

Fun element



**no contexto regional
paraense**

**JOSÉ FLORES SANTOS
RÚBIA G. NASCIMENTO**

JOSÉ FLORES SANTOS
RÚBIA G. NASCIMENTO



Querido(a) Professor(a),

Este produto educacional é parte integrante da dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Pará (UFPA), intitulada Funções Elementares no Ensino Médio: uma abordagem matemática baseada no contexto local dos alunos paraenses, do autor Prof. Me. José Flores Santos, sob a orientação da Prof.^a Dra. Rubia Gonçalves Nascimento.

O presente e-book tem por finalidade propor uma abordagem didática centrada na contextualização do ensino das funções elementares — afim, quadrática, exponencial e logarítmica — a partir de situações-problema que fazem referência direta ao cotidiano dos estudantes do estado do Pará. A proposta fundamenta-se na premissa de que a aprendizagem em Matemática pode ser potencializada quando os conteúdos escolares dialogam com a realidade sociocultural dos educandos, promovendo o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia intelectual.

A estrutura do material contempla atividades que priorizam a aplicação dos conceitos matemáticos em contextos reais e significativos, abordando noções fundamentais de cada função trabalhada. Além disso, este material não se propõe a oferecer uma abordagem teórica exaustiva nem aprofundar-se em demonstrações matemáticas formais. O foco recai sobre a aplicação dos conhecimentos em situações contextualizadas, incentivando a resolução de problemas que se aproximam da realidade dos alunos e que exigem a mobilização de conceitos fundamentais das funções elementares.

A utilização deste produto é recomendada ao final do 1º ano do Ensino Médio, como forma de consolidação dos conteúdos relacionados às funções, podendo também ser empregado no 3º ano, em caráter de revisão para exames de acesso ao ensino superior. Além disso, espera-se que este e-book contribua como material de apoio pedagógico para professores de Matemática do Estado do Pará e de regiões adjacentes, fomentando práticas docentes que valorizem a contextualização local e a integração entre conhecimento matemático e realidade sociocultural dos estudantes.

Dessa forma, almeja-se que o presente material contribua para o fortalecimento de uma prática educativa mais significativa, inclusiva e comprometida com a valorização da identidade regional no ensino de Matemática.

Com carinho,

José Flores Santos.



Sumário

1	Introdução	4
2	Função Afim	8
2.1	A Função Afim	8
2.2	Gráfico da Função Afim	10
2.3	Coefficientes da Função Afim	11
2.4	Função Afim e Progressão Aritmética	13
2.5	Problemas	18
3	Função Quadrática	22
3.1	A Função Quadrática	22
3.2	Gráfico da Função Quadrática	23
3.3	Função Quadrática e Progressão Aritmética	28
3.4	Problemas	31
4	Função Exponencial	35
4.1	A Função Exponencial	35
4.2	Gráfico da Função Exponencial	36
4.3	Função Exponencial e Progressão Geométrica	39
4.4	Problemas	42
5	Função Logarítmica	47
5.1	Logaritmos	47
5.2	A Função Logarítmica	50
5.3	Gráfico da Função Logarítmica	51
5.4	Problemas	54
6	Resoluções dos Problemas	57
7	Referências Bibliográficas	67



1 Introdução

No Ensino Médio, os estudantes passam a conhecer as funções reais, com ênfase nas funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Esse estudo não pode ser desenvolvido de modo isolado, pois essas funções desempenham um papel fundamental nas ciências exatas, naturais e sociais. Entretanto, a realidade do ensino desse e de outros conteúdos matemáticos ainda se apresenta como um grande desafio em diversas regiões do Brasil.

Essa situação é ainda mais acentuada na Região Norte, que inclui o Estado do Pará, onde os índices educacionais são historicamente baixos. Diante desse cenário, este e-book foi elaborado para oferecer atividades contextualizadas que dialogam diretamente com a realidade regional dos estudantes paraenses, buscando contribuir para uma aprendizagem significativa e crítica, alinhada às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e aos princípios da Educação Matemática contemporânea.

Este e-book tem como objetivo apresentar problemas contextualizados envolvendo funções matemáticas, com ênfase na realidade regional paraense. Pretende-se que, por meio dessas situações, os estudantes reconheçam a presença e a importância das funções em seu cotidiano, desenvolvendo uma visão mais significativa e aplicada dos conteúdos matemáticos. Além disso, o material busca contribuir com o trabalho de professores do Estado do Pará e de regiões adjacentes, oferecendo subsídios didáticos que valorizam a cultura e os contextos locais.

Do ponto de vista conceitual, uma **função** pode ser entendida como uma relação que associa, a cada elemento de um conjunto A (domínio), exatamente um único elemento de um conjunto B (contradomínio), representada simbolicamente por $f : A \rightarrow B$, onde $x \mapsto f(x)$. No contexto escolar, é essencial que o professor esclareça qual é o domínio considerado em cada aplicação. Na maioria das situações práticas, especialmente em problemas com contagem ou etapas discretas, o domínio é formado por números naturais. Em outros casos, como aqueles que envolvem medições ou taxas, o domínio pode estar nos racionais ou mesmo nos reais. Destacar esse aspecto ajuda os estudantes a interpretar adequadamente o modelo matemático proposto e a compreender suas limitações.

O e-book está organizado em capítulos que abordam diferentes tipos de funções matemáticas:

- **Capítulo 2** — Função Afim;
- **Capítulo 3** — Função Quadrática;
- **Capítulo 4** — Função Exponencial;
- **Capítulo 5** — Função Logarítmica;
- **Capítulo 6** — Resoluções dos Problemas.

Cada capítulo, do 2 ao 5, apresenta uma breve fundamentação teórica, iniciando com uma motivação baseada na aplicação da função em uma situação regional, seguida



pelas definições dos principais conceitos, exemplos contextualizados e resoluções detalhadas. Ao final de cada capítulo, há uma seção dedicada a problemas contextualizados, cujas resoluções comentadas estão reunidas no Capítulo 6.

Este e-book foi concebido para ser utilizado de maneira flexível pelo professor, podendo ser incorporado de diferentes formas ao planejamento pedagógico:

- Como material de apoio para introdução ou aprofundamento dos conteúdos de funções;
- Para aplicação em atividades em sala de aula, seja em trabalhos individuais, em duplas ou em grupos;
- Como base para projetos interdisciplinares, integrando Matemática com temas regionais e culturais;
- Como material de reforço ou revisão para preparação para exames, como o ENEM;
- Para promover discussões e reflexões sobre a aplicação da Matemática em contextos reais e regionais.

Sugere-se que o professor estimule a participação ativa dos estudantes, propondo que analisem, discutam e construam soluções para as situações-problema apresentadas, desenvolvendo assim habilidades de pensamento crítico e autonomia intelectual.

Para contribuir ainda mais com o trabalho docente, cada capítulo indica as competências e habilidades da BNCC desenvolvidas ao longo das atividades propostas. A seguir, apresenta-se a descrição completa de todas elas, de modo a facilitar a consulta e dispensar a necessidade de recorrer a outros materiais para compreender o significado de cada habilidade.

Competências gerais da BNCC:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.



Competências específicas de Matemática:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Código	Descrição da Habilidade
EM13MAT101	Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT302	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT304	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
EM13MAT305	Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
EM13MAT401	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
EM13MAT402	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.



Código	Descrição da Habilidade
EM13MAT403	Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
EM13MAT501	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
EM13MAT502	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
EM13MAT503	Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT507	Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
EM13MAT508	Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.



2 Função Afim

A BNCC NESTE CAPÍTULO

Competências gerais da BNCC: 1, 2 e 4.

Competências específicas de Matemática: 1, 3, 4 e 5.

Habilidades de Matemática:
EM13MAT101
EM13MAT302
EM13MAT401
EM13MAT501
EM13MAT507

2.1 A Função Afim

O açaí é uma fruta abundante no Norte do Brasil, e sua presença na alimentação dos nortistas é marcante. Em muitas cidades, especialmente no Pará, o vinho do açaí é parte essencial das refeições diárias em muitas famílias paraenses. O consumo dessa iguaria é tão tradicional que sua venda acontece dia e noite em diversos estabelecimentos conhecidos como “vitaminosas”, ou para os mais antigos, “baiúcas de açaí”.

O preço do açaí varia diariamente em função da safra, das condições climáticas e da demanda do mercado. O valor pode oscilar entre R\$ 10,00 e R\$ 40,00 por litro, e ainda assim, permanece um item indispensável na mesa de muitas famílias, independentemente do preço.



Açaí, prato indispensável na mesa paraense^a

Suponha que uma empresa de açaí trabalhe exclusivamente com *delivery* e opere em uma cidade pequena. Como a cidade é compacta, aplica-se uma taxa fixa de entrega no valor de R\$ 2,00. Considere ainda que, em determinado dia, o preço do açaí estava fixado em R\$ 10,00 por litro.

Com base nessas informações, vamos analisar a tabela que relaciona a quantidade de litros de açaí solicitados ao valor total pago, já incluindo a taxa de entrega.

^aFonte: Universidade Federal do Pará (2017).



Litros (x)	Preço a pagar (y)
1	12,00
2	22,00
3	32,00
4	42,00

Ao calcular o valor a ser pago em cada compra, notamos que seguimos um padrão:

- Primeiro, multiplicamos a quantidade de litros de açaí (x) pelo preço unitário de R\$ 10,00.
- Depois, somamos a taxa fixa de entrega de R\$ 2,00.

Assim, podemos escrever a expressão que fornece o preço y a ser pago em função do número x de litros de açaí da seguinte forma:

$$y = 10x + 2.$$

Nessa equação:

- O valor R\$ 10,00 representa a **taxa de variação**, pois é o preço por litro que faz variar o valor total da compra.
- O valor R\$ 2,00 corresponde a um **valor fixo**, pois a taxa de entrega não muda independentemente da quantidade de açaí comprada.

A expressão acima representa uma função afim, como veremos a seguir.

Definição

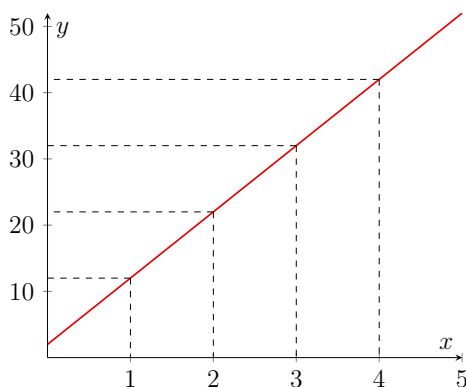
Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

No exemplo do açaí, a função $y = 10x + 2$ é uma função afim, pois segue o formato $y = ax + b$, onde:

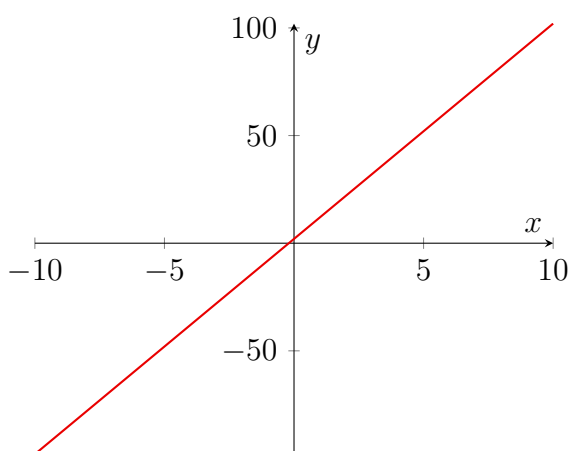
- $a = 10$ (taxa de variação).
- $b = 2$ (valor fixo ou valor inicial).

É claro que na situação desenvolvida, convém concluir que x só assumiria os valores do conjunto $\{0, 5; 1; 1, 5; 2; 2, 5; \dots\}$, e obviamente seria um conjunto finito, pois não faz sentido imaginar que um só cliente compraria 100 litros de açaí. Na verdade, é ilógico supor que alguém compraria 20 litros de açaí com uma taxa de entrega tão pequena (para a empresa, não seria vantajoso).

O gráfico da situação descrita seria tal que:



Mas, visando apenas a função $y = 10x + 2$, sem pensar no contexto, temos o gráfico:



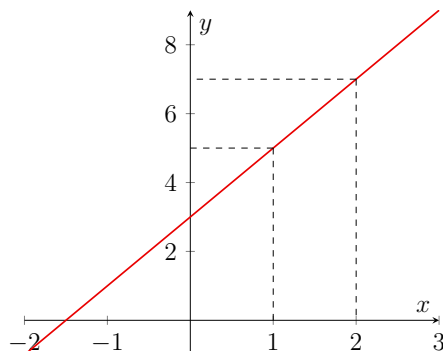
Graficamente, nota-se que uma função afim associa todo elemento x de $\mathbb{R}$ a um único elemento y de $\mathbb{R}$.

2.2 Gráfico da Função Afim

O gráfico da função afim é uma reta e, para construir, basta conhecer dois pontos que pertencem a essa reta. Por exemplo, vamos construir o gráfico da função $y = 2x + 3$. Primeiramente, podemos escolher quaisquer dois ou mais valores para x e calcular o valor de y a partir deles.

x	y	Ponto (x, y)
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$	$(1, 5)$
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$	$(2, 7)$

Agora, marcamos os pontos obtidos no plano cartesiano e traçamos a reta que passa por esses pontos.



Perceba que a reta intersecta o eixo das ordenadas em $y = 3$, justamente o valor de b da função afim. Isso sempre acontece, pois $f(0) = b$. Logo, a reta da função toca no eixo dos y em $(0, b)$.

E em qual ponto a reta intercepta o eixo das abscissas? Basta calcular a raiz da função, fazendo $f(x) = 0$.

No caso do exemplo, temos:

$$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

2.3 Coeficientes da Função Afim

Em alguns problemas envolvendo função afim, é possível identificar tanto o valor fixo b (ou valor inicial) quanto a taxa de variação a de maneira imediata, como se pode observar no exemplo inicial deste capítulo. Mas, quando esses coeficientes não estiverem explícitos no problema, nem graficamente, podemos utilizar uma fórmula para obter a taxa de variação.

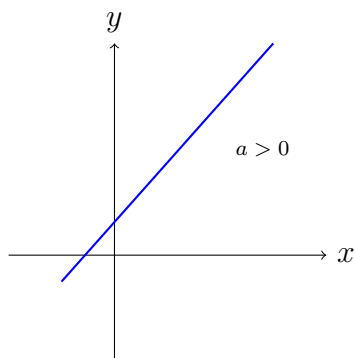
Dados dois pontos distintos, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , sabemos que $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$. Donde:

$$y_1 - y_2 = ax_1 + b - (ax_2 + b) \Leftrightarrow$$

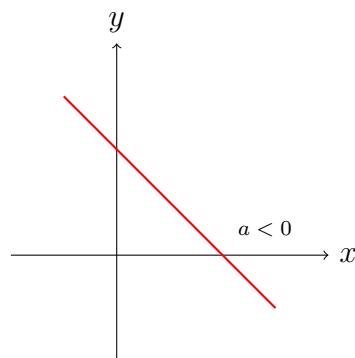
$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Quando a é positivo, o gráfico da função é crescente, e quando a é negativo, o gráfico da função é decrescente.



Função Afim Crescente



Função Afim Decrescente



Exemplo 2.1

Em uma escola no interior do Pará, é utilizada uma caixa d'água para o armazenamento e distribuição de água para alunos e funcionários. O diretor da escola percebeu que havia um vazamento e reservou um sábado para verificar a situação com mais calma. Como não havia movimento na escola nesse dia, foi possível observar que a quantidade de água na caixa estava diminuindo de forma constante com o tempo, sem consumo por parte de ninguém — ou seja, a única causa da redução era o vazamento.



Escola no interior do Pará^a

Após monitoramento, observou-se que, 3 horas depois de a caixa estar completamente cheia, restavam 760 litros de água. Após 7 horas, o volume havia diminuído para 600 litros. Supondo que essa perda continue ocorrendo de forma linear, responda:

- Qual era o volume de água na caixa quando ela estava cheia?
- Em quanto tempo, a partir do momento em que estava cheia, a caixa estará completamente vazia?

^aFonte: Acervo pessoal do autor.

Solução: No problema, podemos concluir que há um valor inicial (b), que é a capacidade total da caixa d'água, em litros. Há também uma vazão constante, que podemos interpretar como uma taxa de decrescimento a . Não obstante, o problema revela que a perda de água ocorre de forma linear. Logo, podemos inferir que temos uma função da forma:

$$V(t) = at + b,$$

em que V é o volume de água restante, e t o tempo, em horas.

Como temos uma relação entre o tempo e a quantidade de água restante, lemos as informações dadas como dois pares ordenados, isto é, $(3, 760)$ e $(7, 600)$. Donde:

$$a = \frac{760 - 600}{3 - 7} = -40.$$

Então a função é da forma $V(t) = -40t + b$. E escolhendo o primeiro par ordenado, obtemos o valor de b :

$$-40 \cdot 3 + b = 760 \Leftrightarrow b = 760 + 120 = 880.$$



Portanto, a função $V(t)$ que expressa o volume de água (em litros) na caixa em função do tempo t , em horas, desde o momento em que a caixa estava cheia é:

$$V(t) = 880 - 40t.$$

Logo:

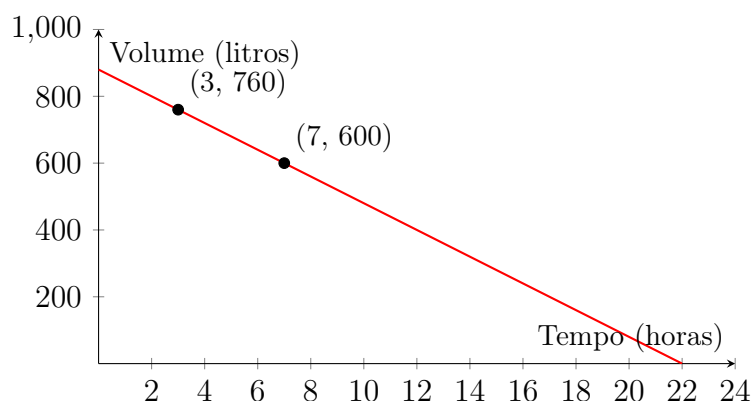
a) O volume inicial de água é $b = 880$.

b) A caixa estará completamente vazia no instante t que satisfaz a equação

$$880 - 40t = 0 \Leftrightarrow t = 22.$$

Isto é, após 22 horas, se não houver interferência externa.

Veja como é interessante perceber que, em uma situação comum do cotidiano, foi necessário trabalhar com números negativos. A taxa de variação é negativa, o que podemos chamar de taxa de decrescimento. O gráfico a seguir mostra a quantidade de água presente na caixa em função do tempo decorrido. De fato, faz muito sentido que, quando $a < 0$, o gráfico de uma função afim seja decrescente.



2.4 Função Afim e Progressão Aritmética

Há uma importante propriedade da função afim que a relaciona diretamente com a progressão aritmética (PA). Essa conexão é bastante útil tanto para identificar funções afins quanto para analisar seu comportamento. Antes de enunciar essa propriedade formalmente, vamos relembrar brevemente o conceito de progressão aritmética.

Definição

Progressão Aritmética (PA) é toda sequência em que a diferença entre termos consecutivos é constante. A essa diferença constante denominamos *razão* r da progressão.

Exemplo 2.2

As sequências abaixo são todas PA.

- $(2, 5, 8, 11, \dots)$, cuja razão é $r = 3$;
- $(10, 15, 20, 25, \dots)$, cuja razão é $r = 5$;
- $(8, 6, 4, 2, \dots)$, cuja razão é $r = -2$.



Uma PA pode representar diversas situações reais, como parcelas de um pagamento constante, acréscimos de quantidade em intervalos regulares ou até reduções sucessivas em processos de desgaste ou consumo. Funções afins conseguem representar matematicamente esse tipo de comportamento com bastante precisão.

A seguir, apresentamos um resultado teórico que estabelece a equivalência entre funções afins e transformações de progressões aritméticas:

Função Afim $\times$ Progressão Aritmética

Uma função monótona $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, x_3, \dots$ numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \dots$ se, e somente se, f é uma função afim.

A demonstração desse teorema encontra-se no livro *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. Esse resultado é valioso porque permite que se reconheça uma função afim observando o comportamento de seus valores para entradas igualmente espaçadas (isto é, em PA).

Dessa forma, para identificar uma função afim a partir de uma tabela de valores ou situação contextualizada, podemos verificar se, à medida que a variável independente avança em PA, os valores da variável dependente também formam uma PA. Essa é uma característica marcante das funções afins e pode ser explorada de forma intuitiva em muitos problemas do cotidiano.

Exemplo 2.3

Antônio aluga bicicletas para passeios na orla da cidade. O preço do aluguel varia de acordo com o tempo de uso, sendo o mínimo permitido de 10 minutos. A tabela abaixo apresenta alguns desses valores:

Tempo (minutos)	Preço (reais)
10	15
12	19
14	23



Fonte: parquedoutinga.com.br

Determine a expressão matemática que relaciona o preço y , em reais, ao tempo de uso t , em minutos.

Solução: Note que o enunciado do problema não revela que a função é do tipo afim. Então como poderíamos concluir que a expressão requerida é da forma $y(t) = a \cdot t + b$? Perceba que o tempo está expresso em PA (10, 12, 14) enquanto o preço também está em PA (15, 19, 23). Logo, pelo teorema anterior, podemos afirmar que a expressão que fornece o preço em função do tempo é uma função afim.

Agora, sabendo que temos uma função afim, vamos determinar os coeficientes a e b da função. Tomando dois pares ordenados dados (10, 15) e (12, 19), calculemos a taxa



de variação:

$$a = \frac{19 - 15}{12 - 10} = \frac{4}{2} = 2.$$

Tomando novamente o par ordenado $(10, 15)$ e $a = 2$, temos a expressão:

$$y(t) = at + b \Leftrightarrow 15 = 10 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = -5.$$

Logo, a expressão que relaciona o preço y , em reais, ao tempo t , em minutos, é:

$$y = 2t - 5.$$

Exemplo 2.4

(Enem 2020 - Adaptada) No Brasil, o tempo necessário para um estudante realizar sua formação até a diplomação em um curso superior, considerando os 9 anos de ensino fundamental, os 3 anos do ensino médio e os 4 anos de graduação, é de 16 anos.

Entretanto, a realidade dos brasileiros na Região Norte mostra que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos é ainda muito pequeno, conforme a tabela:

Tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos				
Ano da Pesquisa	1995	1999	2003	2007
Tempo de estudo (em anos)	4,9	5,6	6,3	7,0

Considere que o incremento no tempo de estudo, a cada período, para essas pessoas, se mantenha constante até o ano 2050, e que se pretenda chegar ao patamar de 70% do tempo necessário à obtenção do curso superior dado anteriormente.

O ano em que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos da Região Norte atingirá o percentual pretendido será

- a) 2018.
- b) 2023.
- c) 2031.
- d) 2035.
- e) 2043.

Solução: Perceba que tanto o ano de pesquisa quanto o tempo de estudo estão em PA, o que nos garante que temos uma função afim. Então podemos calcular o tempo médio de estudos y em função do ano x por meio da expressão

$$y = ax + b.$$

Para facilitar os cálculos, vamos assumir o ano 2000 como $x = 0$, 2001 como $x = 1$ e assim sucessivamente. Assim, tomando os pontos $(3, 6.3)$ e $(7, 7)$, obtemos o valor de a :

$$a = \frac{7 - 6,3}{7 - 3} = \frac{0,7}{4} = 0,175.$$

Agora, substituindo $a = 0.15$ e as coordenadas do ponto $(7, 7)$ na expressão $y = ax + b$, vem:

$$0,175 \cdot 7 + b = 7 \Leftrightarrow b = 5,775.$$



Logo, a função afim que rege a situação exposta é $y = 0,15x + 5,775$.

O problema requer que calculemos o ano em que y será igual a 70% de 16 anos, isto é, $y = 11,2$. Daí, basta resolver a equação:

$$0,175x + 5,775 = 11,2 \Leftrightarrow 0,15x = 5,25 \Leftrightarrow x \approx 31.$$

Portanto, a resposta é 2031, alternativa c.

Exemplo 2.5

(Enem 2010 - Adaptada) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando talas de miriti para montar figuras, onde cada lado foi representado por uma tala de miriti^a. A quantidade de talas de miriti (T) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.



Paneiro de miriti



Figura I



Figura II



Figura III

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

- a) $C = 4T$
- b) $C = 3T + 1$
- c) $C = 4T - 1$
- d) $C = T + 3$
- e) $C = 4T - 2$

Solução: Perceba que as alternativas da questão mostram que a expressão procurada é da forma de uma função afim. Mas, além disso, podemos confirmar que temos uma função afim ao observar que as figuras 1, 2, e 3 estão respectivamente associadas a uma PA (4, 7, 10).

Deste modo, vamos calcular os valor de a e b que satisfazem a expressão procurada $c = at + b$.

Tomando os pontos (1, 4) e (2, 7), obtemos

$$a = \frac{7 - 4}{2 - 1} = 3.$$

¹A *tala de miriti* é uma parte leve e macia do tronco da palmeira conhecida como miriti ou buriti (*Mauritia flexuosa*), comum na região amazônica. Esse material é tradicionalmente utilizado por artesãos do Pará na confecção de brinquedos, esculturas e objetos decorativos, especialmente durante o Círio de Nazaré.



Daí, tomando novamente o ponto $(1, 4)$:

$$3 \cdot 1 + b = 4 \Leftrightarrow b = 1.$$

Portanto, $c = 3t + 1$, alternativa b.



2.5 Problemas

1. O Sr. José Maria é carpinteiro naval de uma comunidade ribeirinha do Pará que trabalha com barcos e rabetas¹. Ele cobra seus serviços de reparo em embarcações com base em duas partes: um valor fixo referente ao conserto e uma taxa diária de aluguel pelo tempo que a embarcação permanece no seu estaleiro, após o término do serviço.



Estaleiro de rabetas²

Considere que o conserto de uma rabeta custou R\$ 600,00 e que, a cada dia que a embarcação permanece no estaleiro, o Sr. José Maria cobra uma taxa adicional de R\$ 50,00. Nenhuma outra cobrança é feita.

O valor total y , em reais, a ser pago por um cliente cuja embarcação permaneça x dias no estaleiro, é dado por:

- A) $y = 600x + 50$
- B) $y = 600 + 50x$
- C) $y = 600x - 50$
- D) $y = 50x$
- E) $y = 600 - 50x$

¹Rabeta é uma pequena embarcação motorizada, típica da região amazônica, equipada com um motor de eixo longo, ideal para navegação em rios rasos e estreitos.

²Disponível em: <https://www.facebook.com/profile.php?id=100071607955433>.



2. É comum vermos na internet anúncios de produtos com frete grátis. No entanto, muitos desses produtos, quando são enviados para o Pará e outros estados do Norte, acabam cobrando o preço do frete devido à distância. Algumas lojas, entretanto, adotam a modalidade *frete fixo*, em que o valor do frete não varia, independentemente da quantidade de produtos comprados. Uma professora, moradora de uma cidade no Marajó, onde há poucas livrarias e o acesso a livros é limitado, decide aproveitar essa modalidade de frete fixo para comprar vários exemplares de um mesmo livro e doá-los aos seus alunos.

Após realizar algumas pesquisas, ela encontrou uma loja online que oferece esse tipo de frete e fez uma simulação de compra. Ao adquirir 12 exemplares, o custo total foi de R\$ 499,99. Já ao comprar 15 exemplares, o valor total foi de R\$ 619,99.

Com base nessas informações, o valor do frete fixo e o preço unitário do livro desejado são respectivamente:

- A) R\$ 19,99 e R\$ 40,00
B) R\$ 99,99 e R\$ 25,00
C) R\$ 49,99 e R\$ 30,00
D) R\$ 49,99 e R\$ 35,00
E) R\$ 19,99 e R\$ 25,00
3. Em cidades pequenas, vendedores autônomos costumam repassar ao cliente a taxa cobrada pelas máquinas de cartão de crédito. Em uma feira dessas cidades, há dois vendedores de churrasquinho, Seu Pedro e Seu Roberto, que aceitam pagamento no cartão. Ambos vendem cada espetinho por R\$ 5,00, mas aplicam taxas diferentes: Seu Pedro acrescenta 5% sobre o valor total da compra, enquanto Seu Roberto adiciona um acréscimo fixo de R\$ 1,00 para cada 5 espetinhos comprados.

Lucas pretendia almoçar churrasquinho com açaí e, para isso, analisou as duas opções para comprar os espetinhos no cartão de crédito.



Churrasquinho com açaí¹

Como Lucas gosta de matemática, ele escreveu as funções f e g que expressam, respectivamente, o preço total pago, em reais, pelos espetinhos de Seu Pedro e Seu Roberto, no intervalo $[1, 5]$.

Quais funções Lucas escreveu?

- A) $f(x) = 5,05x$ e $g(x) = 5x + 1$
B) $f(x) = 5,25x$ e $g(x) = 5x + 1$
C) $f(x) = 5,5x$ e $g(x) = 5x + 2$
D) $f(x) = 5x + 0,05$ e $g(x) = 5x + 1$
E) $f(x) = 5,1x$, e $g(x) = 5x + 0,5$

¹Disponível em: <https://www.instagram.com/frangao.da.duque/>



4. Um turista, ao visitar Belém, decide comprar presentes para seus familiares na feira da Praça da República. Ele decidiu gastar a mesma quantia em dinheiro em cada barraca que visitasse.

Dessa forma, o dinheiro restante em sua carteira pode ser descrito em função do número de barracas visitadas pela expressão $v(x) = ax + b$, em que v representa o valor restante em reais e x é a quantidade de barracas visitadas.



Feira da Praça da República, Belém-PA¹

Sabe-se que:

- Inicialmente, ele possuía uma quantia b na carteira.
- Após visitar 5 barracas, restavam R\$ 140,00.
- Após visitar 8 barracas, o dinheiro restante correspondia a $1/3$ do valor inicial.

Com base nessas informações, quantas barracas ele poderá visitar até que o valor em sua carteira se esgote?

- A) 11
- B) 12
- C) 13
- D) 14
- E) 15

¹Disponível em: <https://www.instagram.com/pracadarepublicabelem/>.



5. O Pará é um estado rico em belezas naturais e balneários. A cidade de Portel, por exemplo, é cercada por balneários, e há opções ao longo das estradas, em igarapés, nas praias da orla da cidade e do outro lado do rio. Em um desses balneários do outro lado da cidade, a travessia é feita por barcos ou lanchas, e alguns barqueiros ganham a vida com essa atividade.



Praia da Tucano, Portel-PA¹

Um grupo de amigos deseja passear em um balneário do outro lado do rio e decide verificar o preço cobrado pelos dois barqueiros disponíveis. No barqueiro A, foi mostrado o seguinte histórico de preço em função do número de passageiros:

Passageiros	Preço (R\$)
8	360
10	400
12	440

Já o barqueiro B apresentou a seguinte tabela de preços:

Passageiros	Preço (R\$)
10	350
13	425
16	500

Com base nas informações apresentadas, a partir de quantos passageiros é mais vantajoso contratar o barqueiro A?

- A) 18
- B) 19
- C) 20
- D) 21
- E) 22

¹Fonte: Acervo pessoal do autor.



3 Função Quadrática

A BNCC NESTE CAPÍTULO

Competências gerais da BNCC: 1, 2 e 4.

Competências específicas de Matemática: 1, 3, 4 e 5.

Habilidades de Matemática:
EM13MAT101
EM13MAT302
EM13MAT402
EM13MAT502
EM13MAT503

3.1 A Função Quadrática

Imagine uma empresa paraense que fabrica e vende produtos regionais, como bombons de cupuaçu, castanha-do-para ou óleos essenciais da floresta. Para crescer de forma sustentável, essa empresa precisa entender como seus lucros variam de acordo com a quantidade produzida e vendida. Ao analisar essa relação, muitas vezes percebe-se que ela segue um comportamento parabólico: existe uma quantidade ideal de produção que maximiza o lucro. Produzir menos ou mais do que essa quantidade ideal pode reduzir o ganho financeiro.



Bombom de cupuaçu^a

É justamente nesse cenário que entra a função quadrática, uma ferramenta matemática poderosa para modelar situações do dia a dia, como o lucro de uma empresa. Devido ao gráfico da função quadrática ser uma parábola, ela é ideal para essas situações em que há um valor máximo ou mínimo a ser encontrado. No caso do lucro, por exemplo, a parábola permite identificar qual é a quantidade de produtos que deve ser produzida e vendida para alcançar o lucro máximo. Assim, a função quadrática não é apenas um conteúdo matemático teórico: ela se transforma em uma aliada estratégica para empreendedores que buscam eficiência e crescimento, mesmo em pequenas e médias empresas do nosso estado.

^aDisponível em: <https://lojasaborparaense.com.br/product/bombom-de-cupuaçu-com-castanha-do-para/>



Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a , b e c reais e $a \neq 0$, é chamada de *função quadrática*.

3.2 Gráfico da Função Quadrática

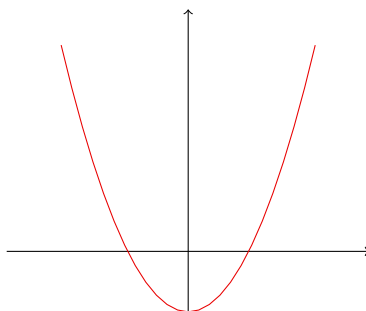
O gráfico da função quadrática é uma parábola, uma curva suave em forma de “U” (voltada para cima) ou de “U invertido” (voltada para baixo), dependendo do sinal do coeficiente a . Essa parábola pode representar situações do cotidiano em que existe um valor máximo ou mínimo a ser atingido — como vimos no exemplo do lucro da fábrica de camisas.

Idem à função afim, na quadrática o gráfico intersecta o eixo das abscissas nos valores de x em que $f(x) = 0$, e o eixo das ordenadas no valor de $f(0)$ - que neste caso é $f(0) = c$. Mas, além disso, dada uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos outros elementos importantes em seu gráfico:

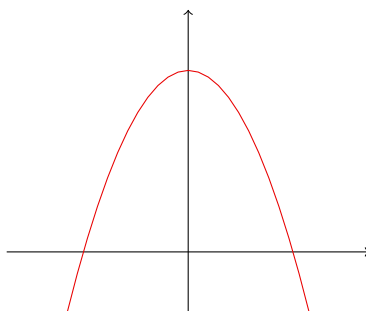
1. Concavidade

A concavidade indica a “abertura” da parábola, e podemos identificar pelo valor de a .

- Se $a > 0$, a parábola é voltada para cima, e o ponto mais baixo é um **mínimo**.



- Se $a < 0$, a parábola é voltada para baixo, e o ponto mais alto é um **máximo**.



2. Raízes ou zeros da função

As raízes (ou zeros) da função são os valores de x para os quais $f(x) = 0$, ou seja, os pontos onde o gráfico cruza o eixo x . Há diversas formas de calcular as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, mas podemos focar na fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$



em que Δ é o discriminante da equação, dado por $\Delta = b^2 - 4ac$.

O valor do discriminante Δ tem um papel fundamental na construção do gráfico da função:

- Se $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais distintas, e o gráfico corta o eixo x em dois pontos distintos.
- Se $\Delta = 0$, a função possui uma raiz real, e o gráfico toca o eixo x em um único ponto, que coincide com o vértice da parábola.
- Se $\Delta < 0$, a função não possui raízes reais, e o gráfico não intercepta o eixo x .

3. Vértice

O vértice da parábola é o ponto que representa o valor máximo ou mínimo da função. Suas coordenadas são calculadas por:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

e

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Exemplo 3.1

Uma fábrica paraense especializada em artigos esportivos produz camisetas de times personalizadas, incluindo modelos muito procurados dos clubes locais Remo e Paysandu.

O custo de produção de cada camiseta é de R\$ 100,00 e a fábrica possui uma despesa mensal fixa de R\$ 10.000,00.

O gerente da empresa adotou a seguinte estratégia para precificar cada camiseta: se há x camisetas encomendadas no mês, o preço de cada camiseta será de $(500 - x)$ reais.

a) Determine a expressão que representa o lucro mensal da fábrica em função da quantidade x de camisetas produzidas.

b) Quantas camisetas devem ser encomendadas dentro de um mês para que o lucro seja máximo?



Solução: Sabendo que o lucro $L(x)$ é calculado pela diferença entre a receita das vendas e a despesa, vamos obter a expressão desejada:

- A receita mensal dessa empresa é o produto entre o número x de camisetas e o preço unitário $(500 - x)$ das camisetas, isto é, $x(500 - x)$;
- A despesa é dada pelo produto entre o número x de camisetas e o custo unitário de cada camiseta, adicionado da despesa fixa mensal, isto é, $100x + 10000$.

Logo,

$$L(x) = x(500 - x) - (100x + 10000) = 500x - x^2 - 100x - 10000$$

$$\Rightarrow L(x) = -x^2 + 400x - 10000.$$



Perceba que $L(x)$ é uma função quadrática, pois é da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a = -1$, $b = 400$ e $c = 10000$.

Por meio dessa função, podemos analisar alguns resultados, como o número de camisas encomendadas para que o lucro seja máximo. Como $L(x) = -x^2 + 400x - 10000$, o gráfico tem concavidade para baixo. Isso confirma que existe uma quantidade de camisas que maximiza o lucro, a saber:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{400}{2 \cdot (-1)} = 200.$$

E para obter o lucro máximo, primeiro calculamos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 400^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10000) = 160000 - 40000 = 120000.$$

Em seguida, a coordenada y_v :

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{120000}{4 \cdot (-1)} = 30000.$$

Ou seja, o lucro máximo de R\$ 30.000,00 será obtido quando forem vendidas 200 camisas.



Exemplo 3.2

(Enem 2020 - Adaptada) Uma empresa paraense de chocolates artesanais decidiu ampliar sua linha de produtos utilizando ingredientes típicos da região. Após consultar o setor de produção, foram definidos cinco tipos de barras de chocolate com sabores regionais, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I (cupuaçu): R\$ 2,00
- Barra II (bacuri com castanha-do-pará): R\$ 3,50
- Barra III (cupu-açu com tapioca): R\$ 4,00
- Barra IV (castanha caramelizada com nibs de cacau do Pará): R\$ 7,00
- Barra V (açaí com chocolate 70%): R\$ 8,00



Com base em dados de mercado, que envolvem a procura pelos sabores e o volume de vendas, o gerente comercial concluiu que o lucro L gerado pela venda das barras é expresso pela função: $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate (em reais).

A empresa deseja investir na fabricação da barra que proporcione o **maior lucro possível**.

Nessas condições, a empresa deve investir na produção da barra:

- I.
- II.
- III.
- IV.
- V.

Solução: A função lucro da empresa é dada por:

$$L(x) = -x^2 + 14x - 45.$$

Como é uma função quadrática com coeficiente $a = -1 < 0$, o gráfico é uma parábola com concavidade voltada para **baixo**, ou seja, o lucro máximo ocorre no **vértice** da parábola. Daí, basta calcular:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{2 \cdot (-1)} = \frac{-14}{-2} = 7.$$

Portanto, o lucro máximo ocorre quando o preço da barra de chocolate é R\$ 7,00. Logo, a resposta é a alternativa d, pois a barra IV custa R\$ 7,00.



Forma Fatorada da Função Quadrática

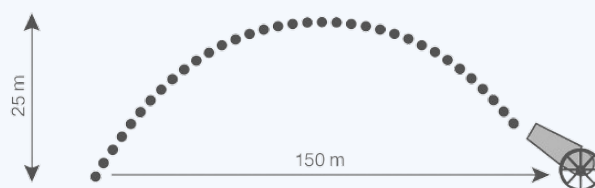
Uma função $y = ax^2 + bx + c$, cujas raízes são x_1 e x_2 , pode ser escrita na forma:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

A forma fatorada da função quadrática pode ser muito útil na resolução de problemas. A demonstração pode ser encontrada em diversos livros didáticos.

Exemplo 3.3

(Enem 2018 - Adaptada) O Forte do Presépio, localizado na cidade de Belém (PA), foi construído no século XVII para proteger a região de invasões estrangeiras. Situado às margens da Baía do Guajará, o forte é hoje um importante marco histórico e turístico da cidade, preservando parte da história da colonização da Amazônia. Durante uma encenação histórica no Forte, um canhão é disparado como demonstração cultural. A bala de canhão é lançada e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de disparo, descrevendo uma trajetória parabólica. Sabe-se que a altura máxima alcançada pelo projétil em relação ao solo é de 25 metros.



Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto $(150; 0)$ e que o projétil atinge o solo no ponto $(0; 0)$ do plano xy . A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é

- a) $y = 150x - x^2$
- b) $y = 3750x - 25x^2$
- c) $75y = 300x - 2x^2$
- d) $125y = 450x - 3x^2$
- e) $225y = 150x - x^2$

Solução: Em primeiro lugar, como temos uma parábola, podemos afirmar que o gráfico é gerado por uma função quadrática. Além disso, como já temos conhecidos os pontos $(0, 0)$ e $(150, 0)$, conhecemos as raízes da função, a saber, $x_1 = 0$ e $x_2 = 150$.

Usando a forma fatorada da função:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - 0)(x - 150).$$

Agora, para determinar o valor de a , precisamos de um ponto distinto das raízes da função. E felizmente a questão fornece implicitamente o vértice da parábola:

- A altura máxima atingida pelo projétil é $25m$, então $y_v = 25$.



- O x_v localiza-se sempre no “meio do caminho” entre as duas raízes, então $x_v = 75$.

Agora, substituímos as coordenadas do ponto $(75, 25)$ na equação $y = a \cdot x(x - 150)$:

$$25 = a \cdot 75(75 - 150) \Leftrightarrow 25 = a \cdot 75 \cdot (-75)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{25}{-75 \cdot 75} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{225}.$$

Assim, voltando à forma fatorada, temos:

$$y = -\frac{1}{225}x(x - 150) \Leftrightarrow 225y = 150x - x^2.$$

Resposta: alternativa e.

3.3 Função Quadrática e Progressão Aritmética

Da mesma forma como relacionamos função afim com PA, temos uma relação parecida entre função quadrática e PA de segunda ordem. Vimos no capítulo anterior o quanto isso é importante para trabalhar com problemas reais, afinal a vida não nos dá leis de formação prontas.

Definição

Uma *progressão aritmética de segunda ordem* é uma sequência numérica em que as diferenças entre termos consecutivos formam uma progressão aritmética. Equivalente a isso, dizemos que a sequência possui *segunda diferença constante*.

Exemplo 3.4

Observe as seguintes sequências:

- $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$, com diferenças: $(3, 5, 7, 9, \dots)$ e segunda diferença constante igual a 2;
- $(10, 15, 22, 31, 42, \dots)$, com diferenças: $(5, 7, 9, 11, \dots)$ e segunda diferença constante igual a 2;
- $(1, 5, 13, 25, 41, \dots)$, com diferenças: $(4, 8, 12, 16, \dots)$ e segunda diferença constante igual a 4.

A seguir, apresentamos um resultado teórico que relaciona funções quadráticas e progressões aritméticas de segunda ordem:

Função Quadrática $\times$ Progressão Aritmética de Segunda Ordem

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética não-constante $x_1, x_2, x_3, \dots$ numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \dots$ se, e somente se, f é uma função quadrática.



A demonstração também encontra-se no livro *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*.

Exemplo 3.5

Conhecido como o “isopor” da Amazônia, o miriti apresenta diversas funcionalidades, dentre elas o artesanato. Todas as partes do miriti podem ser aproveitadas e utilizadas de maneira sustentável. E grande parte desse uso apenas requer o manejo sustentável, não sendo necessário cortar a árvore. Por exemplo, a tala do miriti é utilizada na confecção do paneiro e do tipiti. Já a bucha, é a responsável pelas peças de artesanato.

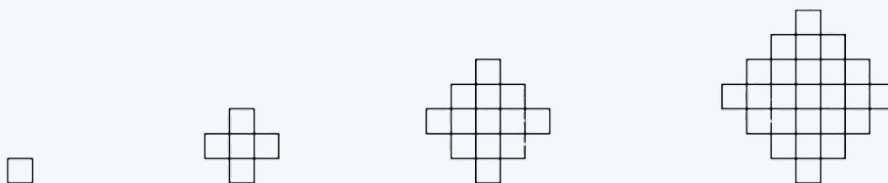


Brinquedos de miriti

(PORTAL AMAZÔNIA. Disponível em: <https://portalamazonia.com/cultura/portal-amazonia-responde-o-que-e-miriti/>. Acesso em: 12 abr. 2025.)

Durante a preparação para a Feira do Miriti, que acontece todos os anos em Abaetetuba durante o Círio de Nazaré, um artesão paraense decide criar painéis decorativos feitos com quadrados de miriti.

Cada painel é formado por pequenos quadradinhos de miriti organizados em um padrão que cresce conforme ele ganha mais encomendas. Os quatro primeiros modelos de painéis são mostrados abaixo, feitos com 1, 5, 13 e 25 quadradinhos, respectivamente.



O artesão quer fazer um painel com 85 quadradinhos de miriti. Qual deve ser o número desse painel na sequência?

Solução: Perceba que os painéis 1, 2, 3 e 4 relacionam-se respectivamente aos números da sequência (1, 5, 13, 25). Note ainda que a sequência é uma PA de segunda ordem, pois as diferenças entre os termos formam uma PA (4, 8, 12). Daí, pelo teorema visto anteriormente, a função f que relaciona o número x do painel à quantidade y de quadradinhos é uma função quadrática.

Assim, vamos calcular os coeficientes a , b e c da função $y = ax^2 + bx + c$ utilizando os pares ordenados (1, 1), (2, 5), e (3, 13).

$$\begin{cases} a(1)^2 + b(1) + c = 1 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 5 \\ a(3)^2 + b(3) + c = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações acima, encontramos os valores $a = 2$, $b = -2$ e $c = 1$.



Portanto, a função f procurada é dada por

$$y = 2x^2 - 2x + 1.$$

Finalmente, para resolver o problema, basta calcular o valor de x para que $f(x) = 85$, que equivale a resolver a equação:

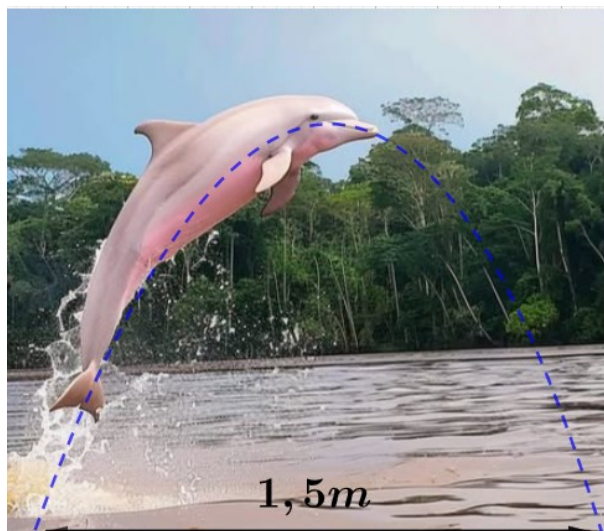
$$2x^2 - 2x + 1 = 85 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 84 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6, \quad x_2 = 7.$$

Obviamente, a solução que satisfaz o problema deve ser positiva, logo o painel é o de número 7.



3.4 Problemas

1. Na região do Marajó, no Pará, os botos são símbolos da rica biodiversidade amazônica. Esses animais encantam ribeirinhos e turistas com seus saltos graciosos nos rios da região, como o Rio Amazonas e seus afluentes. Diz a lenda que o boto cor-de-rosa se transforma em um homem sedutor nas festas ribeirinhas, mas, na realidade, ele é um dos mamíferos mais inteligentes da Amazônia, adaptado às águas barrentas e repletas de vida.
Um boto alcança um salto de altura máxima igual a 2 metros, conforme a figura.



Boto cor de rosa do Marajó¹

Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o boto emerge do ponto $(0,0)$ e que mergulha de volta no ponto $(1,5,0)$ do plano xy . Escreva a função quadrática que expressa a altura do animal em relação à distância horizontal percorrida.

- A) $y = -\frac{16}{3}x^2 + \frac{32}{9}x$
B) $y = \frac{32}{9}x^2 - \frac{16}{3}x$
C) $y = -\frac{32}{9}x^2 + \frac{16}{3}x$
D) $y = -2x^2 + 3x$
E) $y = -4x^2 + 4x$

¹Disponível em: <https://www.facebook.com/profile.php?id=100063604717416>.



2. Em uma situação hipotética no Rio Tocantins, a quantidade de peixes capturados varia de acordo com a profundidade do rio e pode ser modelada por:

$$Q(h) = -3h^2 + 18h + 24,$$

em que $Q(h)$ representa a quantidade de peixes capturados (em quilos) e h é a profundidade (em metros) do rio no local da pesca.



Fonte: Agência Pará.

Qual é a profundidade ideal para se obter a maior quantidade de peixes, e qual é essa quantidade máxima?

- A) 2 m de profundidade, com 66 kg de peixes.
B) 3 m de profundidade, com 51 kg de peixes.
C) 4 m de profundidade, com 60 kg de peixes.
D) 5 m de profundidade, com 66 kg de peixes.
E) 6 m de profundidade, com 69 kg de peixes.

3. “Ir ao comércio de Belém sempre foi mais do que uma necessidade para o povo paraense. É uma experiência carregada de história, tradição e identidade. Entre as vielas e ruas do bairro da Campina, o coração comercial da cidade, encontra-se um patrimônio imaterial que atravessa gerações: o hábito de “ir lá embaixo”. Essa expressão popular, antes amplamente usada pelos moradores, está sendo esquecida pelas novas gerações, mas continua a pulsar na memória de quem viveu os tempos áureos do comércio de Belém.” (O Liberal)



Comércio de Belém

O comércio abre às 08h00 e o fluxo de pessoas varia ao longo do dia. Em um dia comum, percebeu-se que o pico do público ocorreu às 12h00, além disso o número de pessoas presentes em diferentes horários se deu conforme a tabela abaixo:

Horário	Público (em milhares de pessoas)
10h00	16,04
12h00	22,76
14h00	25,00
16h00	22,76

Considerando esse padrão, qual seria a estimativa do público presente às 17h00?

- A) 19,40 mil pessoas
B) 19,96 mil pessoas
C) 21,50 mil pessoas
D) 18,36 mil pessoas
E) 16,04 mil pessoas



4. No estado do Pará, viajar nem sempre é uma tarefa simples. Muitas cidades não são interligadas por estradas, tornando o transporte fluvial a principal alternativa para deslocamento entre municípios. No arquipélago do Marajó, por exemplo, o acesso à capital só é possível por meio de barcos, navios ou lanchas.



Viagem de barco com passageiros em redes¹

Para viajar de Breves a Belém, um navio leva aproximadamente 12 horas, e a passagem na categoria mais básica, que consiste na viagem em rede, varia entre R\$ 100 e R\$ 150.

Uma igreja do município de Breves pretende organizar uma caravana para um evento em Belém e, devido ao grande número de participantes, deseja alugar um navio exclusivo. A empresa responsável ofereceu um navio com capacidade para 100 passageiros, com um esquema de precificação diferenciado:

O preço base de cada passagem individual será de R\$ 100,00. No entanto, para cada vaga não ocupada, será acrescentado um valor de R\$ 10,00 ao preço de cada passagem vendida.

Com base nesse modelo de precificação, qual é o número de passageiros que maximiza a rentabilidade da empresa?

- A) 45 passageiros
- B) 50 passageiros
- C) 55 passageiros
- D) 60 passageiros
- E) 65 passageiros

¹Fonte: Mairon pelo Mundo (2022).



5. O *tecnomelody* é um dos ritmos musicais mais populares da região Norte do Brasil, especialmente no Pará. Com batidas eletrônicas envolventes e letras românticas, o estilo conquistou inúmeros fãs e movimentou a cena cultural local. Bandas e artistas do gênero realizam shows em diversas cidades, levando multidões para os eventos.



Manu Batidão. Créditos na imagem.

Um organizador de eventos de *tecnomelody* percebeu que, com o ingresso a R\$ 20,00, em média 3000 pessoas vão aos shows e que, para cada redução de R\$ 2,00 no preço dos ingressos, o público aumenta em 500 pessoas.

Qual é a receita máxima, em reais, que o organizador pode obter em um evento?

- A) R\$ 50.000,00
- B) R\$ 60.000,00
- C) R\$ 63.000,00
- D) R\$ 64.000,00
- E) R\$ 65.000,00



4 Função Exponencial

A BNCC NESTE CAPÍTULO

**Competências
gerais da BNCC:**
1, 2 e 4.

**Competências
específicas de
Matemática:** 1,
3, 4 e 5.

**Habilidades de
Matemática:**
EM13MAT101
EM13MAT303
EM13MAT304
EM13MAT403
EM13MAT508

4.1 A Função Exponencial

Vamos imaginar a seguinte situação: três amigos estão organizando um evento escolar e querem atrair o maior número possível de pessoas. Para isso, eles criam uma estratégia de divulgação *boca a boca* inusitada:

- No primeiro dia, cada um dos três amigos convida uma pessoa.
- No segundo dia, cada pessoa que foi convidada no dia anterior convida outra pessoa — e os três organizadores continuam convidando uma nova pessoa cada.
- Esse processo se repete todos os dias, até a data do evento.

Ou seja, a cada dia, cada pessoa envolvida convida mais uma, fazendo o número de participantes crescer rapidamente. Veja na tabela:

Dia	Pessoas que irão ao evento
1	6
2	12
3	24
...	...

Observe que a cada dia o número total de pessoas dobra. Esse tipo de crescimento é conhecido como crescimento exponencial. Deste modo, naturalmente podem surgir perguntas como:

Exemplo 4.1

Como descobrir o número de pessoas no dia 15 ou no dia 30? E se no final do processo havia 3.072 pessoas, quantos dias de divulgação foram necessários?



Para responder a essas perguntas, usamos a função exponencial, que é uma ferramenta matemática ideal para representar esse tipo de crescimento acelerado. Vamos analisar os primeiros dias e identificar um padrão:

- Dia 1: $3 \text{ organizadores} + 3 \text{ convidados} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ pessoas.}$
- Dia 2: $3 \cdot 4 = 3 \cdot 2^2 = 12 \text{ pessoas.}$
- Dia 3: $3 \cdot 8 = 3 \cdot 2^3 = 24 \text{ pessoas.}$
- Dia 4: $3 \cdot 16 = 3 \cdot 2^4 = 48 \text{ pessoas.}$

Perceba que a quantidade total de pessoas no dia x pode ser expressa por:

$$y = 3 \cdot 2^x.$$

Essa é uma função exponencial, porque o número 2 (a base) está sendo elevado a uma variável (o número de dias).

No dia 15, a quantidade de pessoas seria:

$$y = 3 \cdot 2^{15} = 3 \cdot 32.768 = 98.304.$$

Exagerado, não é mesmo? Para 30 dias, o resultado passaria de 3 milhões! E para saber qual valor de x implica $y = 3072$, fazemos:

$$3 \cdot 2^x = 3.072 \Leftrightarrow 2^x = 1024 \Leftrightarrow 2^x = 2^{10} \Leftrightarrow x = 10.$$

Ou seja, foram necessários 10 dias para atingir esse público.

Agora, vamos formalizar os conceitos de função exponencial, a fim de explorarmos com mais profundidade os recursos que esse tipo de função pode nos oferecer na resolução de problemas.

Definição

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada *função exponencial* de base a .

Em problemas contextualizados, sempre nos deparamos com funções da forma

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

com $b \in \mathbb{R}^*$ e a nas mesmas condições da definição acima. A essa função também daremos o nome de função exponencial. Assim como na função afim, o b é muitas vezes visto como “valor inicial”, pois $f(0) = b$.

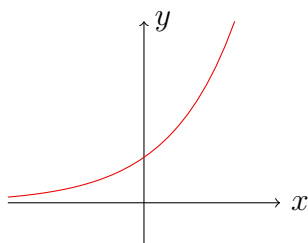
4.2 Gráfico da Função Exponencial

O gráfico da função exponencial, da forma $y = b \cdot a^x$, apresenta uma linha curvada, com as seguintes características:

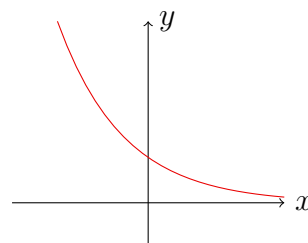
- O gráfico intercepta o eixo y no valor de b .



- Se $a > 0$, o gráfico é crescente.



- Se $0 < a < 1$, o gráfico é decrescente.



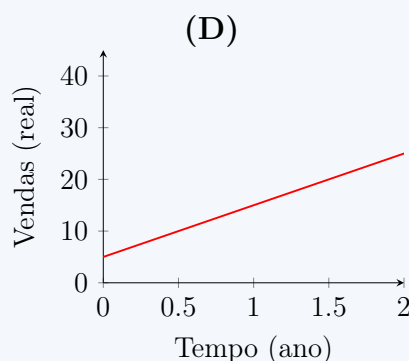
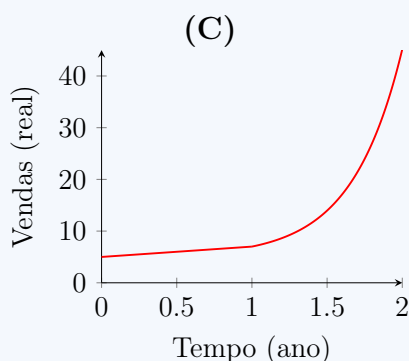
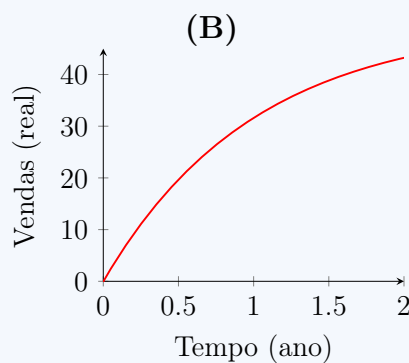
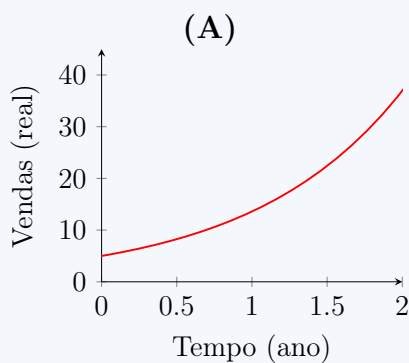
- A função não possui raízes, pois como a e b são diferentes de zero, não é possível obter um valor de x tal que $b \cdot a^x = 0$. Em outras palavras, o gráfico da função não intersecta o eixo x .

Exemplo 4.2

(Enem 2017 - Adaptada) Dona Sônia é uma empreendedora do interior do Pará e decidiu abrir uma lojinha de produtos artesanais na feira de sua comunidade. No primeiro ano, as vendas aumentaram de forma uniforme ao longo do tempo, conforme ela ganhava seus primeiros clientes.

No segundo ano, com o apoio de uma cooperativa local e a divulgação nas redes sociais, seus produtos passaram a ser conhecidos em outras regiões do Pará, como Belém, Santarém e Altamira. A partir daí, suas vendas começaram a crescer de maneira muito mais rápida.

Sabendo que, no primeiro ano, o crescimento foi linear, e no segundo ano, com a ajuda da divulgação, o crescimento passou a ser exponencial, qual dos gráficos abaixo representa melhor as vendas de Dona Sônia ao longo do tempo?

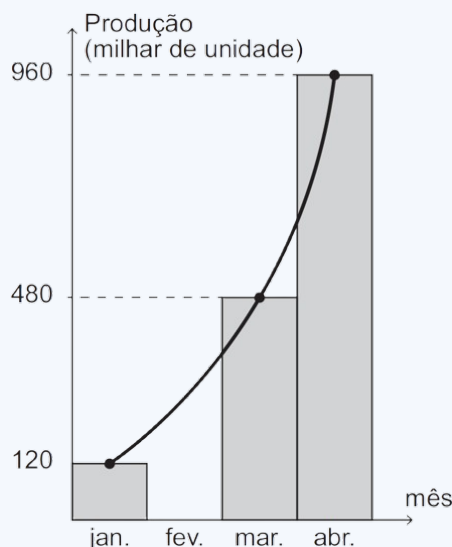




Solução: O enunciado afirma que durante o primeiro ano, que está representado no gráfico pelo intervalo $[0, 1]$, o crescimento foi linear, então precisamos ter um segmento de reta neste intervalo. Além disso, no intervalo $]1, 2]$, o crescimento é exponencial, segundo o problema. Agora que conhecemos o gráfico de uma função exponencial, podemos afirmar que o crescimento das vendas de Dona Sônia pode ser representado pelo gráfico do item C.

Exemplo 4.3

(Enem 2021 - Adaptada) A produção de farinha de mandioca em uma cooperativa no interior do Pará foi monitorada nos meses de janeiro, março e abril, conforme o gráfico abaixo.



No gráfico, estão representados os valores da produção (em milhares de unidades de sacas de 1kg) nos meses de janeiro, março e abril.

Por dificuldades no transporte fluvial, não foi possível fazer a medição da produção no mês de fevereiro. No entanto, as informações dos outros três meses sugerem que a produção nesse quadrimestre cresceu exponencialmente, como indicado pela curva de tendência do gráfico.

Assumindo que o crescimento da produção foi de fato exponencial, pode-se inferir que a produção da cooperativa no mês de fevereiro, em milhares de unidades, foi:

- a) 0.
- b) 120.
- c) 240.
- d) 300.
- e) 400.

Solução: De acordo com a questão, temos uma função do tipo

$$y = b \cdot a^x,$$

em que $x \in \mathbb{N}$ indica o mês de produção e y , a produção, em milhares de unidade. Tomando dois pontos, $(1, 120)$ e $(3, 480)$, vamos obter os valores de a e b da função:



- Substituindo o ponto $(1, 120)$ na equação:

$$120 = b \cdot a^1 \Rightarrow 120 = b \cdot a \quad (1)$$

- Substituindo o ponto $(3, 480)$:

$$480 = b \cdot a^3 \quad (2)$$

Dividindo a equação (2) pela equação (1), temos:

$$\frac{480}{120} = \frac{b \cdot a^3}{b \cdot a} \Leftrightarrow 4 = a^2 \Leftrightarrow a = 2.$$

Substituindo o valor de a na equação (1):

$$120 = b \cdot 2 \Leftrightarrow b = 60.$$

Portanto, a função que representa a produção mensal é:

$$y = 60 \cdot 2^x.$$

Finalmente, para $x = 2$, temos

$$y = 60 \cdot 2^2 = 240.$$

Resposta: alternativa C.

4.3 Função Exponencial e Progressão Geométrica

Da forma como foi com as funções afim e quadrática, seria possível também relacionar a função exponencial com algum tipo de progressão?

Podemos observar no exemplo 4.3 que os valores de x (1, 2, 3, 4) relacionam-se, respectivamente, aos valores da sequência (120, 240, 480, 960). Essa sequência não é uma PA, pois $240 - 120 \neq 480 - 120$. No entanto, percebe-se um padrão: a partir do segundo termo, cada número é o dobro do termo anterior:

- $240 = 120 \cdot 2$
- $480 = 240 \cdot 2$
- $960 = 480 \cdot 2$

Esse tipo de sequência é denominado **progressão geométrica**, conforme a definição a seguir.

Definição

Progressão geométrica (PG) é toda sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por uma constante chamada de razão (q) da progressão.



Exemplo 4.4

As sequências abaixo são todas PG.

- $(2, 6, 18, 54, \dots)$, cuja razão é $q = 3$;
- $(81, 27, 9, 3, \dots)$, cuja razão é $q = \frac{1}{3}$;
- $(5, -10, 20, -40, \dots)$, cuja razão é $q = -2$.

Para obter a razão de uma PG, basta dividir um termo qualquer (exceto o primeiro) pelo seu termo anterior.

Conforme visto no exemplo 4.3, vamos ao seguinte teorema, cuja demonstração também está no livro *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*.

Função Exponencial $\times$ Progressão Geométrica

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente), da forma $f(x) = b \cdot a^x$, transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ numa progressão geométrica $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \dots, y_n = f(x_n)$.

Exemplo 4.5

Em um lago de uma comunidade ribeirinha no Pará, uma planta aquática exótica começa a se espalhar. No primeiro dia, ela cobre uma área de apenas 1m^2 . E a cada dois dias, a área coberta pela planta triplica, devido à sua rápida capacidade de reprodução.

Escreva a função que determina a área A coberta pela planta, em metros quadrados, no dia t .

Solução: Seja A a área coberta pela planta, em metros quadrados, no dia t , podemos inferir do enunciado que:

- $t = 1 \Rightarrow A = 1$
- $t = 3 \Rightarrow A = 3$
- $t = 5 \Rightarrow A = 9$

Daí, percebe-se que t está em PA enquanto $A(t)$, em PG. Logo, temos que $A(t)$ é uma função exponencial, do tipo $A(t) = b \cdot a^t$. Tomando dois pontos, $(1, 1)$ e $(3, 3)$, vamos obter os valores de a e b da função:

- Substituindo o ponto $(1, 1)$ na equação:

$$b \cdot a^1 = 1 \Rightarrow b \cdot a = 1 \quad (1)$$

- Substituindo o ponto $(3, 3)$:

$$b \cdot a^3 = 3 \quad (2)$$



Dividindo a equação (2) pela equação (1), temos:

$$\frac{b \cdot a^3}{b \cdot a} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo o valor de a na equação (1):

$$b \cdot \sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, temos:

$$A(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} (3)^{t/2}.$$

Exemplo 4.6

Em um experimento de laboratório na Universidade Federal do Pará, 400 indivíduos de uma espécie animal foram submetidos a testes de radiação, para verificar o tempo de sobrevivência da espécie.

Os cientistas notaram que no segundo dia havia 100 indivíduos, e no quarto dia de experimento, 25 indivíduos.

Qual função representa o número de indivíduos desse experimento em função do número de dias?

Solução: Para constatar que o decrescimento é exponencial, basta observar que enquanto o tempo está em PA $(0, 2, 4)$, o número de sobreviventes é dado por uma PG decrescente $(400, 100, 25)$, de razão $q = 1/4$.

Deste modo, o número $N(t)$ de indivíduos sobreviventes em função do tempo t , em dias, é dado por:

$$N(t) = b \cdot a^t.$$

Como $N(0) = 400$, então $b = 400$. Resta somente calcular o valor de a . Usando o ponto $(2, 100)$, obtemos:

$$400 \cdot a^2 = 100 \Leftrightarrow a^2 = \frac{100}{400} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a função requerida é

$$N(t) = 400 \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$



4.4 Problemas

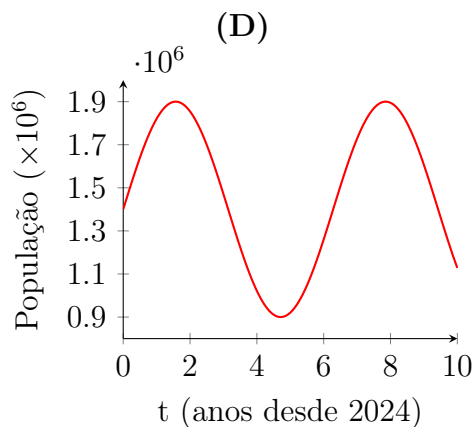
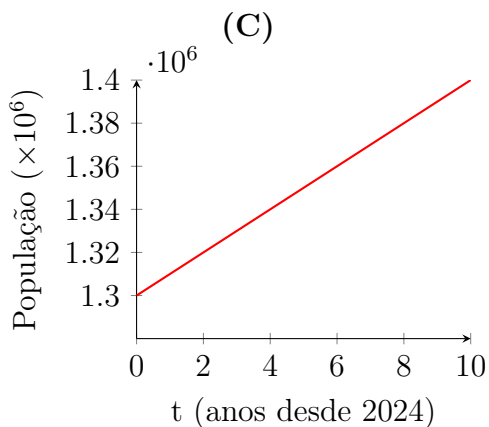
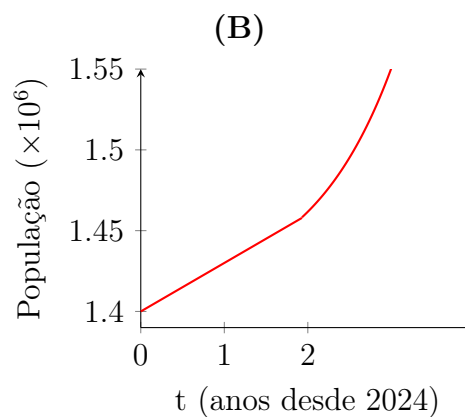
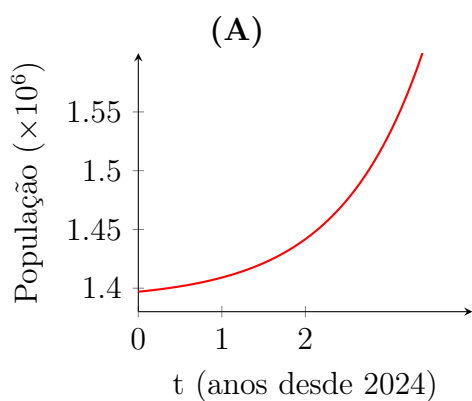
1. De acordo com estimativas de 2024, a população de Belém é de aproximadamente 1.398.531 habitantes. Supondo que a população cresça a uma taxa anual de 1%, podemos modelar esse crescimento pela função exponencial:

$$P(t) = 1400000 \cdot (1,01)^t$$

onde:

- $P(t)$ é a população após t anos,
- t é o tempo em anos a partir de 2024.

Com base nessa função, qual dos gráficos abaixo poderia representar o crescimento populacional de Belém ao longo dos anos?





2. Em duas cidades paraenses, Bragança e Salinópolis, a produção anual de farinha de mandioca tem crescido exponencialmente devido à modernização dos processos produtivos. As produções, em toneladas, são dadas pelas funções:

$$P_B(t) = 850 \times (1,05)^t \quad (\text{Bragança})$$

$$P_S(t) = 900 \times (1,04)^t \quad (\text{Salinópolis})$$

em que t representa o tempo em anos após o início da observação.

Considerando que o crescimento manterá esses padrões, após 6 anos, qual cidade terá a maior produção, e qual será a diferença aproximada entre as produções?



Farinha de mandioca.¹

Dados: $(1,05)^3 \approx 1,15$; $(1,04)^3 \approx 1,12$.

- A) Bragança terá maior produção, com diferença de aproximadamente 5 toneladas.
- B) Salinópolis terá maior produção, com diferença de aproximadamente 5 toneladas.
- C) Bragança terá maior produção, com diferença de aproximadamente 10 toneladas.
- D) Salinópolis terá maior produção, com diferença de aproximadamente 10 toneladas.
- E) Ambas terão produções iguais.

¹Fonte: Folha do Jalapão (2022).



3. No estado do Pará, o açaí é uma das principais riquezas naturais e fonte de sustento para muitas famílias. No entanto, as condições climáticas e ambientais podem impactar a produção ao longo dos anos.



Extração de açaí. Fonte: NEXO JORNAL (2023).

Em uma determinada região, o dono de uma plantação percebeu que a quantidade de palmeiras de açaí vem diminuindo a cada safra (aproximadamente um ano), conforme a tabela abaixo:

Safra	Quantidade de árvores
2015	3000
2016	2700
2017	2430

Se esse padrão se mantiver, a partir de que ano essa plantação terá menos do que a metade do que havia em 2015?

- A) 2021
- B) 2022
- C) 2023
- D) 2024
- E) 2025



4. No Pará, a criação de peixes em cativeiro tem se tornado uma importante fonte de renda para muitas comunidades ribeirinhas. Para garantir o desenvolvimento saudável dos peixes geneticamente modificados, que não se reproduzem, é necessário controlar rigorosamente a alimentação.



Psicultura no Pará. Fonte: G1 Santarém.

Em uma fazenda de piscicultura, observa-se que a quantidade de ração necessária para alimentar os peixes aumenta ao longo do tempo. No início da criação, são necessários 2 kg de ração por dia. Após 15 dias, essa quantidade aumenta para 3 kg por dia, e ao final de 30 dias (um mês), a quantidade de ração já atinge 4,5 kg por dia.

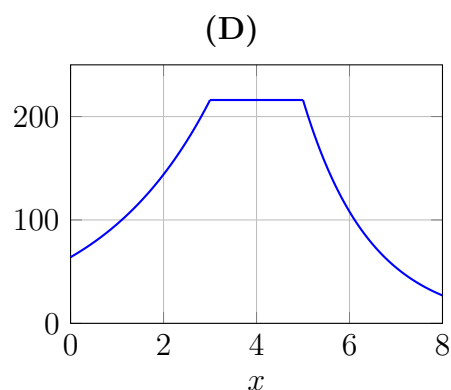
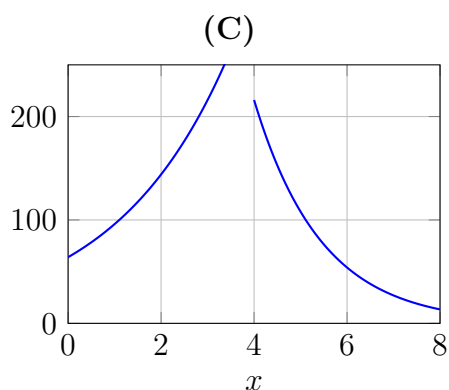
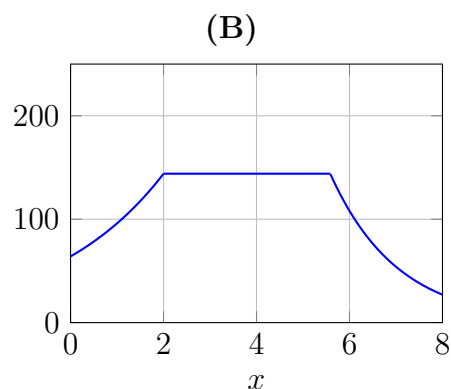
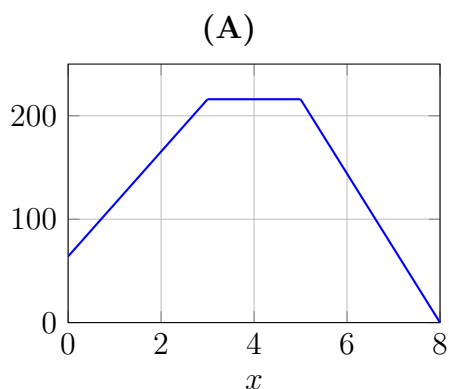
Qual das expressões melhor representa a quantidade $Q(t)$ de ração, em kg por dia, em função do tempo t (em dias)?

- A) $Q(t) = 2 \cdot (1,5)^t$
- B) $Q(t) = 2 \cdot (1,05)^t$
- C) $Q(t) = 2 \cdot (1,5)^{t/15}$
- D) $Q(t) = 2 \cdot (1,05)^{t/1}$
- E) $Q(t) = 2 \cdot (1,5)^t + 15$



5. Em uma festividade popular no interior do Pará, um participante decide apostar em um tradicional jogo da sorte, em que ele ganha ou perde metade do que possui na ocasião. Começando com R\$ 64,00, nos três primeiros momentos ele ganha. Nos dois momentos seguintes, ele permanece com o valor acumulado, pois decide não fazer novas apostas. Porém, após tomar coragem, ele aposta em mais três momentos, nos quais perde em todos.

Qual dos gráficos abaixo melhor representa o valor acumulado dessa pessoa em função do tempo?





5 Função Logarítmica

A BNCC NESTE CAPÍTULO

Competências gerais da BNCC: 1, 2 e 4.

Competências específicas de Matemática: 1, 3 e 4.

Habilidades de Matemática:
EM13MAT101
EM13MAT304
EM13MAT305
EM13MAT403

5.1 Logaritmos

No capítulo anterior, trabalhamos a função exponencial, função cuja variável independente encontra-se no expoente de uma base positiva e diferente de 1. Desse modo, na resolução de problemas, não é estranho aparecer uma equação do tipo

$$2^x = 8,$$

cujas soluções podem ser obtidas escrevendo as potências em uma mesma base:

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3$$

$$x = 3.$$

No entanto, não seria absurdo surgir uma equação como:

$$3^x = 8,$$

onde não é possível escrever os números apresentados como potências de mesma base. Mas, dispondo do conhecimento de logaritmos e suas propriedades, e com o auxílio de uma calculadora científica, é possível obter uma solução para a equação:

$$3^x = 8$$

$$\log 3^x = \log 8$$

$$x \log 3 = \log 8$$

$$x = \frac{\log 8}{\log 3} \approx \frac{0,9}{0,48} \approx 1,875.$$

Para compreender a resolução acima, vamos entender o que é “log”.

Definição

Dados dois números reais positivos a e b , com $a \neq 1$, o *logaritmo* de b na base a é o expoente x tal que $a^x = b$:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$



Observações:

- O logaritmo de um número na base 10 é chamado de **logaritmo decimal**, e é comum omitirmos a base quando $a = 10$, isto é:

$$\log_{10} b = \log b.$$

- O logaritmo de um número na base e é chamado de **logaritmo natural** ou **logaritmo neperiano**, e é comum usarmos a notação $\ln b$ ao invés de $\log_e b$.

Dados os números reais a, b, c , e n , com $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, temos as propriedades apresentadas a seguir, que são muitas vezes indispensáveis em resoluções de problemas.

1ª Propriedade:

$$\log_a a = 1$$

2ª Propriedade:

Em uma mesma base, o logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base dessa potência.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

3ª Propriedade:

Mudança de base: admitindo uma base c , tal que $c > 0$ e $c \neq 1$, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

4ª Propriedade:

Em uma mesma base, o logaritmo de um produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um dos fatores.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

5ª Propriedade:

Em uma mesma base, o logaritmo de um quociente de dois números positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Demonstrações:

1ª Propriedade: Pela definição,

$$\log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a \Leftrightarrow a^x = a^1 \Leftrightarrow x = 1.$$

2ª Propriedade: Pela definição, temos

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

E elevando ambos os membros ao expoente n , vem:

$$(a^x)^n = b^n \Leftrightarrow a^{nx} = b^n \Leftrightarrow nx = \log_a b^n.$$

Mas $x = \log_a b$. Logo:

$$n \cdot \log_a b = \log_a b^n.$$



3ª Propriedade: Pela definição,

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b.$$

. Aplicando o logaritmo de base c em ambos os lados:

$$\log_c(a^x) = \log_c b \Leftrightarrow x \cdot \log_c a = \log_c b \Leftrightarrow x = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Portanto:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

4ª Propriedade: Sejam $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$. Assim:

$$a^x = b \quad \text{e} \quad a^y = c.$$

Multiplicando as duas equações:

$$b \cdot c = a^x \cdot a^y \Leftrightarrow b \cdot c = a^{x+y} \Leftrightarrow \log_a(b \cdot c) = \log_a(a^{x+y}) = (x + y) \cdot \log_a a.$$

Portanto:

$$\log_a(b \cdot c) = x + y \Leftrightarrow \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

5ª Propriedade: Esta é análoga à demonstração anterior.

Exemplo 5.1

(Unifor-CE - Adaptada) A expressão $M = A(1+i)^n$ permite o cálculo do montante produzido por um capital A , aplicado a juros compostos e à taxa unitária i , ao final de n períodos.

Considere que um aluno de escola pública paraense adquiriu um valor de R\$ 1 370,00 como parte da premiação de uma olimpíada de matemática. A fim de poupar o dinheiro para quando ingressar na faculdade, o estudante aplica esse capital à taxa anual de 25% no regime de juros compostos.

Ao final de quantos anos ele produzirá o montante de R\$ 5 480,00? (Use: $\log 2 = 0,30$)

Solução: Note que, dados os valores de A e i , a expressão dada é uma função exponencial $M(n)$, mas precisaremos utilizar logaritmos na resolução do problema. Substituindo os valores fornecidos, vem:

$$1370(1,25)^n = 5480 \Leftrightarrow (1,25)^n = 4.$$

Em seguida, usamos algumas propriedades expostas anteriormente.

$$(1,25)^n = 4 \Leftrightarrow \log(1,25)^n = \log 4 \Leftrightarrow n \log(1,25) = \log 4 \Leftrightarrow n = \frac{\log 4}{\log 1,25}.$$

Note que a questão forneceu apenas o valor de $\log 2$, então temos que “forçar” a aparição desse número. Calculemos separadamente:



- $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 2 \cdot 0,3 = 0,6$
- $\log 1,25 = \log \frac{125}{100} = \log 125 - \log 100 = \log 5^3 - \log 10^2 = 3 \log 5 - 2 \log 10$
 $= 3(\log 10 - \log 2) - 2 \cdot 1 = 3(1 - 0,3) - 2 = 0,1$

Dai:

$$n = \frac{\log 4}{\log 1,25} = \frac{0,6}{0,1} = 6.$$

Assim, o montante desejado será alcançado em 6 anos.

5.2 A Função Logarítmica

A água apresenta características físico-químicas que variam de acordo com o ambiente em que se encontra. No estado do Pará, as diferenças são marcantes: em regiões como Belém e o arquipélago do Marajó, é comum observar águas turvas e barrentas, enquanto em localidades mais preservadas, como a região do Tapajós e do Xingu, predominam águas límpidas e cristalinas.¹



Regiões hidrográficas do Pará.
Fonte: Arquivo DIREH/SEMA.

Diversidade das águas no estado do Pará.

Essas diferenças refletem a interação entre fatores naturais — como o tipo de solo, a presença de matéria orgânica e o regime de chuvas — e a ação antrópica, como a poluição urbana e industrial.² Um dos principais parâmetros para avaliar a qualidade da água é o pH, que indica a concentração de íons hidrogênio (H^+) presentes.

O pH (potencial hidrogeniônico) é uma medida que expressa a acidez ou basicidade de uma solução. No entanto, a concentração de H^+ em soluções aquosas pode variar em ordens de grandeza extremamente amplas, desde valores como 10^{-1} até 10^4 mol/L. Para tornar a análise prática e inteligível, cientistas utilizam uma **escala logarítmica**, na qual o pH é definido como:

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

¹Fonte: Oliveira (2018).

²Fonte: Sioli (1984).



Estudos realizados em diversas regiões do Pará indicam que:³

- **Rios de águas pretas:** Como alguns tributários do rio Negro e igarapés de floresta, apresentam pH naturalmente ácido (3,8–5,5) devido à grande quantidade de ácidos orgânicos provenientes da decomposição vegetal. São comuns em áreas de floresta densa com solos arenosos.
- **Rios de águas claras:** Como o Tapajós e o Xingu, apresentam pH geralmente entre 6,0 e 7,0, com águas transparentes e menor teor de matéria orgânica dissolvida.⁴ Em Alter do Chão, região do Tapajós, o pH tende a variar nesta faixa, refletindo características típicas de rios de águas claras.
- **Rios de águas brancas:** Como o Amazonas e partes do Tocantins, apresentam pH próximo do neutro (6,5–7,0) e são ricos em sedimentos em suspensão, conferindo aspecto barrento.
- **Na Região Metropolitana de Belém,** o pH das águas superficiais varia geralmente entre 5,0 e 7,3, sendo que os valores mais baixos são encontrados em igarapés urbanos impactados pela poluição, enquanto valores mais altos são observados em áreas com influência das marés.⁵
- **No arquipélago do Marajó,** observa-se uma variação interessante: nas áreas influenciadas pelo estuário amazônico e águas marinhas, o pH pode chegar a 7,5–8,0, enquanto nas regiões interiores da ilha, principalmente em campos alagados e rios como o Arari, o pH tende a ser mais ácido (4,5–6,0).⁶

Diante desse cenário, o estudo da função logarítmica se revela essencial para interpretar e modelar fenômenos ambientais, inclusive no Estado do Pará.

Definição

A função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada *função logarítmica*.

5.3 Gráfico da Função Logarítmica

O gráfico da função $f(x) = \log_a x$ possui características que dependem do valor da base a :

- Se $a > 1$, a função é crescente.
- Se $0 < a < 1$, a função é decrescente.
- O gráfico passa pelo ponto $(1, 0)$ para qualquer base.
- O **domínio** da função é $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.

³Fonte: Santos & Gonçalves (2016).

⁴Fonte: Miranda et al. (2009).

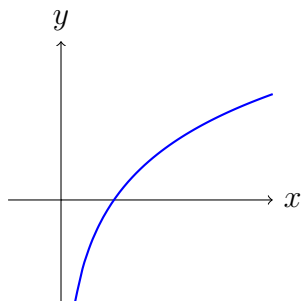
⁵Fonte: Oliveira (2018).

⁶Fonte: Santos & Gonçalves (2016).

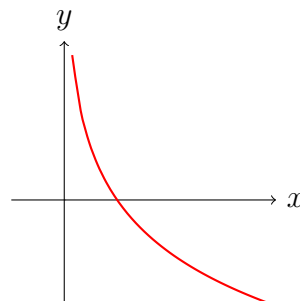


- O **contradomínio** da função é $CD(f) = \mathbb{R}$.
- A **imagem** da função é $Im(f) = \mathbb{R}$.

Função Crescente: $a > 0$

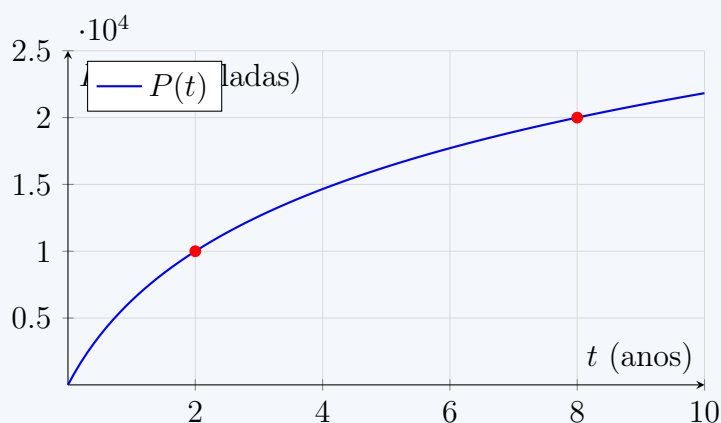


Função Decrescente: $0 < a < 1$



Exemplo 5.2

A produção de açaí processado no estado do Pará, especialmente nas regiões de Belém e no Baixo Tocantins, tem crescido rapidamente nas últimas décadas. O gráfico a seguir mostra o comportamento da produção $P(t)$ (em toneladas) em função do tempo t (em anos), contando a partir do início da industrialização em larga escala, de uma fábrica específica.



Com base no gráfico e nos pontos destacados, assinale a função que melhor representa a produção de açaí ao longo do tempo:

- A) $P(t) = 10^4 \times \log_3(t + 1)$
- B) $P(t) = 2 \times 10^4 \times \log_3(t + 1)$
- C) $P(t) = 10^4 \times \log_2(t + 1)$
- D) $P(t) = 10^3 \times \log_3(t + 1)$

Solução: A função proposta na alternativa A é:

$$P(t) = 10^4 \times \log_3(t + 1)$$

Testando os pontos fornecidos:

- Para $t = 2$:

$$P(2) = 10^4 \times \log_3(2 + 1) = 10^4 \times \log_3(3) = 10^4 \times 1 = 10000$$



- Para $t = 8$:

$$P(8) = 10^4 \times \log_3(8 + 1) = 10^4 \times \log_3(9) = 10^4 \times 2 = 20000$$

Ambos os pontos destacados no gráfico são satisfatoriamente representados pela função da alternativa A.

Análise das demais alternativas:

- **B)** $P(t) = 2 \times 10^4 \times \log_3(t + 1)$
Esta função dobra a produção em relação à correta, não correspondendo aos pontos indicados.
- **C)** $P(t) = 10^4 \times \log_2(t + 1)$
Mudança da base do logaritmo altera a taxa de crescimento, não compatível com os valores destacados no gráfico.
- **D)** $P(t) = 10^3 \times \log_3(t + 1)$
A produção seria dez vezes menor do que a observada no gráfico.



5.4 Problemas

1. As aparelhagens de som do Pará são um fenômeno cultural único, especialmente ligadas ao *tecnobrega*, ao *melody* e às festas de aparelhagem. Elas são estruturas gigantescas de som, luz e efeitos visuais, operadas por DJs e equipes especializadas, criando um espetáculo audiovisual impressionante.



Show de aparelhagem. Fonte: Agência Amapá (2024).

Aparelhagens famosas como *Super Pop*, *Príncipe Negro*, *Tupinambá*, *Rubi* e *Crocodilo* disputam popularidade com equipamentos de última geração e verdadeiros exércitos de fãs. Além da música, essas festas têm uma estética própria, com locuções marcantes e rivalidade entre as aparelhagens.

Considere que, em um desses eventos, a potência sonora percebida pelo público (P , em decibéis) em função da distância (d , em metros) até a aparelhagem é dada por:

$$P(d) = 120 - 20 \log(d).$$

A que distância a potência cai para 80 dB?

- A) $d = 10$ metros
- B) $d = 50$ metros
- C) $d = 100$ metros
- D) $d = 200$ metros
- E) $d = 250$ metros



2. Quando compramos um veículo, sabemos que seu valor diminui com o tempo. Essa desvalorização não ocorre de maneira linear, mas sim de forma mais acentuada nos primeiros anos e depois desacelera. Uma forma de representar esse fenômeno matematicamente é usando uma função logarítmica, pois ela descreve um crescimento ou decaimento rápido no início e mais lento depois.

A desvalorização de uma moto pode ser modelada pela função:

$$V(t) = 25.000 - 10.000 \cdot \log(t + 1),$$

em que $V(t)$ é o valor da moto (em reais) após t anos.

Após quantos anos o valor da moto será R\$ 15.000,00?

- A) 8 anos
B) 9 anos
C) 10 anos
D) 11 anos
E) 12 anos
3. A acidez da água dos rios da Amazônia paraense é um importante indicador ambiental. O pH de uma solução é dado pela expressão $pH = -\log[H^+]$, em que H^+ é a concentração de íons de hidrogênio em mol/L.



Encontro das águas. Fonte: NEXO JORNAL (2023).

Um grupo de pesquisadores coletou amostras de água em diferentes pontos do Rio Tapajós e obteve os seguintes valores de pH:

Local de coleta	pH
Nascente	6,5
Região da floresta	5,8
Próximo ao garimpo	4,2
Foz	5,2

Considerando esses dados, o local de coleta onde a concentração de íons de hidrogênio é aproximadamente $6,3 \times 10^{-5}$ mol/L é:

(Use $\log 7 \approx 0,84$ e $\log 3 \approx 0,48$)

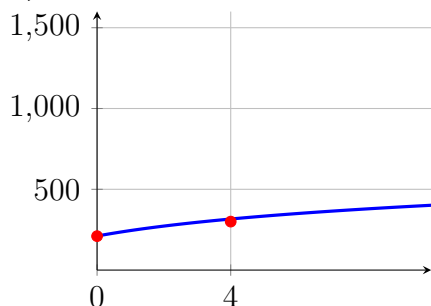
- A) Nascente
B) Região de floresta
C) Próximo a garimpo
D) Foz
E) Nenhum dos locais acima



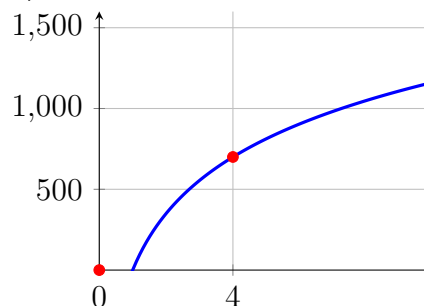
4. Na cidade de Belém, durante o período do Círio de Nazaré, o consumo de energia elétrica aumenta significativamente. A concessionária de energia estima que o consumo C (em megawatts) durante os dias de festividade pode ser aproximado pela função $C(x) = 350 \cdot \log_2(x + 4)$, em que x representa o número de dias após o início dos eventos.

Com base nos gráficos abaixo, assinale a alternativa que representa corretamente essa função.

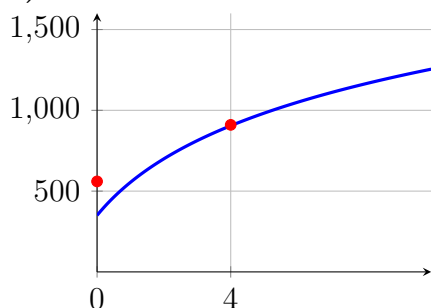
A)



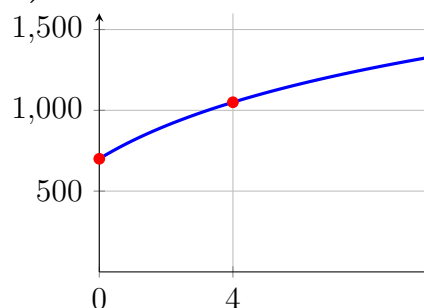
B)



C)



D)



5. (Enem 2017 - Adaptada) Para realizar o sonho de passar as férias em Salinópolis (Salinas), uma pessoa decidiu fazer um empréstimo no valor de R\$ 5.000,00 para cobrir despesas com transporte, hospedagem e alimentação. Para pagar esse valor, ela dispõe, no máximo, de R\$ 400,00 mensais.

O valor da prestação P , em reais, é calculado em função do número de parcelas n pela fórmula:

$$P = \frac{5\,000 \cdot 1,013^n \cdot 0,013}{1,013^n - 1}$$

Se necessário, utilize $\log 1,013 \approx 0,005$; $\log 400 \approx 2,602$; $\log 335 \approx 2,525$.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não ultrapassam o limite mensal disponível da pessoa é:

- A) 12
B) 13
C) 14
D) 15
E) 16



Praia de Salinas. Fonte: DOL (2025).



6 Resoluções dos Problemas

Capítulo 2: Função Afim

Questão 1

O serviço cobrado pelo Sr. José Maria nos reparos em embarcações possui dois componentes:

Valor fixo do conserto: R\$ 600,00.

Taxa diária de aluguel: R\$ 50,00 por dia que a embarcação permanece no estaleiro após o término do serviço. Para calcular o valor total y a ser pago por um cliente cuja embarcação perma-

nece x dias no estaleiro, devemos somar o valor fixo mais a taxa diária multiplicada pelo número de dias:

$$y = \text{valor fixo} + \text{taxa diária} \cdot x$$

$$y = 600 + 50x$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **B**: $y = 600 + 50x$.

Questão 2

Vamos chamar de F o valor do frete fixo e de P o preço unitário do livro. Se a professora compra 12 exemplares, o custo total é:

$$F + 12P = 499,99.$$

Se ela compra 15 exemplares, o custo total é:

$$F + 15P = 619,99.$$

Temos um sistema de duas equações e duas incógnitas. Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos:

$$3P = 120 \Leftrightarrow P = 40$$

Agora, substituímos o valor de P na primeira equação para encontrar F :

$$F + 12 \cdot 40 = 499,99$$

$$F + 480 = 499,99 \Leftrightarrow F = 19,99$$

Portanto, o valor do frete fixo é R\$ 19,99 e o preço unitário do livro é R\$ 40,00.

A alternativa correta é a letra **A**: R\$ 19,99 e R\$ 40,00.



Questão 3

Seu Pedro cobra R\$ 5,00 por espetinho e acrescenta 5% sobre o valor total da compra.

Considerando o intervalo $[1,5]$ para o número de espetinhos, a função f (Seu Pedro) é dada por:

$$f(x) = 5x \cdot 1,05 = 5,25x$$

Para a função g (Seu Roberto), como o número de espetinhos está no inter-

valo $[1,5]$, e o acréscimo de R\$ 1,00 é cobrado para cada 5 espetinhos, temos:

$$g(x) = 5x + 1$$

Note que o acréscimo é R\$ 1,00 fixo para qualquer quantidade até 5 espetinhos, pois só é cobrado uma vez neste intervalo.

Portanto, a alternativa correta é a letra **B**: $f(x) = 5,25x$ e $g(x) = 5x + 1$.

Questão 4

Vamos usar as informações do problema para encontrar os valores de a e b na expressão $v(x) = ax + b$: Se após visitar 5 barracas, restavam R\$ 140,00, temos:

$$v(5) = 5a + b = 140$$

E se ao visitar 8 barracas, o dinheiro restante era $1/3$ do valor inicial b , temos:

$$v(8) = 8a + b = \frac{b}{3}$$

Da segunda equação, podemos escrever:

$$8a + b = \frac{b}{3} \Leftrightarrow 8a = \frac{b}{3} - b$$

$$8a = -\frac{2b}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{b}{12}$$

Substituindo este resultado na primeira equação:

$$5 \cdot \left(-\frac{b}{12}\right) + b = 140$$

$$-\frac{5b}{12} + b = 140 \Leftrightarrow -\frac{5b}{12} + \frac{12b}{12} = 140$$

$$\frac{7b}{12} = 140 \Leftrightarrow b = 240$$

Agora, podemos calcular a :

$$a = -\frac{b}{12} \Leftrightarrow a = -\frac{240}{12} \Leftrightarrow a = -20$$

Portanto, $v(x) = -20x + 240$.

Para encontrar quantas barracas ele poderá visitar até que o valor se esgote, devemos resolver $v(x) = 0$:

$$-20x + 240 = 0 \Leftrightarrow x = 12$$

Portanto, o turista poderá visitar 12 barracas até que o dinheiro se esgote. Resposta: alternativa **B**: 12.



Questão 5

As funções que descrevem o preço em função do número de passageiros para cada barqueiro são funções afins, pois o número de passageiros em cada tabela está em PA, enquanto que o preço também está em PA.

Para o barqueiro A, temos os pontos $(8, 360)$, $(10, 400)$, $(12, 440)$. Usando a fórmula da taxa de variação, obtemos:

$$a = \frac{400 - 360}{10 - 8} = 20.$$

Assim, podemos escrever:

$$P_A(x) = 20x + b$$

Substituindo o ponto $(8, 360)$:

$$360 = 20 \cdot 8 + b \Leftrightarrow b = 200$$

Portanto, $P_A(x) = 20x + 200$.

Para o barqueiro B, temos os pontos $(10, 350)$, $(13, 425)$, $(16, 500)$.

Usando a fórmula da taxa de variação, obtemos:

$$a = \frac{425 - 350}{13 - 10} = 25.$$

Assim, podemos escrever:

$$P_B(x) = 25x + c$$

Substituindo o ponto $(10, 350)$:

$$350 = 25 \cdot 10 + c \Leftrightarrow c = 100$$

Portanto, $P_B(x) = 25x + 100$.

Para determinar a partir de quantos passageiros é mais vantajoso contratar o barqueiro A, precisamos encontrar o valor de x para o qual $P_A(x) < P_B(x)$, isto é:

$$20x + 200 < 25x + 100 \Leftrightarrow x > 20$$

Portanto, a partir de 21 passageiros, é mais vantajoso contratar o barqueiro A.

A alternativa correta é a letra **D**: 21.



Capítulo 3: Função Quadrática

Questão 1

Neste problema, precisamos encontrar a função quadrática que descreve a trajetória do boto durante seu salto. Sabemos que:

- O boto emerge do ponto $(0, 0)$
- Alcança uma altura máxima de 2 metros
- Mergulha de volta no ponto $(1.5, 0)$

A trajetória parabólica pode ser representada por uma função quadrática da forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Como já temos conhecidos os pontos $(0, 0)$ e $(1.5, 0)$, conhecemos as raízes da função, a saber, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1.5$. Usando a forma fatorada da função:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - 0)(x - 1.5) = ax \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

Como o boto alcança uma altura máxima de 2 metros, $y_v = 2$. E como as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 1.5$, então o x do vértice fica no “meio do caminho” entre as raízes, $x_v = 0.75 = \frac{3}{4}$. Assim, temos o ponto $V\left(\frac{3}{4}, 2\right)$. Daí:

$$2 = a \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2} \right)$$

$$a = -\frac{32}{9}$$

Finalmente:

$$y = -\frac{32}{9}x \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

$$y = -\frac{32}{9}x^2 + \frac{16}{3}x$$

Resposta: alternativa **C**.

Questão 2

Basta calcular as coordenadas do vértice da função:

$$Q(h) = -3h^2 + 18h + 24.$$

Usando a fórmula da abscissa do vértice, temos:

$$h_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{-6} = 3$$

E agora, calculando $Q(3)$, obtemos

$$Q(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 24 = 51$$

Portanto, a alternativa correta é a **B**: 3 m de profundidade, com 51 kg de peixes.



Questão 3

Primeiramente, vamos considerar o horário das 08h00 como o instante $t = 0$. E assim analisemos os dados fornecidos na tabela:

- 10h00 ($t = 2$): 16,04 mil pessoas
- 12h00 ($t = 4$): 22,76 mil pessoas
- 14h00 ($t = 6$): 25,00 mil pessoas
- 16h00 ($t = 8$): 22,76 mil pessoas

A diferença entre o número de pessoas está em PA: (6,72; 2,24; -2,24). Logo, enquanto o tempo é dado por uma PA, o número de pessoas está em uma PA de segunda ordem. Portanto, temos que a função que expressa o público presente, em milhares de pessoas, em função do tempo é quadrática.

Usando os pontos (2; 16,04), (4; 22,76) e (8; 22,76), vamos obter os valores dos coeficientes a , b e c no sistema de equações:

$$\begin{cases} a(2)^2 + b(2) + c = 16,04 \\ a(4)^2 + b(4) + c = 22,76 \\ a(8)^2 + b(8) + c = 22,76 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 16,04 \\ 16a + 4b + c = 22,76 \\ 64a + 8b + c = 22,76 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda:

$$12a + 2b = 6,72$$

$$6a + b = 3,36 \quad (1)$$

E subtraindo a segunda equação da terceira:

$$48a + 4b = 0$$

$$12a + 2b = 0 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2), obtemos:

$$a = -0,56 \quad \text{e} \quad b = 6,72.$$

Agora, substituindo esses valores em qualquer um das equações do sistema, encontramos $c = 4,84$. Portanto, a função que expressa o público presente, $P(t)$, em milhares de pessoas, em função do tempo t é:

$$P(t) = -0,56t^2 + 6,72t + 4,84$$

Às 17h00, temos $t = 9$ (pois 17h - 8h = 9h), então:

$$P(9) = -0,56 \cdot 9^2 + 6,72 \cdot 9 + 4,84$$

$$P(9) = 19,96$$

Portanto, a estimativa do público presente às 17h00 é de 19,96 mil pessoas. A resposta correta é a alternativa **B**: 19,96 mil pessoas.



Questão 4

A Receita da empresa nessa viagem é dada pelo produto entre o número x de passageiros e o preço da passagem. Mas o preço da passagem é dado por:

- Preço base por passageiro: R\$ 100,00
- Taxa adicional por vaga não ocupada: R\$ 10,00

Assim, se há x vagas ocupadas, o preço unitário da passagem é dado por $100 + (100 - x)10 = 1100 - 10x$. Deste modo, a receita $R(x)$ segue a expressão:

$$R(x) = x \cdot (1100 - 10x)$$

$$R(x) = 1100x - 10x^2$$

Como a receita é modelada por uma função quadrática com coeficiente $a < 0$, há um ponto máximo no gráfico dessa função, isto é, existe um valor que maximiza a receita, que é o x do vértice da parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-1100}{-20} = 55$$

Portanto, o número de passageiros que maximiza a rentabilidade da empresa é 55.

Resposta: alternativa C.

Questão 5

Vamos definir uma variável x que representa o número de reduções de R\$ 2,00 no preço do ingresso.

- Preço do ingresso após x reduções: $(20 - 2x)$
- Público do evento após x reduções: $(3000 + 500x)$

A receita total será o produto do preço pelo número de pessoas:

$$R(x) = (20 - 2x)(3000 + 500x)$$

$$R(x) = -1000x^2 + 400x + 60000$$

Como o coeficiente a da função quadrática é negativo, então existe um valor máximo. Vamos calcular o valor de x para que a receita seja máxima:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-4000}{-2000} = 2$$

Isto é, a receita será máxima com 2 reduções de R\$ 2,00, a saber:

$$R(2) = -1000 \cdot 2^2 + 4000 \cdot 2 + 60000$$

$$R(2) = 64000$$

Portanto, a resposta é a alternativa D: R\$ 64.000,00.



Capítulo 4: Função Exponencial

Questão 1

A alternativa **A** é a correta, pois é a única que demonstra graficamente um crescimento exponencial do início ao fim, diferentemente da alternativa B, em que há um crescimento linear no intervalo $[0, 2]$.

Questão 2

Vamos calcular os valores de cada função para $t = 6$:

$$P_B(6) = 850 \times (1,05)^6 = 850 \times (1,05^3)^2 = 850 \times 1,15^2 \approx 1.124,125;$$

$$P_S(6) = 900 \times (1,04)^6 = 900 \times (1,04^3)^2 = 900 \times (1,12)^2 \approx 1.128,96.$$

Logo, a alternativa correta é a letra **B**: Salinópolis terá maior produção, com diferença de aproximadamente 5 toneladas.

Questão 3

Neste problema, o tempo t , em anos, está em PA (2015, 2016, 2017) ao passo que a quantidade Q de árvores, em PG (3000, 2700, 2430). Então, a função $Q(t)$ é do tipo

$$Q(t) = b \cdot a^t.$$

Para facilitar os cálculos, vamos considerar 2015 como $t = 0$, 2016 como $t = 1$ e assim sucessivamente.

Assim, sabemos que

$$Q(0) = 3000 \Rightarrow b = 3000.$$

Daí:

$$Q(1) = 3000 \cdot a^1 = 2700$$

$$a = 0,9$$

$$\text{Assim, } Q(t) = 3000 \cdot (0,9)^t.$$

Devemos calcular o valor de t para que $Q(t) < 1500$.

$$3000 \cdot (0,9)^t < 1500 \Leftrightarrow (0,9)^t < 0,5$$

Por inspeção, verifica-se que

$$0,9^6 \approx 0,53 \quad \text{e} \quad 0,9^7 \approx 0,47$$

Logo, para $t = 7$, a quantidade de árvores será menor do que 1500.

Portanto, a resposta é a alternativa **B**: 2022.



Questão 4

Temos novamente o tempo t em PA $(0, 15, 30)$ enquanto a quantidade $Q(t)$ está em PG $(2; 3; 4,5)$, de razão $q = 1,5$.

Assim, a função é do tipo $Q(t) = b \cdot a^t$, com

- $Q(0) = 2$
- $Q(15) = 3$

Daí, com $b = 2$, podemos escrever:

$$Q(15) = 2 \cdot a^{15} = 3$$

$$a^{15} = 1,5 \Leftrightarrow a = 1,5^{1/15}$$

Assim:

$$Q(t) = 2 \cdot (1,5^{1/15})^t = 2 \cdot (1,5)^{t/15}$$

Portanto, a resposta é a alternativa **C**.

Questão 5

Em primeiro lugar, vamos analisar o contexto numericamente, considerando que:

- Nos três primeiros momentos ele ganhou metade do tinha anteriormente;
- Nos momentos 4 e 5, ele permaneceu com uma constante;
- Nos momentos 6 em diante ele perdia metade do que tinha anteriormente.

Com isso, nota-se que no intervalo $[0, 3]$, o valor inicial está sendo mul-

tiplicado pelo fator 1,5, ou seja, temos um crescimento exponencial; no intervalo $]3, 6[$, devemos ter o gráfico de uma função constante; e no intervalo $[6, 8]$, o valor acumulado será multiplicado pelo fator 0,5, outra função exponencial.

Assim, podemos considerar as alternativas B e D. Mas:

$$f(3) = 64 \cdot 1,5^3 = 216.$$

Isto é, em $x = 3$, o valor acumulado deve ser maior que 200, algo que, dentre essas duas, só acontece na alternativa **D**.



Capítulo 5: Função Logarítmica

Questão 1

Devemos calcular o valor de d para que $P(d) = 80$, isto é:

$$120 - 20 \log(d) = 80$$

$$20 \log(d) = 40 \Leftrightarrow \log(d) = 2$$

Pela definição de logaritmos:

$$\log(d) = 2 \Leftrightarrow d = 10^2$$

Portanto, a resposta é a alternativa **C**: 100 metros.

Questão 2

Vamos calcular o valor de t para o qual $V(t) = 15000$:

$$25000 - 10000 \cdot \log(t + 1) = 15000$$

$$10000 \cdot \log(t + 1) = 10000$$

$$\log(t + 1) = 1 \Leftrightarrow t + 1 = 10^1$$

$$t = 9$$

Portanto, a resposta é a alternativa **B**: 9 anos.

Questão 3

Seja $H^+ = 6,3 \times 10^{-5}$, devemos calcular

$$pH = -\log(6,3 \cdot 10^{-5})$$

Como o log do produto é igual à soma dos log, temos:

$$pH = -(\log 6,3 + \log 10^{-5})$$

Eliminando-se os parênteses e usando a propriedade do log de uma potência, vem:

$$pH = -\log \frac{63}{10} + 5 \log 10$$

Usando a propriedade do log do quociente:

$$pH = 5 \log 10 - \log 63 + \log 10$$

Usando $\log 10 = 1$ e $63 = 7 \cdot 3^2$, vem:

$$pH = 5 + 1 - (\log 7 + \log 3^2)$$

$$pH = 6 - (0,84 + 2 \cdot 0,48) = 4,2$$

Logo, a resposta é a alternativa **C**: próximo ao garimpo.



Questão 4

A função fornecida no enunciado é:

$$C(x) = 350 \cdot \log_2(x + 4)$$

Analisando os pontos destacados:

- Para $x = 0$: $C(0) = 350 \cdot \log_2(4) = 700$
- Para $x = 4$: $C(4) = 350 \cdot \log_2(8) = 1050$

Esses valores aparecem no gráfico da **alternativa D**, tornando-a a correta.

Análise das demais alternativas:

A) Usa $\log_{10}(x + 4)$, com crescimento muito mais lento. Valores: $C(0) \approx 250$, $C(4) < 500$.

B) Usa $\log_2(x)$, que é indefinido para $x = 0$. O gráfico mostra $C(0) = 0$, o que é incorreto.

C) Usa $\log_2(x + 2)$. Os valores são diferentes dos esperados: $C(0) = 350$ e $C(4) < 1000$.

Questão 5

Queremos encontrar o menor número de parcelas n tal que o valor da prestação P não ultrapasse R\$ 400,00. A fórmula fornecida é:

$$P = \frac{65 \cdot 1,013^n}{1,013^n - 1}$$

Queremos que $P \leq 400$. Então:

$$\frac{65 \cdot 1,013^n}{1,013^n - 1} \leq 400$$

Multiplicando ambos os lados pela expressão do denominador (que é positiva para $n > 0$):

$$65 \cdot 1,013^n \leq 400(1,013^n - 1)$$

Distribuindo o 400:

$$65 \cdot 1,013^n \leq 400 \cdot 1,013^n - 400$$

Passando todos os termos com $1,013^n$ para o mesmo lado:

$$65 \cdot 1,013^n - 400 \cdot 1,013^n \leq -400$$

$$355 \cdot 1,013^n \geq 400$$

$$1,013^n \geq \frac{400}{355}$$

Aplicando logaritmos e suas propriedades:

$$\log(1,013)^n \geq \log \frac{400}{355}$$

$$n \cdot \log(1,013) \geq \log 400 - \log 355$$

Usando as aproximações fornecidas, vem:

$$n \cdot 0,005 \geq 2,602 - 2,525$$

$$n \geq \frac{0,077}{0,005} = 15,4$$

Como n precisa ser um número inteiro, o menor valor possível é $n = 16$. Resposta: alternativa **E**.



7 Referências Bibliográficas

- [1] AGÊNCIA AMAPÁ. **FOTOS: Com show de luzes e potência das aparelhagens, Super Pop Live agita multidão na 53ª Expofeira do Amapá.** 31 ago. 2024. Disponível em: <https://www.agenciaamapa.com.br/>. Acesso em: 10 maio 2025.
- [2] ALVES, J. C. et al. **Caracterização de parâmetros de qualidade da água na área de influência do rio Arari, Ilha de Marajó, Pará.** Revista Ambiente & Água, v. 7, n. 2, p. 7–22, 2012. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ambiagua/a/f45JMMTdfXvPWLmM6mbDX6K/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 01 de maio de 2025.
- [3] BARBOSA, Fábio. **O fenômeno do encontro das águas em Santarém.** Diário do FB, 21 jun. 2018. Disponível em: <https://diariodofb.com/2018/06/21/o-fenomeno-do-encontro-das-aguas-em-santarem/>. Acesso em: 4 de junho de 2025.
- [4] BONJORN, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: conjuntos e funções: ensino médio.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.
- [5] BONJORN, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: funções e progressões: ensino médio.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.
- [6] BONJORN, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas: ensino médio.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020. (Questão da Unifor-CE retirada da p. 88).
- [7] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 06 de maio de 2025.
- [8] DIÁRIO ONLINE. **Salinas, a praia da COP 30 no Pará.** DOL – Diário Online, 3 mar. 2025. Disponível em: <https://cop.dol.com.br/amazonia/salinas-a-praia-da-cop-30-no-para/6091/>. Acesso em: 4 de junho de 2025.
- [9] FAUNA E FLORA. **Publicações sobre botos cor de rosa no Marajó.** Facebook. Disponível em: <https://www.facebook.com/profile.php?id=100063604717416>. Acesso em: 09 de maio de 2025.
- [10] FOLHA DO JALAPÃO. **APARECIDA: Tradicional produção de farinha de mandioca é fomentada com o apoio da Prefeitura.** Disponível em: <https://folhadojalapao.com.br/>. Acesso em: 10 de maio de 2025.



- [11] GRUPO DE INVESTIGAÇÃO AMBIENTAL. **Características físicas e químicas dos rios amazônicos**. 2015. Disponível em: <https://gia.org.br/porta1/caracteristicas-fisicas-e-quimicas-dos-rios-amazonicos/>.
- [12] INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): Caderno de questões**. Brasília: INEP, 2010. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br>. Acesso em: 03 de abril de 2025.
- [13] INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): Caderno de questões**. Brasília: INEP, 2017. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br>. Acesso em: 06 de abril de 2025.
- [14] INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): Caderno de questões**. Brasília: INEP, 2018. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br>. Acesso em: 12 de abril de 2025.
- [15] INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): Caderno de questões**. Brasília: INEP, 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br>. Acesso em: 05 de abril 2025.
- [16] INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): Caderno de questões**. Brasília: INEP, 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br>. Acesso em: 18 de abril 2025.
- [17] G1 SANTARÉM. **Projeto de piscicultura desenvolvido em Oriximiná é destaque em congresso internacional**. G1, Santarém, 30 out. 2020. Disponível em: <<https://g1.globo.com/pa/santarem-regiao/noticia/2020/10/30/projeto-de-piscicultura-desenvolvido-em-oriximina-e-destaque-em-congresso-internacional.ghtml>>. Acesso em: 4 jun. 2025.
- [18] LIMA, E. L., et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012, v. 1.
- [19] MAIRON pelo Mundo. **Viagem de barco: Manaus – Santarém**. 5 set. 2022. Disponível em: <https://maironpelomundo.com/2022/09/05/viagem-de-barco-manaus-santarem/>. Acesso em: 09 de maio de 2025.
- [20] MIRANDA, G. H. B. et al. **Qualidade dos recursos hídricos da Amazônia – Rio Tapajós: avaliação de caso em relação aos elementos químicos e parâmetros físico-químicos**. Revista Ambiente & Água, v. 4, n. 1, p. 7–22, 2009. Disponível em: <https://www.ambi-agua.net/seer/index.php/ambi-agua/article/view/210/356>. Acesso em: 01 de maio de 2025.
- [21] NEXO JORNAL. **Como a crise climática ameaça o cultivo do açaí**. Nexo Jornal, 30 jul. 2023. Disponível em:



- <<https://www.nexojornal.com.br/externo/2023/07/30/como-a-crise-climatica-ameaca-o-cultivo-do-acai>>. Acesso em: 4 de junho de 2025.
- [22] O LIBERAL. **Ir lá embaixo: a tradição que conecta gerações no comércio de Belém.** Disponível em: <https://www.oliberal.com/para/>. Acesso em: 15 de abril de 2025.
- [23] OLIVEIRA, L. A. dos S. **Monitoramento da qualidade da água em igarapés urbanos de Belém-PA.** 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
- [24] PARÁ. Secretaria de Estado de Meio Ambiente. **Gestão das águas: por um futuro sem sede.** Belém: SEMA, 2010.
- [25] PORTAL AMAZÔNIA. **Portal Amazônia responde: o que é miriti?** Disponível em: <https://portalamazonia.com/cultura/porta-amazonia-responde-o-que-e-miriti/>. Acesso em: 12 abril de 2025.
- [26] PRAÇA DA REPÚBLICA BELÉM (@pracadarepublicabelem). **Publicações sobre a Praça da República em Belém-PA.** Instagram. Disponível em: <https://www.instagram.com/pracadarepublicabelem/>. Acesso em: 02 de maio de 2025.
- [27] RABETAS DO PARÁ. **Publicações sobre embarcações tradicionais do Pará.** Facebook. Disponível em: <https://www.facebook.com/profile.php?id=100071607955433>. Acesso em: 09 de maio de 2025.
- [28] SIOLI, H. **Valores de pH de águas Amazônicas.** Boletim do Museu Paraense Emílio Goeldi, Geologia, v. 1, p. 1–35, 1956.
- [29] UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ. **Dia da Árvore: Açaí é a principal árvore da Providência Amazônica.** UFPA, 20 set. 2017. Disponível em: <https://ufpa.br/>. Acesso em: 10 maio 2025.