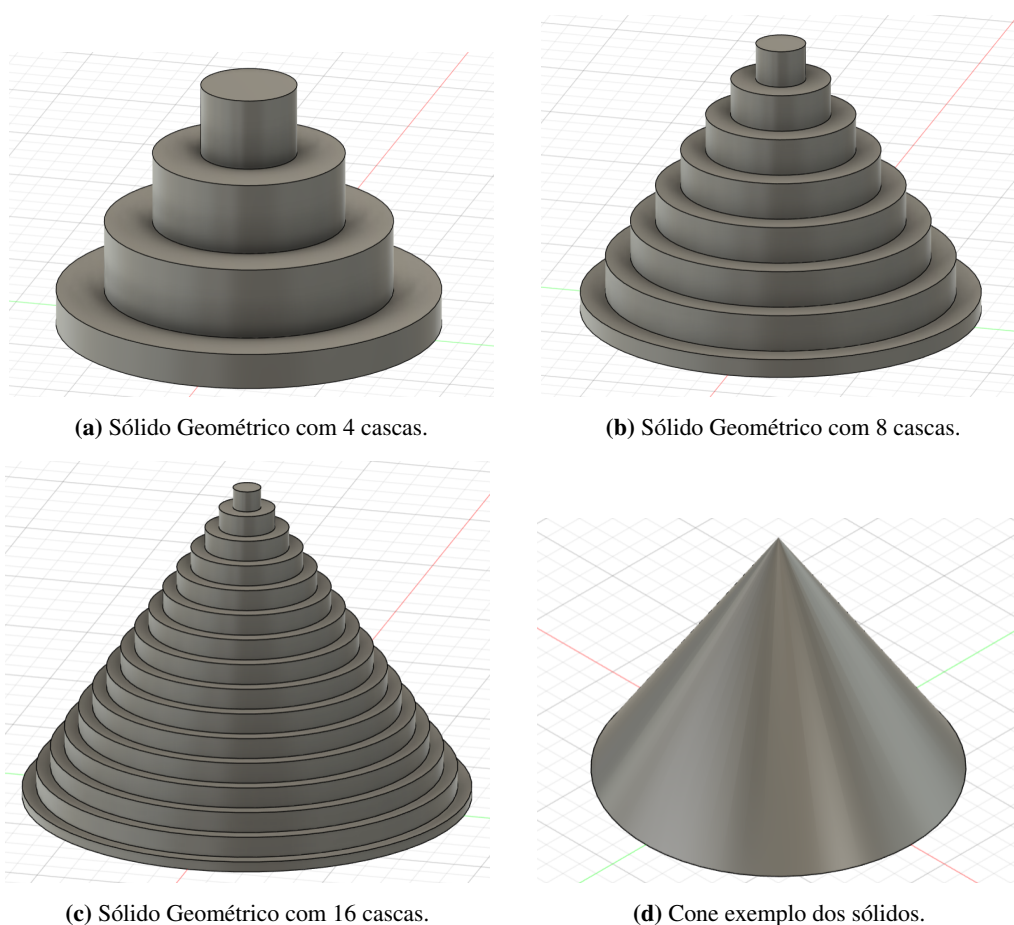
- Volume de sólidos geométricos;

- Visualização de sólidos de revolução;
- Introdução ao método das cascas cilíndricas.

### 5.1.3 Materiais e recursos

- Quatro sólidos geométricos impressos em 3D<sup>1</sup> (Três formados por cascas cilíndricas, com diferença dos raios externo e internos das cascas de 0,25 cm, 0,5 cm e 1 cm, e um cone de 6 cm de altura e raio de 4cm)<sup>2</sup>, gerado através revolução da função  $y = -\frac{3}{2}x + 6$  sobre o eixo y do plano cartesiano (Figura 5.1).

**Figura 5.1** – Sólidos para a primeira aula.



(a) Sólido Geométrico com 4 cascas.

(b) Sólido Geométrico com 8 cascas.

(c) Sólido Geométrico com 16 cascas.

(d) Cone exemplo dos sólidos.

**Fonte:** Registrado pelo autor.

- Calculadora;
- Quadro Branco;
- Régua ou paquímetro.

<sup>1</sup> A construção desses sólidos no aplicativo Fusion 360 pode ser verificado no Capítulo 4.

<sup>2</sup> Link para download dos arquivos em formato .stl para a impressão dos sólidos. Disponível em: <<https://drive.google.com/drive/folders/1chiygAxy10ed5jyRupQynZ02ZO61E3xT?usp=sharing>>. Acesso em: 12 jun. 2025.

- Projetor para apoio visual. (Opcional).

#### 5.1.4 Desenvolvimento da aula

##### **Início (10 minutos)**

O professor pode iniciar a aula apresentando três sólidos formados por cilindros encaixados que, juntos, lembram a forma de um cone, e perguntar: “Qual é o volume desse objeto? Como poderíamos estimar ou calcular o volume apenas com o que pode ser medido neles e o que vocês aprenderam até o momento?”. Durante as respostas dadas pelos alunos, o educador tenta levar os alunos a perceber que as cascas de cada sólido são cilindros vazados, pois, a partir daí, que a atividade se desenvolverá.

Após essa rodada de discussões, o professor deve dividir a sala em grupos e os modelos distribuídos de forma que cada grupo fique com um dos três sólidos (mais de um sólido do mesmo tipo pode ser impresso, se necessário). Como sugestão, os grupos podem ser divididos de forma proporcional à quantidade de cascas de cada sólido, por exemplo, o grupo que ficou com o sólido de 8 cascas deve ter 4 integrantes, enquanto que o grupo que ficou com o sólido de 16 cascas deve ter 8 integrantes.

##### **Desenvolvimento (30 minutos)**

Após a divisão dos grupos e distribuição dos sólidos, o professor deve retomar a ideia abordada na discussão e sugerir aos alunos para que pensem em cada pedaço do sólido como um cilindro vazado, e, a partir daí, indaga como poderia ser feito o cálculo daquele sólido. Espera um tempo para que os alunos tentem chegar à ideia de subtrair o volume do cilindro externo pelo interno, podendo auxiliá-los a chegarem a isso se tiverem dificuldade. Após essa etapa, o professor pede aos alunos para usarem esse raciocínio e tentarem calcular o volume aproximado do sólido completo, somando o volume encontrado de cada casca. Retomando a recomendação anterior quanto forma que o grupo ficou dividido, cada integrante calculará o volume de duas cascas.

Para que os cálculos sejam realizados, é necessário que os alunos meçam o raio interno e externo das cascas de cada sólido e a sua altura, pois assim conseguem calcular o volume daquele sólido. Para medir esses raios, os alunos podem usar uma régua para aferir o diâmetro interno e externo da casca e, após isso, apenas dividir os valores por dois. Essa informação pode ser lembrada pelo professor durante a aula.

Se torna interessante também uma breve revisão da fórmula do volume de um cilindro, dada por  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ , segundo Dolce e Pompeo (2013, p. 212), usando  $\pi \cong 3,14$ , e lembrando que  $r$  e  $h$  são respectivamente o raio e a altura do cilindro. Dessa forma, os alunos têm todas as ferramentas para efetuar todos os cálculos. Abaixo, as Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 mostram os resultados esperados que cada grupo deve encontrar para o cálculo do volume de cada sólido, os valores são aproximados a duas casas decimais, podendo haver uma leve variação dependendo da aproximação que cada aluno usar.

**Tabela 5.1** – Cálculo do volume do sólido com 4 cascas.

Cascas	Raio externo (R)	Raio interno (r)	Altura do cilindro (h)	Volume do cilindro externo ( $V_{ce} = \pi \cdot R^2 \cdot h$ )	Volume do cilindro interno ( $V_{ci} = \pi \cdot r^2 \cdot h$ )	Volume da casca ( $V_{ce} - V_{ci}$ )
Casca 1	1cm	0	5,25cm	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 5,25 = 16,49cm^3$	$3,14 \cdot 0^2 \cdot 5,25 = 0$	$16,48 - 0 = 16,49cm^3$
Casca 2	2cm	1cm	3,75cm	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 3,75 = 47,1cm^3$	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 3,75 = 11,78cm^3$	$47,1 - 11,78 = 35,33cm^3$
Casca 3	3cm	2cm	2,25cm	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 2,25 = 63,59cm^3$	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 2,25 = 28,26cm^3$	$63,58 - 28,26 = 35,33cm^3$
Casca 4	4cm	3cm	0,75cm	$3,14 \cdot 4^2 \cdot 0,75 = 37,68cm^3$	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 0,75 = 21,19cm^3$	$37,68 - 21,19 = 16,49cm^3$

**Fonte:** Elaboração própria.

Após calcular o volume das 4 cascas, na Tabela 5.1, basta somar cada uma e encontramos o volume total do sólido ( $V_{ts}$ ):

$$\begin{aligned}
 V_{ts} &= V_{c1} + V_{c2} + V_{c3} + V_{c4} \\
 &= 16,49 + 35,33 + 35,33 + 16,49 \\
 &= 103,64cm^3.
 \end{aligned}$$

**Tabela 5.2** – Cálculo do volume do sólido com 8 cascas.

Cascas	Raio externo (R)	Raio interno (r)	Altura do cilindro (h)	Volume do cilindro externo ( $V_{ce} = \pi \cdot R^2 \cdot h$ )	Volume do cilindro interno ( $V_{ci} = \pi \cdot r^2 \cdot h$ )	Volume da casca ( $V_{ce} - V_{ci}$ )
Casca 1	0,5cm	0	5,63cm	$3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 5,63 = 4,42cm^3$	$3,14 \cdot 0^2 \cdot 5,63 = 0$	$4,41 - 0 = 4,42cm^3$
Casca 2	1cm	0,5cm	4,88cm	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 4,88 = 15,31cm^3$	$3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 4,88 = 3,83cm^3$	$15,31 - 3,83 = 11,48cm^3$
Casca 3	1,5cm	1cm	4,13cm	$3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 4,13 = 29,14cm^3$	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 4,13 = 12,95cm^3$	$29,14 - 12,95 = 16,19cm^3$
Casca 4	2cm	1,5cm	3,38cm	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 3,38 = 42,39cm^3$	$3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 3,38 = 23,84cm^3$	$42,39 - 23,84 = 18,55cm^3$
Casca 5	2,5cm	2cm	2,63cm	$3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 2,63 = 51,52cm^3$	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 2,63 = 32,97cm^3$	$51,52 - 32,97 = 18,55cm^3$
Casca 6	3cm	2,5cm	1,88cm	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 1,88 = 52,99cm^3$	$3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 1,88 = 36,8cm^3$	$52,99 - 36,8 = 16,19cm^3$
Casca 7	3,5cm	3cm	1,13cm	$3,14 \cdot 3,5^2 \cdot 1,13 = 43,27cm^3$	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 1,13 = 31,79cm^3$	$43,27 - 31,79 = 11,48cm^3$
Casca 8	4cm	3,5cm	0,38cm	$3,14 \cdot 4^2 \cdot 0,38 = 18,84cm^3$	$3,14 \cdot 3,5^2 \cdot 0,38 = 14,42cm^3$	$18,84 - 14,42 = 4,42cm^3$

**Fonte:** Elaboração própria.

Com o resultado do volume da cada uma das cascas do sólido de 8 cascas, realizado na Tabela 5.2, podemos calcular o volume total desse sólido:

$$\begin{aligned}
 V_{ts} &= V_{c1} + V_{c2} + \dots + V_{c7} + V_{c8} \\
 &= 4,42 + 11,48 + 16,19 + 18,55 + 18,55 + 16,19 + 11,48 + 4,42 \\
 &= 101,27cm^3.
 \end{aligned}$$

**Tabela 5.3** – Cálculo do volume do sólido com 16 cascas

Cascas	Raio externo (R)	Raio interno (r)	Altura do cilindro (h)	Volume do cilindro externo ( $V_{ce} = \pi \cdot R^2 \cdot h$ )	Volume do cilindro interno ( $V_{ci} = \pi \cdot r^2 \cdot h$ )	Volume da casca ( $V_{ce} - V_{ci}$ )
Casca 1	0,25cm	0	5,81cm	$3,14 \cdot 0,25^2 \cdot 5,81 = 1,14cm^3$	$3,14 \cdot 0^2 \cdot 5,81 = 0$	$1,14 - 0 = 1,14cm^3$
Casca 2	0,5cm	0,25cm	5,44cm	$3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 5,44 = 4,27cm^3$	$3,14 \cdot 0,25^2 \cdot 5,44 = 1,07$	$4,27 - 1,07 = 3,2cm^3$
Casca 3	0,75cm	0,5cm	5,06cm	$3,14 \cdot 0,75^2 \cdot 5,06 = 8,94cm^3$	$3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 5,06 = 3,97$	$8,94 - 3,97 = 4,97cm^3$
Casca 4	1cm	0,75cm	4,69cm	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 4,69 = 14,72cm^3$	$3,14 \cdot 0,75^2 \cdot 4,69 = 8,28$	$14,72 - 8,28 = 6,44cm^3$
Casca 5	1,25cm	1cm	4,31cm	$3,14 \cdot 1,25^2 \cdot 4,31 = 21,16cm^3$	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 4,31 = 13,54$	$21,16 - 13,54 = 7,62cm^3$
Casca 6	1,5cm	1,25cm	3,94cm	$3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 3,94 = 27,82cm^3$	$3,14 \cdot 1,25^2 \cdot 3,94 = 19,32$	$27,82 - 19,32 = 8,5cm^3$
Casca 7	1,75cm	1,5cm	3,56cm	$3,14 \cdot 1,75^2 \cdot 3,56 = 34,26cm^3$	$3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 3,56 = 25,17$	$34,26 - 25,17 = 9,09cm^3$
Casca 8	2cm	1,75cm	3,19cm	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 3,19 = 40,04cm^3$	$3,14 \cdot 1,75^2 \cdot 3,19 = 30,65$	$40,04 - 30,65 = 9,38cm^3$
Casca 9	2,25cm	2cm	2,81cm	$3,14 \cdot 2,25^2 \cdot 2,81 = 44,71cm^3$	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 2,81 = 35,33$	$44,71 - 35,33 = 9,38cm^3$
Casca 10	2,5cm	2,25cm	2,44cm	$3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 2,44 = 47,84cm^3$	$3,14 \cdot 2,25^2 \cdot 2,44 = 38,75$	$47,84 - 38,75 = 9,09cm^3$
Casca 11	2,75cm	2,5cm	2,06cm	$3,14 \cdot 2,75^2 \cdot 2,06 = 48,98cm^3$	$3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 2,06 = 40,48$	$48,98 - 40,48 = 8,5cm^3$
Casca 12	3cm	2,75cm	1,69cm	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 1,69 = 47,69cm^3$	$3,14 \cdot 2,75^2 \cdot 1,69 = 40,07$	$47,69 - 40,07 = 7,62cm^3$
Casca 13	3,25cm	3cm	1,31cm	$3,14 \cdot 3,25^2 \cdot 1,31 = 43,53cm^3$	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 1,31 = 37,09$	$43,53 - 37,09 = 6,44cm^3$
Casca 14	3,5cm	3,25cm	0,94cm	$3,14 \cdot 3,5^2 \cdot 0,94 = 36,06cm^3$	$3,14 \cdot 3,25^2 \cdot 0,94 = 31,09$	$36,06 - 31,09 = 4,97cm^3$
Casca 15	3,75cm	3,5cm	0,56cm	$3,14 \cdot 3,75^2 \cdot 0,56 = 24,84cm^3$	$3,14 \cdot 3,5^2 \cdot 0,56 = 21,64$	$24,84 - 21,64 = 3,2cm^3$
Casca 16	4cm	3,75cm	0,19cm	$3,14 \cdot 4^2 \cdot 0,19 = 9,42cm^3$	$3,14 \cdot 3,75^2 \cdot 0,19 = 8,28cm^3$	$9,42 - 8,28 = 1,14cm^3$

**Fonte:** Elaboração própria.

Com o resultado dos volumes das 16 cascas pela Tabela 5.3, o volume total do sólido com 16 cascas é

$$\begin{aligned}
 V_{ts} &= V_{c1} + V_{c2} + \dots + V_{c15} + V_{c16} \\
 &= 1,14 + 3,2 + 4,97 + 6,44 + 7,62 + 8,5 + 9,09 + 9,38 + \\
 &\quad + 9,38 + 9,09 + 8,5 + 7,62 + 6,44 + 4,97 + 3,2 + 1,14 \\
 &= 100,68cm^3.
 \end{aligned}$$

Enquanto os alunos efetuam os cálculos, perguntas como “Vocês percebem algum padrão na variação dos raios e altura das cascas?” ou “O que acontece com o formato do sólido, se afinarmos mais as cascas?” com a finalidade de fazer os alunos começarem a pensar no cone como a forma final do sólido.

#### **Fechamento (10 minutos)**

Após a finalização dos cálculos pela turma, o professor deve comparar junto com os grupos, os volumes encontrados para cada tipo de sólido e fazê-los perceber o fato dos volumes serem muito parecidos para sólidos que tem o mesmo raio e alturas próximas. Mediante os resultados encontrados, o professor mostra à turma o cone exemplo das cascas (Figura 5.1d) e calcula junto da turma, usando a Equação 3.10 para o cálculo do cone, o seu volume para fazer a comparação com os volumes encontrados pelo grupo. Usando a equação demonstrada no referencial teórico, e sabendo que o cone tem 4cm de raio e 6cm de altura, temos:

$$V_c = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_c \cong \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 6 \\ \cong 100,48 \text{cm}^3.$$

Com isso, deve-se perceber a proximidade dos valores e, assim, sugerir que método das cascas cilíndricas pode resultar em um valor aproximado para o cálculo do volume do cone.

A partir dessa aula, o professor introduz aos alunos o Método das Cascas Cilíndricas, ainda sem a equação, para o cálculo do volume de sólidos de revolução, dando ênfase à importância da visualização e manipulação dos sólidos.

Como desafio final, o professor pode pedir aos alunos para desenvolver uma possível equação para calcular o volume de um cone qualquer, usando o método das cascas.

### 5.1.5 Avaliação

A avaliação desta aula se dá de forma qualitativa, através da observação das reflexões feitas durante a aula, vindas ou não das perguntas norteadoras feitas durante a atividade. Além disso, também pode ser feita pela participação dos grupos e estratégias usadas para contornar problemas encontrados durante o desenvolvimento dos cálculos.

## 5.2 Aula 2 - A Equação do método das cascas para o cálculo do volume de um cone

Nesta aula, será apresentada a forma adaptada para o ensino médio da equação do método das cascas cilíndricas. É recomendado que ela seja trabalhada apenas após a aula introdutória, para que os alunos já tenham alguma noção do conteúdo. Também será feita a relação das medidas dos raios e da altura das cascas com seus representantes no plano cartesiano, pois a equação se baseia em coordenadas cartesianas. O tempo médio dessa aula é de 50 a 60 minutos, podendo ser estendido de acordo com a necessidade da turma e do professor.

### 5.2.1 Objetivo da aula

- Fazer a relação das medidas dos sólidos usados na última aula com pontos do plano cartesiano;
- Relacionar a junção dos sólidos com o cone e a função que o gerou através da revolução em torno do eixo  $y$ ;
- Generalizar o processo de soma do volume das cascas;
- Apresentar a Equação 3.6 para o cálculo do volume pelo método das cascas, já definida no

Capítulo 3, reescrita a seguir

$$V_s = 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) + \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) + \dots + \bar{x}_n \cdot f(\bar{x}_n)]. \quad (5.1)$$

- Usar o Excel para automatizar os cálculos das cascas e do volume;
- Trabalhar a ideia de aproximação e limite.

### 5.2.2 Conteúdos abordados

- Função Afim;
- Interpretação de sólidos de revolução no plano cartesiano;
- O método das cascas cilíndricas;
- Interpretação geométrica da equação do método das cascas;

### 5.2.3 Materiais e recursos

- Quadro branco;
- Projetor ou TV;
- Tabela Excel para cálculo do volume por cascas (cone)<sup>3</sup> (Figura 5.2);

**Figura 5.2** – Tabela Excel para o cálculo do volume do cone.

Tabela para a construção do sólido geométrico (cone) pelo método das cascas cilíndricas							
Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Valor (a) da função afim		Casca 1					
Valor (b) da função afim		Casca 2					
Valor do raio inicial		Casca 3					
Valor do raio final		Casca 4					
Intervalo de rotação		Casca 5					
Quantidade de cascas		Casca 6					
Espessura da casca		Casca 7					
		Casca 8					
		Casca 9					
		Casca 10					
		Casca 11					
		Casca 12					
		Casca 13					
		Casca 14					
		Casca 15					
		Casca 16					
		Casca 17					
		Casca 18					
		Casca 19					
		Casca 20					
						Soma total:	
						Volume do sólido	

**Fonte:** Elaboração própria.

<sup>3</sup> A configuração desta tabela pode ser verificada no Capítulo 4.

- Calculadora;
- Impressão da tabela para preenchimento e uso manual.

#### 5.2.4 Desenvolvimento da aula

##### **Início (10 minutos)**

Para o início dessa aula, se torna interessante o professor recapitular o que foi realizado na aula anterior, lembrando o uso dos modelos físicos estudados e, como ao unir todas as cascas, elas se assemelhavam a um cone. Essa conversa deve conduzir os alunos a observar os padrões entre o raio interno e externo das cascas, sua espessura e altura, isso, para conduzi-los a construção gráfica daquele sólido.

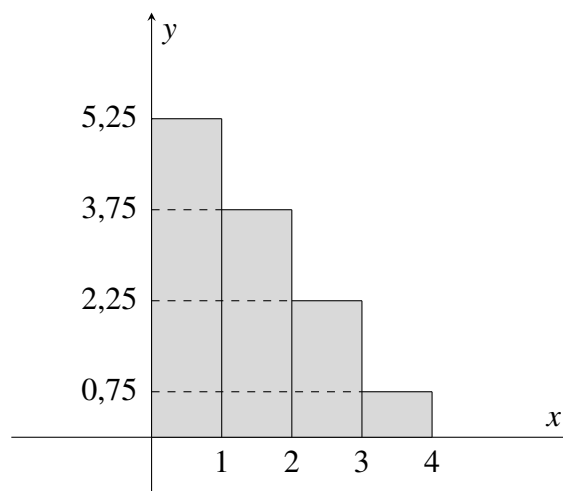
Nesse Momento, o professor pode lembrar, através de uma tabela, os valores encontrados para os raios externos e internos, espessura e altura das cascas dos sólidos, e assim construir um gráfico com esses valores, formando uma fatia da casca para que se veja os retângulos formados, a fim de comparar o que acontece com suas medidas e coordenadas. Para facilitar os cálculos e otimizar o tempo, o professor pode utilizar o sólido de 4 cascas, é o que faremos aqui. Os modelos da tabela e gráfico estão representados a seguir.

**Tabela 5.4** – Raio externo e interno, espessura e altura das cascas do sólido com 4 cascas.

Cascas	Raio externo ( $R$ )	Raio interno ( $r$ )	Espessura da casca ( $\Delta x$ )	Altura do cilindro ( $h$ )
Casca 1	1cm	0	$1 - 0 = 1cm$	5,25cm
Casca 2	2cm	1cm	$2 - 1 = 1cm$	3,75cm
Casca 3	3cm	2cm	$3 - 2 = 1cm$	2,25cm
Casca 4	4cm	3cm	$4 - 3 = 1cm$	0,75cm

**Fonte:** Elaboração própria.

Através da Tabela 5.4, temos os valores do raio interno e externo de cada casca e também suas alturas, assim, podemos montar um gráfico que desenhe os retângulos fatiados de cada casca (Gráfico 5.1).

**Gráfico 5.1** – Retângulos resultantes da fatia do sólido de cascas, no plano cartesiano.

Fonte: Elaboração própria.

### Desenvolvimento (30 a 40 minutos)

A partir do Gráfico 5.1, o professor pode começar induzir os alunos a perceberem que aquele sólido de cascas foi construído através de uma função revolucionada em torno do eixo  $y$ . Para isso, ele pode plotar pontos do gráfico que construam a reta desejada. Para tal fim, o professor começa a calcular os raios médios de cada casca e desenha um segmento tracejado até que intersecte a coordenada da altura daquela casca. Após isso, ele nomeia cada um desses pontos de interseção e traça a reta que passe por esses pontos. Para melhor entendimento, vamos considerar  $x_0 = 0, x_1 = 1, \dots, x_4 = 4$ . Para calcular o raio médio de uma casca, basta fazermos a média aritmética das coordenadas em  $x$  que representem o raio interno e externo daquela casca<sup>4</sup>, pela equação

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}. \quad (5.2)$$

Daí, segue:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_0 + x_1}{2} \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{0 + 1}{2} \Rightarrow \bar{x}_1 = 0,5;$$

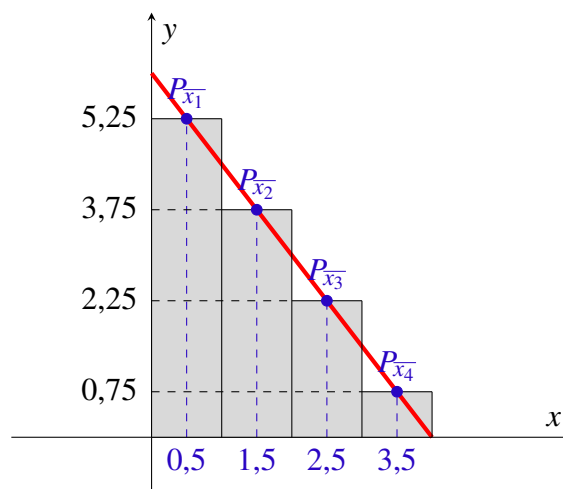
$$\bar{x}_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \bar{x}_2 = \frac{1 + 2}{2} \Rightarrow \bar{x}_2 = 1,5;$$

$$\bar{x}_3 = \frac{x_2 + x_3}{2} \Rightarrow \bar{x}_3 = \frac{2 + 3}{2} \Rightarrow \bar{x}_3 = 2,5;$$

$$\bar{x}_4 = \frac{x_3 + x_4}{2} \Rightarrow \bar{x}_4 = \frac{3 + 4}{2} \Rightarrow \bar{x}_4 = 3,5.$$

Descobertos os raios médios, basta seguir os próximos passos indicados anteriormente e construir o novo gráfico com a reta definida (Gráfico 5.2).

<sup>4</sup> É interessante usarmos esse método para calcular o raio médio pois a turma pode não ter estudado geometria analítica, que geralmente é vista apenas no 3º ano do ensino médio, e assim não saber o método para o cálculo de um ponto médio.

**Gráfico 5.2** – Reta encontrada através da intersecção dos raios médio com as alturas dos retângulos.

Fonte: Elaboração própria.

Nessa etapa da aula, com as informações definidas, basta agora descobriremos a equação dessa reta. Podemos fazer esse processo de duas formas: através de um sistema de equações ou calculando o determinante entre 3 pontos<sup>5</sup>, o segundo método servirá apenas para as turmas que já viram o conteúdo de geometria analítica. Tais desenvolvimentos podem ser conferidos a seguir.

a) Descobrimos a função pelo método do sistema de equações:

Através desse método, vamos escolher dois pontos  $P_{\bar{x}_i}$  para montar o sistema de equações. Considerando que os pontos formaram a reta, então sabemos que a função procurada é da forma  $f(x) = ax + b$ . Pegando  $P_{\bar{x}_2}$  e  $P_{\bar{x}_3}$  como exemplo, podemos fazer

$$\begin{cases} P_{\bar{x}_2} \Rightarrow f(1,5) = 3,75 \\ P_{\bar{x}_3} \Rightarrow f(2,5) = 2,25 \end{cases}$$

Daí, segue

$$\begin{cases} a \cdot (1,5) + b = 3,75 \\ a \cdot (2,5) + b = 2,25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,5a + b = 3,75 \\ 2,5a + b = 2,25 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por  $(-1)$  em ambos os membros e usando o método da adição, conseguimos descobrir os  $a$ :

$$\begin{cases} (1,5a + b) \cdot (-1) = 3,75 \cdot (-1) \\ 2,5a + b = 2,25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1,5a - b = -3,75 \\ 2,5a + b = 2,25 \end{cases} \Rightarrow a = -1,5.$$

<sup>5</sup> Fica a cargo do leitor revisar esses dois métodos nos livros referenciados neste capítulo.

Substituindo  $a$  em uma das equações, temos:

$$(-1,5)(1,5) + b = 3,75 \Rightarrow -2,25 + b = 3,75 \Rightarrow b = 3,75 + 2,25 \Rightarrow b = 6.$$

Logo, a função formada é

$$f(x) = -1,5x + 6. \quad (5.3)$$

b) Descobrimos a equação da reta por determinante:

Analisando a reta, agora usando  $P_{x_1}$  e  $P_{x_4}$ , basta usarmos suas coordenadas para encontrar a equação dessa reta. Por Iezzi (2013, p. 28), podemos encontrar a equação da reta igualando o determinante de 3 pontos, 2 conhecidos e um desconhecido, a 0, contanto que estes pertençam à reta. Considerando  $P_x(x,y)$ ,  $P_{x_1}(0,5, 5,25)$  e  $P_{x_4}(3,5, 0,75)$ , temos

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0,5 & 5,25 & 1 \\ 3,5 & 0,75 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Calculando o determinante, através do método de Sarrus, Iezzi e Hazzan (2013, p. 84):

$$\det(f) = \begin{vmatrix} x & y & 1 & x & y \\ 0,5 & 5,25 & 1 & 0,5 & 5,25 \\ 3,5 & 0,75 & 1 & 3,5 & 0,75 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \det(f) &= (x \cdot 5,25 \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot 3,5 + 1 \cdot 0,5 \cdot 0,75) \\ &\quad - (1 \cdot 5,25 \cdot 3,5 + x \cdot 1 \cdot 0,75 + y \cdot 0,5 \cdot 1) = 0. \end{aligned}$$

Daí, segue

$$5,25x + 3,5y + 0,375 - (18,375 + 0,75x + 0,5y) = 0 \Rightarrow$$

$$5,25x + 3,5y + 0,375 - 18,375 - 0,75x - 0,5y = 0 \Rightarrow$$

$$4,5x + 3y - 18 = 0.$$

A partir daqui, basta isolarmos o  $y$  e encontraremos a equação da reta:

$$3y = -4,5x + 18 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-4,5x + 18}{3} \Rightarrow$$

$$y = -1,5x + 6. \quad (5.4)$$

Nesse momento, com a função definida, o professor revela que foi com essa função que os sólidos usados na primeira aula foram modelados e que, através dela, revolucionando-a em torno do eixo  $y$ , ela forma o cone da Figura 5.1d, podendo até mostrar novamente aos alunos o sólido. Nesse momento, também é interessante mostrar que ao calcularmos  $P_{x_0}$ , de fato encontramos 6, que é onde a reta intercepta o eixo  $y$  e, por consequência, é a altura do cone e ao calcularmos  $P_{x_4}$  encontramos 0, que é onde a reta intercepta o eixo  $x$  e isso faz com que 4 seja o raio do cone.

Sabendo a função que usamos para gerar o sólido de revolução com cascas, temos o suficiente para criá-lo com quantas cascas quisermos e calcular o volume desse sólido. É a hora de apresentar aos alunos a Equação 5.1:

$$V_s = 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) + \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) + \dots + \bar{x}_n \cdot f(\bar{x}_n)].$$

Nesse momento, relembre detalhadamente o que é cada um dos pontos. Que  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  podem ser calculados pela Equação 5.2, que

$$\Delta x = x_i - x_{i-1},$$

com

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_i - x_{i-1}$$

e também que a altura de cada casca é calculada através de  $f(\bar{x}_i)$ .

Como exemplo, o professor pode calcular junto com a turma, o volume do sólido que tomamos no início do desenvolvimento da aula, para mostrar que, de fato, a equação funciona.

Considerando a função  $f(x) = -1,5x + 6$ , no intervalo  $[0, 1]$  em  $x$ , e dividindo esse intervalo em 4 partes, com  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$  e  $x_4 = 4$ , ao calcular  $\Delta x$ , temos

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 2 - 1 \Rightarrow \Delta x = 1.$$

Com isso, podemos calcular o volume do sólido. Para isso, devemos calcular o ponto médio e altura de cada uma das cascas e também o produto entre esses elementos, os cálculos podem ser verificados na Tabela 5.5.

**Tabela 5.5** – Cálculo do volume do sólido com 4 cascas

Cascas	Coordenada externa ( $x_i$ )	Coordenada interna ( $x_{i-1}$ )	Ponto médio ( $\bar{x}_i$ )	Altura do cilindro em $\bar{x}_i$ ( $f(\bar{x}_i)$ )	$\bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i)$
Casca 1	1	0	$\frac{0+1}{2} = 0,5$	$(-1,5) \cdot 0,5 + 6 = 5,25$	$0,5 \cdot 5,25 = 2,625$
Casca 2	2	1	$\frac{1+2}{2} = 1,5$	$(-1,5) \cdot 1,5 + 6 = 3,75$	$1,5 \cdot 3,75 = 5,625$
Casca 3	3	2	$\frac{2+3}{2} = 2,5$	$(-1,5) \cdot 2,5 + 6 = 2,25$	$2,5 \cdot 2,25 = 5,625$
Casca 4	4	3	$\frac{3+4}{2} = 3,5$	$(-1,5) \cdot 3,5 + 6 = 0,75$	$3,5 \cdot 0,75 = 2,625$

**Fonte:** Elaboração própria.

Com cada um dos elementos calculados, basta substituí-los na Equação 5.1 e teremos o volume do sólido:

$$\begin{aligned}
 V_s &= 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) + \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) + \bar{x}_3 \cdot f(\bar{x}_3) + \bar{x}_4 \cdot f(\bar{x}_4)] \\
 &= 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot [2,625 + 5,625 + 5,625 + 2,625] \\
 &= 103,62.
 \end{aligned}$$

Após finalizar os cálculos, dê ênfase a quanto o resultado encontrado se aproxima do calculado na aula anterior, afirmando que esse método é muito prático e seguro para o cálculo do volume do cone estudado.

**Fechamento (10 minutos)**

Para finalizar a aula, o professor pode fazer uma recapitulação de todos os passos que foram desenvolvidos nas duas aulas para o estudo desse método de cálculo de volumes, começando da análise dos sólidos impressos, da medida e observação dos padrões até finalizar com a procura da função que gerou aquele sólido e o cálculo do volume usando a Equação 5.1.

Após essa breve revisão, o professor pode finalizar mostrando a tabela para o cálculo do volume no Excel. Nesse momento, é interessante mostrar como a tabela funciona, indicando e explicando o que são os elementos de cada coluna e como se configura a tabela para que obedeça a função descoberta nesta aula colocando os seus coeficientes e o intervalo que define o volume do sólido de revolução (Figura 5.3).

**Figura 5.3 – Configuração da função afim.**

	A	B	C
1			
2		Tabela	
3			
4		Configuração do sólido	Valor
5		Valor (a) da função afim	-1,5
6		Valor (b) da função afim	6
7		Valor do raio inicial	
8		Valor do raio final	
9		Intervalo de rotação	
10		Quantidade de cascas	

(a) Coeficientes da função.

	A	B	C
1			
2		Tabela	
3			
4		Configuração do sólido	Valor
5		Valor (a) da função afim	-1,5
6		Valor (b) da função afim	6
7		Valor do raio inicial	0
8		Valor do raio final	4
9		Intervalo de rotação	
10		Quantidade de cascas	

(b) Intervalo de revolução da função.

**Fonte:** Registrado pelo autor.

Com isso, o professor pode mostrar aos alunos os volume calculados na tabela do Excel para 8 e 16 cascas, afim de comparar os valores do volume encontrados na tabela com os volume encontrados pelos alunos na primeira aula (Figura 5.4).

**Figura 5.4 – Volume do cone para 8 e 16 cascas.**

Tabela para a construção do sólido geométrico (cone) pelo método das cascas cilíndricas	
Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função afim	-1,5
Valor (b) da função afim	6
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	4
Intervalo de rotação	4
Quantidade de cascas	8
Espessura da casca	0,5

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0,5	0,25	5,63	1,41
Casca 2	0,5	1	0,75	4,88	3,66
Casca 3	1	1,5	1,25	4,13	5,16
Casca 4	1,5	2	1,75	3,38	5,91
Casca 5	2	2,5	2,25	2,63	5,91
Casca 6	2,5	3	2,75	1,88	5,16
Casca 7	3	3,5	3,25	1,13	3,66
Casca 8	3,5	4	3,75	0,38	1,41
Casca 9	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 10	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 11	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 12	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 13	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 14	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 15	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 16	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 17	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 18	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 19	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 20	0	0	0,00	0,00	0,00
				Soma total:	32,25
				Volume do sólido	101,32

**(a) Volume do cone para 8 cascas.**

Tabela para a construção do sólido geométrico (cone) pelo método das cascas cilíndricas	
Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função afim	-1,5
Valor (b) da função afim	6
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	4
Intervalo de rotação	4
Quantidade de cascas	16
Espessura da casca	0,25

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0,25	0,13	5,81	0,73
Casca 2	0,25	0,5	0,38	5,44	2,04
Casca 3	0,5	0,75	0,63	5,06	3,16
Casca 4	0,75	1	0,88	4,69	4,10
Casca 5	1	1,25	1,13	4,31	4,85
Casca 6	1,25	1,5	1,38	3,94	5,41
Casca 7	1,5	1,75	1,63	3,56	5,79
Casca 8	1,75	2	1,88	3,19	5,98
Casca 9	2	2,25	2,13	2,81	5,98
Casca 10	2,25	2,5	2,38	2,44	5,79
Casca 11	2,5	2,75	2,63	2,06	5,41
Casca 12	2,75	3	2,88	1,69	4,85
Casca 13	3	3,25	3,13	1,31	4,10
Casca 14	3,25	3,5	3,38	0,94	3,16
Casca 15	3,5	3,75	3,63	0,56	2,04
Casca 16	3,75	4	3,88	0,19	0,73
Casca 17	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 18	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 19	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 20	0	0	0,00	0,00	0,00
				Soma total:	64,13
				Volume do sólido	100,73

**(b) Volume do cone para 16 cascas.**

**Fonte:** Registrado pelo autor.

Como atividade para os alunos, o professor pode passar para cada um dos alunos calcular individualmente o volume dos sólidos de 8 e 16 cascas, da mesma função da Equação 5.3, através da Equação 5.1, e comparar os resultados encontrados com os resultados da Figura 5.4.

Como provocação, pode-se fazer perguntas do tipo: “E se a função for uma curva, será que esse método também funciona?”. Isso servirá como gancho para a próxima etapa, que será calcular o volume de sólidos formados por curvas.

### 5.2.5 Avaliação

Nesta aula, a avaliação é feita de forma qualitativa, observando a participação dos alunos no decorrer das demonstrações e provas. Além de ser avaliada ao comparar os resultados encontrados pelos alunos no cálculo dos volumes da primeira aula, com os feitos através da Equação principal desta aula.

Uma proposta colocada é pedir aos alunos que expliquem o que significa as reticências e o  $x_n$  na parte  $\bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) + \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) + \dots + \bar{x}_n \cdot f(\bar{x}_n)$  da Equação 5.1, com a finalidade de saber se os alunos compreenderam cada parte da mesma.

## 5.3 Aula 3 - A capacidade de uma taça de bebida

A partir desta aula começaremos a trabalhar o método das cascas com curvas. Além disso, será mostrado que esse método pode ser usado para descobrir algumas informações que podem ser úteis no cotidiano. O exemplo que será usado é o cálculo da capacidade de uma taça de bebida.

### 5.3.1 Objetivo de aula

- Usar a equação do método das cascas para calcular o volume da taça gerada pela função  $f(x) = -0,25x^2 + 6,25$ ;
- Comparar os resultados encontrados pelos alunos com o valor exato calculado pela Equação 3.12;
- Usar o Excel para analisar resultado para outras quantidades de cascas.

### 5.3.2 Conteúdo abordados

- Volume pelo método das cascas;
- Comparação de resultados por aproximação.

### 5.3.3 Materiais e recursos

- Taça com interior gerado pela função  $f(x) = -0,25x^2 + 6,25$  impressa em 3D<sup>6</sup>, representada pela Figura 5.5.

<sup>6</sup> Link para download do arquivo em formato .stl para a impressão do sólido. Disponível em: <<https://drive.google.com/drive/folders/1RJzICDvZdPTOK2NfipeUsxQtenybANbs?usp=sharing>>. Acesso em: 29 jul. 2025.

**Figura 5.5 – Taça de bebida**



**Fonte:** Registrado pelo autor.

- Tabela Excel com a função e os cálculos de cada passo do volume da taça<sup>7</sup> com cálculo até a 20ª casca, como ilustra a Figura 5.6;

**Figura 5.6 – Tabela em Excel com os dados e todos os passos do cálculo do volume da taça**

Tabela para a construção do sólido geométrico (paraboloide) pelo método das cascas cilíndricas							
Configuração do sólido	Valor	Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Valor (a) da função quadrática	-0,25	Casca 1	0	0	0,00	0,00	0,00
Valor (b) da função quadrática	0	Casca 2	0	0	0,00	0,00	0,00
Valor (c) da função quadrática	6,25	Casca 3	0	0	0,00	0,00	0,00
Valor do raio inicial	0	Casca 4	0	0	0,00	0,00	0,00
Valor do raio final	0	Casca 5	0	0	0,00	0,00	0,00
Intervalo de rotação	0	Casca 6	0	0	0,00	0,00	0,00
Quantidade de cascas	20	Casca 7	0	0	0,00	0,00	0,00
Espessura da casca	0	Casca 8	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 9	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 10	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 11	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 12	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 13	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 14	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 15	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 16	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 17	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 18	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 19	0	0	0,00	0,00	0,00
		Casca 20	0	0	0,00	0,00	0,00
						Soma total:	0,00
						Volume do sólido	0,00

**Fonte:** Registrado pelo autor.

- Calculadora;
- Quadro Branco;
- Projetor ou TV;

<sup>7</sup> Link para download do arquivo em formato .xls da tabela. Disponível em: <[https://docs.google.com/spreadsheets/d/1vf26\\_1R2xIuNXsksJyRotHZhGBGbk\\_97/edit?usp=sharing&oid=109630566864520703501&rtpof=true&sd=true](https://docs.google.com/spreadsheets/d/1vf26_1R2xIuNXsksJyRotHZhGBGbk_97/edit?usp=sharing&oid=109630566864520703501&rtpof=true&sd=true)>. Acesso em: 29 jul. 2025.

### 5.3.4 Desenvolvimento da aula

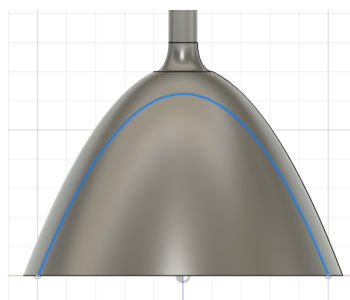
#### Início (10 minutos)

Nesta terceira aula, o professor pode iniciar a aula já com a taça em mãos e perguntar algo do tipo: “Observando o tamanho da taça, vocês podem estimar a sua capacidade, ou seja, quantos  $mL$ 's de um líquido ela suporta?”. Então escutando respostas dos alunos, pode continuar: “Será que existe um método que possa nos dar um valor para essa capacidade?”. A ideia aqui é induzir os alunos à equação do método das cascas, como meio para encontrar a capacidade da taça.

Para tal, o professor pode colocar o copo da taça virada para baixo, e perguntar para os alunos que tipo de função o formato do copo da taça lembrava a eles, a intenção aqui é levá-los a pensar no interior do copo como uma função quadrática, mais precisamente com concavidade voltada para baixo.

Nesse momento, é conveniente mostrar aos alunos que o interior do copo daquela taça foi construída através de uma função quadrática, e que a função em específico é  $f(x) = -0,25x^2 + 6,25$ , que pode ser representada pela Figura 5.7.

**Figura 5.7** – Projeção da função  $f(x)$  que define o interior da taça, em azul.



Fonte: Registrado pelo autor.

#### Desenvolvimento (30 minutos)

A atividade principal aqui é bem simples: fazer com que os alunos calculem a capacidade aproximada dessa taça. Desse ponto, o professor deve começar indicando que para essa função, o raio da borda da taça é de  $5cm$ , ou seja, que intervalo no qual vamos dividir a função é  $[0, 5]$  em  $x$ . Desse modo, a turma pode ser dividida em grupos, onde os grupos vão calcular o volume para 5 e 10 cascas. Nesse momento, como o intervalo é de 0 a 5, é relevante falar aos alunos que dividir a quantidade de cascas em múltiplos de 5 facilitar os cálculos na hora da divisão, pois o intervalo de revolução tem 5 unidades.

Usando novamente a Equação 5.1 para o cálculo do volume, devemos encontrar  $\Delta x$  e os produtos  $\bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i)$ . Os resultados para 5 cascas e 10 cascas, como exemplo, com aproximação de duas casas decimais e com  $\pi = 3,14$ , podem ser verificados a seguir:

- Para o sólido com 5 cascas:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 2 - 1 \Rightarrow \Delta x = 1$$

**Tabela 5.6** – Cálculo do volume da Taça com 5 cascas

Cascas	Coordenada externa ( $x_i$ )	Coordenada interna ( $x_{i-1}$ )	Ponto médio ( $\bar{x}_i$ )	Altura do cilindro em $\bar{x}_i$ ( $f(\bar{x}_i)$ )	$\bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i)$
Casca 1	1	0	$\frac{0+1}{2} = 0,5$	$(-0,25) \cdot (0,5)^2 + 6,25 = 6,19$	$0,5 \cdot 6,19 = 3,09$
Casca 2	2	1	$\frac{1+2}{2} = 1,5$	$(-0,25) \cdot (1,5)^2 + 6,25 = 5,69$	$1,5 \cdot 5,69 = 8,53$
Casca 3	3	2	$\frac{2+3}{2} = 2,5$	$(-0,25) \cdot (2,5)^2 + 6,25 = 4,69$	$2,5 \cdot 4,69 = 11,72$
Casca 4	4	3	$\frac{3+4}{2} = 3,5$	$(-0,25) \cdot (3,5)^2 + 6,25 = 3,19$	$3,5 \cdot 3,19 = 11,16$
Casca 5	5	4	$\frac{4+5}{2} = 4,5$	$(-0,25) \cdot (4,5)^2 + 6,25 = 1,19$	$4,5 \cdot 1,19 = 5,34$

Fonte: Elaboração própria.

Com os elementos do parabolóide com 5 cascas calculados na Tabela 5.6, o volume do sólido é

$$\begin{aligned}
 V_s &= 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) + \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) + \bar{x}_3 \cdot f(\bar{x}_3) + \bar{x}_4 \cdot f(\bar{x}_4) + \bar{x}_5 \cdot f(\bar{x}_5)] \\
 &= 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot [3,09 + 8,53 + 11,72 + 11,16 + 5,34] \\
 &= 250,22 \text{cm}^3.
 \end{aligned}$$

- Para o sólido com 10 cascas:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 1 - 0,5 \Rightarrow \Delta x = 0,5$$

**Tabela 5.7** – Cálculo do volume da Taça com 10 cascas

Cascas	Coordenada externa ( $x_i$ )	Coordenada interna ( $x_{i-1}$ )	Ponto médio ( $\bar{x}_i$ )	Altura do cilindro em $\bar{x}_i$ ( $f(\bar{x}_i)$ )	$\bar{x}_i \cdot f(\bar{x}_i)$
Casca 1	0,5	0	$\frac{0+0,5}{2} = 0,25$	$(-0,25) \cdot (0,25)^2 + 6,25 = 6,23$	$0,25 \cdot 6,23 = 1,56$
Casca 2	1	0,5	$\frac{0,5+1}{2} = 0,75$	$(-0,25) \cdot (0,75)^2 + 6,25 = 6,11$	$0,75 \cdot 6,11 = 4,58$
Casca 3	1,5	1	$\frac{1+1,5}{2} = 1,25$	$(-0,25) \cdot (1,25)^2 + 6,25 = 5,86$	$1,25 \cdot 5,86 = 7,32$
Casca 4	2	1,5	$\frac{1,5+2}{2} = 1,75$	$(-0,25) \cdot (1,75)^2 + 6,25 = 5,48$	$1,75 \cdot 5,48 = 9,60$
Casca 5	2,5	2	$\frac{2+2,5}{2} = 2,25$	$(-0,25) \cdot (2,25)^2 + 6,25 = 4,98$	$2,25 \cdot 4,98 = 11,21$
Casca 6	3	2,5	$\frac{2,5+3}{2} = 2,75$	$(-0,25) \cdot (2,75)^2 + 6,25 = 4,36$	$2,75 \cdot 4,36 = 11,99$
Casca 7	3,5	3	$\frac{3+3,5}{2} = 3,25$	$(-0,25) \cdot (3,25)^2 + 6,25 = 3,61$	$3,25 \cdot 3,61 = 11,73$
Casca 8	4	3,5	$\frac{3,5+4}{2} = 3,75$	$(-0,25) \cdot (3,75)^2 + 6,25 = 2,73$	$3,75 \cdot 2,73 = 10,25$
Casca 9	4,5	4	$\frac{4+4,5}{2} = 4,25$	$(-0,25) \cdot (4,25)^2 + 6,25 = 1,73$	$4,25 \cdot 1,73 = 7,37$
Casca 10	5	4,5	$\frac{4,5+5}{2} = 4,75$	$(-0,25) \cdot (4,75)^2 + 6,25 = 0,61$	$4,75 \cdot 0,61 = 2,89$

Fonte: Elaboração própria.

Com os elementos do parabolóide com 10 cascas calculados na Tabela 5.7, o volume do sólido é

$$\begin{aligned}
 V_s &= 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\bar{x}_1 \cdot f(\bar{x}_1) + \bar{x}_2 \cdot f(\bar{x}_2) + \dots + \bar{x}_{10} \cdot f(\bar{x}_{10})] \\
 &= 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot [1,56 + 4,58 + 7,32 + 9,6 + 11,21 + \\
 &\quad + 11,99 + 11,73 + 10,25 + 7,37 + 2,89] \\
 &= 246,54 \text{cm}^3.
 \end{aligned}$$

Uma ferramenta interessante, que também serve para verificar os cálculos dos alunos de forma mais rápida, é a tabela do Excel mencionada no Capítulo 4. Com ela, podemos verificar o volume para quantas cascas tivermos dividido o sólido, com o máximo sendo 20. Observe nas Figuras 5.8 e 5.9, a comparação dos cálculos já feitos para 5 e 10 cascas.

**Figura 5.8** – Tabela do Excel que calcula o volume do parabolóide com 5 cascas

Tabela para a construção do sólido geométrico (parabolóide) pelo método das cascas cilíndricas	
Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função quadrática	-0,25
Valor (b) da função quadrática	0
Valor (c) da função quadrática	6,25
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	5
Intervalo de rotação	5
Quantidade de cascas	5
Espessura da casca	1

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	1	0,50	6,19	3,09
Casca 2	1	2	1,50	5,69	8,53
Casca 3	2	3	2,50	4,69	11,72
Casca 4	3	4	3,50	3,19	11,16
Casca 5	4	5	4,50	1,19	5,34
Casca 6	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 7	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 8	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 9	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 10	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 11	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 12	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 13	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 14	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 15	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 16	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 17	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 18	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 19	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 20	0	0	0,00	0,00	0,00
Soma total:					39,84
Volume do sólido					250,35

Fonte: Registrado pelo autor.

Observe que na Figura 5.8, a tabela preenche os valores para 5 cascas e o restante das cascas tem seus elementos zerados.

**Figura 5.9** – Tabela do Excel que calcula o volume do parabolóide com 10 cascas

Tabela para a construção do sólido geométrico (parabolóide) pelo método das cascas cilíndricas	
Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função quadrática	-0,25
Valor (b) da função quadrática	0
Valor (c) da função quadrática	6,25
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	5
Intervalo de rotação	5
Quantidade de cascas	10
Espessura da casca	0,5

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0,5	0,25	6,23	1,56
Casca 2	0,5	1	0,75	6,11	4,58
Casca 3	1	1,5	1,25	5,86	7,32
Casca 4	1,5	2	1,75	5,48	9,60
Casca 5	2	2,5	2,25	4,98	11,21
Casca 6	2,5	3	2,75	4,36	11,99
Casca 7	3	3,5	3,25	3,61	11,73
Casca 8	3,5	4	3,75	2,73	10,25
Casca 9	4	4,5	4,25	1,73	7,37
Casca 10	4,5	5	4,75	0,61	2,89
Casca 11	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 12	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 13	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 14	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 15	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 16	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 17	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 18	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 19	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 20	0	0	0,00	0,00	0,00
Soma total:					78,52
Volume do sólido					246,66

Fonte: Registrado pelo autor.

É interessante que nesse momento, o professor esteja com a tabela editável<sup>8</sup> sendo

<sup>8</sup> As configurações de edição da tabela podem ser verificadas no Capítulo 4.

mostrada no projeto ou TV, para explicar aos alunos o que é cada um dos valores presentes na tabela. O ponto principal aqui é explicar a tabela de configuração do sólido, que como se trata de um parabolóide, é formado por uma função quadrática, tendo 3 coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Além disso, mostrar que basta modificar os valores nessa tabela de configuração, como raio inicial, raio final ou quantidade de cascas, que os cálculos se alteram automaticamente.

#### **Fechamento (10 minutos)**

Aqui, o professor pode fazer uma breve revisão de conversão de volume para capacidade. O objetivo é converter junto aos alunos o volume que encontraram para saber a capacidade da taça. Por Steigenberger (2024, p. 43), temos que

$$1dm^3 = 1000mL.$$

Dividindo ambos os membros por 1000, encontramos que

$$1cm^3 = 1mL.$$

Como os volume calculados na aula são dados em centímetro cúbicos, a conversão se torna fácil. Os grupos que calcularam o volume do parabolóide com 5 cascas, encontraram  $250,22cm^3$  para seu volume que, convertendo, equivale a  $250,22mL$  de capacidade. Para os alunos que calcularam com 10 cascas, a conversão do volume para capacidade fica

$$246,54cm^3 = 246,54mL.$$

Desse modo, o professor pode perguntar aos alunos como comprovar aquela capacidade. Uma forma diferente de conseguir essa comprovação, é encher a taça de água e depois de cheia despejar em algum recipiente que tenha o medidor de capacidade em mL. Com o medidor preenchido próximo aos 245mL, o professor pode mostrar aos alunos que aquele método de fato funciona, agora, com um exemplo prático aplicado.

Por fim, como atividade para casa, o professor pode pedir aos alunos para calcular o volume da taça para 20 cascas, para que possam comparar o valor no início da próxima aula.

#### 5.3.5 Avaliação

Nesta aula, a avaliação continua sendo qualitativa, observando a participação dos alunos no decorrer da aula e o trabalho em equipe para calcular o volume da taça. Fica a critério do professor, a entrega dos cadernos para revisão dos cálculos e até uma pequena apresentação de cada grupo do resultado encontrados por eles.

A sequência didática pensada foi desenvolvida nessas três aulas, podendo ser dividida em mais aulas, ou incluindo novos sólidos a desejo do professor. Sempre lembrando que elas devem ser adaptadas à realidade da sala de aula que o professor tem acesso.

#### 5.4 Sugestões para contornar limitações quanto à Impressora 3D

Um problema que pode ser enfrentado pelos professores ao desenvolverem esta proposta é a limitação quanto à impressão 3D — ou mesmo a falta dela. Para contornar essa limitação, o professor pode procurar, dentro de sua cidade, empresas que realizam impressões em 3D, levando os modelos construídos e salvos em formato .stl. Caso não haja essa possibilidade, outra sugestão é solicitar esses sólidos de forma online. Atualmente, existem empresas que prestam esse serviço pela internet, permitindo que o cliente faça o pedido do projeto ou, caso já tenha o arquivo pronto, solicite apenas a impressão e o envio dos objetos.

Como sugestão de sites, destacam-se a EngiPrinters<sup>9</sup> e a 3D KL<sup>10</sup>, que fornecem orçamento e valor para envio de cada peça impressa.

#### 5.5 Observações e sugestões a respeito da sequência didática

O desenvolvimento dessa sequência didática foi pensada para que uma nova forma de calcular o volume de sólidos geométricos fosse ensinado aos alunos do ensino médio. O maior desafio é conseguir desenvolver essas aulas sem perder o rigor matemático mas ainda sim tornando a aula experimental e interessante aos alunos. Além disso, foi pensado uma sequência que não tomasse muitas aulas do planejamento do professor, para que não atrapalhe o segmento das aulas anuais.

Uma sugestão para o professor, principalmente para o que tem disponibilidade de mais tempo em sala, é que uma quarta aula pode ser desenvolvida, dando foco às tabelas produzidas no excel. Nessa quarta aula, o professor pode ensinar os alunos a construir as tabelas por completo, utilizando o passo a passo feito no Capítulo 4, com a finalidade de apresentar uma nova ferramenta poderosa para automatizar vários tipos de cálculo, que é o Excel.

Os coeficientes da função afim e quadrática utilizadas nessa sequência didática foram pensados de forma não aleatória. Os valores  $a = -\frac{3}{2}$  e  $b = 6$  foram escolhidos para que o sólido tivesse 6 unidades de altura e 4 unidades de raio, assim, foi utilizado o método desenvolvido na aula 2 para descobrir a equação dessa função e seus coeficientes. A escolha do raio sendo 4 unidade foi para que quando as cascas variassem em quantidade, a medida e cálculos desses raios ainda fosse de fácil operação, o mesmo pode ser aplicado à altura.

Para encontrar a função quadrática usada na aula 3, foi utilizado o auxílio de uma inteligência artificial, o ChatGPT, o prompt usado para desenvolver a função foi: “Me dê uma função quadrática para revolucionar onde o volume acima do eixo x após revolucionada seja próximo a 250 unidades cúbicas, o eixo de simetria coincida com o eixo y, com concavidade voltada para baixo, suas raízes sejam  $-5$  e  $5$ , e o vértice seja próximo a 6. Além disso essa função revolucionada deve parecer a uma taça de bebida”. Vale ressaltar que apesar do uso da

<sup>9</sup> Link para acessar o site. Disponível em: <<https://engiprinters.com.br/>> . Acesso em: 05 set. 2025.

<sup>10</sup> Link para acessar o site. Disponível em: <<https://3dklimpressao3d.com.br/>> . Acesso em: 05 set. 2025.

inteligência artificial ser muito útil para desenvolver essas e outras funções, o autor recomenda a verificação de tais funções através de aplicações e cálculos que comprovem essas características para que se tenha mais segurança da função que está sendo usada. A escolha de tais valores para altura e raio do copo da taça se deu para simular uma taça real que o autor possui e que tem medidas próximas a essas, dessa forma, cria-se uma ligação entre o real e o calculado, mostrando que a matemática e seus elementos pode estar presente no cotidiano. Como sugestão, o professor também pode desenvolver junto aos alunos o cálculo para funções onde ele também não conhece o volume do sólido, assim se inserindo também em um ambiente de descoberta e investigação no decorrer da aula, e, ao final, comprovando através das tabelas e da equação desenvolvida nos Capítulos 3 e 4 o volume do sólido investigado.

## 6 CONCLUSÕES

No decorrer da escrita de toda a dissertação, foi descrito como a integração da cultura *maker* e dos recursos tecnológicos ao ensino da matemática pode trazer uma nova forma dos alunos compreenderem e aprenderem conteúdos mais complexos, como o cálculo de volume de sólidos de revolução. Essa proposta didática busca não só apresentar um conteúdo mais complexo ao aluno, mas envolver completamente o aluno em todos os passos de construção do conhecimento, onde ele deixa de ser apenas um expectador e passar a ser um atuante no desenvolvimento do conhecimento. Essa experiência se fortalece muito mais, ao se valorizar a experimentação, a manipulação de objetos concretos e a análise de resultados, recursos que devem estar presentes no desenvolvimento da matemática.

Ao manipular os materiais geométricos, os alunos são levados a uma nova forma de visualizar a matemática, com esse recurso, os estudantes podem conseguir observar com mais clareza cada elemento que compõe aquele sólido, dessa forma, eles são levados a compreender melhor os fundamentos do cálculo das cascas de cada sólido, por exemplo. A utilização das tabelas em Excel também facilita bastante o desenvolvimento das atividades, possibilitando a precisão e rapidez na execução dos passos do cálculo, além de servir como parâmetro de aproximação e análise sem abrir mão do rigor matemático.

Além disso, a estrutura da sequência didática foi pensada para que as aulas ficassem bem definidas, com cada elemento bem determinado, mas que ainda fosse flexível para que cada professor pudesse adaptá-la às necessidades de cada turma, visto a existência de diferentes contextos escolares para cada região. Além disso, a descrição detalhada da construção das tabelas e das figuras em 3D fornece ao professor novos recursos, que podem ser objetos de aprofundamento para o educador.

Como possibilidade para trabalhos futuros, sugere-se a aplicação prática desta sequência nas turmas do ensino médio, com a finalidade de analisar os resultados a respeito do desempenho dos alunos em cada atividade proposta da sequência e também à aceitação da proposta pelos professores e em como eles também adaptaram cada uma das aulas às suas necessidades.

Também se torna interessante a expansão do uso da construção de sólidos para outros modelos, como um jarro ou uma rosquinha, por exemplo, para analisar o método das cascas a outros tipos de função. Além de expandir o uso da planilha do excel para automatizar outros modelos de cálculo, como sequências e progressões.

## REFERÊNCIAS

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. 1. ed. Belém, PA: SBEM, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.

CUNHA, Ladislene Amorim Rocha; SANTOS, Marli Regina dos. Matemática e cultura maker: possibilidades para o ensino-aprendizagem. **Encontro Mineiro de Educação Matemática**, n. 10, 2024. Citado na página 16.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica**. 7. ed. São Paulo, SP: Atual, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 25, 29, 32, 70 e 72.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. Citado na página 19.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de Pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre, RS: Editora da UFRGS, 2009. Citado na página 17.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo, vol. 2**. 5. ed. Rio de Janeiro, RJ: Grupo Gen-LTC, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 27.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica**. 9. ed. São Paulo, SP: Atual, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 32, 70 e 80.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 8. ed. São Paulo, SP: Atual, 2013. Citado na página 80.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções**. 9. ed. São Paulo, SP: Atual, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 70.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1**. 3. ed. São Paulo, SP: Harbra Ltda., 1994. Citado na página 23.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. 2. ed. São Paulo, SP: Cortez Editora, 2013. Citado na página 21.

LUCCAS, Simone; BATISTA, Irinéa de Lourdes. A importância da contextualização e da descontextualização no ensino de matemática: uma análise epistemológica. **XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática-EBRAPEM: Possibilidades de Interlocução**. Rio Claro-SP, 2008. Citado na página 19.

MACCARINI, Justina Motter. **Fundamentos e metodologia do ensino de matemática**. 2. ed. Curitiba, PR: Editora Fael, 2015. Citado na página 16.

MACÊDO, Josimar dos Santos; SILVA, Josiel Pereira da. A utilização do software excel no ensino da matemática. **Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências**, 2016. Citado na página 20.

PERETTI, Lisiane; COSTA, Gisele Maria Tonin da. Sequência didática na matemática. **Revista de Educação do IDEAU**, v. 8, n. 17, p. 1–14, 2013. Citado na página 21.

REIS, Josiane dos; BRANDÃO, Jorge Carvalho; SANTOS, Maria José Costa dos. A cultura maker no contexto da modelagem matemática: uma revisão sistemática da literatura. **Ensino Da Matemática Em Debate**, v. 11, n. 1, p. 65–88, 2024. Citado na página 20.

ROCHA, Leonaldo Viegas da. Uma aplicação da tecnologia de impressão 3d no ensino da matemática: construindo instrumentos didáticos para a sala de aula. **Acervo UFVJM**, UFVJM, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 20.

SANTOS, Jarles Tarsso Gomes; ANDRADE, Adja Ferreira de. Impressão 3d como recurso para o desenvolvimento de material didático: associando a cultura maker à resolução de problemas. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 18, n. 1, 2020. Citado na página 20.

STEIGENBERGER, André Luiz. **Moderna, Superação! Matemática - Ensino médio**. 1. ed. São Paulo, SP: Moderna, 2024. Citado na página 89.

STEWART, James. **Cálculo**. 3. ed. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 70.

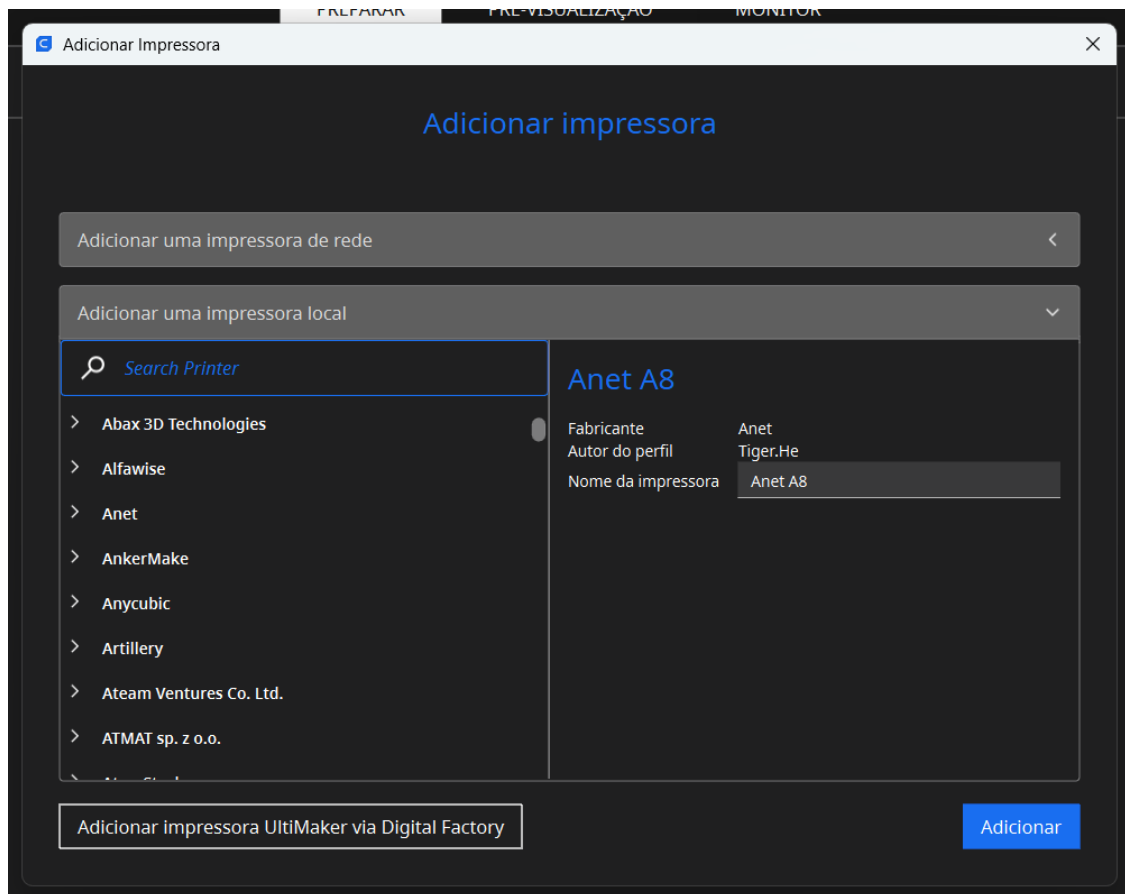
# APÊNDICES

# APÊNDICE A – PREPARANDO O ARQUIVO PARA IMPRESSÃO NA FATIADORA ULTIMAKER CURA

Os passos detalhados neste Apêndice permitem com que seja possível a impressão de todos os sólidos construídos no Capítulo 4. O programa que será usado para fatiar e criar os arquivos de impressão será o Ultimaker Cura<sup>1</sup>.

Com o programa instalado e aberto, uma janela aparece informando que você deve escolher em qual impressora você vai imprimir os sólidos, basta escolher a impressora na lista para que o aplicativo faça as configurações e instale os seus plug-ins. (Figura A.1).

**Figura A.1** – Lista de seleção da Impressora 3D.



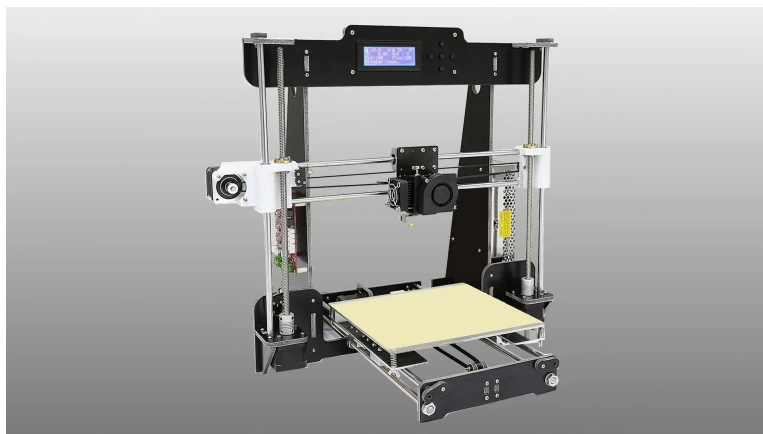
**Fonte:** Registrado pelo autor.

Observe que a Impressora Anet A8 está selecionada na Figura A.1, essa é a impressora usada pelo autor para a impressão dos sólidos. A Impressora Anet A8 é uma impressora 3D tipo

<sup>1</sup> Link para download do programa. Disponível em: <<https://ultimaker.com/software/ultimaker-cura/>>. Acesso em: 04 ago. 2025.

DIY, com volume de impressão de 220x220x240 mm, mesa aquecida de alumínio e estrutura em acrílico. Com recomendação para impressão em PLA e PETG, possui bico de 0,4 mm, camada de 0,1 a 0,4 mm e chega a 250°C no hotend. Funciona via cartão SD e acompanha ferramentas básicas e filamento para teste (Figura A.2).

**Figura A.2** – Impressora 3D Anet A8.

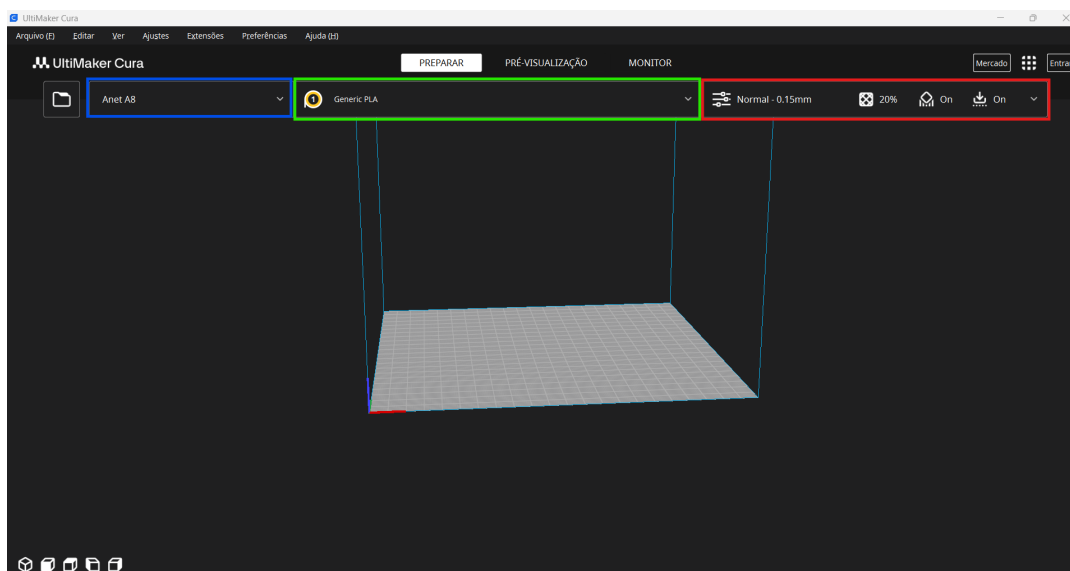


**Fonte:** MAKER FREEDOM. Anet A8. Disponível em: <<https://makerfreedom.com/anet-a8-3d-printer-best-utility-under-200/>>. Acesso em: 4 ago. 2025.

A configuração é similar para outras impressoras, ficando a cargo do leitor a seleção de sua impressora.

A tela inicial do programa pode ser vista na Figura A.3.

**Figura A.3** – Página inicial - Ultimaker Cura.



**Fonte:** Registrado pelo autor.

Observe em azul, na Figura A.3, que a impressora Anet A8 está selecionada, em verde o tipo de filamento, podendo selecionar outro tipo de filamento e em vermelho as configurações de impressão. Essas configurações seguem as preferências do leitor, para a impressão dos sólidos desta dissertação em específico, as configurações podem ser visualizados na Tabela A.1.

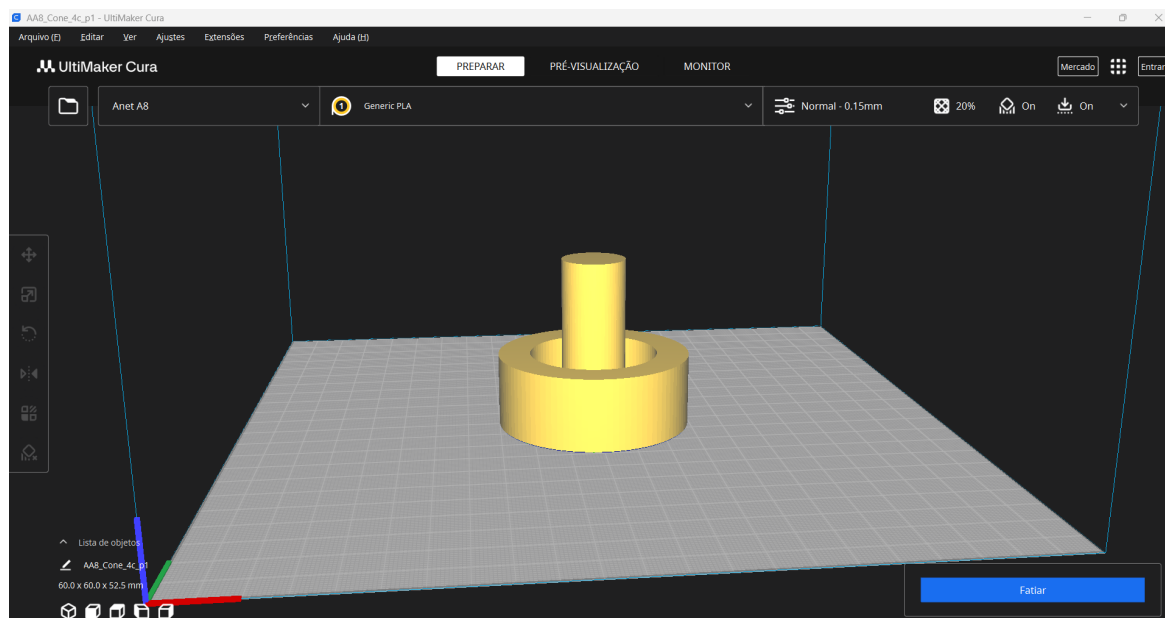
**Tabela A.1** – Configurações específicas para a impressão.

Ajustes de Impressão	
Perfil	0.15mm
Qualidade: Altura de Camada	0.15mm
Paredes: Espessura de Parede	0.8mm
Paredes: Número de Filetes	2
Paredes: Expansão Horizontal	0.0mm
Preenchimento: Densidade	20.0%
Preenchimento: Padrão de Preenchimento	Cúbico
Material: Temperatura de Impressão	210°C
Material: Temperatura da Mesa	60°C
Velocidade de Impressão	50.0mm/s

**Fonte:** Elaboração própria.

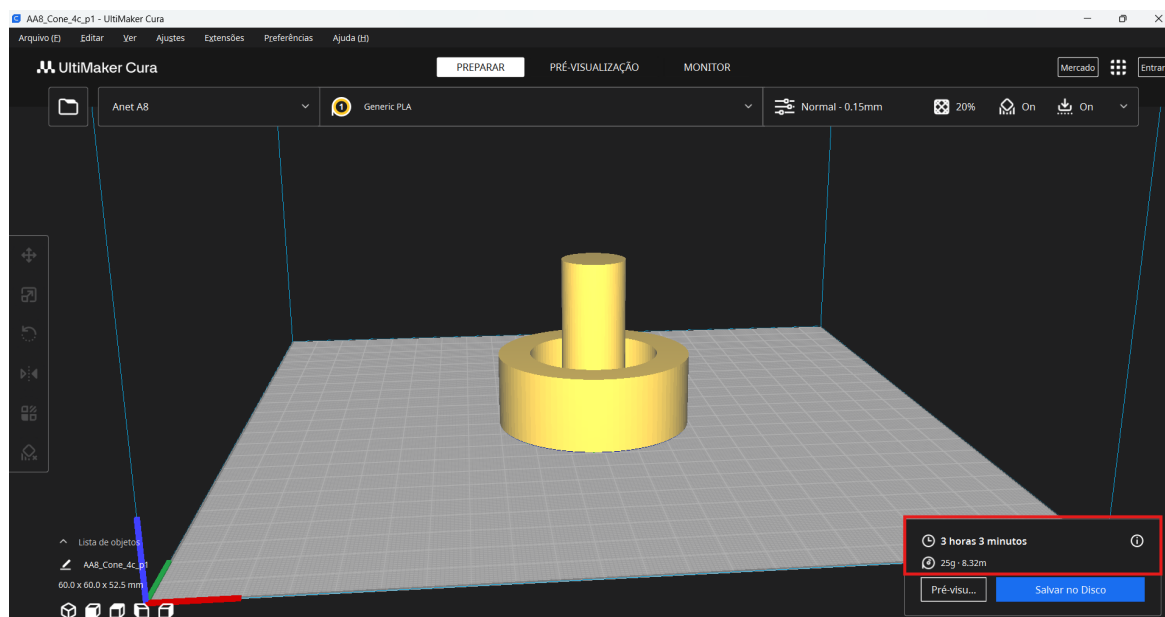
O restante das opções de configuração seguem o padrão do programa.

A partir daqui, basta abrir o arquivo que desejamos imprimir, neste exemplo, será usado o arquivo “Cone\_4c\_p1” (Figura A.4).

**Figura A.4** – Sólido a ser fatiado para a impressão.

**Fonte:** Registrado pelo autor.

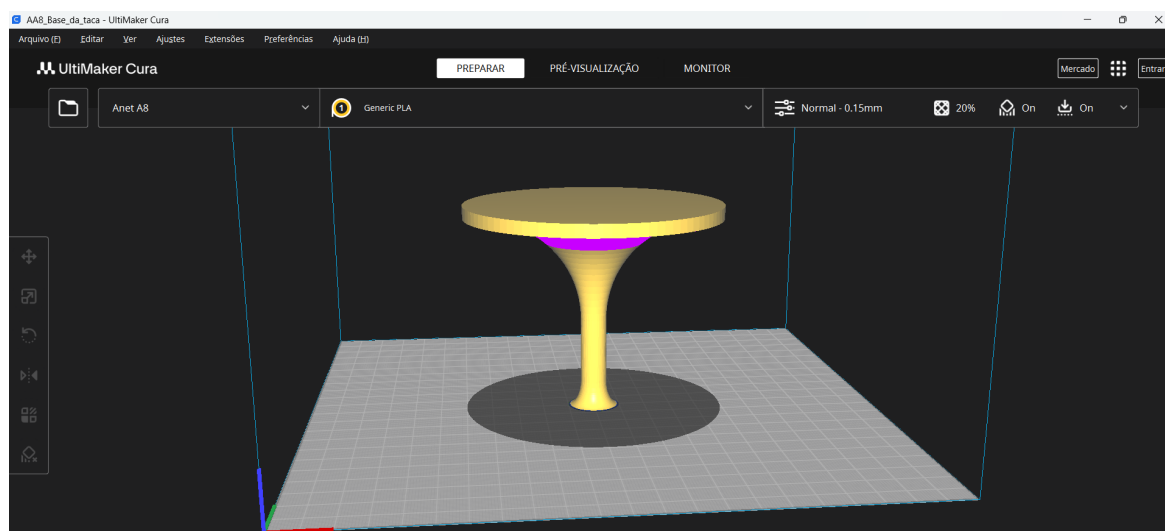
Por fim, clicamos em “Fatiar” no canto inferior direito da tela para preparar o arquivo. O sólido já fatiado pode ser observado na Figura A.5.

**Figura A.5** – Sólido a fatiado pronto para a impressão.

Fonte: Registrado pelo autor.

Observe que com o sólido fatiado, podemos ver o tempo de duração da impressão e a quantidade de filamento que será usado. Com isso, basta clicar em “Salvar no Disco” e escolher o local que o arquivo será salvo. Assim, basta passar esse arquivo salvo para a impressora e começar a impressão.

Em alguns casos, como na impressão da base da taça, será necessário uma pequena alteração antes de fatiar o sólido, observe como o arquivo fica quando aberto na fatiadora (Figura A.6).

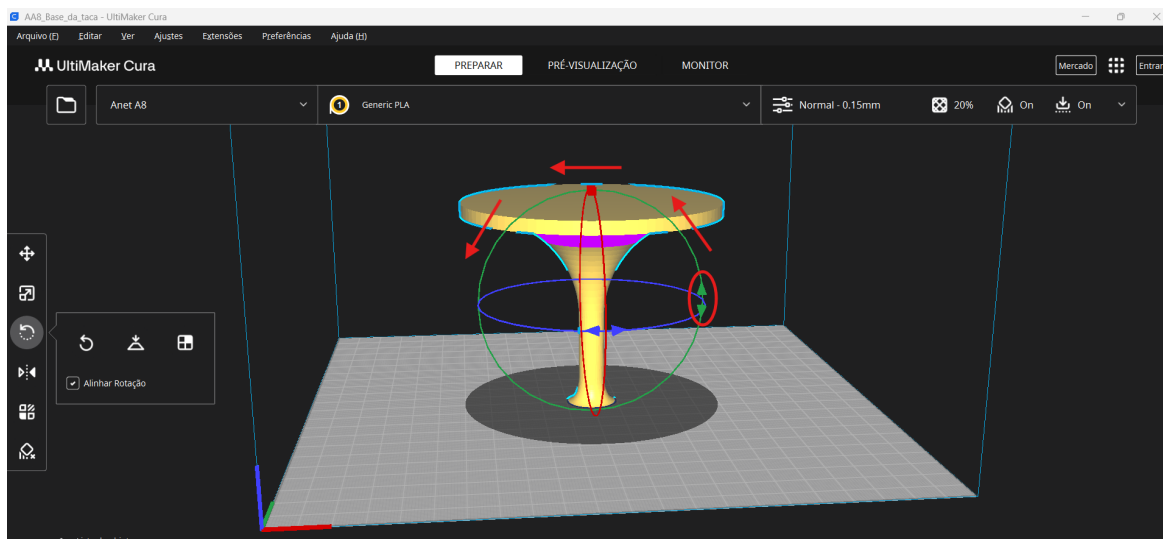
**Figura A.6** – Base da taça na fatiadora.

Fonte: Registrado pelo autor.

A impressão desse sólido nessa posição não se torna prática pois além de aumentar a

quantidade de uso de filamento, pois seria necessário um grande suporte abaixo do pé da base, também aumentaria muito o tempo de duração da impressão. Aqui, é necessário virar esse sólido em torno do eixo z. Para isso, selecionamos o sólido e no canto esquerdo a ferramenta de rotação. A partir daí, basta selecionar o eixo verde e o rotacionar em 180° (Figura A.7).

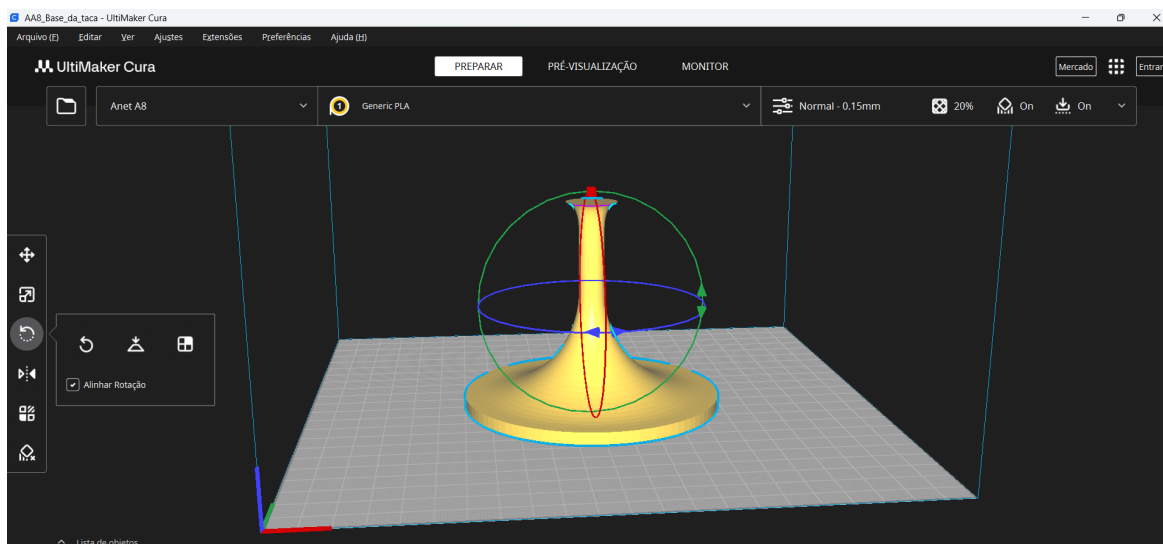
**Figura A.7** – Base da taça de ponta-cabeça.



Fonte: Registrado pelo autor.

Com isso, o sólido ficará como representado na Figura A.8.

**Figura A.8** – Base da taça rotacionada em 180°.



Fonte: Registrado pelo autor.

A partir daí, basta fatiar e salvar o sólido como no outro exemplo.