UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

UDO ANDRADE DE MELO

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS NO ENSINO DE ÁREA DE QUADRILÁTEROS NA EDUCAÇÃO PRESENCIAL MEDIADA POR TECNOLOGIA

BELÉM – PARÁ

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D278s de Melo, Udo Andrade.
Sequências didáticas no ensino de área de quadriláteros na educação presencial mediada por tecnologia. / Udo Andrade de Melo. — 2025.
151 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Paulo Vilhena
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2025.

1. Sequências Didáticas. 2. Geogebra. 3. Ensino de Matemática. 4. Educação Presencial Mediada por Tecnologia. I. Título.

CDD 516.22

UDO ANDRADE DE MELO

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS NO ENSINO DE ÁREA DE QUADRILÁTEROS NA EDUCAÇÃO PRESENCIAL MEDIADA POR TECNOLOGIA

Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado a Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva.

Data da Aprovação: 11.03.2025

Banca Examinadora

gov.br
Documento assinado digitalmente
PAULO VILHENA DA SILVA
Data: 24/03/2025 09:17:09-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva
Instituto de Ciências Exatas e Naturais / ICEN / UFPA - Orientador
(Presidente/ PROFMAT)

gov.br
Documento assinado digitalmente
LENIO FERNANDES LEVY
Data: 24/03/2025 10:36:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Lênio Fernandes Levy
Instituto de Ciências Exatas e Naturais / ICEN / UFPA – Membro Interno

gov.br
Documento assinado digitalmente
DANIANA DE COSTA
Data: 24/03/2025 09:48:20-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dra Daniana de Costa
UFPA/ Salinópolis – Membro Externo

UDO ANDRADE DE MELO

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS NO ENSINO DE ÁREA DE QUADRILÁTEROS NA EDUCAÇÃO PRESENCIAL MEDIADA POR TECNOLOGIA

Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado a Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, sob orientação do Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva.

BELÉM – PARÁ

2025

Dedico este trabalho à minha família, por todo o amor, apoio e incentivo incondicional em cada passo desta jornada.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus por ter me concedido saúde, força e sabedoria em todos os períodos do mestrado.

Ao meu orientador, professor Dr. Paulo Vilhena da Silva, que acreditou no meu potencial e, com suas orientações, me incentivou a realizar um trabalho de excelência, proporcionando valiosos conhecimentos.

Neste terceiro parágrafo, quero dedicar minhas palavras aos meus professores do mestrado, que souberam conduzir suas missões com sabedoria ao longo desse período. A cada encontro, um novo desafio, uma nova experiência e uma perspectiva diferente sobre a matemática.

À minha esposa, Emmily Caroline Cabral da Fonseca, que me incentivou a prestar a prova para ingressar no mestrado e que, ao longo do curso, foi minha rede de apoio, demonstrando amor, carinho e companheirismo, além de me encorajar em todos os aspectos.

Aos meus pais, Osvaldo Moraes de Melo e Kátia Regina Andrade de Melo, pelo amor, incentivo e orações.

Ao meu irmão, Antônio Marinho Melo Neto, que sempre me deu força para seguir em frente com palavras de incentivo.

Neste penúltimo parágrafo, quero dedicar um agradecimento especial aos meus companheiros de mestrado, pessoas incríveis, e dizer que foi uma honra compartilhar conhecimentos e experiências, vivenciando este período acadêmico ao lado de profissionais de excelência. Como disse Isaac Newton: “Se eu pude ver mais longe, foi porque me apoiei no ombro de gigantes.”

Por fim, agradeço a todo o corpo técnico e acadêmico da Universidade Federal do Pará.

A educação deve possibilitar ao corpo e à alma toda a perfeição e a beleza que podem ter.

Platão

RESUMO

Esta dissertação investiga o uso de sequências didáticas no ensino de área de quadriláteros, aplicadas na modalidade de Educação Presencial Mediada por Tecnologia (SPMT). O objetivo principal é desenvolver uma abordagem didática que permita aos professores e alunos utilizar o software GeoGebra como ferramenta auxiliar na compreensão e cálculo da área de quadriláteros. O estudo se justifica pela necessidade de adaptação do ensino de matemática a contextos rurais, onde desafios como infraestrutura limitada e barreiras geográficas dificultam o acesso à educação de qualidade. A fundamentação teórica explora conceitos de sequências didáticas, tecnologias educacionais e o ensino da geometria. A pesquisa propõe uma sequência estruturada de atividades que incentivam a exploração interativa dos conceitos matemáticos. Trata-se de uma pesquisa aplicada, com abordagem qualitativa e caráter exploratório. O estudo foi desenvolvido por meio de uma pesquisa bibliográfica sobre sequências didáticas e metodologias ativas, além da elaboração e aplicação de uma sequência estruturada de atividades interativas baseadas no GeoGebra. Os resultados indicam que o uso do GeoGebra facilita a visualização e compreensão dos conceitos geométricos, promovendo um aprendizado mais dinâmico e significativo. O estudo destaca a importância do professor como mediador nesse processo, enfatizando a necessidade de formação adequada para o uso de tecnologias educacionais. Conclui-se que a integração entre tecnologia e sequências didáticas representa uma alternativa eficaz para aprimorar o ensino da matemática em contextos desafiadores.

Palavras-chave: Sequências Didáticas, GeoGebra, Ensino de Matemática, Educação Mediata por Tecnologia, Quadriláteros.

ABSTRACT

This dissertation investigates the use of didactic sequences in teaching the area of quadrilaterals, applied within the framework of Technology-Mediated In-Person Education (SPMT). The primary objective is to develop a didactic approach that enables teachers and students to use GeoGebra as a supporting tool for understanding and calculating the area of quadrilaterals. The study is justified by the need to adapt mathematics teaching to rural contexts, where challenges such as limited infrastructure and geographical barriers hinder access to quality education. The theoretical foundation explores concepts of didactic sequences, educational technologies, and geometry teaching. The research proposes a structured sequence of activities that encourage interactive exploration of mathematical concepts. This is applied research with a qualitative and exploratory approach. The study was developed through a literature review on didactic sequences and active methodologies, in addition to the elaboration and application of a structured sequence of interactive activities based on GeoGebra. The results indicate that using GeoGebra facilitates the visualization and comprehension of geometric concepts, promoting a more dynamic and meaningful learning experience. The study highlights the role of the teacher as a mediator in this process, emphasizing the need for proper training in educational technologies. It is concluded that integrating technology and didactic sequences represents an effective alternative to improving mathematics teaching in challenging contexts.

Keywords: Didactic Sequences, GeoGebra, Mathematics Teaching, Technology-Mediated Education, Quadrilaterals.

Lista de Ilustrações

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este trabalho tem como objetivo elaborar uma sequência didática que poderá ser utilizada por professores e/ou estudantes para, com o auxílio do software GeoGebra, calcular a área de quadriláteros. Nossa proposta é que o estudante consiga com materiais de uso escolar calcular a área de uma região plana, principalmente os quadriláteros.

Entendemos ainda que o ensino de matemática em áreas rurais do Pará enfrenta desafios significativos devido às distâncias geográficas, à falta de infraestrutura e à necessidade de adaptar o ensino às realidades locais, conforme constatado por Albuquerque,

> muitas escolas localizadas em áreas remotas da Amazônia possuem infraestrutura inadequada, o que dificulta a implementação de práticas pedagógicas mais inovadoras e interativas. Essa carência compromete a qualidade do ensino e limita as possibilidades de promover metodologias ativas que poderiam enriquecer o aprendizado. (ALBUQUERQUE, 2025, p.53).

O Sistema Presencial Mediado por Tecnologia (ou Educação Presencial Mediada por Tecnologia) surge como uma solução viável para mitigar esses desafios, permitindo que o conhecimento matemático chegue a comunidades isoladas.

O Sistema Presencial Mediado por Tecnologia (SPMT) é uma modalidade de ensino que combina o ambiente presencial com a mediação tecnológica para promover a educação em regiões distantes e de difícil acesso. Segundo Mourão (2009), o SPMT

> Caracteriza-se pela utilização de recursos tecnológicos que contribuem com o processo de ensino-aprendizagem transmitido pela televisão em tempo real, exigindo a presença física dos alunos em sala de aula durante a transmissão das aulas. Além disso, o sistema envolve a participação de professores titulares, que ministram as aulas de forma interativa, e professores assistentes, que orientam os alunos localmente, garantindo uma assistência mais personalizada e próxima do estudante (Mourão, 2009, p. 30).

Esse modelo de ensino iniciou no Amazonas, em 2009, e hoje está presente em vários estados brasileiros, incluindo o Pará, mostrando que o cenário educacional contemporâneo está em constante transformação, impulsionado pelo avanço das tecnologias digitais e a necessidade de metodologias pedagógicas inovadoras que acompanhem essas mudanças.

Neste contexto, as sequências didáticas podem ser consideradas como uma abordagem pedagógica eficaz para a construção do conhecimento, pois organizam o ensino em etapas que promovem a interação entre teoria e prática (Zabala, 1998). Quando aliadas à tecnologia, essas sequências podem potencializar a aprendizagem, oferecendo novas ferramentas e recursos que enriquecem o processo educativo.

Além disso, de acordo com Oliveira e Leivas (2017), a Geometria, por seu aspecto visual, possui o potencial de promover o desenvolvimento da percepção e da autonomia do pensamento e raciocínio dos estudantes, sem a dependência de fórmulas e estruturas previamente estabelecidas. Esses temas, presentes no campo da Geometria, ressaltam a importância de o professor adotar metodologias que favoreçam uma aprendizagem mais eficaz por parte dos alunos.

Nesse sentido, propomos o uso de sequências didáticas como metodologia de ensino de geometria, especificamente, a área de quadriláteros, e proporemos uma sequência didática que pode ser aplicada na Educação Presencial Mediada por Tecnologia no Pará, pois entendemos que tal proposta metodológica **tem o potencial para contribuir como facilitadora do ensino em áreas remotas devido aos recursos interativos e adaptáveis.**

Salientamos ainda que a motivação para a elaboração dessa pesquisa deve-se ao fato de que, atuo na Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA), especificamente no Centro de Mídias da Educação Paraense (CEMEP), e, atuar nessa área de ensino despertou em mim o interesse para escrever tal pesquisa, que propõe as sequências didáticas como tentativa de amenizar as dificuldades encontradas no ensino de matemática para alunos que residem em comunidades de difícil acesso de nossa região.

Tais comunidades foram selecionadas pela Secretaria de Estado da Educação do Pará (SEDUC), conforme destacado em seu site oficial,

> Cada localidade vai receber uma antena de internet via satélite da Starlink, que garante velocidade de 200mbs, e cada turma vai receber um kit formado por notebook e televisão. A distribuição dos equipamentos vai atender mais de 3.500 estudantes nas novas turmas.
>
> Conforme o Estado, os municípios contemplados com os 171 kits são: Afuá, Faro, Óbidos, Santarém, Belterra, Juruti, Mojuí Dos Campos, Curralinho, Muaná, Portel, Porto de Moz, Melgaço, Bagre, Oeiras do Pará, São Sebastião da Boa Vista, Cametá, Colares, Cachoeira Do Piriá, Cumaru do Norte, Itupiranga, Vitória do Xingu, São Félix do Xingu e Oriximiná. (SEDUC, 2024).

Nesse contexto, a Educação Presencial Mediada por Tecnologia é utilizada como metodologia de ensino, garantindo a oferta de educação pública de qualidade em comunidades rurais.

Rodrigues (2024) enfatiza que,

> devemos considerar neste processo, a preparação do docente com relação ao software utilizado, pois, como devemos destacar, as tecnologias digitais somente trazem resultados colaborativos a educação quando utilizadas de forma a integrar a atividade educacional em sua complexidade. (Rodrigues, 2024, p.53).

Diante da baixa proficiência em matemática dos alunos das escolas públicas do Pará, com uma média de 258,87 — classificada como insuficiente — segundo o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)[1] (QEDU, 2024), o decidi investigar metodologias que promovam uma aprendizagem mais eficaz. Nesse cenário, surgiu o interesse em explorar as sequências didáticas.

Fizemos a busca na literatura textos que tratassem sobre as sequências didáticas, e de como elas ajudaram outros professores a reduzirem as dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem de matemática, especificamente com o trabalho relacionado ao estudo dos quadriláteros. Assim, a respeito das sequências didáticas como forma de amenizar as dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem, Macedo Guedes (2024) salienta que,

> Constatou-se também boa comunicação entre eles incluindo debates que favoreciam a aprendizagem, além disso o número de acertos e a participação nos trabalhos foram satisfatória, e após as aulas e as avaliações o professor propôs uma conversa para saber a opinião da turma em relação ao produto apresentado e a sequência didática, **o resultado também foi satisfatório pois eles relataram que gostaram da maneira como o assunto foi mostrado, afirmaram que o material é atrativo pois é fácil de ser compreendido, além disso os estudantes sugeriram que o produto fosse usado em outras turmas**, porém com algumas mudanças como a mudança da cidade, explicaram que na turma em questão o mapa da cidade de Belém fosse trocado pelo mapa da cidade de Acará ou da comunidade em que vivem (Nínive), além disso responderam de forma positiva quando foram questionados sobre a importância da geometria analítica e suas aplicabilidades. (Macedo Guedes, 2024, p.24) “negrito nosso”.

Para a pesquisa, foi escolhido o tema da área de quadriláteros, pois permite valorizar os conhecimentos empíricos das comunidades, que utilizam unidades de medida de área próprias, como alqueire[2], tarefa[3] e are[4]. Essa abordagem busca conectar o conteúdo matemático às práticas e realidades locais, favorecendo uma aprendizagem mais significativa.

Para Farias (2022),

> A teoria de Ausubel tem como foco a aprendizagem cognitiva resultante do armazenamento organizado de informações na mente do ser que aprende. Na aprendizagem, entretanto, é imprescindível considerar o contexto social, cultural e econômico em que o sujeito está inserido, **criando condições que possibilitem a aprendizagem significativa eu, ao lidar com pessoas num contexto social, respeitando seus significados, e não com leis abstratas gerais de aprendizagem**; dando condições de o indivíduo participar ativamente do processo de aprendizagem e colaborar de forma consciente para as necessidades sociais que passam a perceber. (FARIAS, 2022, p.63). “negrito nosso”.

---

[1] O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é um conjunto de avaliações externas em larga escala que fornece diagnósticos sobre a educação básica brasileira e fatores que impactam o desempenho dos estudantes (INEP, 2024)

[2] Uma medida de origem portuguesa que varia de acordo com o estado brasileiro. Por exemplo, um alqueire baiano equivale a 96.800 metros quadrados, enquanto um alqueire do norte equivale a 27.200 metros quadrados.

[3] Uma medida utilizada principalmente na região Nordeste do Brasil e pode variar entre 2.500 e 3.000 metros quadrados.

[4] A unidade de medida fundamental, correspondendo a uma superfície de 100 m².

Dessa forma, foi formulada a questão norteadora: Como ensinar o conteúdo de área de quadriláteros utilizando a metodologia de sequência didática na modalidade de Educação Presencial Mediada por Tecnologia em comunidades rurais do Pará?

Este estudo se justifica pela necessidade crescente de práticas pedagógicas que integrem o ensino tradicional às inovações tecnológicas, promovendo uma aprendizagem mais eficaz e envolvente. Ao investigar a interseção entre sequências didáticas e tecnologia, esta pesquisa contribuirá para a elaboração de estratégias de ensino mais adaptadas às demandas do século XXI. O foco na área de Geometria, especificamente na área de quadriláteros, proporciona uma oportunidade para explorar a aplicação prática dessas metodologias em um campo específico da matemática, oferecendo uma compreensão valiosa para o desenvolvimento de futuras práticas educacionais.

Carvalho (2017) salienta ainda que

> Os resultados deste **estudo indicam que a elaboração e desenvolvimento de sequências didáticas colocam ao professor a perspectiva de tornar-se pesquisador de sua própria prática**, vez que desempenha papel de articulador, organizador, incentivador e mediador no fazer de sala de aula, ao mesmo tempo em que coloca o estudante na centralidade do processo de ensino e aprendizagem. (Carvalho, 2017, p.8). “negrito nosso”.

Deste modo, procuraremos construir uma sequência didática, utilizando o *software* GeoGebra, que auxilie os alunos no processo de aprendizagem de conceitos básicos a respeito dos quadriláteros e, como destacaremos neste trabalho, como esse programa pode ser de grande valia para reduzir as dificuldades encontradas pelos alunos no processo de ensino-aprendizagem.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No primeiro capítulo deste trabalho faremos uma pesquisa sobre o referencial teórico que tomaremos a partir das Sequências Didáticas, de como tais ferramentas podem e foram utilizadas por outros professores para poder amenizar as dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem. Essas teorias enfatizam a importância de contextos significativos para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Além disso, será considerada a Educação Presencial Mediada por Tecnologia, dentro das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), que explora como as tecnologias digitais podem facilitar o processo de ensino-aprendizagem, especialmente em contextos de difícil acesso.

Rodrigues (2024) salienta que

> Quanto ao Ensino Fundamental, o professor deve servir como orientador no uso das tecnologias, de forma que os alunos se utilizem das mesmas em situações diárias, de uma maneira consciente, reflexiva, crítica, responsável. No que tange ao Ensino Médio, deve aprofundar o letramento e o multiletramento na linguagem e na cultura digital, pois parte do propósito de que nessa etapa da formação o aluno já tenha mais conhecimentos tecnológicos e tem atitude mais proativa. (Rodrigues, 2024, p.19)

Assim sendo, discorreremos brevemente sobre o que são as Sequências Didáticas e faremos um resumo sobre o trabalho de três egressos do PROFMAT, a saber:

Quadro 1: Características da dissertação da egressa PROFMAT Daiele Cristine Pereira Rodrigues

Autora	Tema
Daiele Cristine Pereira Rodrigues	Uma proposta de sequência didática utilizando o GeoGebra como recurso de ensino de fatoração
Metodologia	**Capítulos**
• Pesquisa qualitativa e exploratória. • Levantamento bibliográfico e desenvolvimento de uma sequência didática baseada em problemas para integrar conteúdos de álgebra e geometria. • Uso do GeoGebra para demonstrar relações algébricas e geométricas.	**Capítulo 1 - Introdução:** • Discussão sobre a evolução das tecnologias digitais na educação e sua importância no ensino de Matemática. • Relevância da fatoração no contexto do Ensino Fundamental e os desafios no seu ensino. **Capítulo 2 - Fundamentos Teóricos:** • Exploração das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no ensino. • Potencialidades do GeoGebra como ferramenta didática.

	• Metodologia de ensino-aprendizagem baseada na resolução de problemas. **Capítulo 3 - Procedimentos Metodológicos:** • Descrição das estratégias usadas para elaborar e aplicar a sequência didática. • Detalhes sobre o público-alvo (alunos do 9º ano), estrutura curricular, e planejamento das aulas. **Capítulo 4 - Sequência Didática:** • Atividades divididas em aulas para abordar casos específicos de fatoração, como fator comum, agrupamento, diferença de quadrados, e trinômio quadrado perfeito. • Uso do GeoGebra para criar representações visuais e facilitar o entendimento dos conceitos. **Considerações Finais:** • Conclusões sobre os benefícios do uso de tecnologias digitais, como o GeoGebra, no ensino de Matemática. • Reflexões sobre a integração entre métodos tradicionais e tecnologias para tornar o aprendizado mais dinâmico e significativo.
Considerações finais e reflexões	
A pesquisa propôs uma sequência didática para o ensino de fatoração no Ensino Fundamental, utilizando o GeoGebra. O objetivo era explorar as possibilidades pedagógicas dessa ferramenta para o ensino e aprendizagem. A pesquisa mostrou que o GeoGebra pode auxiliar os alunos a relacionarem representações geométricas e algébricas da matemática. O papel do professor como mediador é crucial, e o uso do GeoGebra deve ir além do entretenimento, integrando-se à atividade educacional de forma complexa. O estudo também abordou desafios no ensino de Matemática, como a percepção negativa dos alunos e a necessidade de métodos de ensino mais dinâmicos. A pesquisa defende a integração de tecnologias digitais, como o GeoGebra, aos métodos tradicionais, visando um ensino mais significativo e dinâmico. A experiência da pesquisadora em sala de aula motivou a criação da sequência didática, buscando estratégias para tornar os alunos protagonistas na resolução de problemas.	

A pesquisa também visa auxiliar outros professores e promover um ensino de Matemática mais acessível e relevante para os alunos da atual geração.

Fonte: Próprio autor

Quadro 2: Características da dissertação do egresso PROFMAT Augusto César Macedo Guedes

<table>
<tr><th>Autor</th><th>Tema</th></tr>
<tr><td>Augusto Cesar Macedo Guedes</td><td>Sequência Didática para o ensino de geometria analítica</td></tr>
<tr><th>Metodologia</th><th>Capítulos</th></tr>
<tr><td>
• Tipo de Pesquisa: Relato de experiência com levantamento de informações e intervenção pedagógica.
• Contexto: Realizada em uma escola estadual no município de Acará/PA, em uma turma de 20 estudantes.
• Instrumentos: Conversas com alunos e professores para identificar metodologias utilizadas e suas opiniões sobre as aulas de Matemática.
• Produto: Aplicação de uma sequência didática baseada em atividades práticas e contextualizadas.
</td><td>
Fundamentação Teórica:
• Desafios da Educação Matemática no Brasil.
• Importância do letramento matemático e do ensino contextualizado.
Conceitos de Geometria Analítica:
• Plano cartesiano, pontos, distância entre dois pontos, ponto médio, alinhamento de três pontos, equação da reta e posição relativa entre retas.
Proposta da Sequência Didática:
• Uso de mapas de Belém com sobreposição de um plano cartesiano para atividades práticas.
• Atividades incluem identificar coordenadas, calcular distâncias e pontos médios, verificar alinhamentos e resolver problemas geométricos reais.
• Materiais como cartazes e mapas impressos utilizados devido à ausência de tecnologias avançadas no local.
Metodologia e Aplicação:
• Dividida em etapas progressivas, incluindo introdução aos conceitos, atividades práticas e avaliações.
• Envolveu aulas expositivas, debates e questionários para avaliação dos resultados.
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Considerações finais e reflexões</th></tr>
<tr><td colspan="2">A aplicação da sequência didática enfrentou dificuldades como a desconfiança dos alunos com o material concreto e suas limitações em matemática básica. Revisões foram necessárias, e o interesse aumentou com a proximidade de avaliações. Apesar disso, houve boa participação, discussões e resultados satisfatórios. Os alunos apreciaram a metodologia, sugerindo adaptações como mapas locais e a participação na produção do material.</td></tr>
</table>

A sequência foi considerada eficaz, com recomendações para ajustes e diagnósticos prévios. A experiência demonstrou o potencial do material para aproximar a matemática da realidade dos alunos, com adaptações para diferentes contextos.

Fonte: Próprio autor

Quadro 3: Características da dissertação do egresso PROFMAT Euvaldo de Souza Carvalho

Autor	**Tema**
Euvaldo de Souza Carvalho	Sequência Didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração
Metodologia	**Capítulos**
• Explora os diferentes significados das frações (parte-todo, quociente, operador multiplicativo, medida e número). • Analisa como o conceito de fração é abordado em livros didáticos e as dificuldades dos estudantes em aprender o tema, evidenciadas em avaliações externas como Prova Brasil e ENEM. • Fundamenta-se na Engenharia Didática e Sequências Didáticas, com base em teóricos como Zabala e Brousseau. • Apresenta uma revisão da literatura sobre estratégias pedagógicas voltadas para a centralidade do estudante no processo de aprendizagem. • Descreve atividades práticas e interativas que buscam tornar o	**Capítulo 1: A Caminho do Objeto de Investigação** • Introduz as motivações e justificativas para a escolha do tema frações. • Explora as dificuldades de aprendizado desse conceito em estudantes do Ensino Fundamental, evidenciadas em avaliações como Prova Brasil e ENEM. **Capítulo 2: Encaminhamentos Metodológicos** • Detalha os métodos adotados para a pesquisa, com base na Engenharia Didática. • Explica a importância de elaborar sequências didáticas como ferramentas pedagógicas que facilitam a centralização do estudante no processo de aprendizagem. **Capítulo 3: Sequência Didática** • Discute conceitos teóricos sobre sequências didáticas e como implementá-las. • Apresenta a Sequência Fedathi, uma abordagem que estimula a participação ativa do estudante, e a metodologia da Engenharia Didática. • Enfatiza a necessidade de práticas pedagógicas reflexivas para melhorar o ensino de frações. **Capítulo 4: Uma Sequência Didática Como Proposta para o Ensino do Conceito de Fração** • Propõe uma sequência didática prática para abordar frações no Ensino Fundamental. • As atividades são divididas em etapas: sondagem inicial, exploração intuitiva, aplicação prática e avaliação.

aprendizado de frações mais significativo. • O professor é incentivado a atuar como mediador e pesquisador de sua prática, enquanto o estudante assume um papel ativo.	• Valoriza o trabalho em equipe, a socialização do conhecimento e a interação professor-aluno. **Capítulo 5: Algumas Considerações em Relação à Proposta de Sequência Didática** • Reflete sobre os resultados obtidos e os desafios na aplicação da sequência didática. • Destaca a importância do professor como pesquisador da própria prática e a relevância de colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem.
Considerações finais e reflexões	
O texto discute a importância de um ensino de matemática que vá além de fórmulas e técnicas, focando no desenvolvimento do pensamento crítico e na autonomia dos alunos. O professor deve atuar como mediador, criando sequências didáticas significativas e relevantes para a vida dos estudantes. A abordagem construtivista é defendida, onde o aluno é o centro do processo de aprendizagem e o professor um pesquisador de sua própria prática. A proposta apresentada na dissertação busca aplicar essa visão, com atividades que conectam a matemática ao cotidiano dos alunos e os incentivam a construir o conhecimento de forma ativa e colaborativa. O trabalho destaca a importância de apresentar diferentes significados e representações das frações desde o início do aprendizado, algo que geralmente não é feito nos livros didáticos. A sequência didática proposta é vista como um exemplo de ensino acessível e engajador, embora precise de ajustes e adaptações para diferentes contextos. A pesquisa reconhece a necessidade de estudos futuros para aplicar a proposta em sala de aula, identificar obstáculos e aprimorar as estratégias de ensino, incluindo o uso de diferentes registros de representação semiótica.	

Fonte: Próprio autor

Também foram de grande relevância para a elaboração deste projeto de pesquisa sobre o que são as sequências didáticas e qual o seu papel para o processo de ensino-aprendizagem os livros dos autores destacados nos quadros a seguir:

Quadro 4: Características do livro *Didática da Matemática: Reflexões e Experiências*

Autor	Tema
Gérard Vergnaud (organizador)	Este livro aborda os fundamentos teóricos e práticos da didática da matemática, explorando como os conceitos matemáticos são construídos e compreendidos pelos alunos.
Metodologia	**Capítulos**

A obra combina reflexões teóricas com relatos de experiências práticas, oferecendo uma visão abrangente sobre o ensino da matemática.	**Fundamentos da Didática da Matemática**: Explora as bases teóricas da disciplina e sua importância no contexto educacional. **Construção do Conceito de Número**: Analisa como os alunos desenvolvem a compreensão dos números e operações básicas. **Resolução de Problemas Matemáticos**: Discute estratégias para ensinar os alunos a resolver problemas de maneira eficaz. **Representações Matemáticas**: Examina diferentes formas de representar conceitos matemáticos e sua relevância no aprendizado. **Sequências Didáticas no Ensino da Matemática**: Apresenta propostas de sequências didáticas para diversos conteúdos matemáticos.

Fonte: Próprio Autor

Quadro 5: Características do livro *Sequências didáticas: orientações para iniciantes na pesquisa em educação matemática*

Autora	Tema
Mikaelle Barboza Cardoso	O livro aborda o uso de sequências didáticas no ensino de Matemática, com foco em sua aplicação em pesquisa acadêmica. Apresenta estratégias para criar, planejar e aplicar atividades pedagógicas organizadas para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem de maneira eficaz. O objetivo é capacitar iniciantes na área para integrarem teoria e prática de forma estruturada.
Metodologia	**Capítulos**
O texto utiliza uma abordagem teórico-prática, combinando orientações pedagógicas, análises baseadas em experiências reais e a inclusão de instrumentais para coleta e análise de dados. Baseia-se em referências consolidadas, exemplos ilustrativos e propostas adaptáveis de aplicação em sala de aula. Destaques	**Introdução:** Contextualiza o conceito de sequência didática como metodologia essencial para ensino estruturado e significativo. **Modelo de Sequência Didática:** Propõe o formato para planejamento de sequências: tema, objetivos, metodologia, materiais e avaliação.

metodológicos incluem: Estruturação de sequências com diagnóstico inicial, planejamento, execução, avaliação formativa e síntese/reflexão. Uso de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para pesquisas acadêmicas em Educação Básica. Propostas práticas com materiais, exemplos de questões e instrumentos de coleta de dados.	**Etapas da Sequência Didática** • Define as etapas essenciais: 1. Diagnóstico inicial (identificação dos conhecimentos prévios dos alunos). 2. Planejamento detalhado com objetivos claros. 3. Execução prática e integração de teoria e prática. 4. Avaliação formativa (verificação do progresso dos alunos). 5. Síntese e reflexão (revisão e melhorias das atividades realizadas). **Análise de Dados:** Explora categorias de análise com base em dados coletados durante a aplicação das sequências. **Modelos de Instrumentais para Coleta de Dados** • Apresenta ferramentas para documentar e avaliar a aplicação das sequências, incluindo: o Roteiros de observação. o Diários de campo para professores. o Questionários para avaliação dos estudantes.

Fonte: Próprio autor

Pautados nessas obras literárias, discorreremos agora sobre as sequências didáticas e suas aplicações nas práticas de ensino.

1.1 Sequências Didáticas

Para Barbosa (2002, apud MONTEIRO et al, 2019, p. 294) as sequências didáticas são como estruturas organizadas de ensino que buscam promover a aprendizagem progressiva de conceitos matemáticos. Ele enfatiza que essas sequências são compostas de atividades planejadas e ordenadas de forma lógica e coerente, levando em conta as dificuldades, os conhecimentos prévios e as potencialidades dos alunos. As sequências didáticas também são uma ferramenta para o professor diagnosticar como os alunos pensam e constroem conceitos, ajustando o ensino conforme necessário.

Barbosa (2002) afirma que

> A sequência didática consiste em uma série de atividades que criam um ambiente que facilita e torna atrativo o ensino de matemática, portanto, as sequências didáticas são um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, sendo organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos. (2002, apud MONTEIRO et al, 2019, p. 294)

Para Vergnaud (1996), o foco no processo de significação e nas conexões entre conceitos e a importância de garantir que as atividades proporcionem situações-problema significativas são as principais características que devemos encontrar ao propor uma sequência didática.

Para o autor,

> Uma sequência didática é estruturada a partir de situações de aprendizagem que desafiem o aluno e o coloquem em contato direto com os conceitos a serem desenvolvidos, promovendo a construção de significados progressivos. (Vergnaud, 1996, p. 87)

Por outro lado, segundo Amaral (2023), as sequências didáticas são um conjunto estruturado de atividades pedagógicas planejadas para atingir objetivos de aprendizagem específicos. Para ela, as sequências devem considerar os objetivos da disciplina, o contexto dos alunos e as metodologias mais adequadas. Elas ajudam a promover o aprendizado gradual e contínuo, fornecendo condições para a apropriação dos conceitos trabalhados.

A autora destaca ainda três pontos centrais sobre as sequências didáticas, salientando que elas precisam apresentar:

- **Planejamento**: Cada atividade deve ser intencional e conectada ao objetivo geral da sequência.
- **Articulação entre teoria e prática**: Propostas que relacionem conceitos abstratos com contextos concretos ou problemas reais.
- **Flexibilidade**: Possibilidade de ajustar as atividades de acordo com os avanços dos alunos ou imprevistos.

Também podemos destacar a obra de Cabral (2017) que explora o conceito de sequências didáticas (SD) como uma metodologia para organizar o ensino de maneira sistemática e eficiente. Cabral defende que a SD deve ser vista como um conjunto de atividades organizadas, que não apenas facilitam o processo de ensino-aprendizagem, mas também promovem um ambiente onde os alunos possam interagir, compartilhar ideias e desenvolver a capacidade de argumentação.

Para Cabral (2017, p.10) “a concepção de se propor as ações de ensino a partir de textos planejados articuladamente em torno de objetos de aprendizagem se adequa às expectativas criadas em torno das novas posturas também esperadas em relação aos alunos”.

Além disso, o autor critica o modelo tradicional de ensino, que muitas vezes coloca o aluno em uma posição passiva, e propõe uma abordagem que valoriza a participação ativa e a colaboração entre pares.

De acordo com Zabala (1998), uma sequência didática consiste em uma série organizada de atividades, estruturadas com o objetivo de facilitar a assimilação gradual de conhecimentos pelos estudantes. Essa organização permite que os alunos construam seu aprendizado de maneira contínua e progressiva, consolidando o que foi aprendido ao longo do tempo.

Segundo Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), uma sequência didática é composta por elementos essenciais que se articulam para garantir a eficácia do ensino, entre os quais destacam-se:

> **Objetivos de Aprendizagem**: Definição clara do que se espera que os estudantes compreendam ao final da sequência.
> **Conteúdos**: Escolha e organização dos temas a serem ensinados.
> **Atividades**: Desenvolvimento de atividades pedagógicas que incentivem a aquisição dos conteúdos trabalhados.
> **Avaliação**: Métodos e critérios utilizados para acompanhar e medir o progresso dos alunos ao longo da sequência. (Dolz, Noverraz e Schneuwly, 2004, p.10)

Percebemos, então, que a sequência didática, em estreita relação com a avaliação, contribui para o avanço contínuo dos estudantes, permitindo a identificação de dificuldades e a adaptação das estratégias de ensino conforme necessário. Esse processo favorece a criação de atividades diversificadas e desafiadoras, que mantêm os alunos envolvidos e motivados ao longo do percurso da disciplina.

Assim, baseados nas concepções desses autores, proporemos uma série de atividades que devem ser realizadas pelos estudantes no software GeoGebra a fim de encontrarem a área de um quadrilátero numa região plana e entendemos que, para isso, o mesmo precise de atividades menos complexas para poder entender a funcionalidade do aplicativo.

1.2 Sequências Didáticas à luz da BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um dos principais documentos oficiais que norteiam a Educação em nosso país, as Sequências Didáticas (SDs) são conjuntos de atividades planejadas para atingir um objetivo educacional específico. Elas ajudam a melhorar a interação entre o professor e os alunos, e entre os alunos, em relação aos assuntos propostos pela BNCC.

A Base enfatiza que o ensino da matemática deve promover o desenvolvimento do pensamento matemático, com ênfase em sequências didáticas estruturadas para aprendizagens progressivas e contextualizadas. Como exemplo, para o 8º ano do Ensino Fundamental, especialmente no eixo de Geometria, a BNCC destaca habilidades específicas que podem ser trabalhadas por **meio de sequências didáticas.**

Trechos da BNCC pertinentes ao 8º ano - Geometria

> Habilidade EF08MA16: Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo da medida da área de superfícies planas e o volume de sólidos geométricos, explorando unidades de medida.
>
> Habilidade EF08MA19: Identificar, descrever e construir figuras planas e espaciais, reconhecendo suas propriedades geométricas. (Brasil, 2018, p. 315)

Como exemplo de Sequência Didática para o Ensino de Geometria - 8º Ano, temos a seguinte atividade mostrada no a seguir.

Tema	Objetivo
Explorando Áreas e Volumes: Figuras Planas e Sólidos Geométricos	Desenvolver o entendimento das fórmulas para cálculo de áreas e volumes, bem como sua aplicação em situações práticas
Etapas	• **1ª Etapa: Diagnóstico e Introdução** • **Objetivo**: Diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos sobre figuras geométricas planas e espaciais. • **Atividade**: Apresente imagens e objetos tridimensionais (como caixas, latas e pirâmides de papel) e peça que identifiquem as formas geométricas e as possíveis relações entre elas. • **2ª Etapa: Descoberta e Sistematização das Fórmulas** • **Objetivo**: Deduzir as fórmulas de área e volume por meio de atividades práticas. • **Atividade**: o Dividir a turma em grupos para calcular a área de superfícies de diferentes objetos reais, como uma caixa aberta (laterais + base). o Discutir a dedução das fórmulas do volume de prismas e cilindros utilizando sólidos geométricos feitos de papelão. o Relação entre a área da base e a altura no cálculo do volume. • **3ª Etapa: Aplicação em Problemas Contextualizados** • **Objetivo**: Resolver problemas com base em situações reais. • **Atividade**: o Resolver problemas que envolvam calcular o volume de uma piscina retangular, uma caixa d’água ou o custo de pintar superfícies planas.

	◦ Criar situações-problema a partir de objetos da sala ou de casa (como calcular quanto papel seria necessário para encapar uma caixa). • **4ª Etapa: Avaliação e Expansão** • **Objetivo**: Avaliar os conhecimentos e expandir para tópicos avançados. • **Atividade**: ◦ Propor um desafio onde os alunos projetem um sólido tridimensional (por exemplo, uma maquete de pirâmide ou prisma) e determinem sua área total e volume.

Fonte: Próprio Autor

Logo, reforçamos ainda três principais formas de como a Sequência se alinha à BNCC, a saber, temos:

1. **Contextualização**: Trabalhar com problemas reais (como pintura, armazenamento ou medidas de construções) promove a aprendizagem duradoura, em sintonia com os princípios da BNCC.
2. **Progressão das Habilidades**: Desde o reconhecimento de formas até o uso de fórmulas matemáticas, a sequência respeita o processo de construção do conhecimento.
3. **Engajamento dos Alunos**: Atividades práticas incentivam a criatividade e o pensamento crítico, conforme sugerido pelas competências gerais da BNCC.

Outra ferramenta importante para a elaboração de nossa pesquisa, são as tecnologias aplicadas a educação, as quais discutiremos no próximo tópico.

1.3 Educação Presencial Mediada por Tecnologia

As Tecnologias de Informação e Comunicação - TIC - referem-se à pluralidade de tecnologias (equipamentos e funções) Leite e Ribeiro (2012, p.175) destacam que as TIC que permitem criar, capturar, interpretar, armazenar, receber e transmitir informações. Mendes (2008) define as TICs como um conjunto de recursos tecnológicos que, quando integrados, proporcionam a automação e/ou a comunicação nos processos existentes nos negócios, no ensino e na pesquisa científica, entre outros. Ambos os autores concordam em afirmar que as TICs são todas as formas de tecnologias utilizadas no tratamento e compartilhamento de informações.

Neste ponto, enquanto autor deste trabalho, gostaria de destacar a importância das TICs para a minha atuação profissional, uma vez que Trabalho no Centro de Mídias da Educação Paraense, onde fazemos a educação mediada por tecnologia. As nossas aulas são feitas dentro de um estúdio e os nossos alunos assistem ao vivo às aulas. Eles assistem aula em sua comunidade, através de um monitor ou televisão.

Dentro dessa sala de aula, há um professor local, que é chamado de professor MEDIADOR, ele organiza os aparelhos, recebe os alunos e nos auxilia nas atividades que são feitas ao vivo.

Kenski (2008) afirma que

> O acompanhamento de algumas dessas ações em redes virtuais de ensino-aprendizagem nos mostra, no entanto, que o êxito dessas iniciativas é diretamente proporcional à frequência das interações didático-comunicativas entre todos os envolvidos, à liderança do mediador e ao trabalho colaborativo realizado por todos os participantes do grupo. (KENSKI, 2008, p.653).

Os alunos podem fazer interação por meio de vídeo, eles ativam a câmera e fazem suas perguntas, tiram suas dúvidas ou podem fazer isso via chat, pois tanto no estúdio como na comunidade, eles possuem um computador que fica logado no aplicativo permitindo assim que eles tirem suas dúvidas ou façam suas perguntas.

Para a elaboração de uma aula mediada trabalhamos com três etapas, que são:

1 - Produção do Plano de Aula (PA).

2 - Avaliação sobre o PA dos pedagogos e em seguida Roteirização. Nessa etapa o corpo técnico de mídias se reúne com o professor para montar às aulas e depois produzir o que chamamos de cartela (slide) que será usado pelo professor durante suas aulas. Podemos usar link, app, site para deixar nossa aula mais dinâmica e interativa, mas tudo isso deve estar descrido no plano de aula.

3 - A aula no estúdio.

Tais etapas estão disponíveis para consulta no Anexo I.

Além disso, Ponte (2000) afirma que:

> As TICs poderão ajudar na aprendizagem de muitos conteúdos, recorrendo a técnicas sofisticadas de simulação e de modelação cognitiva baseadas na inteligência artificial. No entanto, não me parece que será desse modo que elas vão marcar de forma mais forte as instituições educativas, mas sim pelas possibilidades acrescidas que trazem de criação de espaços de interação e comunicação, pelas possibilidades alternativas que fornecem de expressão criativa, de realização de projetos e de reflexão crítica. (Ponte, 2000, p. 75)

Nesse sentido, o uso de tecnologias digitais no ensino tem se mostrado uma ferramenta poderosa para potencializar o aprendizado em diversos contextos, especialmente em regiões onde o acesso à educação de qualidade pode ser limitado por questões geográficas e socioeconômicas, como em comunidades rurais do Pará. A educação presencial mediada por tecnologia emerge como uma modalidade capaz de integrar o ensino tradicional com as inovações tecnológicas, criando ambientes de aprendizagem híbridos e adaptáveis às necessidades específicas dos estudantes.

A educação presencial mediada por tecnologia representa uma abordagem pedagógica inovadora, que possibilita a condução de aulas transmitidas de um local central para diversas salas em diferentes regiões. Essa modalidade exige que as aulas sejam ao vivo e que haja a presença simultânea de professores tanto no estúdio de transmissão quanto nas salas de aula remotas. Diferentemente da Educação a Distância (EaD), onde o aluno não conta com a presença física constante de um professor, essa prática mantém o acompanhamento presencial dos educadores, garantindo uma interação mais direta e imediata com os estudantes. (BRASIL, 2024)

Esse modelo é particularmente relevante para o contexto rural, onde a personalização do ensino pode atender melhor às demandas locais, respeitando o ritmo e as necessidades dos estudantes.

Essas abordagens teóricas reforçam a importância e a viabilidade de implementar a educação presencial mediada por tecnologia no ensino da matemática em contextos rurais, como as comunidades do Pará, onde o autor deste projeto atua. A utilização de sequências didáticas, apoiadas por tecnologias digitais, promete não apenas facilitar o ensino de conceitos matemáticos, mas também tornar o processo de aprendizagem mais envolvente e eficaz.

2 UM ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

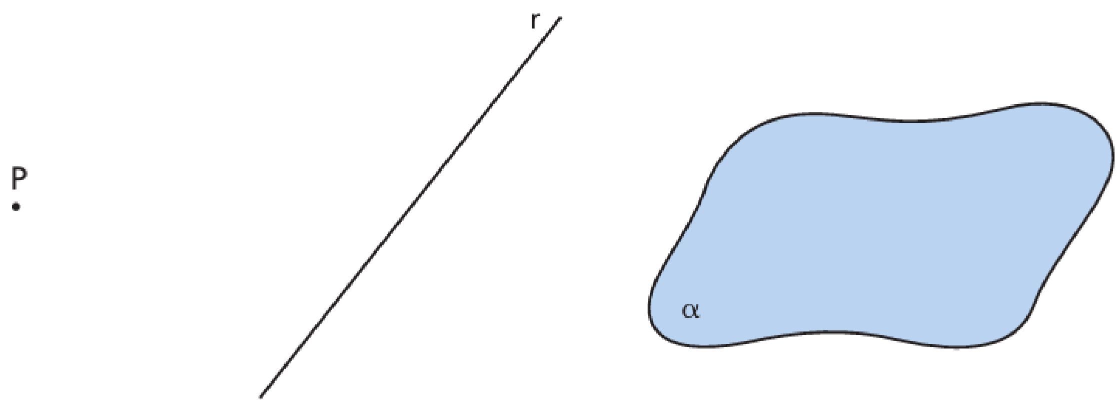
O trabalho de Euclides é considerado por muitos autores como fundamental para o desenvolvimento do intelecto humano. Montoito (2014) destaca que

> *Os Elementos de Euclides* abrem as portas para uma geometria logicamente organizada, construída passo a passo – ou melhor, enunciado a enunciado – e demonstrada de modo que o logos não conclui outra coisa senão o que ali lhe é apresentado. **É uma geometria praticamente inquestionável, limítrofe, a linha divisória entre o humano e o divino, entre o perene e o eterno, entre a verdade e aquilo que se manifesta pelos sentidos**. (Montoito e Garnica, 2014, p. 11). "negrito nosso"

Deste modo, entendemos que é importante para o nosso trabalho fazer uma construção com o rigor matemático adequado para servir de base para a nossa Sequência Didática que será trabalhada no próximo capítulo. Para tanto, na elaboração deste capítulo utilizaremos como principal referência o livro *Geometria Euclidiana Plana E Construções Geométricas*, 2ª ed. 2016, da professora Elaine Quelho Frota Rezende. Destacamos ainda o uso do livro *Fundamentos de matemática elementar 9: Geometria Plana*, 2013, do professor Osvaldo Dolce, que fora de grande valia para a construção desse capítulo.

Chamaremos de entes geométricos aos conceitos primitivos da Geometria Euclidiana Plana, que são o **ponto**, a **reta** e o **plano**. A figura a seguir representa esses elementos.

Figura 1: Representação gráfica dos entes geométricos



O ponto P A reta r O plano α

Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p.2.

Enunciaremos a seguir alguns postulados básicos a respeito desses entes geométricos e, no decorrer do capítulo obteremos alguns resultados e consequências importantes para a elaboração da nossa proposta didática com o uso do *software* GeoGebra.

2.1 Retas e ângulos

Os três primeiros postulados[5] são conhecidos como **Postulados de Incidência**.

Postulado 1: Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

Postulado 2: Em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos.

Postulado 3: Existem pelo menos três pontos distintos não colineares.

Definição 1: Duas retas de um mesmo plano são paralelas se não se interseccionam, isto é, se nenhum ponto pertence a ambas as retas. Duas retas distintas que se interseccionam são chamadas de **retas concorrentes**.

Teorema 1: Duas retas concorrentes interseccionam-se em um único ponto.

Demonstração: De fato, sejam duas retas *r* e *s* que concorrem em um ponto P. Seja Q um outro ponto, diferente de P, que também pertente a ambas as retas. Como os pontos P e Q pertencem à reta *r* e P e Q pertencem à reta *s*, pela unicidade do Postulado 1, as retas *r* e *s* seriam a mesma reta, o que contradiz a hipótese. Logo, P é único.

Postulado 4: **(Postulado da Distância):** A cada par de pontos corresponde um único número real maior ou igual do que zero. Sendo que este número é zero se e somente se os pontos forem coincidentes.

Postulado 5: **(Postulado da Régua):** Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais de modo que

(1) cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real,

(2) cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta, e

(3) a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes.

Definição 2: Sejam A, B e C três pontos colineares e distintos dois a dois. Se AB + BC = AC, dizemos que B está entre A e C, o que denotaremos por A – B – C e ilustraremos conforme a figura a seguir.

Figura 2: Ponto B entre os pontos A e C.

Fonte: COELHO, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 17.

[5] Postulado: é uma proposição que, apesar de não ser evidente, é considerada verdadeira sem discussão.

Definição 3: Sejam A e B pontos distintos. Considere as seguintes definições.

i) O segmento de reta AB, ou simplesmente segmento AB, o qual é denotado por $\overline{AB}$, é definido como sendo o conjunto de pontos A e B, e dos pontos X tais que A – X – B. Os pontos A e B são denominados extremos do segmento AB, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 3: Segmento de extremidades A e B.

Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 18.

ii) A medida ou comprimento de um segmento AB é definida como a distância entre os pontos A e B e, como tal, é denotada por AB.

iii) A semirreta de origem A contendo o ponto B, a qual é denotada por $\overrightarrow{AB}$, é definida como a união dos pontos do segmento AB com o conjunto dos pontos X tais que A – B – X. O ponto A é denominado origem da semirreta, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 4: Semirreta AB

Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 19.

Se A está entre B e C, então as $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são chamadas semirretas opostas.

Definição 4: Dois segmentos que possuem a mesma medida são chamados segmentos congruentes.

Definição 5: Um ponto B é ponto médio de um segmento AC se B está entre A e C, e AB = BC.

Postulado 6: **(Postulado da Colocação da Régua)** Dados dos pontos P e Q numa reta, pode ser escolhido um sistema de coordenadas de modo que a coordenada de P seja zero e a coordenada de Q seja positiva.

Teorema 2: **(Teorema da Localização de Pontos)** Seja uma semirreta $\overrightarrow{AB}$ e seja x um número positivo. Então existe um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que AP = x.

Demonstração: Pelo Postulado da Colocação da Régua, podemos escolher um sistema de coordenadas para a reta $\overleftrightarrow{AB}$ de modo que a coordenada de A seja zero e a coordenada de B seja um número positivo *r*.

Seja P o ponto cuja coordenada é o número positivo *x*. Então P pertence a $\overrightarrow{AB}$ e $AP = |x-0| = |x-0| = |x-0|$. Como somente um ponto da semirreta tem a coordenada *x*, somente um ponto da semirreta estará a uma distância *x* de A.

Teorema 3: Todo segmento tem um único ponto médio.

Demonstração: Inicialmente provaremos a existência do ponto médio. Considere o segmento AC. Queremos obter um ponto B tal que AB + BC = AC e AB = BC.

Considere o número real positivo $x = \frac{1}{2}AC$. Pelo Teorema da Localização de Pontos, existe um ponto B na semirreta AC tal que AB = *x*.

Como B está em $\overrightarrow{AC}$, temos que B ou está em $\overrightarrow{AC}$ ou A – C – B, sendo $B \neq A$, e $B \neq C$.

Se B está em $\overrightarrow{AC}$ temos A – B – C, logo AB + BC = AC e, portanto,

$$BC = AC - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AC = AB \cdot$$

Se B é tal que $\overrightarrow{AC}$ temos A – C – B, logo AC + CB = AB e, portanto,

$$BC = \frac{1}{2}AC - AC = -\frac{1}{2}AC < 0$$

o que é um absurdo.

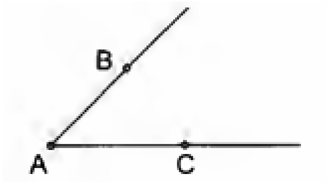
Logo, temos AB + BC = AC e AB = AC, isto é, B é ponto médio de $\overline{AC}$.

Para provarmos a unicidade do ponto médio, suponhamos que existe M, um outro ponto médio de AC, isto é, um ponto M satisfazendo: AM + MC = AC e AM = MC.

Dessa forma, teríamos 2AM = AC, portanto $AM = \frac{1}{2}AC$, e pelo Teorema da Localização de Pontos, M coincidiria com B. Logo o ponto médio de $\overline{AC}$ é único.

Definição 6: Um ângulo é a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semirretas AB e AC então essas semirretas são chamadas **lados** do ângulo e o ponto A é chamado **vértice** do ângulo. Tal ângulo é denominado **ângulo** BAC ou **ângulo** CAB e representado por BAC ou CAB, respectivamente. Por vezes, quando está claro no texto, é simplesmente denominado ângulo A e representado por $\hat{A}$. Para essa definição, temos a representação geométrica da figura a seguir.

Figura 5: Representação do ângulo BAC



Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 21.

Postulado 7: (Postulado da Medida de Ângulos) A cada ângulo BAC corresponde um único número real entre 0 e 180.

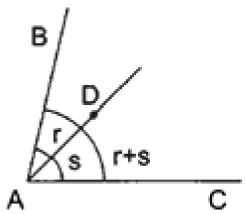
Definição 7:

a) O número corresponde ao postulado anterior é chamado **medida** do ângulo, o que é denotado por $mBAC$.

b) Ângulos que têm a mesma medida são chamados **ângulos congruentes.** Se BAC e PQR são congruentes, denotaremos $BAC \cong PQR$.

Postulado 8: (Postulado da Adição de Ângulos) Se D é um ponto no interior do BAC, então $mBAC = mBAD + mDAC$. A figura a seguir é a representação geométrica desse postulado.

Figura 6: Postulado da Adição de Ângulos



Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 23.

Definição 8: Se a soma das medidas de dois ângulos é 180°, então dizemos que os ângulos são **suplementares** e que cada um é o **suplemento** do outro.

Definição 9: Se a soma das medidas de dois ângulos é 90°, então dizemos que os ângulos são **complementares** e que cada um é o **complemento** do outro.

Um ângulo com medida menor que 90º é chamado **ângulo agudo** e um ângulo com medida maior que 90° e menor que 180° é chamado **ângulo obtuso**.

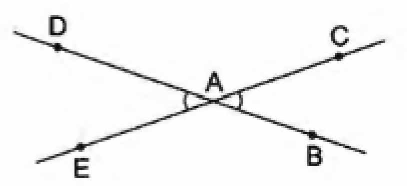
Definição 10: Dois conjuntos, sendo cada um deles uma reta, uma semirreta, ou um segmento são perpendiculares se as retas que os contêm determinam um ângulo reto. Se uma reta *r* é perpendicular a uma reta *s*, isso será denotado por $r \perp s$.

Definição 11: Dois ângulos são **opostos pelo vértice** se os lados de um são as semirretas opostas aos lados do outro.

Postulado 9: (Postulado do Suplemento) Se dois ângulos formam um par linear, então são suplementares.

Teorema 4: Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes. A é a representação geométrica desse teorema.

Figura 7: Ângulos Opostos Pelo Vértice



Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 25.

Demonstração: Consideremos os ângulos opostos pelo vértice BAC e DAE tais que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AE}$, e $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sejam dois pares de semirretas opostas. Então, pelo Postulado do Suplemento são pares BAC e CAD, e CAD e DAE são pares de ângulos suplementares.

Assim BAC e EAD têm o mesmo suplemento. Portanto, $mCAB = mDAE$.

Feitas essas construções básicas a respeito dos conceitos básicos da Geometria Plana, faremos agora a construção dos triângulos.

Definição 12: (Região Poligonal ou Polígono) Seja $A_1, A_2, ..., A_n,\ n \geq 3,$ uma sequência de n pontos distintos tais que os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}\ e\ \overline{A_nA_1}$, têm as seguintes propriedades:

a) Nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser nas suas extremidades.

b) nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

A união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}\ e\ \overline{A_nA_1}$ é chamada polígono, o qual denotamos $A_1A_2...A_n$.

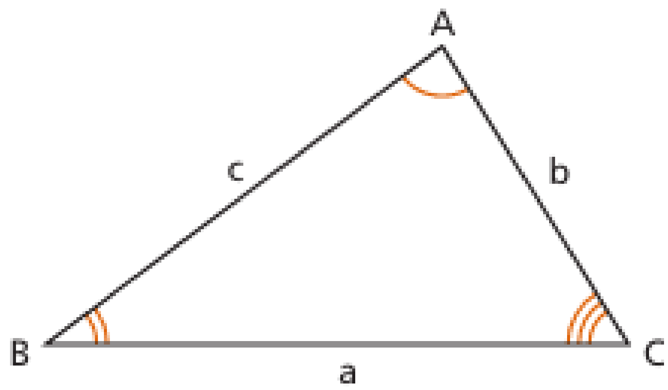
Os pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ são chamados **vértices** do polígono e os **segmentos** são seus lados.

A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é chamada **perímetro** do polígono.

2.2 Congruência de Triângulos

Definição 13: Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos AB, AC e BC chama-se triângulo ABC. Na figura a seguir temos a representação geométrica de um triângulo.

Figura 8: Triângulo ABC



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 35

Definição 14: Elementos de um triângulo.

a) Vértices: Os pontos A, B e C são os **vértices** do ΔABC.

b) Lados: Os segmentos AB (de medida *c*), AC (de medida *b*) e BC (de medida *a*) são os **lados** do ΔABC.

c) Ângulos: Os ângulos BAC, ABC e ACB são os **ângulos internos** do ΔABC.

Definição 15: Classificação de um triângulo

1. Quanto a medida de seus lados

a) **equiláteros** se, e somente se, têm os três lados congruentes;

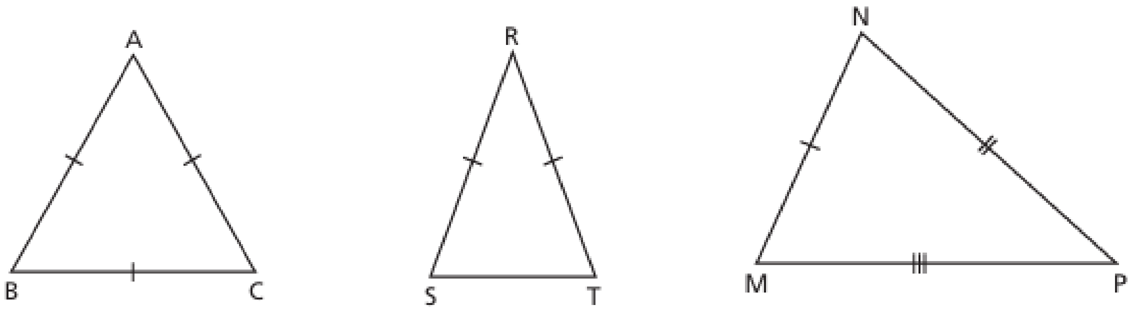
b) **isósceles** se, e somente se, têm dois lados congruentes;

c) **escalenos** se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes.

A figura a seguir é a representação geométrica das definições acima.

Figura 9: Classificação de triângulos quanto a medida de seus lados

ΔABC é equilátero ΔRST é isósceles ΔMNP é escaleno



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p 37. (adaptado)

2. Quanto a medida de seus ângulos internos

a) **retângulos** se, e somente se, têm um ângulo reto;

b) **acutângulos** se, e somente se, têm os três ângulos agudos;

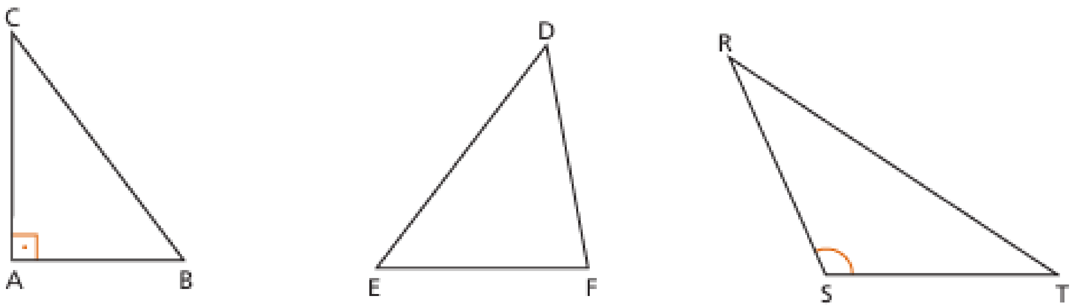
c) **obtusângulos** se, e somente se, têm um ângulo obtuso.

A figura a seguir é a representação geométrica das definições acima.

Figura 10: Classificação de triângulos quanto a medida dos seus ângulos internos

ΔABC é retângulo ΔDEF é acutângulo ΔRST é obtusângulo em S

4



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 37. (adaptado).

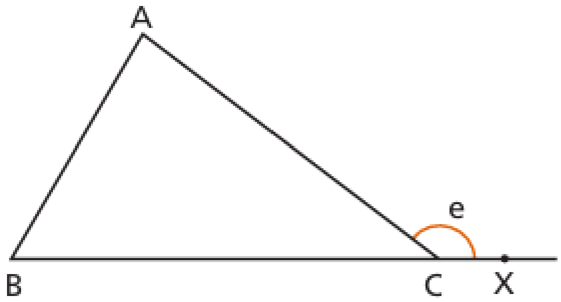
Definição 16: (Ângulo externo) Dado um ΔABC e sendo $\overrightarrow{CX}$ oposta à semirreta $\overrightarrow{CB}$, o ângulo

$$\hat{e} = ACX$$

a semirreta é o ângulo externo do ΔABC adjacente a C e não adjacente aos ângulos A e B.

O ângulo $\hat{e}$ é o suplementar adjacente de C, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 11: Ângulo externo



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p 44.

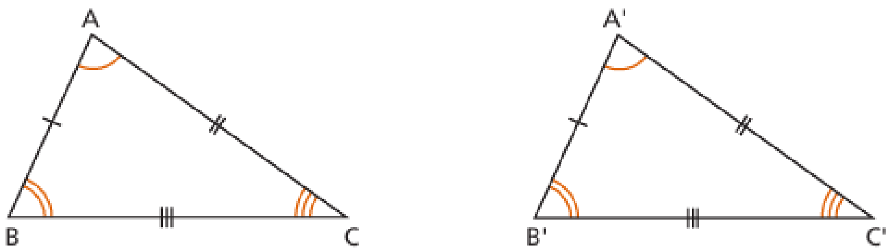
Definição 17: (Congruência de triângulos) Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

a) seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;

b) seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

A figura a seguir é a representação geométrica da definição acima

Figura 12: Congruência de triângulos



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 38.

E, consequentemente,

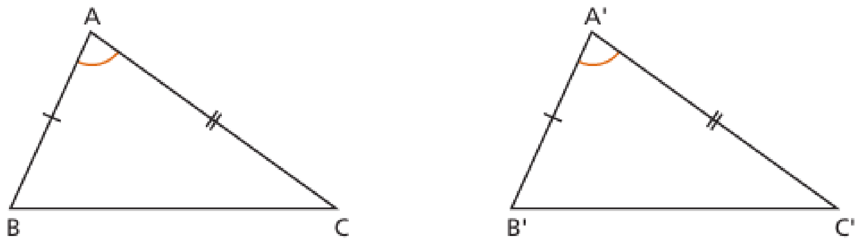
$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} & & A \equiv A' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} & \text{e} & B \equiv B' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} & & C \equiv C' \end{pmatrix}.$$

Para verificarmos a congruência entre dois triângulos seria necessário a priori verificarmos a validade da congruência desses seis elementos, porém estabeleceremos agora critérios que nos permitirão afirmar tal congruência verificando apenas alguns itens.

Postulado 10: (1º Caso de congruência de triângulos ou Caso Lado-Ângulo-Lado (LAL)) Dados dois triângulos ABC e A’B’C’, se eles possuem ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo entre esses lados, então esses triângulos são congruentes.

A figura a seguir é a representação geométrica do postulado acima.

Figura 13: 1° Caso de congruência de triângulos ou Caso Lado-Ângulo-Lado (LAL)

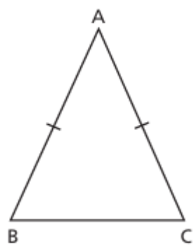


Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 38.

Teorema 5: (Teorema do triângulo isósceles) Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

Demonstração: Considere os triângulos ABC e CAB, conforme a figura a seguir.

Figura 14: Triângulo isósceles ABC.



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 39.

Note que, temos um caso de congruência LAL, assim

$$\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{BA} \\ BAC \equiv CAB \Rightarrow ABC \equiv ACB \\ \overline{AC} \equiv \overline{CA} \end{array}$$

Logo, os ângulos da base são congruentes.

Teorema 6: (2º Caso de congruência de triângulos ou Caso Ângulo-Lado-Ângulo (ALA))

Demonstração: De fato, considere dois triângulos ABC e A’B’C’ tais que

$$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$$

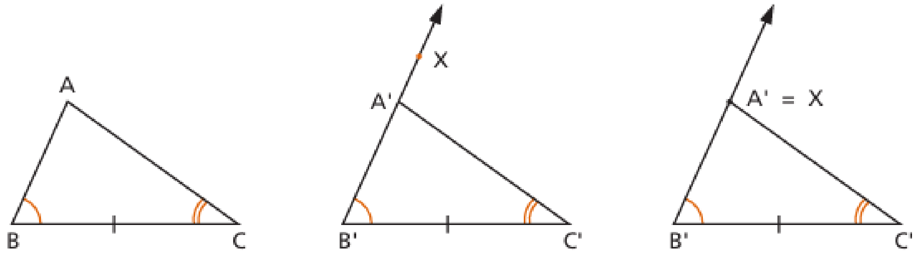
$$ABC \equiv A'B'C'$$

$$ACB \equiv A'C'B'$$

Provaremos que $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$ e teremos o caso do Postulado 10:.

Assim, suponhamos que exista X na semirreta $\overleftrightarrow{B'A'}$, com B' – 'A – X, tal que $\overline{BA} \equiv \overline{B'X'}$, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 15: 2º Critério de congruência ALA



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 40.

Note que $\Delta BAC \equiv \Delta B'XC'$ e pelo Postulado 10:, temos $BCA \equiv B'C'X$.

Porém, $B'C'X = B'C'A' + A'C'X$ e como, por hipótese, $ACB \equiv A'C'B'$

Daí, segue que

$$
\begin{aligned}
B'C'X &= B'C'A' + A'C'X \\
BCA &= B'C'A' + A'C'X \\
BCA &= A'C'B' + A'C'X \\
BCA &= ACB + A'C'X \\
A'C'X &= 0
\end{aligned}
$$

Portanto, X = A'.

(Caso B' – X – A' a demonstração é análoga)

Logo, $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

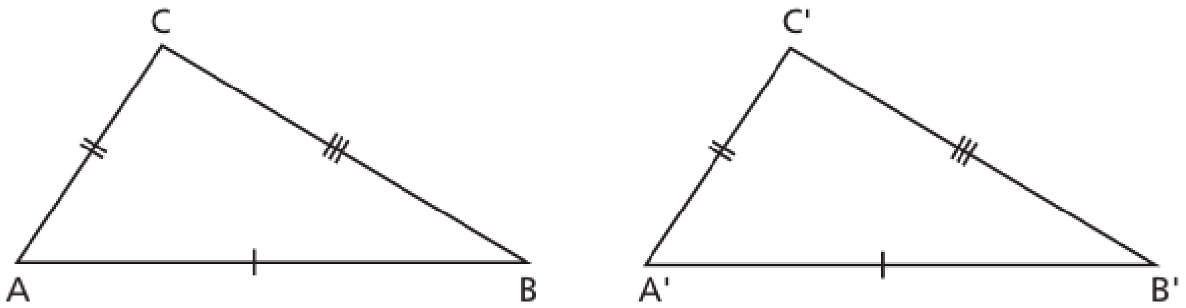
Teorema 7: (3º Caso de congruência de triângulos ou Caso Lado-Lado-Lado (LLL))

Demonstração: De fato, considere os triângulos ABC e A'B'C' tais que

$$
\begin{aligned}
\overline{BC} &\equiv \overline{B'C'} \\
\overline{AC} &\equiv \overline{A'C'} \\
\overline{AB} &\equiv \overline{A'B'}
\end{aligned}
$$

conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 16: 3º Critério de Congruência LLL



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 41.

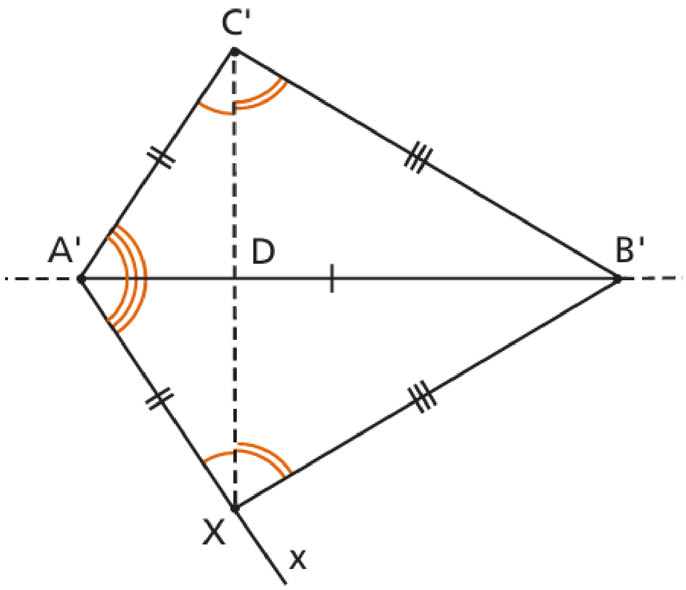
De fato, considere agora um ponto X, oposto ao ponto C, pelo segmento AB. Temos que

$$\overline{A'X} \equiv \overline{AC}$$

$$XA'B' \equiv CAB$$

conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 17: 3º Critério de Congruência LLL – Parte 2



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 41.

Note que, pelo Postulado 10:, temos $\Delta A'DC' \equiv \Delta A'DX$.

Assim, novamente pelo Postulado 10:, temos $\Delta A'B'C' \equiv \Delta A'B'X$ e, consequentemente, $\overline{B'X} \equiv \overline{B'C}$.

Portanto, note que os triângulos A'C'X e B'C'X são isósceles, daí

$$\begin{aligned} A'C'B' &= A'C'D + DC'B' \\ &= A'X'D + DX'B' \cdot \\ &= A'X'B' \end{aligned}$$

Segue ainda que,

$$\Delta A'B'C' \equiv \Delta A'B'X \equiv \Delta ABC$$

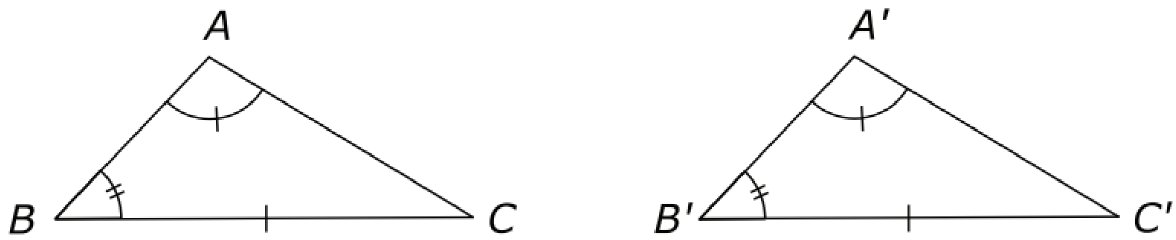
Logo, $\Delta A'B'C' \equiv \Delta ABC$.

Teorema 8: (Caso espacial de congruência – Lado – Ângulo – Ângulo Oposto) Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

Demonstração:

Sejam os triângulos ABC e A'B'C' da figura e suponhamos BC ≡ B'C', $B = B'$ e $A = A'$, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 18: Caso especial de congruência - LAAo

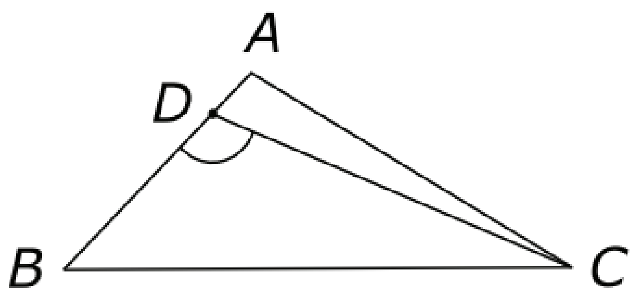


Fonte: https://www.professores.uff.br/dirceuesu.

Para provar essa congruência, basta provar que AB ≡ A'B', recaindo no caso LAL. Transportemos então o Δ A'B'C' sobre o Δ ABC, caindo o lado B'C' sobre seu congruente BC de modo a coincidirem os ângulos B e B'.

Seja D a nova posição do ponto A', e provemos que D coincide com A, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 19: Demonstração - caso especial de congruência – LAAo – Parte I

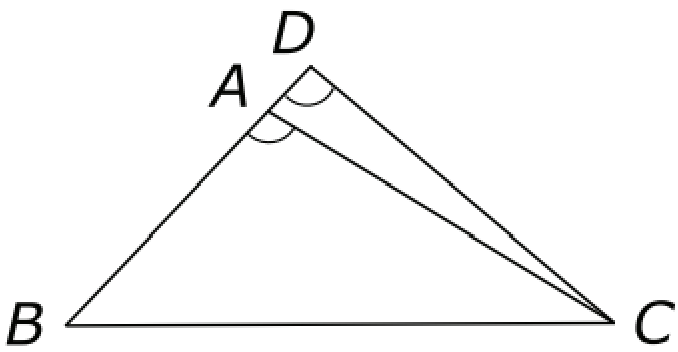


Fonte: https://www.professores.uff.br/dirceuesu.

De fato, a não coincidência de D com A conduz a um absurdo, pois se D ficasse entre B e A, o ângulo BDC externo em relação ao ΔCDA seria maior que A (resultado anterior) (1).

Por outro lado, se D ficasse no prolongamento de BA, teríamos A maior que BDC (resultado anterior) (2), conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 20: Demonstração - caso especial de congruência – LAAo – Parte II



Fonte: https://www.professores.uff.br/dirceuesu.

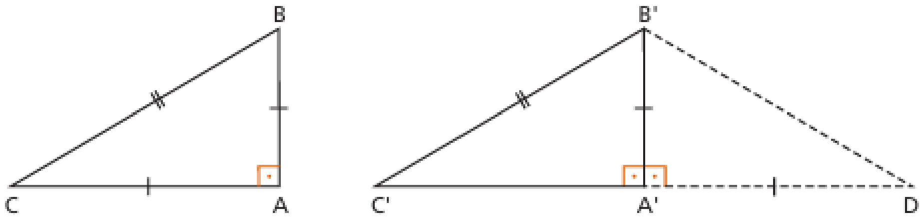
As desigualdades (1) e (2) são absurdas, pois por hipótese o ângulo BDC, que é a nova posição do ângulo A' após o deslocamento, é congruente ao ângulo A. Portanto o ponto A’, estando sobre AB e não podendo ficar nem antes nem depois do ponto A, deverá coincidir com A.

Daí, AB ≡ A’B’. Então, os triângulos ABC e A’B’C’ são congruentes pelo casos LAL.

Teorema 9: (Caso especial de congruência de triângulos retângulos) Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

Demonstração: Tomemos o ponto D na semirreta oposta à semirreta A’C’ tal que $A'D \equiv AC$, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 21: 3° Critério de Congruência LLL



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 45.

Note que, pelo caso LAL, os triângulos ABC e A’B’D são congruentes. Assim, $B'C' \equiv B'D$. Daí, o triângulo B’C’D é isósceles de base C’D e, portanto, os ângulos C' e D são congruentes. Consequentemente, $C'B'A' \equiv DB'A'$.

Portanto, pelo caso LAL, os triângulos ABC e A’B’C’ são congruentes.

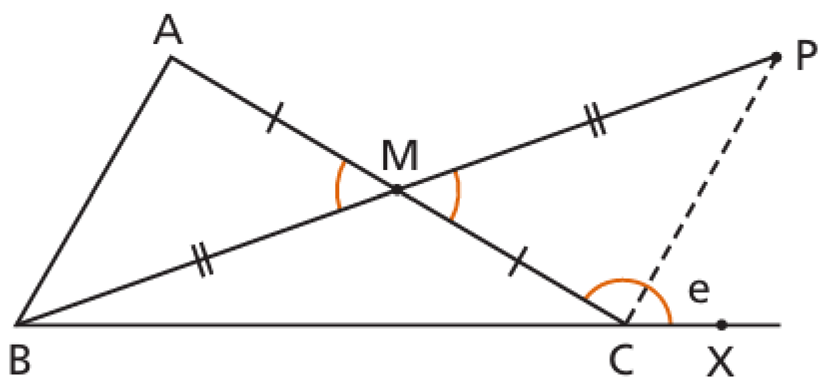
Teorema 10: Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

Demonstração: Seja M o ponto médio de $\overline{AC}$ e P pertencente à semirreta $\overrightarrow{BM}$ tal que:

$$\overline{BM} \equiv \overline{MP}$$

Conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 22: Demonstração ângulo externo



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 44.

Pelo caso LAL, $\Delta BAM \equiv \Delta PMC$ e daí:

$$BAM \equiv PCM \quad (1)$$

Como P é interno ao ângulo $\hat{e} = ACX$, segue $\hat{e} > PCM$.

De (1) e (2), decorre que $\hat{e} > A$.

Analogamente, tomando o ponto médio de $\overline{BC}$ e usando ângulos opostos pelo vértice, concluímos que:

$$\hat{e} > B.$$

Definição 18: Uma **ceviana** de um triângulo ABC é um segmento de reta cuja extremidade é um dos vértices desse triângulo e a outra é um ponto no lado oposto a esse vértice.

Definição 19: Uma **mediana** de um triângulo ABC é um segmento de reta cuja extremidade é um dos vértices desse triângulo e a outra é o **ponto médio** do lado oposto a esse vértice.

Definição 20: Uma **bissetriz** de um triângulo é o segmento da bissetriz do ângulo interno desse triângulo compreendido entre o vértice e o lado oposto.

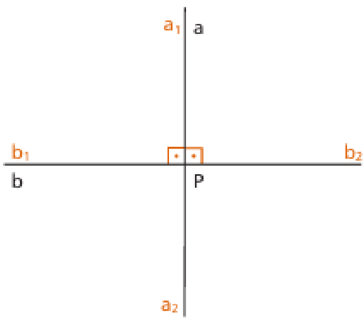
Definição 21: Duas retas são **perpendiculares** (símbolo: $\perp$) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes.

$$a \perp b \Leftrightarrow a \cap b = \{P\} \text{ e } a_1Pb_1 = a_1Pb_2$$

em que a_1 é uma das semirretas de a de origem P e b_1 e b_2 são semirretas opostas de b com origem em P.

A figura a seguir é a representação geométrica da definição acima.

Figura 23: Retas perpendiculares



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 78.

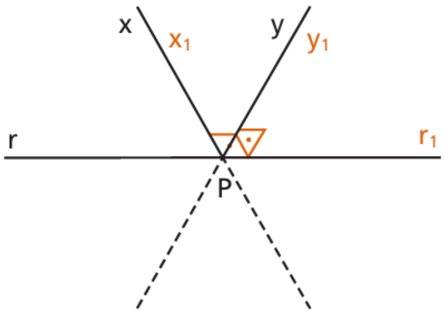
Teorema 11: Por um ponto e uma reta dada passa uma única reta perpendicular a essa reta.

Demonstração:

a) Existência: Seja uma reta *r* e um ponto P nessa reta, pela Definição 21: existe uma reta *s* perpendicular a *r* que passa por P. Basta agora tomar um ponto na reta *s*.

b) Unicidade: Se duas retas distintas *x* e *y*, com $x \neq y$, passando por P fossem ambas perpendiculares a *r*, teríamos a representação da figura a seguir.

Figura 24: Unicidade da reta perpendicular



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 80.

Assim, teríamos uma contradição com o Postulado 9:. Portanto $x = y$.

Logo, a reta *r* que passa por P é única.

Definição 22: A **mediatriz** de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contém seu **ponto médio**.

Teorema 12: A **mediatriz** de um segmento é o conjunto dos pontos equidistantes das extremidades do segmento.

Demonstração: Seja AB um segmento com ponto médio M. Seja *m* a mediatriz de AB e P um ponto pertencente a *m*.

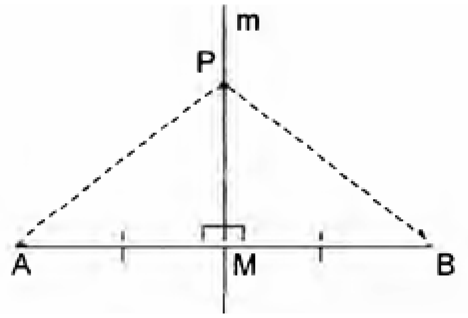
i) Se P está em AB, então P = M e, assim $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$, pela definição de ponto médio.

ii) Se P não está AM, então, por hipótese

$$\begin{array}{c} \overline{AM} \equiv \overline{BM} \\ \overline{PM} \equiv \overline{PM} \\ PMA \equiv PMB \end{array},$$

conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 25: Reta mediatriz



Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 37.

Assim, pelo Postulado 10:, temos que os triângulos PMA e PMB são congruentes e, consequentemente $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

Definição 23: Uma **altura** de um triângulo é o segmento perpendicular que une um vértice do triângulo à reta que contém o lado oposto.

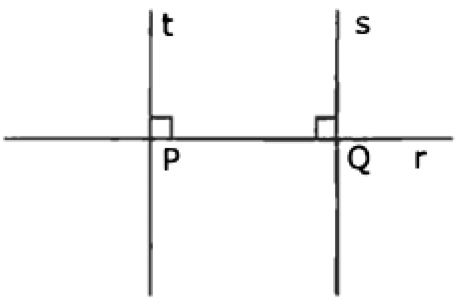
Feitas as observações iniciais de conceitos importantes sobre ângulos e triângulos definiremos agora noções fundamentais sobre os quadriláteros, contudo, acreditamos ser de grande relevância técnica e histórica comentar brevemente sobre o Postulado das Paralelas, que faremos a seguir.

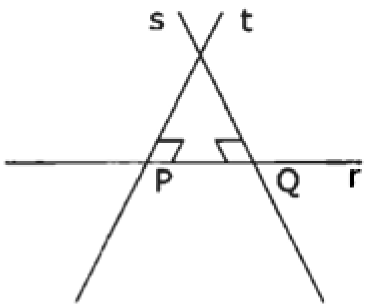
2.3 O Postulado das Paralelas e a Geometria Euclidiana

Teorema 13: Duas retas distintas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.

Demonstração: Sejam *s* e *t* retas distintas perpendiculares a mesma reta *r*, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 26: Retas perpendiculares





Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 55.

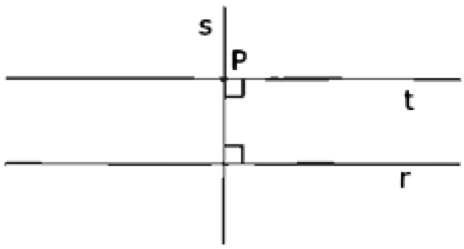
Se *s* e *t* não forem paralelas, então *s* e *t* se interceptam num ponto P. Assim, teríamos uma contradição com o Teorema 11:.

Logo, *s* e *t* são retas paralelas.

Teorema 14: Por um ponto não pertencente a uma reta passa pelo menos uma reta paralela à reta dada.

Demonstração: Consideremos a reta *r* e um ponto P não pertencente a ela, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 27: Demonstração do Teorema 14



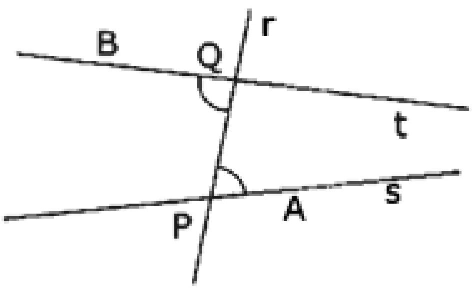
Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 56.

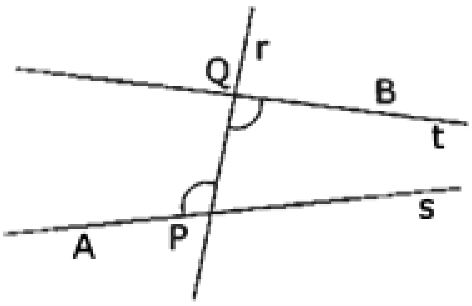
Seja *s* a reta passando por P e perpendicular a *r*, e seja *t* a reta passando por P e perpendicular a *s*. Pelo Teorema 13: *t* é paralela a *r*.

Definição 24: Uma **reta transversal** a duas retas é uma reta que intersecciona essas duas retas em dois pontos distintos. Nesse caso dizemos que as retas são cortadas pela transversal.

Definição 25: Seja *r* uma transversal às retas *s* e *t*, interseccionando-as nos pontos P e Q, respectivamente. Seja A um ponto de *s* e B um ponto de *t* tais que A e B estejam em lados opostos de *r*. Os ângulos APQ e BQP são chamados **ângulos alternos internos** formados por s e t com a transversal r, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 28: Ângulos alternos internos



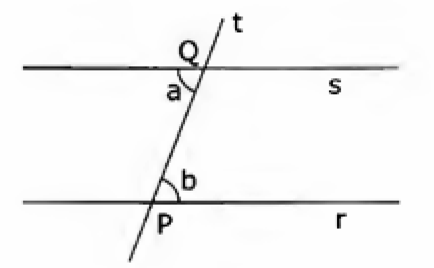


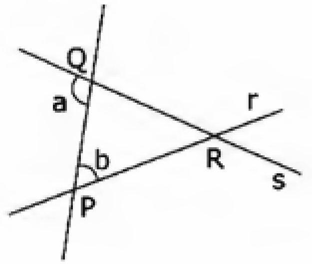
Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 56.

Teorema 15: (Teorema dos ângulos alternos internos) Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas.

Demonstração: Sejam as retas *r* e *s* cortadas por uma transversal nos pontos P e Q respectivamente. Sejam $\hat{a}$ e $\hat{b}$ os ângulos internos congruentes, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 29: Ângulos alternos internos - Teorema





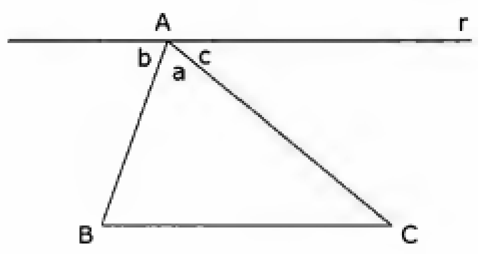
Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 57.

Suponhamos que *r* e *s* não sejam paralelas e se interceptem no ponto R. Note que o ângulo $\hat{a}$ seria externo ao triângulo PRQ. Assim, teríamos o ângulo externo do triângulo PQS com a mesma medida de um ângulo interno não adjacente. Uma contradição com o Teorema 10:. Logo, as retas *r* e *s* são paralelas.

Teorema 16: (Soma dos ângulos internos de um triângulo) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Demonstração: Dado o ΔABC, seja a reta *r* paralela ao lado BC que passa pelo vértice A, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 30: Soma dos ângulos internos



Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 59.

Como *r* é paralela ao lado BC, então os ângulos *b* e ABC são congruentes, assim como os ângulos *c* e ACB.

Portanto, pelo Postulado 9:, temos que

$$ma + m\hat{b} + m\hat{c} = 180°.$$

Logo, $mABC + mACB + mBAC = 180°$.

Postulado 11: (Postulado das Paralelas) Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela à reta dada.

Então, definiremos agora o conceito de quadriláteros, bem como os quadriláteros especiais como paralelogramos, trapézios e quadrados.

2.4 Quadriláteros

Definição 26: Um quadrilátero é um polígono de quatro lados:

a) **Lados opostos** de um quadrilátero são dois de seus lados que não se interseccionam.

b) Dois **lados são consecutivos** se têm um vértice comum.

Definição 27: (Trapézio) Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui **dois lados paralelos**.

Definição 28: Classificação dos trapézios.

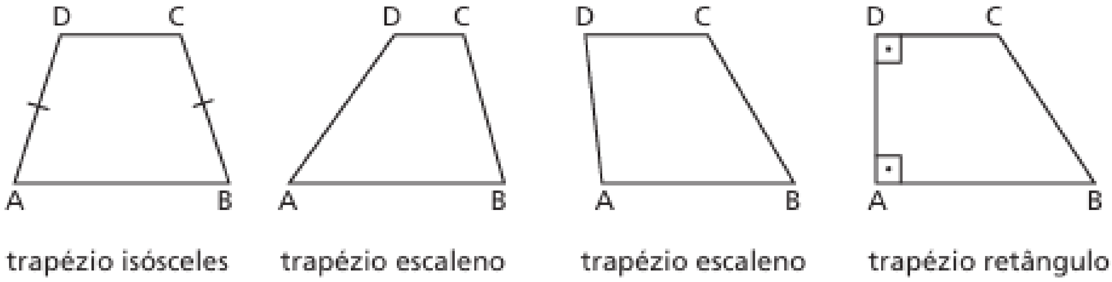
De acordo com os outros dois lados não bases, temos:

a) Trapézio isósceles: Se esses lados são congruentes.

b) Trapézio escaleno: Se esses lados não são congruentes.

Caso o trapézio tenha um ângulo interno reto, esse será chamado trapézio retângulo. A figura a seguir representa graficamente essas definições.

Figura 31: Tipos de trapézios



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 97.

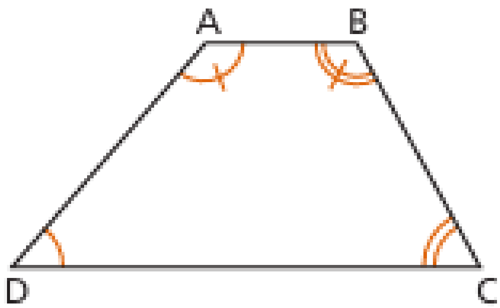
Teorema 17: (Propriedades dos Trapézios)

a) Trapézio qualquer: Em qualquer trapézio ABCD de bases AB e CD, temos:

$$A+D=B+C=180°,$$

conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 32: Propriedades de ângulos no trapézio qualquer



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 98.

Demonstração: De fato, pelos Postulado 9: e Teorema 15:, temos

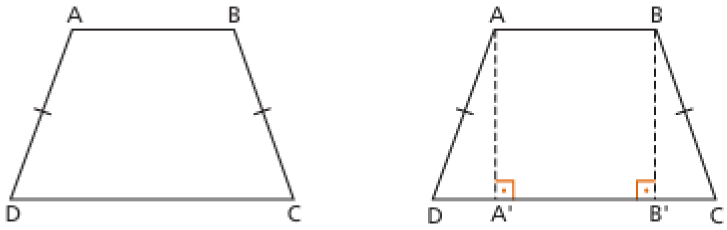
$$\begin{cases} A+D=180° \\ B+C=180° \end{cases} \Rightarrow A+D=B+C=180°.$$

Logo, $A+D=B+C=180°$.

b) Trapézio isósceles: Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.

Demonstração: Tracemos as perpendiculares às bases pelos vértices A e B da vase menor, obtendo os pontos A' e B' na base maior CD. Notemos que AA' e BB' por serem distâncias entre as retas paralelas, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 33: Trapézio isósceles



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 99.

Os triângulos retângulos AA'D e BB'C são congruentes pelo caso cateto-hipotenusa. Daí, $C \equiv D$.

Como A e B são suplementares de D e C, respectivamente, temos $A \equiv B$.

Logo, os ângulos da base são congruentes.

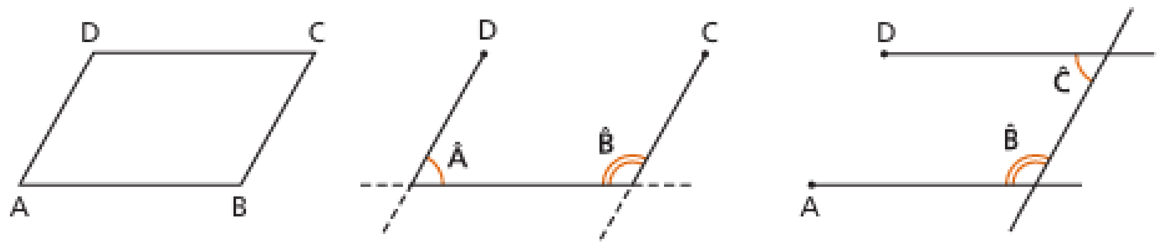
Definição 29: (Paralelogramo): Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui os **lados opostos paralelos.**

Teorema 18: (Propriedades dos Paralelogramos):

a) Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Demonstração: Considere o paralelogramo ABCD da figura a seguir.

Figura 34: Propriedades de ângulos no trapézio qualquer



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 100.

Como ABDC é um paralelogramo, então AB // CD e AD // BC. Assim, pelos Postulado 9: e Teorema 15:, temos

$$\begin{cases} AD//BC \\ AB//CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=180 \\ B+C=180 \end{cases} \Rightarrow A=C.$$

Analogamente, $B=D$.

b) Todo quadrilátero convexo que tem ângulos opostos congruentes é paralelogramo.

Demonstração: Considere um quadrilátero de vértices consecutivos ABCD, temos

$A \equiv C, B \equiv D$, assim $A+B=C+D$.

Como $A+B+C+D=360°$, temos $A+B=C+D=180°$.

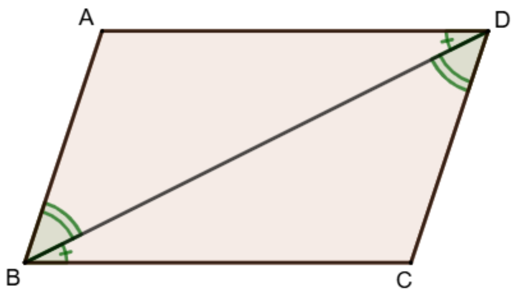
Consequentemente AD // BC e AB // CD.

Logo, ABCD é paralelogramo.

c) Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.

Demonstração: De fato, seja ABCD um paralelogramo conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 35: Demonstração - lados opostos congruentes



Fonte: Próprio autor.

Note que os ângulos BDA e CBD são alternos internos, portanto, são congruentes. Por outro lado, pelo Teorema 18: (b), temos que ABD e CDB também são congruentes. Portanto, pelo critério ALA, os triângulos ABD e CBD são congruentes.

Logo, $AB \equiv CD$ e $AD \equiv BC$.

Definição 30: (Retângulo) Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.

Definição 31: (Losango) Um quadrilátero plano convexo é um losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes.

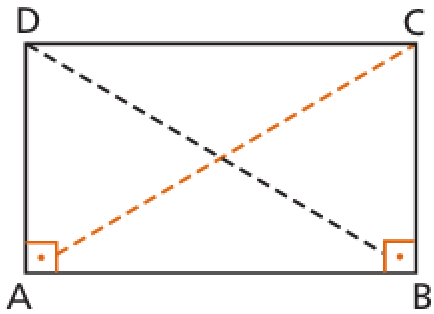
Definição 32: (Quadrado) Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.

Teorema 19: (Propriedades dos retângulos, losangos e quadrados)

a) Em todo retângulo as diagonais são congruentes.

Demonstração: Considere o retângulo ABCD conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 36: Demonstração - diagonais de um retângulo são congruentes



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 105.

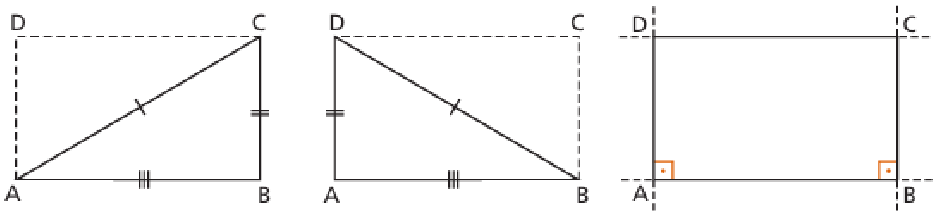
Note que os triângulos BAD e ABC são congruentes pelo critério LAL.

Logo $AC \equiv BD$.

b) Todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo.

Demonstração: Seja ABCD um paralelogramo de vértices consecutivos A, B, C e D, note que os ângulos A e B são colaterais, portanto, são suplementares. Por outro lado, note ainda que os triângulos ABC e ADB são congruentes pelo critério LLL, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 37: Demonstração – paralelogramo com diagonais congruentes



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 105.

Portanto, os ângulos são A e B congruentes e suplementares. Assim, $A \equiv B = 90°$. Analogamente $C \equiv D = 90°$.

Logo, ABCD é um quadrado.

Teorema 20: (Teorema da base média):

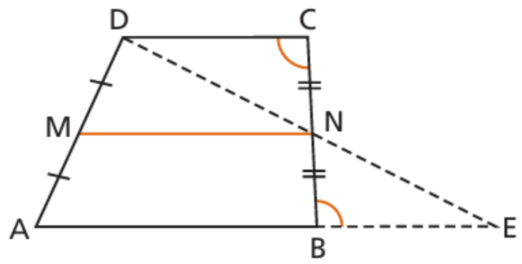
a) Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então:

1º) ele é paralelo às bases;

2º) ele é igual à semissoma das bases.

Demonstração: Considere um paralelogramo ABCD com bases AB e CD e sendo M e N os pontos médios dos lados AD e BC, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 38: Demonstração – Teorema da base média



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 109.

Note ainda que, os ângulos DCN e NBE são alternos internos, portanto, são congruentes. Assim, $DN \equiv EN$ e $BE \equiv CD$.

Logo,

1º) $MN // AE \Rightarrow MN // AB // CD$.

2º) $MN = \dfrac{AE}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{AB+BE}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{AB+CD}{2}$.

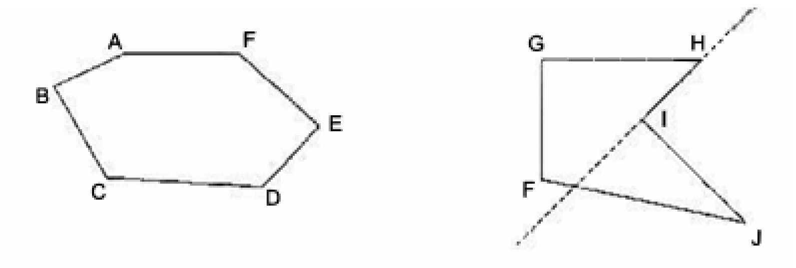
Deste modo, fizemos as construções que servirão de base para nosso trabalho envolvendo os quadriláteros. Agora, fechando esse capítulo, formularemos definições e postulados acerca do conceito de área de polígonos.

2.5 Áreas de Regiões Poligonais

Definição 33: (Região Poligonal Convexa) Um polígono é dito convexo se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um de seus lados.

Assim é convexo o polígono ABCDE abaixo e não convexo o polígono FGHIJ, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 39: Polígonos convexos



Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 26.

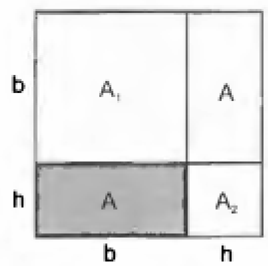
Postulado 12: (Postulado dos triângulos) Se dois triângulos são congruentes então suas regiões triangulares têm a mesma área.

Postulado 13: (Postulado da área do quadrado) Se uma região quadrada tem lado de comprimento *x*, então sua área é x^2.

Teorema 21: (Área do retângulo) A área de um retângulo é o produto das medidas de dois de seus lados não paralelos.

Demonstração: Consideremos um retângulo com lados não paralelos *b* e *h*, respectivamente, cuja área denotaremos por A, e conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 40: Demonstração - Área do retângulo



Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 108.

A partir desse retângulo construímos um quadrado Q de lado *b* + *h*, o qual está formado pela união dos quadrados de áreas A_1 e A_2, respectivamente e por retângulos de área A.

Pelo Postulado 13:, temos

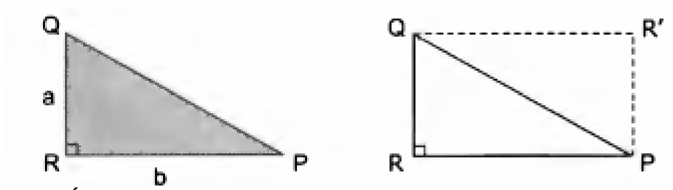
$$\acute{A}rea Q = 2A + A_1 + A_2$$
$$(b+h)^2 = 2A + b^2 + h^2$$
$$b^2 + 2bh + h^2 = 2A + b^2 + h^2 \text{ .}$$
$$2hb = 2A$$
$$A = bh$$

Logo, A = *bh*.

Teorema 22: (Área do triângulo retângulo) A área de um triângulo retângulo é a metade do produto de seus catetos.

Demonstração: Consideremos o triângulo QRP, retângulo em R, e com catetos *a* e *b*. Denotaremos sua área por A, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 41: Área do triângulo retângulo



Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 108.

Seja R' a intersecção da reta paralela à PR que passa por Q e a da reta paralela à QR que passa por P. O Quadrilátero QRPR' é um retângulo. Pelo caso LLL os triângulos QRP e QR'P são congruentes e, portanto, têm a mesma área A. Portanto

$$ÁreaQRR'P = ab$$

$$2ÁreaQRP = ab$$

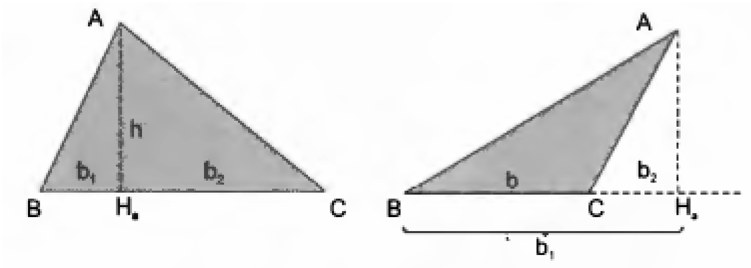
$$ÁreaQRP = \frac{ab}{2}$$

Logo, a área de um triângulo retângulo é a metade do produto entre seus catetos.

Teorema 23: (Área do triângulo) A área de um triângulo é a meta do produto de qualquer de seus lados pela altura correspondente.

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC e a altura AH_a, relativa ao lado BC, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 42: Área do triângulo



Fonte: REZENDE, Eliane; LÚCIA, Maria. Geometria Euclidiana. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016. p. 110.

Chamemos de *b* e de *h* as medidas do lado BC e da altura AH_a, respectivamente.

Assim,

i) Caso B – H_a – C:

Portanto, pelo Teorema 23:, temos

$$\begin{aligned} ÁreaABC &= ÁreaABH_a + ÁreaACH_a \\ &= \frac{h \cdot b_1}{2} + \frac{h \cdot b_2}{2} \\ &= \frac{h \cdot (b_1 + b_2)}{2} \\ &= \frac{h \cdot b}{2} \end{aligned}$$

Logo, $ÁreaABC = \frac{h \cdot b}{2}$

ii) Caso B – C – H_a :

Portanto, pelo Teorema 23:, temos

$$\begin{aligned} ÁreaABH_a &= ÁreaABC + ÁreaACH_a \\ \frac{h \cdot b_1}{2} &= ÁreaABC + \frac{h \cdot b_2}{2} \\ ÁreaABC &= \frac{h \cdot b_1}{2} - \frac{h \cdot b_2}{2} \\ &= \frac{h \cdot (b_1 - b_2)}{2} \\ &= \frac{h \cdot b}{2} \end{aligned}$$

Logo, $ÁreaABC = \frac{h \cdot b}{2}$.

Definição 34: (Área) A área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à superfície de forma tal que:

1º) Às superfícies equivalentes estão associadas áreas iguais (números iguais) e reciprocamente.

$A \approx B$ (Área de A = Área de B)

2º) A uma soma de superfícies está associada uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parcelas.

(C = A + B) ⇒ (Área de C = Área de A + Área de B)

3º) Se uma superfície está contida em outra, então sua área é menor (ou igual) que a área da outra.

$$B \subset A \Rightarrow \text{Área de B} \leq \text{Área de A}.$$

Definição 35: (Área do paralelogramo) Á área de um paralelogramo é equivalente a um retângulo cuja base mede *b* e altura mede *h*, conforme ilustra a figura a seguir.

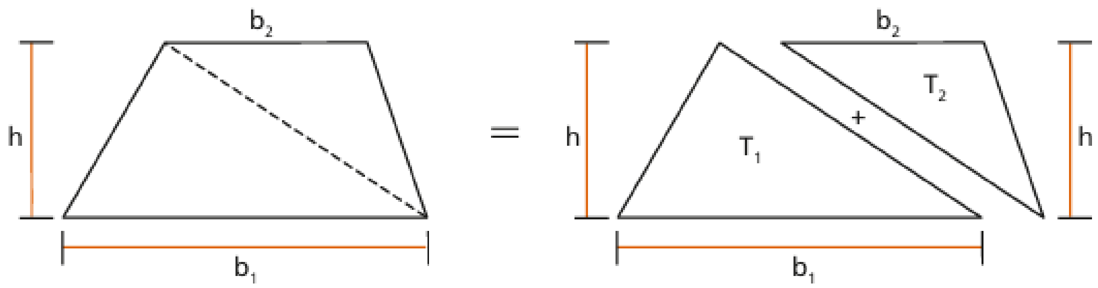
Figura 43: Área do paralelogramo

Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 306.

$$A_P = A_R = b \cdot h$$

Definição 36: (Área do trapézio) A área de um trapézio é equivalente à soma das áreas de dois triângulos cujas bases são b_1 e b_2 e altura *h*, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 44: Área do trapézio



Fonte: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. Vol 9. São Paulo: Editora Atual, 2013, p. 307.

$$A_{Tra} = A_{T_1} + A_{T_2} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}.$$

Consequentemente, entendemos que a partir deste ponto temos uma base teoria para iniciar os estudos com o software GeoGebra, a fim de que possamos calcular a área de um quadrilátero conhecidas somente as dimensões de seus lados e seus ângulos internos.

3 O SOFTWARE GEOGEBRA

O avanço das tecnologias digitais tem transformado a forma como ensinamos e aprendemos matemática. Entre as diversas ferramentas disponíveis, o GeoGebra se destaca como um software dinâmico e intuitivo, amplamente utilizado no ensino da geometria, álgebra e cálculo. Sua interface interativa permite a construção e manipulação de objetos matemáticos em tempo real, facilitando a compreensão de conceitos abstratos por meio da experimentação e visualização.

Neste capítulo, exploraremos as principais funcionalidades do GeoGebra, destacando suas aplicações no ensino e na aprendizagem da matemática. Além disso, discutiremos como essa ferramenta pode auxiliar professores e alunos no desenvolvimento de uma abordagem mais investigativa e significativa do conhecimento matemático.

3.1 O software GeoGebra

De acordo com os próprios desenvolvedores do software,

> GeoGebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma. Além disso, o GeoGebra oferece uma plataforma online com mais de 1 milhão de recursos gratuitos criados por nossa comunidade em vários idiomas. Esses recursos podem ser facilmente compartilhados através de nossa plataforma de colaboração GeoGebra Tarefa, onde o progresso dos alunos pode ser monitorado em tempo real. (Geogebra, 2024, online)

Assim, acreditamos que tal aplicativo é uma poderosa ferramenta para o ensino de vários tópicos da matemática como já fora citado nesse trabalho por referência de dissertações de outros egressos do PROFMAT.

Entendemos ainda que nosso objetivo principal não é ensinar todas as funcionalidades de tal aplicativo, porém ensinaremos as ferramentas básicas para que os alunos possam calcular área de um quadrilátero conhecidas as medidas de seus lados e seus ângulos internos.

Deste modo, sugerimos que o professor possa mediar o uso do GeoGebra em suas aulas, contudo, entendemos que a funcionalidade do mesmo não existe tantos conhecimentos avançados e o professor pode, fazendo o uso deste trabalho, em poucas aulas ensinar os alunos a utilizarem a ferramenta. Ainda mais, reforçamos que as atividades ficam melhor aplicadas com o uso do software no computador, porém é possível instalar e executá-lo em *smartphones* ou *tablets*.

Ressaltamos também a importância de associarmos o GeoGebra como um poderoso recurso didático que pode ser utilizado para amenizar as dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem, conforme destaca Roosewelt (2023),

> As Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC´s representam um conjunto integrado de recursos tecnológicos, usados para reunir, distribuir e compartilhar informações. As frequentes mudanças às quais as organizações estão sendo submetidas, especialmente em relação à revolução das TIC´s, despertam para a necessidade de preparação de profissionais apropriados de enfrentar novos obstáculos individuais e organizacionais, notadamente no ensino da matemática, haja vista ainda ser uma disciplina com que muitos alunos ainda têm certa dificuldade em sua plena compreensão. (Roosewelt, 2023, p. 268)

Portanto, destacaremos os principais pontos/ferramentas que serão utilizados na construção da nossa Sequência Didática.

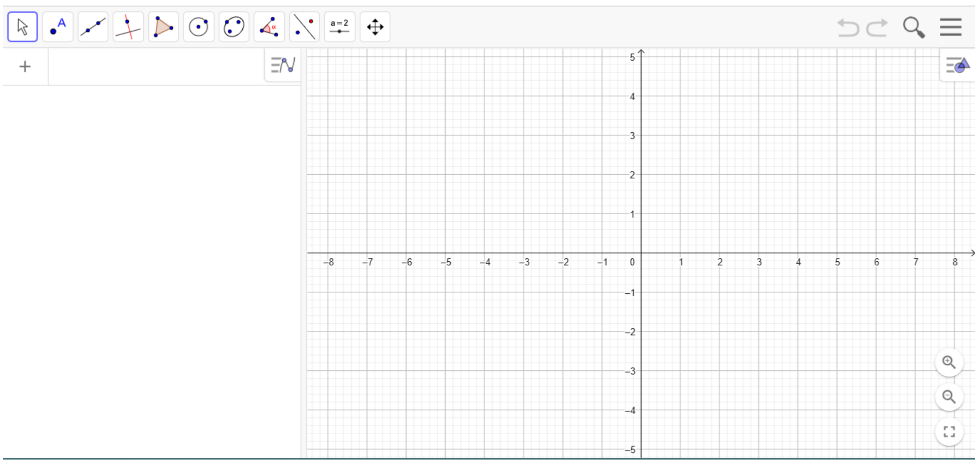
Para a organizar os tópicos a seguir, relacionados ao GeoGebra, utilizamos o Minicurso de Geogebra[6], desenvolvido pelo Grupo PET Matemática UFSM, da Universidade Federal de Santa Maria/RS.

3.1.1 Instalando o GeoGebra

O software pode ser acessado de duas formas, há a versão online[7] e, também, é possível fazer o download do mesmo, para que possa ser usado de forma offline[8].

Para a elaboração deste trabalho foi utilizada a versão online do aplicativo, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 45: Interface do software GeoGebra - Online



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Destacamos que todas as funcionalidades da versão offline são as mesmas da online, portanto, não haverá perda ou discrepância das ferramentas.

[6] Link para donwload da apostila: https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/783/2020/02/Apostila_GeoGebra.pdf
[7] Link para acesso ao Geogebra: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.
[8] Link para download do Geogebra: https://www.geogebra.org/download?lang=pt

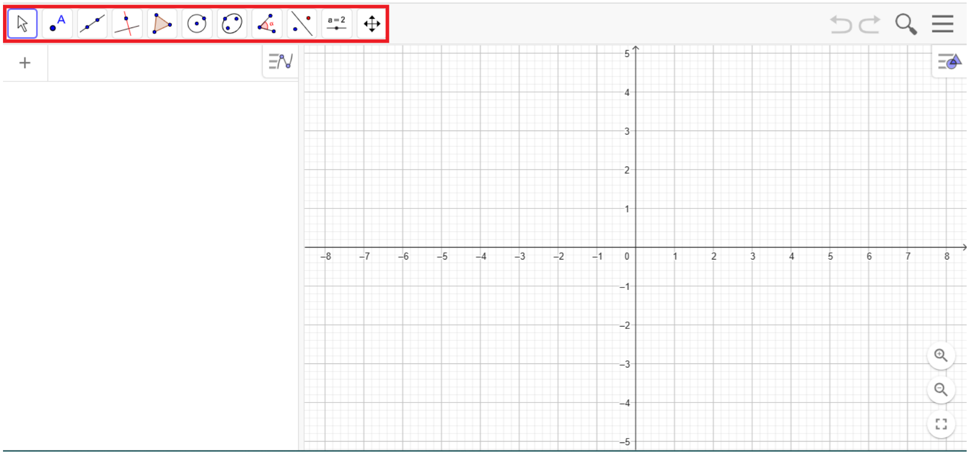
3.1.2 Interface

Neste tópico destacaremos os principais campos de entrada de dados no GeoGebra, como podemos alimentar o programa para que ele nos forneça as respostas para os nossos problemas envolvendo o cálculo de áreas.

I. Barra de ferramentas

E onde estão as ferramentas que auxiliam na construção dos objetos matemáticos. Ela está dividida em 11 janelas, como ilustra a figura a seguir.

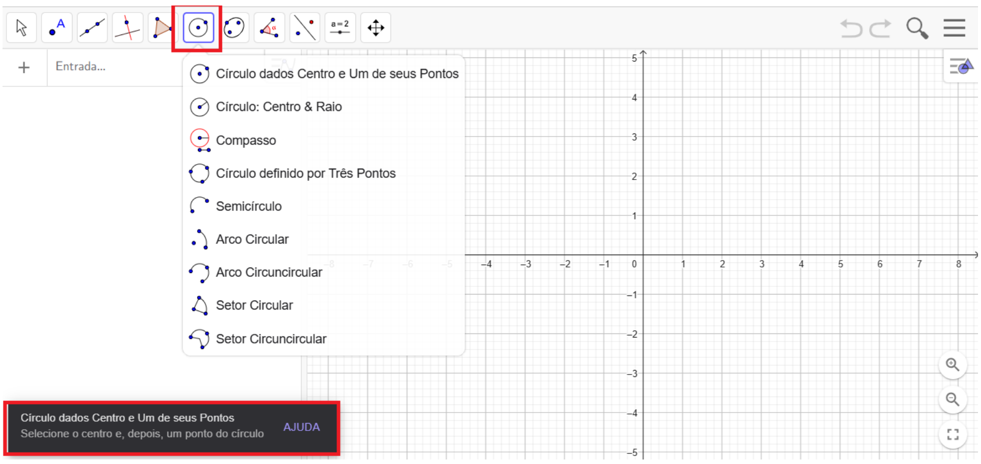
Figura 46: Barra de Ferramentas do GeoGebra



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Selecionando-se uma dessas entradas, o próprio aplicativo auxilia o usuário no que ele deve fazer para utilizar a ferramenta escolhida, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 47: Selecionando uma ferramenta na barra



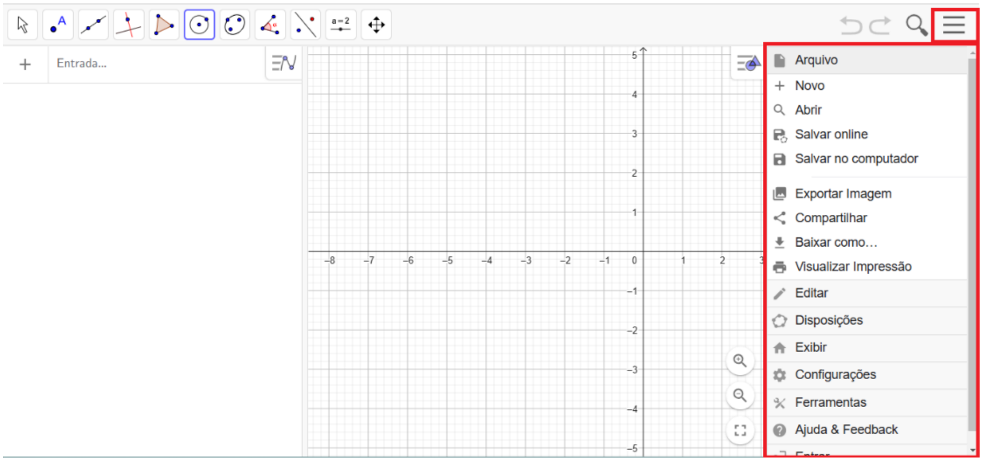
Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

No exemplo acima, o usuário escolheu a ferramenta “Círculo” e o software instruiu quais passos o mesmo deveria seguir.

II. Barra de menus

A Barra de menus fica na parte superior da zona gráfica, e é composta por diversas opções como: *Arquivo*, *Exportar Imagem*, *Baixar como*, *Disposições*, *Configurações*, *Ajuda* e *Feedback*, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 48: Barra de Menus do GeoGebra

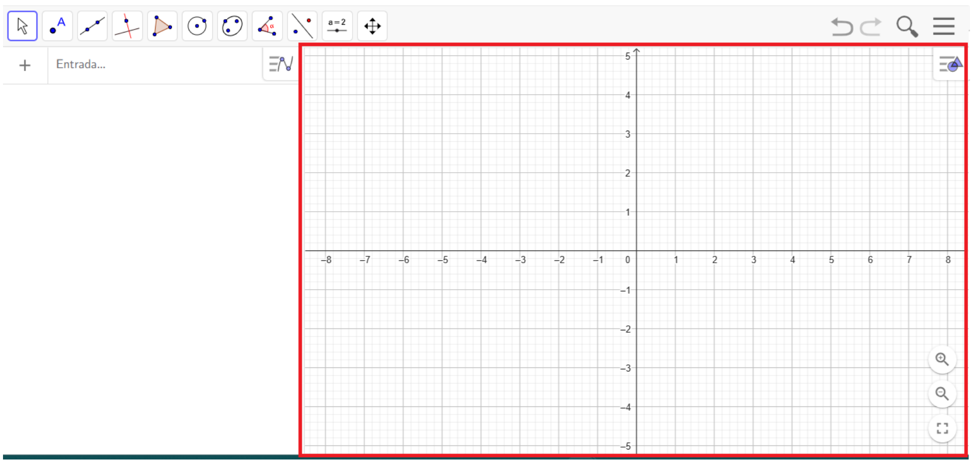


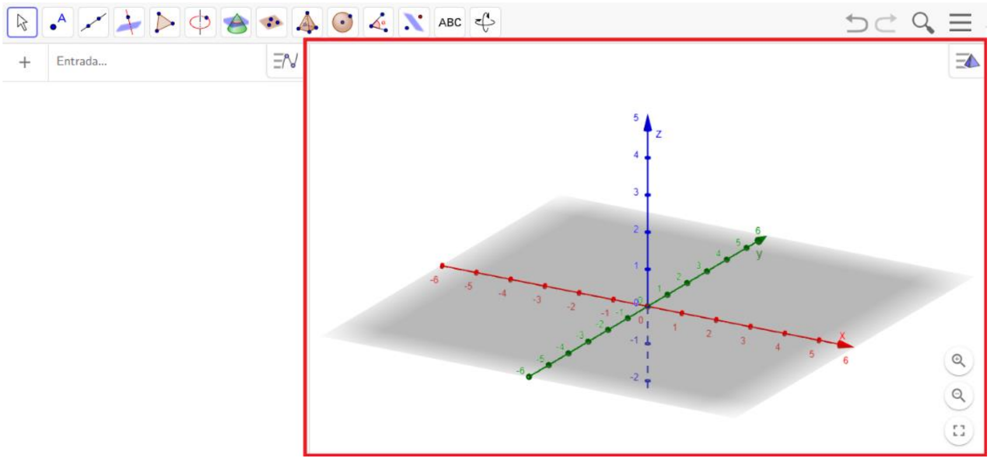
Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

III. Janela de visualização

A janela de visualização ou zona gráfica, mostra a representação gráfica de pontos, vetores, segmentos, polígonos, funções, retas e cônicas no plano e no espaço, que podem ser introduzidos na janela geométrica ou através da entrada de texto. O GeoGebra consegue trabalhar com janelas de visualização em 2D e 3D, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 49: Janela de visualização 2D e 3D, respectivamente



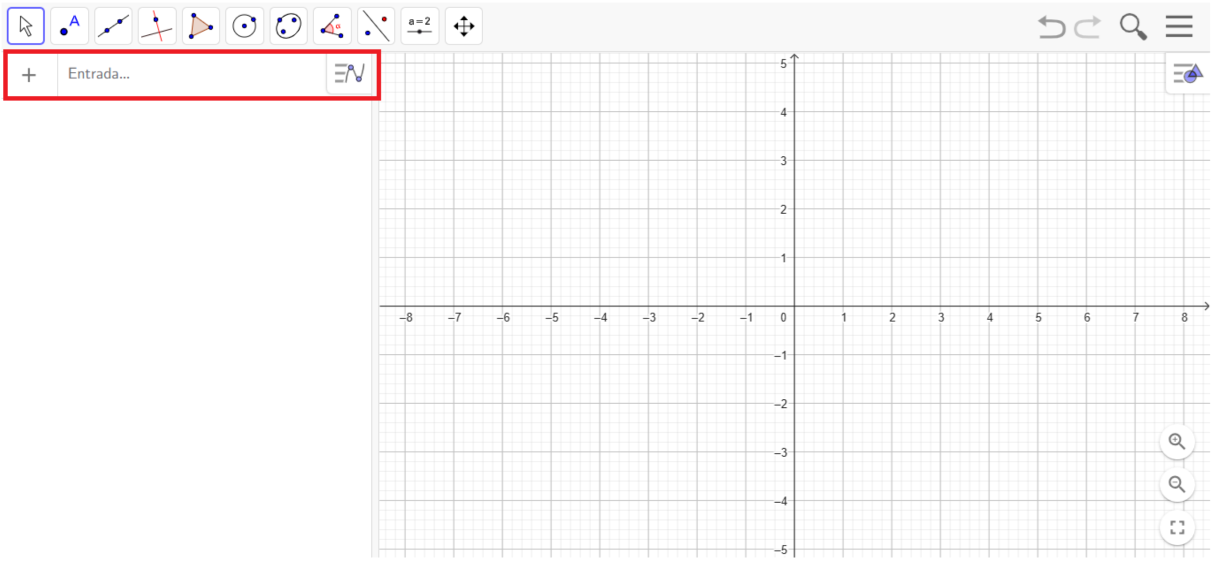


Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

IV. Campo de entrada de texto

O campo de entrada de texto (ou entrada de comandos) é usado para inserir comandos, coordenadas, equações e funções diretamente através do teclado, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 50: Campo de entrada de texto no GeoGebra

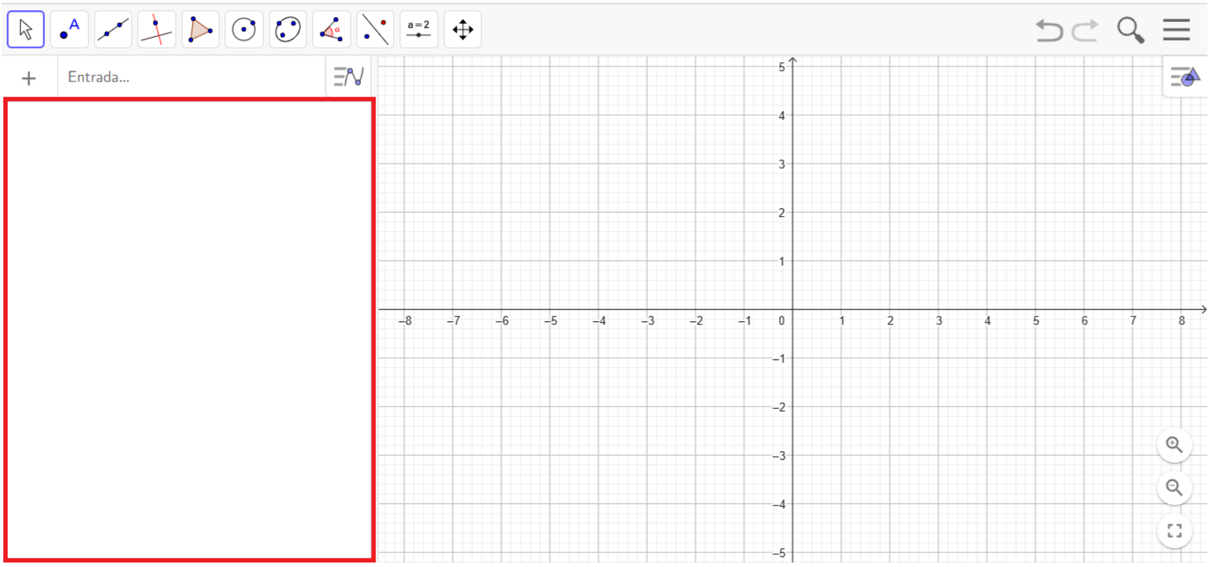


Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

V. Janela de Álgebra

A Janela de Álgebra é um espaço destinado para a exibição e manipulação de dados de forma algébrica, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 51: Janela de álgebra do GeoGebra



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

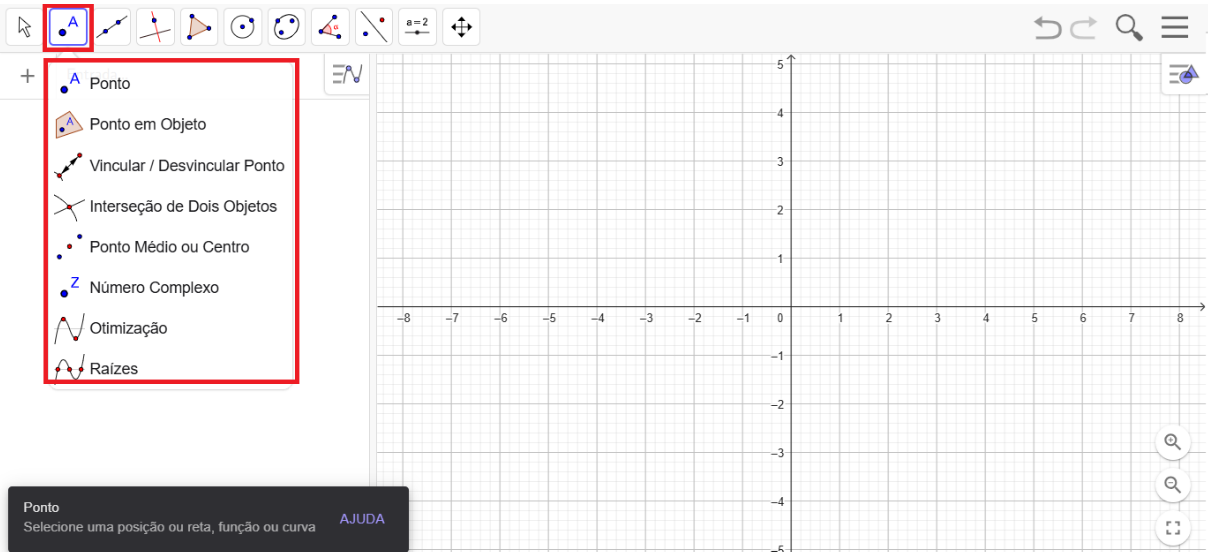
Feita essa breve introdução sobre a interface do GeoGebra, aprofundaremos agora na parte mais relevante para nosso trabalho, o estudo dos quadriláteros, mostrando ferramentas importantes como Ponto Médio, Retas Paralelas, Polígonos, Círculos e outros.

3.1.3 Ferramentas importantes

Dentro da Barra de ferramentas há onze funcionalidades básicas, das quais destacaremos algumas com maior relevância para a elaboração do nosso trabalho. A saber: Ponto, Reta, Lugares Geométricos, Polígonos, Círculos e Ângulos.

I. **Ferramenta Ponto:** Essa funcionalidade permite que insiramos na janela de visualização os seguintes elementos, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 52: Ferramenta Ponto



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

a) Ponto: Para criar um novo ponto, selecione esta ferramenta e em seguida clique na janela de visualização.

b) Ponto em Objeto: Esta ferramenta permite criar um ponto dependente de um objeto. O ponto criado só poderá ser movido dentro do objeto.

c) Vincular/Desvincular Ponto: Para anexar um ponto a um determinado objeto, primeiro clique em um ponto livre e, em seguida, sobre o objeto para o qual você deseja anexar este ponto.

d) Interseção de Dois Objetos: Os pontos de intersecção de dois objetos podem ser criados selecionando dois objetos, assim todos os pontos de interseção serão criados; ou então, clicando-se diretamente sobre uma intersecção de duas linhas, assim apenas um ponto de intersecção será criado.

e) Ponto Médio ou Centro: Com esta ferramenta pode-se obter o ponto médio entre dois pontos ou de um segmento. Essa ferramenta também permite determinar o centro da circunferência clicando em qualquer ponto da mesma.

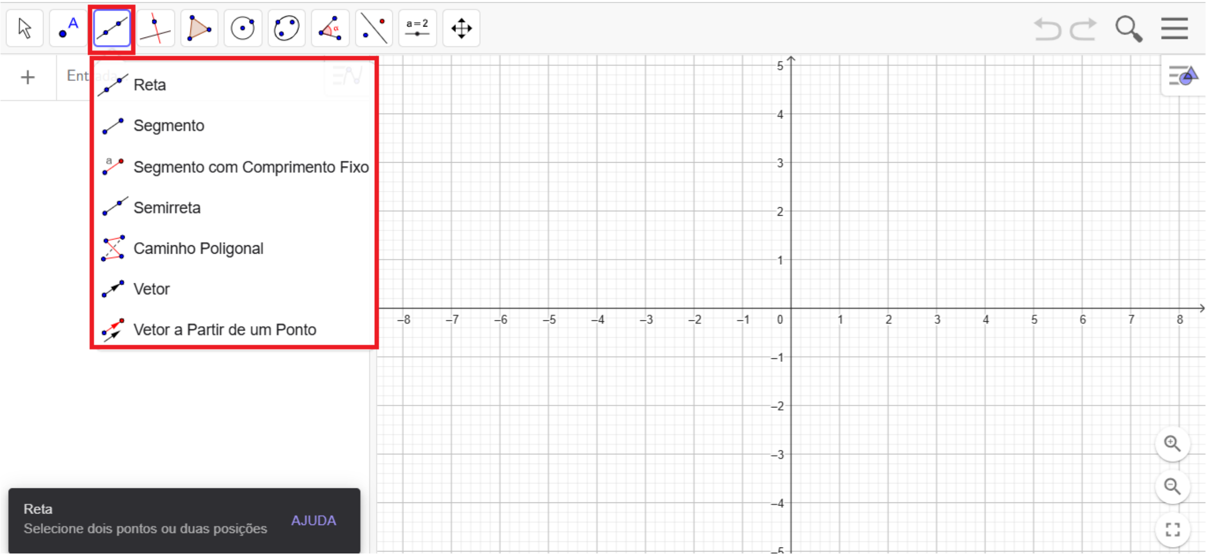
f) Número Complexo: Possibilita criar um ponto no plano imaginário, sendo o eixo das Abcissas (x) o eixo Real (Re) e o eixo das Ordenadas (y) o Imaginário (Im).

g) Otimização: Determina pontos de máximo ou mínimo locais clicando em cima de determinada curva.

h) Raízes: Determina, se houverem, as raízes da curva clicando em qualquer ponto da mesma.

II. **Ferramenta Reta:** Essa funcionalidade permite que insiramos na janela de visualização os seguintes elementos, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 53: Ferramenta Reta



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

a) Reta: Clique em dois pontos A e B e determine a única reta que passa por esses pontos.

b) Segmento: Clique num ponto A (que será um extremo do segmento) e em seguida clique no ponto B, e assim será determinado o segmento de extremos A e B.

c) Segmento com Comprimento Fixo: Clique num ponto A (que será o extremo inicial do segmento), e em seguida, especifique o comprimento desejado no campo de texto da janela de diálogo que irá aparecer.

d) Semirreta: O processo para construção de semirretas com o mouse é semelhante ao de construção de retas. Deve-se clicar na opção Semirreta definida por dois pontos e, em seguida, clicar em dois pontos A e B. É importante destacar que o primeiro ponto selecionado será a origem da semirreta.

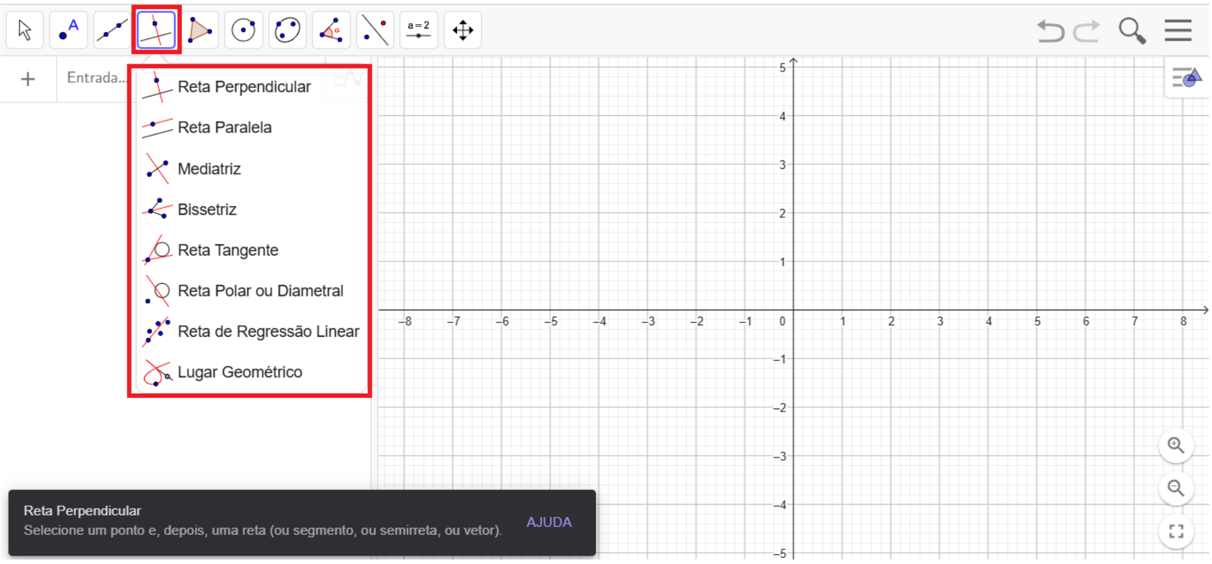
e) Caminho Poligonal: Clique em pontos da Janela de Visualização. Para concluir a construção deve-se clicar no ponto inicial da poligonal.

f) Vetor: Clique num ponto qualquer A (que será o extremo inicial do vetor), e em seguida, num ponto B (que será o extremo final do vetor). Será criado um vetor AB.

g) Vetor a Partir de um Ponto: Para utilizar essa ferramenta é preciso que já exista na Janela de Visualização pelo menos um vetor *u* e um ponto A. Para criar um Vetor a Partir de um Ponto, basta clicar no ponto A e no vetor *u*.

III. **Lugares Geométricos:** Essa funcionalidade permite que insiramos na janela de visualização os seguintes elementos, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 54: Ferramenta Lugares Geométricos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

a) Reta Perpendicular: Com esta ferramenta, pode-se construir uma reta perpendicular a uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Assim, para se criar uma perpendicular, deve-se clicar sobre um ponto e sobre uma direção, que poderá ser definida por qualquer um dos objetos citados anteriormente.

b) Reta Paralela: Utilizando esta ferramenta, pode-se construir uma reta paralela a uma reta, semirreta, segmento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Para criar a reta paralela, basta clicar sobre um ponto e sobre uma direção, que poderá ser definida por qualquer um dos objetos recentemente citados

c) Mediatriz: Utilizando esta ferramenta, pode-se construir uma reta mediatriz a um segmento ou lado de um polígono. Para criar a reta paralela, basta clicar sobre as extremidades do segmento.

d) Bissetriz: Através desta ferramenta, podemos definir uma bissetriz selecionando três pontos A, B e C, obtendo-se assim a bissetriz do ângulo ABC; ou então selecionando duas retas, semirretas, segmentos de reta ou vetores. Neste caso, serão determinados todos os ângulos existentes entre o par de objetos utilizado.

e) Reta Tangente: Com esta ferramenta, é possível construir as retas tangente a uma circunferência, cônica ou função, a partir de um determinado ponto. Para isso, deve-se clicar em um ponto e depois no objeto ao qual a reta (ou retas) será tangente.

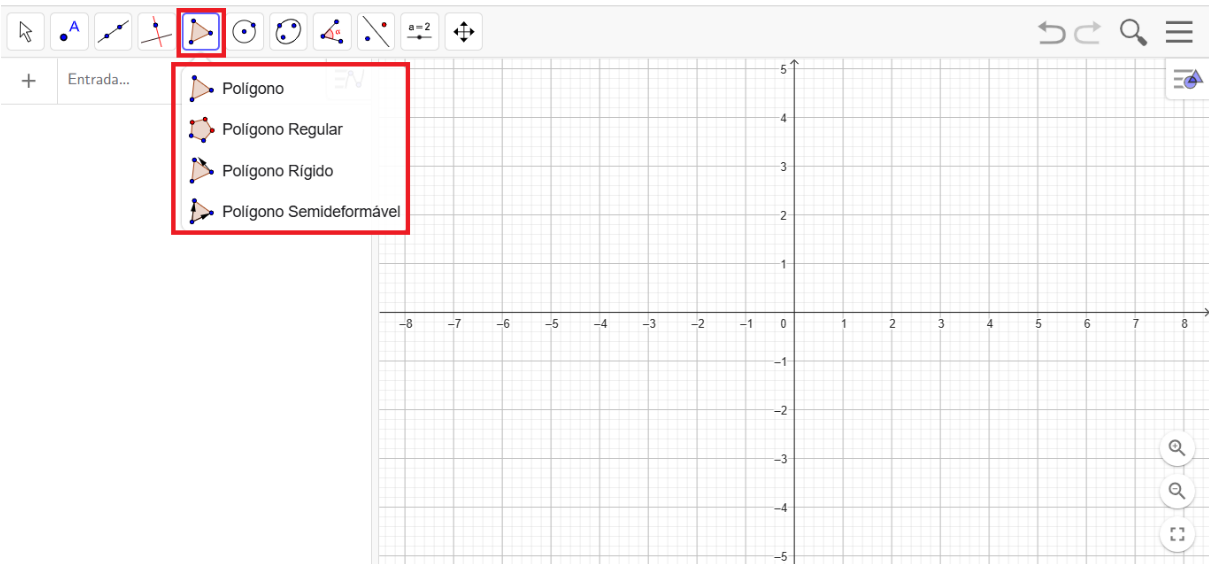
f) Reta Polar ou Diametral: Utilizada ao selecionar uma cônica, ou círculo, e um ponto qualquer. Sendo R o raio do círculo ou a distância focal da cônica, a ferramenta criará uma reta que passa por um ponto não representado, mas que será reconhecido nesse documento como A', tal que o produto escalar entre $\overrightarrow{OA'}$ e $\overrightarrow{OA}$ seja igual a R^2.

g) Reta de Regressão Linear: Com esta ferramenta, pode-se encontrar a reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos. Podemos fazer isso criando um retângulo de seleção que contenha todos os pontos desejados, ou então selecionando uma lista de pontos. citados anteriormente.

h) Lugar Geométrico: Esta ferramenta constrói automaticamente o lugar geométrico determinado pelo movimento de um objeto (ponto, reta, etc.) ao longo de uma trajetória.

IV. **Polígonos:** Essa funcionalidade permite que insiramos na janela de visualização os seguintes elementos, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 55: Ferramenta Polígonos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

a) Polígono: Com esta ferramenta, pode-se construir um polígono irregular com a quantidade de lados desejada. Para isso, selecione sucessivamente pelo menos três pontos, os quais serão os vértices do polígono, e depois clique no ponto inicial para fechar o polígono. Note que, a área do polígono construído será mostrada na janela de álgebra.

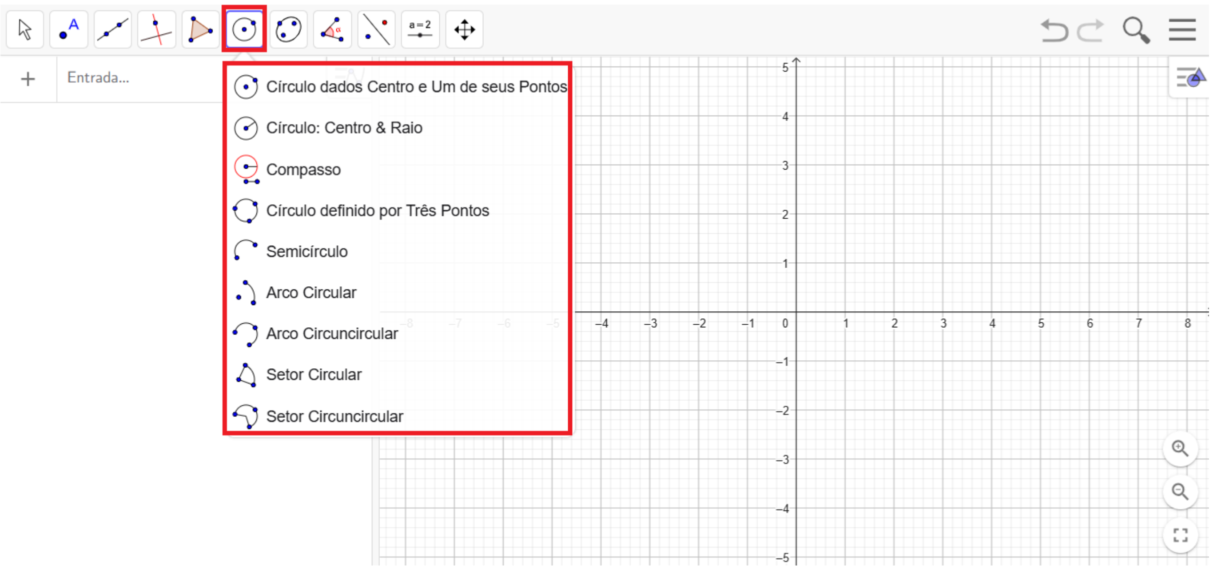
b) Polígono Regular: Com esta ferramenta, pode-se construir um polígono regular a partir de um lado. Selecione dois pontos A e B e especifique o número total de vértices no campo de texto da janela de diálogo que aparece.

c) Polígono Rígido: Com essa ferramenta é possível construir polígonos não deformáveis, ou seja, polígonos cuja forma não é afetada ao movimentar um vértice ou um lado. Assim, ao mover um dos vértices do polígono, todos os outros elementos serão movidos.

d) Polígono Semideformável: Com essa ferramenta é possível construir polígonos semideformáveis, ou seja, polígonos cuja forma só será afetada ao movimentar o vértice inicial. Assim, ao mover o vértice inicial do polígono, todos os outros elementos serão movidos, porém, caso qualquer outro vértice seja movido, o polígono alterará sua forma.

V. **Círculos:** Essa funcionalidade permite que insiramos na janela de visualização os seguintes elementos, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 56: Ferramenta Círculos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

a) Círculo dados centro e um de seus pontos: Para construir um círculo, basta criar (ou selecionar) um ponto na janela de visualização, para definir o centro do círculo. Em seguida, finaliza-se a construção criando (ou selecionando) um segundo ponto, o qual ficará sobre a circunferência.

b) Círculo dados centro e raio: Com esta ferramenta, podemos construir um círculo a partir de centro e com comprimento de raio definidos. Para isso, basta clicar no plano (ou em um ponto), para definir o centro da circunferência. Em seguida, aparecerá uma caixa de texto na tela, solicitando a medida do comprimento do raio. Digite o comprimento desejado e aperte *Enter* ou clique OK.

c) Compasso: Esta ferramenta permite fazer transporte de medidas, ou seja, possui função semelhante `a de um compasso. Para usar esta ferramenta, basta clicar em dois pontos (o que seria equivalente a abrir o compasso na medida deste segmento) e depois em um terceiro ponto, para onde se quer transportar a medida selecionada.

d) Círculo definido por três pontos: Com essa ferramenta basta que selecionemos três pontos não colineares na Janela de Visualização e será construído um círculo que passe por esses pontos.

e) Semicírculo: ao clicar na ferramenta e depois em dois pontos distintos no plano, uma semicircunferência com origem e extremidade nesses mesmos pontos.

f) Arco circular dados centro e dois pontos: Para construir um arco circular a partir de um centro e dois pontos, ´e preciso criar um ponto ou então clicar sobre um ponto já existente (o qual será o centro do arco circular); e em seguida clique em mais dois pontos. Se o sentido dos cliques for anti-horário o arco construído será o menor arco definido pelos três pontos. Se for ao sentido horário, será construído o maior arco.

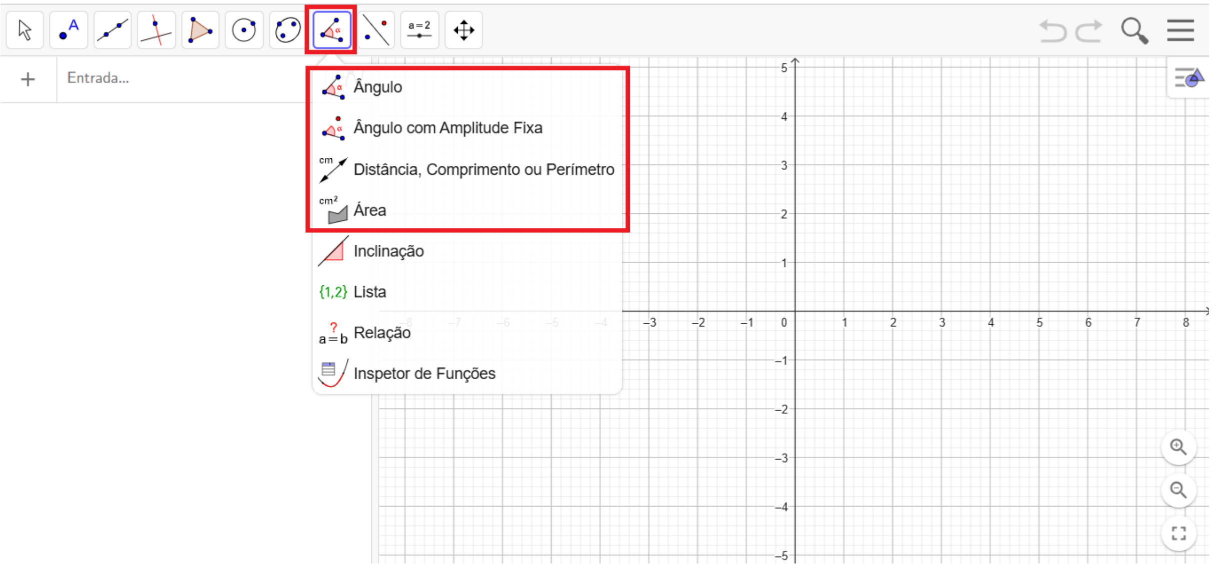
g) Arco circular: Para construir um arco circular definido por três pontos, que podem (ou não) já estar na janela de visualização. Se os pontos não estiverem na janela de visualização, basta criá-los com a ferramenta ativada. Se já estiverem, ativar a ferramenta e em seguida selecionar os pontos.

h) Arco Circuncircular: Esta ferramenta constrói um setor circular a partir do centro e dois pontos. Para utilizá-la, clique inicialmente sobre o ponto que será o centro do arco, e em seguida clique sobre os dois pontos restantes. Se o sentido dos cliques for anti-horário, será construído o menor setor definido pelos três pontos. Se for ao sentido horário, será construído o maior setor.

i) Setor Circuncircular: Para utilizar esta ferramenta, basta clicar em três pontos que podem (ou não) já estar na janela geométrica. Se os pontos não estiverem na janela de visualização, basta criá-los com a ferramenta ativada.

VI. **Ângulos:** Essa funcionalidade permite que insiramos na janela de visualização os seguintes elementos, conforme ilustra a figura a seguir.

Figura 57: Ferramenta Ângulos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

a) Ângulo: Através desta ferramenta, podemos determinar um ângulo selecionando três pontos ou então selecionando duas retas, semirretas, segmentos de reta ou vetores. Para determinar o ângulo entre os objetos selecionados, deve-se selecioná-los em ordem, no sentido horário. Pode-se, ainda, através desta ferramenta, se determinar todos os ângulos de um polígono, sendo ele regular ou não. Para isso, basta ativar a ferramenta e depois selecionar o polígono

b) Ângulo de amplitude fixa: Com esta ferramenta, a partir de dois pontos, pode-se construir um ângulo com amplitude fixa. Para isso, deve-se clicar nos dois pontos iniciais, e então definir (na janela que se abrirá), a medida e o sentido (horário ou anti-horário) do ˆangulo que se deseja criar.

c) Distancia, comprimento ou perímetro: Esta ferramenta fornece a distância entre dois pontos, duas retas, ou entre um ponto e uma reta, mostrando um texto dinâmico na janela de visualização. Além disso, também fornece o comprimento de um segmento, e o perímetro de um polígono, circunferência ou elipse.

d) Área: Esta ferramenta fornece o valor numérico da área de um polígono, círculo ou elipse, mostrando um texto dinâmico com o respectivo valor na janela de visualização.

Reforçamos que as ferramentas acima citadas se referem apenas a algumas das inúmeras funcionalidades do software, isto posto, indicamos a dissertação do egresso PROFMAT

Marcelo Dos Santos Pereira (2021), cujo tema é O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA O ENSINO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS A ALUNOS DO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO, onde o mesmo faz uma excelente explanação sobre o *software* GeoGebra no uso da construção geométrica de polígonos regulares.

4 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DOS QUADRILÁTEROS

Este capítulo apresenta uma sequência didática voltada para o ensino dos quadriláteros no Ensino Fundamental, utilizando o software GeoGebra como ferramenta de apoio. A proposta busca abordar conceitos fundamentais de quadriláteros, como ângulos internos, diagonais, pontos médios e cálculo de áreas, por meio de atividades progressivas em nível de dificuldade. Além disso, são destacadas as principais dificuldades encontradas pelos alunos no aprendizado desses conceitos, bem como estratégias para superá-las. A organização das atividades visa proporcionar uma aprendizagem eficaz, promovendo maior engajamento e facilitando a visualização dos conceitos geométricos de forma interativa e prática.

A sequência didática é organizada em atividades práticas que exploram diferentes propriedades dos quadriláteros, começando pelos trapézios e seguindo com paralelogramos, retângulos e losangos. Cada atividade é acompanhada de instruções detalhadas para a construção das figuras no GeoGebra, além de orientações sobre pontos positivos, possíveis dificuldades dos alunos e sugestões de atividades complementares.

As atividades são estruturadas em ordem crescente de complexidade. As primeiras envolvem a construção e identificação das propriedades básicas de cada quadrilátero, enquanto as últimas exigem a aplicação de conhecimentos mais avançados, como a relação entre diagonais e a determinação de áreas. Além disso, há um esforço para relacionar os conceitos geométricos com situações do cotidiano, tornando o aprendizado mais significativo.

Por isso, o capítulo enfatiza o uso de recursos tecnológicos para tornar o ensino mais interativo e acessível. O GeoGebra permite que os alunos experimentem diferentes construções, testem hipóteses e visualizem as propriedades geométricas de maneira dinâmica. Essa abordagem busca não apenas facilitar a compreensão dos conceitos, mas também estimular o pensamento crítico e a autonomia dos estudantes no aprendizado da Geometria.

Deste modo, propomos assim uma série de atividades sobre quadriláteros onde os alunos podem/devem resolvê-las utilizando o GeoGebra. Para tanto, eles deverão utilizar as ferramentas já mencionadas neste trabalho para aprenderem sobre conceitos básicos dos trapézios, paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados. Conceitos como ângulos internos, diagonais, pontos médios e, sobretudo, como calcular a área desses quadriláteros.

Destaco ainda, com base em meus anos de salas de aula, como as principais dificuldades encontradas no processo de ensino de quadriláteros:

1. Deficiências nos conceitos prévios:

- **Geometria básica:** Muitos alunos chegam ao 8º ano com dificuldades para reconhecer figuras geométricas básicas ou compreender conceitos como paralelismo e perpendicularidade.
- **Operações matemáticas:** Lacunas em habilidades aritméticas, como o cálculo de multiplicação, divisão e frações, podem dificultar a resolução de problemas que envolvem áreas.

2. Abordagem abstrata:

- **Dificuldade em visualizar:** Alguns alunos têm dificuldade em compreender e manipular mentalmente figuras geométricas bidimensionais.
- **Falta de associação prática:** Muitos alunos não conseguem relacionar os conceitos de geometria com situações do cotidiano, tornando a aprendizagem pouco significativa.

3. Compreensão das fórmulas:

- A memorização de fórmulas para calcular áreas pode ser incentivada sem que os alunos entendam sua origem ou o porquê de sua aplicação.

4. Trabalho com ângulos:

- **Dificuldades com instrumentos:** Alguns alunos encontram problemas ao usar transferidores e réguas com precisão.
- **Falta de conhecimento de propriedades:** O desconhecimento de propriedades importantes, como a soma dos ângulos internos de quadriláteros (360º), dificulta a resolução de questões.

5. Interesse e engajamento:

- O ensino tradicional, focado em repetição e aplicação direta de fórmulas, pode desmotivar alunos que se envolvem mais facilmente com métodos interativos ou visuais.

6. Pouco uso de recursos tecnológicos ou materiais concretos:

- Muitos professores têm dificuldade para implementar ferramentas digitais, softwares de geometria ou recursos concretos (como dobraduras e malhas quadriculadas) para tornar a aprendizagem mais interativa e prática.

Sousa (2021) enfatiza salienta que

> Tendo em vista a necessidade de buscar estratégias de ensino para o conteúdo da divisão que supere o procedimento do "arme e efetue" e a prática dos algoritmos, a Resolução de Problemas (RP) apresenta-se como estratégia de ensino que representa uma ferramenta fértil, interessante e desafiadora para trabalhar os conceitos matemáticos, pois proporciona a valorização dos seus conhecimentos prévios, pensamentos e questionamentos por meio da expressão de suas ideias. (SOUSA, p. 197)

Logo, acreditamos ainda que as atividades estejam organizadas em ordem crescente de dificuldade, de modo que as primeiras atividades são mais elementares e envolvem poucos comandos no aplicativo, assim como precisam de pouco conhecimento da Geometria Plana para serem resolvidos. Deste modo, as últimas atividades de cada polígono já envolvem conceitos mais complexos, como, por exemplo, a noção de polígono inscrito e circunscrito.

Acrescentamos ainda que cada atividade contará com uma “Ficha da Atividade” onde destacaremos, com base em nossas experiências em sala de aula, aspectos como: *Pontos positivos*, *Como auxiliar os alunos*, *Possíveis dificuldades*, *Possíveis atividades complementares* e *Duração da atividade*.

Salientamos ainda que, para facilitar o acesso e a replicação dessas atividades por outros professores e estudantes, foi criado um repositório digital contendo todas as resoluções das atividades propostas. O link para este repositório encontra-se no Apêndice I, permitindo que os interessados explorem e utilizem os materiais de forma dinâmica e interativa. Essa iniciativa visa promover uma aprendizagem mais significativa, incentivando a experimentação e o raciocínio geométrico assistido por tecnologia.

Ademais, conjecturamos que, caso os alunos consigam realizar todas essas atividades propostas, os mesmos estarão aptos a determinar a área de qualquer quadrilátero conhecendo as medidas de seus lados e seus ângulos internos utilizando para tal o software Geogebra.

4.1 Trapézios

Neste tópico trabalharemos cinco atividades relacionadas aos trapézios, com grau de dificuldade crescente tais que:

Atividade	**Objetivo**	**Nível de dificuldade esperado**
1	Construir um trapézio simples e identificar suas bases e altura	Fácil
2	Determinar o tipo de trapézio (isósceles, retângulo ou escaleno)	Fácil
3	Explorar as propriedades da área do trapézio	Médio
4	Construir e explorar a propriedade da mediana de um trapézio	Médio
5	Construir um Trapézio conhecendo as medidas de seus quatro lados	Difícil

Os links com as resoluções das atividades propostas neste trabalho são todos autorais, e poderão ser utilizados por outros professores para auxiliarem seus alunos na construção da resolução de cada uma dessas atividades.

Sugerimos ainda que o professor trabalhe uma atividade por aula de 45 minutos. Porém, a depender do nível da turma, o mesmo pode resolver mais de uma atividade por encontro, ficando essa organização a cargo do docente.

Atividade 1: Construção Básica de um Trapézio

Objetivo: Construir um trapézio simples e identificar suas bases e altura.

1. Usando a ferramenta de pontos, crie 4 pontos (A, B, C, D) no plano.

2. Conecte os pontos em ordem (A-B-C-D) usando o segmento de reta para formar o trapézio, garantindo que AB//CD.

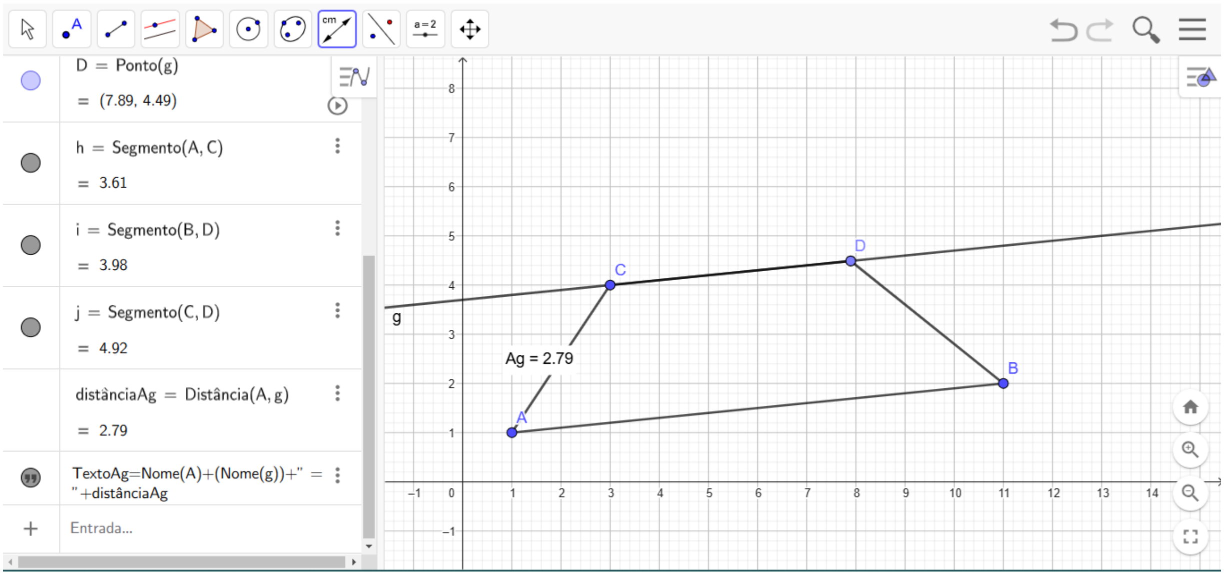
3. Identifique as bases AB (maior) e CD (menor) do trapézio, com auxílio do comando "Paralelas".

4. Meça a altura do trapézio utilizando a ferramenta "Distância ou Comprimento".

Resolução:
Passo 01: Crie os pontos A e B.
Passo 02: Crie o segmento AB.
Passo 03: Marque um ponto C, não pertencente a AB.
Passo 04: Construa a reta paralela à AB que passa por C.
Passo 05: Marque um ponto D, diferente de C, na reta criada no passo anterior.
Passo 06: Construir os segmentos AC, BD e CD, de modo que ABCD seja um trapézio.
Passo 07: Utilizando a ferramenta "Distância" clique no ponto A e na reta criada no Passo 04. Essa medida será a altura do trapézio.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 58: Atividade 01 - Trapézios



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/turvttpp

FICHA DA ATIVIDADE 1	
Pontos Positivos	**Clareza:** As instruções são claras e objetivas, facilitando a compreensão dos alunos, mesmo aqueles que estão iniciando seus estudos em geometria. **Sequenciamento lógico:** Os passos da construção estão ordenados de forma lógica, guiando o aluno passo a passo.
Como auxiliar os alunos	**Revisão do conceito de paralelismo:** Reforçar a ideia de que retas paralelas nunca se cruzam e utilizar exemplos do dia a dia para ilustrar o conceito. **Demonstração da altura:** Mostrar diferentes maneiras de construir a altura do trapézio, utilizando a ferramenta de perpendicularidade.
Possíveis dificuldades	**Conceito de paralelismo:** Alguns alunos podem ter dificuldade em entender o conceito de paralelismo e em garantir que os lados AB e CD sejam paralelos. **Identificação da altura:** A identificação da altura pode ser um desafio, especialmente se o trapézio não estiver na posição padrão.
Possíveis atividades complementares	**Construção de trapézios a partir de condições específicas** Após construir um trapézio genérico, propor aos alunos que investiguem as condições para que um trapézio seja classificado como isósceles, retângulo ou escaleno. Eles podem variar as medidas dos lados e dos ângulos para verificar as propriedades de cada tipo. **Relação entre trapézios e outros quadriláteros:** Explorar as relações entre trapézios, paralelogramos e retângulos. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações de trapézios em situações reais, como em arquitetura, engenharia e design.
Duração da atividade	1 aula

Atividade 2: Classificação do Trapézio
Objetivo: Determinar o tipo de trapézio (isósceles, retângulo ou escaleno).

1. Crie um trapézio arbitrário.

2. Verifique se os lados não paralelos são congruentes (usando a ferramenta "Distância ou Comprimento"). Se forem, o trapézio é isósceles.

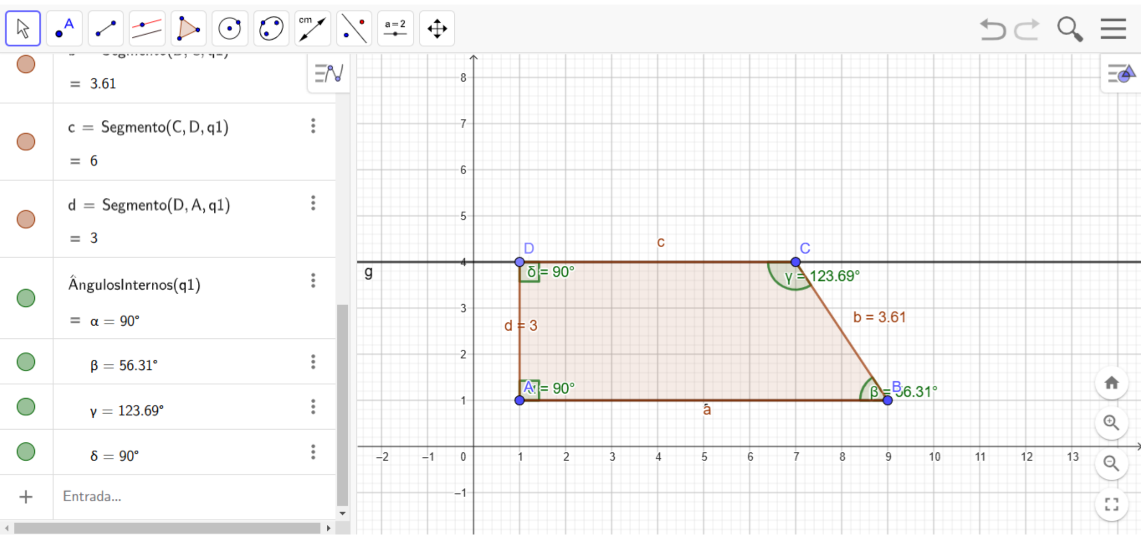
3. Insira ângulos no trapézio e determine se há um ângulo reto. Se houver, classifique como trapézio retângulo.

4. Classifique o trapézio conforme os critérios definidos.

Resolução:
Passo 01: Crie os pontos A e B.
Passo 02: Crie o segmento AB.
Passo 03: Marque um ponto C, não pertencente a AB.
Passo 04: Construa a reta paralela à AB que passa por C.
Passo 05: Marque um ponto D, diferente de C, na reta criada no passo anterior.
Passo 06: Utilizando a ferramenta “Polígono”, construa o trapézio ABCD.
Passo 07: Utilizando a ferramenta “Ângulos”, determine os ângulos internos do trapézio
Passo 08: Utilizando a ferramenta “Distância”, determine os comprimentos dos lados AD e BC.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 59: Atividade 02 - Trapézios



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Neste caso, como AD ≠ BC e os ângulos A e D são retos, então podemos classificar esse trapézio como retângulo e escaleno.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/fcpeqwz9

FICHA DA ATIVIDADE 2	
Pontos Positivos	**Abordagem prática:** A construção de trapézios variados permite que os alunos visualizem as diferentes características de cada tipo. **Utilização de ferramentas:** A atividade incentiva o uso de ferramentas de medição, como a ferramenta "Distância ou Comprimento", para verificar a congruência dos lados.
Como auxiliar os alunos	**Revisão do conceito de congruência:** Reforçar a ideia de que segmentos congruentes possuem a mesma medida e utilizar exemplos práticos para ilustrar o conceito. **Utilização de ferramentas de medição:** Ensinar os alunos a utilizar a ferramenta de ângulo para medir os ângulos internos do trapézio e verificar se há ângulos retos.
Possíveis dificuldades	**Conceito de congruência:** Alguns alunos podem ter dificuldade em entender o conceito de congruência e em verificar se os lados não paralelos são congruentes. **Identificação de ângulos retos:** A identificação de ângulos retos pode ser um desafio, especialmente se o trapézio não estiver na posição padrão
Possíveis atividades complementares	**Construção de trapézios a partir de condições específicas:** Propor aos alunos que construam um trapézio isósceles com base e altura dadas ou um trapézio retângulo com lados não paralelos congruentes. **Relação entre trapézios e outros quadriláteros:** Explorar as relações entre trapézios, paralelogramos e retângulos. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações de trapézios em situações reais, como em arquitetura, engenharia e design.
Duração da atividade	1 aula

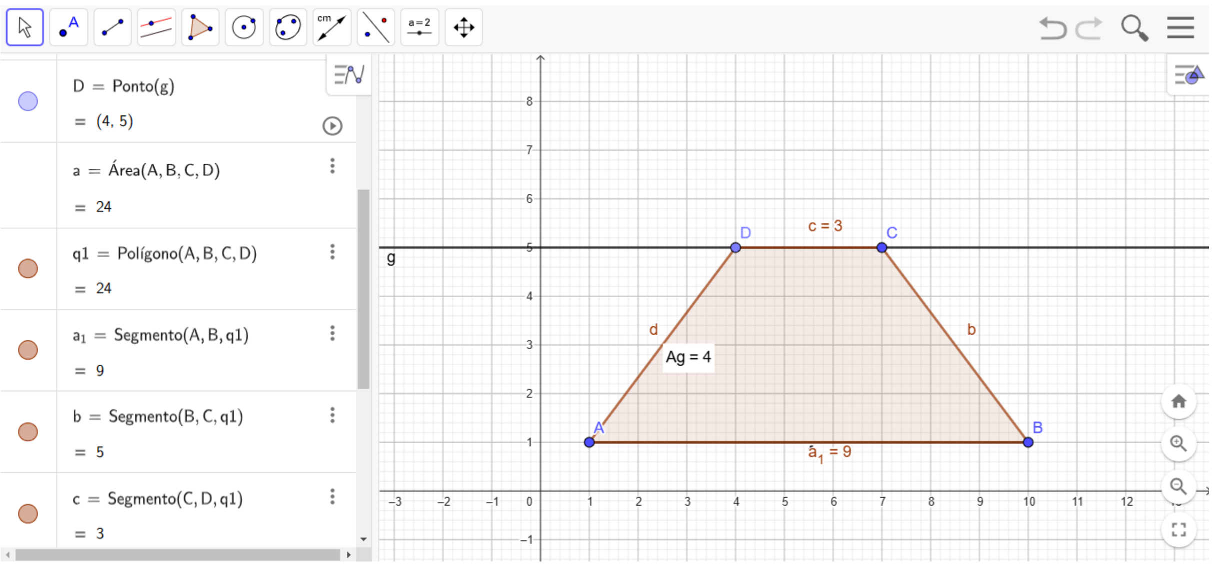
Atividade 3: Área de um Trapézio
Objetivo: Explorar as propriedades da área do trapézio.

1. Construa um trapézio com bases b_1 e b_2 e altura h_1.
2. Utilize o comando: Copiar código Area[Polygon[A, B, C, D]] para encontrar a área do trapézio.
3. Verifique se a área segue a fórmula $Área = \frac{(b_1 + b_2)h_1}{2}$.

Resolução:
Passo 01: Crie os pontos A e B.
Passo 02: Crie o segmento AB.
Passo 03: Marque um ponto C, não pertencente a AB.
Passo 04: Construa a reta paralela à AB que passa por C.
Passo 05: Marque um ponto D, diferente de C, na reta criada no passo anterior.
Passo 06: Utilizando a ferramenta "Polígono", construa o trapézio ABCD.
Passo 07: No Campo Entrada de Texto digite: Área(A,B,C,D).
Passo 08: Utilizando a ferramenta "Distância" determine as medidas das bases e da altura do trapézio.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 60: Atividade 03 - Trapézios



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que a área do trapézio, de acordo com o software, é 24 e, também,

$$Área = \frac{(b_1 + b_2)h_1}{2} = \frac{(9+3)4}{2} = 12 \cdot 2 = 24$$

Logo, a fórmula da área está verificada para esse trapézio.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/saakfz7g

<table>
<tr><th colspan="2">FICHA DA ATIVIDADE 3</th></tr>
<tr><td>Pontos Positivos</td><td>□ Utilização da fórmula: A atividade exige que os alunos apliquem a fórmula da área do trapézio, reforçando o conhecimento teórico.
□ Verificação: A comparação entre o resultado obtido pelo software e o resultado calculado pela fórmula permite uma verificação imediata.</td></tr>
<tr><td>Como auxiliar os alunos</td><td>□ Demonstração da fórmula: Apresentar uma demonstração geométrica da fórmula da área do trapézio, utilizando a decomposição do trapézio em triângulos e retângulos.
□ Exercícios guiados: Propor exercícios com diferentes valores para as bases e a altura, auxiliando os alunos na aplicação da fórmula.</td></tr>
<tr><td>Possíveis dificuldades</td><td>□ Compreensão da fórmula: Alguns alunos podem ter dificuldade em entender a fórmula da área do trapézio e como aplicá-la.
□ Utilização do comando: A utilização do comando para calcular a área pode gerar dúvidas, especialmente para alunos com menor familiaridade com o software.</td></tr>
<tr><td>Possíveis atividades complementares</td><td>□ Construção de trapézios com área fixa: Propor aos alunos que construam trapézios com áreas iguais, mas com diferentes dimensões.
□ Otimização: Propor problemas de otimização, como encontrar o trapézio de maior área com um perímetro fixo.
□ Aplicações práticas: Buscar exemplos de aplicações do cálculo da área de um trapézio em situações reais, como na arquitetura ou na engenharia.</td></tr>
<tr><td>Duração</td><td>1 aula</td></tr>
</table>

Atividade 4: Mediana de um Trapézio

Objetivo: Construir e explorar a propriedade da mediana de um trapézio.

1. Construa um trapézio e conecte os pontos médios dos lados não paralelos utilizando a ferramenta de ponto médio.

2. Trace o segmento que conecta os pontos médios, chamado de mediana.

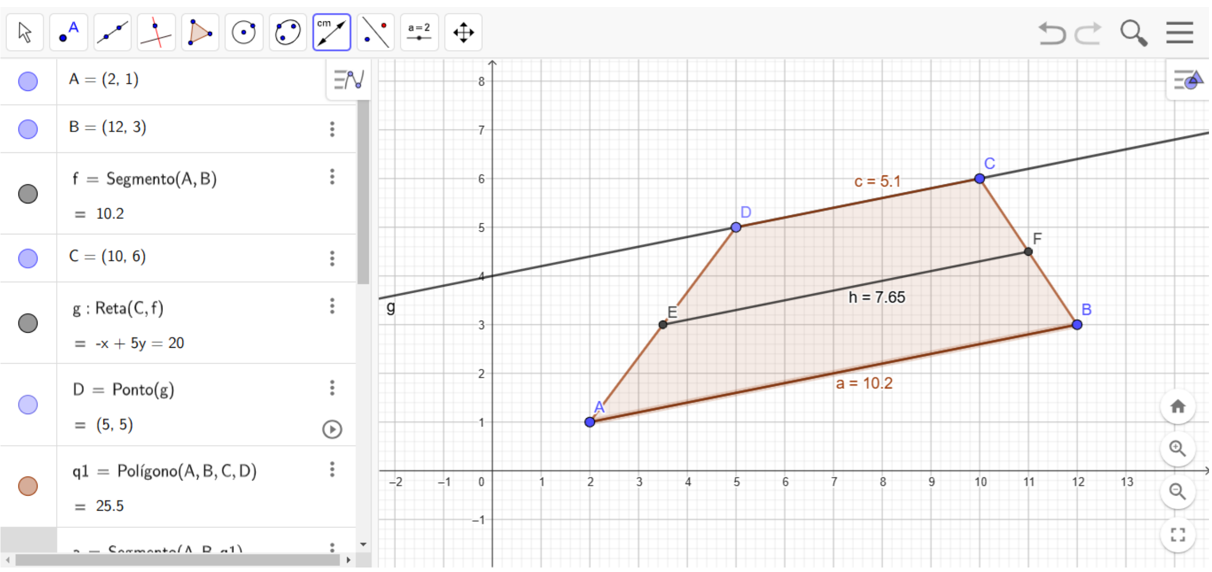
3. Meça o comprimento da mediana e comprove que: $m = \dfrac{b_1 + b_2}{2}$.

4. Generalize a propriedade para trapézios de diferentes dimensões.

Resolução:
Passo 01: Crie os pontos A e B.
Passo 02: Crie o segmento AB.
Passo 03: Marque um ponto C, não pertencente a AB.
Passo 04: Construa a reta paralela à AB que passa por C.
Passo 05: Marque um ponto D, diferente de C, na reta criada no passo anterior.
Passo 06: Utilizando a ferramenta "Polígono", construa o trapézio ABCD.
Passo 07: Utilizando a ferramenta "Ponto Médio", marque os pontos médios E e F dos segmentos AD e BC, respectivamente.
Passo 08: Crie o segmento EF.
Passo 09: Utilizando a ferramenta "Distância", determine as medidas dos segmentos AB, CD e EF.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 61: Atividade 04 - Trapézios



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que a área do trapézio, de acordo com o software, é EF = 7,65 e, também,

$$EF = \frac{5,1+10,2}{2} = \frac{15,3}{2} = 7,65$$

Portanto, a fórmula da mediana está verificada para esse trapézio. E, movendo o ponto D sobre a reta DC, podemos verificar que sempre ocorrerá essa relação entre a mediana e o comprimento das bases.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/jpv8upbe

FICHA DA ATIVIDADE 4	
Pontos Positivos	□ **Verificação prática:** A medição da mediana e a comparação com o resultado da fórmula reforça o entendimento teórico. □ **Generalização:** A sugestão de generalizar a propriedade para diferentes trapézios incentiva o pensamento crítico e a busca por padrões.
Como auxiliar os alunos	□ **Revisão do conceito de ponto médio:** Reforçar a ideia de que o ponto médio divide um segmento de reta em duas partes iguais. □ **Utilização de ferramentas de medição:** Ensinar os alunos a utilizar a ferramenta de ponto médio para localizar os pontos médios dos lados.
Possíveis dificuldades	□ **Conceito de ponto médio:** Alguns alunos podem ter dificuldade em identificar os pontos médios dos lados não paralelos. □ **Demonstração da propriedade:** A demonstração da propriedade da mediana pode ser complexa para alguns alunos, especialmente aqueles com menor familiaridade com as propriedades dos triângulos semelhantes.
Possíveis atividades complementares	□ **Construção de trapézios a partir da mediana e das bases:** Propor aos alunos que construam um trapézio conhecendo a medida da mediana e das bases. □ **Relação entre a mediana e as diagonais:** Explorar a relação entre a mediana do trapézio e as suas diagonais. □ **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações da mediana do trapézio em situações reais, como em arquitetura ou engenharia.
Duração	1 aula

Atividade 5: Construir um Trapézio conhecendo as medidas de seus quatro lados.

Objetivo: Verificar a unicidade de um trapézio conhecidas as suas medidas.

1. Construa um trapézio de dimensões 5 cm, 5 cm, 6 cm e 8 cm.

2. Construa um trapézio de dimensões 5 cm, 5 cm, 6 cm e 8 cm, diferente do construído no item anterior.

3. Verifique que um trapézio não é unicamente determinado sabendo apenas as medidas dos seus lados.

Resolução:

Passo 01: Utilizando a ferramenta "Segmento com Comprimento Fixo", construa o segmento AB = 8 cm.

Passo 02: Com centros em A e B, construa os círculos de raio 5 cm.

Passo 03: Sem perda de generalidade, com centro em A, construa um círculo de raio 1 cm, pois $\frac{8-6}{2}=1$.

Passo 04: Marque o ponto C, de interseção entre o círculo construído no passo anterior e o segmento AB, com A – C – B.

Passo 05: Utilizando a ferramenta "Reta Perpendicular" construa a reta perpendicular a AB que passa por C.

Passo 06: Marque o ponto D, de interseção entre o círculo criado no Passo 02 e a reta criada no passo anterior.

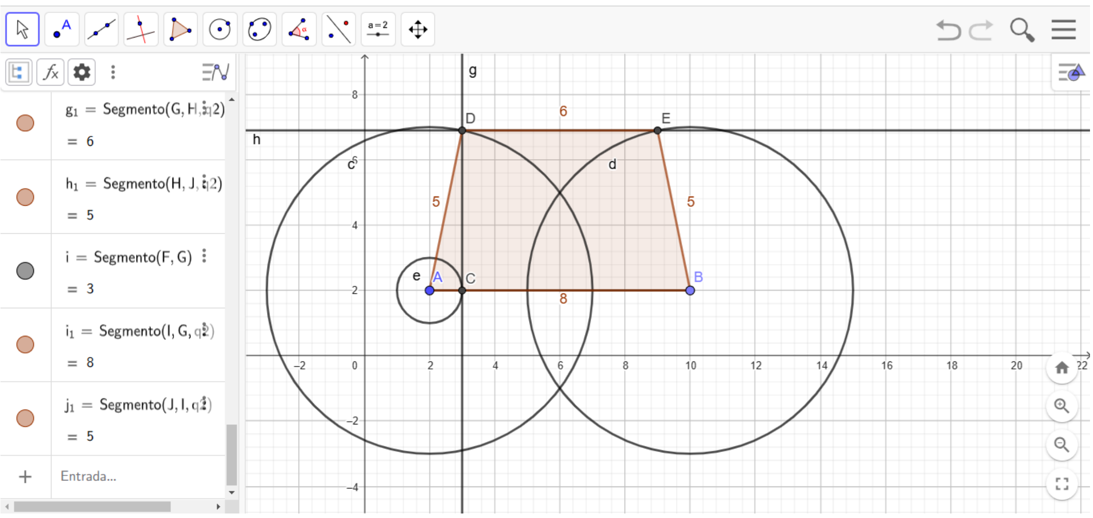
Passo 07: Utilizando a ferramenta "Reta Paralela", construa a reta paralela à AB que passa pelo ponto D.

Passo 08: Marque o ponto E, de interseção entre a reta criada no passo anterior e o círculo de centro B, criado no Passo 02.

Passo 09: Construa o trapézio ABED.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 62: Atividade 05 - Trapézios - Parte I



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Construamos agora o trapézio IGHJ.

Passo 01: Utilizando a ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo”, construa o segmento FG = 3 cm (pois 8 – 5 = 3).

Passo 02: Com centros em F e G, construa círculos de raios 5 e 6, respectivamente.

Passo 03: Marque o ponto H, de interseção entre os círculos de centro F e G.

Passo 04: Construa a reta que passa por F e G.

Passo 05: Utilizando a ferramenta “Reta paralela” construa a reta que passa por H e é paralela a FG.

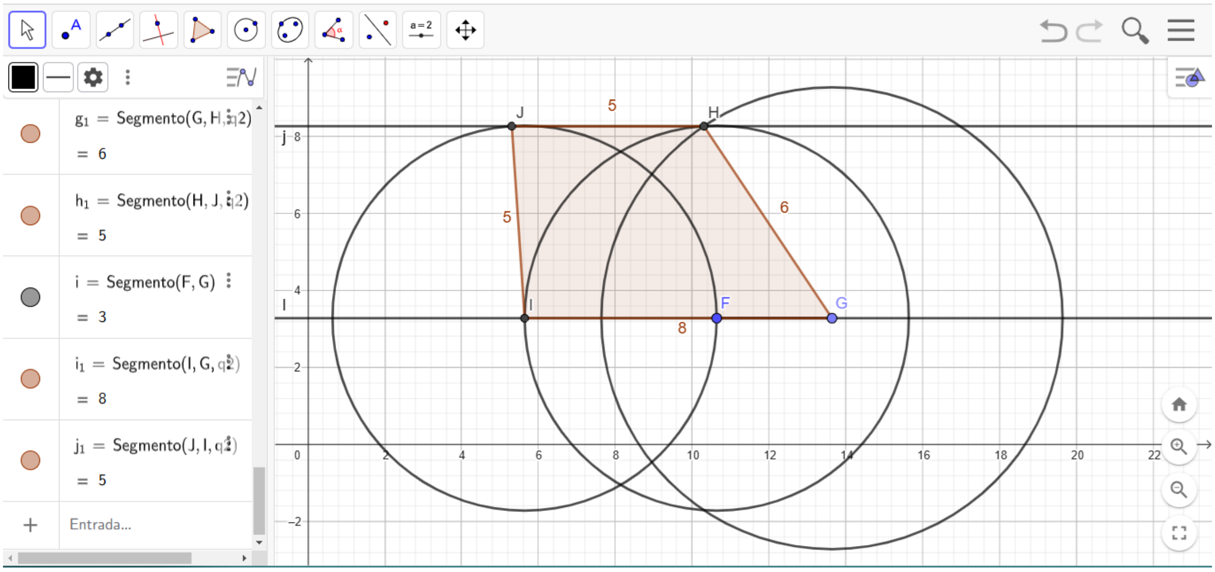
Passo 06: Marque o ponto I, de interseção entre o círculo de centro F e raio 5 e a reta no passo anterior, tal que I – F – G.

Passo 07: Construa o círculo de centro I e raio 5.

Passo 08: Marque o ponto de interseção J, de interseção entre a reta construída no Passo 05 com o círculo construído no item anterior. Atente-se para que HJ tenha 5 cm.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a **Erro! Fonte de referência não encontrada.** a seguir.

Figura 63: Atividade 05 - Trapézios - Parte II



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que foi fundamental um conhecimento mais avançado de conceitos básicos da Geometria Euclidiana para realizar a construção desses dois trapézios.

Logo, podemos verificar que um trapézio não fica unicamente determinado se conhecermos somente as medidas de seus lados.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/vpgvfrfw

FICHA DA ATIVIDADE 5	
Pontos Positivos	**Natureza exploratória:** A atividade incentiva os alunos a explorarem diferentes possibilidades de construção, desenvolvendo a intuição geométrica. **Desafio à intuição:** A descoberta de que um trapézio não é unicamente determinado por seus lados pode desafiar a intuição dos alunos e estimular a busca por justificativas. **Conexão com outros conceitos:** A atividade pode ser relacionada com o conceito de congruência de triângulos e com a classificação dos trapézios.
Como auxiliar os alunos	**Utilizar materiais manipulativos:** Utilizar palitos de picolé ou canudos para construir os trapézios e visualizar as diferentes configurações. **Promover a discussão em grupo:** Incentivar a discussão em grupo para que os alunos possam compartilhar suas ideias e construir argumentos. **Oferecer pistas:** Fornecer pistas sobre as condições necessárias para que um trapézio seja único, como a necessidade de conhecer um ângulo ou a medida de uma diagonal.
Possíveis dificuldades	**Visualização espacial:** Alguns alunos podem ter dificuldade em visualizar as diferentes possibilidades de construção do trapézio. **Justificativa:** Justificar por que a construção não é única pode ser um desafio, especialmente para alunos com menor domínio dos conceitos geométricos.
Possíveis atividades complementares	**Construção de quadriláteros com medidas dadas:** Propor aos alunos que construam outros quadriláteros, como paralelogramos e retângulos, com medidas de lados dadas e verifiquem se a construção é única. **Relação entre congruência e semelhança:** Explorar a relação entre a congruência e a semelhança de figuras geométricas. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de situações reais em que a não unicidade de uma figura geométrica pode ser relevante.
Duração	1 aula

4.2 Paralelogramos

Neste tópico trabalharemos cinco atividades relacionadas aos paralelogramos, com grau de dificuldade crescente tais que:

Atividade	**Objetivo**	**Nível de dificuldade esperado**
6	Construir um paralelogramo e identificar suas propriedades básicas	Fácil
7	Verificar propriedades geométricas dos lados e ângulos de um paralelogramo.	Médio
8	Determinar se um quadrilátero é um paralelogramo conhecendo apenas seus vértices.	Médio
9	Determinar que em um paralelogramo as diagonais interceptam-se nos seus respectivos pontos médios	Difícil
10	Calcular a área de um paralelogramo conhecendo dois de seus lados consecutivos e o ângulo entre eles	Difícil

Atividade 6: Construção Básica de um Paralelogramo

Objetivo: Construir um paralelogramo e identificar suas propriedades básicas.

1. Construa um paralelogramo ABCD.

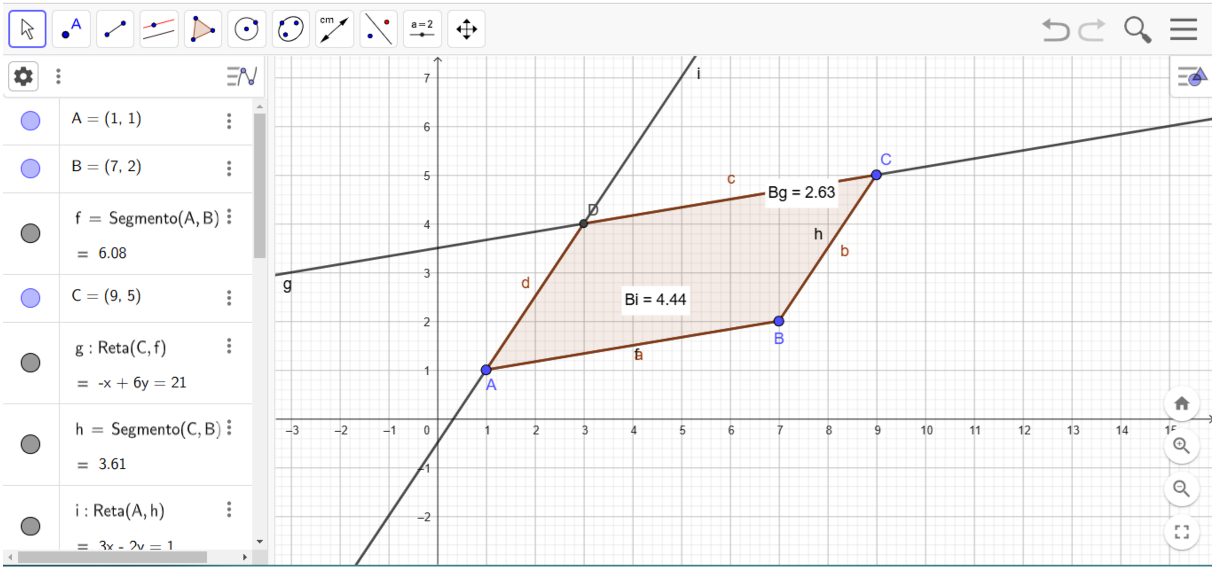
2. Determine as alturas relativas aos lados AB e BC.

Resolução:

Passo 01: Marque os pontos A e B.
Passo 02: Construa o segmento AB.
Passo 03: Marque um ponto C, não pertencente ao segmento AB.
Passo 04: Construa a reta paralela à AB que passa por C.
Passo 05: Construa o segmento BC.
Passo 06: Construa a reta paralela à BC que passa por A.
Passo 07: Marque o ponto D, de interseção entre as retas construídas no Passo 04 e no passo anterior.
Passo 08: Determine a distância do vértice B às retas construídas nos Passos 04 e 06.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 64: Atividade 06 - Paralelogramos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

As alturas relativas aos lados AB e AD são, respectivamente, 2,63 e 4,44.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/mwjbktbj

FICHA DA ATIVIDADE 6	
Pontos Positivos	• **Direta:** A atividade vai direto ao ponto, focando na construção e identificação de elementos básicos do paralelogramo. • **Exploração de conceitos:** A determinação das alturas exige que os alunos compreendam o conceito de altura de um paralelogramo em relação a um lado. • **Preparação para cálculos:** A atividade prepara o terreno para o cálculo da área do paralelogramo, que envolve a utilização da altura.
Como auxiliar os alunos	• **Visualização:** Utilizar exemplos práticos para ilustrar o conceito de altura, como a altura de um prédio em relação ao solo. • **Demonstração:** Mostrar diferentes maneiras de construir a altura de um paralelogramo, utilizando as ferramentas do software.
Possíveis dificuldades	• **Conceito de altura:** Alguns alunos podem ter dificuldade em entender o conceito de altura de um paralelogramo em relação a um lado. • **Construção das alturas:** A construção das alturas pode exigir o uso de ferramentas específicas do software de geometria dinâmica.
Possíveis atividades complementares	• **Cálculo da área:** Após determinar as alturas, calcular a área do paralelogramo utilizando a fórmula A = b . h. • **Relação entre a área e as medidas dos lados:** Explorar a relação entre a área do paralelogramo e as medidas de seus lados e ângulos. • **Construção de paralelogramos com condições específicas:** Propor desafios como construir um paralelogramo com lados de medidas dadas ou com ângulos de medidas específicas.
Duração	1 aula

Atividade 7: Propriedades dos Lados e Ângulos

Objetivo: Verificar propriedades geométricas dos lados e ângulos de um paralelogramo.

1. Construa um paralelogramo com um dos lados medindo 5 cm, meça os comprimentos de todos os lados usando a ferramenta "Distância ou Comprimento". Prove que os lados opostos têm a mesma medida.

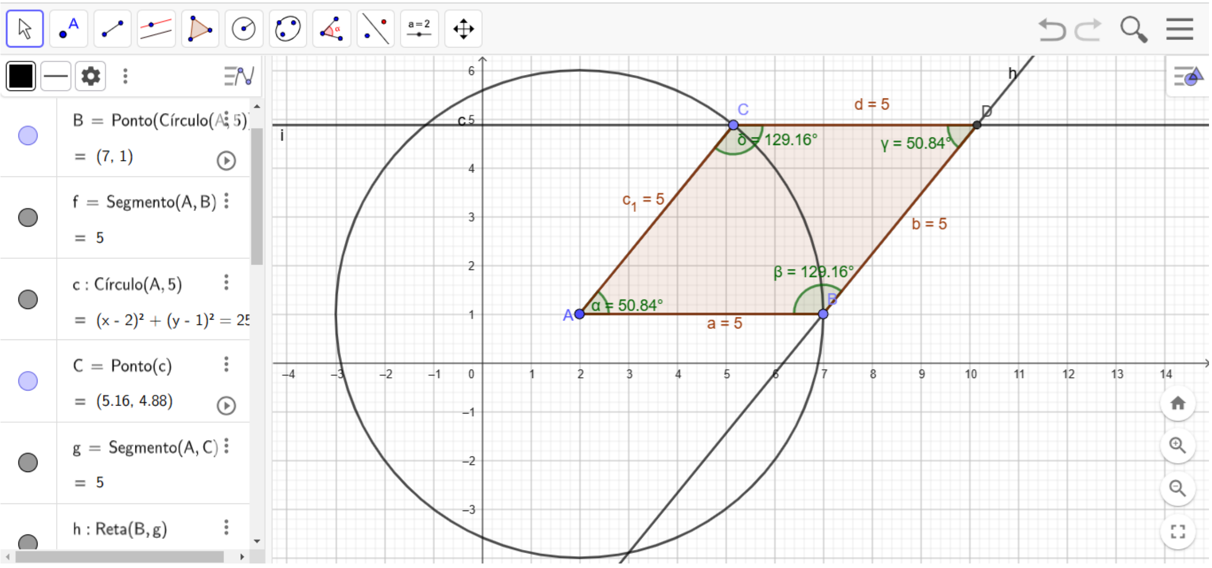
2. Insira os ângulos internos usando a ferramenta "Ângulo".

3. Comprove que os ângulos opostos são congruentes.

Resolução:
Passo 01: Construa o segmento AB de comprimento 5 cm.
Passo 02: Com centro em B, construa um círculo de raio 5 cm.
Passo 03: Sobre a circunferência construída no item anterior, marque um ponto C.
Passo 04: Construa o segmento BC.
Passo 05: Construa a reta paralela à AB que passa por C.
Passo 06: Construa a reta paralela à BC que passa por A.
Passo 07: Marque o ponto D, de interseção entre as retas criadas nos dois passos anteriores.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 65: Atividade 07 - Paralelogramos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que todos os lados do paralelogramo medem 5 cm e que os ângulos opostos são congruentes.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/en3c6pzz

FICHA DA ATIVIDADE 7	
Pontos Positivos	**Exploração prática:** A construção e medição permitem que os alunos verifiquem as propriedades de forma concreta. **Ferramentas adequadas:** A utilização das ferramentas de medição do software de geometria dinâmica facilita a realização da atividade.
Como auxiliar os alunos	**Revisão do conceito de congruência:** Reforçar a ideia de que segmentos congruentes têm a mesma medida e ângulos congruentes têm a mesma abertura. **Utilizar exemplos práticos:** Utilizar exemplos do dia a dia para ilustrar o conceito de congruência, como lados opostos de um livro ou os ângulos de um quadrado.
Possíveis dificuldades	**Conceito de congruência:** Alguns alunos podem ter dificuldade em entender o conceito de congruência de segmentos e ângulos. **Justificativa das propriedades:** Justificar porque os lados opostos são congruentes e os ângulos opostos são congruentes pode ser um desafio para alguns alunos.
Possíveis atividades complementares	**Construção de paralelogramos com condições específicas:** Propor desafios como construir um paralelogramo com lados de medidas dadas ou com ângulos de medidas específicas. **Relação entre paralelogramos e outros quadriláteros:** Explorar as relações entre paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de paralelogramos no mundo real e analisar suas propriedades.
Duração	1 aula

Atividade 8: Transformação em coordenadas

Objetivo: Determinar se um quadrilátero é um paralelogramo conhecendo apenas seus vértices.

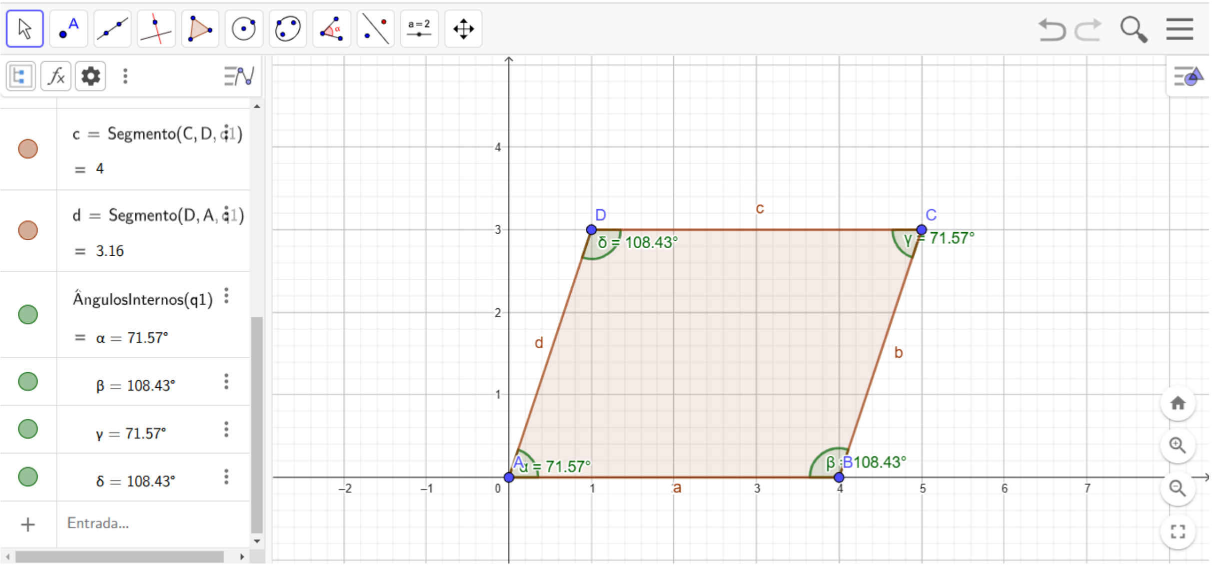
1. Insira os pontos A(0,0), B(4,0), C(5,3) e D(1,3) no plano cartesiano para criar um quadrilátero.

2. Determine os ângulos internos nesse quadrilátero e verifique se ele é um paralelogramo.

Resolução:
Passo 01: No campo Entrada de Texto, insira os pontos A(0,0), B(4,0), C(5,3) e D(1,3).
Passo 02: Construa o polígono ABCD.
Passo 03: Determine os ângulos internos esse quadrilátero.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 66: Atividade 08 - Paralelogramos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Como os ângulos opostos desse quadrilátero são congruentes, podemos concluir que esse quadrilátero é um paralelogramo.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/rmhhzzea

FICHA DA ATIVIDADE 8	
Pontos Positivos	□ **Abordagem algébrica:** A atividade introduz uma nova perspectiva para o estudo dos paralelogramos, utilizando as coordenadas cartesianas. □ **Conexão com outras áreas da matemática:** A atividade estabelece uma ponte entre a geometria e a álgebra, mostrando como os conceitos de um podem ser aplicados no outro.
Como auxiliar os alunos	□ **Revisão do conceito de coeficiente angular:** Reforçar a ideia de que o coeficiente angular representa a inclinação de uma reta. □ **Utilização de calculadoras:** Permitir o uso de calculadoras para auxiliar nos cálculos.
Possíveis dificuldades	□ **Representar corretamente os pontos:** Alguns alunos podem ter dificuldade em conseguir posicionar os pontos no plano cartesiano. □ **Cálculos algébricos:** Os cálculos algébricos envolvidos na determinação dos ângulos internos podem ser desafiadores para alguns alunos.
Possíveis atividades complementares	□ **Construção de paralelogramos a partir de coordenadas:** Propor aos alunos que construam diferentes paralelogramos a partir de coordenadas dadas e verifiquem suas propriedades. □ **Relação entre as coordenadas dos vértices e as propriedades do paralelogramo:** Investigar como as coordenadas dos vértices de um paralelogramo se relacionam com suas propriedades (lados opostos congruentes, ângulos opostos congruentes, diagonais que se bissecam). □ **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações das coordenadas cartesianas no estudo dos paralelogramos, como em problemas de física ou engenharia.
Duração	1 aula

Atividade 9: Ponto médio das diagonais

Objetivo: Determinar que em um paralelogramo as diagonais interceptam-se nos seus respectivos pontos médios.

1. Construa um paralelogramo com lados medindo 3 cm e 5 cm.

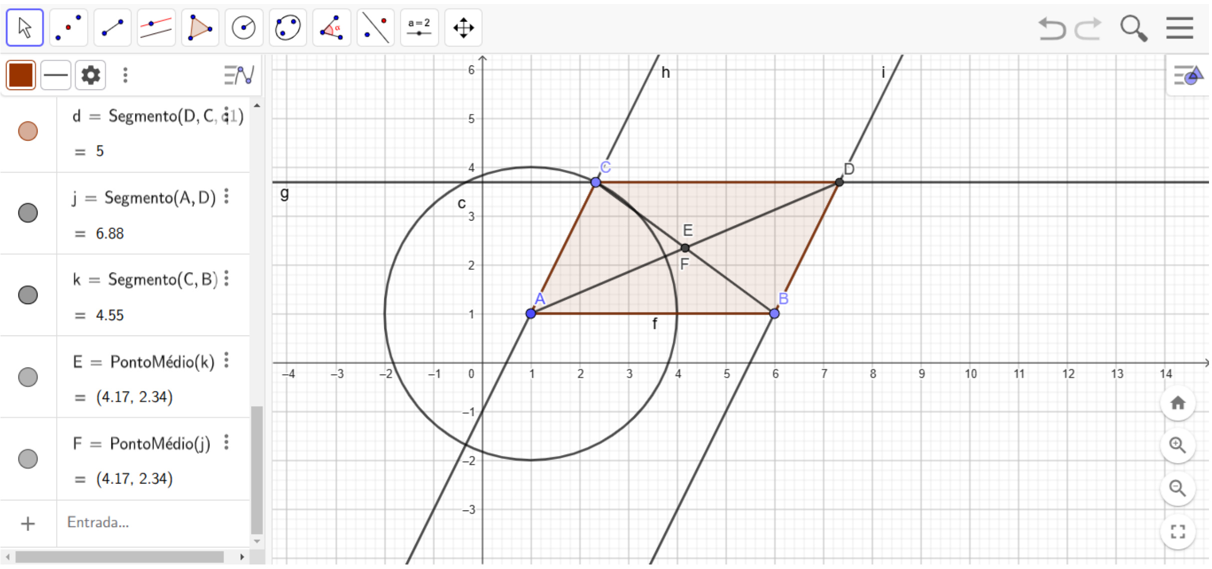
2. Construa as diagonais desse paralelogramo.

3. Verifique que essas diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.

Resolução:
Passo 01: Marque um ponto A.
Passo 02: Construa um segmento de comprimento fixo AB = 5 cm
Passo 03: Com centro em A, construa um círculo de raio 3 cm.
Passo 04: Marque um ponto C sobre o círculo construído no item anterior.
Passo 05: Construa a reta paralela a AB que passa por C.
Passo 06: Construa a reta que passa por AC.
Passo 07: Construa a reta paralela a AC que passa por B.
Passo 08: Marque o ponto D, de interseção entre as retas construídas nos passos 05 e 06.
Passo 09: Construa o paralelogramo ABCD.
Passo 10: Construa as diagonais AD e BC.
Passo 11: Marque os pontos médios das diagonais AD e BC.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 67: Atividade 09 - Paralelogramos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que os pontos médios das diagonais (E e F) coincidem. Portanto, as diagonais se interceptam nos seus respectivos pontos médios.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/xsxyuajy

FICHA DA ATIVIDADE 9	
Pontos Positivos	□ **Direta e objetiva:** A atividade foca em uma propriedade específica do paralelogramo, facilitando a compreensão dos alunos. □ **Exploração prática:** A construção das diagonais e a verificação do ponto médio permitem uma visualização clara da propriedade. □ **Preparo para futuras demonstrações:** A atividade prepara o terreno para demonstrações mais formais da propriedade, utilizando conceitos de geometria plana.
Como auxiliar os alunos	□ **Revisão do conceito de ponto médio:** Reforçar a ideia de que o ponto médio divide um segmento de reta em duas partes iguais. □ **Utilização de ferramentas de medição:** Ensinar os alunos a utilizar a ferramenta de ponto médio para localizar os pontos médios das diagonais.
Possíveis dificuldades	□ **Conceito de ponto médio:** Alguns alunos podem ter dificuldade em entender o conceito de ponto médio de um segmento de reta. □ **Justificativa da propriedade:** Justificar por que as diagonais se intersectam nos pontos médios pode ser um desafio para alguns alunos.
Possíveis atividades complementares	□ **Construção de paralelogramos a partir das diagonais:** Propor aos alunos que construam um paralelogramo a partir de suas diagonais e verifiquem as propriedades. □ **Relação entre as diagonais e os lados:** Explorar a relação entre o comprimento das diagonais e o comprimento dos lados de um paralelogramo. □ **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações da propriedade das diagonais de um paralelogramo em situações reais.
Duração	1 aula

Atividade 10: Cálculo de área

Objetivo: Calcular a área de um paralelogramo conhecendo dois de seus lados consecutivos e o ângulo entre eles.

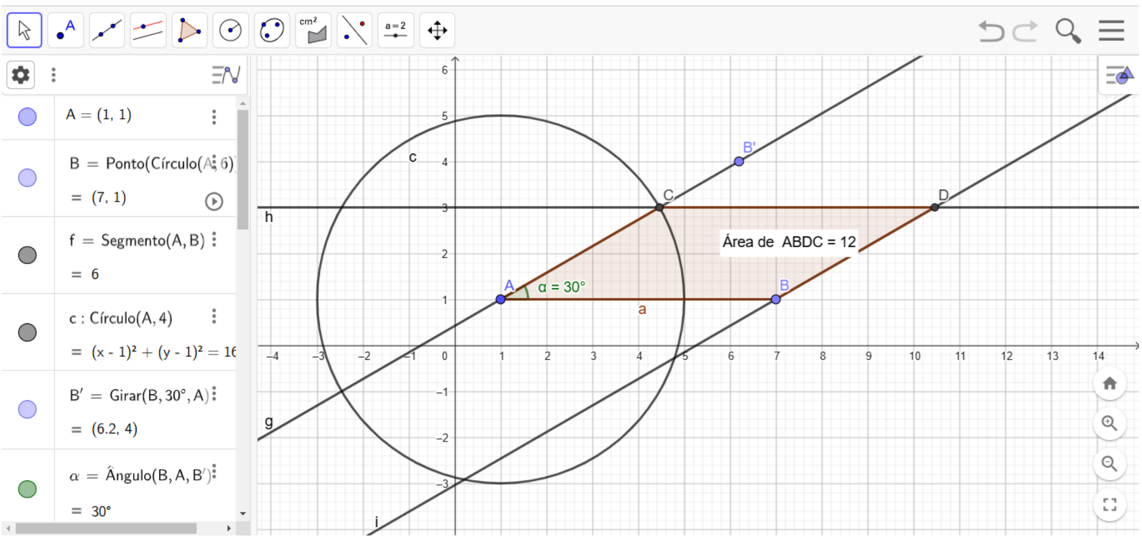
1. Construa um paralelogramo de lados 4 cm e 6 cm e ângulo entre eles igual a 30°.
2. Determine a altura relativa ao maior lado desse paralelogramo.
3. Calcule a área do paralelogramo.

Resolução:

Passo 01: Marque um ponto A.
Passo 02: Construa um segmento de comprimento fixo igual a 6 cm.
Passo 03: Com centro em A, construa um círculo de raio 4 cm.
Passo 04: Crie um ângulo BAB' de medida 30º.
Passo 05: Construa a reta que passa por BB'.
Passo 06: Marque o ponto C, de intersecção entre os elementos criados nos passos 04 e 05.
Passo 07: Construa a reta paralela à AB que passa por C.
Passo 08: Construa a reta paralela à AC que passa por B.
Passo 09: Marque o ponto D, de interseção entre as retas construídas nos passos 07 e 08.
Passo 10: Construa o paralelogramo ABCD.
Passo 11: Determine a área do paralelogramo criado no item anterior.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 68: Atividade 10 - Paralelogramos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/s5qvvsn2

FICHA DA ATIVIDADE 10	
Pontos Positivos	**Aplica a teoria:** A atividade exige que os alunos apliquem a fórmula da área do paralelogramo em uma situação concreta. **Explora diferentes conceitos:** A atividade envolve tanto a construção geométrica quanto o cálculo trigonométrico (para determinar a altura).
Como auxiliar os alunos	**Demonstração da fórmula:** Apresentar uma demonstração geométrica da fórmula da área do paralelogramo, utilizando a decomposição do paralelogramo em triângulos. **Discussão em grupo:** Promover a discussão em grupo para que os alunos possam compartilhar suas dúvidas e soluções.
Possíveis dificuldades	**Ângulos:** Alguns alunos podem ter dificuldade em calcular a altura utilizando ângulos. **Aplicabilidade da fórmula:** Alguns alunos podem não entender por que a fórmula da área do paralelogramo funciona.
Possíveis atividades complementares	**Construção de paralelogramos com área fixa:** Propor aos alunos que construam paralelogramos com áreas iguais, mas com diferentes dimensões. **Otimização:** Propor problemas de otimização, como encontrar o paralelogramo de maior área com um perímetro fixo. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações do cálculo da área de um paralelogramo em situações reais, como na arquitetura ou na engenharia.
Duração	1 aula

4.3 Retângulos

Neste tópico trabalharemos cinco atividades relacionadas aos retângulos, com grau de dificuldade crescente tais que:

Atividade	**Objetivo**	**Nível de dificuldade esperado**
11	Explorar as propriedades fundamentais de um retângulo, como lados opostos iguais e ângulos internos de 90°	Fácil
12	Consolidar o entendimento da relação entre as medidas dos lados (base e altura) e a área do retângulo	Fácil
13	Incentivar a descoberta das propriedades das diagonais de um retângulo, como congruência e ponto de interseção no centro	Médio
14	Verificar se um retângulo fica unicamente determinado caso sejam conhecidos três de seus vértices	Difícil
15	Verificar que os pontos médios de um retângulo formam um paralelogramo. E, ainda, que a área desse paralelogramo é a metade da área do retângulo	Difícil

Atividade 11. Construção Básica e Medidas

Objetivo: Explorar as propriedades fundamentais de um retângulo, como lados opostos iguais e ângulos internos de 90°.

1. Construa um retângulo ABCD no GeoGebra.

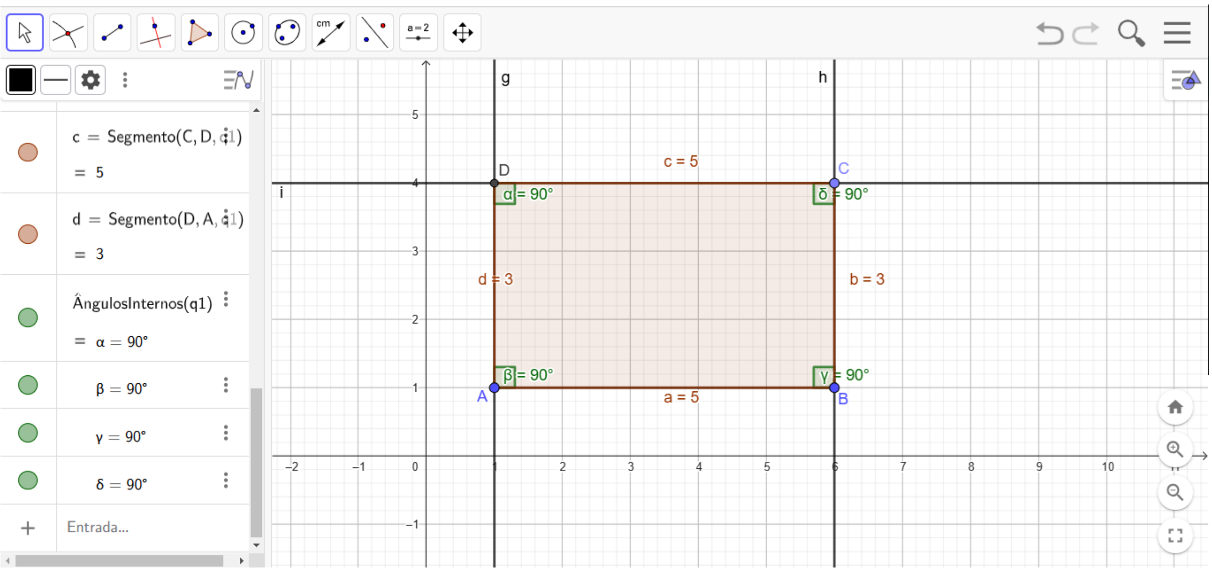
2. Meça os comprimentos dos lados.

3. Meça os ângulos internos do retângulo.

Resolução:
Passo 01: Marque os pontos A e B.
Passo 02: Construa o segmento AB
Passo 03: Construa a reta perpendicular a AB que passa por A.
Passo 04: Construa a reta perpendicular a AB que passa por B.
Passo 05: Marque um ponto C na reta criada no passo anterior.
Passo 06: Construa a reta perpendicular a reta criada no Passo 04 e que passa pelo ponto C.
Passo 07: Marque o ponto D, de interseção entre as retas criadas nos passos 04 e 06.
Passo 08: Construa o retângulo ABCD.
Passo 09: Determine as medidas dos lados do retângulo.
Passo 10: Determine as medidas dos ângulos internos do retângulo.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 69: Atividade 11 - Retângulos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que os lados opostos são congruentes e todos os ângulos internos medem 90º.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/vf3qqvgt

FICHA DA ATIVIDADE 11	
Pontos Positivos	**Exploração prática:** A construção e medição permitem que os alunos verifiquem as propriedades de forma concreta. **Ferramentas adequadas:** A utilização das ferramentas de medição do GeoGebra facilita a realização da atividade.
Como auxiliar os alunos	**Revisão do conceito de ângulo reto:** Reforçar a ideia de que um ângulo reto mede 90° e utilizar exemplos do dia a dia para ilustrar o conceito. **Utilização de ferramentas de medição:** Ensinar os alunos a utilizar as ferramentas de medição do GeoGebra com precisão.
Possíveis dificuldades	**Conceito de ângulo reto:** Alguns alunos podem ter dificuldade em identificar um ângulo reto e em utilizá-lo na construção do retângulo. **Precisão nas medidas:** A precisão nas medidas pode ser um desafio, especialmente ao utilizar ferramentas digitais.
Possíveis atividades complementares	**Construção de retângulos com condições específicas:** Propor desafios como construir um retângulo com lados de medidas dadas ou com uma área específica. **Relação entre retângulos e outros quadriláteros:** Explorar as relações entre retângulos, paralelogramos e quadrados. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações de retângulos no mundo real, como em arquitetura, engenharia e desig
Duração	1 aula

Atividade 12: Área do retângulo

Objetivo: Consolidar o entendimento da relação entre as medidas dos lados (base e altura) e a área do retângulo.

1. Construa um retângulo definindo os vértices no plano cartesiano: A(1,1), B(5,1), C(5,3) e D(1,3).

2. Meça a base e a altura do retângulo.

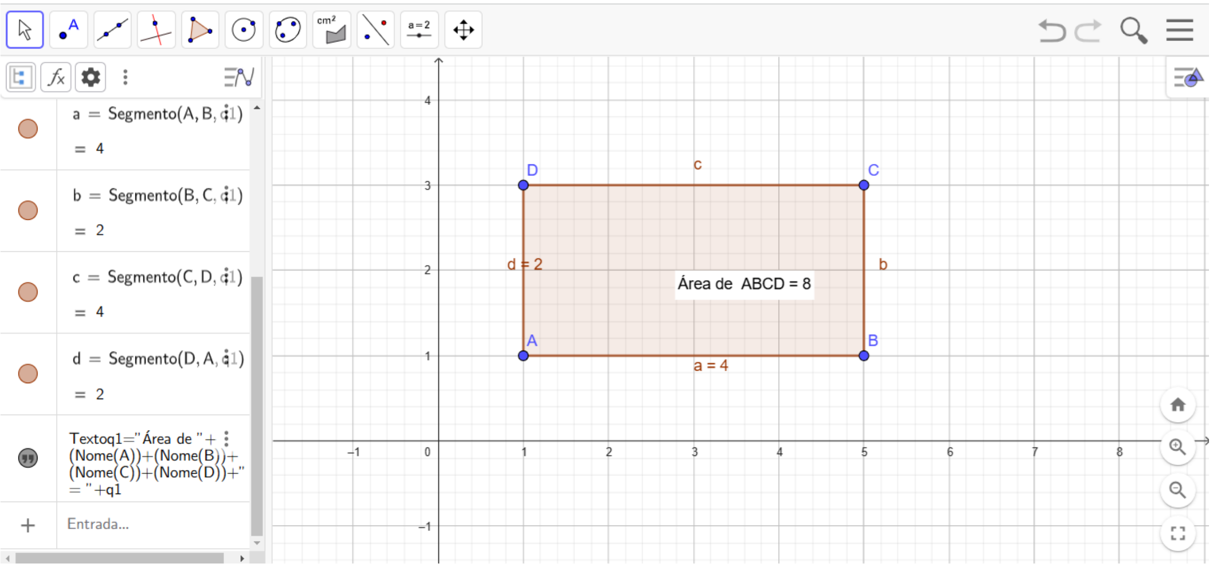
3. Calcule a área do retângulo usando a fórmula Área = base × altura.

4. Confirme o valor da área utilizando a ferramenta de GeoGebra “Área”.

Resolução:
Passo 01: Marque os pontos (1,1), B(5,1), C(5,3) e D(1,3).
Passo 02: Construa o retângulo ABCD.
Passo 03: Meça o comprimento do segmento AB.
Passo 04: Meça o comprimento do segmento AC.
Passo 05: Determine a área do retângulo.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 70: Atividade 12 - Retângulos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que a área do retângulo pode ser calculada como $Área = 4 \cdot 2 = 8$. Logo a fórmula da área se verifica para esse retângulo

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/cufbae4r

FICHA DA ATIVIDADE 12	
Pontos Positivos	**Direta e objetiva:** A atividade foca no cálculo da área do retângulo, utilizando um método prático e visual. **Utilização do plano cartesiano:** A atividade introduz o conceito de coordenadas cartesianas, relacionando a geometria com a álgebra. **Verificação da fórmula:** A comparação entre o resultado obtido pelo software e o resultado calculado pela fórmula permite uma validação da fórmula.
Como auxiliar os alunos	**Revisão do conceito de área:** Reforçar a ideia de que a área representa a medida da superfície de uma figura plana. **Utilização de materiais manipulativos:** Utilizar materiais manipulativos, como quadrados unitários, para visualizar o conceito de área.
Possíveis dificuldades	**Identificação da base e da altura:** Alguns alunos podem ter dificuldade em identificar a base e a altura do retângulo quando ele não está na posição horizontal. **Cálculo da área:** Alguns alunos podem cometer erros de cálculo ao aplicar a fórmula da área.
Possíveis atividades complementares	**Construção de retângulos com área fixa:** Propor aos alunos que construam retângulos com áreas iguais, mas com diferentes proporções entre os lados. **Otimização:** Propor problemas de otimização, como encontrar o retângulo de maior área com um perímetro fixo. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações do cálculo da área de um retângulo em situações reais, como no cálculo da área de um cômodo ou de um terreno.
Duração	1 aula

Atividade 13: Diagonais e propriedades

Objetivo: Incentivar a descoberta das propriedades das diagonais de um retângulo, como congruência e ponto de interseção no centro.

1. Construa um retângulo ABCD.

2 Trace as diagonais AC e BD.

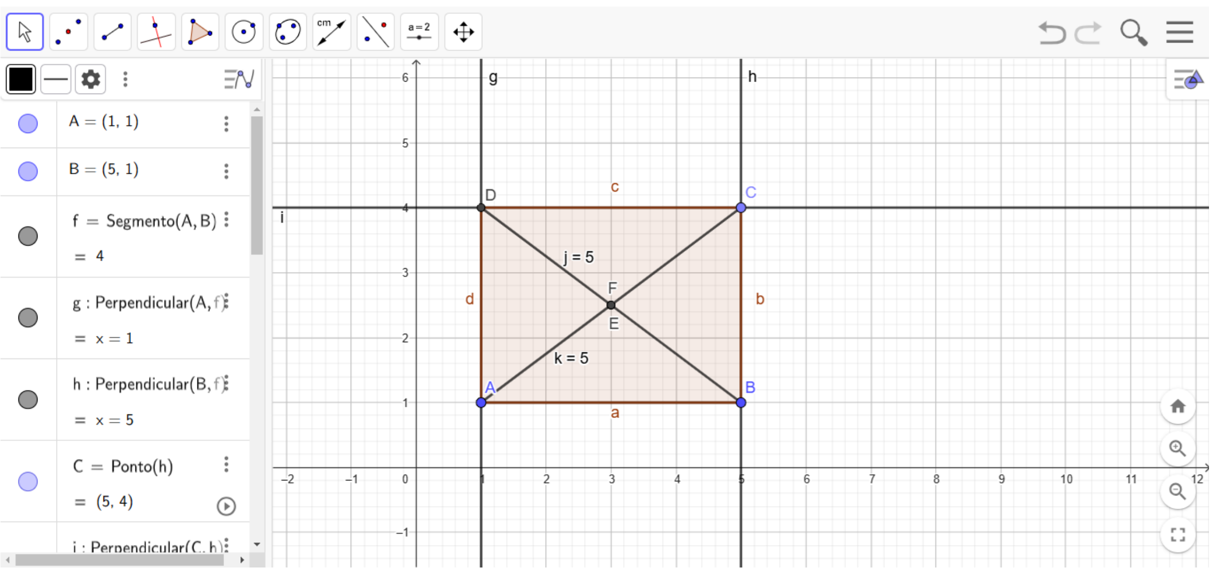
3. Use a ferramenta “Distância ou Comprimento” para medir o comprimento das diagonais.

4. Identifique o ponto de interseção das diagonais e analise a posição dele em relação ao retângulo.

Resolução:
Passo 01: Marque os pontos A e B.
Passo 02: Construa o segmento AB
Passo 03: Construa a reta perpendicular a AB que passa por A.
Passo 04: Construa a reta perpendicular a AB que passa por B.
Passo 05: Marque um ponto C na reta criada no passo anterior.
Passo 06: Construa a reta perpendicular a reta criada no Passo 04 e que passa pelo ponto C.
Passo 07: Marque o ponto D, de interseção entre as retas criadas nos passos 04 e 06.
Passo 08: Construa o retângulo ABCD.
Passo 09: Construa a diagonal AD.
Passo 10: Construa a diagonal BC.
Passo 11: Determine o comprimento das diagonais AD e BC.
Passo 12: Marque os pontos médios das diagonais AD e BC.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 71: Atividade 13 - Retângulos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que as diagonais AC e BD possuem o mesmo comprimento e que elas se interceptam nos respectivos pontos médios.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/n3mrwbwb

FICHA DA ATIVIDADE 12	
Pontos Positivos	□ **Foco nas diagonais:** A atividade direciona a atenção dos alunos para as diagonais do retângulo, uma característica importante dessa figura. □ **Exploração prática:** A construção e a medição das diagonais permitem que os alunos verifiquem as propriedades de forma concreta.
Como auxiliar os alunos	□ **Revisão do conceito de congruência:** Reforçar a ideia de que segmentos congruentes têm a mesma medida e utilizar exemplos práticos para ilustrar o conceito. □ **Utilização de cores:** Utilizar cores diferentes para destacar as diagonais e o ponto de interseção.
Possíveis dificuldades	□ **Conceito de congruência:** Alguns alunos podem ter dificuldade em entender o conceito de congruência de segmentos. □ **Visualização espacial:** A visualização da posição do ponto de interseção das diagonais em relação ao retângulo pode ser um desafio para alguns alunos.
Possíveis atividades complementares	□ **Construção de retângulos a partir das diagonais:** Propor aos alunos que construam um retângulo a partir de suas diagonais e verifiquem as propriedades. □ **Relação entre as diagonais e os lados:** Explorar a relação entre o comprimento das diagonais e o comprimento dos lados de um retângulo. □ **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações das diagonais de um retângulo em situações reais, como na arquitetura ou na engenharia.
Duração	1 aula

Atividade 14: Retângulo unicamente determinado

Objetivo: Verificar se um retângulo fica unicamente determinado caso sejam conhecidos três de seus vértices.

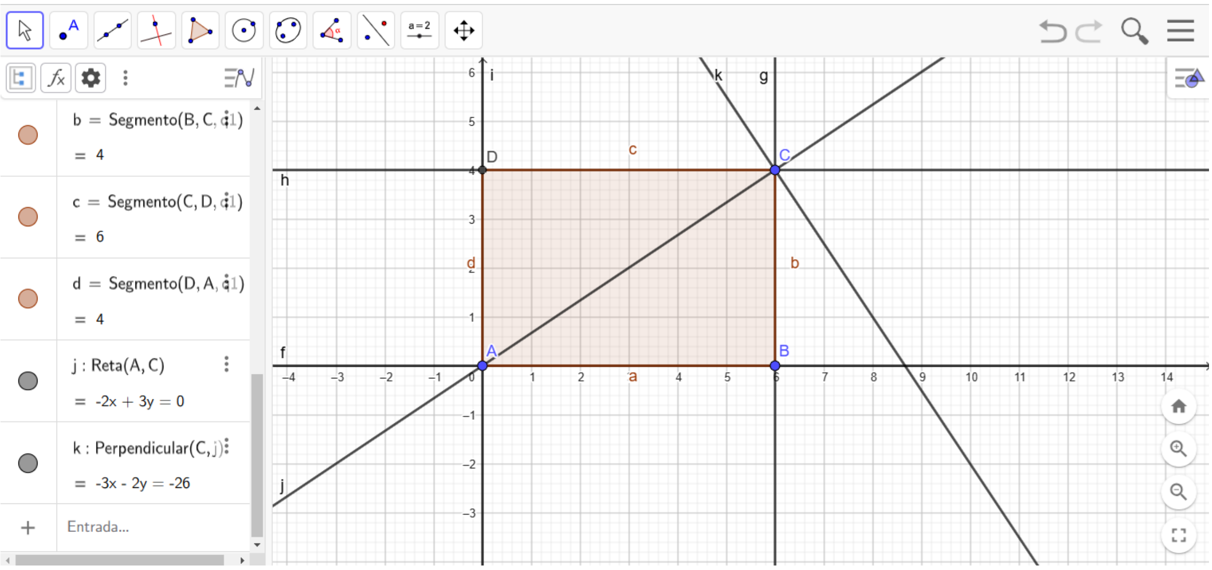
1. Insira os pontos A(0,0), B(6,0) e C(6,4) para formar um retângulo ABCD no plano cartesiano.

2. Construa, se possível, dois retângulos distintos ABCD e ABCE.

Resolução:
Passo 01: Marque os pontos A(0,0), B(6,0) e C(6,4).
Passo 02: Construa as retas AB e AC.
Passo 03: Construa a reta perpendicular a AB que passa por A.
Passo 04: Construa a reta perpendicular a BC que passa por C.
Passo 05: Marque o ponto D, de interseção entre as retas construídas nos passos 03 e 04.
Passo 06: Construa o retângulo ABCD.
Passo 07: Construa a reta AC.
Passo 08: Construa a reta perpendicular a AC que passa por C.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 72: Atividade 14 - Retângulos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que o vértice B não pertence a reta perpendicular a AC que passa por C, portanto, não é possível construir outro retângulo ABCE, distinto do retângulo ABCD.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/twd4fjzh

FICHA DA ATIVIDADE 14	
Pontos Positivos	• **Natureza exploratória:** A atividade incentiva os alunos a explorarem diferentes possibilidades de construção, desenvolvendo a intuição geométrica. • **Desafio à intuição:** A descoberta de que um retângulo pode não ser unicamente determinado por três vértices pode desafiar a intuição dos alunos e estimular a busca por justificativas. • **Conexão com outros conceitos:** A atividade pode ser relacionada com o conceito de congruência de triângulos e com as propriedades dos retângulos.
Como auxiliar os alunos	• **Utilizar materiais manipulativos:** Utilizar palitos de picolé ou canudos para construir os retângulos e visualizar as diferentes configurações. • **Promover a discussão em grupo:** Incentivar a discussão em grupo para que os alunos possam compartilhar suas ideias e justificativas. • **Oferecer pistas:** Fornecer pistas sobre as condições necessárias para que um retângulo seja único, como a necessidade de conhecer um ângulo ou a medida de uma diagonal.
Possíveis dificuldades	• **Visualização espacial:** Alguns alunos podem ter dificuldade em visualizar as diferentes possibilidades de construção do retângulo. • **Justificativa:** Justificar por que a construção não é única pode ser um desafio, especialmente para alunos com menor domínio dos conceitos geométricos.
Possíveis atividades complementares	Após a atividade, o professor pode propor aos alunos que investiguem quais informações adicionais seriam necessárias para determinar um retângulo de forma única (por exemplo, a medida de uma diagonal, a medida de um ângulo).
Duração	1 aula

Atividade 15: Pontos médios de um retângulo

Objetivo: Verificar que os pontos médios de um retângulo formam um paralelogramo. E, ainda, que a área desse paralelogramo é a metade da área do retângulo.

1. Construa um retângulo ABCD.

2. Marque os pontos médios E, F, G e H, dos lados desse retângulo.

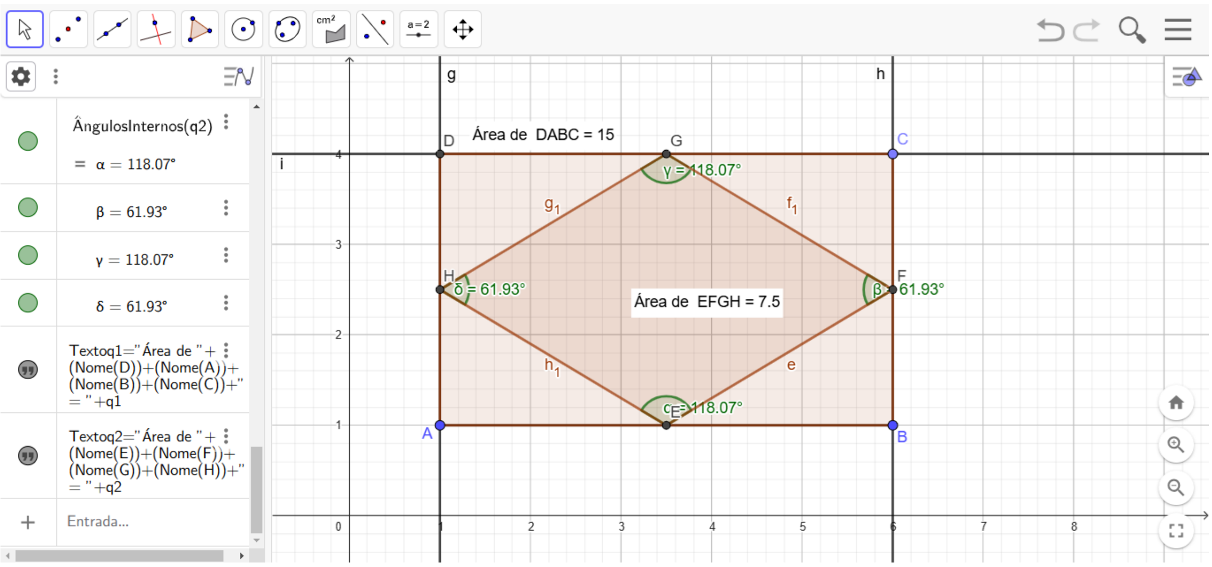
3. Verifique que EFGH é um paralelogramo.

4. Determine a área de EFGH.

Resolução:
Passo 01: Marque os pontos A e B.
Passo 02: Construa o segmento AB
Passo 03: Construa a reta perpendicular a AB que passa por A.
Passo 04: Construa a reta perpendicular a AB que passa por B.
Passo 05: Marque um ponto C na reta criada no passo anterior.
Passo 06: Construa a reta perpendicular a reta criada no Passo 04 e que passa pelo ponto C.
Passo 07: Marque o ponto D, de interseção entre as retas criadas nos passos 04 e 06.
Passo 08: Construa o retângulo ABCD.
Passo 09: Marque os pontos médios E, F, G e H, dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente.
Passo 10: Construa o quadrilátero EFGH.
Passo 11: Determine os ângulos internos do quadrilátero EFGH.
Passo 12: Determine as áreas dos quadriláteros ABCD e EFGH.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 73: Atividade 15 - Retângulos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que os ângulos opostos do quadrilátero EFGH são congruentes, portanto, o mesmo é um paralelogramo. Mais ainda,

$$Área_{ABCD} = 15 = 2 \cdot 7{,}5 = 2 \cdot Área_{EFGH}.$$

Logo, a área do paralelogramo EFGH é a metade da área do retângulo ABCD.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/j5kvtqcv

FICHA DA ATIVIDADE 15	
Pontos Positivos	**Relação entre figuras:** A atividade estabelece uma conexão clara entre o retângulo e o paralelogramo, mostrando que um pode ser obtido a partir do outro. **Exploração de propriedades:** A verificação de que o quadrilátero EFGH é um paralelogramo e o cálculo de sua área permitem explorar diversas propriedades geométricas. **Desenvolvimento do raciocínio:** A atividade incentiva os alunos a desenvolver o raciocínio lógico e a formular conjecturas.
Como auxiliar os alunos	**Utilização de cores:** Utilizar cores diferentes para destacar os lados do retângulo e do paralelogramo, facilitando a visualização. **Discussão em grupo:** Promover a discussão em grupo para que os alunos possam compartilhar suas ideias e justificativas. **Oferecer pistas:** Fornecer pistas sobre as propriedades que devem ser verificadas para provar que EFGH é um paralelogramo (lados opostos congruentes, ângulos opostos congruentes).
Possíveis dificuldades	**Justificativa da propriedade:** Justificar por que o quadrilátero EFGH é um paralelogramo pode ser um desafio para alguns alunos. **Cálculo da área:** O cálculo da área do paralelogramo EFGH pode exigir a aplicação de diferentes fórmulas, dependendo do método escolhido.
Possíveis atividades complementares	**Construção de outros quadriláteros a partir dos pontos médios:** Propor aos alunos que construam outros quadriláteros a partir dos pontos médios dos lados de um triângulo ou de um trapézio. **Relação entre as áreas:** Explorar a relação entre a área do paralelogramo EFGH e as áreas dos triângulos formados pela divisão do retângulo. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações dessa propriedade em situações reais, como na arquitetura ou na engenharia.
Duração	1 aula

4.4 Losangos

Neste tópico trabalharemos cinco atividades relacionadas aos losangos, com grau de dificuldade crescente tais que:

Atividade	Objetivo	Nível de dificuldade esperado
16	Desenvolver habilidades analíticas, como o cálculo de distâncias ou áreas e verificação da igualdade dos lados do losango	Fácil
17	Reconhecer as características fundamentais do losango, como lados congruentes e diagonais perpendiculares entre si	Médio
18	Construir um losango com lado medindo 3 cm e ângulo interno medindo 70°	Médio
19	Promover a criatividade e a manipulação prática ao modificar os elementos do losango para atingir as condições desejadas	Médio
20	Promover a criatividade e a manipulação prática ao modificar os elementos do losango para atingir as condições desejadas	Muito Difícil

Atividade 16: Relação entre as diagonais

Objetivo: Desenvolver habilidades analíticas, como o cálculo de distâncias ou áreas e verificação da igualdade dos lados do losango.

1.Construa um losango com diagonais medindo 8 cm e 6 cm.

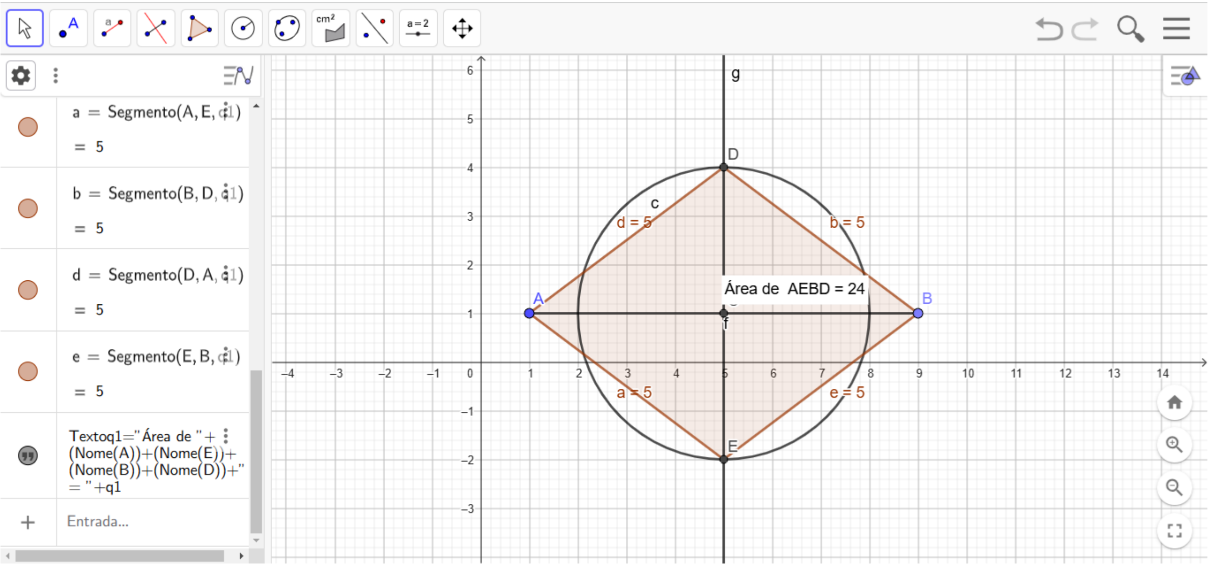
2. Determine a medida dos lados desse losango

3. Calcule a área desse losango e verifique que é satisfeita a fórmula: $Área = \frac{D \cdot d}{2}$.

Resolução:
Passo 01: Construa um segmento de comprimento fixo AB igual a 8 cm.
Passo 02: Marque o ponto médio C do segmento criado no passo anterior.
Passo 03: Com centro em C, construa um círculo de raio 3 cm.
Passo 04: Construa a reta mediatriz de AB.
Passo 05: Marque o ponto D e E, de interseção entre os elementos criados nos passos 03 e 04.
Passo 06: Construa o losango ABDE.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 74: Atividade 16 - Losangos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que os quatro lados do polígono construído são congruentes e medem 5 cm. Também, a sua área pode ser calculada como: $Área = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$.

Logo, a fórmula da área está verificada pra esse losango.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/ufx6xmpd

FICHA DA ATIVIDADE 16	
Pontos Positivos	**Foco nas diagonais:** A atividade direciona a atenção dos alunos para as diagonais do losango, mostrando sua importância na determinação da área e dos lados. **Exploração de diferentes propriedades:** A atividade aborda diversas propriedades do losango, como a relação entre diagonais e lados, e a fórmula da área. **Desenvolvimento de habilidades:** A atividade exige que os alunos apliquem conceitos de geometria e trigonometria para resolver o problema.
Como auxiliar os alunos	**Revisão do teorema de Pitágoras:** Reforçar o conceito de teorema de Pitágoras e suas aplicações em triângulos retângulos. **Demonstração da fórmula da área:** Apresentar uma demonstração geométrica da fórmula da área do losango, utilizando a decomposição do losango em triângulos retângulos. **Discussão em grupo:** Promover a discussão em grupo para que os alunos possam compartilhar suas dúvidas e soluções.
Possíveis dificuldades	**Cálculo dos lados:** Alguns alunos podem ter dificuldade em calcular a medida dos lados do losango utilizando o teorema de Pitágoras. **Justificativa da fórmula da área:** Justificar a fórmula da área do losango pode ser um desafio para alguns alunos.
Possíveis atividades complementares	**Construção de losangos a partir das diagonais e de um ângulo:** Propor aos alunos que construam um losango conhecendo as medidas das diagonais e o ângulo entre elas. **Relação entre losangos e circunferências:** Explorar a relação entre losangos e circunferências inscritas e circunscritas. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações de losangos em situações reais, como em obras de arte, arquitetura e design.
Duração	1 aula

Atividade 17: Construa um losango conhecida a medida de um de seus lados.

Objetivo: Reconhecer as características fundamentais do losango, como lados congruentes e diagonais perpendiculares entre si.

1. Construa um losango de lado 2 cm.

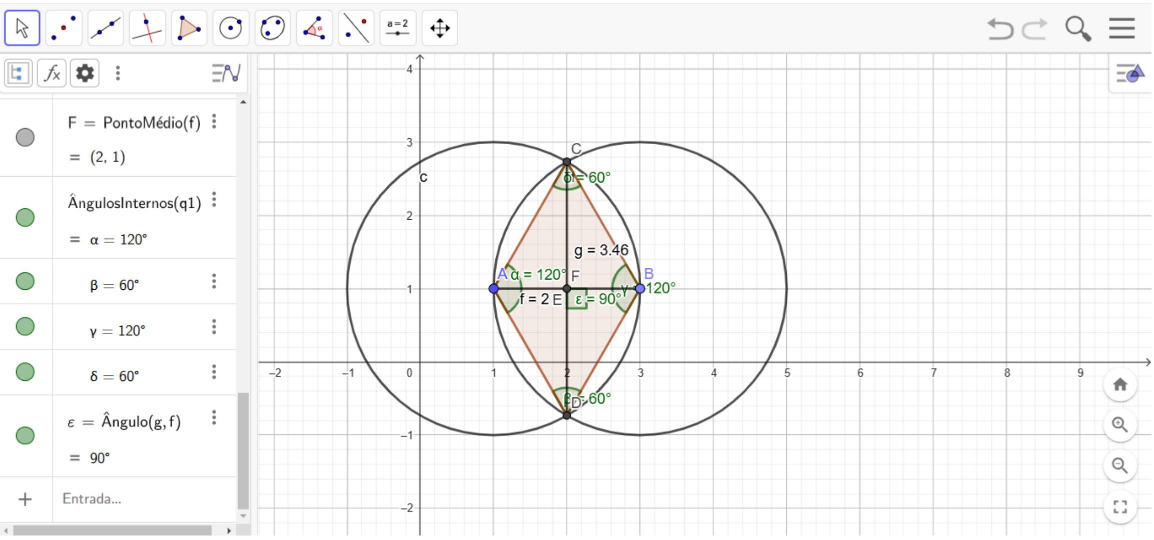
2. Construa e meça o comprimento das diagonais desse losango.

3. Calcula os ângulos internos e o ângulo formado entre as diagonais desse losango.

Resolução:
Passo 01: Construa um segmento de comprimento fixo AB com 2 cm de comprimento.
Passo 02: Com vértice em A, construa um círculo de raio 2 cm.
Passo 03: Com vértice em B, construa um círculo de raio 2 cm.
Passo 04: Marque os pontos C e D de interseção entre os círculos criados nos passos 02 e 03.
Passo 05: Construa o losango ABCD.
Passo 06: Construa a diagonal CD
Passo 07: Marque os pontos médios das diagonais AB e CD.
Passo 08: Meça o comprimento das diagonais.
Passo 09: Determine as medidas dos ângulos internos desse losango.
Passo 10: Determine o ângulo formado entre as diagonais desse losango.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 75: Atividade 17 - Losangos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que os ângulos opostos são congruentes e que as diagonais se intersectam nos seus respectivos pontos médios.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/r2hqrcmm

FICHA DA ATIVIDADE 17	
Pontos Positivos	□ **Foco nas propriedades:** A atividade direciona a atenção dos alunos para as características específicas do losango, como a congruência dos lados e a perpendicularidade das diagonais. □ **Exploração prática:** A construção e a medição permitem que os alunos verifiquem as propriedades de forma concreta. □ **Ferramentas adequadas:** A utilização de ferramentas de medição do software de geometria dinâmica facilita a realização da atividade.
Como auxiliar os alunos	□ **Demonstração da construção:** Mostrar diferentes maneiras de construir um losango, utilizando as ferramentas do software. □ **Utilização de cores:** Utilizar cores diferentes para destacar os lados, as diagonais e os ângulos, facilitando a visualização. □ **Discussão em grupo:** Promover a discussão em grupo para que os alunos possam compartilhar suas dúvidas e soluções.
Possíveis dificuldades	□ **Construção do losango:** Alguns alunos podem ter dificuldade em construir um losango com precisão, utilizando as ferramentas do software de geometria dinâmica. □ **Cálculo dos ângulos:** O cálculo dos ângulos internos pode exigir o uso de trigonometria, o que pode ser um desafio para alguns alunos.
Possíveis atividades complementares	□ **Construção de losangos a partir das diagonais:** Propor aos alunos que construam um losango a partir das medidas de suas diagonais. □ **Relação entre losangos e outros quadriláteros:** Explorar as relações entre losangos, paralelogramos e quadrados. □ **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações de losangos no mundo real, como em obras de arte, arquitetura e design.
Duração	1 aula

Atividade 18: Determinação de um losango conhecidos seu lado e um ângulo interno.

Objetivo: Construir um losango com lado medindo 3 cm e ângulo interno medindo 70°.

1. Construa um losango com lado medindo 3 cm.

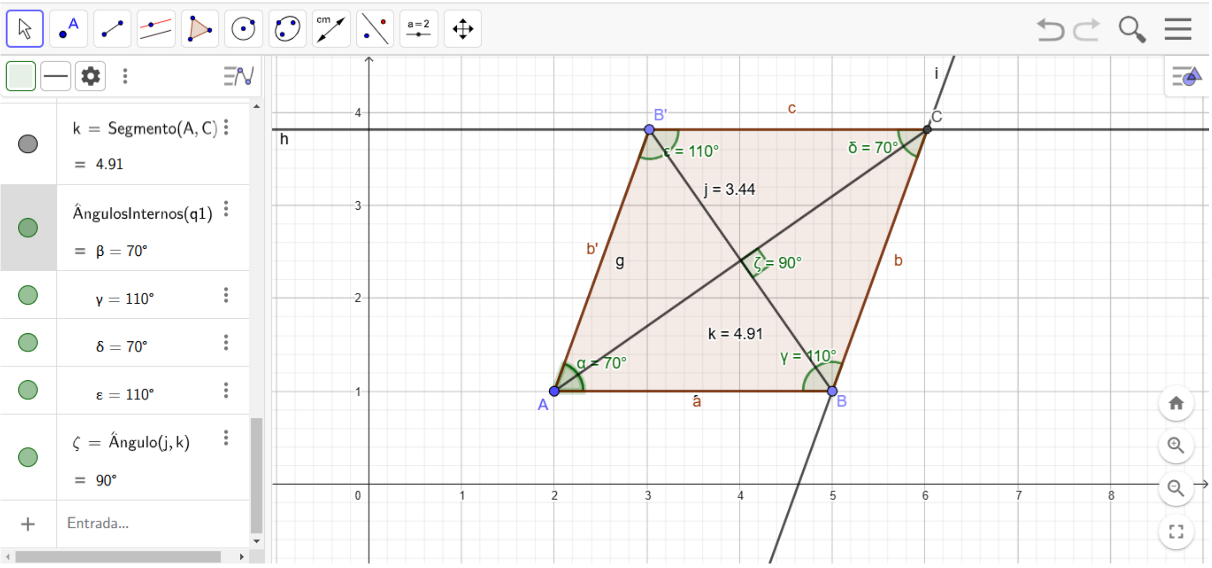
2. Construa as diagonais desse losango e determine sua medida.

3. Determine as medidas de todos os ângulos internos desse losango.

Resolução:
Passo 01: Construa um segmento AB com medida 3 cm.
Passo 02: Construa o ângulo BAB' = 70°.
Passo 03: Construa a reta paralela a AB que passa por B'.
Passo 04: Construa o segmento AB'.
Passo 05: Construa a reta paralela a AB' que passa por B.
Passo 06: Marque o ponto C, de interseção entre as retas criadas nos passos 03 e 05.
Passo 07: Construa as diagonais AC e BB'.
Passo 08: Construa o losango ABCB'.
Passo 09: Determine a medida das diagonais do losango.
Passo 10: Determine a medida do ângulo entre as diagonais do losango.
Passo 11: Determine os ângulos internos do losango.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 76: Atividade 18 - Losangos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que as diagonais desse losango medem 3,44 e 4,91 e seus ângulos internos são 70º e 110°.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/nsvbksvd

FICHA DA ATIVIDADE 18	
Pontos Positivos	**Foco nas propriedades:** A atividade direciona a atenção dos alunos para as propriedades do losango, como a congruência dos lados e a soma dos ângulos internos. **Exploração prática:** A construção do losango permite que os alunos visualizem as propriedades de forma concreta.
Como auxiliar os alunos	**Demonstração da construção:** Mostrar diferentes maneiras de construir um losango, utilizando as ferramentas do software. **Utilização de cores:** Utilizar cores diferentes para destacar os lados, as diagonais e os ângulos, facilitando a visualização.
Possíveis dificuldades	**Construção do losango:** Alguns alunos podem ter dificuldade em construir o losango com precisão, utilizando as ferramentas do software de geometria dinâmica. **Cálculo dos ângulos:** O cálculo dos ângulos internos pode exigir o uso de propriedades dos quadriláteros e da soma dos ângulos internos de um polígono.
Possíveis atividades complementares	**Construção de losangos inscritos e circunscritos a circunferências:** Propor aos alunos que construam losangos inscritos e circunscritos a circunferências de diferentes raios. **Relação entre losangos e paralelogramos:** Explorar as relações entre losangos e paralelogramos, destacando as propriedades comuns e as diferenças.
Duração	1 aula

Atividade 19: Losango e circunferência circunscrita

Objetivo: Promover a criatividade e a manipulação prática ao modificar os elementos do losango para atingir as condições desejadas.

1. Construa uma circunferência de raio 2 cm.

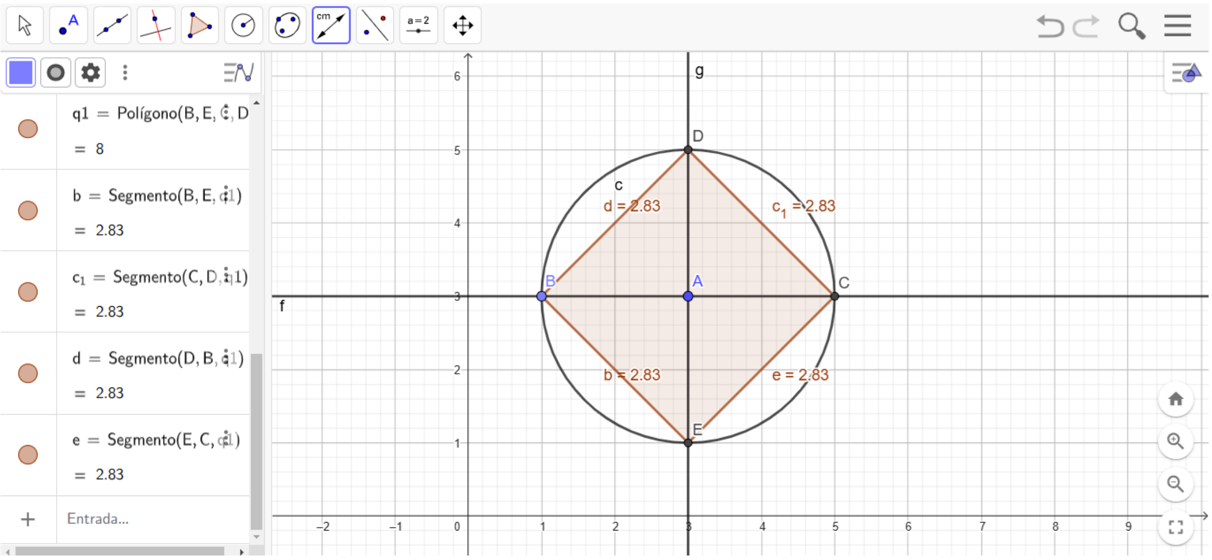
2. Construa um losango circunscrito a essa circunferência.

3. Determine as medidas dos lados desse losango.

Resolução:
Passo 01: Marque um ponto A
Passo 02: Com centro no ponto A, construa uma circunferência de raio 2 cm.
Passo 03: Sobre a circunferência marque um ponto B.
Passo 04: Construa a reta AB.
Passo 05: Marque o ponto C, de interseção entre a reta construída no Passo 04 e a circunferência construída no Passo 03.
Passo 06: Construa a reta perpendicular a AB que passa por A.
Passo 07: Marque os pontos D e E, de interseção entre a reta construída no Passo 06 e a circunferência construída no Passo 03.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 77: Atividade 19 - Losangos



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que os lados do losango medem aproximadamente 2,83 cm.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/rsa4cptj

FICHA DA ATIVIDADE 19	
Pontos Positivos	**Relação entre figuras:** A atividade estabelece uma conexão clara entre o losango e a circunferência, mostrando como uma figura pode ser inscrita ou circunscrita à outra. **Exploração prática:** A construção do losango e da circunferência permite que os alunos visualizem a relação entre as duas figuras de forma concreta.
Como auxiliar os alunos	**Demonstração da construção:** Mostrar diferentes maneiras de construir um losango circunscrito a uma circunferência, utilizando as ferramentas do software de geometria dinâmica. **Utilização de cores:** Utilizar cores diferentes para destacar o losango e a circunferência, facilitando a visualização.
Possíveis dificuldades	**Construção do losango:** Alguns alunos podem ter dificuldade em construir o losango de forma que ele esteja perfeitamente circunscrito à circunferência. **Cálculo das medidas:** O cálculo das medidas dos lados do losango pode exigir o uso de trigonometria ou de teoremas específicos da geometria do círculo.
Possíveis atividades complementares	**Construção de losangos inscritos em circunferências:** Propor aos alunos que construam losangos inscritos em circunferências de diferentes raios. **Relação entre losangos e polígonos regulares:** Explorar a relação entre losangos e outros polígonos regulares, como hexágonos e octógonos.
Duração	1 aula

Atividade 20: Losango e circunferência inscrita.

Objetivo: Promover a criatividade e a manipulação prática ao modificar os elementos do losango para atingir as condições desejadas.

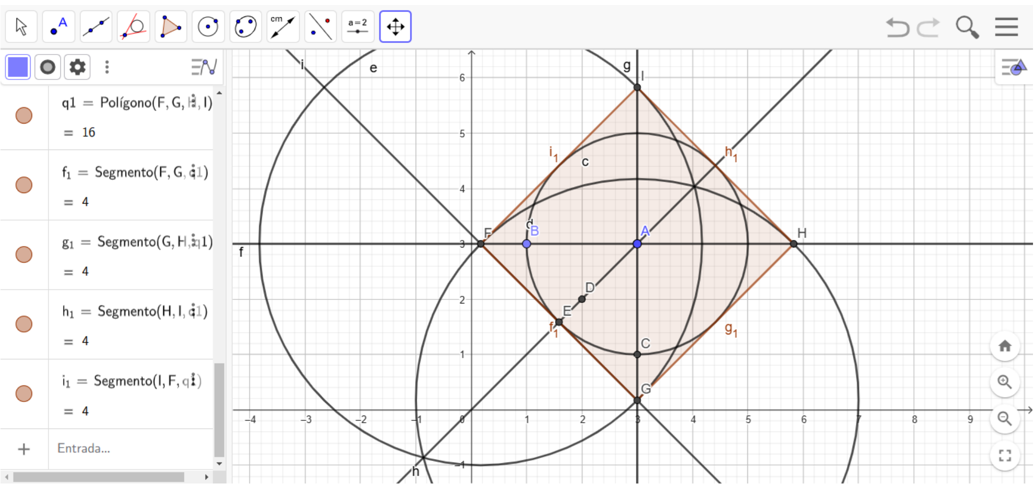
1. Construa uma circunferência de raio 2 cm.
2. Construa um losango inscrito a essa circunferência.
3. Determine as medidas dos lados desse losango.

Resolução:

Passo 01: Marque um ponto A
Passo 02: Com centro no ponto A, construa uma circunferência de raio 2 cm.
Passo 03: Sobre a circunferência marque um ponto B.
Passo 04: Construa a reta AB.
Passo 05: Construa a reta perpendicular a AB que passa por A.
Passo 06: Marque o ponto C, de interseção entre a reta criada no Passo 05 e a circunferência criada no Passo 02:
Passo 07: Marque o ponto D, ponto médio entre B e C.
Passo 08: Construa a reta AD.
Passo 09: Marque o ponto E, de interseção entre a reta criada no Passo 09 e a circunferência criada no Passo 02.
Passo 10: Construa a reta tangente a circunferência criada no Passo 2 no ponto E.
Passo 11: Marque o ponto F, de interseção entre a reta criada no Passo 04 e a reta criada no passo anterior.
Passo 12: Marque o ponto G, de interseção entre a reta criada no Passo 05 e a reta criada no
Passo 13: Construa a circunferência de raio FG e centro G.
Passo 14: Marque o ponto H, de interseção entre a reta criada no Passo 04 e a circunferência criada no passo anterior.
Passo 15: Construa a circunferência de raio FG e centro F.
Passo 16: Marque o ponto I, de interseção entre a reta criada no Passo 05 e a circunferência criada no passo anterior.
Passo 17: Construa o losango FGHI.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 78: Atividade 20 - Losangos - Solução I



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

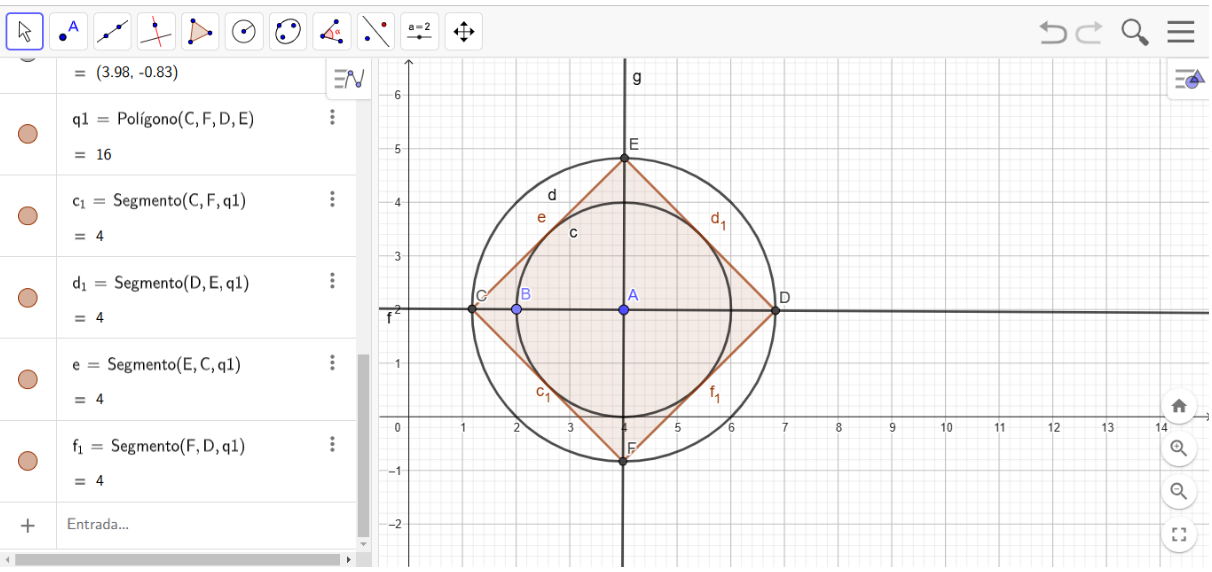
Note que o lado do losango mede 4 cm.

Resolução 02: Note que a relação entre a os raios das circunferências circunscrita e inscrita ao losango é $\frac{R}{r} = \sqrt{2}$. Assim,

Passo 01: Marque um ponto A.
Passo 02: Com centro no ponto A, construa uma circunferência de raio 2 cm.
Passo 03: Sobre a circunferência construída no passo anterior, marque um ponto B.
Passo 04: Com centro no ponto A, construa uma circunferência de raio $2\sqrt{2}$ cm.
Passo 05: Construa a reta AB.
Passo 06: Marque os pontos C e D, de interseção entre a reta criada no passo anterior e a circunferência criada no Passo 04.
Passo 07: Construa a reta perpendicular a AB que passa por A.
Passo 08: Marque os pontos C e D, de interseção entre a reta criada no passo anterior e a circunferência criada no Passo 04.
Passo 09: Construa o losango CFDE.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 79: Atividade 20 - Losangos - Solução II



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que o lado do losango mede 4 cm.

Entendemos que tais conceitos de inscrição e circunscrição só serão ensinados posteriormente aos alunos, porém, deixamos a resolução como forma de instiga-los a procurar mais formas de conhecimento.

Resolução 01 (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/ef7zag84

Resolução 02 (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/bhjcsz46

FICHA DA ATIVIDADE 20	
Pontos Positivos	□ **Relação entre figuras:** A atividade estabelece uma conexão clara entre o losango e a circunferência, mostrando como uma figura pode ser inscrita na outra. □ **Exploração prática:** A construção do losango e da circunferência permite que os alunos visualizem a relação entre as duas figuras de forma concreta.
Como auxiliar os alunos	□ **Demonstração da construção:** Mostrar diferentes maneiras de construir um losango inscrito em uma circunferência, utilizando as ferramentas do software de geometria dinâmica. □ **Utilização de cores:** Utilizar cores diferentes para destacar o losango e a circunferência, facilitando a visualização.
Possíveis dificuldades	□ **Construção do losango:** Alguns alunos podem ter dificuldade em construir o losango de forma que esteja perfeitamente inscrito na circunferência. □ **Cálculo das medidas:** O cálculo das medidas dos lados do losango pode exigir o uso de trigonometria ou de teoremas específicos da geometria do círculo.
Possíveis atividades complementares	□ **Construção de losangos circunscritos e inscritos em circunferências:** Propor aos alunos que construam losangos tanto circunscritos quanto inscritos em circunferências de diferentes raios. □ **Relação entre losangos e polígonos regulares:** Explorar a relação entre losangos e outros polígonos regulares, como hexágonos e octógonos, inscritos em circunferências. □ **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações de losangos inscritos em circunferências em situações reais, como em design de logotipos ou em arquitetura.
Duração	1 aula

4.5 Quadrados.

Neste tópico trabalharemos cinco atividades relacionadas aos quadrados, com grau de dificuldade crescente tais que:

Atividade	**Objetivo**	**Nível de dificuldade esperado**
21	Desenvolver habilidades de manipulação no GeoGebra, promovendo familiaridade com a interface	Fácil
22	Descobrir a relação entre o lado de um quadrado e sua diagonal	Médio
23	Relacionar a área do quadrado e as medidas dos comprimentos das suas diagonais	Médio
24	Construir um quadrado inscrito num círculo de raio 2 cm	Difícil
25	Construir um quadrado EFGH a partir de um quadrado ABCD cujos pontos A, B, C e D sejam pontos médios dos lados do quadrado EFGH	Difícil

Atividade 21: Desenhando um quadrado

Objetivo: Desenvolver habilidades de manipulação no GeoGebra, promovendo familiaridade com a interface.

1. Construa um segmento AB = 5 cm.

2. Construa um quadrado ABCD.

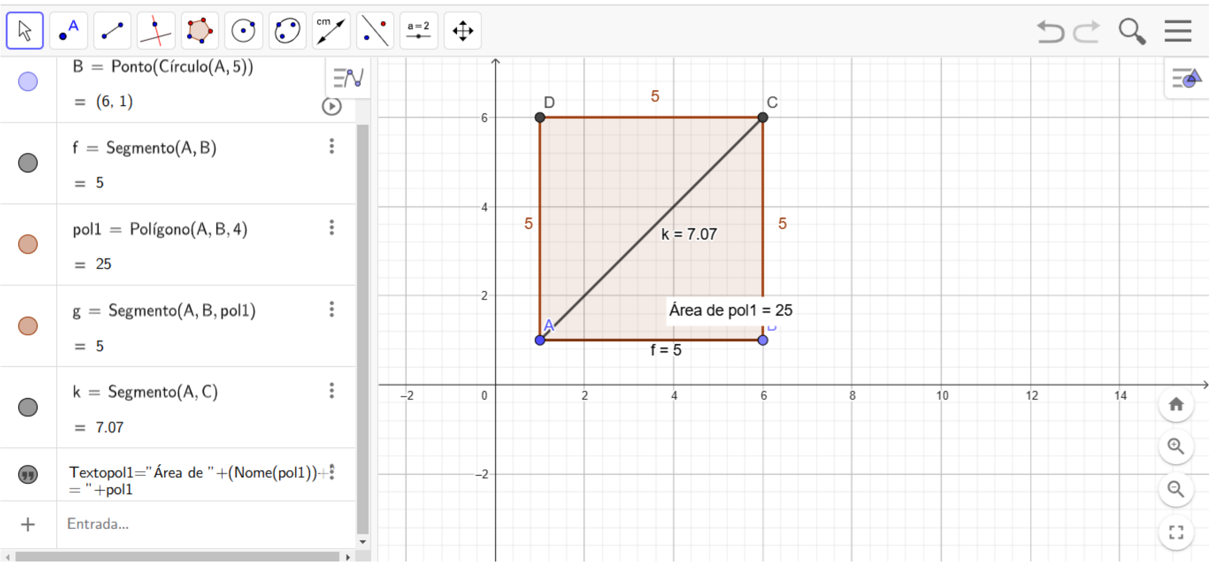
3. Determine a medida da diagonal desse quadrado.

4. Determine a área desse quadrado.

Resolução:
Passo 01: Construa um segmento AB = 5 cm.
Passo 02: Construa um Polígono Regular com 4 lados e vértices iniciais em A e B.
Passo 03: Construa a diagonal AC.
Passo 04: Determine a medida do comprimento da diagonal AC.
Passo 05: Determine a área do quadrado ABCD.
Passo 06: Determina as medidas dos comprimentos de todos os lados do quadrado.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 80: Atividade 21 - Quadrados



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que a área do quadrado é 25 e sua diagonal mede aproximadamente 7,07.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/ndpm44ts

FICHA DA ATIVIDADE 21	
Pontos Positivos	**Foco na construção:** A atividade direciona a atenção dos alunos para o processo de construção de uma figura geométrica utilizando ferramentas específicas. **Exploração de propriedades:** A determinação da diagonal e da área permite explorar as propriedades do quadrado. **Familiarização com o software:** A atividade familiariza os alunos com a interface do GeoGebra, preparando-os para atividades mais complexas.
Como auxiliar os alunos	**Demonstração da construção:** Mostrar diferentes maneiras de construir um quadrado, utilizando as ferramentas do software. **Utilização de cores:** Utilizar cores diferentes para destacar os lados e as diagonais do quadrado, facilitando a visualização.
Possíveis dificuldades	**Utilização das ferramentas:** Alguns alunos podem ter dificuldade em utilizar as ferramentas do GeoGebra para construir o quadrado e realizar as medições. **Precisão na construção:** A construção do quadrado com precisão pode ser um desafio, especialmente se o aluno não estiver familiarizado com as ferramentas do software.
Possíveis atividades complementares	**Construção de quadrados inscritos e circunscritos a circunferências:** Propor aos alunos que construam quadrados inscritos e circunscritos a circunferências de diferentes raios. **Relação entre quadrados e outros polígonos:** Explorar a relação entre quadrados e outros polígonos regulares, como octógonos e hexágonos. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações de quadrados em situações reais, como em arquitetura, design e embalagens.
Duração	1 aula

Atividade 22: Investigando a Diagonal

Objetivo: Descobrir a relação entre o lado de um quadrado e sua diagonal.

1. Construa um quadrado ABCD.

2. Construa suas diagonais.

3. Determine o comprimento dessas diagonais.

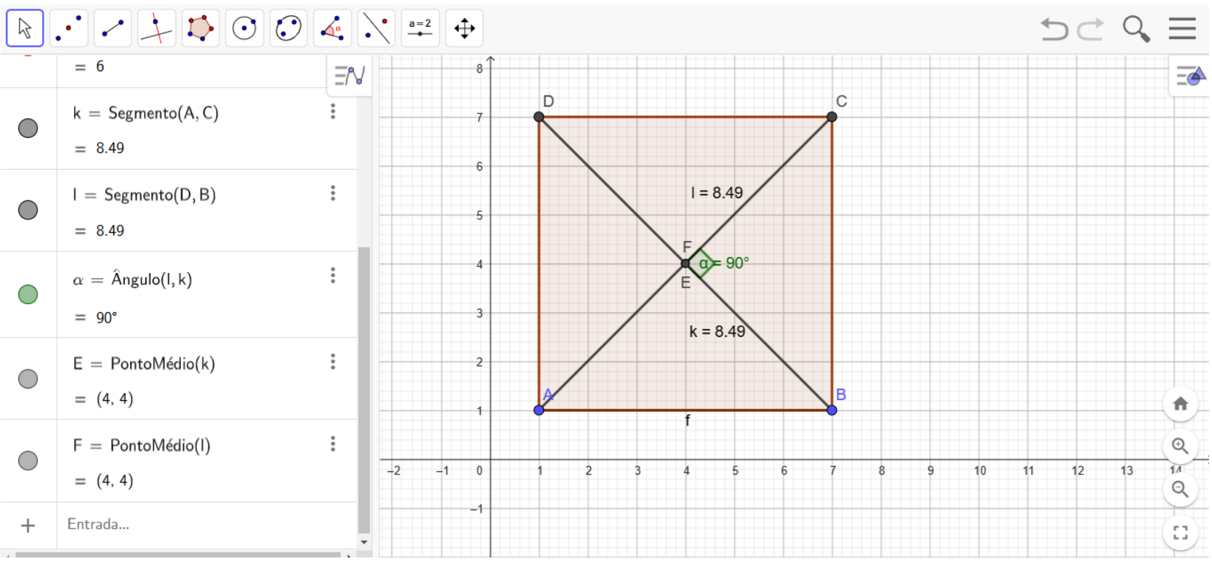
4. Determine o ângulo formado entre essas diagonais.

5. Determine os pontos médios dessas diagonais.

Resolução:
Passo 01: Construa um segmento AB.
Passo 02: Construa um Polígono Regular com 4 vértices sendo A e B os vértices iniciais.
Passo 03: Construa as diagonais AC e BD.
Passo 04: Determine a medida dos comprimentos das diagonais AC e BD.
Passo 05: Determine a medida do ângulo entre as diagonais
Passo 06: Determine os pontos médios E e F das diagonais AC e BD, respectivamente.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 81: Atividade 22 - Quadrados



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que as diagonais são congruentes, interceptam-se nos seus respectivos pontos médios e, também, formam um ângulo de 90º entre si.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/ezvfuvmf

FICHA DA ATIVIDADE 22	
Pontos Positivos	**Foco nas diagonais:** A atividade direciona a atenção dos alunos para as diagonais do quadrado, uma característica importante dessa figura. **Exploração de propriedades:** A atividade permite explorar diversas propriedades do quadrado, como a relação entre a diagonal e o lado, a perpendicularidade das diagonais e o fato de que as diagonais se bissectam. **Desenvolvimento do raciocínio:** A atividade incentiva os alunos a desenvolver o raciocínio lógico e a formular conjecturas
Como auxiliar os alunos	**Revisão do Teorema de Pitágoras:** Reforçar o conceito do Teorema de Pitágoras e suas aplicações em triângulos retângulos. **Utilização de cores:** Utilizar cores diferentes para destacar as diagonais e os triângulos retângulos formados pelas diagonais e os lados do quadrado.
Possíveis dificuldades	**Aplicabilidade do Teorema de Pitágoras:** Alguns alunos podem ter dificuldade em aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular a medida da diagonal. **Justificativa das propriedades:** Justificar as propriedades das diagonais do quadrado pode ser um desafio para alguns alunos.
Possíveis atividades complementares	**Construção de quadrados a partir das diagonais:** Propor aos alunos que construam um quadrado a partir da medida de sua diagonal. **Relação entre o quadrado e outros quadriláteros:** Explorar as relações entre o quadrado e outros quadriláteros, como retângulos e losangos.
Duração	1 aula

Atividade 23: Áreas e diagonais

Objetivo: Relacionar a área do quadrado e as medidas dos comprimentos das suas diagonais.

1. Construa um segmento AB = 4 cm.

2. Construa um quadrado cuja diagonal seja AB.

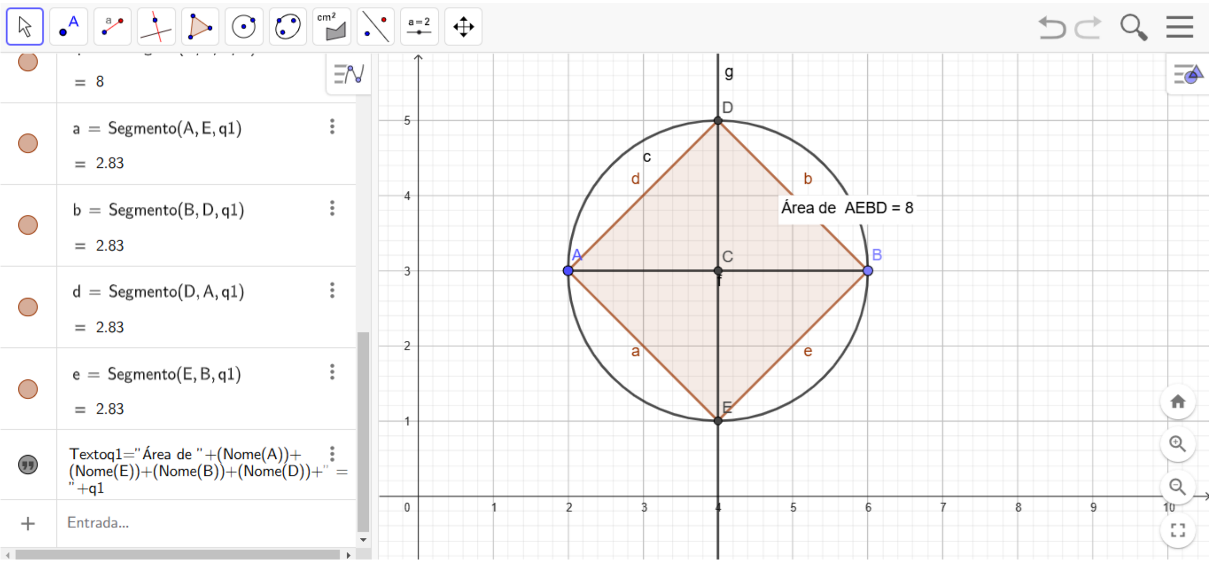
3. Determine a área desse quadrado e verifique que a sua área pode ser calculada como

$$Área = \frac{(Diagonal)^2}{2}.$$

Resolução:
Passo 01: Construa um segmento de comprimento fixo AB = 4 cm.
Passo 02: Marque o ponto médio C, do segmento AB.
Passo 03: Construa a reta perpendicular a AB que passa por C.
Passo 04: Com centro em C, construa uma circunferência de raio AC.
Passo 05: Marque os pontos D e E, de interseção entre os elementos construídos nos passos 03 e 04.
Passo 06: Construa o quadrado AEBD.
Passo 07: Determine a área do quadrado AEBD.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 82: Atividade 23 - Quadrados



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que a área do quadrado pode ser calculada como:

$$Área = 8 = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{Diagonal \cdot Diagonal}{2} = \frac{(Diagonal)^2}{2}.$$

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/bn9cvtkm

FICHA DA ATIVIDADE 23	
Pontos Positivos	**Foco na relação entre área e diagonal:** A atividade direciona a atenção dos alunos para a relação entre duas medidas importantes do quadrado. **Aplica o Teorema de Pitágoras:** A atividade exige que os alunos apliquem o Teorema de Pitágoras para determinar o lado do quadrado a partir da diagonal. **Desenvolve o raciocínio lógico:** A atividade incentiva os alunos a estabelecer relações entre diferentes elementos do quadrado e a justificar suas conclusões.
Como auxiliar os alunos	**Revisão do Teorema de Pitágoras:** Reforçar o conceito do Teorema de Pitágoras e suas aplicações em triângulos retângulos. **Utilização de cores:** Utilizar cores diferentes para destacar a diagonal, os lados e os triângulos retângulos formados pelas diagonais e os lados do quadrado. **Discussão em grupo:** Promover a discussão em grupo para que os alunos possam compartilhar suas dúvidas e soluções.
Possíveis dificuldades	**Aplicabilidade do Teorema de Pitágoras:** Alguns alunos podem ter dificuldade em aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar o lado do quadrado a partir da diagonal. **Justificativa da fórmula:** Justificar a fórmula da área em função da diagonal pode ser um desafio para alguns alunos.
Possíveis atividades complementares	**Construção de quadrados a partir de suas diagonais:** Propor aos alunos que construam um quadrado a partir da medida de sua diagonal e verifiquem a relação entre a área e a diagonal. **Relação entre o quadrado e o círculo inscrito:** Explorar a relação entre o quadrado, sua diagonal e o círculo inscrito no quadrado. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações da relação entre a área e a diagonal de um quadrado em situações reais, como em arquitetura ou engenharia.
Duração	1 aula

Atividade 24: Quadrado inscrito no círculo

Objetivo: Construir um quadrado inscrito num círculo de raio 2 cm.

1. Construa um círculo de raio 2 cm.

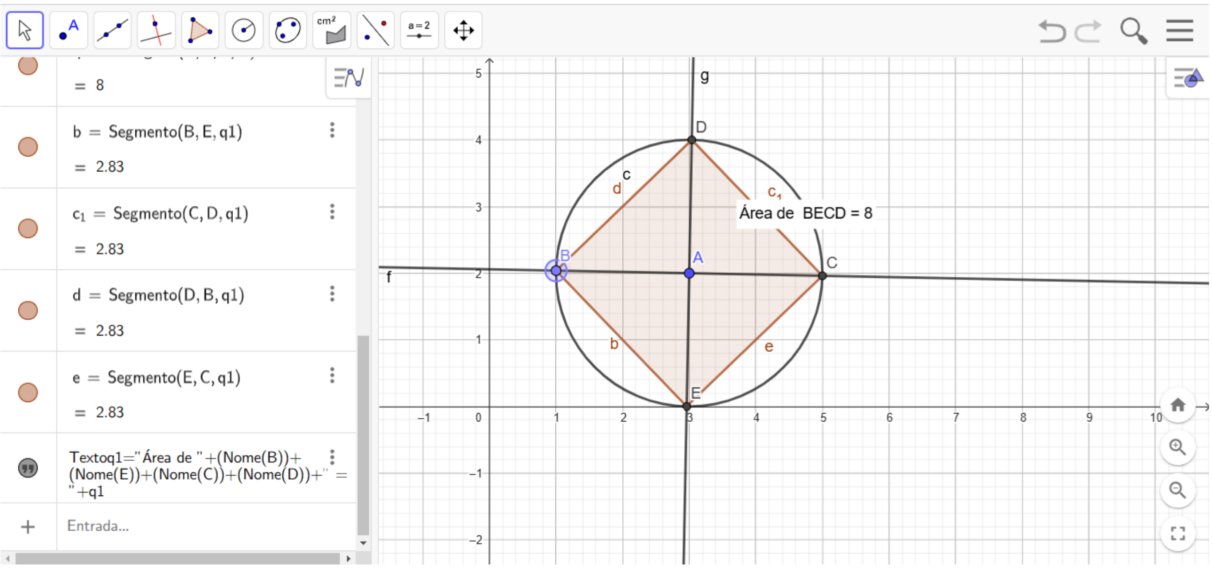
2. Construa um quadrado inscrito nesse círculo.

3. Determine a área do quadrado e verifiquei que satisfaz a fórmula: $\acute{A}rea = \frac{(Raio)^2}{2}$.

Resolução:
Passo 01: Marque um ponto A.
Passo 02: Com centro em A, construa uma circunferência de raio 2 cm.
Passo 03: Sobre a circunferência construída no passo anterior, marque um ponto B.
Passo 04: Construa a reta AB.
Passo 05: Marque o ponto C, de interseção entre os elementos construídos nos passos 03 e 04.
Passo 06: Construa a reta perpendicular a AB que passa por A.
Passo 07: Marque os pontos D e E, de interseção entre a reta construída no Passo 06 e a circunferência construída no Passo 03.
Passo 08: Construa o quadrado BECD.
Passo 09: Determine a área do quadrado BECD.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 83: Atividade 24 - Quadrados



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Note que a área do quadrado pode ser calculada como:

$$\acute{A}rea = 8 = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{Raio \cdot Raio}{2} = \frac{(Raio)^2}{2}.$$

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir:

https://www.geogebra.org/m/xrhrb7by

FICHA DA ATIVIDADE 24	
Pontos Positivos	**Relação entre figuras:** A atividade estabelece uma conexão clara entre o quadrado e o círculo, mostrando como uma figura pode ser inscrita na outra. **Exploração prática:** A construção do quadrado e do círculo permite que os alunos visualizem a relação entre as duas figuras de forma concreta. **Aplica o Teorema de Pitágoras:** A atividade exige que os alunos apliquem o Teorema de Pitágoras para determinar o lado do quadrado inscrito.
Como auxiliar os alunos	**Demonstração da construção:** Mostrar diferentes maneiras de construir um quadrado inscrito em um círculo, utilizando as ferramentas do software de geometria dinâmica. **Utilização de cores:** Utilizar cores diferentes para destacar o quadrado e o círculo, facilitando a visualização.
Possíveis dificuldades	**Construção do quadrado:** Alguns alunos podem ter dificuldade em construir o quadrado perfeitamente inscrito no círculo. **Cálculo da área:** O cálculo da área do quadrado pode exigir o uso do Teorema de Pitágoras e da fórmula da área do quadrado.
Possíveis atividades complementares	**Construção de círculos inscritos e circunscritos em quadrados:** Propor aos alunos que construam círculos inscritos e circunscritos em quadrados de diferentes tamanhos. **Relação entre quadrados e outros polígonos:** Explorar a relação entre quadrados e outros polígonos regulares, como octógonos e hexágonos, inscritos em círculos. **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações de quadrados inscritos em círculos em situações reais, como em design de logotipos ou em arquitetura.
Duração	1 aula

Atividade 25: Pontos médios de um quadrado.

Objetivo: Construir um quadrado EFGH a partir de um quadrado ABCD cujos pontos A, B, C e D sejam pontos médios dos lados do quadrado EFGH.

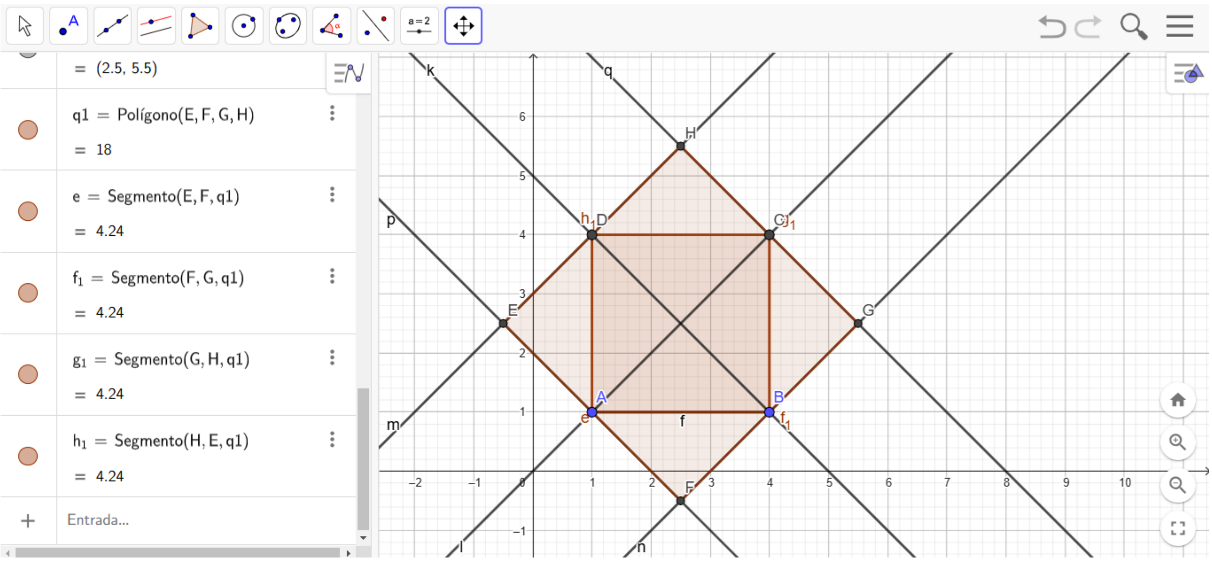
1. Construa um quadrado ABCD.

2. Construa um quadrado EFGH, sendo A, B, C e D os pontos médios dos lados EF, FG, HG e HE, respectivamente.

Resolução:
Passo 01: Marque o ponto A.
Passo 02: Construa o segmento AB.
Passo 03: Construa o Polígono Regular ABCD, cujos vértices iniciais sejam A e B.
Passo 04: Construa as retas que contém as diagonais AC e BD.
Passo 05: Construa a reta paralela à diagonal AC que passa por D.
Passo 06: Construa a reta paralela à diagonal AC que passa por C.
Passo 07: Construa a reta paralela à diagonal BD que passa por B.
Passo 08: Construa a reta paralela à diagonal BD que passa por A.
Passo 09: Marque ordenadamente os pontos de interseção entre as retas criadas nos passos 05, 06, 07 e 08.
Passo 10: Construa o quadrado EFGH, cujos pontos E, F, G e H, são os pontos marcados no Passo 09.

Ao realizar esse passo a passo, espera-se que o aluno encontre uma imagem semelhante a figura a seguir.

Figura 84: Atividade 25 - Quadrados



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Resolução (Link): A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/m/saaggvdg

FICHA DA ATIVIDADE 25	
Pontos Positivos	• **Relação entre figuras:** A atividade estabelece uma conexão clara entre dois quadrados, mostrando como um pode ser construído a partir do outro. • **Exploração de propriedades:** A atividade permite explorar propriedades dos pontos médios, da semelhança de figuras e das relações entre as áreas dos quadrados. • **Desenvolvimento da intuição geométrica:** A atividade incentiva os alunos a desenvolver a intuição geométrica ao visualizar como as figuras se relacionam.
Como auxiliar os alunos	• **Utilização de cores:** Utilizar cores diferentes para destacar os lados dos quadrados e os pontos médios, facilitando a visualização. • **Discussão em grupo:** Promover a discussão em grupo para que os alunos possam compartilhar suas dúvidas e soluções. • **Oferecer pistas:** Fornecer pistas sobre as propriedades que devem ser verificadas para provar que EFGH é um quadrado e para calcular a razão entre as áreas.
Possíveis dificuldades	• **Visualização espacial:** Alguns alunos podem ter dificuldade em visualizar como o quadrado maior é construído a partir dos pontos médios do quadrado menor. • **Justificativa das propriedades:** Justificar por que o quadrilátero EFGH é um quadrado e calcular a razão entre as áreas pode ser um desafio para alguns alunos.
Possíveis atividades complementares	• **Construção de triângulos a partir dos pontos médios dos lados de um triângulo:** Propor aos alunos que construam um triângulo a partir dos pontos médios dos lados de um triângulo maior e investiguem as propriedades do triângulo menor. • **Relação entre as áreas de figuras semelhantes:** Explorar a relação entre as áreas de figuras semelhantes, como triângulos e quadrados. • **Aplicações práticas:** Buscar exemplos de aplicações dessas relações em situações reais, como em arquitetura ou design.
Duração	1 aula

Após os alunos terem realizados todas essas atividades, com o auxílio do professor mediador, acreditamos que o seu nível de habilidade no uso do GeoGebra já esteva avançado e que o mesmo conseguirá realizar demais atividades quanto queira.

Para finalizarmos nosso trabalho, proporemos agora uma atividade prática, onde eu, professor Udo Melo, demarcarei em uma região plana um quadrilátero, utilizando estacas de madeira, transferidor e linha e, assim, calcularei a área do mesmo.

4.6 Atividade Prática

Atividade Prática: Determinar a área de um quadrilátero conhecidas as medidas dos comprimentos de seus lados e seus ângulos internos.

Objetivo: Mostrar aos alunos que é possível determinar a área de uma região plana utilizando o software GeoGebra.

1. Materiais necessários: Cabos de vassoura, Linha, Fita métrica, Transferidor, Prancheta de anotações e o Geogebra.

2. Numa região plana fixaremos os cabos de vassoura nos vértices da região que desejamos calcular a área.

3.Uniremos os cabos de vassoura utilizando a linha, que servirão como os lados do nosso quadrilátero.

4. Com o transferidor mediremos os ângulos entre as linhas, que servirão como os ângulos internos do nosso quadrilátero.

5. Conhecidas essas dimensões, construiremos o quadrilátero no GeoGebra e calcularemos sua área:

Materiais:

Para a aplicação da atividade foram utilizados os seguintes materiais, conforme o quadro a seguir.

Cabos de vassoura	
Transferidor e barbante	

Aplicação da atividade:

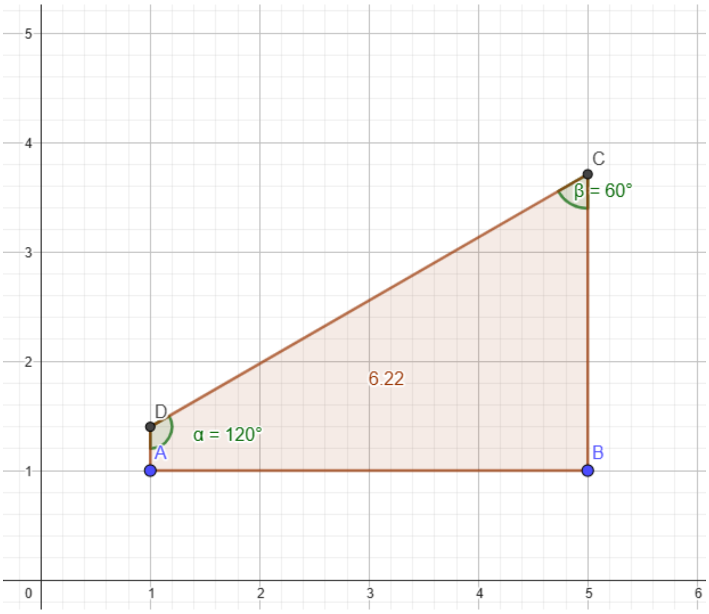
Passo 01: Fixar os cabos de vassoura

Passo 02: Cercar a região com a linha

Passo 03: Medir as distâncias entre os cabos de vassoura.

Passo 04: Medir os ângulos internos da região

Passo 05: Construir o quadrilátero no GeoGebra



Durante a aplicação da atividade notamos dificuldades e soluções que organizamos no quadro a seguir

Dificuldade	Solução
Afixar os cabos de vassoura no solo	Antes de aplicar a atividade o professor deve verificar as condições do local onde os alunos deverão ficar os cabos
Medir os comprimentos dos fios	Quanto mais esticados os fios, melhor para fazer a medição dos comprimentos dos lados do quadrilátero.

Medir os comprimentos dos ângulos internos	Assim como para medir os lados, quanto mais esticados os fios, melhor para fazer a medição dos ângulos internos do quadrilátero.

Aplicação da atividade (Link/Vídeo): Para um melhor aprendizado disponibilizamos um vídeo explicando como realizar o procedimento da atividade no link a seguir: https://drive.google.com/file/d/1QSPSPi2BXZXJrtKyr_UD0meyRmxfl_Rr/view?usp=sharing

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em mais de dez anos em sala de aula tive nas turmas do ensino fundamental e médio, em especial, com as turmas da 1ª série do ensino médio, as melhores experiências na carreira de professor, ainda que percebesse nos alunos a grande dificuldade com essa disciplina, os mesmos sempre mostraram interesse em querer aprender e, a relação professor-aluno foi imprescindível para tal.

Portanto, reforço que este trabalho teve como objetivo explorar a implementação de sequências didáticas no ensino da área de quadriláteros, com ênfase na utilização do software GeoGebra em um contexto de Educação Presencial Mediada por Tecnologia (SPMT). A iniciativa foi motivada pela necessidade de enfrentar os desafios do ensino de matemática em regiões rurais do Pará, onde a infraestrutura limitada e as barreiras geográficas tornam o acesso a uma educação de qualidade mais difícil. Neste cenário, o uso de tecnologias digitais mostrou-se uma estratégia relevante para tornar o aprendizado mais acessível, significativo e alinhado às demandas contemporâneas.

A partir da fundamentação teórica apresentada, observou-se que as sequências didáticas têm o potencial de organizar o processo de ensino-aprendizagem de forma mais sistemática e eficiente. Essas sequências estruturadas permitiram ao professor diagnosticar o progresso dos alunos e adaptar o ensino para atender às necessidades individuais, promovendo uma maior interatividade e o desenvolvimento do pensamento crítico. O uso do GeoGebra, em particular, se destacou como uma ferramenta poderosa para a exploração de conceitos geométricos, proporcionando aos estudantes uma compreensão visual e interativa dos conceitos, como o cálculo da área de quadriláteros.

Os resultados obtidos indicam que o software, aliado à metodologia proposta, possibilita uma aprendizagem mais ativa e participativa, especialmente em um contexto educacional marcado por desafios tão singulares. Conforme constatado nos trabalhos de outros egressos do PROFMAT, o uso do GeoGebra permitiu que os alunos desenvolvessem habilidades matemáticas através da manipulação de recursos visuais e da resolução de problemas de maneira colaborativa. Essa abordagem também incentivou uma reflexão mais profunda sobre os conceitos, conectando o conteúdo teórico a situações práticas.

Ademais, o trabalho reforça o papel crucial do professor como mediador no processo educacional, especialmente na Educação Presencial Mediada por Tecnologia. No modelo apresentado, o docente desempenha não apenas a função de transmissor de conhecimento, mas também de facilitador, promovendo o engajamento dos alunos e assegurando que eles sejam os protagonistas de sua própria aprendizagem. Essa relação dinâmica entre professor, tecnologia e estudante evidencia o valor de um planejamento pedagógico integrado e eficaz.

Embora o trabalho tenha alcançado resultados positivos, algumas limitações foram identificadas. A principal delas está relacionada à infraestrutura tecnológica das escolas, que pode restringir a aplicação de ferramentas como o GeoGebra em ambientes de baixa conectividade ou falta de recursos computacionais adequados. Além disso, destaca-se a necessidade de capacitar os professores quanto ao uso dessas tecnologias, garantindo que elas sejam utilizadas de forma apropriada e contextualizada. Essas questões apontam para o campo de pesquisa futura, que poderia incluir a adaptação de recursos digitais para ambientes educacionais mais precários ou o desenvolvimento de soluções offline que mantenham as potencialidades exploradas neste trabalho.

Conclui-se, portanto, que a integração entre sequências didáticas e tecnologia representa uma abordagem inovadora e necessária para promover um ensino mais equitativo, acessível e eficaz. Em comunidades rurais, como as do interior do Pará, onde o ensino tradicional encontra barreiras estruturais significativas, essa combinação permite conectar os estudantes às demandas da sociedade contemporânea. Mais do que isso, contribui para a formação de alunos autônomos, capacitados para aplicar conceitos matemáticos em diferentes âmbitos de suas vidas. Esta experiência reafirma a importância de repensar o papel das tecnologias digitais na educação, valorizando a inclusão e a inovação pedagógica como instrumentos para a transformação social e educacional.

Desta forma, desejo que professores e profissionais de ensino que lerem este trabalho possam utilizar-se de nossas concepções, enfatizando a importância na relação professor-aluno para o processo de ensino-aprendizagem, para retomar de forma mais eficaz tal processo.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, A. C. **Educação em transformaçã**o: perspectivas globais e inovação 2. Capítulo 5. DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.039251802. 2025.

AMARAL, H. **Sequência didática e ensino de gêneros textuais**. Revista Escrevendo o Futuro. Disponível em: https://surl.li/yhoqph. 2023.

BRASIL**.** Ministério da Educação. **Centros de Mídias da Educação – CNME.** Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/cnme. Acesso em: 3 set. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular: Educação infantil e ensino fundamental**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/. Acesso em: 20 mar. 2025.

CABRAL, N. F. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

CARDOSO, M. B. **Sequências didáticas**: orientações para iniciantes na pesquisa em educação matemática. — Iguatu, CE : Quipá Editora, 2024.

CARVALHO, E. de S. **Sequência Didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração**. Arraias, TO, 2017. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2017.

DOLCE, O; IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar Vol. 9**: Geometria Plana, 2013. São Paulo: Atual, 2013.

DOLZ, Joaquim et al. **Sequências didáticas para o oral e a escrita:** apresentação de um procedimento. Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado de Letras, p. 95-128, 2004.

FARIAS, G. B. **Contributos da aprendizagem significativa de David Ausubel para o desenvolvimento da Competência em Informação**. Perspectivas em Ciência da Informação, v.27, n. 2, p. 58-76, abr/jun 2022.

FRISKE, A. L. *et al*. **Minicurso de GeoGebra**. Universidade Federal de Santa Maria – RS. Grupo Pet matemática da UFSM. Santa Maria, 2016.

GEOEGBRA. **GeoGebra - Mathematics for Everyone**. Disponível em: https://www.geogebra.org. Acesso em: 18 dez. 2024.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** São Paulo: Atlas, 2002.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb).** Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb#:~:text=Apresenta%C3%A7%C3%A3o,interferir%20no%20desempenho%20do%20estudante. Acesso em: 28 set. 2024.

KENSKI, V. M. **Educação e Comunicação: interconexões e convergências**. Educ. Soc., Campinas, vol. 29, n. 104 - Especial, p. 647-665, out. Disponível em: http://www.cedes.unicamp.br. 2008.

LEITE, W. S. S; RIBEIRO, C. A. N. **A inclusão das TICs na educação brasileira: problemas e desafios**. Revista Magis Internacional de Investigación en Educación, Bogotá, v. 5, n. 10, p. 173-187, 2012. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=28102489601. Acesso em: 24 jan. 2024.

MACEDO GUEDES, A. C. **Sequência Didática Para o Uso de Geometria Analítica**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Castanhal, 2024.

MENDES, A. **TIC – Muita gente está comentando, mas você sabe o que é?** Portal iMaster, mar. 2008. Disponível em: <http://imasters.com.br/artigo/8278/gerencia-de ti/tic-muita-gente-esta-comentando-mas-voce-sabe-o-que-e/>. Acesso em: 14 fev. 2024.

MONTEIRO, J. C. et al. **Sequência didática como instrumento de promoção da aprendizagem significativa**. Revista Eletrônica DECT, Vitória (ES), v. 9, n. 01, p. 292-305, 2019.

MONTOITO, R. GARNICA, A. V. M. **Ecos de Euclides: breves notas sobre a influência d'Os Elementos a partir de algumas escolas filosóficas**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.16, n.1, pp. 95-123, 2014

MOURÃO, Andreza Bastos. **Ensino mediado por tecnologia no Amazonas.** 2009. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2009.

OLIVEIRA, M. T.; LEIVAS, J. C. P. (2017). **Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele**. Ciência e Natura, v. 39, n. 1, p. 108-117, 2017.Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/viewFile/23170/pdf. Acesso em: 10 set. 2024

PEREIRA, M. dos S. **O uso do software Geogebra para o ensino de construções geométricas a alunos do primeiro ano do ensino médio**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós. Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2021.

PONTE, J. P. **Tecnologias de informação e comunicação na educação e na formação de professores: Que desafios?** Revista Iberoamericana de Educación, Madri, v. 24, p.63-90, 2000.

QEDU. **Pará - IDEB**. Disponível em: https://qedu.org.br/uf/15-para/ideb. Acesso em: 28 set. 2024.

REZENDE, E. C. F.; DE QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016

RODRIGUES, D. C. P. **Uma proposta de sequência didática utilizando o GeoGebra c recurso de ensino de fatoração**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Catalão, Instituto de Matemática e Tecnologia, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede - PROFMAT, Catalão, 2024.

ROOSEWELT. A. S. C. **O uso das novas TIC´s e o Geogebra no processo de ensino-aprendizagem da matemática.** A educação enquanto fenômeno social: Propósitos econômicos, políticos e culturais. Brasil, 2023.

SEDUC. Pará. **Estado garante internet e educação de qualidade para alunos da rede estadual da zona rural com 'Kits Bora Estudar**'. Pará. Secretária de Estado da Educação, 17 jul. 2024. Disponível em: https://www.seduc.pa.gov.br/noticia/13314-estado-garante-internet-e-educacao-de-qualidade-para-alunos-da-rede-estadual-da-zona-rural-com-kits-bora-estudar. Acesso em: 20 fev. 2025

SOUSA, R. de V (elaboradora). **O Ensino de Matemática na Educação Contemporânea**: o devir entre a teoria e a práxis. 1ª Edição. Quipá Editora. Campos Sales. Ceará. 2021.

VERGNAUD, G. (Org.). **Didática da Matemática**: reflexões e experiências. 2. ed. São Paulo: Editora X, 1996.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa como ensinar.** Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Reimpressão 2010. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ANEXO I

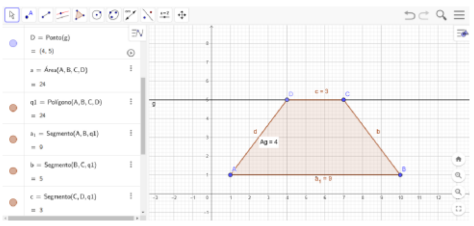
IDENTIFICAÇÃO:

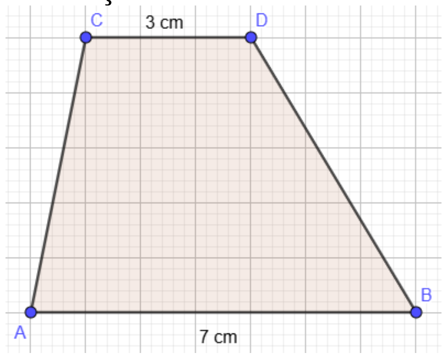
NÚMERO DA AULA	SÉRIE	BIMESTRE	ÁREA DE CONHECIMENTO	COMPONENTE CURRICULAR
03	3°	1°	Matemática	Matemática
DATA DE TRANSMISSÃO	HABILIDADE DCEPA	PROCESSO COGNITIVO	DOCENTE DE MINISTRANTE	DOCENTE DE APOIO
	(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	CRIAR	Udo Melo	
OBJETO DE CONHECIMENTO			OBJETIVO DE APRENDIZAGEM	
Área de Quadriláteros (Trapézio)			Construir um quadrilátero (trapézio) por meio do software GeoGebra.	
EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM				
Construir um quadrilátero utilizando recursos tecnológicos por meio da suas medidas (bases e altura) e calcular a área.				

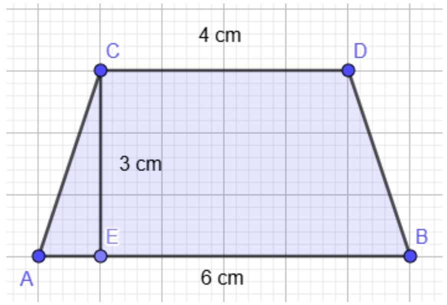
DESENVOLVIMENTO

MIN	Introdução - 02 minutos	RECURSO MIDIÁTICO	RECURSO DE TEXTO	ORIENTAÇÕES AO MEDIADOR
2 min	Aqui, vamos receber os nossos alunos, dando-lhes boas vindas e logo em seguida, falar sobre o objetivo de aprendizagem a aula.		Leitura do objetivo de Aprendizagem.	
Desenvolvimento da aula - 23 minutos				
MIN	**INTENÇÃO DO MOMENTO DA AULA**	RECURSO MIDIÁTICO	RECURSO DE TEXTO	ORIENTAÇÕES AO MEDIADOR
23 min	Neste momento da aula vamos convidar os alunos a construir um trapézio por meio do software GeoGebra.		**Vamos construir uma Trapézio??** Vamos utilizar o Software GeoGebra para auxiliar na construção dessa figura plana. Usaremos o GeoGebra online.	Professor(a), é importante que os alunos estejam organizados para o início da aula e que eles tragam as anotações sobre o software GeoGebra da aula anterior. Iremos acessar o software, mas primeiro iremos mostrar um passo a passo de como devemos fazer a construção. É importante que

				os(as) alunos(as) anotem em seu caderno cada momento.
	Nesta segunda cartela, mostramos aos alunos os passos que faremos para a construção do Trapézio.	**Link:** https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT	**Vamos ao Passo a Passo.. Me sigam!!** **Passo 01:** Crie os pontos A e B. **Passo 02:** Crie o segmento AB. **Passo 03:** Marque um ponto C, não pertencente a AB. **Passo 04:** Construa a reta paralela à AB que passa por C. **Passo 05:** Marque um ponto D, diferente de C, na reta criada no passo anterior	Professor mediador, peça aos alunos que anotem tudo que está na cartela da mesma forma que foi apresentado. **Passo 01:** Crie os pontos A e B. **Passo 02:** Crie o segmento AB. **Passo 03:** Marque um ponto C, não pertencente a AB. **Passo 04:** Construa a reta paralela à AB que passa por C. **Passo 05:** Marque um ponto D, diferente de C, na reta criada no passo anterior
	Nesta 3ª cartela, ainda continuamos a construção, mas agora com os passos 06,07,08 e assim finalizando a construção da figura por meio do software.		**Continuando a construção...** **Passo 06:** Utilizando a ferramenta “Polígono”, construa o trapézio ABCD. **Passo 07:** No Campo Entrada de Texto digite: Área (A, B, C, D). **Passo 08:** Utilizando a ferramenta “Distância” determine as medidas das bases e da altura do trapézio.	Professor mediador, é muito importante que os alunos anotem em seu caderno tudo o que tem na cartela. **Passo 06:** Utilizando a ferramenta “Polígono”, construa o trapézio ABCD. **Passo 07:** No Campo Entrada de Texto digite: Área (A, B, C, D).

				Passo 08: Utilizando a ferramenta “Distância” determine as medidas das bases e da altura do trapézio.
	Aqui, vamos construir junto do aluno a figura proposta no inicio da aula.			Professor (a) mediador (a) agora já temos anotado os passos, vamos fazer eles no GeoGebra online, peça para que os alunos acompanhem a construção e vá anotando em seu caderno dúvidas caso elas apareçam. Peça para eles anotarem as medidas da figura, como as bases do trapézio, altura (distância entre as bases).
	Neste momento da aula, o professor mostra aos alunos o gabarito da atividade por meio GeoGeobra.		**Link** **Resolução (Link):** A resolução dessa atividade encontra-se no link a seguir: https://www.geogebra.org/calculator/uwcdwypk	Professor(a) mediador(a), segue o link da resolução dessa construção.
	No momento final da aula, mostramos aos alunos a imagem do trapézio, suas medidas e sua área.			Professor(a) note que a área do trapézio, de acordo com o software, é 24 e, também, $Área = \frac{(b_1+b_2)h_1}{2} = \frac{(9+3)4}{2} = 12 \cdot 2 = 2$

		Fonte: Professor Udo Melo Base Maior:9 Base Menor 3 Distância entre as bases: 4		
Dinâmica local - 05 minutos				
MIN	**INTENÇÃO DO MOMENTO DA AULA**	RECURSO MIDIÁTICO	RECURSO DE TEXTO	ORIENTAÇÕES AO MEDIADOR
05 min	O professor irá conversar com os alunos e responderá a questão junto deles.		01.(Udo Melo, 2025) Construa em seu caderno um trapézio de: a) base maior igual a 7 cm, base menor 3 cm e que a altura dele seja de 5 cm. b) base maior igual a 6 cm, base menor 4 cm e que a altura dele seja de 3 cm. Obs: Encontre o valor de cada área.	Professor(a) segue uma possível construção da letra a:  $Área = \frac{(b_1+b_2)h_1}{2} = \frac{(7+3)5}{2} = 5 \cdot 5 = 25\ cm^2$ Letra b:

				 $\acute{A}rea = \frac{(b_1+b_2)h_1}{2} = \frac{(6+4)3}{2} =$ $5\,.\,3 = 15\ cm^2$
Interatividade - 05 minutos				
MIN	**INTENÇÃO DO MOMENTO DA AULA**	RECURSO MIDIÁTICO	RECURSO DE TEXTO	ORIENTAÇÕES AO MEDIADOR
10 min MANHÃ/TARDE / 05 min NOITE				Professor(a) solicite que os alunos mostrem as suas construções e caso seja possível a área de cada figura construída.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Espacial*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2010.

PASSO A PASSO
Passo 01: Criar os pontos A e B
Selecione a ferramenta "Ponto" na barra de ferramentas.

Clique em dois lugares diferentes da tela para criar os pontos A e B

Dica: Nomeie os pontos automaticamente clicando na opção "Exibir Rótulo" no menu de configurações.
Passo 02: Criar o segmento AB
Selecione a ferramenta "Segmento" na barra de ferramentas.

Clique no ponto A depois no ponto B para criar o segmento AB.

Dica: O segmento AB será a base maior do trapézio.
Passo 03: Marcar um ponto C fora do segmento AB
Selecione novamente a ferramenta "Ponto".

Clique em um local acima ou abaixo do segmento AB para criar o ponto C.

Dica: Certifique-se de que o ponto C não esteja alinhado com A e B
Passo 04: Construir a reta paralela à AB que passa por C
Selecione a ferramenta "Reta Paralela" na barra de ferramentas.

Clique no segmento AB e depois no ponto C. Isso criará uma reta paralela a AB passando por C.

Dica: Essa reta será a base menor do trapézio.
Passo 05: Marcar um ponto D na reta paralela
Selecione a ferramenta "Ponto".

Clique em um ponto qualquer da reta paralela (diferente de C para criar o ponto D.

Dica: O ponto D deve estar na mesma reta que C, mas em uma posição diferente.
Passo 06: Construir o trapézio ABCD
Selecione a ferramenta "Polígono" na barra de ferramentas.

Clique nos pontos A, B, C e D, nesta ordem, e depois clique novamente em A para fechar o polígono.

Dica: O trapézio ABCD será destacado na tela.

Passo 07: Calcular a área do trapézio
No campo de entrada de texto (localizado na parte inferior da tela), digite:

Área = Área (A, B, C, D)
Pressione Enter. O GeoGebra exibirá automaticamente a área do trapézio.

Dica: O valor da área será atualizado automaticamente se você mover os pontos.
Passo 08: Medir as bases e a altura
Selecione a ferramenta "Distância ou Comprimento" na barra de ferramentas.

Clique no segmento AB para medir o comprimento da base maior. Clique no segmento CD para medir o comprimento da base menor.

Para medir a altura:
Use a ferramenta "Reta Perpendicular" para traçar uma reta perpendicular a AB passando por C ou D.
Use a ferramenta "Distância ou Comprimento" para medir a distância entre as duas bases (altura h).

Dica: A altura pode ser medida diretamente entre as duas retas paralelas.
Tarefa Adicional:
Movimente os pontos A,B,C,D e observe como as medidas das bases, da altura e da área mudam.

Verifique se a área calculada pelo GeoGebra corresponde à fórmula matemática: $A=\frac{(B+b)h}{2}$
Onde:
B = base maior,
b = base menor,
h = altura.
Dicas Finais:
Use a ferramenta "Texto" para exibir as medidas e a fórmula da área diretamente na tela.

Salve sua construção para uso futuro ou para compartilhar com colegas.

Apêndice I

Este apêndice reúne os links para as atividades desenvolvidas no Capítulo 4 desta dissertação, que propõe uma sequência didática para o ensino dos quadriláteros no Ensino Fundamental, com o auxílio do software GeoGebra. As atividades foram organizadas de forma progressiva, abordando desde conceitos básicos até propriedades mais avançadas dessas figuras geométricas.

O objetivo deste material complementar é fornecer aos professores e alunos um recurso digital acessível e interativo, permitindo a reprodução das atividades em diferentes contextos educacionais. Além disso, a disponibilização online possibilita a atualização contínua dos conteúdos, contribuindo para um ensino dinâmico e alinhado às novas metodologias de aprendizagem.

O link a seguir direciona para as resoluções das atividades, facilitando a aplicação prática da sequência didática apresentada no trabalho: UDO MELO – Materiais – GeoGebra.

Os quadriláteros e o GeoGebra

Prof. Udo Melo

Prefácio

Este e-book apresenta uma sequência didática voltada para o ensino dos quadriláteros no Ensino Fundamental, utilizando o software GeoGebra como ferramenta de apoio.
A proposta busca abordar conceitos fundamentais de quadriláteros, como ângulos internos, diagonais, pontos médios e cálculo de áreas, por meio de atividades progressivas em nível de dificuldade.
Além disso, são destacadas as principais dificuldades encontradas pelos alunos no aprendizado desses conceitos, bem como estratégias para superá-las.

Sumário

Capítulo 1: Considerações Iniciais

As atividades estruturadas neste e-book estão em ordem crescente de complexidade. As primeiras envolvem a construção e identificação das propriedades básicas de cada quadrilátero, enquanto as últimas exigem a aplicação de conhecimentos mais avançados, como a relação entre diagonais e a determinação de áreas.

Capítulo 2: Atividades Propostas

Atividade 01: Trapézios

Construção básica de um Trapézio

Objetivo: Construir um trapézio simples e identificar suas bases e altura.

1. Usando a ferramenta de pontos, crie 4 pontos (A, B, C, D) no plano.

2. Conecte os pontos em ordem (A-B-C-D) usando o segmento de reta para formar o trapézio, garantindo que AB//CD.

3. Identifique as bases AB (maior) e CD (menor) do trapézio, com auxílio do comando "Paralelas".

4. Meça a altura do trapézio utilizando a ferramenta "Distância ou Comprimento".

Atividade 02: Trapézios

Classificação do Trapézio

Objetivo: Determinar o tipo de trapézio (isósceles, retângulo ou escaleno).

1. Crie um trapézio arbitrário.

2. Verifique se os lados não paralelos são congruentes (usando a ferramenta "Distância ou Comprimento"). Se forem, o trapézio é isósceles.

3. Insira ângulos no trapézio e determine se há um ângulo reto. Se houver, classifique como trapézio retângulo.

4. Classifique o trapézio conforme os critérios definidos.

Atividade 03: Trapézios

Área de um Trapézio

Objetivo: Explorar as propriedades da área do trapézio.

1. Construa um trapézio com bases b1 e b2 e altura h1.

2. Utilize o comando: Copiar código Area[Polygon[A, B, C, D]] para encontrar a área do trapézio.

3. Verifique se a área segue a fórmula $\acute{A}rea = \frac{(b_1 + b_2)\,h_1}{2}$.

Atividade 02: Trapézios

Mediana de um Trapézio

Objetivo: Construir e explorar a propriedade da mediana de um trapézio.

1. Construa um trapézio e conecte os pontos médios dos lados não paralelos utilizando a ferramenta de ponto médio.

2. Trace o segmento que conecta os pontos médios, chamado de mediana.

3. Meça o comprimento da mediana e comprove que:

$$m = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

4. Generalize a propriedade para trapézios de diferentes dimensões.

Atividade 05: Trapézios

Construir um Trapézio conhecendo as medidas de seus quatro lados.

Objetivo: Verificar a unicidade de um trapézio conhecidas as suas medidas.

1. Construa um trapézio de dimensões 5 cm, 5 cm, 6 cm e 8 cm.

2. Construa um trapézio de dimensões 5 cm, 5 cm, 6 cm e 8 cm, diferente do construído no item anterior.

3. Verifique que um trapézio não é unicamente determinado sabendo apenas as medidas dos seus lados.

Atividade 06: Paralelogramos

Construção básica de um Paralelogramo

Objetivo: Construir um paralelogramo e identificar suas propriedades básicas.

1. Construa um paralelogramo ABCD.

2. Determine as alturas relativas aos lados AB e BC.

Atividade 07: Paralelogramos

Propriedades dos Lados e Ângulos

Objetivo: Verificar propriedades geométricas dos lados e ângulos de um paralelogramo.

1. Construa um paralelogramo com um dos lados medindo 5 cm, meça os comprimentos de todos os lados usando a ferramenta "Distância ou Comprimento". Mostre que os lados opostos têm a mesma medida.

2. Insira os ângulos internos usando a ferramenta "Ângulo".

3. Comprove que os ângulos opostos são congruentes.

Atividade 08: Paralelogramos

Transformação em coordenadas

Objetivo: Determinar se um quadrilátero é um paralelogramo conhecendo apenas seus vértices.

1. Insira os pontos A(0,0), B(4,0), C(5,3) e D(1,3) no plano cartesiano para criar um quadrilátero.

2. Determine os ângulos internos nesse quadrilátero e verifique se ele é um paralelogramo.

Atividade 09: Paralelogramos

Ponto médio das diagonais

Objetivo: Determinar que em um paralelogramo as diagonais interceptam-se nos seus respectivos pontos médios.

1. Construa um paralelogramo com lados medindo 3 cm e 5 cm.

2. Construa as diagonais desse paralelogramo.

3. Verifique que essas diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.

Atividade 10: Paralelogramos

Cálculo de área

Objetivo: Calcular a área de um paralelogramo conhecendo dois de seus lados consecutivos e o ângulo entre eles.

1. Construa um paralelogramo de lados 4 cm e 6 cm e ângulo entre eles igual a 30°.

2. Determine a altura relativa ao maior lado desse paralelogramo.

3. Calcule a área do paralelogramo.

Atividade 11: Retângulos

Construção Básica e Medidas

Objetivo: Explorar as propriedades fundamentais de um retângulo, como lados opostos iguais e ângulos internos de 90°.

1. Construa um retângulo ABCD no GeoGebra.

2. Meça os comprimentos dos lados.

3. Meça os ângulos internos do retângulo.

Atividade 12: Retângulos

Área do retângulo

Objetivo: Consolidar o entendimento da relação entre as medidas dos lados (base e altura) e a área do retângulo.

1. Construa um retângulo definindo os vértices no plano cartesiano: A(1,1), B(5,1), C(5,3) e D(1,3).

2. Meça a base e a altura do retângulo.

3. Calcule a área do retângulo usando a fórmula Área = base × altura.

4. Confirme o valor da área utilizando a ferramenta de GeoGebra “Área”.

Atividade 13: Retângulos

Diagonais e propriedades

Objetivo: Incentivar a descoberta das propriedades das diagonais de um retângulo, como congruência e ponto de interseção no centro.

1. Construa um retângulo ABCD.

2 Trace as diagonais AC e BD.

3. Use a ferramenta "Distância ou Comprimento" para medir o comprimento das diagonais.

4. Identifique o ponto de interseção das diagonais e analise a posição dele em relação ao retângulo.

Atividade 14: Retângulos

Retângulo unicamente determinado

Objetivo: Verificar se um retângulo fica unicamente determinado caso sejam conhecidos três de seus vértices.

1. Insira os pontos A(0,0), B(6,0) e C(6,4) para formar um retângulo ABCD no plano cartesiano.

2. Construa, se possível, dois retângulos distintos ABCD e ABCE.

Atividade 15: Retângulos

Pontos médios de um retângulo

Objetivo: Verificar que os pontos médios de um retângulo formam um paralelogramo. E, ainda, que a área desse paralelogramo é a metade da área do retângulo.

1. Construa um retângulo ABCD.
2. Marque os pontos médios E, F, G e H, dos lados desse retângulo.
3. Verifique que EFGH é um paralelogramo.
4. Determine a área de EFGH.

Atividade 16: Losangos

Relação entre as diagonais

Objetivo: Desenvolver habilidades analíticas, como o cálculo de distâncias ou áreas e verificação da igualdade dos lados do losango.

1.Construa um losango com diagonais medindo 8 cm e 6 cm.

2. Determine a medida dos lados desse losango.

3. Calcule a área desse losango e verifique que é satisfeita a fórmula:

$$Área = \frac{D \cdot d}{2}$$

Atividade 17: Losangos

Construa um losango conhecida a medida de um de seus lados.

Objetivo: Reconhecer as características fundamentais do losango, como lados congruentes e diagonais perpendiculares entre si.

1. Construa um losango de lado 2 cm.
2. Construa e meça o comprimento das diagonais desse losango.
3. Calcula os ângulos internos e o ângulo formado entre as diagonais desse losango.

Atividade 17: Losangos

Construa um losango conhecida a medida de um de seus lados.

Objetivo: Reconhecer as características fundamentais do losango, como lados congruentes e diagonais perpendiculares entre si.

1. Construa um losango de lado 2 cm.

2. Construa e meça o comprimento das diagonais desse losango.

3. Calcula os ângulos internos e o ângulo formado entre as diagonais desse losango.

Atividade 18: Losangos

Determinação de um losango conhecidos seu lado e um ângulo interno.

Objetivo: Construir um losango com lado medindo 3 cm e ângulo interno medindo 70°.

1. Construa um losango com lado medindo 3 cm.

2. Construa as diagonais desse losango e determine sua medida.

3. Determine as medidas de todos os ângulos internos desse losango.

Atividade 19: Losangos

Losango e circunferência circunscrita

Objetivo: Promover a criatividade e a manipulação prática ao modificar os elementos do losango para atingir as condições desejadas.

1. Construa uma circunferência de raio 2 cm.

2. Construa um losango circunscrito a essa circunferência.

3. Determine as medidas dos lados desse losango.

Atividade 20: Losangos

Losango e circunferência inscrita.

Objetivo: Promover a criatividade e a manipulação prática ao modificar os elementos do losango para atingir as condições desejadas.

1. Construa uma circunferência de raio 2 cm.

2. Construa um losango inscrito a essa circunferência.

3. Determine as medidas dos lados desse losango.

Atividade 21: Quadrado

Desenhando um quadrado

Objetivo: Desenvolver habilidades de manipulação no GeoGebra, promovendo familiaridade com a interface.

1. Construa um segmento AB = 5 cm.

2. Construa um quadrado ABCD.

3. Determine a medida da diagonal desse quadrado.

4. Determine a área desse quadrado.

Atividade 22: Quadrado

Investigando a Diagonal

Objetivo: Descobrir a relação entre o lado de um quadrado e sua diagonal.

1. Construa um quadrado ABCD.

2. Construa suas diagonais.

3. Determine o comprimento dessas diagonais.

4. Determine o ângulo formado entre essas diagonais.

5. Determine os pontos médios dessas diagonais.

Atividade 23: Quadrado

Áreas e diagonais

Objetivo: Relacionar a área do quadrado e as medidas dos comprimentos das suas diagonais.

1. Construa um segmento AB = 4 cm.

2. Construa um quadrado cuja diagonal seja AB.

3. Determine a área desse quadrado e verifique que a sua área pode ser calculada como:

$$Área = \frac{(Diagonal)^2}{2}$$

Atividade 24: Quadrado

Quadrado inscrito no círculo

Objetivo: Construir um quadrado inscrito num círculo de raio 2 cm.

1. Construa um círculo de raio 2 cm.

2. Construa um quadrado inscrito nesse círculo.

3. Determine a área do quadrado e verifiquei que satisfaz a fórmula:

$$Área = \frac{(Raio)^2}{2}$$

Atividade 25: Quadrado

Pontos médios de um quadrado.

Objetivo: Construir um quadrado EFGH a partir de um quadrado ABCD cujos pontos A, B, C e D sejam pontos médios dos lados do quadrado EFGH.

1. Construa um quadrado ABCD.

2. Construa um quadrado EFGH, sendo A, B, C e D os pontos médios dos lados EF, FG, HG e HE, respectivamente.

Capítulo 3: Resolução das atividades

Resolução das atividades

Para uma experiência completa com o GeoGebra, recomendamos que você escaneie o QR code e acesse o link onde estão disponíveis as resoluções de todas as atividades:

Caso não consiga acessar o QR Code:

U

UDO MELO – Resources

GeoGebra /

Capítulo 4: Considerações Finais

Parabéns por ter chegado até aqui! Acreditamos que após a realização de todas essas atividades, suas habilidades no GeoGebra e seus conhecimentos sobre os quadriláteros estão muito mais aprimorados!

Referências

DOLCE, O; IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar Vol. 9**: Geometria Plana, 2013. São Paulo: Atual, 2013.

GEOEGBRA. **GeoGebra - Mathematics for Everyone**. Disponível em: https://www.geogebra.org. Acesso em: 18 dez. 2024.

REZENDE, E. C. F.; DE QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2ª Ed. Campinas. SP. Editora: UNICAMP. 2016