UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

André Luiz Ferreira Milhorança

Investigações Matemáticas no ensino de probabilidade: uma sequência didática para o Ensino Médio

Florianópolis
2025

André Luiz Ferreira Milhorança

Investigações Matemáticas no ensino de probabilidade: uma sequência didática para o Ensino Médio

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Marcos André Braz Vaz
Coorientadora: Prof. Dra. Maria Carolina Machado Magnus

Florianópolis
2025

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Milhorança, André Luiz Ferreira
Investigações Matemáticas no ensino de probabilidade : uma sequência didática para o Ensino Médio / André Luiz Ferreira Milhorança ; orientador, Marcos André Braz Vaz, coorientadora, Maria Carolina Machado Magnus, 2025.
84 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Florianópolis, 2025.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Investigações Matemáticas. 3. Cenários para investigação. 4. Ensino. I. Vaz, Marcos André Braz. II. Magnus, Maria Carolina Machado. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. IV. Título.

André Luiz Ferreira Milhorança

Investigações Matemáticas no ensino de probabilidade: uma sequência didática para o Ensino Médio

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Mario Rodolfo Roldán Daquilema, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof.(a) Maria Inez Cardoso Gonçalves, Dr(a).
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof.(a) Regina Célia Grando, Dr(a).
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Sergio Tadao Martins
Data: 15/12/2025 08:03:26-0300
CPF: ***.598.118-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Sérgio Tadao Martins
Coordenador do Programa

GOV.BR
Documento assinado digitalmente
MARCOS ANDRE BRAZ VAZ
Data: 12/12/2025 12:53:41-0300
CPF: ***.140.748-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Marcos André Braz Vaz
Orientador

Florianópolis, 2025.

Este trabalho é dedicado a todos os professores de matemática, em especial aqueles que, diariamente, se desafiam e fascinam jovens mentes com a beleza matemática. Aos meus alunos, razão pela qual existe esse trabalho.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, berço da minha educação, que incondicionalmente me demonstra em cada segundo o seu amor, por tornar-me tão grande. Ao meu irmão, eterno companheiro de sonhos e conquistas, por seu brilhantismo e desejo genuíno de viver a vida. Ao meu pai, que em toda oportunidade que teve em me impulsionar, escolheu suas melhores palavras para que eu pudesse continuar. A vocês, que me ensinam a transformar longas distâncias em pequenas eternidades que nos aproximam.

Ao meu companheiro, Ramiro, minha inspiração diária para terminar essa dissertação e um dia, talvez, ser tão qualificado quanto ele. Pelo amor, pela companhia, pela parceria, pelo abraço, pelo conselho e pelo espaço. Pela sua relação conflituosa com a educação, seus questionamentos e seus sonhos.

Ao meu orientador, Marcos, que desde o primeiro dia desse trabalho apontou caminhos e possibilidades. Também pela liberdade, pelos milhares minutos de escuta e por tornar a construção dessa dissertação tão humana. À minha coorientadora, Maria Carolina, por me acolher em seu grupo de pesquisa, me auxiliar na discussão de uma temática que mexe comigo e compreender que a insubordinação também pode ser um gesto de cuidado com o que se pesquisa.

Aos meus amigos, família que a gente escolhe, que, cada um em sua particularidade, se fez presente mesmo quando estive ausente. Por me pegarem pela mão tantas vezes e me trazerem até aqui.

Aos meus alunos, sem os quais não existe o professor André, que tornam a sala de aula o lugar mais caótico que conheço, onde tudo pode acontecer e onde tantas vidas são transformadas, inclusive a minha.

A todos, muito obrigado. Não desistam da educação, não a menosprezem, não a desqualifiquem. Avante!

"Ensinar é um exercício de imortalidade.
De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos
aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra."
ALVES, Rubem. A Alegria de Ensinar. Campinas: Papirus, 1994.

RESUMO

O ensino e a aprendizagem significativos de matemática são temas pertinentes nas pesquisas em Educação Matemática. Nesse sentido, esta dissertação discute metodologias alternativas ao ensino tradicional de matemática, fundamentando-se nas teorias de Skovsmose (2001, 2014) e Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020). Para tanto, esse trabalho teve como objetivo elaborar uma sequência didática, que foi aplicada na Escola de Educação Básica Professor Laércio Caldeira de Andrada, em São José, Santa Catarina, amparada pelos documentos curriculares das escolas estaduais catarinenses. A atividade, desenvolvida com estudantes da 2ª série do Ensino Médio, tomou como ponto de partida conhecimentos prévios de análise combinatória e probabilidade, promovendo uma investigação matemática na qual o professor atuou como mediador. Os resultados apontaram que a metodologia investigativa favoreceu a aprendizagem do conteúdo de probabilidade, ampliando o envolvimento dos estudantes e revelando compreensões que, embora expressas em linguagem cotidiana, se aproximam de conceitos formais como eventos equiprováveis e espaço amostral. Tais compreensões emergiram quando os estudantes relacionaram situações de acaso exploradas nas atividades à ideia de que os resultados possíveis de um experimento se completam mutuamente, reconhecendo que a soma das probabilidades de todos os eventos elementares corresponde a um todo. Também foram levantadas discussões críticas sobre jogos de azar e apostas esportivas, evidenciando a potencialidade da Educação Matemática Crítica em promover reflexões sobre a aplicação social dos conceitos matemáticos. Por fim, a aplicação da sequência didática elaborada permitiu observar que as investigações matemáticas podem favorecer aprendizagens significativas e atitudes reflexivas aos estudantes, desde que adaptadas à realidade das turmas. Mais ainda, a sequência didática possibilitou ao professor colocar-se, também, na situação de fazer descobertas ao propor um ambiente mais flexível de aprendizagem se comparada ao modelo de aula tradicional. Recomenda-se, sobretudo, que futuras pesquisas mantenham vivo o diálogo entre o espaço acadêmico e o chão da escola, de modo que teoria e prática continuem a se alimentar mutuamente.

Palavras-chave: Investigações Matemáticas. Cenários para investigação. Ensino.

ABSTRACT

The meaningful teaching and learning of mathematics are relevant topics in research on Mathematics Education. In this context, this dissertation discusses methodologies that offer an alternative to traditional mathematics instruction, based on the theories of Skovsmose (2001, 2014) and Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020). To this end, the study aimed to develop a didactic sequence, which was implemented at the Professor Laércio Caldeira de Andrada Basic Education School in São José, Santa Catarina, guided by the curricular documents of the state schools in Santa Catarina. The activity, carried out with 2^{nd} year high school students, took prior knowledge of combinatorics and probability as a starting point, promoting a mathematical investigation in which the teacher acted as a mediator. The results indicated that the investigative methodology favored the learning of probability, enhanced student engagement and revealing understandings that, although expressed in everyday language, approach formal concepts such as equiprobable events and sample space. These understandings emerged when students connected situations of chance explored in the activities to the idea that the possible outcomes of an experiment mutually complete each other, recognizing that the sum of the probabilities of all elementary events corresponds to the whole. Critical discussions about gambling and sports betting also arose, highlighting the potential of Critical Mathematics Education to promote reflections on the social application of mathematical concepts. Finally, the implementation of the developed didactic sequence allowed the observation that mathematical investigations can promote meaningful learning and reflective attitudes in students, provided they are adapted to the reality of the classes. Furthermore, the didactic sequence also allowed the teacher to be in a situation of making discoveries by proposing a more flexible learning environment compared to the traditional classroom model. It is strongly recommended that future research maintains the dialogue between the academic sphere and the classroom practice, so that theory and practice continue to mutually inform each other.

Keywords: Mathematical investigations. Scenarios for investigations. Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> "[...] é essencial que a educação matemática busque caminhos que a desviem da norma predominante de domesticação dos estudantes"
>
> Skovsmose (2001, p. 10)

A formação continuada do professor que ensina matemática é assegurada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996). Pesquisas em Educação Matemática reforçam a importância de metodologias que favoreçam aprendizagens significativas. A heterogeneidade das salas de aula no ensino médio impõe desafios adicionais, como as dificuldades de aprendizagem em matemática atribuídas a fatores como desinteresse, desigualdades socioeconômicas, defasagens anteriores e práticas pedagógicas pouco eficazes (Kuhn, 2020; Sousa; Ventura, 2022).

Nesse cenário, o trabalho de Ole Skovsmose destaca-se ao propor uma Educação Matemática Crítica, defendendo práticas que estimulem o pensamento reflexivo e a participação ativa dos estudantes. Segundo o autor, promover aprendizagem significativa exige ir além do ensino tradicional, abrindo espaço para metodologias que valorizem a experiência do estudante. Uma dessas abordagens é a dos "cenários para investigação", em que os estudantes são convidados a explorar situações contextualizadas, levantando questões, dialogando e elaborando caminhos próprios para a resolução dos problemas (Skovsmose, 2014).

Complementando essa perspectiva, a proposta de Investigações Matemáticas em sala de aula (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020) reforça a importância de tornar os alunos protagonistas no processo de construção do conhecimento matemático, aproximando-os do fazer matemático por meio de tarefas abertas e colaborativas. Pesquisas recentes (Musmanno et al., 2021; Fratucci et al., 2020; Nascimento; Quartieri, 2020) reforçam os benefícios dessa abordagem para o desenvolvimento da argumentação, da criatividade e da criticidade.

Apesar dos avanços teóricos, os dados de desempenho dos estudantes brasileiros em matemática seguem preocupantes. Em 2022, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) indicou que 73% dos alunos brasileiros apresentaram baixo desempenho em matemática (INEP, 2023b), enquanto o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) mostrou quedas entre 2019 e 2023 em todos os níveis avaliados (INEP, 2023a). Tais indicadores revelam a urgência de propostas pedagógicas que motivem e envolvam os estudantes como um caminho possível para contribuir com a promoção de uma aprendizagem mais significativa.

Com base nesse contexto, esta pesquisa tem como foco a proposição e análise de uma sequência didática baseada em Investigações Matemáticas, voltada ao ensino de probabilidade em turmas da 2ª série do ensino médio de uma escola pública da rede estadual em São José, Santa Catarina (SC). A proposta se ancorou na cultura escolar local, articulando o conteúdo de probabilidade ao contexto da Gincana Esportiva anual da escola, buscando construir pontes entre o conhecimento matemático e as vivências dos estudantes.

Parte-se da hipótese de que as investigações matemáticas, em contraste com o ensino tradicional, favorecem o desenvolvimento de uma Educação Matemática Crítica, promovendo o protagonismo estudantil, a argumentação e a tomada de decisões fundamentadas. Com isso, pretende-se contribuir com alternativas metodológicas viáveis para o ensino de matemática na educação básica, considerando tanto os desafios impostos pelos currículos quanto as potencialidades existentes nos contextos escolares reais.

1.1 OBJETIVOS

Dado o contexto explorado acima, esta pesquisa tem como objetivo geral desenvolver e analisar uma sequência didática, fundamentada na perspectiva da Educação Matemática Crítica e na metodologia das Investigações Matemáticas, para o ensino de probabilidade em turmas da 2ª série do ensino médio de uma escola pública da rede estadual em São José, SC.

Para que se efetive o objetivo geral, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

I) Discutir os cenários para investigação e as investigações matemáticas em sala de aula como abordagens metodológicas.

II) Elaborar uma sequência didática com uma atividade fundamentada na metodologia das investigações matemáticas no ensino de probabilidade.

III) Aplicar e avaliar a sequência didática na promoção de competências investigativas em probabilidade e da Educação Matemática Crítica entre estudantes da 2ª série do ensino médio.

2 DESENVOLVIMENTO

Na tentativa de melhor identificar e qualificar a lacuna de pesquisa a ser discutida durante o desenvolvimento desta dissertação, inicialmente foi feita uma revisão sistemática explorando indexadores relacionados ao tema de interesse. Para isso, foram realizadas buscas no Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) em abril de 2024.

Os trabalhos selecionados foram artigos que trataram de sugerir uma prática pedagógica alternativa à tradicional para o ensino de matemática. Assim, as investigações matemáticas (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020) e os cenários para investigação (Skovsmose, 2014) apresentam-se como metodologias possíveis na atuação do professor de matemática da educação básica, promovendo situações de protagonismo do aluno. Isto é, situações que favorecem a aprendizagem significativa rumo a uma educação matemática crítica.

2.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA

Influenciado pela Teoria Crítica da escola de Frankfurt e pela proposta educacional de Paulo Freire, o pesquisador Ole Skovsmose (2001, 2014) enuncia a Educação Matemática Crítica (EMC) como uma concepção teórica que se dedica a discutir o ensino de matemática para a formação crítica dos sujeitos.

Ao modelo tradicional, que coloca o professor como apresentador de ideias e técnicas matemáticas a serem trabalhadas posteriormente pelos alunos, Skovsmose (2000) o enquadra no *paradigma do exercício*. Em geral, há uma seleção de exercícios — que, porventura, são retirados do livro didático, formulado por um profissional externo àquela sala de aula — cuja premissa é a de que existe uma, e somente uma, resposta correta para eles.

Uma Educação Matemática que se preocupa com a aprendizagem significativa de seus alunos busca a formação crítica de seus sujeitos. Isso significa que, para além das habilidades matemáticas, os alunos devem desenvolver a capacidade de pensar criticamente e agir diretamente na construção de oportunidades mais igualitárias. Desse modo, o ensino tradicional de matemática precisa ser questionado a fim de que se promovam atividades de caráter investigativo em que possam ser admitidas múltiplas respostas (Skovsmose, 2001).

Buscando alternativas ao ensino tradicional, Skovsmose (2014) dedicou-se aos *cenários para investigação* como uma abordagem de aprendizagem baseada em projetos. Seu interesse por atividades investigativas está relacionado à EMC, pois auxiliam na exposição dos estudantes a situações de aprendizagem que os estimulem a conhecer o contexto trabalhado. Tal oportunidade permite ao estudante pensar e questionar, estabelecendo relações entre o conteúdo escolar e a realidade na qual está inserido.

Assim como na perspectiva Freiriana, um cenário para investigação tem no diálogo a abertura de possibilidades de sentidos, pois convida os alunos a formularem questões e a procurarem explicações. Sendo assim, os cenários para investigação contribuem para práticas de sala de aula que divergem das práticas baseadas em exercícios, principalmente no que se refere aos processos percorridos pelos alunos em busca de soluções para questões colocadas pelo professor (Costa Leite et al., 2024).

Nessa perspectiva, Skovsmose (2014) sugere que cenários para investigação e listas de exercícios constituem diferentes *milieus*[1] de aprendizagem. A diferenciação entre esses *milieus* se dá pelas referências feitas pelos alunos nas experiências realizadas pelo autor durante as atividades, por vezes visando conceitos puramente matemáticos, ou que trabalham objetos que apresentam semelhanças com a realidade, ou então que se apoiam em situações da vida real, conforme Quadro 1.

Quadro 1 – Milieus de aprendizagem

	Lista de exercícios	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à uma semirrealidade	(3)	(4)
Referências à vida real	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2014).

O quadro acima apresenta uma matriz de *milieus* de aprendizagem que combina os três tipos de referências com os dois paradigmas de atividades de sala de aula. Após a exibição dessa matriz, Skovsmose (2000) passa a comentar cada um dos ambientes de aprendizagem, apontando também exemplos de atividades.

Segundo o autor, o *milieu* de aprendizagem do tipo (1) apoia-se no contexto da matemática pura, como acontece nas tradicionais listas de exercícios, fazendo referência apenas a objetos puramente matemáticos. Exercícios com enunciados do tipo *reduza, resolva, calcule* e *determine* são amostras desse ambiente de aprendizagem. Ainda fazendo referência à matemática pura, o *milieu* de aprendizagem do tipo (2) caracteriza-se por cenários para investigação sobre números e figuras geométricas (Skovsmose, 2014).

Fazendo referência a uma semirrealidade, o *milieu* de aprendizagem do tipo (3) trabalha com uma situação artificial com o objetivo de ajudar os alunos a contextualizar seus procedimentos matemáticos, porém tratando toda informação como exata e verdadeira. Enquanto isso, o *milieu* de aprendizagem do tipo (4) trabalha a semirrealidade como um cenário para investigação, podendo fazer uso de jogos de simulação de realidade com a ajuda de computadores, por exemplo. Caso não se tenha acesso a recursos digitais, o essencial é envolver os alunos em situações que precisem emitir suas opiniões e participar da tomada de decisões (Skovsmose, 2014).

[1] *Milieu* é uma palavra francesa que designa “meio, centro” (Skovsmose, 2014).

O *milieu* de aprendizagem do tipo (5) faz referência a situações da vida real e, portanto, é preciso informar-se a respeito das situações antes de se formular exercícios nesse ambiente de aprendizagem. Por último, o *milieu* de aprendizagem do tipo (6) elabora um cenário para investigação que deve se apoiar na realidade, seja do contexto escolar, seja da sociedade em que se insere a comunidade escolar. Com referências reais, torna-se possível que os alunos produzam diferentes significados para as atividades, mobilizando conhecimentos matemáticos com autonomia, em que o pressuposto da existência de apenas uma resposta correta não faz mais sentido.

Skovsmose (2014) reforça o desafio de desenvolver ambientes de aprendizagem do tipo (5) e do tipo (6) e, ao mesmo tempo, aponta caminhos de inspiração para a elaboração de atividades dessa natureza. Nesse sentido, o pesquisador enxerga grande potencial nos noticiários, seja na seção de economia, de esportes, de previsão do tempo ou de anúncio de ofertas, devido à abundância de dados que podem se tornar problemas de matemática.

As linhas que dividem os diferentes *milieus* de aprendizagem não são tão claras: há regiões de sobreposição entre ambientes adjacentes. Isso significa que exercícios que costumam ser mais fechados podem ir se abrindo aos poucos, bem como cenários para investigação podem ser trabalhados como tarefas de um projeto, para que se tornem mais fechados.

Dessa maneira, a matriz apresentada no Quadro 1 deve servir de orientação para que cada professor de matemática reflita sobre suas aulas. O pesquisador Skovsmose (2014) considera problemático restringir as atividades aos *milieus* dos tipos (1) e (3), mas estes podem servir como ponto de partida para um determinado conteúdo, que pode ser explorado posteriormente através de uma atividade investigativa no *milieu* dos tipos (2) e (4). Logo, percorrer trajetórias entre diferentes *milieus* ajuda os alunos a atribuírem novos significados às atividades realizadas em sala de aula.

Nessa busca por alternativas ao ensino tradicional, é possível encontrar maneiras de construir uma aprendizagem significativa para os alunos. É isso que preconiza a EMC: fornecer aos estudantes instrumentos que os auxiliem a ler e escrever sua realidade com a matemática, ao invés de apenas ensiná-los fórmulas e modelos matemáticos.

2.2 INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

O rigor e a certeza parecem acompanhar a história da matemática e a construção de conhecimento na área. Porém, a exploração daquilo que é desconhecido pode contrastar com aquele cenário de exatidão e, de algum modo, a matemática passa a figurar como uma ciência experimental ou indutiva. Quando nos deparamos com um problema em matemática, existe uma tendência natural de resolvê-lo; no entanto, a adoção de uma postura investigativa tem o potencial de proporcionar descobertas tão ou mais importantes do que a solução do problema original.

A interação entre vários matemáticos é primordial quando interessados nas mesmas questões: a refutação ou confirmação de resultados, a aceitação da validade de uma demonstração e a escrita de teoremas estão apoiadas no trabalho coletivo de uma comunidade matemática. Faz sentido, portanto, proporcionar aos alunos da sala de aula de matemática momentos de trabalho exploratório, nos quais viverão processos de formulação de questões, elaboração de conjecturas e comunicação de resultados.

No cenário da matemática escolar, cada rede de ensino estabelece suas diretrizes para a construção de um currículo que possa refletir os objetivos e interesses de se ensinar matemática em suas salas de aula. De modo geral, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996) e a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) regulamentam a educação escolar no território brasileiro e definem o conjunto de aprendizagens essenciais para todos os estudantes da Educação Básica, respectivamente.

Na perspectiva das investigações matemáticas, é necessário pensar em formas concretas de organizar atividades que permitam aos estudantes vivenciar processos de exploração e formulação de conjecturas. Na próxima seção, apresenta-se a concepção geral da metodologia adotada para esse fim.

2.2.1 Concepção geral da metodologia

Buscando promover experiências do próprio fazer matemático, os autores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020) apresentam as investigações matemáticas como tarefas de exploração, tratando de situações mais abertas se comparadas aos exercícios e problemas convencionais das aulas de matemática. Como discutido no trabalho de Machado e Lacerda (2021), tarefas investigativas criam situações nas quais os alunos passam a ser matemáticos, isto é, aqueles que buscam soluções, investigam e defendem suas estratégias, atuando com criticidade sobre o processo de ensino e aprendizagem.

Dentre as diversas possibilidades metodológicas para o ensino de matemática, não se descarta o trabalho utilizando listas de exercícios tradicionais. A ideia é apresentar possibilidades de ensino e aprendizagem que possam compor um currículo interessante, que desenvolva efetivamente o conhecimento matemático dos alunos em diferentes níveis de desempenho. Buscando caracterizar as investigações matemáticas, Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020) descrevem que

> Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii)

> discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020, p. 25).

Buscando por aplicações das investigações matemáticas na educação básica, o trabalho de Nascimento e Quartieri (2020) considera aspectos relevantes ao observar que, por meio da atividade investigativa, os alunos utilizaram conhecimentos adquiridos anteriormente para aprender um novo conteúdo. Além disso, o trabalho em grupos colaborativos foi essencial para a elaboração de estratégias e conjecturas diferenciadas. Dessa forma, entendeu-se que a realização da atividade por meio da investigação matemática possibilitou novos horizontes para a aprendizagem em sala de aula.

Devido ao aspecto coletivo da atividade investigativa, com base na experiência de uma prática pedagógica em uma turma da educação básica, os autores Costa e Ferruzzi (2020) inferiram que as investigações matemáticas favorecem o diálogo entre os participantes, contribuindo, assim, para a aprendizagem. Mais do que isso, ficou evidente a oportunidade de vivência e interações entre professor e aluno, mas também entre os próprios alunos, colocando-os como atores de sua aprendizagem.

Para garantir um desempenho satisfatório nas investigações matemáticas em sala de aula, bem como sua aplicabilidade em turmas de matemática na educação básica, é essencial cuidar de cada fase dessa tarefa investigativa, conforme Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020). Em especial, os momentos iniciais devem ter atenção especial ao considerar alunos com pouca ou nenhuma experiência em investigações matemáticas.

Salientando a necessidade de incentivar a escrita argumentativa no decorrer das aulas de matemática, os pesquisadores Mariani e Quartieri (2019) analisaram a aplicação de atividades de investigação matemática em uma turma de ensino fundamental na educação básica. Durante as atividades, buscou-se compreender o raciocínio utilizado pelos alunos, questionando-os de forma que buscassem alternativas de resolução. Feitas as observações das atividades e analisados os dados coletados, notou-se uma melhora significativa nos argumentos utilizados pelos alunos da primeira para a segunda atividade, uma vez que eles se mostraram mais familiarizados com a proposta investigativa. Além disso, considerou-se que esta prática pedagógica pode contribuir para a educação matemática, aproximando os conteúdos matemáticos de contextos conhecidos pelos alunos.

2.2.2 Etapas da investigação matemática

A primeira etapa trata-se do arranque da atividade investigativa, sendo o momento em que o professor faz a exposição da tarefa a ser realizada, podendo ser fornecida aos alunos por escrito, o que não desobriga uma breve explanação oral. Deve-se garantir que toda a turma compreenda o significado de investigar: a natureza dessa tarefa se afasta das atividades tradicionais da aula de matemática. Isso acontece pois nem sempre existe um objeto bem delimitado a ser explorado e, por isso, os alunos devem formular suas próprias questões com base na situação apresentada.

A própria interpretação da tarefa configura, por si só, um dos objetivos da investigação matemática (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020). Assim, o professor não deve esgotar as possibilidades de exploração nesse momento de largada, mas construir um ambiente de aprendizagem onde os alunos se sintam livres para colocar suas questões, pensar sobre elas, explorá-las e comunicá-las. É interessante que os alunos saibam, desde já, que o trabalho a ser produzido será socializado com os demais colegas e o professor, promovendo para eles um espaço de estímulo e de valorização pessoal.

Avançando para a segunda etapa, quando o trabalho investigativo passará a ser desenvolvido de fato, o professor assume um papel mais de retaguarda. Isso quer dizer que os próprios coletivos formados pelos alunos devem assumir o protagonismo da tarefa, e espera-se que façam uso de vários processos que caracterizam a investigação matemática. Entre eles, “a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e a avaliação do trabalho (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020, p. 29)”.

É comum que os grupos de alunos precisem gastar algum tempo nessa exploração inicial, uma vez que é ali que eles vão se familiarizando com os dados apresentados e se apropriando do sentido da tarefa investigativa. Por isso, destaca-se a potencialidade do trabalho em grupo no surgimento de alternativas para a exploração da tarefa e a formulação de questões sobre a situação dada.

O surgimento de questões e a elaboração das conjecturas estão apoiados no desenvolvimento de cada grupo de trabalho e sua própria dinâmica. Por vezes, os alunos apresentam dificuldades em formular de maneira explícita suas conjecturas e, desse ponto, sucede a importância da realização de registros escritos do trabalho de investigação.

Tal fato se dá pela necessidade de argumentar e defender suas ideias levantadas, promovendo, assim, a refutação ou confirmação das conjecturas elaboradas. É oportuno ao professor contrapor a tendência dos alunos de observar regularidades em um número pequeno de casos, estimulando-os na procura por contraexemplos e lembrando-os do importante momento da socialização dos resultados.

O registro escrito desempenha um papel fundamental no trabalho investigativo e deve ser valorizado pelo professor. Por um lado, há a possibilidade de desenvolver a capacidade dos alunos de comunicar matematicamente, traduzindo seus próprios pensamentos por meio da escrita dos resultados e esclarecendo suas ideias. Por outro lado, a escrita dos resultados serve como instrumento avaliativo para o professor, tanto no que diz respeito aos trabalhos desenvolvidos pelos alunos quanto à execução de suas aulas planejadas.

A noção de prova matemática pode ser introduzida gradualmente aos pequenos investigadores enquanto o professor os leva a compreender o caráter provisório das conjecturas. Ao buscarem uma justificação aceitável, baseada em raciocínios coerentes e em seus conhecimentos, os alunos podem assimilar a necessidade de verificação das afirmações levantadas. Reside aí outro aspecto fundamental do papel de moderador assumido pelo professor, que orienta os grupos de trabalho a conciliar suas dificuldades de exploração e escrita de resultados.

Dando continuidade às etapas da investigação matemática, avança-se para a discussão dos resultados, momento esse de suma importância para a partilha e socialização dos conhecimentos mobilizados pelos alunos durante a tarefa investigativa. Desempenhando um papel de moderador, o professor age na garantia de que sejam comunicados os resultados e os processos de maior relevância, estimulando os alunos a confrontarem suas estratégias, conjecturas e justificações (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020).

Mais uma vez, o aluno é convidado a exercitar sua capacidade de comunicar matematicamente, enriquecendo o significado da investigação. Os autores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020) lembram que, mesmo que momentos de discussão não sejam rotina nas aulas de matemática, o professor que conhece bem os seus alunos pode ter mais segurança ao estruturar uma aula de discussão. Deve atentar-se aos tempos e aos sinais que vêm dos alunos, concedendo-lhes maior ou menor flexibilidade durante as socializações.

Enquanto um grupo socializa os resultados de sua investigação, as intervenções de outros grupos devem ser combinadas entre o professor e a turma. A depender da dinâmica de cada grupo, pode-se eleger um porta-voz dos resultados para a partilha dos caminhos percorridos e das decisões tomadas pelo grupo, contribuindo para a continuidade do processo investigativo. Isso acontece pois o professor tem a liberdade de propor uma ordem que os grupos farão as socializações, encaminhando as discussões e as justificações para uma possível conclusão por meio de um raciocínio por maioria de razão.

2.2.3 Papel do professor

A este ponto, deve estar claro que, em investigações matemáticas, o papel do professor não é o de detentor do conhecimento, nem o de transmissor de conteúdo a seus alunos. Pelo contrário, estabelece-se uma interação entre as partes na qual o professor retira-se do lugar tradicional de centralizador da informação e divide com os alunos a responsabilidade da construção do conhecimento. Nesse cenário, o professor concede-lhes a autonomia necessária para não interferir na autoria da investigação, que deve ser exclusiva dos alunos. Por outro lado, deve garantir que o trabalho investigativo aconteça com fluidez e de forma significativa do ponto de vista da matemática.

Segundo Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), essa reorganização de papéis na sala de aula compõe um desafio extra para o professor, pois os alunos serão retirados da tendência natural, nas aulas de matemática, de procurar respostas para perguntas colocadas pelo professor. Para evitar esse comportamento, desde os momentos iniciais da investigação, o professor deve apontar-lhes possibilidades de interrogar matematicamente as situações e formular boas questões a partir daí.

Outro aspecto da postura assumida pelo professor é a de permanecer atento à forma como os alunos encaram o trabalho investigativo, para que não limitem a tarefa a encontrar uma resposta, como se costuma fazer em um simples exercício. Durante a realização das investigações, o docente deve aproximar-se de cada grupo de trabalho e recolher informações sobre o desenrolar da atividade, fazendo-lhes perguntas e pedindo-lhes explicações.

Não se trata, nesse momento, de ajuizar-se sobre os trabalhos observados, mas de esforçar-se para ouvir os alunos e compreendê-los, evitando corrigi-los sobre alguma afirmação ou conceito matematicamente pouco corretos. Esses períodos de avaliação do progresso dos trabalhos auxiliam o professor a decidir sobre a quantidade de tempo que os grupos de alunos ainda precisam para desenrolar suas investigações e avançar para a fase das discussões.

Além do mais, essas visitas feitas aos grupos de alunos durante o desenvolvimento de suas investigações constituem uma oportunidade para o professor manifestar seu raciocínio matemático. “Trata-se, também, de uma ocasião privilegiada para o professor evidenciar como se aborda o teste de conjecturas, pensando em voz alta com os alunos” (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020, p. 48). É possível verificar o quanto os alunos se apropriaram das etapas de formulação e teste das conjecturas e, mais uma vez, o professor é instigado a avaliar os momentos oportunos para trabalhar com o processo de prova - experimentando princípios de um processo de demonstração - matemática. Porém, recomenda-se sempre motivar seus alunos a justificarem suas afirmações.

De um modo geral, o aspecto predominante na atuação do professor durante as investigações matemáticas é o de apoio que concede aos seus alunos. Deve privilegiar uma postura interrogativa, colocando questões abertas, seja para clarificar ideias ou para compreender um raciocínio, promovendo aos alunos uma reflexão sobre seus próprios trabalhos. Configura, assim, um desafio à atuação profissional docente que sai de uma postura tradicional de validar e corrigir conceitos em desenvolvimento e é colocado numa situação que exige flexibilidade para lidar com situações novas e, por vezes, imprevisíveis.

2.2.4 Avaliação em investigações matemáticas

As investigações matemáticas, apresentadas aqui como uma atividade de aprendizagem alternativa ao ensino tradicional, também exigem a realização de avaliação. Os professores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020) apontam uma diversidade de instrumentos avaliativos, de natureza oral e escrita, que buscam verificar a aprendizagem dos alunos com base em objetivos curriculares.

Fazendo uso de um instrumento avaliativo de natureza escrita, os relatórios constituem uma opção a ser realizada por um aluno ou por um grupo de alunos. Os relatórios abrigam a chance de os alunos descreverem, para além de suas conclusões, os processos que usaram na tarefa de investigação que os levaram a tais conclusões. Estimulados pelo professor, podem apresentar uma descrição o mais detalhada possível do trabalho realizado, incluindo as questões levantadas em relação à situação proposta, as fontes consultadas, a maneira como organizaram os dados, as conjecturas provadas e não provadas, as decisões e procedimentos utilizados para a validação das conjecturas, entre outros.

Quando a escrita de relatórios não é algo familiar aos alunos, é interessante que eles saibam o que está sendo pedido e que conheçam os aspectos a serem considerados em sua avaliação. Por esse motivo, recomenda-se que o professor realize um conjunto de indicações precisas, de modo a construir, com os alunos que realizam investigações matemáticas, uma espécie de roteiro para o relatório. Ter indicações escritas permite que os alunos façam sua releitura quantas vezes forem necessárias, o que não exclui conversar sobre o que se pretende com o relatório.

Segundo Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), depois de elaborados os relatórios, podem ser estabelecidas escalas quantitativas ou qualitativas para compor a avaliação. A construção dessas escalas se dá a partir de um objetivo de aprendizagem - ou conjunto de objetivos - que pode ser graduado em diferentes níveis e, depois, faz-se a correspondência entre esse objetivo e o nível atingido nos relatórios dos alunos.

Mais importante do que a escala adotada são os critérios utilizados na avaliação e a devolutiva que o professor faz a seus alunos. Ao adotar esse tipo de avaliação, há a oportunidade de se fazer uma consideração global do trabalho, mas também de apontar sugestões para melhorar a investigação apresentada.

Considerando outras formas de avaliação do trabalho investigativo, são apresentadas a observação informal e as apresentações orais. Instrumento rotineiro das aulas de matemática, a observação informal é uma forma natural de avaliar os alunos, pois, por meio dela, o professor é capaz de observar as suas atitudes e a maneira como mobilizam conhecimentos matemáticos formais e informais.

Vale destacar que a observação não é, necessariamente, uma atitude passiva realizada pelo professor. Isso significa que o professor se encontra na possibilidade de fazer perguntas aos alunos, buscando perceber a forma como estão pensando e seus processos de raciocínio, a fim de complementar suas observações sobre um aluno ou um grupo deles.

Já as apresentações orais, que podem acontecer naturalmente na socialização dos resultados das investigações matemáticas, constituem um instrumento de avaliação a ser considerado pelo professor. Além disso, contribuem para a aprendizagem dos alunos ao estimular suas capacidades de comunicação e argumentação. Por meio das apresentações, pode-se conhecer a compreensão do processo investigativo, os processos de raciocínio e as decisões, permitindo avaliar diversos objetivos.

Ao conhecer tais instrumentos avaliativos, é possível ainda adotar uma avaliação multifacetada em que "o professor pode fazer, correntemente, a observação direta dos alunos e grupos durante a realização de tarefas e alternar as apresentações orais com a produção de relatórios escritos, individuais ou de grupo" (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020, p. 121).

Em suma, as investigações matemáticas desenham uma perspectiva curricular que pode ser implementada na sala de aula e que se preocupa com a aprendizagem dos alunos. Aproximá-los da experiência de fazer matemática torna a sala de aula um ambiente de trabalho envolvente e estimulante. Segundo o professor João Pedro da Ponte, o ensino de matemática torna-se carente se não for dada a oportunidade aos alunos para atuarem como pequenos matemáticos (Wichnoski, 2022).

2.3 ENSINO DE PROBABILIDADE

A promulgação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) designa-a como um guia normativo que estabelece os conhecimentos e habilidades essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da escolaridade. Nessa direção, a área de conhecimento da Matemática e suas tecnologias se apresenta a partir de cinco competências específicas a serem desenvolvidas ao longo do ensino médio.

A partir desse documento, os currículos de matemática das escolas brasileiras que oferecem o ensino médio devem contemplar as diretrizes estabelecidas para garantir o desenvolvimento das habilidades listadas ao longo das cinco competências específicas. Nesse sentido, a BNCC não se apresenta como uma lista de conteúdos a serem cumpridos, mas como um conjunto de apontamentos de conhecimentos a serem garantidos aos alunos.

2.3.1 Diretrizes curriculares

Dentro da estrutura da Base Nacional Comum Curricular, no que se refere à área de conhecimento da Matemática e suas Tecnologias para o ensino médio, deseja-se dar continuidade às aprendizagens desenvolvidas no ensino fundamental, agora ainda mais fazendo referência à realidade do aluno.

Para isso, elenca o desenvolvimento de cinco competências específicas que devem ser garantidas aos estudantes do ensino médio. São elas:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
> 2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 523).

Associadas a cada uma das competências, são indicadas habilidades a serem alcançadas na etapa do ensino médio. Dentre elas, foi identificada a unidade temática *Probabilidade e Estatística*, sendo esta o objeto de interesse dessa pesquisa. Para o desenvolvimento da sequência didática a ser aplicada como parte dessa pesquisa, foram assinaladas as habilidades que se relacionam à temática de probabilidade.

Na Competência Específica 1, temos a habilidade "(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.)" (Brasil, 2018, p. 533).

Relacionada à Competência Específica 3, temos "(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore" (Brasil, 2018, p. 533), que é uma habilidade que espera-se ter sido desenvolvida antes da atividade de investigação matemática planejada nessa dissertação.

Ainda na Competência Específica 3, temos:

> (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade;

> (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos (Brasil, 2018, p.537).

Depois, na Competência Específica 5, temos "(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades" (Brasil, 2018, p. 541).

É interessante destacar, por fim, que as investigações matemáticas têm real potencial no desenvolvimento da Competência 5, especificamente. Ao propor situações da realidade, os alunos serão convidados a levantar suas próprias questões, formular conjecturas, refutá-las ou validá-las, comunicando suas conclusões. Esses aspectos podem contribuir na compreensão que os alunos possuem sobre a matemática, ressignificando-a como resultado de atividade humana.

2.3.2 Fundamentos básicos

Após a discussão sobre a Educação Matemática Crítica e a metodologia das investigações matemáticas, esta seção tem por objetivo apresentar os fundamentos formais da teoria da probabilidade, que servem de base conceitual para a sequência didática proposta neste trabalho.

Embora as atividades investigativas planejadas estejam voltadas à Educação Básica e privilegiem situações contextualizadas, é essencial que o professor tenha domínio dos conceitos estruturantes da teoria probabilística. A construção rigorosa desses conceitos, baseada em definições axiomáticas, propriedades e demonstrações, contribui não apenas para a segurança conceitual do docente, mas também para a elaboração de situações didáticas mais precisas e significativas.

Neste sentido, serão expostos a seguir os principais elementos da formulação moderna da probabilidade, com ênfase no modelo axiomático desenvolvido por Kolmogorov, abordando noções como espaço amostral, eventos, medidas de probabilidade, independência e probabilidade condicional. Essa formalização se apoia, principalmente, na obra de James (2023), servindo como referência matemática para a prática pedagógica desenvolvida na sequência didática.

2.3.2.1 Espaço Amostral

Assim sendo, suponhamos que um experimento seja realizado sob certas condições fixas. Seja Ω o conjunto de resultados possíveis, onde por *resultado possível* entende-se resultado elementar e indivisível do experimento. Ω será chamado *espaço amostral* do experimento. Desse modo, vamos supor:

(i) a todo resultado possível corresponde um, e somente um, ponto $\omega \in \Omega$; e

(ii) resultados distintos correspondem a pontos distintos em Ω, isto é, ω não pode representar mais de um resultado.

Então, todo evento associado a um experimento pode ser identificado a um subconjunto do espaço amostral Ω. Com efeito, seja Ω o espaço amostral e A um evento associado ao experimento, isto é, um evento que seguramente irá ou não ocorrer sempre que for realizado o experimento. Para fixarmos ideias, suponhamos que Ω consista exatamente nos resultados possíveis do experimento, de modo que Ω não contenha resultados impossíveis. Suponhamos, então, que ω seja o resultado do experimento. Se A ocorre, dizemos que ω é *favorável* a A. Se A não ocorre, dizemos que ω não é favorável a A (ou ainda, que ω é favorável ao evento "não A"). Identificaremos o evento A e o subconjunto de Ω que contém todo ω favorável a A.

Chegamos à seguinte definição, que adotaremos no caso geral, inclusive nos casos em que utilizamos um espaço amostral maior que o estritamente necessário:

Definição 1. Seja Ω o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado *evento*. Ω é o evento *certo*, $\varnothing$ o evento *impossível*. Se $\omega \in \Omega$, o evento $\{\omega\}$ é dito *elementar* (ou simples).

Definição 2. Um evento A ao qual iremos atribuir uma probabilidade será chamado *evento aleatório*.

Suponhamos que a classe dos eventos aleatórios possua certas propriedades básicas e intuitivas, que serão essenciais para o desenvolvimento posterior da teoria e do cálculo de probabilidades. Indicando com $\mathbb{A}$ a classe dos eventos aleatórios, vamos estipular as seguintes propriedades para $\mathbb{A}$:

A1. $\Omega \in \mathbb{A}$ (definiremos $P(\Omega) = 1$).

A2. Se $A \in \mathbb{A}$, então $A^c \in \mathbb{A}$ (é evidente que definiremos

$$P(A^c) = 1 - P(A)).$$

A3. Se $A \in \mathbb{A}$ e $B \in \mathbb{A}$, então $A \cup B \in \mathbb{A}$ (i.e., se atribuirmos uma probabilidade a A e outra a B, então atribuiremos uma probabilidade a "A ou B").

Em outras palavras, vamos supor que $\mathbb{A}$ seja uma álgebra de eventos:

Definição 3. Seja $\mathbb{A}$ um conjunto não-vazio. Uma classe $\mathbb{A}$ de subconjuntos de Ω satisfazendo A1, A2 e A3 é chamado *álgebra* de subconjuntos de Ω.

Proposição 1. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de subconjuntos de Ω. Então valem as seguintes propriedades:*

A4. $\varnothing \in \mathbb{A}$ *e*

A5. $\forall n, \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A}$, *temos* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{A}$ *e* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{A}$.

Esta proposição diz que uma álgebra é fechada para um número *finito* de aplicações das operações $\cup, \cap$ e ^{c}.

Demonstração. A1 e A2 implicam A4. Para A5, temos A3 $\Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathbb{A} \Rightarrow (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \in \mathbb{A} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{A}$, por indução.

Agora, basta observar que

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c \right)^c$$

e aplicar sucessivamente A2, a parte já provada de A5 e, novamente, A2.

□

Seguidamente, vamos supor que a classe dos eventos aleatórios também satisfaça:

A3'. Se $A_n \in \mathbb{A}$ para $n = 1,2,3,\ldots$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$.

Definição 4. Uma classe $\mathbb{A}$ de subconjuntos de um conjunto não-vazio Ω satisfazendo A1, A2 e A3' é chamada $\sigma-$*álgebra* de subconjuntos de Ω.

Observações. (1) Uma $\sigma-$lgebra é sempre uma álgebra, pois A3 é consequência de A3', já que $A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \ldots \in \mathbb{A}$ se $\mathbb{A}$ é $\sigma-$álgebra.
(2) Podemos supor que $\mathbb{A}$ é uma $\sigma-$álgebra em vez de álgebra, pelo Teorema da Extensão de Carathéodory. Este teorema da Teoria da Medida garante que uma probabilidade definida em uma álgebra, e de acordo com os axiomas usuais, pode ser estendida de uma única maneira para a $\sigma-$álgebra gerada pela álgebra.
(3) Em inglês, usa-se às vezes o termo "field" (corpo) no lugar de "álgebra" e "$\sigma-$field" no lugar de "$\sigma-$álgebra". Para o tradutor de Gnedenko, $\sigma-$álgebra é "Borel field". Em francês, é "tribu".

Proposição 2. *Seja $\mathbb{A}$ uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω. Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{A}$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$.*

Demonstração.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \quad .$$

□

Podemos dizer, então, que uma $\sigma-$álgebra é fechada para um número *enumerável* de aplicações das operações $\cup, \cap$ e ^{c}.

Passamos agora a definir probabilidade, sendo que um método de o fazer é o da frequência relativa: poderíamos definir $P(A)$ como o limite da frequência relativa da ocorrência de A em n repetições independentes do experimento, com n tendendo ao infinito, i.e.,

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{número de ocorrências de } A \text{ em } n \text{ “ensaios”} \\ \text{independentes do experimento.} \end{array} \right\}.$$

Esta é a definição “frequentista” ou “estatística” de probabilidade. Baseia-se na experiência, comum a todos nós, da estabilidade da frequência relativa de ocorrência de eventos, quando realizamos muitas repetições do experimento. Essa definição foi usada por von Mises na construção de uma teoria de probabilidade.

Outro método de definir probabilidade é o de estabelecimento de axiomas, conhecido como *definição axiomática de probabilidade*. Para isso, vamos admitir que *existem* as probabilidades em uma certa $\sigma-$álgebra $\mathbb{A}$ de eventos, chamados eventos aleatórios; vamos supor que a todo $A \in \mathbb{A}$ seja associado um número real $P(A)$, chamado *probabilidade de A*, de modo que os axiomas a seguir sejam satisfeitos.

Axioma 1. $P(A) \geq 0$.

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. *(Aditividade finita).* Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A}$ são disjuntos (2 a 2), então

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

(Os eventos são disjuntos, ou disjuntos 2 a 2, se são mutuamente exclusivos, i.e., $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$.)

> **Observações.** Como $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$, podemos usar indução para mostrar que o Axioma 3 está satisfeito (para todo n) quando está satisfeito para $n = 2$. Uma função P satisfazendo Axiomas 1, 2 e 3 é chamada *probabilidade finitamente aditiva*. Embora alguma coisa tenha sido feita com tais probabilidades, é matematicamente mais conveniente supor $\sigma-$aditividade:
>
> **Axioma 3'.** *($\sigma-$aditividade).* Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{A}$ são disjuntos (i.e., mutuamente exclusivos), então
>
> $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Proposição 3. *O Axioma 3' implica o Axioma 3, i.e., se P é $\sigma-$aditiva, então é finitamente aditiva.*

Demonstração. Suponhamos satisfeito o Axioma 3', e sejam $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A}$ disjuntos. Notemos inicialmente que $P(\varnothing) = 0$, já que

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \dots) = P(\Omega) \cup P(\varnothing) + P(\varnothing) + \dots \qquad .$$

Definamos $A_k = \varnothing$ para $k = n+1, n+2, \dots$. Então $A_1, A_2, \dots$ são disjuntos, logo

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \dots = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

□

Definição 5. Uma função P definida numa $\sigma-$álgebra $\mathbb{A}$ e satisfazendo os Axiomas 1, 2 e 3' chama-se uma *medida de probabilidade em* $\mathbb{A}$ ou simplesmente uma *probabilidade em* $\mathbb{A}$.

Ocorre que, dados os Axiomas 1, 2, 3, o Axioma 3' é equivalente ao:

Axioma 4. (*"Continuidade no vazio"*). Se a sequência $(A_n)_{n\geq 1}$, onde $A_n \in \mathbb{A} \forall n$, decrescer para o vazio, então $P(A_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

> **Observação.** $(A_n)_{n\geq 1}$ decresce para o vazio ($A_n \downarrow \varnothing$) significa $A_n \supset A_{n+1} \forall n$, ou seja, $(A_n)_{n\geq 1}$ decresce, e $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \varnothing$.

Proposição 4. *Dados os Axiomas 1, 2, 3 o Axioma 4 é equivalente ao Axioma 3' (i.e., uma probabilidade finitamente aditiva é uma probabilidade se, e somente se, é contínua no vazio).*

Demonstração. (i) Suponhamos o Axioma 3'. Sejam $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$ tais que $A_n \downarrow \varnothing$. Queremos provar que $P(A_n) \to 0$. Temos

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k - A_{k+1}),$$

pelo diagrama:

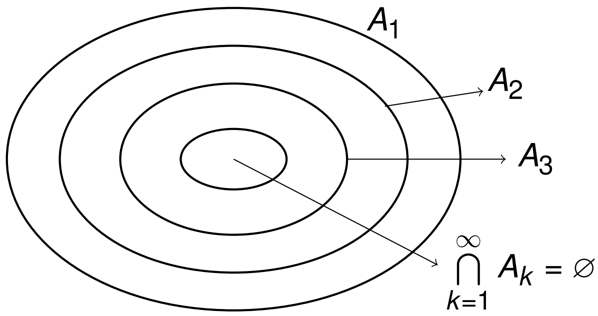
Os "anéis" $A_k - A_{k+1}$ são disjuntos, porque a sequência é decrescente, e pertencem a $\mathbb{A}$, já que $\mathbb{A}$ é fechada para diferenças. Pelo Axioma 3',

$$P(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k - A_{k+1}),$$

portanto a série é convergente e

$$\sum_{k=1}^{n-1} P(A_k - A_{k+1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(A_1).$$

Figura 1 – Diagrama de "anéis" $A_k - A_{k+1}$



Fonte: James (2023).

Pela aditividade finita,

$$P(A_k - A_{k+1}) = P(A_k) - P(A_{k+1}),$$

logo

$$P(A_1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (P(A_k) - P(A_{k+1})) = \lim_{n\to\infty} (P(A_1) - P(A_n)),$$

e então $P(A_n) \to 0$.

(ii) Suponhamos o Axioma 4 e sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{A}$ disjuntos. Queremos provar que $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, então

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right)$$

e pela aditividade finita,

$$P(A) = \sum_{n=1}^{k} P(A_n) + P\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right).$$

Seja $B_k = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$, então $B_k \downarrow \varnothing$ e portanto $P(B_k) \to 0$ (pelo Axioma 4). Logo

$$\sum_{n=1}^{k} P(A_n) \xrightarrow[k\to\infty]{} P(A),$$

i.e., $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. $\square$

Corolario 1. Os dois seguintes sistemas de axiomas são equivalentes:

Sistema I: Axiomas 1, 2, 3'

Sistema II: Axiomas 1, 2, 3, 4.

Demonstração. O sistema I é equivalente aos Axiomas 1, 2, 3, 3', pois já vimos que o Axioma 3' implica o Axioma 3. Agora basta aplicar a Proposição 1.4. □

Observação. Então para verificar se P é probabilidade em $\mathbb{A}$, basta verificar os axiomas do sistema I ou os axiomas do sistema II.

Propriedades de probabilidade. Seja P uma probabilidade em uma $\sigma-$álgebra $\mathbb{A}$. Suponhamos que todo A abaixo pertença a $\mathbb{A}$. Então as seguintes propriedades são consequências dos axiomas:

P1. $P(A^c) = 1 - P(A)$. (Consequência dos Axiomas 2 e 3).
Caso particular importante: $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$.

P2. $0 \leq P(A) \leq 1$. (Consequência do Axioma 1 e P1.)

P3. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$. (Pela aditividade finita, $P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) \geq P(A_1)$, pelo Axioma 1.)

P4. $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$. (Pela aditividade finita,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^c) \leq P(A_1) + P(A_2),$$

por P3, já que $A_2 \cap A_1^c \subset A_2$. Completa-se a prova por indução.)

P5. $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

P6. (*Continuidade de probabilidade*). Se $A_n \uparrow A$, então $P(A_n) \uparrow P(A)$. Se $A_n \downarrow A$, então $P(A_n) \downarrow P(A)$.

Demonstração de P6. Vamos supor que $A_n \downarrow A$, i.e., que $A_n \supset A_{n+1} \forall n$ e $\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n = A$. Então, $P(A_n) \geq P(A_{n+1})$, por P3, e $(A_n - A) \downarrow \varnothing \Rightarrow P(A_n - A) \to 0$, pela continuidade do vazio. A aditividade finita implica $P(A_n - A) = P(A_n) - P(A)$, pois $A \subset A_n$. Resumindo, temos $P(A_n) - P(A) \to 0$ e $\{P(A_n)\}_{n\geq 1}$ decrescente, logo $P(A_n) \downarrow P(A)$.

Se $A_n \uparrow A$ (i.e., $A_n \subset A_{n+1} \forall n$ e $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n = A$), então $A_n^c \downarrow A^c$. Logo, $P(A_n^c) \downarrow P(A^c)$, ou seja, $1 - P(A_n) \downarrow 1 - P(A)$; portanto, $P(A_n) \uparrow P(A)$. □

Modelo probabilístico. Terminamos a formulação do modelo matemático para um experimento, ou modelo probabilístico. É constituído de:

(a) Um conjunto não-vazio Ω, de resultados possíveis, o *espaço amostral*.

(b) Uma $\sigma-$álgebra $\mathbb{A}$ de *eventos aleatórios*.

(c) Uma *probabilidade* P definida em $\mathbb{A}$.

Agora vamos retirar nosso modelo do contexto de um experimento e reformulá-lo como um conceito matemático abstrato.

Definição 6. Um *espaço de probabilidade* é um trio $(\Omega, \mathbb{A}, P)$, onde

(a) Ω é um conjunto não-vazio,

(b) $\mathbb{A}$ é uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω, e

(c) P é uma probabilidade em $\mathbb{A}$.

A partir de agora, tudo será estudado em espaços de probabilidade, apesar de mantermos a linguagem de experimentos e eventos. (Já vimos que todo modelo probabilístico é um espaço de probabilidade. Reciprocamente, o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ pode ser considerado um modelo para o experimento "selecionar um ponto de Ω conforme a probabilidade P").

2.3.2.2 Probabilidade condicional

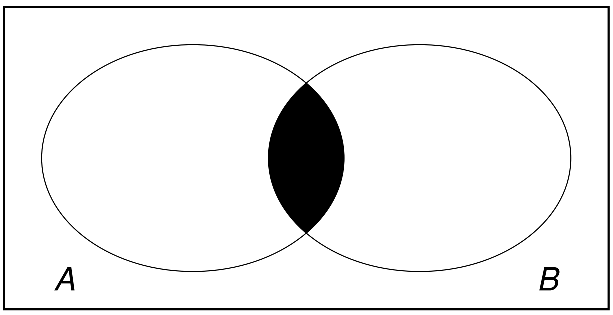
Definição 7. Seja $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Se $B \in \mathbb{A}$ e $P(B) > 0$, a *probabilidade condicional de A dado B* é definida por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad A \in \mathbb{A}.$$

Observação. Se $P(B) = 0, P(A \mid B)$ pode ser arbitrariamente definida. A maioria dos livros faz $P(A \mid B) = 0$, mas não é interessante fazer $P(A \mid B) = P(A)$ para que $P(A \mid B)$ seja uma probabilidade em $\mathbb{A}$ (como função de A). É também conveniente, por independência, fazer $P(A \mid B) = P(A)$.

Consideremos um diagrama de Venn:

Figura 2 – Diagrama de Venn: interseção $A \cap B$



Fonte: James (2023).

Se A e B são desenhados de modo que as áreas de A, B e $A \cap B$ sejam proporcionais às suas probabilidades, então $P(A \mid B)$ é a proporção do evento B ocupada pelo evento A. Note que $P(A \mid B), A \in \mathbb{A}$, é realmente uma probabilidade em $\mathbb{A}$, ou seja, determinar $P(A \mid B)$ passa por restringir o universo Ω. Consequentemente as propriedades são mantidas, por exemplo:

$$P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B).$$

Probabilidade condicional possui uma interpretação intuitiva em termos de frequências relativas. Pensando em probabilidade como limite de frequência relativa, temos:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{número de ocorrências de “A e B”} \\ \text{em } n \text{ ensaios independentes do experimento} \end{array} \right\}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{número de ocorrências de } B \\ \text{em } n \text{ ensaios independentes do experimento} \end{array} \right\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\text{número de ocorrências de } A \cap B \text{ em } n \text{ ensaios}}{\text{número de ocorrências de } B \text{ nos mesmos } n \text{ ensaios}}$$

Então, quando n é grande, $P(A \mid B)$ é aproximadamente igual ao quociente do número de ocorrências de A e B sobre o número de ocorrências de B em n ensaios independentes do experimento, i.e., $P(A \mid B)$ é aproximadamente a proporção, entre os experimentos em que ocorre o evento B, daqueles em que o evento A também ocorre.

Decorre da definição que $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$, e esta igualdade é válida também quando $P(B) = 0$. Esta igualdade se generaliza: sendo A, B, C eventos aleatórios, temos $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$.

Demonstração. $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)P(C \mid A \cap B) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$. □

Por indução, temos o seguinte:

Teorema 1. *(Teorema da Multiplicação ou Teorema da Probabilidade Composta). Seja* $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ *um espaço de probabilidade. Então*

(i) $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B), \forall A, B \in \mathbb{A}$,

(ii) $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots$
$\ldots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}), \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A}, \quad \forall n = 2,3, \ldots$

Agora suponhamos que $A_1, A_2, \ldots$ sejam eventos aleatórios mutuamente exclusivos e exaustivos (i.e., que os A_i sejam distintos = mutuamente exclusivos e $\cup A_i = \Omega$). Então os A_i formam uma *partição* do conjunto amostral Ω.

Vamos admitir que a sequência $A_1, A_2, \ldots$ seja finita ou enumerável - então, por exemplo, A e A^C formam uma partição, $\forall A \in \mathbb{A}$.

Para todo evento $B \in \mathbb{A}$, temos $B = \bigcup_i (A_i \cup B)$. Como os A_i são disjuntos, então os $B \cap A_i$ são disjuntos e

$$P(B) = \sum_i P(A_i \cap B) = \sum_i P(A_i)P(B \mid A_i).$$

Logo temos o seguinte

Teorema 2. *(Teorema da Probabilidade Total (ou Absoluta)). Se a sequência (finita ou enumerável) de eventos aleatórios $A_1, A_2, \ldots$ formam uma partição de Ω, então*

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B \mid A_i), \quad \forall B \in \mathbb{A}.$$

Usando esse teorema, podemos calcular a probabilidade de A_i dada a ocorrência de B:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B \mid A_j)}.$$

Essa é a *fórmula de Bayes*. Ela é útil quando conhecemos as probabilidades dos A_i e a probabilidade de B dado A_i, mas não conhecemos *diretamente* a probabilidade de B.

> **Observação.** A fórmula de Bayes é, às vezes, chamada de fórmula de probabilidades "posteriores". Com efeito, as probabilidades $P(A_i)$ podem ser chamadas probabilidades "a priori" e as $P(A_i \mid B)$, probabilidades "a posteriori".

2.3.2.3 Independência

Definição 8. Seja $(\Omega, \mathbb{A}.P)$ um espaço de probabilidade. Os eventos aleatórios A e B são (estocasticamente) *independentes* se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

> **Observação.** Eventos de probabilidade zero ou um são independentes de qualquer outro: se $P(A) = 0$, então $P(A \cap B) = 0$ e A e B são independentes, $\forall B \in \mathbb{A}$. Se $P(B) = 1$, então $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^C)$ e, como $A \cap B^C \subset B^C$ implica $P(A \cap B^C) \leq P(B^C) = 0$, temos $P(A \cap B^C) = 0$ e $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Logo, A e B são independentes, $\forall A \in \mathbb{A}$.

Proposição 5. *A é independente de si mesmo se, e somente se, $P(A) = 0$ ou 1.*

Demonstração. $P(A) = P(A \cap A) = P(A)P(A) \Leftrightarrow P(A) = 0$ ou 1. □

Proposição 6. *Se A e B são independentes, então A e B^c também são independentes (e também A^c e B, e ainda A^c e B^c).*

Demonstração. Vamos supor A,B independentes. Então $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) =$ (pela independência) $= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^c)$. □

Aqui está uma justificação intuitiva da Definição 8: B é independente de A se tanto a ocorrência quanto a não ocorrência de A não afetam a probabilidade de B ocorrer, i.e., $P(B \mid A) = P(B)$ e $P(B \mid A^c) = P(B)$. Estas duas equações significam que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(A)P(B) \quad e$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B \mid A^c) = P(A^c)P(B);$$

pela Proposição 6, basta uma destas últimas equações para a definição.

Observação. Se $A \cap B = \varnothing$, então A e B não são independentes (a menos que um deles tenha probabilidade zero).

Definição 9. Os eventos aleatórios $A_i, i \in I$ (I é um conjunto de índices), são *independentes* 2 a 2 (ou a pares) se

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \forall i,j \in I, i \neq j.$$

Definição 10. (a) Os eventos $A_1, \ldots, A_n (n \geq 2)$ são chamados (coletivamente ou estocasticamente) *independentes* se

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_m})$$

$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n, \forall m = 2,3, \ldots, n$ (i.e., se todas as combinações satisfazem a regra produto).
(b) Os eventos $A_1, A_2, \ldots$ são *independentes* se $\forall n \geq 2, A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes.
(c) Os eventos $A_i, i \in I$ (onde (I) é um conjunto de índices tal que $\#I \geq 2$) são *independentes* se toda subfamília finita deles é de eventos independentes, i.e., se $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \ldots, A_{i_m}$ são independentes para toda combinação $\{i_1, \ldots, i_m\}$ de elementos de $I, \forall m = 2,3, \ldots$.

Observações. (1) Tais eventos são chamados, às vezes, *estatisticamente* ou *mutuamente* independentes.
(2) Vemos pelo item (c) que toda subfamília de uma família de eventos independentes é de eventos independentes.

Proposição 7. *Se $A_i, i \in I$ é uma família de eventos independentes, então para qualquer escolha $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$, a família $B_i, i \in I$ também é independente.*

Demonstração. Pelo item (c) da definição de independência, é suficiente provar que toda subfamília finita $B_1, \ldots, B_n$ de eventos satisfaz a regra do produto:

$$P(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(B_i),$$

onde $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ e $A_1, \ldots, A_n$ são eventos independentes. A prova será feita por indução finita em n.

1. Caso Base ($n = 2$): Se A_1 e A_2 são independentes, pela Proposição 6, a regra do produto é válida para todas as quatro combinações de B_1 e B_2.

2. Hipótese de Indução ($n = k$): Assumimos que a proposição é válida para k eventos: se $A_1, \ldots, A_k$ são independentes, então $P(B_1 \cap \ldots \cap B_k) = \prod_{i=1}^{k} P(B_i)$, onde $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$.

3. Passo Indutivo ($n = k + 1$): Sejam $A_1, \ldots, A_{k+1}$ eventos independentes e $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ para $i = 1, \ldots, k + 1$. Definimos $C = B_1 \cap \ldots \cap B_k$. Pela Hipótese de Indução, $P(C) = \prod_{i=1}^{k} P(B_i)$. O evento que queremos calcular é $P(C \cap B_{k+1})$.

Caso 3.1: $B_{k+1} = A_{k+1}$. Como $A_1, \ldots, A_{k+1}$ são coletivamente independentes, A_{k+1} é independente de qualquer evento formado por $A_1, \ldots, A_k$ e seus complementos. Logo, C e A_{k+1} são independentes.

$$P(C \cap A_{k+1}) = P(C)P(A_{k+1}) = \left(\prod_{i=1}^{k} P(B_i)\right) P(A_{k+1}) = \prod_{i=1}^{k+1} P(B_i).$$

Caso 3.2: $B_{k+1} = A_{k+1}^c$. Queremos mostrar que $P(C \cap A_{k+1}^c) = P(C)P(A_{k+1}^c)$. Usamos a relação da Proposição 6:

$$P(C \cap A_{k+1}^c) = P(C) - P(C \cap A_{k+1}).$$

Pelo Caso 3.1, C e A_{k+1} são independentes: $P(C \cap A_{k+1}) = P(C)P(A_{k+1})$. Substituindo na equação anterior:

$$P(C \cap A_{k+1}^c) = P(C) - P(C)P(A_{k+1}) = P(C)(1 - P(A_{k+1})) = P(C)P(A_{k+1}^c).$$

Substituindo $P(C)$ pela Hipótese de Indução:

$$P(C \cap A_{k+1}^c) = \left(\prod_{i=1}^{k} P(B_i)\right) P(A_{k+1}^c) = \prod_{i=1}^{k+1} P(B_i).$$

O passo indutivo é válido em ambos os casos. Portanto, por indução finita, a proposição é válida para todo $n \geq 2$. □

A exposição formal dos conceitos probabilísticos, apresentada nesta seção, fornece um alicerce teórico sólido que sustenta as decisões didáticas adotadas na sequência investigativa desenvolvida. Embora a linguagem matemática aqui utilizada ultrapasse os conteúdos tradicionalmente abordados na Educação Básica, ela se mostra relevante para a prática docente ao permitir a análise criteriosa das estratégias dos estudantes e a mediação pedagógica qualificada durante a resolução de problemas envolvendo incerteza.

Com base nesse referencial formal, o próximo capítulo detalha os procedimentos metodológicos da pesquisa, incluindo a elaboração e aplicação da sequência didática fundamentada na metodologia das investigações matemáticas, com foco no ensino de probabilidade.

3 METODOLOGIA

3.1 TIPO E ABORDAGEM DA PESQUISA

Para a discussão das abordagens metodológicas, foram dialogadas as teorias apresentadas nas obras "Um convite à Educação Matemática Crítica", de Ole Skovsmose e "Investigações Matemáticas na sala de aula", de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira. Na perspectiva da Educação Matemática, a ideia é apresentar alternativas ao ensino tradicional de matemática, não como uma solução universal, mas como uma possibilidade de mobilizar conhecimentos a partir dessas teorias.

Nesse sentido, esta pesquisa é de natureza qualitativa, de caráter interpretativo e, em direção a seu objetivo geral, visa compreender os sentidos atribuídos pelos estudantes ao conteúdo de probabilidade a partir da implementação de uma sequência didática baseada em Investigações Matemáticas. A sequência didática é um instrumento de planejamento do professor, no qual é possível escolher e organizar uma sucessão de atividades que atendam a um determinado objetivo de aprendizagem. Isto é, uma sequência didática consiste em um grupo de decisões de aspecto metodológico e prático que guiarão a atividade docente em sala de aula. Não se trata de uma estrutura rígida; entretanto, deve apresentar flexibilidade diante das interações com os estudantes e das condições às quais estão submetidos (Silva; Oliveira, M. M. de, 2009).

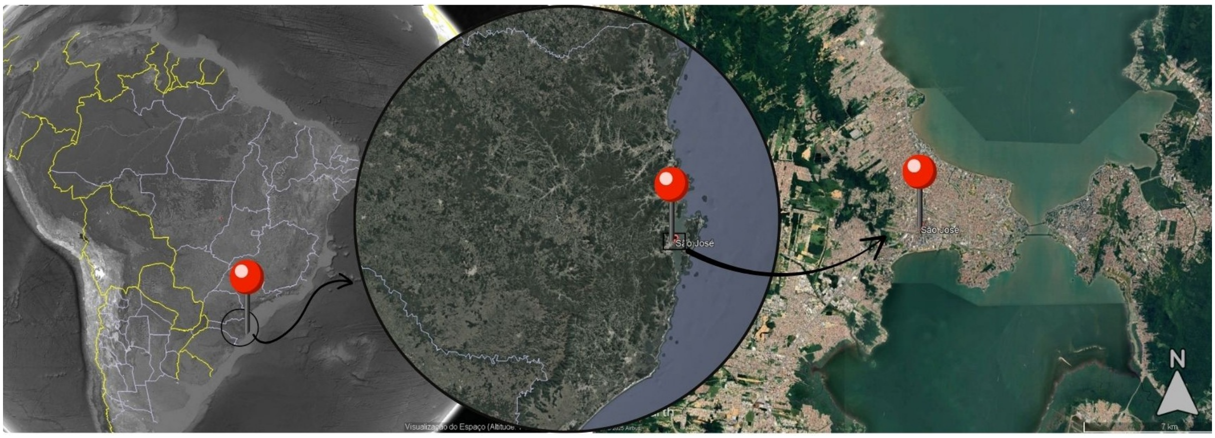
3.2 PARTICIPANTES E CONTEXTO

O local em que se aplicou a sequência didática é a Escola de Educação Básica Professor Laércio Caldeira de Andrada, na cidade de São José, SC. Trata-se de uma escola da rede estadual de Santa Catarina, atendendo turmas do Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Anos Finais), bem como do Ensino Médio, nos turnos matutino, vespertino e noturno (EEBLCA, 2025).

As primeiras aulas da atual E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada encontram registro no ano de 1959, quando a professora Helena Demay Mendes iniciou com uma turma de aproximadamente 20 alunos, ainda sob a denominação de Escola Isolada de Campinas. Desde então, a instituição de ensino passou por todos os tipos de organização e tipos de estabelecimento do ensino primário previstos pela regulamentação vigente em Santa Catarina ainda na década de 1960 (EEBLCA, 2025).

Hoje, a E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada localiza-se na Av. Altamiro di Bernardi, número 561, no bairro Campinas, em São José, SC (Figura 3). Consultando o Projeto Político Pedagógico (PPP) em vigência da instituição, a unidade de ensino atendeu 1176 alunos no ano de 2024, distribuídos nos períodos matutino, vespertino e noturno. Registros apontam que mais da metade desses alunos é oriunda de diversos

Figura 3 – Localização da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada



Fonte: Autoria própria utilizando imagens do Google Earth (2025).

bairros próximos, incluindo municípios vizinhos, que procuram cursar o ensino médio durante o dia. No ano de 2025, a E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada contempla dezoito turmas do ensino fundamental e mais vinte e quatro turmas de ensino médio (EEBLCA, 2025).

Das oito turmas de 2ª série do ensino médio na unidade escolar, cinco são atendidas no período matutino, duas no período vespertino e uma no noturno. Ainda, três delas têm como professor de matemática o pesquisador desse trabalho, fator bastante relevante na decisão do tipo de intervenção que foi construída e aplicada no desenvolvimento do conteúdo de probabilidade.

Nesse cenário, essa dissertação dedicou-se a construir uma sequência didática que foi aplicada nas três turmas da 2ª série do ensino médio da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada, da qual o autor dessa pesquisa é professor regular de matemática. Além disso, essa sequência didática pode se transformar em uma sugestão de aplicação em turmas do ensino médio, de modo geral.

Para a organização do relato da aplicação da sequência didática, as turmas participantes serão aqui identificadas por *T1, T2* e *T3*, assim como a identidade dos alunos será preservada. Para a identificação dos grupos, serão utilizadas as denominações *G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7* e *G8*, ajustando-se à quantidade de grupos formados em cada turma.

3.3 PLANEJAMENTO DA INTERVENÇÃO

A prática pedagógica planejada por meio da sequência didática foi elaborada sob a perspectiva da teoria das investigações matemáticas (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020) e dos cenários para investigação (Skovsmose, 2014). Aprovada no calendário escolar, a Gincana Esportiva da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada, prevista para acontecer no terceiro trimestre letivo, movimenta os estudantes desde o início do ano. Desde então, já se organizam para confeccionar as camisetas ou uniformes que serão um dos elementos da identidade visual da classe durante os dias de campeonato. As turmas relataram um histórico de envolvimento significativo na participação e dedicação aos jogos que, em um clima amistoso, promovem situações de coletividade.

Analisando os planejamentos anuais da componente curricular de matemática nas turmas de ensino médio da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada, identificaram-se os conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos. Buscou-se tomar aqueles com potencial de dialogar a matemática escolar com a cultura da comunidade, envolvendo a Gincana Esportiva, tendo a probabilidade um lugar de destaque nesse contexto.

Identificado o conteúdo em potencial, tomou-se a unidade temática *Probabilidade e Estatística* conforme a BNCC (Brasil, 2018) no que se refere à etapa do ensino médio. Nesse aspecto, o conceito de probabilidade deve ser ampliado e consolidado ao se trabalhar com as diversas realidades, contextos e situações dos estudantes. Em consulta ao Currículo Base do Território Catarinense para o Ensino Médio (Santa Catarina, 2020), há uma concordância sobre a organização curricular na qual se insere o conteúdo de probabilidade, uma vez que o documento tem a BNCC como base curricular.

Sendo assim, foram tomadas as três turmas da 2ª série do ensino médio mencionadas anteriormente. Considerando que são turmas já familiarizadas com o pesquisador, uma vez que se trata do professor regular de matemática das turmas em questão, entendeu-se que seriam necessários cinco encontros de 45 minutos cada um deles, os quais ocorreram durante o horário e espaço habituais de aula das turmas, no tempo das aulas de matemática. Isto significa que os estudantes participantes não precisaram se deslocar para espaços diferentes dos já praticados na rotina escolar, nem em horários distintos do cotidiano.

De qualquer forma, os estudantes foram previamente informados sobre a realização dessa pesquisa, conhecendo seus objetivos, suas etapas e seus resultados esperados. Foram esclarecidas as dúvidas sobre a participação dos alunos na pesquisa, zelando pela confidencialidade dos dados e pela privacidade dos participantes, de acordo com a Resolução CNS 510/2016 (Brasil, 2016), a Resolução CNS 466/2012 (Brasil, 2012), bem como as demais normativas e legislações vigentes e aplicáveis.

Houve total adesão por parte dos estudantes, não havendo situações de não-participação ou desistência. Além disso, a atividade investigativa desenvolvida compunha uma das avaliações trimestrais planejadas para a disciplina de Matemática, conforme previsto pela Portaria Normativa nº 874/25 (Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina, 2025), que regulamenta os procedimentos para aplicação e registro de avaliações na rede estadual de ensino de Santa Catarina.

Para as turmas em questão, foi planejada a aplicação da sequência didática detalhada no *Apêndice A*. Os cinco encontros foram organizados da seguinte maneira: (1) Levantamento dos conhecimentos prévios acerca de probabilidade e diálogo sobre fenômenos aleatórios; (2) Organização dos estudantes em grupos espontâneos e arranque da atividade investigativa; (3) Desenvolvimento das investigações matemáticas, intercalando momentos de atenção aos comandos do professor pesquisador, utilizando exposição oral e o quadro, e momentos de trabalho coletivo entre o próprio grupo; (4) Discussão dos resultados obtidos e justificação das probabilidades encontradas; e (5) Socialização dos resultados e avaliação colaborativa. No decorrer da prática, foram produzidos materiais em papel e escrita que compuseram parte da avaliação da atividade investigativa.

3.4 INSTRUMENTOS E PROCEDIMENTOS DE ANÁLISES

Os dados coletados durante as investigações matemáticas em sala de aula consistiram, exclusivamente, nos materiais escritos elaborados pelos estudantes, além dos diários de campo produzidos pelo professor pesquisador a fim de registrar as observações feitas durante as etapas da investigação matemática com os estudantes. As atividades didáticas fundamentaram-se na perspectiva das investigações matemáticas discutida por Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), que apontam uma variedade de instrumentos de avaliação, de natureza oral e escrita, que estão à disposição do professor. Já para o tratamento e interpretação dos dados, adotou-se a Análise de Conteúdo proposta por Bardin (2016). A análise seguiu uma abordagem qualitativa, estruturada nas seguintes categorias: mobilização de conceitos probabilísticos, construção de estratégias investigativas e indícios de pensamento crítico.

Entre os instrumentos de avaliação, destacaram-se os relatórios escritos, que não apenas documentam os resultados de um trabalho previamente realizado, mas também podem incluir os processos utilizados para alcançar tais conclusões. Outra forma de avaliação foi a observação informal dos alunos durante a realização de tarefas investigativas, na qual o professor pode perceber como eles aplicam conhecimentos matemáticos formais e informais. Além disso, as apresentações orais puderam ser utilizadas como um método avaliativo, permitindo ao professor avaliar diversos aspectos, incluindo atitudes, valores, capacidades de comunicação e argumentação.

É importante destacar que todos os instrumentos de avaliação citados acima também compõem os instrumentos da pesquisa, ao possibilitar a análise dos resultados.

Ao fim das investigações matemáticas, esperou-se como desfecho primário explorar as percepções e a mobilização de conhecimentos dos estudantes da 2ª série do ensino médio da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada, em São José, sobre o conteúdo de probabilidade após a execução de uma sequência didática elaborada a partir da metodologia das investigações matemáticas (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020), visando identificar indícios de pensamento crítico e argumentação que caminham para uma Educação Matemática Crítica.

A presente pesquisa não se preocupa em invalidar ou menosprezar o ensino tradicional de matemática nas escolas de educação básica, mas sim em apontar alternativas para a promoção da educação matemática. A emancipação do sujeito aprendiz, prevista no currículo (Santa Catarina, 2020; Brasil, 2018), passa por refletir sobre como a matemática tem sido trabalhada por professores que ensinam matemática.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Inicialmente, foi realizada fundamentação teórica e aprofundamento sobre o tópico de cenários para investigação, segundo as obras de Skovsmose (2001, 2014), e também sobre o tópico de investigações matemáticas, baseado nos autores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020). As reflexões provocadas por essas leituras contribuíram para a construção da sequência didática descrita no *Apêndice A* para o ensino de probabilidade.

Com a sequência didática construída a partir das leituras e reflexões teóricas, procedeu-se à sua implementação nas turmas participantes. Durante as atividades, foram observadas as interações dos estudantes com os problemas propostos, bem como as estratégias investigativas adotadas, permitindo analisar como os conceitos probabilísticos foram mobilizados na prática. A seguir, apresenta-se a descrição detalhada dos resultados obtidos a partir dessa experiência pedagógica.

4.1 PERFIL DAS TURMAS E ORGANIZAÇÃO DA ATIVIDADE

Durante a aplicação da sequência didática, foram feitas observações e anotações sob a perspectiva do professor pesquisador. Esses dados foram compilados e organizados em diários de campo do professor pesquisador durante as aulas. De modo geral, verificou-se que as turmas *T1, T2* e *T3* são heterogêneas entre si e apresentam características que são próprias de suas dinâmicas. Numericamente, no momento da aplicação das investigações matemáticas em sala de aula, as turmas eram compostas por 20, 29 e 20 alunos, respectivamente, de diferentes origens, sendo que vários deles já estudam na mesma turma desde o início do ensino médio.

Com a experiência pedagógica do professor pesquisador como docente dessas turmas, foi possível traçar um perfil para cada uma delas. Mais especificamente sobre a dinâmica coletiva de cada turma, podemos destacar que a *T1* aparenta ser mais apática se comparada às outras duas turmas, já que, em geral, os alunos são pouco participativos nas aulas tradicionais e bastante passivos acerca dos conteúdos trabalhados de maneira expositiva. Esse comportamento é substituído quando se propõe uma atividade em que os alunos podem se organizar em grupos, situação na qual é possível observar maior envolvimento deles com a construção de sua aprendizagem. Nota-se mais situações de proatividade, de discussão entre seus pares - mesmo que dentro do próprio grupo - e de suas individualidades mais expostas.

No entanto, a *T3* apresenta maior interação entre seus componentes, seja para discutir ideias relacionadas aos conteúdos, seja para debater o andamento das aulas e o convívio entre os colegas. Apesar de ser a turma com a menor quantidade de alunos, trabalhar com grupos é um tanto desafiador, pois o perfil da maioria dos alunos é de conversa e defesa de interesses particulares, situações que exigem cenários de negociação entre eles para que possam participar de maneira ativa na construção da aprendizagem.

Além disso, a turma também conta, em sua composição, com um aluno atendido pela educação especial na perspectiva da educação inclusiva, cujo trabalho nas aulas de matemática parte de suas potencialidades, que estão na consolidação das operações de multiplicação e divisão de números naturais. Esse aluno esteve acompanhado, em tempo integral, por uma professora auxiliar que, sempre que possível, tentava incluí-lo nas atividades em grupo. Porém, sua realidade acabava exigindo que se trabalhasse majoritariamente de forma individual, pois o aluno rejeitava as atividades coletivas.

Já a *T2* tem como característica uma identidade de turma, pois, mesmo que os alunos possuam perfis diversos, agem coletivamente em unidade. Nas aulas tradicionais, há alunos que se destacam pela sua espontaneidade, outros por seus questionamentos e ainda aqueles por serem mais introspectivos. Quando se trata de trabalhar em grupo para a construção de conhecimento, conseguem organizar-se de maneira autônoma, destacando-se alguns perfis de liderança e proatividade, mas também aqueles com os quais facilmente se dialoga sobre a composição e funcionamento dos grupos.

Na sequência didática, foram planejadas cinco aulas para a aplicação das investigações matemáticas, conforme o Apêndice A. Cada turma envolvida possui três aulas de matemática por semana em sua grade curricular e, para as turmas *T1, T2* e *T3*, os encontros das investigações matemáticas ocorreram na primeira quinzena de abril do ano de 2025, ajustando-se ao horário de aulas de cada turma.

Na *1ª aula: Fenômenos aleatórios e Historização*, foi preparado um material expositivo utilizando apresentação de slides a fim de promover um diálogo com as turmas sobre a noção de fenômenos aleatórios e a compreensão da matemática acerca desse assunto. Com o auxílio do material produzido, foi possível trazer imagens de contextos em que se trabalha com a noção de aleatoriedade e os alunos, em geral, já puderam fazer associações com seus cotidianos. Cabe destacar que alguns deles já começaram a procurar moedas em suas mochilas e a propor alguns lançamentos.

Nesse momento, os alunos que costumam ser mais participativos em aulas tradicionais começaram a fazer apontamentos sobre jogos de apostas, incluindo experiências próprias ou familiares com os jogos de loteria, por exemplo. Já era possível observar os estudantes mobilizando conhecimentos com base em suas crenças: enquanto havia relatos de que familiares haviam desistido de apostar na mega-sena, havia outros de que, fielmente, não deixavam de apostar no número 36. Questionada sobre o motivo da escolha pelo número 36, a aluna comentou que seu avô acompanha há muitos anos os sorteios e, segundo ele, esse número foi sorteado um maior número de vezes. Tratava-se, portanto, de uma tentativa de aumentar as chances de ser premiado.

A exposição e os diálogos se encaminharam para pensarmos em uma maneira de quantificar as chances de determinados resultados quando se refere a fenômenos aleatórios. Aproveitando o ensejo das moedas em mãos de alguns alunos, o professor propôs que eles fizessem alguns lançamentos e anotassem seus resultados. Na turma *T1*, em que apenas um aluno manuseava uma moeda convencional, percebeu-se uma mobilização da atenção de boa parte da turma para o colega que fazia os lançamentos. Naquela ocasião, de um total de 10 lançamentos de sua moeda, foram observados 6 resultados para coroa e 4 resultados para cara.

Quando na *T2*, em que três alunos detinham uma moeda convencional, seus colegas mais próximos acompanhavam os dez lançamentos e os resultados obtidos. Deu-se a oportunidade de problematizar acerca de possíveis motivos para que tivéssemos encontrado resultados distintos entre os três alunos que realizaram lançamentos. É interessante relatar que, intuitivamente, foi citada a noção de uma moeda viciada quando um aluno se deparou com a anotação de 7 resultados para coroa e 3 resultados para cara.

Embora não tivera sido abordado de maneira explícita, foi possível desenvolver ideias de que a matemática apresenta diferentes concepções acerca da quantificação das chances de um determinado evento ocorrer. O caso clássico da moeda foi emblemático ao resgatar os conhecimentos mobilizados pelos alunos ainda no ensino fundamental, quando se foi trabalhada a noção de que, no lançamento de uma moeda convencional, os resultados são ditos equiprováveis. Em nenhuma das tentativas de dez lançamentos ocorridos durante essa 1ª aula obteve-se a igualdade de resultados para cara e para coroa.

Pela aleatoriedade característica dos fenômenos aleatórios, a *T3*, tomada pela ideia da imprevisibilidade, chegou a levantar questionamentos sobre jogos de apostas eletrônicos, como o famoso caso do Jogo do Tigrinho[1]. Também foram apontados aplicativos de apostas esportivas e, segundo um grupo de alunos dessa turma, já há registros de casos de jogadores de futebol investigados por envolvimento com manipulação de resultados de partidas em troca de dinheiro. A turma mostrou-se bastante interessada nesse tópico dos aplicativos de aposta, e seria oportuno aprofundar o tema, orientando pesquisas desenvolvidas pelos próprios alunos para que, em um momento posterior, pudessem socializar seus resultados com os demais colegas. Porém, dada a dificuldade do tempo, foram sugeridas apenas pesquisas particulares, sem o caráter de uma atividade da disciplina de matemática, o que acabou desmotivando boa parte dos alunos.

Por mais que essa 1ª aula da sequência didática ainda não tenha dado início ao

[1] Segundo a Wikipédia, *Fortune Tiger* (conhecido popularmente como Jogo do Tigre ou Jogo do Tigrinho) é um jogo de apostas e cassino online caracterizado como um jogo de azar, desenvolvido pela empresa maltesa PG Soft. Tornou-se popular no Brasil em 2023, com promessas de ganhos substanciais em um curto período de tempo pela internet, mas tornou-se alvo de investigação no ano seguinte devido ao aumento expressivo do endividamento de brasileiros com apostas online (Wikipédia, 2024).

processo de investigação realizado pelos alunos, avalia-se que foi de extrema importância para abrir um espaço de participação no qual os alunos pudessem contribuir com suas experiências. Não se notou a preocupação rotineira dos alunos de se ter certeza sobre o que se fala diante da turma, mas, envolvidos pelas diferentes perspectivas de se pensar a quantificação de chances, puderam compartilhar suas experiências e entendimentos sobre esse assunto.

Na *2ª aula: Introdução da tarefa investigativa*, os alunos foram orientados que passariam a trabalhar, nessa e nas próximas três aulas, em grupos. Tratou-se, portanto, de expor para as turmas a natureza de uma atividade investigativa, uma vez que as três turmas relataram não conhecer as investigações matemáticas. Então, foi sugerido que os alunos se organizassem em grupos de 2 a 4 integrantes, conforme a afinidade entre eles, buscando que houvesse diálogos espontâneos e maior familiaridade no processo da atividade investigativa, que já era uma novidade por si só.

A formação dos grupos na *T1* aconteceu de forma espontânea e os alunos acabaram se juntando em três duplas, um trio, dois quartetos e, mesmo de maneira inesperada, uma aluna decidiu que faria o trabalho individualmente. Houve a intervenção do professor, nesse caso, na tentativa de incluí-la em algum grupo com o qual ela tivesse mais afinidade; porém, sem sucesso. Nessa turma, totalizaram-se oito grupos de trabalho que permaneceram sem alterações durante as aulas de investigação e, de modo geral, tiveram bom andamento, exceto pela aluna que trabalhou de forma individual. Nesse caso particular, foram registradas ausências na aula do desenvolvimento e da socialização das investigações, momentos cruciais para o progresso da atividade investigativa.

Antes da composição final dos grupos na *T2*, havia cinco alunos que não tinham se incluído em nenhum grupo existente. Então, o professor interveio, reunindo-os e sugerindo que formassem um grupo com cinco integrantes. Num primeiro momento, parece ter havido concordância com a sugestão, mas, ao longo dessa aula, ainda três desses alunos se arranjaram em outros grupos. Assim, para o desenvolvimento da atividade investigativa, a turma acabou se organizando em uma dupla, um trio e seis quartetos, totalizando oito grupos. Essa configuração se estendeu até o fim da sequência didática.

Agora, formar os grupos na *T3* foi um trabalho árduo, conforme esperado. Somente dois quartetos foram compostos de modo autônomo pelos alunos, exigindo que o restante dos alunos negociasse sua distribuição nos demais grupos. Foi uma manhã de bastante discussão, pois o perfil conflituoso de alguns alunos os levava a barganhar composições não planejadas para a atividade. No fim, além dos dois quartetos já formados, o restante dos alunos se distribuiu em mais dois trios e em outros dois alunos que decidiram trabalhar de forma individual. Nessa composição final, que totalizou seis grupos, o aluno atendido pela educação especial acabou não participando da atividade investigativa, em decisão conjunta com sua professora auxiliar.

Assim, formados os grupos nas três turmas, organizamos o ambiente de sala de aula para o trabalho em grupo, reunindo-os em estações de trabalho coletivo. Então, cada grupo recebeu, de maneira impressa, as instruções para as investigações matemáticas que começariam a desenvolver a partir dali. A versão das instruções disponibilizada para os grupos de alunos continha o *arranque da investigação matemática* e uma sugestão de *roteiro para a escrita do relatório*, conforme exibido a seguir.

ARRANQUE DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Procure construir um chaveamento sorteando as equipes abaixo para disputas na modalidade “mata-mata”.

Turmas 100, 101, 102, 103, 104
Turmas 200, 201, 202, 203, 204
Turmas 300, 301, 302, 303, 304

Registre os resultados obtidos e determine as possibilidades e probabilidades de sua turma se tornar campeã de uma modalidade.

ROTEIRO PARA A ESCRITA DO RELATÓRIO

Embora a organização de um relatório possa ser uma tarefa em que tenha inicialmente algumas dificuldades, penso que ele pode ajudá-lo, por exemplo, a compreender melhor os vários assuntos tratados nas aulas e a desenvolver a capacidade de comunicar por escrito o trabalho que realizou.
Um relatório deve incluir uma descrição o mais detalhada possível do trabalhou que realizou e pode ser organizado da seguinte forma:

- Identificação do grupo, com nome dos integrantes e turma;
- Título;
- Objetivo do trabalho incluindo as questões iniciais;
- Descrição do processo de investigação (incluindo tabelas e/ou esquemas, esboços de gráficos, organização dos dados recolhidos...), das tentativas realizadas e das dificuldades encontradas;
- Conclusões;
- Autocrítica da intervenção do grupo no trabalho.

Tente descrever os passos que seguiu para explorar a tarefa que lhe foi proposta. Procure explicá-los de uma forma clara e organizada. Registre todos os valores com que trabalhou e, nos casos em que tal se mostre adequado, não hesite em apresentar desenhos, tabelas e esquemas.

Além das instruções escritas, o professor destinou alguns minutos dessa aula para também fazer uma leitura coletiva dessas mesmas instruções, buscando esclarecer a natureza dessa atividade investigativa. De imediato, houve algumas reações dos alunos que relataram não ter entendido o que deveria ser feito nessa atividade. Muito se deve ao fato de não trazer uma pergunta a ser respondida, mas apresentar um problema que exige uma exploração inicial por parte dos grupos de alunos, configurando sua autoria no processo investigativo, conforme Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020). Por isso, a escolha de utilizar o contexto da Gincana Esportiva na E.E.B. Prof. Laércio Caldeira Andrada: todos os alunos das três turmas que permaneceram nessa unidade escolar desde o ano anterior vivenciaram, de alguma forma, esse evento que mobiliza a escola com várias atividades ao longo de todo o ano letivo.

4.2 ESTRATÉGIAS ADOTADAS PELOS GRUPOS

Após a leitura das instruções de forma mais geral, o professor pesquisador passou a caminhar pelos grupos de alunos, buscando identificar as primeiras questões levantadas e as possíveis dificuldades. Para alguns grupos pontuais, ainda se fez necessária uma nova leitura, feita pelo professor, do arranque das investigações matemáticas, buscando não reduzir a tarefa a uma sucessão de etapas a serem cumpridas. Segundo os autores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), a própria interpretação da atividade já faz parte da investigação e, por isso, deve permanecer de autoria dos alunos.

Com base nas instruções recebidas, os grupos de alunos deveriam construir um chaveamento, sorteando quinze equipes para as disputas de uma modalidade da Gincana Esportiva, simulando a sequência das partidas em um cenário onde sua turma se tornasse campeã da modalidade escolhida. Uma primeira questão levantada por quase todos os grupos foi sobre a quantidade de equipes envolvidas na disputa: seriam de fato 15 times, como foi mencionado no arranque da investigação matemática. Por se tratar de um número ímpar de equipes, não seria possível construir um chaveamento de disputas sem que se refletisse sobre como incluir a décima quinta equipe nesse sorteio.

Vale destacar que, antes de iniciarmos essa sequência didática, as três turmas tiveram aulas tradicionais sobre o conteúdo de análise combinatória. Nesse conjunto de aulas, foram trabalhados o princípio fundamental da contagem e os agrupamentos simples de permutação, arranjo e combinação. Por isso, foi comum que os grupos tentassem identificar algum problema de contagem na tarefa investigativa colocada pela sequência didática. Nesse momento, um quarteto da *T1*, denominado *G1*, chegou a apresentar o cálculo:

$$C_{15,2} = \frac{15!}{13! \cdot 2!} = \frac{15 \cdot 14}{2} = \frac{210}{2} = 105$$

Com isso, o grupo relatou que decidiu por usar a combinação de 15 equipes, tomadas 2 a 2, alegando que a ordem em que elas são tomadas não importa para as disputas elencadas. Além disso, chega a citar um exemplo de que um jogo da Turma 200 contra a Turma 201 é o mesmo que da Turma 201 contra a Turma 200. Assim, dos 105 diferentes chaveamentos possíveis de serem construídos, dados por $C_{15,2}$, o grupo escolheu representar um deles. Dadas essas informações, considerou-se que o grupo apresentou raciocínio coerente com a situação colocada, haja vista que as disputas entre as equipes aconteceriam no formato *mata-mata*[2], conforme apresentado no arranque das investigações matemáticas.

Organizar os sorteios para compor os chaveamentos não foi uma ação automática para todos os grupos. O mesmo grupo *G1* da *T1*, para cumprir rapidamente com a etapa de construir o chaveamento, não realizou nenhum tipo de sorteio e foi distribuindo as equipes duas a duas, argumentando que a aleatoriedade garantiria o não favorecimento de nenhuma equipe. Ao se deparar com a 15ª equipe, que ficou sem um adversário direto, decidiu que essa equipe passaria para a próxima fase, esquivando-se de uma partida. Questionado sobre a quantidade de partidas disputadas por uma equipe até chegar à final, o grupo comentou que aquela equipe envolvida em menos jogos tem maior chance de se tornar campeã.

Outro grupo da mesma turma, denominado *G6*, também não realizou nenhum sorteio, argumentando que, se fossem responsáveis pela montagem do chaveamento, conversariam com seu professor de Educação Física como se fosse seu professor regente[3]. Segundo o grupo, eles o convenceriam a construir um chaveamento que favorecesse sua turma: seria essa a equipe a jogar uma partida a menos, pela mesma condição de um chaveamento com 15 equipes.

Na *T2*, houve um grupo, denominado *G4*, que também montou o chaveamento das partidas sem utilizar um sorteio, usando como argumento organizar o maior nú-

---

[2] Um campeonato no formato *mata-mata* é uma competição em que os participantes disputam confrontos diretos em fases eliminatórias: quem vence avança, e quem perde é eliminado. Na situação colocada para as turmas, esperava-se que a estrutura do chaveamento incluísse rodadas como oitavas, quartas, semifinais e final. O torneio só termina quando resta um único vencedor, sem repescagem ou chances de recuperação após uma derrota.

[3] Na unidade escolar em questão, cada turma do Ensino Fundamental Anos Finais e do Ensino Médio elege, no início do ano, seu professor regente. Esse docente torna-se, então, uma espécie de representante da turma, responsabilizando-se por escutar as demandas da sala e também por executar algumas decisões tomadas pela equipe pedagógica para com a turma.

mero de partidas entre equipes da mesma série, a fim de que as disputas fiquem mais justas. Cabe destacar aqui que, por tornar as disputas mais justas, o grupo buscava organizar as equipes de modo que a vitória de cada uma delas fosse um evento equiprovável, embora não tenham usado esse termo. Além disso, como cada série tem um número ímpar de turmas, houve partidas em que duas equipes de diferentes séries se encontrassem na primeira disputa e, segundo o grupo de alunos, uma turma de uma série abaixo de seu oponente teria menor chance de avançar.

Destacados esses grupos que decidiram não realizar sorteios para montar o chaveamento das partidas, cabe agora relatar como procederam os grupos que mobilizaram estratégias de sorteio. O procedimento que foi mais utilizado pelos grupos foi escrever o nome de cada equipe em pequenos pedaços de papel e, depois, simular a retirada desses papéis de uma urna. Conforme o nome das equipes ia sendo retirado, iam compondo as disputas que estavam sendo anotadas na estrutura do chaveamento. Em relação à décima quinta equipe, que ficava sem um confronto direto na primeira fase das disputas, todos esses grupos decidiram que a equipe se classificaria diretamente para a próxima fase.

Uma alternativa apresentada por um grupo da *T2*, denominado *G8*, foi a utilização de uma ferramenta online. Por mais que em sala de aula os alunos não tivessem permissão para utilizar o celular ou qualquer outro dispositivo com acesso à internet, o grupo relatou que fez o refinamento do chaveamento utilizando uma roleta online quando não estava na escola. A situação envolvendo a décima quinta equipe também foi resolvida de modo que ficassem com um jogo a menos, passando direto para as quartas de final.

Avançando para a *3ª aula: Desenvolvimento das investigações*, em linhas gerais, os grupos se ocuparam em consolidar os chaveamentos montados por cada um deles e pensar estratégias sobre como decidir a equipe vitoriosa nas disputas elencadas. Nessa etapa, começam a ficar mais evidentes as reflexões dos grupos de alunos sobre as chances de uma determinada equipe avançar de fase, ou ainda, a probabilidade de sua turma vencer as partidas em que teria se envolvido.

Dois perfis de decisões começam a se desenhar: i) aqueles grupos que levaram em consideração os integrantes das turmas que estariam disputando a modalidade e, com isso, apontaram características físicas, histórico de vitórias dentro da modalidade escolhida, buscando justificar vantagens que levariam determinada equipe à vitória; ii) aqueles grupos que confiaram suas decisões à aleatoriedade, entendendo não haver necessidade de se levar em consideração as equipes que estariam disputando, mas apenas pensar nas possibilidades de vitória ou derrota de cada uma delas.

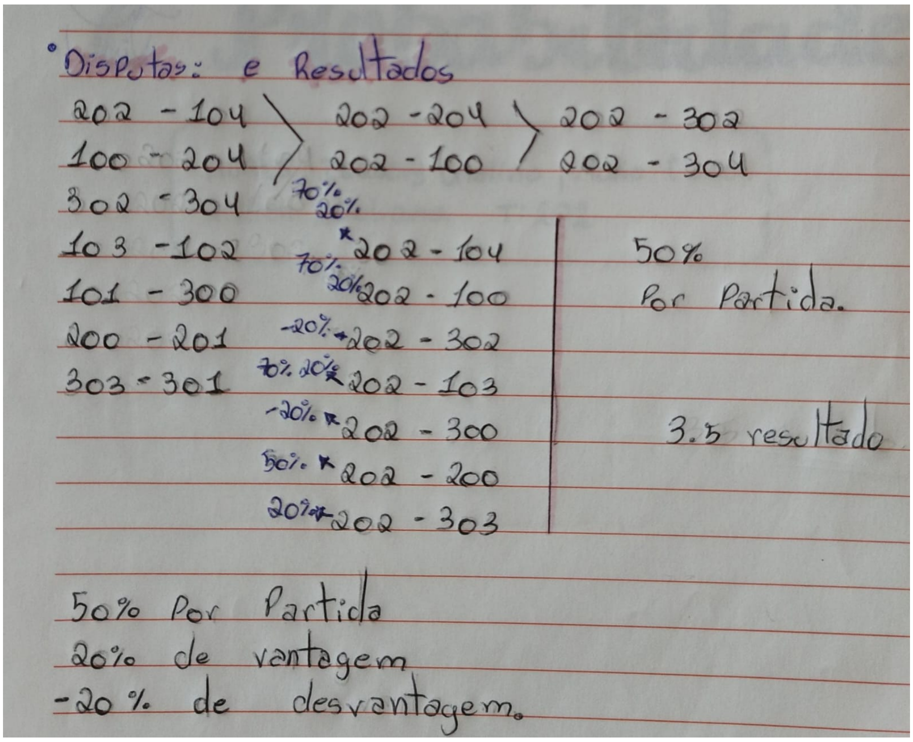
4.3 CONCEPÇÕES DE PROBABILIDADE OBSERVADAS

Observando o andamento da atividade investigativa na *T3*, um dos alunos que decidiu trabalhar de forma individual, identificado como *G5*, relatou que o desenvolvimento de sua investigação o fazia sentir como se estivesse escrevendo a súmula de uma partida de futebol. De fato, esse estudante escolheu trabalhar com a modalidade de futsal e argumentava com muita convicção sobre a composição e os resultados das partidas, chegava a citar nomes dos componentes das equipes das outras turmas, suas habilidades dentro do futsal, suas posições táticas dentro de quadra, entre outras características. Apesar de não ter apresentado o desenvolvimento esperado no que se refere à determinação da probabilidade de sua turma tornar-se vitoriosa ao fim do campeonato, foi surpreendente a participação desse aluno nas investigações matemáticas, principalmente por ser um indivíduo de pouca participação nas aulas convencionais e que sempre relatava desinteresse pela disciplina de matemática. Nota-se aqui, mesmo que pontualmente, a potencialidade de utilizar investigações matemáticas para despertar interesse e engajamento nos estudantes que, rotineiramente, mostram-se apáticos ao seu aprendizado em matemática.

Para decidir os resultados das disputas, o grupo denominado *G6* da *T2* teria considerado as equipes das partidas de vôlei elencadas em seu chaveamento, observando que, quando uma turma fosse mais velha, teria 20% de chances a mais de vencer a partida. Sobre o uso de porcentagens para medir as chances de vitória de uma equipe, percebeu-se o desenvolvimento da habilidade (EM13MAT311) da BNCC (Brasil, 2018), que consiste em identificar o espaço amostral. Por mais que o grupo não tenha mencionado o termo *espaço amostral*, a noção sobre uma totalidade de resultados começa a aparecer, pois, no avanço do chaveamento relatado pelo grupo (Figura 4), há um registro de 70% de chance de vitória de uma equipe que é mais velha - como diz o próprio grupo - do que outra. Isto é, os 20% de vantagem apontados anteriormente foram somados aos 50%, que seria o caso de eventos equiprováveis, embora esse termo também não tenha sido mencionado.

Na *T1*, um grupo denominado *G5* montou um chaveamento para as partidas de futsal entre as equipes e, para esquematizar as equipes avançando para as próximas fases do campeonato, argumentaram suas decisões também nas características físicas e habilidades dos integrantes das turmas com o futsal. Em particular, esse grupo era formado por dois meninos pouco participativos nas aulas convencionais de matemática, mas que abraçaram a oportunidade para expor seus conhecimentos mobilizados durante as investigações matemáticas. Vale destacar que, pelo chaveamento apresentado por esse grupo, em uma partida onde sua equipe tinha menores chances de vitória, ainda assim avançaram de fase. O argumento utilizado pelo grupo é que precisavam determinar uma probabilidade que medisse as chances de sua turma tornar-se campeã do torneio, o que os forçou a encaminhar sua equipe até a final. Vale

Figura 4 – Chaveamento do grupo *G6* da *T2*



Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador (2025).

destacar também que o grupo comentou que apresentar menores chances de vitória não significa que seja impossível vencer, apresentando uma noção consistente de que a soma das probabilidades de todos os eventos elementares - no caso de um jogo de um campeonato no formato mata-mata, perder ou ganhar - é de 100%.

Ainda justificando as vitórias com base nas habilidades dos jogadores das equipes, o grupo denominado *G2* da *T3* organizou um primeiro chaveamento em que progrediam aquelas equipes que eles consideravam ser mais habilidosas na modalidade do vôlei. Segundo o grupo, as equipes formadas por alunos que já jogavam vôlei ao longo do ano teriam maiores chances de vencer e, nesse raciocínio, a sua turma teria maiores possibilidades de tornar-se campeã da modalidade. Buscando quantificar essas chances, o grupo registrou que a probabilidade de conquistar o maior prêmio no vôlei seria algo entre 90% e 100%, já que, em sua turma, conseguiriam organizar um time com seis membros que jogam vôlei, diferente das outras quatro turmas enfrentadas no chaveamento construído.

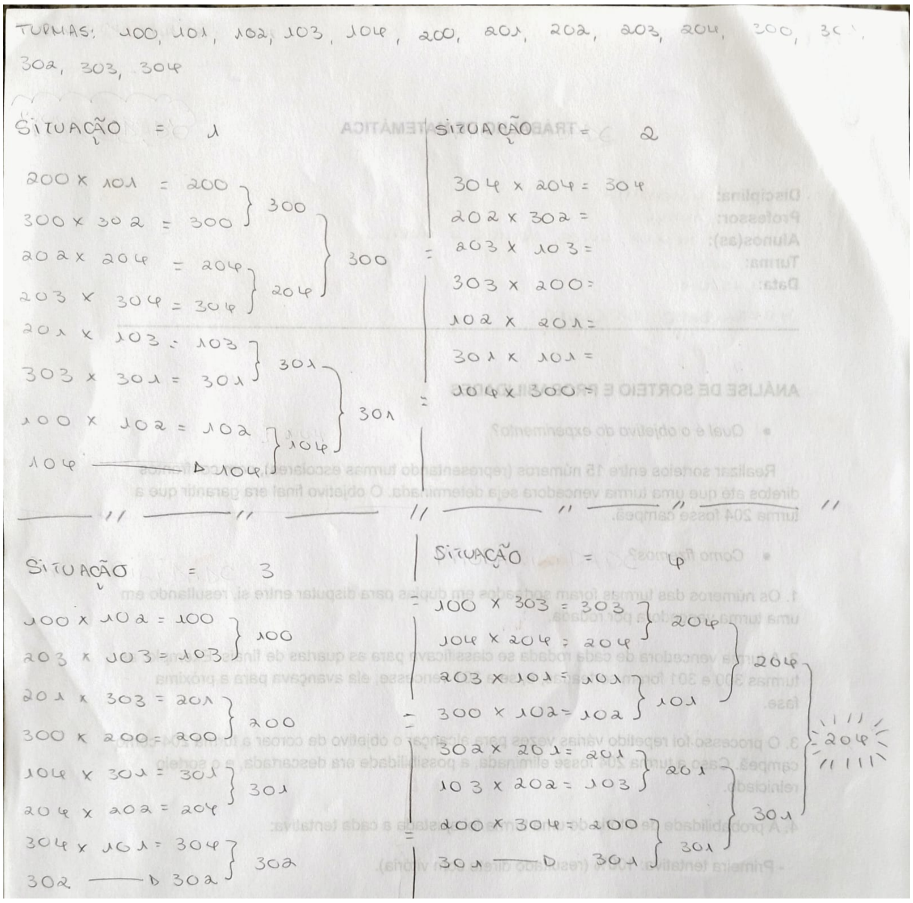
Em contrapartida, esse grupo também criou um segundo chaveamento em que o avanço das equipes seria decidido conforme o lançamento de um dado convencional: segue na disputa a equipe que consegue a face com o maior número entre dois lançamentos, sendo que cada um representava um dos times. Numa primeira simulação seguindo essa estratégia, a sua turma não conseguiu chegar à final do campeonato e, portanto, não se tornaria campeã da modalidade. Então, o grupo concluiu que, utilizando o lançamento de dados, sua turma teria menores chances de vencer em caso de não se considerar as habilidades das equipes. Para quantificar a probabilidade de se conquistar o título no vôlei, também apareceu a noção de que o total de resultados é indicado por 100% e, como estavam utilizando a aleatoriedade do lançamento de um dado convencional, essa probabilidade de vitória seria de 100% divididos por 6, devido à quantidade de faces do dado. Questionados se a quantidade de partidas ao longo do campeonato alteraria essa probabilidade, o grupo negou argumentando que, para cada partida, o dado deveria ser lançado novamente e as chances seriam as mesmas em cada uma delas. Vale destacar outra noção importante levantada pelo grupo, embora não seja mencionada dessa forma, que é a da independência entre eventos.

Também confiando na aleatoriedade, o grupo denominado *G6* na *T3* utilizou os mesmos pedaços de papéis na montagem dos chaveamentos para decidir as equipes que venceriam cada uma das partidas. Em cada jogo, tomaram-se os pedaços de papéis com o nome das duas equipes na disputa e realizou-se um sorteio: o nome retirado seria a equipe que avançaria para as próximas fases da modalidade de basquete. Porém, assim como o grupo *G2* da mesma turma, a equipe representante da *T3* não chegou à final do campeonato e, portanto, não seria campeã da modalidade. Então, esse grupo decidiu construir outros chaveamentos, fazendo uso de sorteios de maneira semelhante à primeira, e seguiriam decidindo as equipes vitoriosas por sorteio também até que sua turma chegasse a ser campeã do basquete.

Tal fato só aconteceu na quarta tentativa de chaveamento (Figura 5), tendo sua equipe disputado quatro partidas. Nesse momento, o grupo apontou que a probabilidade de sua turma vencer a modalidade considerada seria de 100% divididos por 4, portanto 25%, já que foi na quarta tentativa que se conseguiu o título do basquete. Questionados se quatro tentativas são suficientes para garantir que, utilizando o método de sorteios, sua equipe se tornasse campeã, o grupo chega a mencionar que, ao se considerar as 15 equipes disputando o campeonato, tiveram sorte de serem campeões na quarta tentativa. Além do mais, não chegaram a precisar uma quantidade de tentativas suficientes, mas disseram que, se na quinta tentativa não se tornassem campeões, desistiriam de fazer sorteios e declarariam que a probabilidade de vencer seria nula. Notou-se que o grupo associou seu cálculo de probabilidade exclusivamente à amostra realizada por seus integrantes que, do ponto de vista do professor, não assimilaram a noção de que os resultados observados em seus sorteios não são determinísticos.

A estratégia de utilizar os pedaços de papel para sortear os vencedores de cada partida foi comum entre muitos grupos. Quando percebiam que, por sorteio, sua turma não avançaria para as próximas fases, deixavam-na de fora dos resultados envolvendo a aleatoriedade e organizavam o chaveamento de modo que sua equipe chegasse até a final e a vencesse. Nesses casos em que se sorteava um vitorioso entre

Figura 5 – Chaveamentos do grupo *G6* da *T3*



Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador (2025).

dois papéis disponíveis, os grupos iam assimilando que as chances de ser sorteado e, portanto, de se tornar vitorioso em cada partida, eram iguais para cada equipe. Quando interrogados sobre a quantidade que representava essas chances iguais, não havia dúvida de que a resposta era 50%, reforçando o entendimento de que a soma das probabilidades de eventos elementares de um espaço amostral é de 100%.

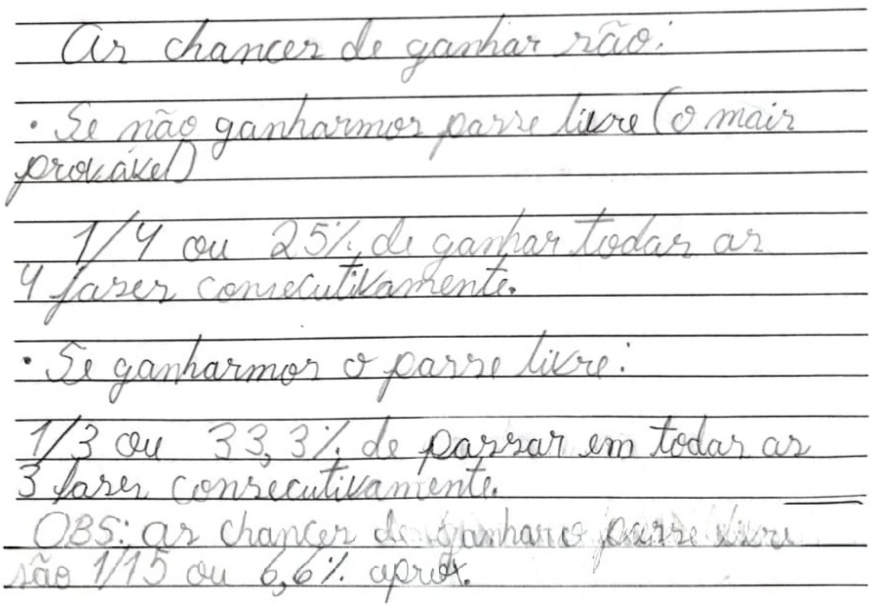
De maneira análoga, grupos empregaram o lançamento de uma moeda não viciada para decidir o time que vence cada partida e avança para as próximas fases. Em cada jogo, atribuía-se uma das faces para um time e a outra para o segundo, de modo a fazer um lançamento da moeda e aquela face voltada para cima representaria o time vencedor daquele jogo.

Entre os grupos que adotaram o lançamento da moeda, observou-se que, com apenas um lançamento, já se decidia a equipe vencedora daquela partida, exceto o grupo *G8* da *T2*. Decidiram por fazer 10 lançamentos de uma moeda e, aquela face que fosse obtida uma quantidade maior de vezes, representaria a equipe vencedora daquela partida. Esse grupo chegou a apontar um exemplo em que, feitos os 10 lançamentos da moeda, se fosse obtido oito vezes a face *cara*, isso significaria que a equipe representada teria 80% de chances de vencer a partida, enquanto a outra equipe ficaria com os 20% restantes. Mais uma vez foi observado o entendimento dos alunos de que a soma das probabilidades de eventos elementares resulta em 100%.

Prosseguindo para a *4ª aula: Justificação das conjecturas e discussão dos resultados obtidos*, os grupos foram provocados a argumentar sobre o cálculo das probabilidades envolvendo os resultados das partidas disputadas pelas equipes da Gincana Esportiva. A essa altura da atividade investigativa, já estava resolvida a questão do número ímpar de equipes no início do torneio e a decisão unânime entre os grupos de trabalho de que um dos times disputaria uma partida a menos em relação aos outros 14 times.

É o que foi verificado pelo grupo *G2* da *T2* ao denominar como passe livre o avanço automático de um dos times. Segundo o relatório produzido pelo grupo, na primeira fase do torneio haveria 14 times, restando 7 vitoriosos que encontrariam a turma que tivesse ganhado o passe livre. Na segunda fase, 8 times disputam por 4 vagas. Na terceira, 4 times jogam pelas duas vagas da final, de onde, na última fase, sairia o campeão da modalidade. Nesse cenário, o grupo passa a quantificar as chances de vitória de sua turma a partir de dois casos: (a) se não ganharem o passe livre; (b) se ganharem o passe livre, conforme Figura 6.

Figura 6 – Relação de probabilidades do grupo *G2* da *T2*


As chances de ganhar são:
• Se não ganharmos passe livre (o mais provável)
1/4 ou 25% de ganhar todas as 4 fases consecutivamente.
• Se ganharmos o passe livre:
1/3 ou 33,3% de passar em todas as 3 fases consecutivamente.
OBS: as chances de ganhar o passe livre são 1/15 ou 6,6% aprox.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador (2025).

Como se pode observar, o grupo faz uso de fração para indicar a probabilidade de se obter o passe livre, estabelecendo uma razão entre o número de casos favoráveis e o número de elementos do espaço amostral, mesmo que esses termos não tenham sido utilizados pelos estudantes. O mesmo acontece quando analisam os casos em que ganhassem ou não o passe livre, porém apresentam um resultado como se a situação favorável fosse ser campeão entre a quantidade de partidas disputadas, expressos por $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, respectivamente.

Das estratégias para calcular uma probabilidade em se tornar campeão de uma modalidade da Gincana Esportiva, os grupos, em geral, manipularam informações originadas dos resultados de cada partida disputada por uma equipe ao longo do torneio. O grupo *G7* da *T1* relatou que sua turma disputaria três partidas, segundo seu chaveamento, sendo que as chances de vitória seriam de 70% em cada partida, exceto na final, diminuindo para 50% cujo argumento baseia-se nas habilidades das turmas na modalidade do vôlei. Ao fim, a probabilidade seria resultado da multiplicação de $0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5$, porém o grupo se equivocou com o cálculo e registrou 0,35, o que representaria 3,45% de chance de se tornar campeão, segundo o grupo. Notou-se, nesse caso, uma compreensão da relação de dependência entre os resultados das partidas disputadas pela equipe ao escolher a multiplicação das probabilidades; entretanto, faltou refinamento no cálculo da multiplicação e na sua transformação para porcentagem.

Trabalhando também com a noção de manipular as porcentagens de cada jogo, o grupo *G8* da *T2*, aquele que fez 10 lançamentos de moeda para cada partida do chaveamento elaborado, apresentou dois cálculos para a probabilidade. No primeiro, que seria o caso de sua equipe disputar 4 jogos, o grupo apresentou a média aritmética, sendo $\frac{160\%}{4} = 40\%$ de chances de tornar-se campeã. No segundo caso, quando sua equipe disputaria 3 jogos, a média aritmética apresentada é de $\frac{130\%}{3} = 43{,}333\ldots\%$ de chances de ganhar o campeonato. Importante destacar que, no fim do relatório, o grupo aponta que essas porcentagens são baseadas na sorte, resultado possivelmente diferente daquele que consideraria as habilidades e aspectos físicos de cada equipe (Figura 7).

Sobre a dificuldade de argumentar e justificar os cálculos realizados, o grupo *G7* da *T2* relatou que a probabilidade de sua turma tornar-se campeã da modalidade de futsal estaria baseada no número de permutações das 15 equipes envolvidas no torneio, resultando em 1.307.674.368.000. Questionados sobre o que representaria esse número, o grupo só repetia a informação de que eram 15 equipes na disputa e, ao perceber que outros grupos estavam utilizando porcentagens para expressar a probabilidade buscada, o grupo passou a realizar cálculos sem fazer o devido registro. Ao final do relatório, apontam que transformaram 15! em porcentagem, encontrando 0,00000000444% como resultado, mesmo sem explicar seus procedimentos, indicando que é praticamente impossível que um time ganhe todos os jogos. Como recomenda Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), durante o desenvolvimento do trabalho dos grupos não se deve ajuizar-se sobre conceitos matematicamente pouco corretos, mas observar, ouvir os alunos e compreendê-los. O grupo em questão teve a oportunidade

Figura 7 – Cálculo de probabilidades do grupo *G8* da *T2*

Para acharmos a chance da 202 ganhar a competição, pegamos todas as porcentagem ate o final do campeonato somamos que seria igual a 160 e dividimos por 4(jogos jogados), 160/4 que e igual a 40%

Já da segunda maneira seria que a 202 cairia na chave sem 1 time já indo para as quartas com menos 1 jogos e apresentado ao começo, chance seria maior pois se ganhassem o torneio iriam jogar apenas 3 jogos, fizemos igual a primeira forma de achar as % em cara óu coroa, Ao final somando todos os jogos a turma ficou com 130% de chance a o final da competição dividimos esse numero por 3(números de jogos) a turma 202 tem 43,33333.....% de ganhar o campeonato

A chances ficaram muito parecidas tendo uma diferença de 3,3333...% foi apenas sorte pois fizemos com jogadas de moeda poderia ser um numero totalmente diferente se consideramos as características físicas e matérias de cada jogador as % seriam totalmente diferentes, e se o grupo fizesse mais lanças esse numero se distanciaria quanto mais moedas jogadas mais probabilidade possíveis iriam aparecer.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador (2025).

de reaver seus cálculos e argumentos no momento da socialização dos demais grupos para toda a turma.

Aproximando-se dos resultados esperados na probabilidade axiomática, o grupo *G2* da *T1* relatou que, após a conclusão do chaveamento, as decisões de vitória e derrota em cada partida seriam feitas com o lançamento de uma moeda. Porém, após realizarem diversas tentativas até que, finalmente, sua turma teria chegado à final da modalidade basquete, mudaram de estratégia depois de perderem a partida segundo o lançamento da moeda. Conforme apontado em seu relatório, o grupo verificou que no lançamento da moeda, a chance de vitória da partida poderia ser expressa na forma de fração que é $\frac{1}{2}$ = 50%. Como no chaveamento construído sua turma disputaria quatro partidas, o grupo indicou que as chances de ganhar uma partida é de 50% = $\frac{1}{2}$, duas partidas é de 25% = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, três partidas é de 12,5% = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ e, por fim, quatro partidas é de 6,25% = $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Situação semelhante descreveu o grupo *G3* da *T1* que, mesmo tendo apresentado um chaveamento onde a sua turma não se tornaria campeã da modalidade escolhida, que foi o xadrez, o grupo exibiu seus cálculos de probabilidade argumentando que suas chances de vitórias estão relacionadas com a quantidade de partidas durante o torneio. Segundo o grupo, cada time tem 50% = $\frac{1}{2}$ de chance de vencer cada jogo: se sua turma disputasse 4 partidas, a probabilidade de tornar-se campeã é de $\left(\frac{1}{2}\right)^4$; mas, em caso de 3 partidas, a probabilidade é de $\left(\frac{1}{2}\right)^3$. No fim do relatório, o grupo comentou que se fossem consideradas as habilidades de seus enxadristas, as chances aumentariam para 30% ou mais, pois a turma conquistou o primeiro e o segundo lugar no xadrez na Gincana Esportiva do ano anterior.

Justificar suas conjecturas não é algo rotineiro nas aulas tradicionais de matemática, principalmente aquelas em que se resolve uma lista de exercícios a partir de um conceito e fórmula dados. Por isso, essa etapa da investigação matemática foi bastante desafiadora, ligada à dinâmica particular de cada um dos grupos. Segundo Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), é importante ressaltar a importância do registro escrito nesse momento, pois trabalha-se a oportunidade de comunicar-se matematicamente, além de servir como instrumento avaliativo para o professor.

Encaminhamo-nos, assim, para a *5ª aula: Avaliação colaborativa* que foi marcada, principalmente, pela socialização dos resultados das investigações matemáticas realizadas pelos grupos de alunos. Mais uma vez, exercitou-se a comunicação matemática em que se buscou partilhar os principais resultados obtidos e os conhecimentos mobilizados pelos grupos durante a atividade investigativa. Na próxima seção, serão exploradas as socializações em cada turma e as estratégias utilizadas pelo professor em cada uma delas.

4.4 MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

As três turmas, de modo geral, estavam apreensivas em relação a esse momento de socialização, pois relataram que não é de costume fazerem apresentações nas aulas de matemática. Por isso, durante todo o processo das investigações matemáticas, foi-se dialogando com cada grupo de trabalho que não se tratava, necessariamente, de uma apresentação convencional. Essa socialização poderia ser organizada e planejada de forma que fossem respeitadas as dinâmicas de cada turma, buscando efetivar o compartilhamento das estratégias executadas ao longo das investigações matemáticas.

Nesse cenário, as turmas entenderam que não se fazia necessário organizar uma apresentação de slides e/ou cartazes, mas que essas seriam alternativas de suporte para a socialização, segundo a estratégia de cada grupo. Porém, nas três turmas verificou-se que os grupos preferiram organizar o ambiente da sala de aula em círculo, para que todos pudessem se enxergar, e não existisse aquele grupo que vai até a frente da sala e torna-se o centro das atenções.

Iniciando o relato pela socialização na turma *T1*, o professor optou por deixar que os próprios grupos decidissem a ordem das falas. Dos oito grupos que iniciaram as investigações matemáticas, somente sete deles participaram da socialização[4]. Se-

[4] Já havia sido mencionado anteriormente que, nessa turma, uma das alunas havia decidido participar de maneira individual. Mesmo após os diálogos no início do processo, a aluna insistiu em continuar sozinha e, por mais que tenha cumprido com todas as etapas até a escrita do relatório, decidiu não socializar seus resultados com a turma.

gundo a organização de cada grupo, houve aqueles que elegeram um porta-voz para comunicar os resultados, enquanto outros dividiram sua socialização em partes para que cada componente pudesse também exercitar a comunicação matemática.

O grupo *G4* foi o primeiro a socializar seu processo, relembrando a escolha pela modalidade do basquete e que, para construir seu chaveamento das partidas, buscaram o chaveamento da gincana escolar do ano anterior. Depois de visualizadas as partidas, consideraram as habilidades dos estudantes da turma para apresentar a probabilidade de vitória. Comentaram ainda que, depois de escrito seu relatório, chegaram a buscar em ferramentas de inteligência artificial qual seria o resultado correto[5] e que discordaram do resultado apresentado, pois achavam que a turma tem maiores chances de vencer no basquete.

Na sequência, o grupo *G1* relatou suas estratégias na construção do chaveamento das partidas de vôlei e que, calculadas as 105 maneiras diferentes de se realizar essa tarefa com as quinze equipes em disputa, construiu-se apenas uma. Os resultados das partidas foram decididos de modo que sua turma conseguisse chegar até a final, sendo que em cada uma das quatro partidas disputadas, as chances de vitória seriam de 50% em cada uma delas.

O grupo *G2* veio logo na sequência relatando que o chaveamento das disputas de basquete foi feito por meio de sorteio utilizando pedaços de papel com a identificação de cada equipe. Para cada partida disputada, as chances de vitória eram de 50% e, por isso, utilizaram uma moeda para decidir os resultados de cada jogo da modalidade. O grupo entendeu ainda que, na construção do chaveamento, havia dois cenários possíveis envolvendo sua turma: no primeiro, seriam quatro partidas a serem disputadas; no segundo, apenas três. Essa quantidade de partidas determinaria a probabilidade de sua turma tornar-se campeã na gincana, sendo que no caso em que se disputam quatro partidas, as chances são de 6,25%. Mas, caso se disputem três partidas, as chances aumentam para 12,5%.

Antes de avançar para a próxima equipe, o grupo *G4* retomou a palavra e disse que, nesse momento, conseguiu compreender o porquê da probabilidade mostrada pela ferramenta de inteligência artificial, bastante próxima do resultado apontado pelo grupo *G2*. Segundo os autores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), essa situação ilustra bem como o processo investigativo pode continuar a desenvolver-se de uma maneira espontânea, em resultado das interações possibilitadas entre os grupos nesse momento de socialização.

O próximo grupo a socializar seus resultados foi o *G3*, que escolheu a modalidade de xadrez, pois um de seus integrantes foi o vencedor da modalidade na gincana

[5] E mais uma vez é importante ressaltar que, durante todo o processo de investigação matemática, não se julgou os resultados encontrados pelos alunos como corretos ou errados. Pelo contrário, se valorizou as estratégias e argumentos utilizados por eles, buscando encaminhá-los na construção de um repertório para o cálculo de probabilidades.

escolar do ano anterior. No sorteio que realizaram para construir seu chaveamento, sua turma se envolveria apenas em três disputas e os integrantes desse grupo já mencionam a socialização anterior, citando que, nesse caso, as chances de vitória são maiores. De fato, o grupo concluiu que a probabilidade de tornar-se campeão disputando três partidas é de 12,5%, corroborando com o resultado apresentado pelo grupo *G2*.

Em seguida, o grupo *G5* tomou a fala para relatar que o chaveamento que foi elaborado para as disputas de futsal considerou os aspectos físicos e habilidades dos atletas de cada turma, a fim de proporcionar disputas mais acirradas. A partir do momento em que a turma se deu conta dos casos em que poderiam se envolver em três ou quatro partidas, todos os grupos seguintes passaram a mencionar a quantidade de partidas que disputariam. No caso desse grupo, seu caminho até a final passaria por disputar quatro partidas, mas que, segundo o chaveamento elaborado, a turma não chegaria até a final. Quando questionados sobre a probabilidade que representa, portanto, as chances da turma tornar-se campeã da modalidade, o grupo não conseguiu elaborar uma resposta concreta: começam dizendo que as chances não são de 50% de vitória, já que consideraram as habilidades de cada equipe, e terminam dizendo que cada disputa é um evento independente. Aqui, cabe destacar que o grupo se deu conta da noção de eventos independentes e, pressionados a compartilhar um resultado numérico, os integrantes do grupo concordam em responder que suas chances de vencer a modalidade seriam de 50%, conforme ouviram de outros grupos.

Também tendo construído um chaveamento para a modalidade do vôlei, o grupo *G7* o fez considerando equipes mais habilidosas, pois, uma vez que o campeonato se dá no formato mata-mata, os integrantes decidiram que as equipes menos habilidosas fossem eliminadas já na primeira rodada das disputas. Então, reforçaram que suas decisões e cálculos basearam-se nas características físicas dos integrantes de cada turma. No chaveamento apresentado, sua turma disputaria três partidas, sendo que em cada uma delas, as chances de vitória não seriam iguais, mas 70%, 70% e 50%, respectivamente. Questionado sobre as chances da turma tornar-se campeã da modalidade, o grupo relatou que seria necessário multiplicar essas porcentagens e apresentaram um resultado final de 3,45%. Embora nenhum grupo tenha questionado esse resultado, é importante apontar um equívoco cometido pelo grupo nesse momento da multiplicação, pois, tomando os valores apontados em cada partida, o produto encontrado seria de 24,5% e não o relatado pelo grupo.

Por último, o grupo *G6* compartilhou seus resultados, apresentando certa insegurança sobre os dados encontrados, acompanhados de uma narrativa que favorece a turma nas disputas. Segundo o grupo, o chaveamento das disputas seria construído pelo professor regente, de modo que as partidas em que sua turma se envolvesse seriam contra equipes menos habilidosas. Chegaram a mencionar que, na partida da final, as chances de vitória contra aquela equipe específica seriam de apenas 7% - mesmo sem apresentar um argumento sólido para esse dado - mas que os atletas adversários estariam lesionados, o que aumentaria as chances de sua turma para 50% de vitória.

Como se aproximava dos minutos finais da aula em que ocorreram as socializações dessa turma, após o relato desse último grupo, os humores dos estudantes se elevaram. Além disso, alguns alunos chamaram a atenção para os diversos resultados encontrados e, dada a herança das aulas tradicionais de matemática, ficaram se perguntando quais deles seria o resultado correto. Encerramos a dinâmica das socializações nessa turma relembrando as diferentes perspectivas sobre o entendimento de probabilidade.

Passando para a turma *T2*, as socializações de todos os grupos também aconteceram numa única aula e, dessa vez, o professor decidiu a ordem em que os grupos compartilhariam seus resultados. Mais uma vez, dos oito grupos formados inicialmente para as investigações matemáticas, um deles não participou da socialização, alegando não ter avançado nas investigações, não tendo-a concluído e, por isso, não chegaram a um resultado a ser compartilhado.

Começando pelo grupo *G1*, que escolheu a modalidade de futsal para fazer seus estudos de probabilidade, ouviu-se o relato de que construíram o chaveamento das disputas de modo que escolheram os locais de cada equipe nas partidas. Na ocasião, sua turma disputaria quatro partidas, sendo que em cada uma delas, cada equipe possuía 50% de chance de vitória, resultando que a probabilidade de tornar-se campeão na modalidade seria de 0,0625, o que é equivalente a 6,25%, segundo o próprio grupo.

Já o grupo *G2* escolheu a modalidade de vôlei e, antes de apresentar seu chaveamento, o porta-voz do grupo explicitou as duas situações possíveis: o passe livre para as quartas de final ou não. Nesse momento, o integrante do grupo solicitou uma caneta para o quadro da sala e explicou para a turma as probabilidades de se conquistar ou não o passe livre. Das 15 equipes em disputa, apenas uma delas conseguirá o passe livre, resultando na probabilidade de $\frac{1}{15}$ = 6,66% de conquistá-lo, o que permitiria que a equipe disputasse apenas três partidas. Em caso de passe livre, o grupo relata que as chances de avançar as três fases e vencer a final é de $\frac{1}{3}$ = 33,3%. Pelo contrário, a probabilidade de não se conseguir o passe livre e disputar quatro partidas é de $\frac{14}{15}$ = 93,33%, sendo que as chances de avançar as quatro fases e vencer a final é de $\frac{1}{4}$, o que representaria 25%, segundo o grupo.

Diante dos cálculos elaborados, o professor questionou a turma se concordavam com o apresentado. Não houve discordância imediata sobre os resultados no quadro, mas alguns estudantes pediram que o grupo explorasse um pouco mais a ideia do passe livre. Atendendo ao solicitado, o grupo reforçou a questão de que o problema tratava de 15 equipes que precisavam disputar entre si duas a duas e, por isso, uma delas estaria inicialmente sem um oponente.

O professor ainda acrescentou ao momento da socialização do grupo *G2* as noções de eventos independentes, apontando o fato de que os resultados de cada partida deveriam ser considerados de maneira individual, inicialmente e, depois, considerar-se a quantidade de partidas disputadas. Da maneira como foi apresentado, o grupo acabou considerando que a probabilidade de vencer é da forma $\frac{1}{n}$, em que n representa a quantidade de partidas em que a turma se envolveu até à final do campeonato.

Dando continuidade, o grupo *G3* foi aquele que não concluiu as suas investigações matemáticas e, portanto, não participou da socialização. Por isso, o grupo *G4* foi convidado para socializar seus resultados no chaveamento das disputas de basquete. Esse grupo foi um daqueles que tentou organizar as partidas em que as turmas de primeira série competissem entre si, o mesmo para as turmas de segunda série e também para as de terceira série. Dessa maneira, as disputas seriam mais equilibradas numa primeira fase, já que consideraram que turmas do mesmo ano têm o mesmo nível de habilidade, tendo a mesma chance de ganhar. Segundo o que foi apresentado pelo grupo, suas chances de avançar na primeira fase seriam de 50%, já na segunda fase, 25%. Ainda, avançar na terceira fase representa 12,5% de chances e, chegando na final, a turma disputaria contra um terceiro ano e, ainda assim, suas chances de vitória no campeonato seriam de 6%. Questionados sobre a questão da diferença entre turmas de diferentes anos, o grupo argumentou que, como se tratava da final, os resultados já seriam mais parecidos. O grupo relata que as chances foram diminuindo pela metade conforme se avançava cada uma das fases e o resultado final de 6%, apesar de não representar metade de 12,5%, foi obtido por meio de arredondamento.

Prosseguindo, o grupo *G5* socializou seus resultados de probabilidade no chaveamento das partidas de basquete e, assim como o grupo anterior, também tentou organizar as turmas do mesmo ano para que disputassem entre si, na primeira fase, o maior número de partidas. Separadas as turmas com seus similares, foi feito um sorteio para construir um chaveamento para cada grupo de turmas. Saindo um vencedor de cada ano, estes disputariam entre si a grande final para se estabelecer o vencedor da modalidade na gincana. Apesar dessa organização, segundo o grupo, todas as turmas têm a mesma chance de se tornar campeã, representada pela probabilidade de 20%, pois seriam cinco turmas do mesmo ano disputando entre si. Quando o professor questionou sobre a fase final promover disputas entre turmas de diferentes anos, o grupo só repetiu a informação de que consideravam que as chances de vitória eram iguais e, por isso, não alterava a probabilidade de 20% de tornar-se campeã da modalidade na gincana.

Passando para o próximo grupo, os integrantes do *G6* socializaram seus resultados do chaveamento, construído por sorteio, das disputas de vôlei na gincana escolar. O chaveamento apresentado não aparentava possuir uma sequência lógica para o formato mata-mata, conforme as instruções no início das investigações matemáticas. Para a primeira rodada, o grupo até apresentou as sete partidas e seus vencedores que, conforme os integrantes do grupo, possuíam 50% de chance de vitória. Alguma inconsistência foi observada quando, ao manipular seu relatório para auxiliar na socialização, encontraram em seus registros a informação de que turmas mais velhas possuiriam 20% de vantagem em relação a um possível oponente mais novo. Quando questionados pelo professor, os integrantes não apresentaram uma resposta sólida, o que confirma que o grupo não havia concordado sobre a perspectiva de probabilidade que adotaram para seus cálculos, ora baseada nas observações de anos anteriores, ora na questão teórica da probabilidade clássica. Além disso, o grupo finalizou sua socialização apresentando uma probabilidade final de 3,5% da turma tornar-se campeã no vôlei e esse número é resultado do produto das probabilidades elementares de cada uma das sete partidas que a turma teria disputado. Como mencionado anteriormente, o chaveamento apresentado pelo grupo não possuía estrutura de uma disputa no formato mata-mata e, por isso, a quantidade de partidas da turma foi diferente de todos os outros grupos.

Encaminhando para o final das socializações, o grupo *G7* compartilhou suas experiências e resultados no cálculo de probabilidade baseado no chaveamento das disputas de futsal. Em particular, esse grupo foi composto por quatro estudantes com dificuldade considerável na componente curricular de matemática, mas que, ainda assim, sentiram-se motivados a participar das investigações matemáticas pela oportunidade de se trabalhar em grupo. De acordo com o estudo de Costa e Ferruzzi (2020), as investigações matemáticas possibilitam interações entre alunos e professor, bem como entre os próprios alunos, nas quais os alunos têm o livre arbítrio para atuar e conhecer novas possibilidades de aprendizagem.

Apresentando até certa facilidade em estruturar o chaveamento das disputas de futsal, o grupo *G7* realizou seus sorteios utilizando pedaços de papel com os nomes de cada equipe escritos em cada um deles. Na oportunidade, o professor buscou estar mais próximo do grupo para acompanhar essa construção e já levantar questionamentos sobre a probabilidade de se retirar o nome de uma determinada turma em específico, fato esse que foi lembrado pelos integrantes do grupo no momento da socialização. Apesar disso, quando passaram a configurar o cálculo da probabilidade de tornarem-se campeões da modalidade, o grupo passou a fazer uso de permutações envolvendo as 15 equipes na gincana e, dada a estranheza com a grandeza do número, realizou diversas multiplicações e divisões sem fazer o registro de todas elas. Com isso, o grupo não conseguiu apresentar um resultado final no momento da socialização, apesar de no relatório ter existido registros das permutações sendo transformadas em porcentagem, conforme as palavras do próprio grupo.

O último grupo a socializar seus resultados foi o *G8*, que construiu um chaveamento para as disputas de tênis de mesa. Seus integrantes relataram que o chaveamento foi realizado por sorteio utilizando uma roleta eletrônica e que os vencedores de cada equipe foram determinados após dez lançamentos sucessivos de uma moeda para cada partida. Os resultados de cada lançamento foram anotados e determinaram as probabilidades de vitória para cada equipe envolvida em cada uma das partidas. Nessa construção, o grupo relatou que sua turma disputaria quatro partidas ao longo do campeonato e que a probabilidade final de tornar-se campeã da modalidade é de 40%, resultado esse obtido da média aritmética das probabilidades de cada uma das quatro partidas disputadas ao longo das fases.

Nessa turma, houve menos questionamentos sobre os diferentes resultados obtidos pelos grupos. Quando o professor questionou-os sobre os possíveis motivos que levaram a essas diferenças, alguns alunos apontaram que poderia estar associado às diversas modalidades esportivas consideradas para a gincana, o que incluiria o histórico de vitórias da turma em edições anteriores. Outros ainda apontaram a quantidade de partidas disputadas pela turma, sendo que, quanto menos partidas se joga, maiores são as chances de tornar-se campeã de uma certa modalidade.

Por fim, considerando a terceira turma de socialização, dos seis grupos formados inicialmente para as investigações matemáticas, apenas três deles participaram da etapa de compartilhamento oral de seus resultados. Avaliando pontualmente esse fato, considerou-se que a turma apresentou, durante todo o processo, alguns desafios de convivência e de trabalho em grupo. Tratou-se de uma turma com o menor número de integrantes entre as três que participaram dessa pesquisa, além de que, dois dos seis grupos eram formados por apenas um estudante, que se desmotivaram ao longo do processo. Cabe a reflexão de reiterar a flexibilidade da dinâmica das investigações matemáticas, principalmente no que concerne à decisão pelo trabalho individual ou em grupo com os estudantes.

Sendo apenas três grupos para socializar seus resultados, eles puderam decidir e organizar a sequência das apresentações. Iniciando pelo grupo *G2*, foram exibidas duas situações de chaveamento: na primeira, os vitoriosos de cada partida foram decididos num sorteio utilizando o número maior obtido no lançamento de um dado convencional em que cada número representava uma equipe; na segunda, considerou-se as habilidades de cada turma no vôlei, modalidade escolhida pelo grupo para a determinação das probabilidades. Em ambas as situações, a turma disputaria quatro partidas, mas o grupo relatou que, considerando os lançamentos do dado, a probabilidade de tornar-se campeã seria menor se comparada à situação em que se consideram as habilidades dos atletas de cada turma. Isso aconteceria pois, no lançamento do dado, a turma depende da sorte envolvendo os resultados. Ao levar em conta as habilidades dos estudantes na modalidade, podem ser considerados os treinos frequentes e o histórico de vitórias da turma no vôlei. Por isso, o grupo decidiu compartilhar apenas a probabilidade de vitória na segunda situação, que seria em torno de 90% a 100% com base na observação dos jogos de outras equipes. Questionados sobre a probabilidade que seria obtida ao se considerar o lançamento do dado, um dos integrantes do grupo tomou a palavra e respondeu que acreditava que deveria se dividir os 100% de chances em 6 resultados possíveis, isto é, $\frac{100\%}{6}$.

Passando para o grupo *G6*, relatou-se que foram construídos um total de quatro chaveamentos, utilizando o sorteio com pedaços de papel escritos o nome de cada uma das equipes. Como já explorado anteriormente, para cada chaveamento construído, decidia-se o vitorioso de cada partida também utilizando sorteios, o que fez com que em diversos sorteios sua turma não chegasse até à final do torneio ou, ainda, não vencesse a partida final. Foi somente na quarta ocasião em que, por meio de sorteios, a equipe que representava sua turma tornava-se campeã na modalidade escolhida, que foi o basquete. Desse modo, a probabilidade apresentada pelo grupo que mede as chances de sua turma vencer o basquete foi de 25%, resultado de um sucesso obtido em quatro tentativas, isto é, $\frac{1}{4}$. O grupo *G2* pediu a palavra de volta e reiterou a problemática que existe em contar apenas com a sorte, como disseram, ou ainda, em depender do resultado de um sorteio feito com pedaços de papel.

Para encerrar as socializações dessa turma, o grupo *G4* compartilhou seus resultados para a modalidade de basquete na gincana escolar. Segundo o grupo, o chaveamento das partidas foi organizado a partir de sorteio utilizando pedaços de papel com o nome das equipes, mas relatam que interferiram em algumas disputas que consideraram injustas para um dos times envolvidos. E, portanto, as habilidades físicas acabaram por nortear as decisões para as próximas fases do torneio, bem como para o cálculo da probabilidade de tornar-se campeão no vôlei. O grupo relatou que as turmas de primeiro ano seriam as menos habilidosas e já seriam desclassificadas na primeira fase, entendendo que as disputas mais equilibradas aconteceriam entre as equipes do segundo ano. Portanto, terminaram a socialização apresentando uma probabilidade de 50% de tornar-se campeão, pois se se encontra uma equipe de primeiro ano no chaveamento, a vitória seria praticamente certa para a equipe mais velha.

Sobre as interferências dos grupos durante as socializações, não houve nenhum grande impasse. Essa última turma, de modo geral, assumiu uma postura de cálculo de probabilidade que basicamente contrariava qualquer tipo de sorte, por mais que os grupos tenham adotado estratégias de sorteio durante suas investigações matemáticas. Mas, segundo os grupos que participaram das socializações, considerar as habilidades dos atletas parece mais coerente em medir as reais chances de uma turma se tornar campeã de uma determinada modalidade. Questionados pelo professor sobre quais ferramentas poderiam ser utilizadas para mensurar esses aspectos, alguns alunos relataram que poderiam ser buscadas as partidas disputadas em anos anteriores, quem foram os atletas envolvidos, quantos pontos teriam sido convertidos por cada um deles e como seriam suas rotinas de treinamento, principalmente.

Em linhas gerais, os conhecimentos matemáticos mobilizados pelos grupos de alunos nas três turmas foram diversos, com destaque para a manipulação de porcentagens, bem como suas representações fracionária e decimal. Na perspectiva da probabilidade axiomática, conforme Shaughnessy (1992), os alunos utilizaram porcentagem de modo que a soma das probabilidades que representam eventos elementares resultasse em 100%, mesmo que não tenha sido mencionado tal axioma. Ainda há de se destacar, em alguns casos, o uso de análise combinatória, principalmente no que se refere a identificar a quantidade de elementos que compõem um espaço amostral, como sendo o total de resultados possíveis em um determinado fenômeno analisado. Sem dúvida, também lançaram mão de realizar operações com números racionais, em sua representação decimal e fracionária. Todos os conhecimentos foram mobilizados sem, necessariamente, uma lista de exercícios sobre esses vários tópicos, mas com o repertório de cada aluno e os desafios encontrados ao longo das investigações matemáticas.

4.5 INDÍCIOS DE PENSAMENTO CRÍTICO E ARGUMENTAÇÃO

Quando, nas aulas de matemática, os alunos se deparam com problemas de probabilidade que ultrapassam os casos clássicos de uma moeda, um dado e cartas de um baralho, reforça-se a potencialidade de desenvolvimento de uma educação matemática crítica. Dessa maneira, mais do que compreender regras e fórmulas, os estudantes participam ativamente na transformação de seu contexto social ao organizarem e fundamentarem suas atitudes e decisões baseadas em conhecimentos matemáticos (Ferreira; Lopes, 2024).

Ao observar o envolvimento e a participação das três turmas nas atividades investigativas sobre probabilidade, considera-se efetivo o engajamento dos alunos, com destaque para aqueles que não possuem uma relação amigável com o ambiente escolar, apontando um constante desinteresse pelas disciplinas cursadas. Como observado no trabalho de Sá, Milli e Chiabai (2021), a educação matemática crítica evidencia-se quando os alunos percebem que a matemática ensinada na escola está presente em seu cotidiano, estimulando-os a participar desse ambiente de discussões que estabelecem relações matemáticas para além da sala de aula.

Trabalhar com a determinação de probabilidades em uma gincana escolar ampliou a percepção dos estudantes sobre a relação desse conteúdo com a estatística. Em diversos momentos, ao mencionarem o histórico de vitórias das turmas e as habilidades esportivas dos colegas nas modalidades, notou-se o desejo dos participantes das investigações matemáticas de fundamentar seus argumentos em fatos. Embora não exista um registro formal dessas informações, os estudantes buscavam em suas memórias a participação das turmas em edições anteriores da gincana na mesma escola para, em algumas oportunidades, discordar, por exemplo, das chances iguais de vitória ou derrota em uma partida.

Dessa forma, entende-se que a Educação Matemática Crítica ocorre quando esse aluno discorda da probabilidade axiomática e comenta sobre as habilidades de seus atletas, ou ainda sobre sua vitória no ano anterior, como é o caso do grupo *G3* da *T1*, que afirma ter conquistado o primeiro lugar no xadrez. O mesmo foi observado no grupo *G8* da *T2* ao recordar seu primeiro lugar na modalidade de tênis de mesa.

Na prática apresentada por Santos, Camargo Sant'Ana e Sant'Ana (2024), mostrou-se que a Educação Matemática Crítica é capaz de fornecer princípios fundamentais para tornar a matemática escolar significativa para os aprendizes, ao trabalhar com problemas baseados no contexto dos estudantes. Por isso, vale destacar que, ao abordar a probabilidade com os alunos do ensino médio da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada no contexto da gincana escolar, foi levantada a questão das informações estatísticas envolvendo os aplicativos de apostas esportivas.

No processo das investigações matemáticas em sala de aula, houve uma problematização levantada por alguns grupos de alunos que buscavam basear seus argumentos de probabilidade nas habilidades esportivas dos membros de suas equipes, como foram os casos dos grupos *G4* e *G5* da *T1*, assim como o grupo *G2* da *T3*. Na oportunidade, foram mencionados os aplicativos de apostas esportivas como uma possibilidade de entretenimento, mas também como um possível problema para aquelas pessoas que utilizam seu dinheiro na esperança de obter algum retorno monetário. Foram diversos os relatos de estudantes sobre pessoas conhecidas que já perderam dinheiro em apostas dessa natureza, seja por acreditar em um rápido rendimento financeiro ou ainda por confiar em seus times. Segundo os próprios estudantes, o futebol é uma das modalidades esportivas que mais mobiliza as crenças dos populares a ponto de apostarem dinheiro em possíveis resultados de partidas. Mais uma vez, observou-se a influência das crenças na resolução de problemas de probabilidade.

Não distante dessa situação, quando se fala em apostar dinheiro em aplicativos de jogos de azar, como o popularmente conhecido *Jogo do Tigrinho*, os alunos também relataram casos de conhecidos envolvidos em perdas monetárias. A fragilidade dos investimentos reside na promessa de receber de volta uma enorme quantia de dinheiro se comparada ao valor aplicado inicialmente. Em períodos de precarização e desvalorização de empregos formais, seja em regime de consolidação das leis do trabalho (CLT) ou estatutário, a possibilidade de receber grandes quantias de dinheiro rapidamente ilude uma grande massa de pessoas a ponto de fazê-las utilizar seus salários em jogos de azar, sem nenhuma garantia de retorno, como é o caso dos cassinos on-line. O problema se potencializa quando se considera o papel dos influenciadores digitais, que facilmente adentram os lares brasileiros por meio das redes sociais e que têm contribuído amplamente na divulgação desses jogos de azar, mas que vem sendo investigados por autoridades de justiça por participarem ativamente no endividamento de cidadãos.

Como já mencionado anteriormente, os aplicativos de apostas esportivas e jogos de azar configuram um enorme potencial para desenvolver a Educação Matemática Crítica. Por isso, o professor que decide trabalhar com os *cenários para investigação* (Skovsmose, 2000) tem maiores chances de engajar seus alunos na resolução de problemas propostos em comparação às clássicas listas de exercícios. Trata-se de um desafio à prática docente, que deve estar sempre embasada nos documentos curriculares e nos tempos disponíveis para aplicações das metodologias disponíveis (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020).

Em síntese, os indícios de pensamento crítico e argumentação observados nas atividades investigativas revelam que, quando a matemática é inserida em contextos socialmente significativos, os estudantes passam a mobilizar saberes que ultrapassam o domínio técnico do conteúdo. As discussões sobre apostas, crenças e desigualdades, articuladas às noções de probabilidade, evidenciam que a aprendizagem matemática pode constituir-se também como um exercício de cidadania, na medida em que convida os alunos a analisar criticamente as situações que permeiam seu cotidiano. Essas experiências mostram que o ensino de probabilidade, quando conduzido sob a perspectiva das investigações matemáticas, potencializa não apenas a construção de conhecimentos conceituais, mas também o desenvolvimento de uma postura reflexiva diante dos usos sociais da matemática. As reflexões decorrentes desse processo, tanto por parte dos estudantes quanto do professor-pesquisador, são aprofundadas na seção a seguir.

4.6 REFLEXÕES A PARTIR DA PRÁTICA

Proporcionar aos estudantes momentos não convencionais durante as aulas de matemática é consideravelmente desafiador. Ao adotar a metodologia das investigações matemáticas para se trabalhar determinado conteúdo, o professor escolhe dialogar a matemática escolar com o cotidiano de suas turmas. Segundo Franzoni e Quartieri (2020), os diferentes caminhos percorridos pelos grupos de trabalho durante as investigações matemáticas permitem que eles façam importantes descobertas, seja quando se debruçam sobre o problema a ser resolvido, ou ainda quando comparam seus resultados na oportunidade de socialização para toda a turma.

Assim, os resultados encontrados nesta dissertação, após o desenvolvimento de uma tarefa investigativa para o ensino de probabilidade no ensino médio, corroboram os trabalhos desenvolvidos em Educação Matemática sobre atividades investigativas.

Após a aplicação de uma atividade na perspectiva da Educação Matemática Crítica, Sá, Milli e Chiabai (2021) perceberam que o diálogo entre os estudantes estimulou a exposição e a argumentação sobre diferentes pontos de vista acerca da atividade, ampliando a capacidade de autocrítica sobre um determinado problema nas aulas de matemática.

Quando um professor de matemática se depara com o rol de habilidades a serem desenvolvidas com os estudantes do ensino médio, conforme a BNCC (Brasil, 2018), abre-se um grande leque de possibilidades metodológicas. Saber escolhê-las e aplicá-las conforme a realidade de cada turma de alunos faz parte do desafio diário da prática pedagógica. Nesse sentido, esta dissertação buscou contribuir com as reflexões acerca de três turmas do ensino médio em uma escola da rede estadual catarinense, compartilhando seus desafios, seus acertos e seus equívocos. Tal abertura metodológica, no entanto, não garante, por si só, práticas emancipatórias. É na escolha intencional de metodologias que favoreçam a problematização e o diálogo, como as investigações matemáticas, que o ensino pode aproximar-se de uma educação matemática crítica.

A opção por ensinar probabilidade por meio das investigações matemáticas não excluiu a realização de aulas expositivas que antecederam o processo investigativo dos estudantes. Mantê-los enfileirados, trabalhando individualmente, deixando que os mais falantes falassem e que os mais silenciosos permanecessem em silêncio, fez parte da estratégia de introduzir uma nova dinâmica nas aulas de matemática. Para que as investigações matemáticas sejam aplicadas com eficácia, os autores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020) recomendam que se conheçam as turmas, sua dinâmica e suas realidades. Por isso, na E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada, buscou-se compreender as interações entre os alunos e os professores de cada uma das três turmas selecionadas para realizar as investigações matemáticas desse trabalho.

Desde o momento em que se dialogou com os alunos sobre fenômenos aleatórios, que se compartilhou com eles a proposta de um trabalho investigativo e que se tentou organizar as turmas em grupos espontâneos, o professor pesquisador já passou a vivenciar desafios que possivelmente não existiriam se decidisse trabalhar exclusivamente no paradigma do exercício. Portanto, adotar as investigações matemáticas como alternativa metodológica passou por preparar os alunos a vivenciar uma dinâmica diferente da convencional nas aulas de matemática.

No momento em que se planejou elaborar uma sequência didática para o desenvolvimento de habilidades na unidade temática de probabilidade sob a metodologia das investigações matemáticas, almejava-se construir, junto aos estudantes, os conhecimentos acerca de espaço amostral e dos eventos nele contidos de um fenômeno aleatório. Porém, a prática mostrou que o que foi desenvolvido foi o início da mobilização desses conhecimentos, uma vez que não se atingiu a consolidação dos conceitos

– e, principalmente, a utilização dos termos convencionados para esse contexto – durante os cinco encontros planejados. Dessa maneira, a sucessão de atividades que prevê uma sequência didática, conforme Silva e Maria Marly de Oliveira (2009), não ocorreu nesta dissertação. É conveniente, portanto, mencionar que a atividade elaborada e aplicada pelo professor pesquisador tratou-se de uma tarefa investigativa para o ensino de probabilidade utilizando a metodologia das investigações matemática.

Nesse sentido, considera-se que as investigações matemáticas desenvolvidas a partir da tarefa investigativa elaborada para as três turmas da 2ª série do ensino médio da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada contribuíram para a construção da aprendizagem significativa sobre o conteúdo de probabilidade. Isso porque os alunos participaram efetivamente do processo investigativo, apesar dos casos relatados de grupos de trabalho que não concluíram a atividade até a etapa de socialização dos resultados. Apesar disso, se compararmos com o engajamento promovido por uma lista de exercícios em uma aula tradicional de matemática, observaríamos um grande número de alunos alcançados em comparação aos quatro ou cinco entusiastas da matemática convencional.

Segundo os professores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), as investigações matemáticas têm como uma de suas potencialidades a elaboração e o teste de conjecturas, buscando desenvolver a capacidade argumentativa matemática. Na atividade desenvolvida nesta dissertação, considera-se que essa etapa das conjecturas não atingiu todo o seu potencial. Alguns fatores que podem ser atribuídos a essa situação são a falta de familiaridade dos alunos em conjecturar a partir de observações feitas, o que implica diretamente na dificuldade em fazer registros de seus processos e raciocínios, bem como a escolha do conteúdo de probabilidade para trabalhar de forma investigativa. Na perspectiva da matemática escolar, o conteúdo de probabilidade é bastante pragmático e, mesmo assim, os alunos ainda conseguiram trazer diferentes perspectivas para a compreensão da probabilidade, seja de maneira empírica, estatística ou, ainda, axiomática.

Porém, no que diz respeito às outras etapas das investigações matemáticas, obteve-se um desempenho satisfatório em cada uma delas, com destaque para a etapa de socialização. Além disso, trabalhar com problemas abertos, que não possuem uma resposta tão explícita a ser exibida, permite que os alunos utilizem seus repertórios na resolução desses problemas.

Ainda sobre o posicionamento crítico dos estudantes em relação aos seus processos de aprendizagem, durante a aplicação das investigações matemáticas, questionou-se qual tem sido a perspectiva de probabilidade exigida nos vestibulares. Com essa preocupação em evidência, os alunos perceberam que os exames finais da etapa do ensino médio, seja para ingresso em universidades ou para certificação, ainda se apoiam no ensino conteudista das disciplinas. Dessa maneira, reforça-se o aspecto facilitador das investigações matemáticas no ensino de probabilidade no ensino médio, uma vez que, após as aulas de socialização dos resultados obtidos pelos alunos, foram concedidas aulas tradicionais para a conceituação da probabilidade axiomática e a resolução de questões convencionais sobre esse conteúdo.

Conforme corroboram os resultados de Sá, Milli e Chiabai (2021), mesmo com o aspecto promissor da abordagem investigativa nas aulas de matemática, houve momentos em que não foi possível fugir da educação matemática tradicional, reforçando o caráter efêmero dos cenários para investigações. Além disso, o próprio Skovsmose (2001) relata a fluidez que existe entre os diferentes *milieus* de aprendizagem em uma aula de matemática. Em suma, as experiências relatadas evidenciam que o ensino de probabilidade, mediado por investigações matemáticas, pode ampliar a participação e o pensamento crítico dos estudantes, ao mesmo tempo em que desafia o professor a reconstruir sua prática pedagógica em direção a uma matemática mais significativa e dialógica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Visualizar toda a jornada percorrida até o momento da finalização desta pesquisa é bastante nostálgico, pois refletir sobre a formação docente – em particular a do professor que ensina matemática – é refletir sobre a sala de aula, desde o momento em que se habita nela como aluno até aquele em que se a ocupa como professor. Adotar a metodologia das investigações matemáticas como uma alternativa para o ensino da matemática escolar retira o professor do lugar seguro de transmissor de conhecimento e o coloca como mediador dos conflitos, dos problemas identificados e das descobertas sendo feitas.

De fato, para as três turmas do ensino médio da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada selecionadas para a aplicação das investigações matemáticas elaboradas e relatadas nesta dissertação, considera-se que a metodologia adotada favoreceu a aprendizagem do conteúdo de probabilidade. Isso porque foram criadas situações de protagonismo dos alunos, livrando-os do juízo dicotômico certo-errado bastante presente nas aulas de matemática, e permitindo-lhes refletir criticamente sobre a mobilização dos conhecimentos matemáticos exigidos para elaborar soluções para um problema apresentado.

Além disso, os conflitos que surgiram durante as atividades investigativas, originados por diferentes interesses entre alunos, sejam de caráter pessoal ou pedagógico, foram geridos de maneira mais eficaz, pois o pesquisador atuava também como professor de matemática das turmas em questão. Reforça-se a recomendação dos autores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020) de se conhecer os alunos para os quais serão propostas as investigações matemáticas, garantindo um melhor andamento das etapas envolvidas no processo investigativo.

Portanto, àquele professor de matemática que possa ter se inspirado neste trabalho, recomenda-se tomar a atividade investigativa apresentada e adaptá-la à realidade de seus estudantes: conheça-os, adote um contexto significativo para sua aprendizagem e não tema o novo. A escolha da aplicação da atividade investigativa neste trabalho se deu para alunos da 2ª série do ensino médio com base nos planejamentos anuais da componente curricular de Matemática da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada, mas poderia ter sido realizada para qualquer turma do ensino médio. Inclusive, seu grande objetivo foi analisar como os estudantes mobilizaram seus conhecimentos sobre probabilidade, utilizando uma metodologia investigativa. Portanto, também seria possível aplicá-la em qualquer turma com a qual se deseje trabalhar o conteúdo de probabilidade, incluindo turmas dos anos finais do ensino fundamental, bem como turmas do ensino superior.

Reforçando, é necessária uma adaptação da atividade investigativa apresentada para a realidade de cada professor. A sala de aula é um ambiente vivo e cheio de descobertas. Ela se tornará muito mais autêntica se o professor também se permitir fazer descobertas, tornando genuíno o processo de construir e lapidar os conhecimentos matemáticos. Tenha como guia os documentos curriculares de sua rede de ensino e faça um bom planejamento, cuidando das questões de tempo e do tamanho da turma em que se deseje aplicar as investigações matemáticas.

Alguns tópicos, frutos da promoção de uma Educação Matemática Crítica, foram levantados pelos alunos e poderiam influenciar efetivamente suas atuações como cidadãos, como nos casos dos aplicativos de apostas esportivas e do envolvimento de influenciadores digitais na divulgação de jogos de azar. Quando foi informado aos alunos que o aprofundamento de suas pesquisas não renderia nota – como eles esperam de toda atividade em sala de aula –, eles se sentiram desmotivados a dar continuidade a seus estudos de forma independente. Fica, portanto, a sugestão de trabalhar as investigações matemáticas de modo interdisciplinar, dialogando com outros docentes da escola, para que contribuam na mobilização de conhecimentos de seus alunos.

Devido ao caráter qualitativo da pesquisa, não se considerou traçar nem mensurar índices alcançados pelos alunos que pudessem demonstrar o atendimento ou não às habilidades mencionadas nos documentos curriculares. Para o desenvolvimento do aspecto quantitativo deste trabalho, seria possível elaborar matrizes avaliativas que ranqueariam os conhecimentos matemáticos mobilizados por cada grupo de trabalho, por exemplo, variando em uma escala que mede se um determinado aspecto é atendido ou não pelo grupo. Ainda assim, há de se considerar o desafio imposto pela imprevisibilidade característica das investigações matemáticas que, em determinadas ocasiões, pode apontar para resultados não contemplados em matrizes de avaliação.

Por fim, destaca-se a importância deste trabalho em discutir o ensino de matemática em uma escola real, na qual se aplicou e avaliou uma atividade de probabilidade, aproximando a produção científica dos sujeitos de fora dos muros da universidade. Além disso, registra-se o desejo de que novas pesquisas sejam elaboradas sobre a aplicação de investigações matemáticas em sala de aula. Na área de ensino e aprendizagem, podem ser explorados muitos outros conteúdos previstos nos currículos de matemática, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio. Acredita-se que todos tenham potencial para ser trabalhados na perspectiva investigativa; porém, cada realidade escolar pode dialogar melhor com algum conteúdo específico. Refletindo sobre a área da formação de professores, podem ser desenvolvidas pesquisas que caminhem na direção para que mais professores de matemática se mobilizem para desmistificar a não aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos em contextos fora da sala de aula.

REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. 1. ed. São Paulo: Edições 70, 2016.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Ministério da Educação.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 20 dez. 1996.

BRASIL. **Resolução n.º 510**. [S.l.: s.n.], 7 abr. 2016. Aprova as diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas em Ciências Humanas e Sociais. Disponível em: https://conselho.saude.gov.br/resolucoes/2016/Reso510.pdf. Acesso em: 13 ago. 2024.

BRASIL. **Resolução nº 466, de 12 de dezembro de 2012**. [S.l.: s.n.], 2012. Dispõe sobre diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos. Publicada no Diário Oficial da União, n. 12, p. 59, 13 jun. 2013. Disponível em: https://conselho.saude.gov.br/resolucoes/2012/Reso466.pdf. Acesso em: 13 ago. 2024.

COSTA, Juliana Aparecida Alves da; FERRUZZI, Elaine Cristina. A investigação matemática, como prática pedagógica, favorece a ocorrência do diálogo no ensino de matemática? **REnCiMa: Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 3, p. 303–314, 2020.

COSTA LEITE, Kátia da; MILHORANÇA, André Luiz Ferreira; MAGNUS, Maria Carolina Machado; SANTOS, Carla Margarete Ferreira dos; PEIXOTO, Ian Ronsoni; SILVA COIMBRA, Miguel Angelo da; SANTOS, Victor Danilo Reis. Educação matemática crítica e a modelagem matemática como possibilidades para pensar a interculturalidade. **Revista Sândalo**, Díli, v. 1, 2024.

ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA PROFESSOR LAÉRCIO CALDEIRA DE ANDRADA (EEBLCA). **Projeto Político Pedagógico**. Rua Altamiro Di Bernardi, 561, Campinas, São José, Santa Catarina: [s.n.], 2025. Documento que orienta as ações e decisões da escola, elaborado de forma coletiva, para assegurar que o processo educacional esteja alinhado com as necessidades e expectativas de todos os envolvidos.

FERREIRA, Roberto Lúcio; LOPES, Thiago Beirigo. Ensino de Estatística no Ensino Médio com base na Resolução de Problemas sob a perspectiva da Educação Matemática Crítica. **JIEEM - Journal of the International Education in Mathematics**, v. 17, n. 3, p. 334–343, 2024.

FRANZONI, Patrícia da Graça Rocha; QUARTIERI, Marli Teresinha. Investigação matemática e educação financeira em um curso de licenciatura em Matemática. **Educação em Revista**, v. 21, n. 1, p. 129–148, 2020.

FRATUCCI, Vinícius Murilo; MORAN, Mariana; AMORIM NEVES, Eduardo de; FERRAIOL, Thiago Fanelli. TIME em ação: Teoria e Investigação em Matemática Elementar. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 6, n. 1, p. 1–14, 2020.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Apresentação dos Resultados do IDEB 2023**. [S.l.: s.n.], 2023. `https://download.inep.gov.br/ideb/apresentacao_ideb_2023.pdf`. Acesso em: 26 maio 2025.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Divulgados os resultados do PISA 2022**. Acesso em: 26 maio 2025. Portal Gov.br. Dez. 2023. Disponível em: `https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022`.

JAMES, Barry R. **Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário**. 5. ed. Rio de Janeiro, Brasil: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2023. (Projeto Euclides). ISBN 978-85-244-0455-9.

KUHN, Malcus Cassiano. Dificuldades de Aprendizagem em Matemática: percepções de professores do Ensino Médio de uma escola estadual do Rio Grande do Sul. **Perspectiva da Educação Matemática**, v. 13, n. 32, 2020.

MACHADO, Benedito Edson Cardoso; LACERDA, Alan Gonçalves. A comunicação matemática por meio das tarefas de investigação: caminhos alternativos para o ensino e aprendizagem de matemática. **Revista Tangram**, v. 4, n. 4, p. 163–181, 2021.

MARIANI, Mateus; QUARTIERI, Marli Teresinha. Interpretação cartográfica associada à investigação matemática: possibilidade de fomentar a escrita e o ensino de conceitos matemáticos. **REnCiMa: Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 5, p. 151–170, 2019.

MUSMANNO, Leonardo Maricato; SOUSA, Sérgio Gonçalves de; ALMEIDA, Moisés Ceni de; SILVA MACHADO, Leandro da. Educação matemática crítica e uso de tecnologias: cenários para investigação com o jogo da corrida de cavalos. **REnCiMa: Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1–24, 2021.

NASCIMENTO, Rosimiro Araújo do; QUARTIERI, Marli Teresinha. Investigação Matemática: Possibilidade para o Ensino de Função Polinomial do 1º Grau. **JIEEM: Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, n. 2, p. 133–144, 2020.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas em sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020.

SÁ, Lauro Chagas e; MILLI, Elcio Pasolini; CHIABAI, Ícaro. Uma experiência de Educação Matemática Crítica com alunos do Ensino Médio a partir da tabela nutricional de alimentos. **RPEM - Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 10, n. 22, p. 516–530, 2021.

SANTA CATARINA, Governo de. **Currículo Base do Ensino Médio do Território Catarinense**: Caderno 2 – Formação Geral Básica. Florianópolis: SED/SC, 2020. Secretaria de Estado da Educação.

SANTOS, Renan Pereira; CAMARGO SANT'ANA, Claudinei de; SANT'ANA, Irani Parolin. Estudo exploratório sobre a produção de vídeo com Resolução de Problemas e do papel da Educação Matemática Crítica. **Revista de Educação Matemática (REMat)**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática Regional São Paulo (SBEM-SP), São Paulo, v. 23, p. 1–25, 2024.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DE SANTA CATARINA. **Portaria n° 874 de 01 de abril de 2025**. [S.l.*:* s.n.], abr. 2025. `https://www.diariooficial.sc.gov.br`. Regulamenta os procedimentos e registros da Avaliação da Aprendizagem da Educação Básica e Profissional da Rede Pública Estadual de Santa Catarina.

SHAUGHNESSY, J. Michael. Research in probability and statistics: Reflections and directions. In*:* GROUWS, Douglas A. (ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan Publishing, 1992. p. 465–494.

SILVA, Ana Paula Bezerra da; OLIVEIRA, Maria Marly de. A sequência didática interativa como proposta para formação de professores de matemática. **VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências**, Florianópolis, 2009.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Tradução: Jonei Cerqueira Barbosa. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, UNESP, Rio Claro, SP, v. 13, n. 14, p. 45–70, 2000.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001. (Perspectivas em Educação Matemática).

SKOVSMOSE, Ole. **Um convite à educação matemática crítica**. Campinas, SP: Papirus, 2014. (Perspectivas em Educação Matemática).

SOUSA, Anna Karol Moura de; VENTURA, Paula Patrícia Barbosa. Dificuldades de aprendizagem cognitivas em Matemática: estudo de caso com professor do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – campus Canindé. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 6, n. 3, p. 490–507, 2022.

WICHNOSKI, Paulo. Uma entrevista com João Pedro da Ponte sobre a investigação matemática na Educação Matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Universidade Estadual do Paraná, Campus Campo Mourão, Campo Mourão, PR, Brasil, v. 11, n. 24, p. 8–14, jan. 2022. Acesso em: 26 maio 2025.

WIKIPÉDIA, A ENCICLOPÉDIA LIVRE. **Fortune Tiger**. [S.l.: s.n.], 2024. `https://pt.wikipedia.org/wiki/Fortune_Tiger`. Acessado em: 9 jun. 2025.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1. **IDENTIFICAÇÃO**

   Escola: E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada

   Município: São José, SC

   Componente Curricular: Matemática **Professor**: André Milhorança

   Série: 2ª **Nível**: Ensino Médio

   Tempo estimado: 5 horas aula

2. **TEMA**

   Conteúdo: Probabilidade e Estatística

3. **JUSTIFICATIVA**

   A probabilidade tem figurado cada vez mais em nosso cotidiano: controle de qualidade; seguros; dados relativos a nascimentos e expectativa de vida, entre outros. Além disso, os princípios probabilísticos têm se tornado instrumento de trabalho para muitas áreas do conhecimento. Muitos fenômenos são tratados matematicamente mediante simulações aleatórias, como por exemplo na modelagem de condições meteorológicas em situações de crise climática.

   O grande desafio que se enfrenta ao introduzir esse conteúdo na matemática escolar é romper com a visão determinista que essa disciplina constrói. Sem dúvida, trata-se de um tema difícil de aprender e de ensinar. Lidar com o acaso não é tarefa simples nem intuitiva. Dessa forma, se faz necessário colocar os estudantes em situações de tomada de decisão a fim de reconhecerem seu sistema de crenças pessoais e a influência de seus contextos nesse processo.

4. **OBJETIVOS**

   a) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos;

   b) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades;

   c) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro, etc.).

5. **MATERIAIS E MÉTODOS**

O conteúdo será abordado através de aulas investigativas, utilizando a metodologia das investigações matemáticas. Sendo assim, os alunos serão organizados em pequenos grupos espontâneos, conforme a afinidade entre os integrantes das turmas, para participarem das atividades investigativas em Matemática. Inicialmente, o professor fará uma exposição acerca da natureza das atividades investigativas para, em seguida, fazer o reconhecimento da situação a ser trabalhada, a sua exploração preliminar e a formulação de questões.

Os alunos receberão material de escrita próprio, disponibilizado pelo professor, para o desenvolvimento da atividade. Além disso, podem utilizar seus próprios cadernos para fazer as anotações e, para a exposição das conclusões de cada grupo, eles poderão utilizar da lousa. Após a socialização dos resultados e discussões de cada grupo, um espaço de debate será aberto com o objetivo de trabalhar a argumentação matemática e embate dos possíveis erros que possam aparecer durante os testes das conjecturas levantadas pelos alunos. Por fim, os alunos serão convidados a tecerem comentários sobre o formato da aula investigativa, destacando os pontos positivos e pontos negativos, com base em suas percepções, para as suas aprendizagens. Tendo concluído esse processo, o professor realiza um feedback dessa abordagem para melhorias e aplicações futuras.

6. **PROCEDIMENTOS**

1ª aula: Fenômenos aleatórios e Historização

O início da problematização pode se dar com a exploração de fenômenos aleatórios, isto é, fenômenos ou experimentos que estão submetidos à aleatoriedade, reforçando a noção de que, mesmo que se conheçam os possíveis resultados, não são determinísticos. Como exemplos, podem ser citados o lançamento de uma moeda, o lançamento de um dado, os jogos de loteria, entre outros.

Nesse contexto, pode-se realizar um diálogo com os estudantes sobre quais fatores podem ser considerados quando desejamos determinar as chances de um determinado fenômeno aleatório acontecer. É importante que o professor tenha em mente que o estudo matemático das probabilidades estabelece relação com a estatística na utilização de técnicas analíticas para realizar projeções de ocorrências de eventos. Com base nos estudos de Shaughnessy (1992) é possível identificar a presença de quatro concepções de probabilidade:

I) Concepção clássica ou laplaciana de probabilidade: trata-se de uma definição apresentada por Laplace, em 1812: define-se probabilidade como a razão entre números de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que todos os resultados sejam igualmente prováveis;

II) Concepção frequentista ou empírica de probabilidade: a probabilidade emerge de uma experimentação – “probabilidade a posteriori”, ou seja, a probabilidade é calculada depois de experimentos terem sidos realizados. As teorias frequentistas consideram probabilidades a serem atribuídas baseadas no comportamento a longo prazo dos resultados aleatórios;

III) Concepção subjetivista de probabilidade: as probabilidades expressam grau de crença ou percepção pessoal; ela fica centrada no sujeito;

IV) Concepção axiomática ou formal: trata-se da concepção vigente atualmente e se apoia na teoria de conjuntos, contrapondo-se à concepção clássica. É um conceito definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos deles.

A probabilidade, juntamente com a estatística, compõe uma das unidades temáticas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Segundo o documento, o objetivo maior é que os alunos compreendam que nem todos os fenômenos são determinísticos; para isso, é necessário dar aos alunos a possibilidade de experimentar, explorar, discutir, trocar ideias, argumentar, dizer como estão pensando, quais julgamentos fazem sobre a ocorrência de determinado evento, contrastem o que poderia ter acontecido e não aconteceu, etc.

2ª aula: Introdução da tarefa investigativa

Iniciaremos a aula conversando sobre situações do cotidiano em que é possível encontrar o uso de probabilidade e / ou previsões numéricas. Espera-se que os estudantes citem a previsão meteorológica, os jogos de apostas, os resultados dos times que torcem, entre outros.

Após esse primeiro momento, adentraremos o contexto da Gincana Esportiva, prática anual na E.E.B. Laércio Caldeira de Andrada. Os alunos se organizarão em grupos espontâneos de 2 a 5 integrantes, que seguirão até o final das atividades investigativas, e compartilharão suas memórias e experiências sobre a participação na gincana, bem como os resultados, buscando verificar a mobilização de conhecimentos de matemática acerca desses resultados.

O arranque da atividade investigativa se apoiará nas vivências da Gincana Esportiva com o objetivo de matematizar os chaveamentos das modalidades esportivas, feito a partir de sorteio das turmas, e efetivar cálculos de probabilidade acerca dos jogos. O material será entregue de forma impressa aos estudantes, não dispensando uma pequena introdução oral por parte do professor, garantindo que os alunos compreendam o que significa investigar.

ARRANQUE DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Procure construir um chaveamento sorteando as equipes abaixo para disputas na modalidade “mata-mata”.

Turmas 100, 101, 102, 103, 104
Turmas 200, 201, 202, 203, 204
Turmas 300, 301, 302, 303, 304

Registre os resultados obtidos e determine as possibilidades e probabilidades de sua turma se tornar campeã de uma modalidade.

Para verificar se os alunos entenderam a atividade investigativa serão tiradas as possíveis dúvidas iniciais levantadas pelos grupos de trabalho, buscando destacar que não se trata de responder uma questão bem delimitada. Importante destacar que os grupos se empenharão em formular questões com base na situação que lhes é apresentada.

3ª aula: Desenvolvimento das investigações

Retomaremos a atividade investigativa realizando os sorteios para formação do chaveamento a partir das equipes do Ensino Médio que disputarão a Gincana Esportiva no ano de 2025. Cada grupo poderá decidir a maneira como realizar o sorteio das equipes e como arranjá-las no chaveamento das disputas que acontecerão na modalidade conhecida como “mata-mata”. Mais uma vez será assegurado a compreensão dos alunos acerca da atividade que se irá realizar e o professor passará a assumir papel de moderador das investigações.

Durante as passagens do professor pelos grupos, será observada e incentivada a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas. Será garantido que os grupos levem o tempo que precisar para se familizarem com os dados e se apropriarem mais efetivamente do sentido da tarefa investigativa.

Serão observados os registros por escrito e os diálogos buscando identificar como os grupos geram seus dados e os organizam para, então, formular suas questões. A noção de aleatoriedade deve ser reforçada à medida que percebem os diferentes chaveamentos possíveis que podem ser gerados a partir das equipes disponíveis, mobilizando a contagem das possibilidades e buscando conhecer também a noção de espaço amostral.

4ª aula: Justificação das conjecturas e discussão dos resultados obtidos

Dando continuidade às investigações e a formulação de conjecturas, nessa aula buscaremos analisar a mobilização dos conhecimentos no teste dessas conjecturas. O trabalho indutivo realizado pelos grupos será incentivado a ser transformado em registro escrito a ser motivado pelo professor moderador que continua a caminhar e observar o desenvolvimento dos alunos. Cabe-lhe colocar questões aos alunos que os estimulem a olhar em outras direções e os façam refletir sobre aquilo que estão fazendo.

Esses elementos escritos são fundamentais para o momento da discussão posterior dos resultados como forma de organização das ideias e seus resultados. Espera-se que os grupos de alunos tenham avançado com os chaveamentos, sendo capazes de observar como as equipes que disputam a Gincana Esportiva avançam nas fases conforme os resultados das partidas.

A essa altura da atividade investigativa, espera-se que os grupos sejam capazes de elaborar e resolver problemas que envolvem o cálculo de probabilidade em eventos. Pretende-se retomar a discussão sobre a noção de aleatoriedade e de determinismo em situações de probabilidade, mais específico, no contexto da Gincana Esportiva.

A justificação das conjecturas é imprescindível para o processo investigativo, em que o professor colocará o caráter provisório das conjecturas introduzindo a ideia de prova matemática, podendo fazer comentários das modalidades já conhecidas. A principal motivação nesse momento da investigação será perceber a necessidade de os grupos justificarem matematicamente as suas afirmações.

No final de uma investigação, é importante construir um momento de partilha de conhecimento em que os grupos devem socializar os seus resultados obtidos. O principal objetivo dessa etapa é confrontar as estratégias, conjecturas e justificações utilizadas pelos grupos, em que o professor desempenha um papel de moderador dos possíveis conflitos.

Será o momento em que o professor é capaz de fazer uma sistematização dos conhecimentos levantados, destacando a importância dessa fase de discussão para o desenvolvimento da capacidade de comunicar-se matematicamente. Como o professor terá noção do trabalho realizado por cada um dos grupos, pode estabelecer uma ordem de socialização dos resultados obtidos por eles, de modo que a discussão dos trabalhos não seja repetitiva, mas permita uma consolidação dos objetivos listados nessa sequência didática.

5ª aula: Avaliação colaborativa

Conforme a metodologia adotada para as investigações matemáticas, a avaliação se dará através da escrita de relatórios pelos grupos de alunos e da observação informal, pelo professor. Se a escrita de relatórios não é comum aos estudantes, é importante a construção de um roteiro para sua elaboração, explicitando o que se é pretendido e como será avaliado.

Nas instruções para a escrita dos relatórios, serão colocadas a necessidade de descrever, de maneira detalhada, os passos que o grupo seguiu para explorar a tarefa que lhe foi proposta, podendo lançar mão de escritos, desenhos, tabelas, esquemas e o que for conveniente, desde que de forma organizada. Além disso, será cobrado o registro de um resumo do que o grupo considera ter aprendido após a realização da investigação matemática, bem como, um comentário geral em relação a tudo o que fizeram.

ROTEIRO PARA A ESCRITA DO RELATÓRIO

Embora a organização de um relatório possa ser uma tarefa em que tenha inicialmente algumas dificuldades, penso que ele pode ajudá-lo, por exemplo, a compreender melhor os vários assuntos tratados nas aulas e a desenvolver a capacidade de comunicar por escrito o trabalho que realizou.
Um relatório deve incluir uma descrição o mais detalhada possível do trabalhou que realizou e pode ser organizado da seguinte forma:

- Identificação do grupo, com nome dos integrantes e turma;
- Título;
- Objetivo do trabalho incluindo as questões iniciais;
- Descrição do processo de investigação (incluindo tabelas e/ou esquemas, esboços de gráficos, organização dos dados recolhidos...), das tentativas realizadas e das dificuldades encontradas;
- Conclusões;
- Autocrítica da intervenção do grupo no trabalho.

Tente descrever os passos que seguiu para explorar a tarefa que lhe foi proposta. Procure explicá-los de uma forma clara e organizada. Registre todos os valores com que trabalhou e, nos casos em que tal se mostre adequado, não hesite em apresentar desenhos, tabelas e esquemas.

Para avaliação dos relatórios será feita uma análise qualitativa buscando identificar se os grupos atendem aos objetivos colocados para essa atividade investigativa.

7. **CONCLUSÃO**

Ao final do processo de investigações matemáticas acerca da probabilidade em uma Gincana Esportiva, o professor revisará as principais potencialidades e fragilidades dessa metodologia escolhida para abordagem desse assunto específico.

Deseja-se ter atendido as habilidades previstas pela BNCC para o objeto de conhecimento da probabilidade e estatística no que tange às habilidades de identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, o cálculo de suas possibilidades para resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos e situações apresentadas. Com isso, desenvolver a habilidade de identificar situações da vida cotidiana nas quais podem considerar riscos probabilísticos para tomar decisões e fazer escolhas.