5 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, é feito o desenvolvimento de todas as aulas necessárias para abordar o uso da impressão 3D como ferramenta para o cálculo do volume de sólidos geométricos pelo método das cascas cilíndricas no ensino médio. Os livros usados para estruturar todas as aulas e conteúdos são 3 volumes da coleção Fundamento de Matemática Elementar, Volume 1 - Conjuntos e Funções - Iezzi e Murakami (2013), Volume 7 - Geometria Analítica - Iezzi (2013) e Volume 10 - Geometria Espacial - Dolce e Pompeo (2013) e o livro Cálculo - Stewart (2013), mencionados no capítulo de referencial teórico matemático desta dissertação.

Cada aula contém título, tempo estimado, objetivos, materiais necessários, desenvolvimentos detalhado, atividades propostas e avaliação. Todos os links para acessar os arquivos para impressão dos modelos 3D ou outros arquivos necessários para a realização das aulas também estão disponibilizados no decorrer no capítulo.

5.1 Aula 1 – Introdução ao volume por cascas cilíndricas

Esta aula pode ser trabalhada tanto no segundo ano do ensino médio, após a aula sobre volume de sólidos geométricos, como no terceiro ano do ensino médio, como uma extensão do conteúdo de geometria analítica. O tempo estimado dessa aula é de 50 minutos, podendo ser adaptado e estendido, dependendo da necessidade da turma e do professor.

5.1.1 Objetivo da aula

- Apresentar o conteúdo de cálculo do volume de sólidos geométricos;
- Introduzir ao aluno a construção de sólidos geométricos através da revolução de uma função sobre um eixo do plano cartesiano;
- Induzir os alunos a observar, manipular e refletir sobre o sólido gerado a partir da revolução sobre o eixo y, da função $y = -\frac{3}{2}x + 6$, por meio de sólidos impressos em uma impressora 3D a partir de cascas cilíndricas;
- Trabalhar com a ideia de "afinar" as cascas para observar que o sólido se aproxima da forma de um cone;
- Desafiar os alunos a propor uma forma, através de uma fórmula geral, de calcular o volume total de qualquer cone usando o método das cascas cilíndricas.

5.1.2 Conteúdos abordados

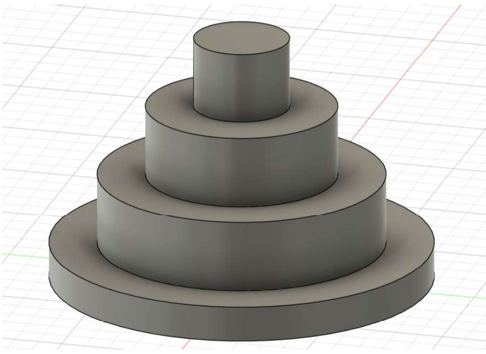
- Volume de sólidos geométricos;

- Visualização de sólidos de revolução;
- Introdução ao método das cascas cilíndricas.

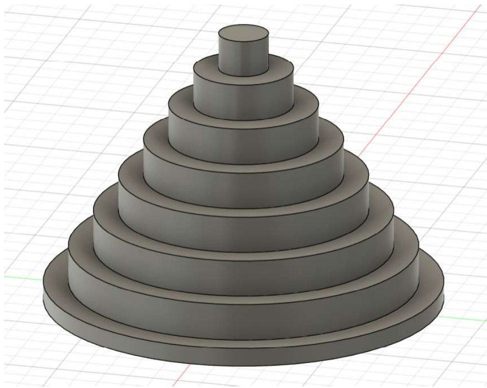
5.1.3 Materiais e recursos

- Quatro sólidos geométricos impressos em 3D[1] (Três formados por cascas cilíndricas, com diferença dos raios externo e internos das cascas de 0,25 cm, 0,5 cm e 1 cm, e um cone de 6 cm de altura e raio de 4cm)[2], gerado através revolução da função $y = -\frac{3}{2}x + 6$ sobre o eixo y do plano cartesiano (Figura 5.1).

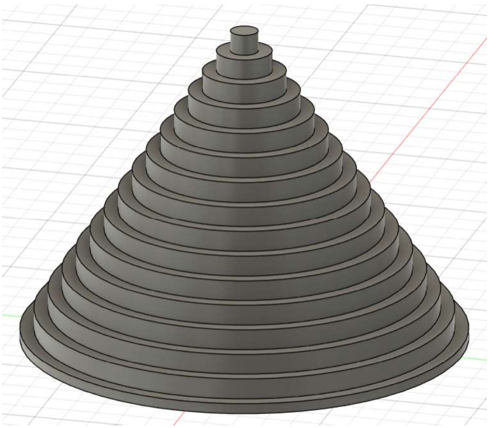
Figura 5.1 – Sólidos para a primeira aula.



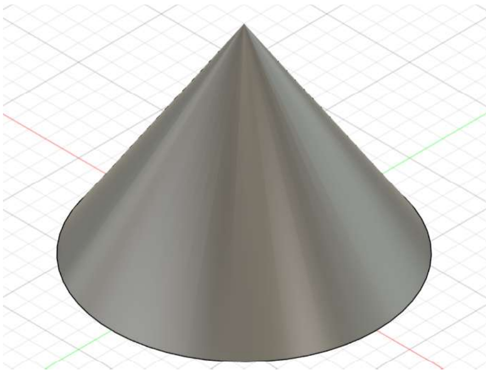
(a) Sólido Geométrico com 4 cascas.



(b) Sólido Geométrico com 8 cascas.



(c) Sólido Geométrico com 16 cascas.



(d) Cone exemplo dos sólidos.

Fonte: Registrado pelo autor.

- Calculadora;
- Quadro Branco;
- Régua ou paquímetro.

[1] A construção desses sólidos no aplicativo Fusion 360 pode ser verificado no Capítulo 4.

[2] Link para download dos arquivos em formato .stl para a impressão dos sólidos. Disponível em: <https://drive.google.com/drive/folders/1chiygAxyl0ed5jyRupQynZ02ZO6lE3xT?usp=sharing>. Acesso em: 12 jun. 2025.

- Projetor para apoio visual. (Opcional).

5.1.4 Desenvolvimento da aula

Início (10 minutos)

O professor pode iniciar a aula apresentando três sólidos formados por cilindros encaixados que, juntos, lembram a forma de um cone, e perguntar: "Qual é o volume desse objeto? Como poderíamos estimar ou calcular o volume apenas com o que pode ser medido neles e o que vocês aprenderam até o momento?". Durante as respostas dadas pelos alunos, o educador tenta levar os alunos a perceber que as cascas de cada sólido são cilindros vazados, pois, a partir daí, que a atividade se desenvolverá.

Após essa rodada de discussões, o professor deve dividir a sala em grupos e os modelos distribuídos de forma que cada grupo fique com um dos três sólidos (mais de um sólido do mesmo tipo pode ser impresso, se necessário). Como sugestão, os grupos podem ser divididos de forma proporcional à quantidade de cascas de cada sólido, por exemplo, o grupo que ficou com o sólido de 8 cascas deve ter 4 integrantes, enquanto que o grupo que ficou com o sólido de 16 cascas deve ter 8 integrantes.

Desenvolvimento (30 minutos)

Após a divisão dos grupos e distribuição dos sólidos, o professor deve retomar a ideia abordada na discussão e sugerir aos alunos para que pensem em cada pedaço do sólido como um cilindro vazado, e, a partir daí, indaga como poderia ser feito o cálculo daquele sólido. Espera um tempo para que os alunos tentem chegar à ideia de subtrair o volume do cilindro externo pelo interno, podendo auxiliá-los a chegarem a isso se tiverem dificuldade. Após essa etapa, o professor pede aos alunos para usarem esse raciocínio e tentarem calcular o volume aproximado do sólido completo, somando o volume encontrado de cada casca. Retomando a recomendação anterior quanto forma que o grupo ficou dividido, cada integrante calculará o volume de duas cascas.

Para que os cálculos sejam realizados, é necessário que os alunos meçam o raio interno e externo das cascas de cada sólido e a sua altura, pois assim conseguem calcular o volume daquele sólido. Para medir esses raios, os alunos podem usar uma régua para aferir o diâmetro interno e externo da casca e, após isso, apenas dividir os valores por dois. Essa informação pode ser relembrada pelo professor durante a aula.

Se torna interessante também uma breve revisão da fórmula do volume de um cilindro, dada por $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, segundo Dolce e Pompeo (2013, p. 212), usando $\pi \cong 3,14$, e lembrando que r e h são respectivamente o raio e a altura do cilindro. Dessa forma, os alunos têm todas as ferramentas para efetuar todos os cálculos. Abaixo, as Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 mostram os resultados esperados que cada grupo deve encontrar para o cálculo do volume de cada sólido, os valores são aproximados a duas casas decimais, podendo haver uma leve variação dependendo da aproximação que cada aluno usar.

Tabela 5.1 – Cálculo do volume do sólido com 4 cascas.

Cascas	Raio externo (R)	Raio interno (r)	Altura do cilindro (h)	Volume do cilindro externo ($V_{ce} = \pi \cdot R^2 \cdot h$)	Volume do cilindro interno ($V_{ci} = \pi \cdot r^2 \cdot h$)	Volume da casca ($V_{ce} - V_{ci}$)
Casca 1	1cm	0	5,25cm	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 5,25 = 16,49cm^3$	$3,14 \cdot 0^2 \cdot 5,25 = 0$	$16,48 - 0 = 16,49cm^3$
Casca 2	2cm	1cm	3,75cm	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 3,75 = 47,1cm^3$	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 3,75 = 11,78cm^3$	$47,1 - 11,78 = 35,33cm^3$
Casca 3	3cm	2cm	2,25cm	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 2,25 = 63,59cm^3$	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 2,25 = 28,26cm^3$	$63,58 - 28,26 = 35,33cm^3$
Casca 4	4cm	3cm	0,75cm	$3,14 \cdot 4^2 \cdot 0,75 = 37,68cm^3$	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 0,75 = 21,19cm^3$	$37,68 - 21,19 = 16,49cm^3$

Fonte: Elaboração própria.

Após calcular o volume das 4 cascas, na Tabela 5.1, basta somar cada uma e encontramos o volume total do sólido (V_{ts}):

$$\begin{aligned} V_{ts} &= V_{c1} + V_{c2} + V_{c3} + V_{c4} \\ &= 16,49 + 35,33 + 35,33 + 16,49 \\ &= 103,64cm^3. \end{aligned}$$

Tabela 5.2 – Cálculo do volume do sólido com 8 cascas.

Cascas	Raio externo (R)	Raio interno (r)	Altura do cilindro (h)	Volume do cilindro externo ($V_{ce} = \pi \cdot R^2 \cdot h$)	Volume do cilindro interno ($V_{ci} = \pi \cdot r^2 \cdot h$)	Volume da casca ($V_{ce} - V_{ci}$)
Casca 1	0,5cm	0	5,63cm	$3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 5,63 = 4,42cm^3$	$3,14 \cdot 0^2 \cdot 5,63 = 0$	$4,41 - 0 = 4,42cm^3$
Casca 2	1cm	0,5cm	4,88cm	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 4,88 = 15,31cm^3$	$3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 4,88 = 3,83cm^3$	$15,31 - 3,83 = 11,48cm^3$
Casca 3	1,5cm	1cm	4,13cm	$3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 4,13 = 29,14cm^3$	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 4,13 = 12,95cm^3$	$29,14 - 12,95 = 16,19cm^3$
Casca 4	2cm	1,5cm	3,38cm	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 3,38 = 42,39cm^3$	$3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 3,38 = 23,84cm^3$	$42,39 - 23,84 = 18,55cm^3$
Casca 5	2,5cm	2cm	2,63cm	$3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 2,63 = 51,52cm^3$	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 2,63 = 32,97cm^3$	$51,52 - 32,97 = 18,55cm^3$
Casca 6	3cm	2,5cm	1,88cm	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 1,88 = 52,99cm^3$	$3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 1,88 = 36,8cm^3$	$52,99 - 36,8 = 16,19cm^3$
Casca 7	3,5cm	3cm	1,13cm	$3,14 \cdot 3,5^2 \cdot 1,13 = 43,27cm^3$	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 1,13 = 31,79cm^3$	$43,27 - 31,79 = 11,84cm^3$
Casca 8	4cm	3,5cm	0,38cm	$3,14 \cdot 4^2 \cdot 0,38 = 18,84cm^3$	$3,14 \cdot 3,5^2 \cdot 0,38 = 14,42cm^3$	$18,84 - 14,42 = 4,42cm^3$

Fonte: Elaboração própria.

Com o resultado do volume da cada uma das cascas do sólido de 8 cascas, realizado na Tabela 5.2, podemos calcular o volume total desse sólido:

$$\begin{aligned} V_{ts} &= V_{c1} + V_{c2} + \cdots + V_{c7} + V_{c8} \\ &= 4,42 + 11,48 + 16,19 + 18,55 + 18,55 + 16,19 + 11,48 + 4,42 \\ &= 101,27cm^3. \end{aligned}$$

Tabela 5.3 – Cálculo do volume do sólido com 16 cascas

Cascas	**Raio externo** (R)	**Raio interno** (r)	**Altura do cilindro** (h)	**Volume do cilindro externo** ($V_{ce} = \pi \cdot R^2 \cdot h$)	**Volume do cilindro interno** ($V_{ci} = \pi \cdot r^2 \cdot h$)	**Volume da casca** ($V_{ce} - V_{ci}$)
Casca 1	0,25cm	0	5,81cm	$3,14 \cdot 0,25^2 \cdot 5,81 = 1,14cm^3$	$3,14 \cdot 0^2 \cdot 5,81 = 0$	$1,14 - 0 = 1,14cm^3$
Casca 2	0,5cm	0,25cm	5,44cm	$3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 5,44 = 4,27cm^3$	$3,14 \cdot 0,25^2 \cdot 5,44 = 1,07$	$4,27 - 1,07 = 3,2cm^3$
Casca 3	0,75cm	0,5cm	5,06cm	$3,14 \cdot 0,75^2 \cdot 5,06 = 8,94cm^3$	$3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 5,06 = 3,97$	$8,94 - 3,97 = 4,97cm^3$
Casca 4	1cm	0,75cm	4,69cm	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 4,69 = 14,72cm^3$	$3,14 \cdot 0,75^2 \cdot 4,69 = 8,28$	$14,72 - 8,28 = 6,44cm^3$
Casca 5	1,25cm	1cm	4,31cm	$3,14 \cdot 1,25^2 \cdot 4,31 = 21,16cm^3$	$3,14 \cdot 1^2 \cdot 4,31 = 13,54$	$21,16 - 13,54 = 7,62cm^3$
Casca 6	1,5cm	1,25cm	3,94cm	$3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 3,94 = 27,82cm^3$	$3,14 \cdot 1,25^2 \cdot 3,94 = 19,32$	$27,82 - 19,32 = 8,5cm^3$
Casca 7	1,75cm	1,5cm	3,56cm	$3,14 \cdot 1,75^2 \cdot 3,56 = 34,26cm^3$	$3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 3,56 = 25,17$	$34,26 - 25,17 = 9,09cm^3$
Casca 8	2cm	1,75cm	3,19cm	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 3,19 = 40,04cm^3$	$3,14 \cdot 1,75^2 \cdot 3,19 = 30,65$	$40,04 - 30,65 = 9,38cm^3$
Casca 9	2,25cm	2cm	2,81cm	$3,14 \cdot 2,25^2 \cdot 2,81 = 44,71cm^3$	$3,14 \cdot 2^2 \cdot 2,81 = 35,33$	$44,71 - 35,33 = 9,38cm^3$
Casca 10	2,5cm	2,25cm	2,44cm	$3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 2,44 = 47,84cm^3$	$3,14 \cdot 2,25^2 \cdot 2,44 = 38,75$	$47,84 - 38,75 = 9,09cm^3$
Casca 11	2,75cm	2,5cm	2,06cm	$3,14 \cdot 2,75^2 \cdot 2,06 = 48,98cm^3$	$3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 2,06 = 40,48$	$48,98 - 40,48 = 8,5cm^3$
Casca 12	3cm	2,75cm	1,69cm	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 1,69 = 47,69cm^3$	$3,14 \cdot 2,75^2 \cdot 1,69 = 40,07$	$47,69 - 40,07 = 7,62cm^3$
Casca 13	3,25cm	3cm	1,31cm	$3,14 \cdot 3,25^2 \cdot 1,31 = 43,53cm^3$	$3,14 \cdot 3^2 \cdot 1,31 = 37,09$	$43,53 - 37,09 = 6,44cm^3$
Casca 14	3,5cm	3,25cm	0,94cm	$3,14 \cdot 3,5^2 \cdot 0,94 = 36,06cm^3$	$3,14 \cdot 3,25^2 \cdot 0,94 = 31,09$	$36,06 - 31,09 = 4,97cm^3$
Casca 15	3,75cm	3,5cm	0,56cm	$3,14 \cdot 3,75^2 \cdot 0,56 = 24,84cm^3$	$3,14 \cdot 3,5^2 \cdot 0,56 = 21,64$	$24,84 - 21,64 = 3,2cm^3$
Casca 16	4cm	3,75cm	0,19cm	$3,14 \cdot 4^2 \cdot 0,19 = 9,42cm^3$	$3,14 \cdot 3,75^2 \cdot 0,19 = 8,28cm^3$	$9,42 - 8,28 = 1,14cm^3$

Fonte: Elaboração própria.

Com o resultado dos volumes das 16 cascas pela Tabela 5.3, o volume total do sólido com 16 cascas é

$$\begin{aligned} V_{ts} =& V_{c1} + V_{c2} + \cdots + V_{c15} + V_{c16} \\ =& 1,14 + 3,2 + 4,97 + 6,44 + 7,62 + 8,5 + 9,09 + 9,38 + \\ & + 9,38 + 9,09 + 8,5 + 7,62 + 6,44 + 4,97 + 3,2 + 1,14 \\ =& 100,68cm^3. \end{aligned}$$

Enquanto os alunos efetuam os cálculos, perguntas como “Vocês percebem algum padrão na variação dos raios e altura das cascas?” ou “O que acontece com o formato do sólido, se afinarmos mais as cascas?” com a finalidade de fazer os alunos começarem a pensar no cone como a forma final do sólido.

Fechamento (10 minutos)

Após a finalização dos cálculos pela turma, o professor deve comparar junto com os grupos, os volumes encontrados para cada tipo de sólido e fazê-los perceber o fato dos volumes serem muito parecidos para sólidos que tem o mesmo raio e alturas próximas. Mediante os resultados encontrados, o professor mostra à turma o cone exemplo das cascas (Figura 5.1d) e calcula junto da turma, usando a Equação 3.10 para o cálculo do cone, o seu volume para fazer a comparação com os volumes encontrados pelo grupo. Usando a equação demonstrada no referencial teórico, e sabendo que o cone tem 4cm de raio e 6cm de altura, temos:

$$V_c = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\begin{aligned} V_c &\cong \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 6 \\ &\cong 100,48cm^3. \end{aligned}$$

Com isso, deve-se perceber a proximidade dos valores e, assim, sugerir que método das cascas cilíndricas pode resultar em um valor aproximado para o cálculo do volume do cone.

A partir dessa aula, o professor introduz aos alunos o Método das Cascas Cilíndricas, ainda sem a equação, para o cálculo do volume de sólidos de revolução, dando ênfase à importância da visualização e manipulação dos sólidos.

Como desafio final, o professor pode pedir aos alunos para desenvolver uma possível equação para calcular o volume de um cone qualquer, usando o método das cascas.

5.1.5 Avaliação

A avaliação desta aula se dá de forma qualitativa, através da observação das reflexões feitas durante a aula, vindas ou não das perguntas norteadoras feitas durante a atividade. Além disso, também pode ser feita pela participação dos grupos e estratégias usadas para contornar problemas encontrados durante o desenvolvimento dos cálculos.

5.2 Aula 2 - A Equação do método das cascas para o cálculo do volume de um cone

Nesta aula, será apresentada a forma adaptada para o ensino médio da equação do método das cascas cilíndricas. É recomendado que ela seja trabalhada apenas após a aula introdutória, para que os alunos já tenham alguma noção do conteúdo. Também será feito a relação das medidas dos raios e da altura das cascas com seus representantes no plano cartesiano, pois a equação se baseia em coordenadas cartesianas. O tempo médio dessa aula é de 50 a 60 minutos, podendo ser estendido de acordo com a necessidade da turma e do professor.

5.2.1 Objetivo da aula

- Fazer a relação das medidas dos sólidos usados na última aula com pontos do plano cartesiano;
- Relacionar a junção dos sólidos com o cone e a função que o gerou através da revolução em torno do eixo y;
- Generalizar o processo de soma do volume das cascas;
- Apresentar a Equação 3.6 para o cálculo do volume pelo método das cascas, já definida no

Capítulo 3, reescrita a seguir

$$V_s = 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\overline{x_1} \cdot f(\overline{x_1}) + \overline{x_2} \cdot f(\overline{x_2}) + \cdots + \overline{x_n} \cdot f(\overline{x_n})]. \tag{5.1}$$

- Usar o Excel para automatizar os cálculos das cascas e do volume;
- Trabalhar a ideia de aproximação e limite.

5.2.2 Conteúdos abordados

- Função Afim;
- Interpretação de sólidos de revolução no plano cartesiano;
- O método das cascas cilíndricas;
- Interpretação geométrica da equação do método das cascas;

5.2.3 Materiais e recursos

- Quadro branco;
- Projetor ou TV;
- Tabela Excel para cálculo do volume por cascas (cone)[3] (Figura 5.2);

Figura 5.2 – Tabela Excel para o cálculo do volume do cone.

Tabela para a construção do sólido geométrico (cone) pelo método das cascas cilíndricas

Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função afim	
Valor (b) da função afim	
Valor do raio inicial	
Valor do raio final	
Intervalo de rotação	
Quantidade de cascas	
Espessura da casca	

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1					
Casca 2					
Casca 3					
Casca 4					
Casca 5					
Casca 6					
Casca 7					
Casca 8					
Casca 9					
Casca 10					
Casca 11					
Casca 12					
Casca 13					
Casca 14					
Casca 15					
Casca 16					
Casca 17					
Casca 18					
Casca 19					
Casca 20					
				Soma total:	
				Volume do sólido	

Fonte: Elaboração própria.

[3] A configuração desta tabela pode ser verificada no Capítulo 4.

- Calculadora;
- Impressão da tabela para preenchimento e uso manual.

5.2.4 Desenvolvimento da aula

Início (10 minutos)

Para o início dessa aula, se torna interessante o professor recapitular o que foi realizado na aula anterior, relembrando o uso dos modelos físicos estudados e, como ao unir todas as cascas, elas se assemelhavam a um cone. Essa conversa deve conduzir os alunos a observar os padrões entre o raio interno e externo das cascas, sua espessura e altura, isso, para conduzi-los a construção gráfica daquele sólido.

Nesse Momento, o professor pode relembrar, através de uma tabela, os valores encontrados para os raios externos e internos, espessura e altura das cascas dos sólidos, e assim construir um gráfico com esses valores, formando uma fatia da casca para que se veja os retângulos formados, a fim de comparar o que acontece com suas medidas e coordenadas. Para facilitar os cálculos e otimizar o tempo, o professor pode utilizar o sólido de 4 cascas, é o que faremos aqui. Os modelos da tabela e gráfico estão representados a seguir.

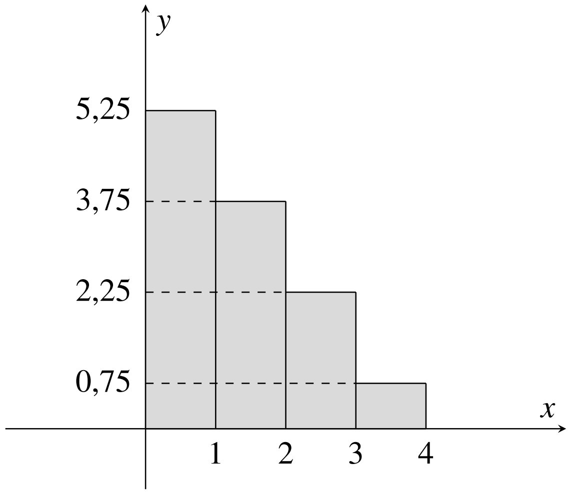
Tabela 5.4 – Raio externo e interno, espessura e altura das cascas do sólido com 4 cascas.

Cascas	**Raio externo** (R)	**Raio interno** (r)	**Espessura da casca** (Δx)	**Altura do cilindro** (h)
Casca 1	1cm	0	$1-0=1cm$	5,25cm
Casca 2	2cm	1cm	$2-1=1cm$	3,75cm
Casca 3	3cm	2cm	$3-2=1cm$	2,25cm
Casca 4	4cm	3cm	$4-3=1cm$	0,75cm

Fonte: Elaboração própria.

Através da Tabela 5.4, temos os valores do raio interno e externo de cada casca e também suas alturas, assim, podemos montar um gráfico que desenhe os retângulos fatiados de cada casca (Gráfico 5.1).

Gráfico 5.1 – Retângulos resultantes da fatia do sólido de cascas, no plano cartesiano.



Fonte: Elaboração própria.

Desenvolvimento (30 a 40 minutos)

A partir do Gráfico 5.1, o professor pode começar induzir os alunos a perceberem que aquele sólido de cascas foi construído através de uma função revolucionada em torno do eixo y. Para isso, ele pode plotar pontos do gráfico que construam a reta desejada. Para tal fim, o professor começa a calcular os raios médios de cada casca e desenha um segmento tracejado até que intersecte a coordenada da altura daquela casca. Após isso, ele nomeia cada um desses pontos de interseção e traça a reta que passe por esses pontos. Para melhor entendimento, vamos considerar $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, ..., $x_4 = 4$. Para calcular o raio médio de uma casca, basta fazermos a média aritmética das coordenadas em x que representem o raio interno e externo daquela casca[4], pela equação

$$\overline{x_i} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}. \tag{5.2}$$

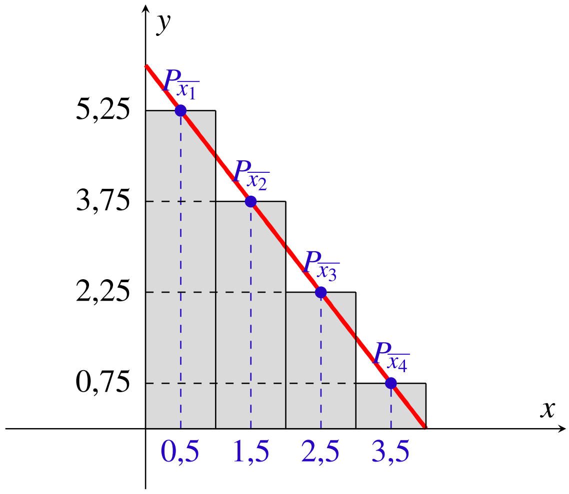
Daí, segue:

$$\overline{x_1} = \frac{x_0 + x_1}{2} \Rightarrow \overline{x_1} = \frac{0+1}{2} \Rightarrow \overline{x_1} = 0,5;$$
$$\overline{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \overline{x_2} = \frac{1+2}{2} \Rightarrow \overline{x_2} = 1,5;$$
$$\overline{x_3} = \frac{x_2 + x_3}{2} \Rightarrow \overline{x_3} = \frac{2+3}{2} \Rightarrow \overline{x_3} = 2,5;$$
$$\overline{x_4} = \frac{x_3 + x_4}{2} \Rightarrow \overline{x_1} = \frac{3+4}{2} \Rightarrow \overline{x_1} = 3,5.$$

Descobertos os raios médios, basta seguir os próximos passos indicados anteriormente e construir o novo gráfico com a reta definida (Gráfico 5.2).

[4] É interessante usarmos esse método para calcular o raio médio pois a turma pode não ter estudado geometria analítica, que geralmente é vista apenas no 3º ano do ensino médio, e assim não saber o método para o cálculo de um ponto médio.

Gráfico 5.2 – Reta encontrada através da intersecção dos raios médio com as alturas dos retângulos.



Fonte: Elaboração própria.

Nessa etapa da aula, com as informação definidas, basta agora descobrirmos equação dessa reta. Podemos fazer esse processo de duas formas: através de um sistema de equações ou calculando o determinante entre 3 pontos[5], o segundo método servirá apenas para as turmas que já viram o conteúdo de geometria analítica. Tais desenvolvimentos podem ser conferidos a seguir.

a) Descobrindo a função pelo método do sistema de equações:

Através desse método, vamos escolher dois pontos $P_{\overline{x_i}}$ para montar o sistema de equações. Considerando que os pontos formaram a reta, então sabemos que a função procurada é da forma $f(x) = ax + b$. Pegando $P_{\overline{x_2}}$ e $P_{\overline{x_3}}$ como exemplo, podemos fazer

$$\begin{cases} P_{\overline{x_2}} \Rightarrow f(1.5) = 3,75 \\ P_{\overline{x_3}} \Rightarrow f(2.5) = 2,25 \end{cases}.$$

Daí, segue

$$\begin{cases} a \cdot (1,5) + b = 3,75 \\ a \cdot (2,5) + b = 2,25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,5a + b = 3,75 \\ 2,5a + b = 2,25 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por (-1) em ambos os membros e usando o método da adição, conseguimos descobrir os a:

$$\begin{cases} (1,5a + b) \cdot (-1) = 3,75 \cdot (-1) \\ 2,5a + b = 2,25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1,5a - b = -3,75 \\ 2,5a + b = 2,25 \end{cases} \Rightarrow a = -1,5.$$

[5] Fica a cargo do leitor revisar esses dois métodos nos livros referenciados neste capítulo.

Substituindo a em uma das equações, temos:

$$(-1,5)(1,5)+b=3.75 \Rightarrow -2,25+b=3,75 \Rightarrow b=3,75+2,25 \Rightarrow b=6.$$

Logo, a função formada é

$$f(x)=-1,5x+6. \tag{5.3}$$

b) Descobrindo a equação da reta por determinante:

Analisando a reta, agora usando $P_{\overline{x_1}}$ e $P_{\overline{x_4}}$, basta usarmos suas coordenadas para encontrar a equação dessa reta. Por Iezzi (2013, p. 28), podemos encontrar a equação da reta igualando o determinante de 3 pontos, 2 conhecidos e um desconhecido, a 0, contanto que estes pertençam à reta. Considerando $P_x(x,y)$, $P_{\overline{x_1}}(0.5, 5.25)$ e $P_{\overline{x_4}}(3.5, 0.75)$, temos

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0,5 & 5,25 & 1 \\ 3,5 & 0,75 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Calculando o determinante, através do método de Sarrus, Iezzi e Hazzan (2013, p. 84):

$$\det(f) = \left| \begin{array}{ccc|cc} x & y & 1 & x & y \\ 0,5 & 5,25 & 1 & 0,5 & 5,25 \\ 3,5 & 0,75 & 1 & 3,5 & 0,75 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \det(f) =& (x \cdot 5,25 \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot 3,5 + 1 \cdot 0,5 \cdot 0,75) \\ &- (1 \cdot 5,25 \cdot 3,5 + x \cdot 1 \cdot 0,75 + y \cdot 0,5 \cdot 1) = 0. \end{aligned}$$

Daí, segue

$$5,25x+3,5y+0,375-(18,375+0,75x+0,5y)=0 \Rightarrow$$

$$5,25x+3,5y+0,375-18,375-0,75x-0,5y)=0 \Rightarrow$$

$$4,5x+3y-18=0.$$

A partir daqui, basta isolarmos o y e encontraremos a equação da reta:

$$3y=-4,5x+18 \Rightarrow$$

$$y=\frac{-4,5x+18}{3} \Rightarrow$$

$$y=-1,5x+6. \tag{5.4}$$

Nesse momento, com a função definida, o professor revela que foi com essa função que os sólidos usados na primeira aula foram modelados e que, através dela, revolucionando-a em torno do eixo y, ela forma o cone da Figura 5.1d, podendo até mostrar novamente aos alunos o sólido. Nesse momento, também é interessante mostrar que ao calcularmos P_{x_0}, de fato encontramos 6, que é onde a reta intercepta o eixo y e, por consequência, é a altura do cone e ao calcularmos P_{x_4} encontramos 0, que é onde a reta intercepta o eixo x e isso faz com que 4 seja o raio do cone.

Sabendo a função que usamos para gerar o sólido de revolução com cascas, temos o suficiente para criá-lo com quantas cascas quisermos e calcular o volume desse sólido. É a hora de apresentar aos alunos a Equação 5.1:

$$V_s = 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\overline{x_1} \cdot f(\overline{x_1}) + \overline{x_2} \cdot f(\overline{x_2}) + \cdots + \overline{x_n} \cdot f(\overline{x_n})].$$

Nesse momento, relembre detalhadamente o que é cada um dos pontos. Que $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, ..., $\overline{x_n}$ podem ser calculados pela Equação 5.2, que

$$\Delta x = x_i - x_{i-1},$$

com

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_i - x_{i-1}$$

e também que a altura de cada casca é calculada através de $f(\overline{x_i})$.

Como exemplo, o professor pode calcular junto com a turma, o volume do sólido que tomamos no início do desenvolvimento da aula, para mostrar que, de fato, a equação funciona.

Considerando a função $f(x) = -1,5x + 6$, no intervalo $[0,1]$ em x, e dividindo esse intervalo em 4 partes, com $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$, ao calcular Δx, temos

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 2 - 1 \Rightarrow \Delta x = 1.$$

Com isso, podemos calcular o volume do sólido. Para isso, devemos calcular o ponto médio e altura de cada uma das cascas e também o produto entre esses elementos, os cálculos podem ser verificados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Cálculo do volume do sólido com 4 cascas

Cascas	**Coordenada externa (x_i)**	**Coordenada interna (x_{i-1})**	**Ponto médio ($\overline{x_i}$)**	**Altura do cilindro em $\overline{x_i}$ ($f(\overline{x_i})$)**	$\overline{x_i} \cdot f(\overline{x_i})$
Casca 1	1	0	$\frac{0+1}{2} = 0,5$	$(-1,5) \cdot 0,5 + 6 = 5,25$	$0,5 \cdot 5,25 = 2,625$
Casca 2	2	1	$\frac{1+2}{2} = 1,5$	$(-1,5) \cdot 1,5 + 6 = 3,75$	$1,5 \cdot 3,75 = 5,625$
Casca 3	3	2	$\frac{2+3}{2} = 2,5$	$(-1,5) \cdot 2,5 + 6 = 2,25$	$2,5 \cdot 2,25 = 5,625$
Casca 4	4	3	$\frac{3+4}{2} = 3,5$	$(-1,5) \cdot 3,5 + 6 = 0,75$	$3,5 \cdot 0,75 = 2,625$

Fonte: Elaboração própria.

Com cada um dos elementos calculados, basta substituirmos eles na Equação 5.1 e teremos o volume do sólido:

$$
\begin{aligned}
V_s &= 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\overline{x_1} \cdot f(\overline{x_1}) + \overline{x_2} \cdot f(\overline{x_2}) + \overline{x_3} \cdot f(\overline{x_3}) + \overline{x_4} \cdot f(\overline{x_4})] \\
&= 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot [2,625 + 5,625 + 5,625 + 2,625] \\
&= 103,62.
\end{aligned}
$$

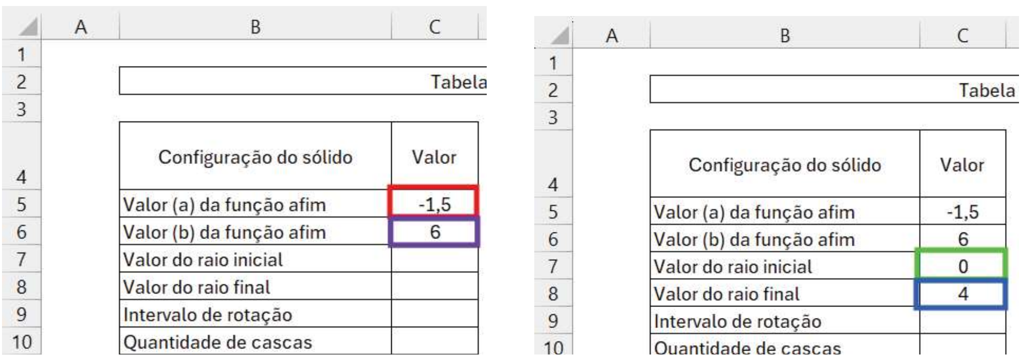
Após finalizar os cálculos, dê ênfase a quanto o resultado encontrado se aproxima do calculado na aula anterior, afirmando que esse método é muito prático e seguro para o cálculo do volume do cone estudado.

Fechamento (10 minutos)

Para finalizar a aula, o professor pode fazer uma recapitulação de todos os passos que foram desenvolvidos nas duas aulas para o estudo desse método de cálculo de volumes, começando da análise dos sólidos impressos, da medida e observação dos padrões até finalizar com a procura da função que gerou aquele sólido e o cálculo do volume usando a Equação 5.1.

Após essa breve revisão, o professor pode finalizar mostrando a tabela para o cálculo do volume no Excel. Nesse momento, é interessante mostrar como a tabela funciona, indicando e explicando o que são os elementos de cada coluna e como se configura a tabela para que obedeça a função descoberta nesta aula colocando os seus coeficientes e o intervalo que define o volume do sólido de revolução (Figura 5.3).

Figura 5.3 – Configuração da função afim.



(a) Coeficientes da função. **(b)** Intervalo de revolução da função.

Fonte: Registrado pelo autor.

Com isso, o professor pode mostrar aos alunos os volume calculados na tabela do Excel para 8 e 16 cascas, afim de comparar os valores do volume encontrados na tabela com os volume encontrados pelos alunos na primeira aula (Figura 5.4).

Figura 5.4 – Volume do cone para 8 e 16 cascas.

Tabela para a construção do sólido geométrico (cone) pelo método das cascas cilíndricas

Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função afim	-1,5
Valor (b) da função afim	6
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	4
Intervalo de rotação	4
Quantidade de cascas	8
Espessura da casca	0,5

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0,5	0,25	5,63	1,41
Casca 2	0,5	1	0,75	4,88	3,66
Casca 3	1	1,5	1,25	4,13	5,16
Casca 4	1,5	2	1,75	3,38	5,91
Casca 5	2	2,5	2,25	2,63	5,91
Casca 6	2,5	3	2,75	1,88	5,16
Casca 7	3	3,5	3,25	1,13	3,66
Casca 8	3,5	4	3,75	0,38	1,41
Casca 9	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 10	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 11	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 12	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 13	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 14	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 15	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 16	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 17	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 18	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 19	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 20	0	0	0,00	0,00	0,00
				Soma total:	32,25
				Volume do sólido	101,32

(a) Volume do cone para 8 cascas.

Tabela para a construção do sólido geométrico (cone) pelo método das cascas cilíndricas

Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função afim	-1,5
Valor (b) da função afim	6
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	4
Intervalo de rotação	4
Quantidade de cascas	16
Espessura da casca	0,25

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0,25	0,13	5,81	0,73
Casca 2	0,25	0,5	0,38	5,44	2,04
Casca 3	0,5	0,75	0,63	5,06	3,16
Casca 4	0,75	1	0,88	4,69	4,10
Casca 5	1	1,25	1,13	4,31	4,85
Casca 6	1,25	1,5	1,38	3,94	5,41
Casca 7	1,5	1,75	1,63	3,56	5,79
Casca 8	1,75	2	1,88	3,19	5,98
Casca 9	2	2,25	2,13	2,81	5,98
Casca 10	2,25	2,5	2,38	2,44	5,79
Casca 11	2,5	2,75	2,63	2,06	5,41
Casca 12	2,75	3	2,88	1,69	4,85
Casca 13	3	3,25	3,13	1,31	4,10
Casca 14	3,25	3,5	3,38	0,94	3,16
Casca 15	3,5	3,75	3,63	0,56	2,04
Casca 16	3,75	4	3,88	0,19	0,73
Casca 17	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 18	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 19	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 20	0	0	0,00	0,00	0,00
				Soma total:	64,13
				Volume do sólido	100,73

(b) Volume do cone para 16 cascas.

Fonte: Registrado pelo autor.

Como atividade para os alunos, o professor pode passar para cada um dos alunos calcular individualmente o volume dos sólidos de 8 e 16 cascas, da mesma função da Equação 5.3, através da Equação 5.1, e comparar os resultados encontrados com os resultados da Figura 5.4.

Como provocação, pode-se fazer peguntas do tipo: "E se a função for uma curva, será que esse método também funciona?". Isso servirá como gancho para a próxima etapa, que será calcular o volume de sólidos formados por curvas.

5.2.5 Avaliação

Nesta aula, a avaliação é feita de forma qualitativa, observando a participação dos alunos no decorrer das demonstrações e provas. Além de ser avaliada ao comparar os resultados encontrados pelos alunos no cálculo dos volumes da primeira aula, com os feitos através da Equação principal desta aula.

Uma proposta colocada é pedir aos alunos que expliquem o que significa as reticências e o x_n na parte $\overline{x_1} \cdot f(\overline{x_1}) + \overline{x_2} \cdot f(\overline{x_2}) + \cdots + \overline{x_n} \cdot f(\overline{x_n})$ da Equação 5.1, com a finalidade de saber se os alunos compreenderam cada parte da mesma.

5.3 Aula 3 - A capacidade de uma taça de bebida

A partir desta aula começaremos a trabalhar o método das cascas com curvas. Além disso, será mostrado que esse método pode ser usado para descobri algumas informações que podem ser úteis no cotidiano. O exemplo que será usado é o cálculo da capacidade de uma taça de bebida.

5.3.1 Objetivo de aula

- Usar a equação do método das cascas para calcular o volume da taça gerada pela função $f(x) = -0,25x^2 + 6,25$;
- Comparar os resultados encontrados pelos alunos com o valor exato calculado pela Equação 3.12;
- Usar o Excel para analisar resultado para outras quantidades de cascas.

5.3.2 Conteúdo abordados

- Volume pelo método das cascas;
- Comparação de resultados por aproximação.

5.3.3 Materiais e recursos

- Taça com interior gerado pela função $f(x) = -0,25x^2 + 6,25$ impressa em 3D[6], representada pela Figura 5.5.

[6] Link para download do arquivo em formato .stl para a impressão do sólido. Disponível em: <https://drive.google.com/drive/folders/1RJzICDvZdPTOK2NfipeUsxQtenybANbS?usp=sharing>. Acesso em: 29 jul. 2025.

Figura 5.5 – Taça de bebida

Fonte: Registrado pelo autor.

- Tabela Excel com a função e os cálculos de cada passo do volume da taça[7] com cálculo até a 20ª casca, como ilustra a Figura 5.6;

Figura 5.6 – Tabela em Excel com os dados e todos os passos do cálculo do volume da taça

Tabela para a construção do sólido geométrico (paraboloide) pelo método das cascas cilíndricas

Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função quadrática	-0,25
Valor (b) da função quadrática	0
Valor (c) da função quadrática	6,25
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	0
Intervalo de rotação	0
Quantidade de cascas	20
Espessura da casca	0

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 2	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 3	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 4	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 5	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 6	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 7	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 8	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 9	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 10	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 11	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 12	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 13	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 14	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 15	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 16	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 17	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 18	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 19	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 20	0	0	0,00	0,00	0,00
				Soma total:	0,00
				Volume do sólido	0,00

Fonte: Registrado pelo autor.

- Calculadora;
- Quadro Branco;
- Projetor ou TV;

[7] Link para download do arquivo em formato .xls da tabela. Disponível em: <https://docs.google.com/spreadsheets/d/1vf26_lR2xIuNXsksJyRotHZhGBGbK_97/edit?usp=sharing&ouid=109630566864520703501&rtpof=true&sd=true>. Acesso em: 29 jul. 2025.

5.3.4 Desenvolvimento da aula

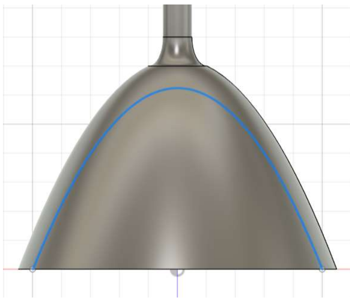
Início (10 minutos)

Nesta terceira aula, o professor pode iniciar a aula já com a taça em mãos e perguntar algo do tipo: "Observando o tamanho da taça, vocês podem estimar a sua capacidade, ou seja, quantos mL's de um líquido ela suporta?". Então escutando respostas dos alunos, pode continuar: "Será que existe um método que possa nos dar um valor para essa capacidade?". A ideia aqui é induzir os alunos à equação do método das cascas, como meio para encontrar a capacidade da taça.

Para tal, o professor pode colocar o copo da taça virada para baixo, e perguntar para os alunos que tipo de função o formato do copo da taça lembrava a eles, a intenção aqui é levá-los a pensar no interior do copo como uma função quadrática, mais precisamente com concavidade voltada para baixo.

Nesse momento, é conveniente mostrar aos alunos que o interior do copo daquela taça foi construída através de uma função quadrática, e que a função em específico é $f(x) = -0,25x^2 + 6,25$, que pode ser representada pela Figura 5.7.

Figura 5.7 – Projeção da função $f(x)$ que define o interior da taça, em azul.



Fonte: Registrado pelo autor.

Desenvolvimento (30 minutos)

A atividade principal aqui é bem simples: fazer com que os alunos calculem a capacidade aproximada dessa taça. Desse ponto, o professor deve começar indicando que para essa função, o raio da borda da taça é de $5cm$, ou seja, que intervalo no qual vamos dividir a função é $[0,5]$ em x. Desse modo, a turma pode ser dividade em grupos, onde os grupos vão calcular o volume para 5 e 10 cascas. Nesse momento, como o intervalo é de 0 a 5, é relevante falar aos alunos que dividir a quantidade de cascas em múltiplos de 5 facilitar os cálculos na hora da divisão, pois o intervalo de revolução tem 5 unidades.

Usando novamente a Equação 5.1 para o cálculo do volume, devemos encontrar Δx e os produtos $\overline{x_i} \cdot f(\overline{x_i})$. Os resultado para 5 cascas e 10 cascas, como exemplo, com aproximação de duas casas decimais e com $\pi = 3,14$, podem ser verificados a seguir:

- Para o sólido com 5 cascas:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 2 - 1 \Rightarrow \Delta x = 1$$

Tabela 5.6 – Cálculo do volume da Taça com 5 cascas

Cascas	**Coordenada externa** (x_i)	**Coordenada interna** (x_{i-1})	**Ponto médio** ($\overline{x_i}$)	**Altura do cilindro em** $\overline{x_i}$ ($f(\overline{x_i})$)	$\overline{x_i} \cdot f(\overline{x_i})$
Casca 1	1	0	$\frac{0+1}{2} = 0,5$	$(-0,25) \cdot (0,5)^2 + 6,25 = 6,19$	$0,5 \cdot 6,19 = 3,09$
Casca 2	2	1	$\frac{1+2}{2} = 1,5$	$(-0,25) \cdot (1,5)^2 + 6,25 = 5,69$	$1,5 \cdot 5,69 = 8,53$
Casca 3	3	2	$\frac{2+3}{2} = 2,5$	$(-0,25) \cdot (2,5)^2 + 6,25 = 4,69$	$2,5 \cdot 4,69 = 11,72$
Casca 4	4	3	$\frac{3+4}{2} = 3,5$	$(-0,25) \cdot (3,5)^2 + 6,25 = 3,19$	$3,5 \cdot 3,19 = 11,16$
Casca 5	5	4	$\frac{5+4}{2} = 4,5$	$(-0,25) \cdot (4,5)^2 + 6,25 = 1,19$	$4,5 \cdot 1,19 = 5,34$

Fonte: Elaboração própria.

Com os elementos do paraboloide com 5 cascas calculados na Tabela 5.6, o volume do sólido é

$$
\begin{aligned}
V_s &= 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\overline{x_1} \cdot f(\overline{x_1}) + \overline{x_2} \cdot f(\overline{x_2}) + \overline{x_3} \cdot f(\overline{x_3}) + \overline{x_4} \cdot f(\overline{x_4}) + \overline{x_5} \cdot f(\overline{x_5})] \\
&= 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot [3,09 + 8,53 + 11,72 + 11,16 + 5,34] \\
&= 250,22 cm^3.
\end{aligned}
$$

- Para o sólido com 10 cascas:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 1 - 0,5 \Rightarrow \Delta x = 0,5$$

Tabela 5.7 – Cálculo do volume da Taça com 10 cascas

Cascas	**Coordenada externa** (x_i)	**Coordenada interna** (x_{i-1})	**Ponto médio** ($\overline{x_i}$)	**Altura do cilindro em** $\overline{x_i}$ ($f(\overline{x_i})$)	$\overline{x_i} \cdot f(\overline{x_i})$
Casca 1	0,5	0	$\frac{0+0,5}{2} = 0,25$	$(-0,25) \cdot (0,25)^2 + 6,25 = 6,23$	$0,25 \cdot 6,23 = 1,56$
Casca 2	1	0,5	$\frac{0,5+1}{2} = 0,75$	$(-0,25) \cdot (0,75)^2 + 6,25 = 6,11$	$0,75 \cdot 6,11 = 4,58$
Casca 3	1,5	1	$\frac{1+1,5}{2} = 1,25$	$(-0,25) \cdot (1,25)^2 + 6,25 = 5,86$	$1,25 \cdot 5,86 = 7,32$
Casca 4	2	1,5	$\frac{1,5+2}{2} = 1,75$	$(-0,25) \cdot (1,75)^2 + 6,25 = 5,48$	$1,75 \cdot 5,48 = 9,60$
Casca 5	2,5	2	$\frac{2+2,5}{2} = 2,25$	$(-0,25) \cdot (2,25)^2 + 6,25 = 4,98$	$2,25 \cdot 4,98 = 11,21$
Casca 6	3	2,5	$\frac{2,5+3}{2} = 2,75$	$(-0,25) \cdot (2,75)^2 + 6,25 = 4,36$	$2,75 \cdot 4,36 = 11,99$
Casca 7	3,5	3	$\frac{3+3,5}{2} = 3,25$	$(-0,25) \cdot (3,25)^2 + 6,25 = 3,61$	$3,25 \cdot 3,61 = 11,73$
Casca 8	4	3,5	$\frac{3,5+4}{2} = 3,75$	$(-0,25) \cdot (3,75)^2 + 6,25 = 2,73$	$3,75 \cdot 2,73 = 10,25$
Casca 9	4,5	4	$\frac{4+4,5}{2} = 4,25$	$(-0,25) \cdot (4,25)^2 + 6,25 = 1,73$	$4,25 \cdot 1,73 = 7,37$
Casca 10	5	4,5	$\frac{4,5+5}{2} = 4,75$	$(-0,25) \cdot (4,75)^2 + 6,25 = 0,61$	$4,75 \cdot 0,61 = 2,89$

Fonte: Elaboração própria.

Com os elementos do paraboloide com 10 cascas calculados na Tabela 5.7, o volume do sólido é

$$
\begin{aligned}
V_s =& 2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot [\overline{x_1} \cdot f(\overline{x_1}) + \overline{x_2} \cdot f(\overline{x_2}) + \cdots + \overline{x_{10}} \cdot f(\overline{x_{10}})] \\
=& 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot [1,56 + 4,58 + 7,32 + 9,6 + 11,21 + \\
& + 11,99 + 11,73 + 10,25 + 7,37 + 2,89] \\
=& 246,54 cm^3.
\end{aligned}
$$

Uma ferramenta interessante, que também serve para verificar os cálculos dos alunos de forma mais rápida, é a tabela do Excel mencionada no Capítulo 4. Com ela, podemos verificar o volume para quantas cascas tivermos dividido o sólido, com o máximo sendo 20. Observe nas Figuras 5.8 e 5.9, a comparação dos cálculos já feitos para 5 e 10 cascas.

Figura 5.8 – Tabela do Excel que calcula o volume do paraboloide com 5 cascas

Tabela para a construção do sólido geométrico (paraboloide) pelo método das cascas cilíndricas

Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função quadrática	-0,25
Valor (b) da função quadrática	0
Valor (c) da função quadrática	6,25
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	5
Intervalo de rotação	5
Quantidade de cascas	5
Espessura da casca	1

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	1	0,50	6,19	3,09
Casca 2	1	2	1,50	5,69	8,53
Casca 3	2	3	2,50	4,69	11,72
Casca 4	3	4	3,50	3,19	11,16
Casca 5	4	5	4,50	1,19	5,34
Casca 6	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 7	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 8	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 9	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 10	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 11	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 12	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 13	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 14	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 15	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 16	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 17	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 18	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 19	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 20	0	0	0,00	0,00	0,00
				Soma total:	39,84
				Volume do sólido	250,35

Fonte: Registrado pelo autor.

Observe que na Figura 5.8, a tabela preenche os valores para 5 cascas e o restante das cascas tem seus elementos zerados.

Figura 5.9 – Tabela do Excel que calcula o volume do paraboloide com 10 cascas

Tabela para a construção do sólido geométrico (paraboloide) pelo método das cascas cilíndricas

Configuração do sólido	Valor
Valor (a) da função quadrática	-0,25
Valor (b) da função quadrática	0
Valor (c) da função quadrática	6,25
Valor do raio inicial	0
Valor do raio final	5
Intervalo de rotação	5
Quantidade de cascas	10
Espessura da casca	0,5

Casca	Raio interno da casca	Raio externo da casca	Raio médio da casca	Altura da casca	Raio médio x Altura da casca
Casca 1	0	0,5	0,25	6,23	1,56
Casca 2	0,5	1	0,75	6,11	4,58
Casca 3	1	1,5	1,25	5,86	7,32
Casca 4	1,5	2	1,75	5,48	9,60
Casca 5	2	2,5	2,25	4,98	11,21
Casca 6	2,5	3	2,75	4,36	11,99
Casca 7	3	3,5	3,25	3,61	11,73
Casca 8	3,5	4	3,75	2,73	10,25
Casca 9	4	4,5	4,25	1,73	7,37
Casca 10	4,5	5	4,75	0,61	2,89
Casca 11	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 12	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 13	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 14	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 15	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 16	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 17	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 18	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 19	0	0	0,00	0,00	0,00
Casca 20	0	0	0,00	0,00	0,00
				Soma total:	78,52
				Volume do sólido	246,66

Fonte: Registrado pelo autor.

É interessante que nesse momento, o professor esteja com a tabela editável[8] sendo

[8] As configurações de edição da tabela podem ser verificadas no Capítulo 4.

mostrada no projeto ou TV, para explicar aos alunos o que é cada um dos valores presentes na tabela. O ponto principal aqui é explicar a tabela de configuração do sólido, que como se trata de um paraboloide, é formado por uma função quadrática, tendo 3 coeficientes a, b e c. Além disso, mostrar que basta modificar os valores nessa tabela de configuração, como raio inicial, raio final ou quantidade de cascas, que os cálculos se alteram automaticamente.

Fechamento (10 minutos)

Aqui, o professor pode fazer uma breve revisão de conversão de volume para capacidade. O objetivo é converter junto aos alunos o volume que encontraram para saber a capacidade da taça. Por Steigenberger (2024, p. 43), temos que

$$1dm^3 = 1000mL.$$

Dividindo ambos os membros por 1000, encontramos que

$$1cm^3 = 1mL.$$

Como os volume calculados na aula são dados em centímetro cúbicos, a conversão se torna fácil. Os grupos que calcularam o volume do paraboloide com 5 cascas, encontraram $250,22cm^3$ para seu volume que, convertendo, equivale a $250,22mL$ de capacidade. Para os alunos que calcularam com 10 cascas, a conversão do volume para capacidade fica

$$246,54cm^3 = 246,54mL.$$

Desse modo, o professor pode perguntar aos alunos como comprovar aquela capacidade. Uma forma diferente de conseguir essa comprovação, é encher a taça de água e depois de cheia despejar em algum recipiente que tenha o medidor de capacidade em mL. Com o medidor preenchido próximo aos 245mL, o professor pode mostrar aos alunos que aquele método de fato funciona, agora, com um exemplo prático aplicado.

Por fim, como atividade para casa, o professor pode pedir aos alunos para calcular o volume da taça para 20 cascas, para que possam comparar o valor no início da próxima aula.

5.3.5 Avaliação

Nesta aula, a avaliação continua sendo qualitativa, observando a participação dos alunos no decorrer da aula e o trabalho em equipe para calcular o volume da taça. Fica a critério do professor, a entrega dos cadernos para revisão dos cálculos e até uma pequena apresentação de cada grupo do resultado encontrados por eles.

A sequência didática pensada foi desenvolvida nessas três aulas, podendo ser dividida em mais aulas, ou incluindo novos sólidos a desejo do professor. Sempre lembrando que elas devem ser adaptadas à realidade da sala de aula que o professor tem acesso.

5.4 Sugestões para contornar limitações quanto à Impressora 3D

Um problema que pode ser enfrentado pelos professores ao desenvolverem esta proposta é a limitação quanto à impressão 3D — ou mesmo a falta dela. Para contornar essa limitação, o professor pode procurar, dentro de sua cidade, empresas que realizam impressões em 3D, levando os modelos construídos e salvos em formato .stl. Caso não haja essa possibilidade, outra sugestão é solicitar esses sólidos de forma online. Atualmente, existem empresas que prestam esse serviço pela internet, permitindo que o cliente faça o pedido do projeto ou, caso já tenha o arquivo pronto, solicite apenas a impressão e o envio dos objetos.

Como sugestão de sites, destacam-se a EngiPrinters[9] e a 3D KL[10], que fornecem orçamento e valor para envio de cada peça impressa.

5.5 Observações e sugestões a respeito da sequência didática

O desenvolvimento dessa sequência didática foi pensada para que uma nova forma de calcular o volume de sólidos geométricos fosse ensinado aos alunos do ensino médio. O maior desafio é conseguir desenvolver essas aulas sem perder o rigor matemático mas ainda sim tornando a aula experimental e interessante aos alunos. Além disso, foi pensado uma sequência que não tomasse muitas aulas do planejamento do professor, para que não atrapalhe o segmento das aulas anuais.

Uma sugestão para o professor, principalmente para o que tem disponibilidade de mais tempo em sala, é que uma quarta aula pode ser desenvolvida, dando foco às tabelas produzidas no excel. Nessa quarta aula, o professor pode ensinar os alunos a construir as tabelas por completo, utilizando o passo a passo feito no Capítulo 4, com a finalidade de apresentar uma nova ferramenta poderosa para automatizar vários tipos de cálculo, que é o Excel.

Os coeficientes da função afim e quadrática utilizadas nessa sequência didática foram pensados de forma não aleatória. Os valores $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 6$ foram escolhidos para que o sólido tivesse 6 unidades de altura e 4 unidades de raio, assim, foi utilizado o método desenvolvido na aula 2 para descobrir a equação dessa função e seus coeficientes. A escolha do raio sendo 4 unidade foi para que quando as cascas variassem em quantidade, a medida e cálculos desses raios ainda fosse de fácil operação, o mesmo pode ser aplicado à altura.

Para encontrar a função quadrática usada na aula 3, foi utilizado o auxílio de uma inteligência artificial, o ChatGPT, o prompt usado para desenvolver a função foi: “Me dê uma função quadrática para revolucionar onde o volume acima do eixo x após revolucionada seja próximo a 250 unidades cúbicas, o eixo de simetria coincida com o eixo y, com concavidade voltada para baixo, suas raízes sejam -5 e 5, e o vértice seja próximo a 6. Além disso essa função revolucionada deve parecer a uma taça de bebida”. Vale ressaltar que apesar do uso da

[9] Link para acessar o site. Disponível em: <https://engiprinters.com.br/> . Acesso em: 05 set. 2025.
[10] Link para acessar o site. Disponível em: <https://3dklimpressao3d.com.br/> . Acesso em: 05 set. 2025.

inteligência artificial ser muito útil para desenvolver essas e outras funções, o autor recomenda a verificação de tais funções através de aplicações e cálculos que comprovem essas características para que se tenha mais segurança da função que está sendo usada. A escolha de tais valores para altura e raio do copo da taça se deu para simular uma taça real que o autor possui e que tem medidas próximas a essas, dessa forma, cria-se uma ligação entre o real e o calculado, mostrando que a matemática e seus elementos pode estar presente no cotidiano. Como sugestão, o professor também pode desenvolver junto aos alunos o cálculo para funções onde ele também não conhece o volume do sólido, assim se inserindo também em um ambiente de descoberta e investigação no decorrer da aula, e, ao final, comprovando através das tabelas e da equação desenvolvida nos Capítulos 3 e 4 o volume do sólido investigado.