UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO - UFTM

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

O ensino de Funções Lineares e Quadráticas na China: Apresentação, Análise e Reflexões de um Material Curricular para o Ensino Médio em Xangai

Rodney Pereira da Silva Junior

Uberaba - Minas Gerais

13 de Março de 2026

O ensino de Funções Lineares e Quadráticas na China: Apresentação, Análise e Reflexões de um Material Curricular para o Ensino Médio em Xangai

Rodney Pereira da Silva Junior

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Marcela Luciano Vilela de Souza.

Uberaba - Minas Gerais
13 de Março de 2026

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

	Silva Junior, Rodney Pereira da
S48e	O ensino de funções lineares e quadráticas na China: apresentação, análise e reflexões de um material curricular para o ensino médio em Xangai / Rodney Pereira da Silva Junior. -- 2026.
	179 p.: il., fig., graf., tab.
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2026
	Orientadora: Profa. Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza
	1. Matemática - Estudo e ensino - China. 2. Funções (Matemática). 3. Professores de matemática – Formação. 4. Currículos – Material didático. I. Souza, Marcela Luciano Vilela de. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III.Título.
	CDU 51(07) (510)

Júlio Ferreira Gomes – Bibliotecário – CRB 6/3227

RODNEY PEREIRA DA SILVA JÚNIOR

O ensino de Funções Lineares e Quadráticas na China: Apresentação, Análise e Reflexões de um Material Curricular

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração Matemática, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Uberaba, 13 de março de 2026

Banca Examinadora:

Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza – Orientadora
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dr. Bruno Nunes de Souza
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Me. Kleber Gonçalves do Nascimento
Secretária Municipal de Educação de Uberaba

Dedico este trabalho à minha família, em especial ao meu filho João Augusto, razão maior de todas as minhas escolhas; ao meu marido Phablo, pelo apoio, incentivo e compreensão ao longo de todo este percurso; e à minha mãe Eliana, pelo exemplo, pela presença constante e pelo apoio incondicional. Dedico, ainda, às professoras, professores e colegas que, com palavras de incentivo e partilhas ao longo da trajetória acadêmica e profissional, contribuíram para que este trabalho se tornasse possível.

"A Matemática é um conhecimento
historicamente construído, cuja apropriação
pelo estudante possibilita a compreensão
crítica e a transformação da realidade."
- Ubiratan D'Ambrosio

Resumo

Este trabalho consiste em uma análise comparativa do ensino de funções lineares e quadráticas a partir de um material curricular utilizado em escolas de Ensino Médio da cidade de Xangai, na China, estabelecendo relações com livros didáticos brasileiros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), à luz das diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e de referenciais teóricos da Educação Matemática. Trata-se de um estudo de natureza qualitativa, com abordagem documental e analítica, que busca compreender como diferentes concepções de currículo, ensino e formação docente se materializam nos materiais didáticos analisados. Inicialmente, contextualiza-se o desempenho da China em avaliações internacionais de Matemática, destacando aspectos estruturais e culturais do sistema educacional chinês, em especial a organização do trabalho docente por meio dos *Teaching Research Group* (Grupo de Pesquisa em Ensino) (TRG) e do modelo de desenvolvimento profissional conhecido como *Exemplary Lesson Development* (Desenvolvimento de Aula Exemplar) (Keli). Em seguida, procede-se à análise do material curricular de Xangai, evidenciando uma proposta pedagógica fundamentada em princípios investigativos, progressivos e reflexivos, caracterizada pela valorização de situações-problema, múltiplas representações matemáticas, exploração sistemática de parâmetros e construção gradual dos conceitos. Na sequência, analisa-se um livro didático brasileiro aprovado pelo PNLD, identificando avanços relacionados à contextualização e à diversidade de exemplos, mas também a predominância de abordagens mais expositivas e procedimentais, com menor ênfase em atividades investigativas. A análise comparativa permite identificar semelhanças e diferenças entre as propostas, bem como refletir sobre possíveis contribuições do modelo chinês para o ensino de Matemática no contexto brasileiro. Por fim, o estudo busca contribuir para o aprimoramento da prática docente e para a reflexão crítica sobre a elaboração de materiais curriculares mais coerentes com propostas formativas e investigativas, em consonância com a natureza profissional do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).
Palavras-chave: ensino de funções; materiais curriculares; formação docente; educação matemática; China.

Abstract

This study presents a comparative analysis of the teaching of linear and quadratic functions based on a curricular material used in upper secondary schools in the city of Shanghai, China, establishing connections with Brazilian textbooks approved by the National Textbook Program (PNLD), in light of the guidelines of the National Common Curricular Base (BNCC) and theoretical frameworks from Mathematics Education. It is a qualitative study with a documentary and analytical approach, aiming to understand how different conceptions of curriculum, teaching, and teacher education are materialized in the analyzed instructional materials. Initially, the study contextualizes China's performance in international mathematics assessments, highlighting structural and cultural aspects of the Chinese educational system, particularly the organization of teachers' work through Teaching Research Groups (TRG) and the professional development model known as Exemplary Lesson Development (Keli). Subsequently, the Shanghai curricular material is examined, revealing a pedagogical proposal grounded in investigative, progressive, and reflective principles, characterized by the use of problem situations, multiple mathematical representations, systematic exploration of parameters, and gradual construction of concepts. Next, a Brazilian textbook approved by the PNLD is analyzed, identifying relevant advances in terms of contextualization and diversity of examples, as well as the predominance of more expository and procedural approaches, with limited emphasis on investigative activities. The comparative analysis makes it possible to identify similarities and differences between the proposals and to reflect on potential contributions of the Chinese model to mathematics teaching in the Brazilian context. Finally, the study seeks to contribute to the improvement of teaching practice and to critical reflection on the development of curricular materials that are more coherent with formative and investigative approaches, in accordance with the professional nature of the PROFMAT program.

Keywords: function teaching; curricular materials; teacher education; mathematics education; China.

Sumário

Lista de Siglas

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

1 INTRODUÇÃO

O estudo de funções constitui um dos eixos estruturantes da Matemática escolar, apresentando ampla aplicabilidade em diferentes áreas do conhecimento e estabelecendo relações diretas com fenômenos naturais, sociais e tecnológicos. No contexto da Educação Básica, e de modo particular no Ensino Médio, esse conteúdo assume papel central no desenvolvimento do pensamento algébrico, da modelagem matemática e da articulação entre múltiplas representações matemáticas, como tabelas, gráficos e expressões algébricas, sendo, por essa razão, recorrente em propostas interdisciplinares e em avaliações educacionais de larga escala.

Diante dessa relevância conceitual e formativa, justifica-se um olhar sistemático sobre a forma como o ensino de funções é organizado e desenvolvido no contexto escolar brasileiro. Inserida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), esta pesquisa parte do pressuposto de que a reflexão crítica sobre materiais curriculares e práticas de ensino constitui elemento fundamental para o aprimoramento da prática docente, articulando fundamentos teóricos da Educação Matemática com demandas concretas da sala de aula.

Nessa perspectiva, o presente trabalho propõe a análise de um material curricular elaborado por professores da China, desenvolvido para ser utilizado em escolas do equivalente ao Ensino Médio na cidade de Xangai, estabelecendo um diálogo comparativo com o contexto brasileiro, especialmente com os livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)). O interesse pelo contexto educacional chinês fundamenta-se no desempenho de destaque alcançado pela China em avaliações internacionais de Matemática, aspecto amplamente discutido na literatura e associado a características específicas de sua organização curricular e de seu desenvolvimento profissional docente (YANG, 2014; HUANG; BAO, 2006).

O problema que orienta esta investigação consiste em compreender de que modo as abordagens metodológicas presentes no material curricular de Xangai, particularmente no ensino de funções lineares e quadráticas, se diferenciam daquelas predominantes nos livros didáticos brasileiros e quais implicações essas diferenças podem ter para a aprendizagem dos estudantes e para a prática pedagógica no Ensino Médio. Busca-se, assim, analisar como distintas concepções de ensino se materializam nos materiais curriculares e de que forma as escolhas didáticas influenciam a construção do pensamento matemático.

Como hipótese central, parte-se do pressuposto de que o material curricular de Xangai apresenta uma abordagem mais investigativa do ensino de funções, priorizando a construção gradual dos conceitos a partir de situações-problema, da exploração de regularidades e do uso articulado de múltiplas representações matemáticas, em consonância com perspectivas investigativas da Educação Matemática (ISODA; BALDIN, 2023). Supõe-se, ainda, que essa abordagem esteja associada a uma cultura profissional colaborativa, característica do contexto educacional chinês, materializada no funcionamento do *Teaching Research Group* (Grupo de Pesquisa em Ensino) (TRG), os quais influenciam tanto a elaboração dos materiais curriculares quanto o desenvolvimento profissional docente (WANG, 2020; PAINE; MA, 1993). Em contraposição, levanta-se a hipótese de que, no contexto brasileiro, embora os livros didáticos estejam formalmente alinhados às diretrizes curriculares, ainda predominem práticas de caráter mais expositivo e procedimental.

Para sustentar essa análise, torna-se imprescindível considerar os documentos oficiais que orientam a educação brasileira, em especial o Plano Nacional de Ensino (PNE) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os quais estabelecem as bases normativas para a organização curricular e para a definição das aprendizagens essenciais. No que se refere à BNCC, o PNE a define como:

> É um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (BRASIL, 2017).

Além disso, a Base Nacional Comum Curricular assume papel estruturante no sistema educacional brasileiro, uma vez que:

> Torna-se referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, e das propostas pedagógicas das instituições escolares (BRASIL, 2017).

À luz dessas orientações, o objetivo geral desta dissertação é analisar o ensino de funções lineares e quadráticas a partir de um material curricular utilizado em escolas de Xangai, estabelecendo uma comparação com os livros didáticos brasileiros aprovados pelo PNLD, articulando essa análise ao referencial teórico da Educação Matemática e às diretrizes curriculares expressas na BNCC. Como objetivos específicos, pretende-se contextualizar o desempenho da China em avaliações internacionais de Matemática; identificar semelhanças e diferenças entre as metodologias de ensino adotadas nos materiais analisados; examinar a coerência entre as propostas curriculares e os documentos oficiais; e refletir sobre possíveis contribuições do modelo chinês para o ensino de Matemática no Brasil.

Por fim, esta investigação justifica-se pela necessidade de promover uma reflexão qualificada sobre materiais curriculares e práticas pedagógicas, em consonância com a natureza profissional do PROFMAT. Ao articular o referencial teórico, a análise comparativa entre materiais didáticos e a discussão crítica dos resultados, busca-se contribuir para o aprimoramento da prática docente e para o fortalecimento de propostas de ensino mais investigativas e coerentes com os princípios formativos da Educação Matemática, dialogando diretamente com as análises desenvolvidas e com as considerações finais deste trabalho.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos, além desta Introdução. O primeiro capítulo apresenta o referencial teórico que fundamenta a pesquisa, abordando discussões sobre ensino de Matemática, desenvolvimento profissional docente, currículo e práticas colaborativas, com destaque para estudos relacionados ao contexto educacional chinês. O segundo capítulo descreve o contexto da pesquisa e os materiais curriculares analisados, explicitando as características do material utilizado em escolas de Xangai e dos livros didáticos brasileiros aprovados pelo PNLD, em especifico o livro da coleção Prisma de (BONJORNO; GIOVANNI; SOUSA, 2020). O terceiro capítulo dedica-se à análise comparativa das abordagens metodológicas adotadas no ensino de funções lineares e quadráticas nos dois contextos, à luz do referencial teórico e das diretrizes curriculares oficiais e aprofunda a discussão dos resultados, articulando as análises realizadas com as implicações pedagógicas para o ensino de Matemática no Ensino Médio. Por fim, o quarto capítulo apresenta as considerações finais, sintetizando os principais achados da pesquisa, apontando suas contribuições para a prática docente e indicando possíveis desdobramentos para estudos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A metodologia de ensino é um ponto fundamental para o sucesso de qualquer instituição ou sistema de ensino, portanto compreender seus pontos positivos e negativos é imprescindível para entender seu sucesso.

Dessa forma, para compreender a expressiva elevação dos índices de aprendizagem em Matemática na China Continental, torna-se necessário iniciar a análise a partir de seu modelo de ensino, considerando tanto os documentos curriculares nacionais quanto os materiais didático-pedagógicos utilizados na prática escolar. Neste estudo, adota-se como recorte analítico o ensino de Funções no nível correspondente ao *Secondary School*, equivalente ao Ensino Médio no contexto brasileiro, por se tratar de um eixo estruturante da formação matemática e de um campo privilegiado para o desenvolvimento do pensamento algébrico, funcional e da modelagem matemática.

Para tanto, são utilizados, de forma articulada, os *Padrões Curriculares de Matemática da Educação Obrigatória da China* (2022), que estabelecem as diretrizes nacionais para a organização do ensino, e o documento *Curriculum Material for Secondary School*((FUNCTIONS, 202?; LINEAR FUNCTIONS, 202?; QUADRATIC FUNCTIONS, 202?)), elaborado no contexto de Xangai, o qual se situa em um nível intermediário entre um plano curricular orientador e um plano de aula detalhado. Enquanto o documento de 2022 define os princípios, objetivos e progressões conceituais do currículo chinês, o material de Xangai explicita como essas diretrizes são operacionalizadas em propostas didáticas concretas no ensino secundário (CHINA. Ministério da Educação, 2022)

2.1 Modelo de ensino em Xangai

A compreensão do modelo de ensino de Matemática na China exige considerar, de forma articulada, tanto os princípios curriculares oficiais quanto as estruturas institucionais que sustentam o desenvolvimento profissional docente. Nesse sentido, o documento *Padrões Curriculares de Matemática da Educação Obrigatória da China* (2022) concebe a Matemática como um componente estruturante da formação integral dos estudantes, atribuindo-lhe papel central no desenvolvimento do pensamento racional, da capacidade de abstração, da resolução de problemas e da compreensão científica da realidade. A Matemática é compreendida não apenas como um conjunto sistematizado de conhecimentos formais, mas como uma linguagem essencial para a interpretação, descrição e explicação de fenômenos naturais, sociais e tecnológicos, em articulação direta com as demandas contemporâneas da sociedade e com o avanço científico e tecnológico (CHINA. Ministério da Educação, 2022).

Essa concepção amplia o papel formativo do ensino de Matemática, que ultrapassa uma função meramente instrumental e passa a orientar-se para o desenvolvimento intelectual, cognitivo e cultural dos estudantes ao longo da educação obrigatória. No âmbito curricular, o documento enfatiza a centralidade do estudante como sujeito ativo do processo de aprendizagem, reconhecendo a existência de diferentes ritmos, trajetórias e formas de aprender Matemática. Em decorrência disso, defende-se a criação de condições pedagógicas que possibilitem o desenvolvimento pleno de todos os estudantes, por meio de objetivos curriculares orientados para a alfabetização matemática essencial, sustentados por conteúdos cientificamente estruturados e coerentes com a natureza abstrata, lógica e sistemática da Matemática (CHINA. Ministério da Educação, 2022).

A operacionalização desses princípios curriculares pressupõe um ensino estruturado a partir de atividades matemáticas significativas, tais como observação, experimentação, conjectura, verificação, argumentação, modelagem e comunicação. Essas atividades são concebidas como meios privilegiados para o desenvolvimento progressivo do pensamento matemático, da autonomia intelectual, da cooperação e do espírito investigativo. A avaliação, por sua vez, é entendida como parte integrante do processo educativo, assumindo caráter formativo e articulando-se às dimensões diagnóstica e somativa, com a finalidade de orientar o ensino, promover a aprendizagem e favorecer o desenvolvimento integral dos estudantes. Ademais, o documento destaca a importância da integração entre as tecnologias da informação e o currículo de Matemática, ampliando as possibilidades de visualização, modelagem e resolução de problemas em contextos reais (CHINA. Ministério da Educação, 2022).

Os objetivos do currículo são organizados em torno do conceito de *alfabetização matemática essencial* (*hexīn sùyǎng*, 核心素养), definido como um conjunto articulado de capacidades que envolve observar o mundo sob uma perspectiva matemática, pensar de forma racional e expressar ideias por meio da linguagem matemática. Essa concepção enfatiza o desenvolvimento integrado de conhecimentos, habilidades, modos de pensamento e atitudes, aproximando-se da noção de competências presente em currículos contemporâneos, como a Base Nacional Comum Curricular brasileira, e busca assegurar coerência interna, continuidade entre as etapas escolares e uma formação matemática consistente ao longo de toda a educação obrigatória (CHINA. Ministério da Educação, 2022).

A concretização desses objetivos curriculares está diretamente relacionada às condições de trabalho e às formas de organização do desenvolvimento profissional docente no contexto chinês. A literatura evidencia que a noção de expertise docente na China não se configura como um atributo estritamente individual, mas como uma construção social profundamente influenciada por fatores culturais, institucionais e organizacionais que estruturam o cotidiano escolar. Conforme analisa (YANG, 2014), a expertise docente é sustentada por uma cultura profissional colaborativa, materializada, sobretudo, no funcionamento dos *Teaching Research Group* (Grupo de Pesquisa em Ensino) (TRG).

No resumo de sua obra, Yang afirma que os professores especialistas demonstram a capacidade de "trabalhar inclusive contra certas restrições socioculturais" (p. 10), expressão que se refere a limites estruturais historicamente associados ao sistema educacional chinês. Entre esses limites, destacam-se a presença de classes numerosas, a forte orientação para exames de alto impacto e a predominância de práticas de ensino tradicionalmente centradas no professor, elementos que configuram um ambiente potencialmente desfavorável à inovação pedagógica. Soma-se a esse quadro a herança cultural confucionista[1], marcada por hierarquias institucionais, expectativas rígidas quanto ao papel docente e elevado controle administrativo, que impõem pressões adicionais ao exercício da docência.

Ainda assim, (YANG, 2014) destaca que os professores especialistas revelam a capacidade de atuar de modo flexível, reflexivo e colaborativo, desenvolvendo conhecimento profissional sofisticado mesmo dentro dessas limitações. Tal característica evidencia que a expertise docente emerge, sobretudo, da inserção do professor em estruturas coletivas que favorecem a reflexão sistemática sobre a prática, a pesquisa em sala de aula e a produção compartilhada de conhecimento pedagógico. Nesse sentido, os TRG desempenham papel central, ao organizarem a formação em serviço com base na observação sistemática de aulas, no estudo aprofundado dos materiais curriculares e na investigação da própria prática, criando condições institucionais para que os princípios curriculares oficiais se traduzam em práticas efetivas de ensino.

Além do domínio do conteúdo e das competências pedagógicas, a concepção chinesa de professor especialista envolve a compreensão do docente como pesquisador e como referência profissional para os colegas. Segundo (YANG, 2014), esses profissionais desempenham "múltiplos papéis, incluindo demonstrar expertise em ensino, conduzir pesquisas e orientar outros professores" (p. 9), característica que se articula diretamente à dinâmica dos TRG, nos quais docentes mais experientes lideram investigações didáticas, coordenam análises coletivas de aula e acompanham o desenvolvimento de professores iniciantes.

Essa centralidade da colaboração no desenvolvimento profissional docente já havia sido evidenciada no estudo clássico de (PAINE; MA, 1993), que descreve, ainda na década de 1990, o papel do *jiaoyanzu*, grupo formal de trabalho docente que pode ser compreendido como precursor dos TRG contemporâneos. As autoras analisam como esses grupos estruturam o planejamento, a reflexão coletiva e a circulação de saberes profissionais, demonstrando que o modelo chinês de desenvolvimento docente se fundamenta em práticas colaborativas profundamente enraizadas em tradições culturais e filosóficas, como a transmissão do *Dao*[2].

Ao articular os estudos de (PAINE; MA, 1993) e (YANG, 2014) com o documento curricular de 2022, evidencia-se que a política curricular chinesa, a cultura profissional docente e as estruturas colaborativas de formação constituem um sistema coerente e interdependente. As bases culturais e organizacionais do trabalho coletivo docente sustentam o desenvolvimento da expertise profissional, que, por sua vez, viabiliza a implementação efetiva dos princípios curriculares orientados para a alfabetização matemática essencial e para a formação integral dos estudantes

[1]O confucionismo é uma tradição filosófica e ética de origem chinesa, associada ao pensamento de Confúcio (551–479 a.C.), que valoriza a hierarquia, a disciplina, o respeito à autoridade e a harmonia social. No campo educacional, essa herança influencia a organização institucional e as expectativas sociais relacionadas ao papel do professor.

[2]O termo *Dao* ("Caminho") refere-se a um princípio ético das tradições filosóficas chinesas que orienta a ação humana; no contexto educacional, relaciona-se à formação moral e intelectual associada ao trabalho docente.

no modelo de ensino chinês.

A síntese dos conteúdos apresentada na Tabela 1 evidencia que o currículo chinês de Matemática, no campo de *Números e Álgebra*, é estruturado a partir de uma lógica progressiva e integrada, na qual expressões algébricas, equações, desigualdades, funções e modelagem matemática constituem um eixo formativo contínuo. Diferentemente de uma organização fragmentada por tópicos isolados, o documento curricular articula esses objetos de conhecimento em torno da compreensão de relações quantitativas, da análise de padrões de variação e da construção de modelos matemáticos, privilegiando a interpretação e a resolução de problemas em contextos reais por meio de múltiplos registros de representação, especialmente gráficos e expressões algébricas. Essa organização reforça a centralidade da modelagem matemática como princípio estruturante do ensino, ao mesmo tempo em que assegura rigor conceitual e coerência interna entre Álgebra e Funções, aproximando-se de abordagens curriculares orientadas por competências, como as adotadas na Base Nacional Comum Curricular brasileira, sem abrir mão de uma progressão conceitual sistemática ao longo da educação obrigatória (CHINA. Ministério da Educação, 2022).

Tabela 1 – Síntese dos descritores do campo *Números e Álgebra* no currículo chinês

EIXO	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES DE APRENDIZAGEM**
Números e Expressões	Números racionais, irracionais e reais	Compreender números racionais, irracionais e reais, reconhecendo sua correspondência com pontos na reta numérica e comparando suas magnitudes.
	Operações com números reais	Realizar operações com números reais, compreendendo números opostos, valor absoluto, potenciação e radiciação, bem como suas propriedades operatórias.
	Linguagem algébrica	Utilizar letras para representar números, relações quantitativas e padrões, reconhecendo o caráter geral das expressões algébricas.
	Expressões algébricas	Representar relações quantitativas por meio de expressões algébricas e substituir valores numéricos para efetuar cálculos.
	Expressões inteiras	Compreender expressões inteiras, combinar termos semelhantes, remover parênteses e realizar operações algébricas básicas.

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 1

EIXO	OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADES DE APRENDIZAGEM
	Fórmulas algébricas	Reconhecer o contexto geométrico de fórmulas algébricas e utilizá-las em cálculos e raciocínios simples.
	Fatoração algébrica	Realizar fatorações por fator comum e por fórmulas algébricas elementares, com expoentes inteiros positivos.
	Frações algébricas	Compreender frações algébricas, suas propriedades e realizar operações algébricas simples, respeitando a condição de denominador não nulo.
Equações e Desigualdades	Conceito de equação e desigualdade	Compreender equações e desigualdades como representações matemáticas de relações quantitativas em contextos reais.
	Formulação de equações	Formular equações e desigualdades a partir de problemas concretos e interpretar o significado de suas soluções.
	Propriedades operatórias	Dominar propriedades da igualdade e das desigualdades para transformar e resolver expressões algébricas.
	Equações lineares	Resolver equações lineares de uma variável e equações fracionárias redutíveis a equações lineares.
	Sistemas de equações	Resolver sistemas de equações lineares com duas variáveis, selecionando métodos adequados de resolução.
	Equações quadráticas	Resolver equações quadráticas de uma variável por diferentes métodos, analisando o discriminante e a relação entre raízes e coeficientes.
	Validação das soluções	Verificar a razoabilidade das soluções obtidas em função do contexto do problema.
Funções	Conceito de função	Compreender função como relação de dependência entre variáveis, identificando constantes e variáveis em contextos reais.

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 1

EIXO	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES DE APRENDIZAGEM**
	Representações de funções	Representar funções por registros numérico, algébrico e gráfico, interpretando o significado do valor da função.
	Análise de variação	Determinar domínio, analisar padrões de variação e interpretar tendências a partir de gráficos e tabelas.
	Função linear	Determinar expressões algébricas, interpretar o gráfico de $y = kx + b$ ($k \neq 0$), analisar o papel do coeficiente angular e resolver problemas práticos.
	Função quadrática	Analisar gráficos, relacionar coeficientes à forma do gráfico, identificar vértice, eixo de simetria e resolver problemas de máximo e mínimo.
	Função proporcional inversa	Compreender, representar graficamente e utilizar a função $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) na resolução de problemas práticos.
Modelagem Matemática	Aplicação de funções	Utilizar funções, equações e expressões algébricas para explicar padrões de mudança e relações quantitativas.

Fonte: Elaboração própria com base em (CHINA. Ministério da Educação, 2022).

2.2 Modelo de ensino no Brasil

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) constitui-se como documento normativo que explicita os direitos de aprendizagem e desenvolvimento de todos os estudantes da Educação Básica, organizando o currículo escolar em torno de um "conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2017). Prevista na Constituição Federal (CF) de 1988 (BRASIL, 1988), regulamentada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (Lei n. 9.394/1996) (BRASIL, 1996) e reafirmada pelo Plano Nacional de Ensino (PNE) (Lei n. 13.005/2014) (BRASIL, 2014), a BNCC integra a política nacional de Educação Básica e orienta a elaboração dos currículos dos sistemas e redes de ensino, tanto públicos quanto privados.

Do ponto de vista conceitual, a BNCC pauta-se por princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva (BRASIL, 2017). Isso implica reconhecer a diversidade dos sujeitos que frequentam a escola, enfrentar desigualdades históricas e assegurar condições para que todos aprendam, com "respeito às diferenças e enfrentamento à discriminação e ao preconceito" (BRASIL, 2017). Assim, a BNCC é apresentada como um instrumento de justiça social: o "direito de aprender" só se concretiza quando as singularidades dos estudantes são acolhidas e valorizadas.

No âmbito pedagógico, o eixo estruturante da BNCC é o desenvolvimento de competências. O documento define competência como a "mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2017). Essa definição rompe com uma visão reducionista de ensino centrada exclusivamente na transmissão de conteúdos, indicando a necessidade de articular o *saber*, o *saber fazer* e o *saber ser*.

As dez Competências Gerais da BNCC sintetizam a perspectiva formativa ampla que orienta toda a Educação Básica, articulando dimensões cognitivas, socioemocionais, éticas, estéticas e socioculturais. Elas expressam o compromisso da educação brasileira com a formação integral, democrática e inclusiva, e devem ser concretizadas nos currículos por meio das competências específicas de cada área do conhecimento e das habilidades associadas. De acordo com o documento oficial (BRASIL, 2017), as Competências Gerais da BNCC são:

1. **Conhecimento**: valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos para compreender e explicar a realidade, colaborando para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. **Pensamento científico, crítico e criativo**: exercitar a curiosidade intelectual e recorrer às abordagens próprias das ciências, investigando causas, elaborando e testando hipóteses, formulando e resolvendo problemas.

3. **Repertório cultural**: valorizar e fruir manifestações artísticas e culturais, reconhecendo e respeitando a diversidade cultural brasileira e mundial.

4. **Comunicação**: utilizar diferentes linguagens — verbal, corporal, visual, sonora e digital — para expressar ideias, interpretar e produzir sentidos em diferentes contextos.

5. **Cultura digital**: compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de forma crítica, significativa, reflexiva e ética, nas diversas práticas sociais.

6. **Trabalho e projeto de vida**: valorizar saberes e vivências culturais, compreendendo o mundo do trabalho e construindo projetos de vida com autonomia e responsabilidade.

7. **Argumentação**: recorrer a fatos, dados e informações confiáveis para formular, negociar e defender ideias e pontos de vista, respeitando os direitos humanos e promovendo a convivência ética e democrática.

8. **Autoconhecimento e autocuidado**: conhecer-se, apreciar-se e cuidar da saúde física e emocional, reconhecendo as próprias emoções e as dos outros.

9. **Empatia e cooperação**: exercitar empatia, diálogo, resolução de conflitos e cooperação, valorizando a pluralidade de indivíduos, grupos sociais e modos de vida.

10. **Responsabilidade e cidadania**: agir com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões baseadas em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Essas competências constituem o marco orientador que deve se desdobrar nas competências específicas de cada área, incluindo aquelas da Matemática para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, orientando o desenvolvimento do pensamento algébrico e, particularmente, do estudo das funções, foco desta pesquisa.

No que se refere à Matemática, a BNCC indica que o desenvolvimento das competências dessa área no Ensino Médio deve articular-se ao princípio da formação integral, contemplando dimensões cognitivas, tecnológicas, éticas, culturais e sociais. A Matemática é compreendida como área fundamental para o exercício da cidadania, para a leitura crítica da realidade e para a participação ativa dos jovens na sociedade contemporânea. Ao mesmo tempo, o documento reconhece que muitos estudantes chegam ao Ensino Médio com lacunas de escolarização, o que torna imprescindível planejar ações sistemáticas de consolidação e aprofundamento das aprendizagens iniciadas no Ensino Fundamental.

A BNCC explicita, ainda, quatro pares de ideias fundamentais que orientam o pensamento matemático: variação e constância; certeza e incerteza; movimento e posição; e relações e inter-relações (BRASIL, 2017). Esses pares constituem um quadro conceitual articulador entre os diferentes campos da Matemática (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) e oferecem um referencial potente para o ensino de funções. A ideia de variação e constância, por exemplo, está diretamente associada à análise de dependência entre grandezas e à construção do conceito de função, ao passo que as ideias de certeza e incerteza, movimento e posição e relações e inter-relações permitem conectar funções à leitura de dados, à interpretação de gráficos e à modelagem de fenômenos físicos, sociais e econômicos.

A unidade da Matemática, destacada pela BNCC, decorre justamente dessa articulação: embora as práticas matemáticas tenham se desenvolvido de maneiras diversas ao longo da história, as estruturas conceituais que sustentam a disciplina permitem explicar fenômenos, construir modelos, argumentar e tomar decisões fundamentadas. Nesse sentido, o documento insiste em que o ensino deve promover o letramento matemático, entendido como a capacidade de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, utilizando conceitos e procedimentos para investigar situações, resolver problemas e justificar conclusões.

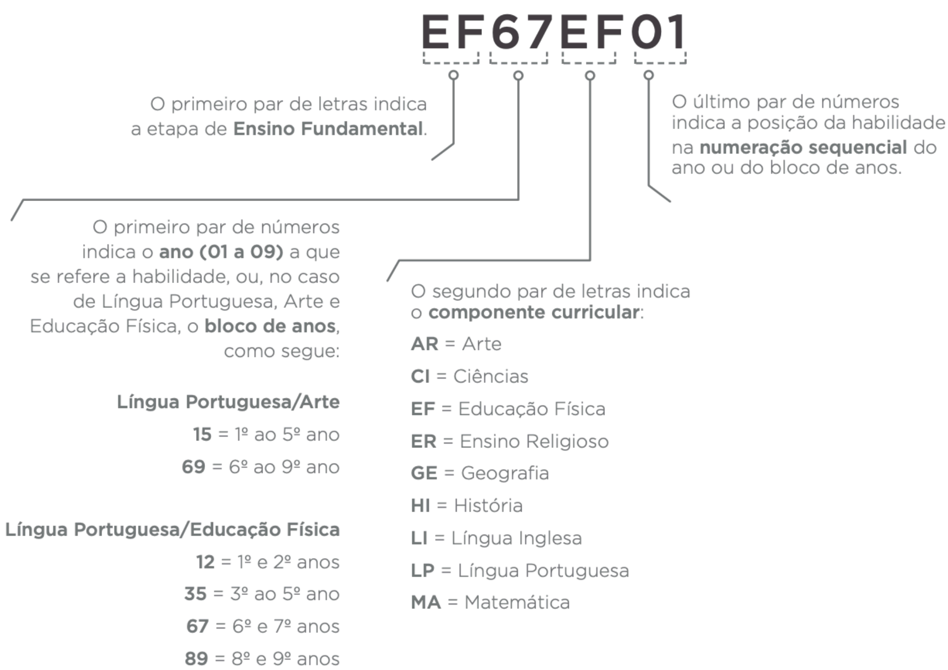
No Ensino Médio, as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias detalham esse compromisso. Entre elas, destacam-se: utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diferentes contextos; articular conhecimentos matemáticos na investigação de problemas contemporâneos; interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos campos da Matemática; mobilizar diferentes registros de representação (algébrico, geométrico, estatístico, computacional) na resolução e comunicação de problemas; e investigar padrões e estabelecer conjecturas, com apoio de tecnologias digitais, avançando progressivamente em direção a demonstrações formais (BRASIL, 2017).

A partir desses fundamentos, a BNCC organiza as aprendizagens de Matemática em competências específicas e habilidades, que, por sua vez, são distribuídas ao longo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. No caso desta pesquisa, interessam especialmente aquelas habilidades relacionadas ao pensamento algébrico e ao estudo das funções, tanto no final do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, etapa em que o conceito de função se torna eixo estruturante da Matemática escolar.

2.2.1 Ensino Fundamental

No Ensino Fundamental, a BNCC apresenta as aprendizagens de Matemática em termos de unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades. Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico que indica a etapa de escolaridade, o componente curricular e a posição dessa habilidade em uma sequência. Esse sistema de codificação permite organizar o currículo de modo mais transparente e favorece a leitura das relações entre anos de escolaridade, conteúdos e competências associadas (BRASIL, 2017).

Figura 1 – Estruturação e Codificação das Habilidades na BNCC para o Ensino Fundamental



Fonte: (BRASIL, 2017)

A partir dessa estrutura, a BNCC explicita habilidades que, progressivamente, constroem o pensamento algébrico necessário ao estudo das funções. No 7º ano, por exemplo, a habilidade **EF07MA13** propõe que os estudantes compreendam a ideia de variável, representada por letras ou símbolos, para expressar relações entre grandezas, distinguindo-a da noção de incógnita. Já as habilidades **EF07MA14** e **EF07MA15** incentivam a análise de sequências e a utilização de simbologia algébrica para expressar regularidades, aproximando o estudante da linguagem funcional.

No 8º ano, as habilidades **EF08MA10** e **EF08MA11** aprofundam o estudo de sequências recursivas e não recursivas, incluindo a construção de algoritmos e fluxogramas, o que contribui para o desenvolvimento de um pensamento mais estruturado e próximo da lógica computacional. As habilidades **EF08MA12** e **EF08MA13** abordam explicitamente a variação de grandezas diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, propondo que os estudantes expressem essas relações por meio de sentenças algébricas e representações no plano cartesiano.

No 9º ano, a habilidade **EF09MA06** introduz formalmente o conceito de função como relação de dependência unívoca entre duas variáveis, envolvendo representações numéricas, algébricas e gráficas. Essa habilidade é particularmente importante para esta pesquisa, pois constitui o elo entre o trabalho com padrões e variações desenvolvido nos anos anteriores e o estudo sistemático de funções polinomiais no Ensino Médio.

As habilidades selecionadas para compor o recorte desta dissertação encontram-se sintetizadas na tabela a seguir, organizada por série, unidade temática, objeto de conhecimento e código da habilidade, facilitando a visualização da progressão proposta pela BNCC para o desenvolvimento do pensamento algébrico e funcional no Ensino Fundamental.

Tabela 2 – Habilidades BNCC Ensino Fundamental

SÉRIE	**UNIDADE TEMÁTICA**	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADE**
7º ANO	**ÁLGEBRA**	Linguagem algébrica: variável e incógnita	**EF07MA13** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
		Linguagem algébrica: variável e incógnita	**EF07MA14** Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

Continua na próxima página

Continuação da tabela 3

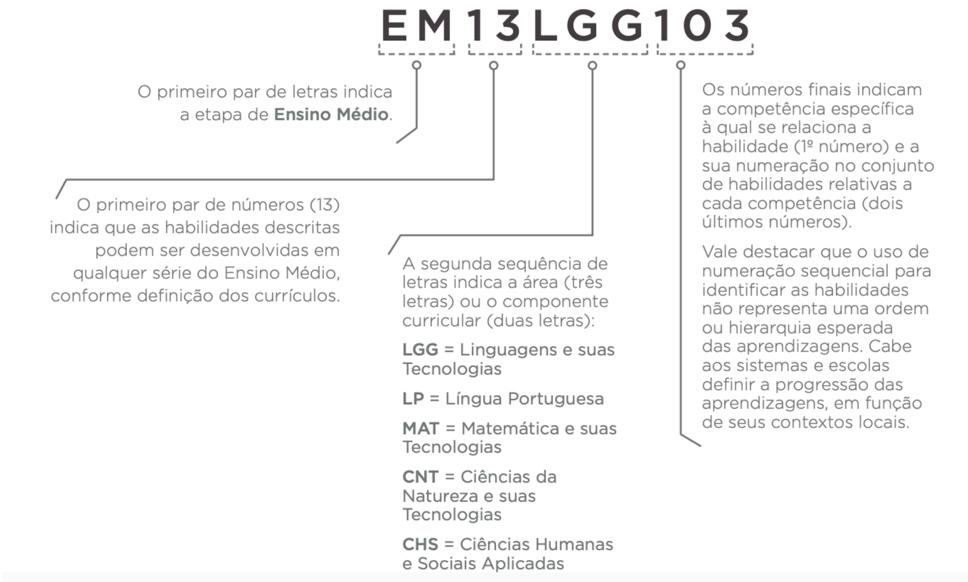
SÉRIE	UNIDADE TEMÁTICA	OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADE
		Linguagem algébrica: variável e incógnita	**EF07MA15** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
8º ANO	**ÁLGEBRA**	Sequências recursivas e não recursivas	**EF08MA10** Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
		Sequências recursivas e não recursivas	**EF08MA11** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
		Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	**EF08MA12** Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
		Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	**EF08MA13** Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
9º ANO	**ÁLGEBRA**	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	**EF09MA06**Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Fonte: Elaborado pelo autor com base em (BRASIL, 2017).

2.2.2 Ensino Médio

No Ensino Médio, a BNCC mantém o sistema de codificação das habilidades, agora iniciando com as letras “EM”, seguidas da indicação da etapa (13), da área ou componente curricular e, por fim, de números que identificam a competência específica e a posição da habilidade no conjunto dessa competência (BRASIL, 2017). Esse padrão permite reconhecer, por exemplo, que o código EM13MAT302 se refere a uma habilidade de Matemática e suas Tecnologias (MAT), relativa à competência específica 3 e ao segundo item de sua listagem.

Figura 2 – Estruturação e Codificação das Habilidades na BNCC para o Ensino Médio



Fonte: (BRASIL, 2017)

No que se refere ao estudo das funções, a BNCC distribui habilidades em diferentes competências específicas de Matemática e suas Tecnologias. No âmbito da competência 1, a habilidade **EM13MAT101** prevê que os estudantes interpretem criticamente situações econômicas, sociais e fatos das Ciências da Natureza que envolvam variação de grandezas, por meio da análise de gráficos de funções e de taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. Trata-se de uma habilidade que aproxima o conceito de função dos contextos de leitura crítica de dados e de fenômenos reais.

A competência 3, ao enfatizar a construção de modelos e a resolução de problemas, inclui habilidades diretamente voltadas ao estudo de funções polinomiais, exponenciais e logarítmicas, como **EM13MAT302**, que propõe a construção de modelos empregando funções polinomiais de 1º ou 2º graus; **EM13MAT304** e **EM13MAT305**, que tratam de funções exponenciais e logarítmicas em contextos como a Matemática Financeira, abalos sísmicos ou radioatividade; e **EM13MAT306**, que aborda fenômenos periódicos modelados por funções trigonométricas. Essas habilidades evidenciam a centralidade do conceito de função como ferramenta de modelagem em diferentes campos de aplicação.

A competência 4 enfatiza o uso flexível de diferentes registros de representação. Nessa perspectiva, habilidades como **EM13MAT401** e **EM13MAT402** lidam com a conversão entre representações algébricas e geométricas de funções polinomiais de 1º e 2º graus; **EM13MAT403** explora as representações de funções exponenciais e logarítmicas em tabelas e gráficos; e **EM13MAT404** analisa funções definidas por sentenças por partes em situações como tarifas de serviços públicos, articulando domínios, imagens, crescimento e decrescimento.

Por fim, a competência 5 valoriza a investigação e a formulação de conjecturas. Nela se destacam habilidades como **EM13MAT501** e **EM13MAT502**, que propõem a investigação de padrões em tabelas e sua representação no plano cartesiano, reconhecendo quando tais relações correspondem a funções polinomiais de 1º ou 2º graus; **EM13MAT503**, que aborda o estudo de pontos de máximo e mínimo de funções quadráticas em contextos variados; e **EM13MAT507**, que relaciona progressões aritméticas a funções afins em domínios discretos. Em todas essas habilidades, o uso de tecnologias digitais é entendido como recurso privilegiado para experimentação, visualização e validação de conjecturas.

As habilidades selecionadas para esta pesquisa, organizadas de acordo com as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias, estão sistematizadas na tabela a seguir. Essa sistematização permite visualizar como a BNCC distribui, ao longo do Ensino Médio, diferentes aspectos do estudo de funções: interpretação de gráficos, modelagem de situações reais, conversão entre registros de representação e investigação de padrões.

Tabela 3 – Habilidades BNCC Ensino Médio

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA	**HABILIDADE**
1 - Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	**EM13MAT101** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
3 - Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	**EM13MAT301**dfe Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
	EM13MAT302 Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Continua na próxima página

Continuação da tabela 3

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA	HABILIDADE
	EM13MAT304 Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
	EM13MAT305 Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
	EM13MAT306 Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
4 - Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	**EM13MAT401** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
	EM13MAT402 Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
	EM13MAT403 Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

Continua na próxima página

Continuação da tabela 3

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA	HABILIDADE
	EM13MAT404 Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
5 - Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	**EM13MAT501** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
	EM13MAT502 Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
	EM13MAT503 Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
	EM13MAT506 Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
	EM13MAT507 Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Continua na próxima página

Continuação da tabela 3

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA	**HABILIDADE**
	EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
	EM13MAT510 Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Fonte: Elaborado pelo autor com base em (BRASIL, 2017).

A Tabela 3 sistematiza as competências e habilidades da BNCC relacionadas ao estudo de funções no Ensino Médio, evidenciando a organização do currículo em torno do desenvolvimento de processos cognitivos associados a conteúdos matemáticos específicos. Nesse contexto, as habilidades configuram-se como saberes em ação, isto é, expressam aquilo que o estudante deve ser capaz de mobilizar em situações diversas, articulando conceitos, procedimentos e formas de representação. Tal perspectiva pode ser observada em habilidades como EM13MAT104 e EM13MAT401, nas quais se destacam a análise de funções em diferentes registros e a conversão entre representações algébricas e geométricas, aspectos fundamentais para a constituição do pensamento funcional e para a compreensão das relações de dependência entre grandezas.

Com base nessa organização curricular, os descritores do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) podem ser compreendidos como desdobramentos dessas habilidades no âmbito da avaliação em larga escala, uma vez que operam como elementos de operacionalização que tornam tais aprendizagens mensuráveis. Assim, enquanto as habilidades expressam os objetivos de aprendizagem a serem desenvolvidos ao longo da formação, os descritores explicitam as evidências esperadas desse desenvolvimento em situações avaliativas. No campo das funções, essa articulação se manifesta, sobretudo, em descritores que priorizam a interpretação de gráficos, a análise de tabelas e a modelagem algébrica, como H20, H21 e H22, os quais demandam do estudante a mobilização integrada de conhecimentos e processos cognitivos. Desse modo, observa-se a constituição de um sistema coerente, no qual a estrutura proposta pela BNCC orienta e fundamenta as demandas avaliativas do ENEM, promovendo a integração entre formação conceitual e aplicação em contextos práticos.

Tabela 4 – Habilidades da BNCC e descritores do ENEM associados ao estudo de funções

Habilidade BNCC e Código	**Descrição da Habilidade**	**Descritores ENEM Associados**	**O que se avalia**
		Funções (conceito geral)	
EM13MAT104	Explorar características de funções em diferentes representações	**H20**, **H24**, **H25**	Interpretação de gráficos cartesianos; utilização de informações em gráficos e tabelas para inferências; resolução de problemas com dados em tabelas e gráficos.
EM13MAT105	Identificar padrões em tabelas e construir funções	**H2**, H24, H25	Identificação de padrões numéricos; utilização de informações em gráficos e tabelas para inferências; resolução de problemas com dados.
EM13MAT115	Classificar funções a partir de padrões em dados	H2, H24, H25	Identificação de padrões; inferências a partir de dados; resolução de problemas com dados.
EM13MAT401	Converter entre representações algébricas e geométricas	H20, **H21**, **H22**	Interpretação de gráficos cartesianos; resolução de problemas com modelagem algébrica; utilização de conhecimentos algébricos para argumentação.
EM13MAT402	Trabalhar com múltiplas representações de funções	H20, H21	Interpretação de gráficos; resolução de problemas com modelagem algébrica.
EM13MAT403	Explorar transformações de funções	H20, H21	Interpretação de gráficos; resolução de problemas com modelagem.
EM13MAT404	Analisar funções por partes	H20, H21	Interpretação de gráficos; resolução de problemas com modelagem.
EM13MAT501	Investigar padrões em sequências	H2, H24, H25	Identificação de padrões; inferências a partir de dados; resolução de problemas.
EM13MAT502	Identificar funções a partir de dados tabulares	H2, H24, H25	Identificação de padrões; inferências; resolução de problemas.

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 4

Habilidade BNCC e Código	**Descrição da Habilidade**	**Descritores ENEM Associados**	**O que se avalia**
		Função linear	
EM13MAT101	Resolver sistemas de equações lineares	**H1**, **H3**, **H19**, H21, H22	Reconhecimento de significados de números e operações; resolução de problemas numéricos; identificação de representações algébricas; resolução de problemas com modelagem algébrica; utilização de conhecimentos algébricos para argumentação.
EM13MAT102	Construir modelos lineares	**H15**, **H16**, **H17**, H19, H20	Identificação de relações de dependência; resolução de problemas com variação de grandezas; análise de informações sobre variação; identificação de representações algébricas; interpretação de gráficos.
EM13MAT103	Resolver problemas com proporcionalidade	H1, H3, H15, H16, H17	Reconhecimento de significados; resolução de problemas; identificação de relações de dependência; resolução com variação de grandezas; análise de variação.
EM13MAT110	Analisar características de funções lineares	H20, H21, H22	Interpretação de gráficos; resolução de problemas com modelagem; utilização de conhecimentos algébricos para argumentação.
EM13MAT111	Resolver equações lineares	H3, H21, H22	Resolução de problemas numéricos; resolução de problemas com modelagem; utilização de conhecimentos algébricos para argumentação.

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 4

Habilidade BNCC e Código	**Descrição da Habilidade**	**Descritores ENEM Associados**	**O que se avalia**
EM13MAT113	Trabalhar com proporcionalidade inversa	H15, H16, H21	Identificação de relações de dependência; resolução com variação de grandezas; resolução com modelagem.
EM13MAT504	Investigar características de funções lineares	H20, H21, H22	Interpretação de gráficos; resolução com modelagem; utilização de conhecimentos algébricos.
EM13MAT505	Resolver sistemas lineares	H3, H19, H21, H22	Resolução de problemas; identificação de representações algébricas; resolução com modelagem; utilização de conhecimentos algébricos.
		Função quadrática	
EM13MAT106	Identificar características de funções quadráticas	H20, H21, H22	Interpretação de gráficos; resolução com modelagem; utilização de conhecimentos algébricos para argumentação.
EM13MAT110	Analisar características de funções quadráticas	H20, H21, H22	Interpretação de gráficos; resolução com modelagem; utilização de conhecimentos algébricos.
EM13MAT111	Resolver equações quadráticas	H3, H21, H22	Resolução de problemas; resolução com modelagem; utilização de conhecimentos algébricos.
EM13MAT401	Converter representações de funções quadráticas	H20, H21, H22	Interpretação de gráficos; resolução com modelagem; utilização de conhecimentos algébricos.
EM13MAT402	Trabalhar com múltiplas representações quadráticas	H20, H21	Interpretação de gráficos; resolução com modelagem.
EM13MAT403	Explorar transformações de funções quadráticas	H20, H21	Interpretação de gráficos; resolução com modelagem.
EM13MAT503	Investigar máximos e mínimos de funções quadráticas	H20, H21, H22	Interpretação de gráficos; resolução com modelagem; utilização de conhecimentos algébricos.

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 4

Habilidade BNCC e Código	**Descrição da Habilidade**	**Descritores ENEM Associados**	**O que se avalia**
EM13MAT504	Investigar características de funções quadráticas	H20, H21, H22	Interpretação de gráficos; resolução com modelagem; utilização de conhecimentos algébricos.

Fonte: Adaptado pelo autor com base em (BRASIL, 2017) e na matriz de referência do ENEM.

3 Funções

3.1 Noções Iniciais de Funções

O conceito de função pode ser considerado um dos pilares fundamentais da matemática, sendo essencial para a compreensão de fenômenos que envolvem relações entre grandezas variáveis. A formalização desse conceito permite a modelagem de diversas situações que vivenciamos no cotidiano, como o cálculo do custo de uma corrida de táxi, e é amplamente utilizada nas ciências naturais, como para se obter a relação entre a temperatura e a pressão de um gás, ou mesmo realizar a previsão de crescimento populacional. Por sua relevância, o ensino de funções é introduzido já nos anos finais do ensino fundamental e aprofundado ao longo do ensino médio, preparando os alunos para estudos mais avançados em diversas áreas do conhecimento.

É notório que a maneira como as noções iniciais de funções são abordadas nos materiais didáticos reflete as concepções pedagógicas e os objetivos curriculares de cada sistema educacional. Enquanto algumas abordagens enfatizam o desenvolvimento intuitivo do conceito, permitindo que os alunos construam gradualmente a ideia de função a partir da análise de padrões e relações entre variáveis, outras apresentam definições formais desde o início, estruturando o aprendizado com base em exemplos e exercícios práticos.

Neste capítulo, analisaremos duas abordagens distintas para o ensino de funções: o material curricular de Xangai, China, e o material didático utilizado no Brasil no âmbito do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). O material brasileiro segue as diretrizes da BNCC, estruturando o ensino de funções dentro de um contexto mais amplo de conteúdos matemáticos e explorando aplicações práticas para facilitar a compreensão dos alunos, enquanto o material de Xangai, China, utiliza mais exemplos práticos e uma construção mais intuitiva do conhecimento antes das apresentações formais.

Ao realizarmos uma análise comparativa entre essas abordagens, poderemos identificar semelhanças e diferenças na forma como o conceito de função é introduzido aos estudantes. Buscaremos compreender como cada material favorece o desenvolvimento da intuição matemática, o pensamento crítico e a capacidade de abstração, além de avaliar de que maneira os exemplos utilizados contribuem para a aprendizagem dos alunos.

3.1.1 Material Curricular de Xangai

3.1.1.1 O conceito de Função

Ao analisar o documento de Xangai,China, foi possível notar que as noções iniciais de funções são trabalhadas na seriação anterior ao *Secondary School*,o equivalente ao Ensino Médio brasileiro. Conceitos como incógnitas e variáveis já são considerados como familiares para os alunos.

1. Questões Iniciais

Questão 1: Quais funções específicas você aprendeu no ensino fundamental? Quais são os conceitos de funções aprendidos no ensino fundamental?

Resposta: Função diretamente proporcional, função inversamente proporcional, função linear e funções quadráticas.

Questão 2: Qual é o conceito de função aprendido no ensino fundamental?

Resposta: Em um processo de mudança, existem duas variáveis, x e y. Se dentro do intervalo permitido da variável x, a variável y muda conforme a mudança de x e há uma dependência definida entre elas, então a variável y é chamada de função da variável x, e x é chamada de variável independente.

Provocando Confusão

Logo em seguida, é apresentada a seguinte questão, a qual será retomada posteriormente no capítulo.

Questão 3: Isso é uma função?

$$y = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ for um número racional} \\ 1, & \text{se } x \text{ for um número irracional} \end{cases}$$

2. Formação de Conceitos

Além disso, no documento chinês, são apresentados vários exemplos para que o aluno construa o conceito de função, em que se utilizam situações do dia a dia para que sejam criadas associações. Seguem os dois primeiros exemplos utilizados nesse material:

Exemplos do material curricular de Xangai, China

Exemplo 1:

A escola quer construir um jardim de flores retangular com um perímetro de 100m. Se o comprimento de um dos lados do retângulo for x metros, qual é a área y do retângulo?

Pense e discuta:

(1) A área é uma função dos comprimentos dos lados?

(2) Expresse o intervalo das duas variáveis em termos de conjuntos.

(3) Qual é a correspondência entre os elementos desses dois conjuntos?

Solução:

(1) A área y é uma função dos comprimentos dos lados x.

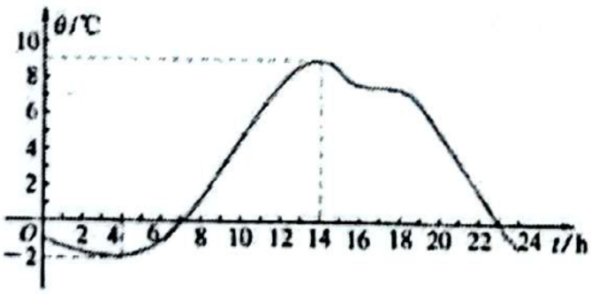
(2)

$$\{x \mid 0 < x < 50\}, \quad \{y \mid 0 < y \leq 625\}$$

(3) Cada x no intervalo de valores permitidos de x tem um y unicamente determinado correspondente a ele.

Exemplo 2: Observe o gráfico da variação da temperatura ao longo de um dia.

Figura 3 – Variação da Temperatura



Fonte: Material Curricular de Xangai

Pense e discuta:

(1) A temperatura θ é uma função do tempo t?

(2) Assim como no exemplo 1, descreva a correspondência entre temperatura e tempo.

Solução:

(1) A temperatura θ é uma função do tempo t.

(2) $\{t \mid 0 \leq t \leq 24\}$; $\{\theta \mid -2 \leq \theta \leq 10\}$

Cada valor de t no intervalo permitido tem um valor de θ correspondente e determinado de forma única.

3. Explorando novos conhecimentos e generalizando

Após os primeiros exemplos apresentados como uma motivação para que se possa explorar novos conhecimentos e generalizar o que foi observado, o documento orienta para que os alunos comparem e analisem os exemplos, no intuito de que observem quais são as semelhanças e diferenças entre eles, a fim de que os alunos possam concluir que eles demonstram a relação entre duas variáveis, e façam uma conexão entre essas variáveis e a linguagem de conjuntos.

Dentre as semelhanças, deve-se perceber que há duas variáveis com uma dependência definida, ou seja, uma variável é função da outra variável. A principal diferença entre os exemplos é a forma de representar o problema, enquanto o exemplo 1 expressa a relação funcional entre duas variáveis de forma analítica, o exemplo 2 expressa a relação funcional entre duas variáveis em uma imagem, descrevendo a variação da temperatura por uma análise de um gráfico. A utilização dos dois exemplos permite demonstrar a grande variação de questões em que pode-se utilizar funções como método de resolução.

4. O conceito de função

Em seguida, é apresentado o conceito de funções:

Definição de Função

Em um determinado processo de mudança, existem duas variáveis x e y. Se, para cada valor determinado em um certo conjunto D de números reais para x, de acordo com uma certa **regra de correspondência** f**,** houver um único valor real correspondente determinado para y, então y é uma **função** de x, denotada por $y = f(x)$, com $x \in D$. Dizemos que x é **variável independente**, e y é a **variável dependente**. O intervalo de valores de x é chamado de **domínio** da função, e o valor y correspondente ao valor de x é chamado de valor da função. O conjunto dos valores da função é chamado de **imagem** da função.

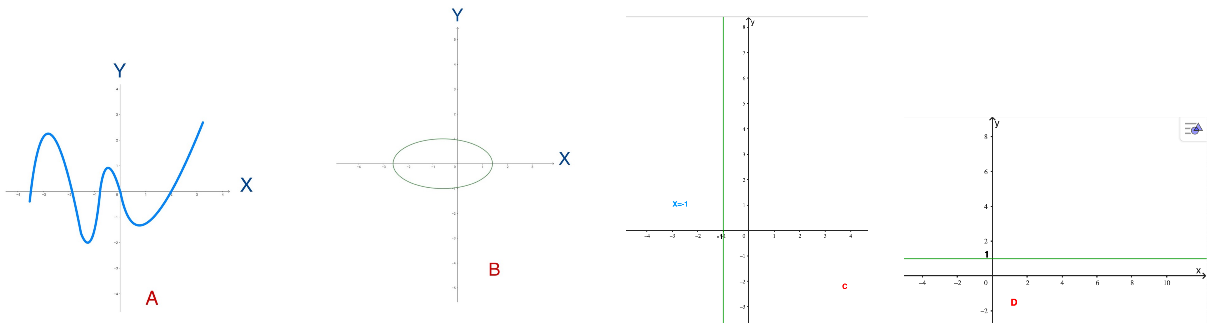
5. Questionando e identificando conceitos

Depois da definição, o material apresenta alguns questionamentos e reflexões para identificar a compreensão e fixação dos novos conceitos apresentados.

Questão 1. Quais são as palavras-chave no conceito de função? **Solução:** Para cada valor definido x de um conjunto D de números reais, existe apenas um valor definido y correspondente, segundo alguma lei de correspondência f.

Questão de análise 1: Qual das opções a seguir pode ser usada como a imagem da frase "y é função de x"?

Figura 4 – Identificando gráficos de funções



Fonte: Elaborado pelo autor.

Solução:

- Na opção **A**, para cada valor definido da variável independente x no domínio, existe um único valor real correspondente de y, portanto, y é uma **função de** x.
- Na opção **B**, para cada valor definido da variável independente x no domínio, além dos valores máximo e mínimo de x, existem **dois valores reais distintos correspondentes** para y, então y **não é uma função de** x.
- Na opção **C**, para a variável independente $x = -1$, existem **inúmeros valores reais correspondentes** para y, portanto, y **não é uma função de** x.

- Na opção **D**, para cada valor definido da variável independente x no domínio, há um único valor real definido **igual a 1** correspondente a ele, então y **é uma função de** x. Essa função é chamada de **função de valor constante**.

Questão de análise 2:
Pense e discuta:

(1) m é função de t?

(2) t é função de m?

Tabela 5 – Valores de t e m

t	1	2	3	4	5
m	5	8	7	13	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Solução:

(1) Para a variável independente $t = 5$, não há valor real definido de m correspondente a ela, portanto, m não é função de t.

(2) Para a variável independente m, existe um único valor real t correspondente a ela. Assim, t é uma função de m.

Após essa explicação, é proposto resolver a Questão 3, que foi passada anteriormente, utilizando o conceito de funções aprendidas. Dessa forma, com a resolução acaba definindo-se um novo tipo de função, a função definida por partes.

Definição - Funçao definida por partes

Questão 3: Isso é uma função?

$$y = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ for um número racional} \\ 1, & \text{se } x \text{ for um número irracional} \end{cases}$$

Solução da Questão 3

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ for irracional,} \\ 0, & \text{se } x \text{ for racional.} \end{cases}$$

Temos que $y = f(x)$ É uma função. De fato, para cada valor definido da variável independente x no domínio, existe um valor real único y correspondente a ele. Portanto, y é uma função de x. Quando uma função pode ser representada por uma análise segmentada, chamamos essa função de **função definida por partes**.

6. Problemas de exemplo para consolidar e aprofundar a compreensão

Finalizando, são apresentadas algumas questões para que os alunos resolvam:

Questões do material curricular de Xangai

Exemplo 1: Encontre o domínio da função.

A função dada é:

$$f(x) = \sqrt{4-x} + \frac{1}{x+1} - (x-3)^0$$

Para determinar o domínio da função, analisamos as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases}$$

Resolvendo:

$$x \leq 4, \quad x \neq -1, \quad x \neq 3$$

Assim, o domínio da função é:

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, 4]$$

Exemplo 2: Questão Aberta

O domínio da função é definido como:

$$A = [0, 1]$$

e os valores correspondentes pertencem ao conjunto:

$$B = [0, 1]$$

Qual a lei de formação da função?

Solução: A resposta não é única. Por exemplo, podemos ter:

$$f(x) = x, \quad x \in [0, 1]$$

ou

$$f(x) = 1 - x, \quad x \in [0, 1]$$

ou ainda

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1, \quad x \in [0, 1]$$

Logo em seguida aos problemas apresentados, é iniciado o estudo da paridade de funções.

3.1.1.2 Paridade de Funções

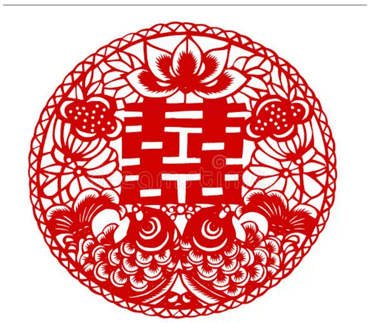
1. Questões Iniciais

Primeiramente, são apresentadas algumas imagens semelhantes às inseridas a seguir, onde é pedido para os alunos observarem o que podem ver nas imagens.

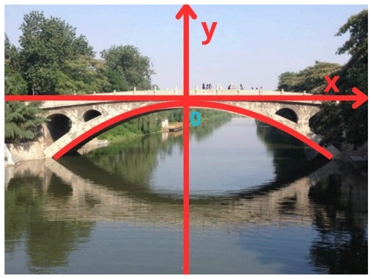
Figura 5 – Imagens com Simetria

(a) Carpas

(b) Catavento



(c) Ideograma



(d) Ponte

Fonte: Elaborado pelo autor.

Solução:

Espera-se que os alunos percebam que essas imagens têm uma característica comum: simetria. Algumas delas são gráficos com simetria em relação aos eixos, e outras são figuras com simetria em relação ao centro (origem), ao posicionar um plano cartesiano na figura, conforme a figura d.

São feitas, então, as seguintes questões:

(1) **Como julgar se a imagem da função é simétrica em relação ao eixo y ?**

(2) **Sob quais condições a relação entre a variável independente e o valor da função faz com que a imagem da função tenha a característica de ser simétrica em relação ao eixo y ?**

Essas questões são feitas para levar o aluno a refletir sobre os casos de simetria, onde no material é descrito que espera-se que o aluno chegue às seguintes conclusões:

(1) Quando uma figura é simétrica em relação a uma linha reta, isso significa que, para qualquer ponto na figura, o ponto simétrico em relação à linha também está presente nessa figura.

(2) Uma imagem de função é simétrica em relação ao eixo y quando, para qualquer ponto na imagem, o ponto simétrico em relação ao eixo y também está na imagem.

Questão 3 Se a imagem da função for simétrica em relação ao eixo y, como a relação correspondente entre a variável independente e o valor da função reflete essa característica?

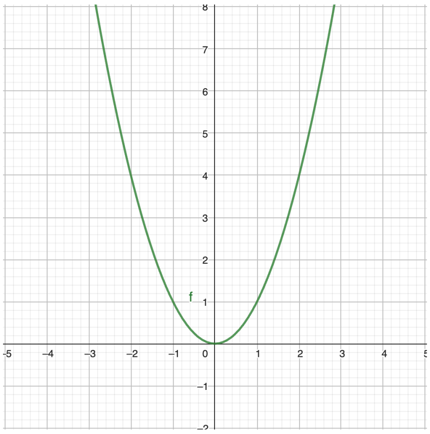
Solução:

Podemos assumir que a imagem da função é simétrica em relação ao eixo y inicialmente, encontrando a relação relevante entre sua variável independente correspondente e o valor da função.

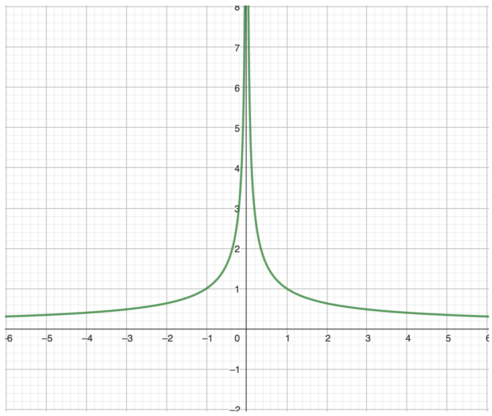
2. Observe a imagem das funções $y = x^2$ e $y = x^{\frac{-2}{3}}$, reflita sobre as características da imagem e calcule os valores da função em uma tabela.

São apresentados os dois gráficos, e pede-se aos alunos que relacionem os valores das variáveis y e x em uma tabela.

Figura 6 – Imagens com simetria em relação ao eixo y



(a) $y = x^2$



(b) $y = x^{-\frac{2}{3}}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

As tabelas a seguir podem ser elaboradas pelos alunos:

Tabela 6 – Tabela de Valores das Variáveis x e y para $y = x^2$

x	-2	-1	1	2	…	$-x_o$	x_o
$y = x^2$	4	1	1	4	…	x_o^2	x_o^2

Tabela 7 – Tabela de Valores das Variáveis x e y para $y = x^{-\frac{2}{3}}$

x	-2	-1	1	2	$\dots$	$-x_0$	x_0
$y = x^{-\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	1	1	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$\dots$	$x_0^{-\frac{2}{3}}$	$x_0^{-\frac{2}{3}}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

3. Encontre a Forma Equivalente da Imagem da Função com Simetria em Relação ao Eixo y

De acordo com os dados, os valores das variáveis independentes são opostos entre si, mas os valores da função são iguais. Portanto, para a função $y = f(x)$, com $x \in D$, se a imagem da função é simétrica em relação ao eixo y, sempre existe $-x \in D$ e $f(-x) = f(x)$.

Logo, podemos tomar qualquer ponto $P(x_1, y_1)$,com x_1 pertencente ao domínio D da função $f(x)$, então, existirá $y_1 = f(x_1)$, e podemos obter o ponto Q, que é o ponto simétrico de P em relação ao eixo y. Portanto, $-x_1$ pertence a D. Dessa forma, a linha reta PQ é perpendicular ao eixo y, e a distância do ponto P ao ponto Q em relação ao eixo y é igual.

À partir disso, sabemos que $y_1 = f(-x_1)$. Então, obtemos $f(x_1) = f(-x_1)$, o que significa que, para qualquer $x \in D$, sempre existe $-x \in D$, e $f(x) = f(-x)$.

4. A definição de Função Par

Por fim, é apresentada a definição formal da função par, e mais 2 problemas a serem trabalhados.

Definição - Função Par

Seja $y = f(x)$. Se para $x \in D$, para qualquer x no domínio D, temos $f(-x) = f(x)$, então definimos a função $y = f(x)$ como uma **função par**.

Problemas sobre Paridade de Funções

Problema 1

Prove que a função $y = 2x^4 - 3x^2$ é uma função par.

Solução:

Note que $f(x) = 2x^4 - 3x^2$.

Tomando qualquer número real $x \in \mathbb{R}$, existe sempre $-x \in \mathbb{R}$, então obtemos:

$$f(-x) = 2(-x)^4 - 3(-x)^2 = 2x^4 - 3x^2 = f(x)$$

De acordo com a definição, concluímos que a função $y = 2x^4 - 3x^2$ é uma função par.

Problema 2

A função $y = x^2$, com $x \in [-3, 2]$, é uma função par?

Solução:

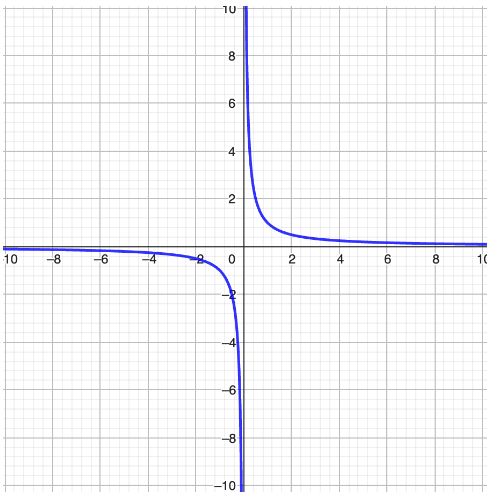
Não. Por exemplo, o número oposto de -3, que é 3, não pertence ao domínio da função, logo ela não satisfaz a definição de função par.

Se fosse uma função par, então dois números simétricos em relação à origem deveriam pertencer ao domínio da função simultaneamente, o que é uma condição necessária para que a função seja considerada par.

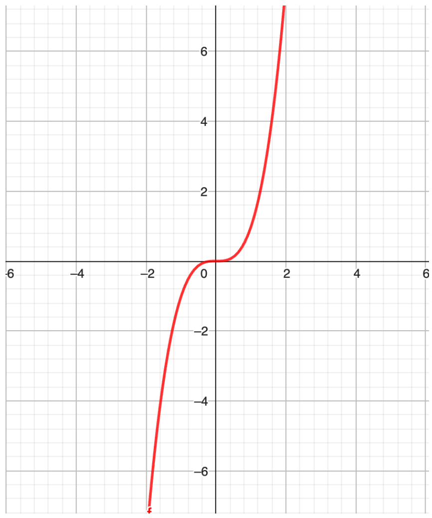
5. Observe a imagem das funções $y = x^3$ e $y = \frac{1}{x}$, pense sobre as características da imagem e calcule os valores das funções em uma tabela.

O material de Xangai nos traz dois gráficos de funções com simetria em relação à origem, pedindo, novamente, para que os alunos construam uma tabela de valores das variáveis a partir da função apresentada nos gráficos:

Figura 7 – Imagens com simetria em relação à origem



(a) $y = \frac{1}{x}$



(b) $y = x^3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 8 – Tabela de Valores das Variáveis y e x para $y = x^3$ e $y = -\frac{1}{x}$.

x	-2	-1	1	2	…	$-x_o$	x_o
$y = x^3$	-8	-1	1	8	…	$-x_o^3$	x_o^3

x	-2	-1	1	2	…	$-x_0$	x_0
$y = \dfrac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	…	$-\dfrac{1}{x_0}$	$\dfrac{1}{x_0}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando os gráficos e a tabela, os alunos devem chegar à seguinte conclusão:

Quando a variável independente assume um par de números opostos, os valores correspondentes da função também são opostos entre si.

Portanto, para a função $y = f(x)$, com $x \in D$, se a imagem da função for simétrica em relação à origem, sempre existirá $-x \in D$ e $f(-x) = -f(x)$.

6. Conclusão geral a partir de casos especiais

Podemos tomar qualquer ponto $R(x_1, y_1)$ do domínio D da função $f(x)$, então existe $y_2 = f(x_2)$, e podemos obter o ponto R_1, que é o ponto simétrico de R em relação à origem. Portanto, $-x$ pertence a D. A reta RR_1 passa pela origem e é bissetriz da origem.

A partir disso, sabemos que $-y_2 = f(-x_2)$, então obtemos $f(-x_2) = -f(x_2)$, o que significa que, para qualquer x pertencente a D, sempre existe $-x \in D$ e $f(-x) = -f(x)$. Portanto, essa função é **centrada simetricamente em relação à origem** (ou seja, é uma *função ímpar*).

7. A definição de Função Ímpar

O que leva à definição formal da função ímpar:

Definição - Função Ímpar

Seja $y = f(x)$, para $x \in D$.
Se $f(-x) = -f(x), \forall\, x \in D$,então definimos a função $y = f(x)$ como uma **função ímpar**.

Após isso, são apresentados os problemas a seguir:

Problemas 3 e 4

Problema 3
Prove que a função $y = x^3 - \dfrac{1}{x}$ *é uma função ímpar.*
Solução:
O domínio da função $y = x^3 - \dfrac{1}{x}$ é $D = \{x \mid x \neq 0\}$.
Note que:

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$$

Tomando qualquer número real $x \in D$, temos sempre $-x \in D$, então obtemos:

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{-x} = -x^3 + \frac{1}{x} = -\left(x^3 - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

Conclusão: De acordo com a definição, concluímos que a função $y = x^3 - \dfrac{1}{x}$ é ímpar.

Problema 4
Existe alguma função definida em $\mathbb{R}$ *que seja ao mesmo tempo par e ímpar? Caso exista, encontre todas. Caso não, justifique.*
Solução:
A função $y = 0$, com $x \in \mathbb{R}$, satisfaz essas condições.
Seja $y = f(x)$ uma função que satisfaz essas condições.
Para qualquer número real x_0, temos:

$$f(-x_0) = -f(x_0) \quad \text{(função ímpar)}, \quad f(-x_0) = f(x_0) \quad \text{(função par)}$$

Logo:

$$f(x_0) = -f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = 0$$

Conclusão: Existe apenas uma função que é simultaneamente par e ímpar: $y = f(x) = 0$, com $x \in \mathbb{R}$.

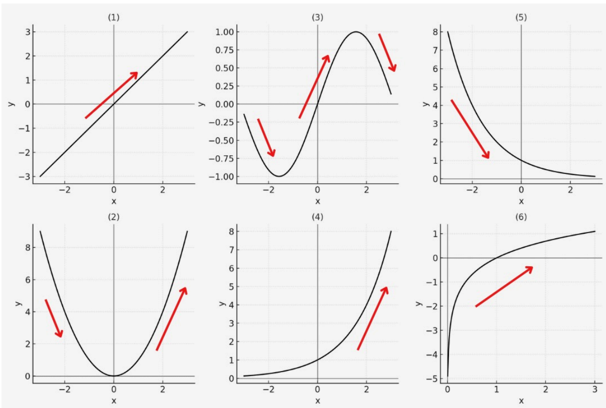
3.1.1.3 Monotonicidade de uma função

1. Questões Iniciais

Primeiramente, são apresentados alguns gráficos onde são destacados suas partes crescentes e decrescentes, a fim de apresentar a definição de monotonicidade das funções.

Observe as imagens das funções a seguir e perceba suas características de crescimento e decrescimento.

Figura 8 – Funções Crescentes e Decrescentes



Fonte: Elaborado pelo autor.

Perguntas:

(1) Nas seis imagens de funções acima, da esquerda para a direita, quais são as características da tendência da imagem?

(2) Como podemos descrever com precisão as propriedades de ”crescimento”e ”decrescimento”da imagem da função?

Resumo:

Essa tendência na imagem é chamada de **monotonicidade** no estudo das propriedades das funções. É uma das propriedades importantes da função. Com a ajuda da monotonicidade, podemos compreender melhor a variação do valor da função.

2. Definição da Monotonicidade da Função

Após refletir sobre as questões iniciais, são definidas então as funções crescentes e decrescentes:

Definição - Funções Crescentes e Decrescentes

Seja a função $y = f(x)$ definida em D, e o intervalo I um subconjunto de D. Dado qualquer par de variáveis independentes x_1 e x_2 no intervalo I, com $x_1 < x_2$:

- Se, sempre, $f(x_1) \leq f(x_2)$, então a função $y = f(x)$ é uma **função crescente** no intervalo I.
- Se, sempre, $f(x_1) \geq f(x_2)$, então a função $y = f(x)$ é uma **função decrescente** no intervalo I.

Em particular:

- Se, sempre, $f(x_1) < f(x_2)$, então a função $y = f(x)$ é uma **função estritamente crescente** no intervalo I.
- Se, sempre, $f(x_1) > f(x_2)$, então a função $y = f(x)$ é uma **função estritamente decrescente** no intervalo I.

3. Resolva os problemas 1 e 2 para aprimorar sua compreensão da definição de monotonicidade de função.

Problemas sobre Monotonicidade de Funções

Problema 1
Prove que a função $y = x^2 - 2x$ é estritamente decrescente no intervalo $(-\infty, 1]$.
Solução:

$$f(x) = x^2 - 2x$$

Para quaisquer dois valores de variáveis independentes x_1, x_2 no intervalo $(-\infty, 1]$, com $x_1 < x_2$, temos:

$$f(x_1) = x_1^2 - 2x_1, \quad f(x_2) = x_2^2 - 2x_2$$

Então:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 - 2x_1 - (x_2^2 - 2x_2) \\ &= (x_1^2 - x_2^2) - 2(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) \end{aligned}$$

Sabemos que $x_1 - x_2 < 0$, e que $x_1 + x_2 - 2 < 1 + 1 - 2 = 0$, portanto:

$$f(x_1) - f(x_2) > 0 \quad \text{ou seja,} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Logo, a função $y = x^2 - 2x$ é estritamente decrescente no intervalo $(-\infty, 1]$.

Problema 2

Julgue a monotonicidade da função $y = \log_2(3x + 2)$ *em seu domínio de definição e explique o motivo.*

Solução:

Para quaisquer dois valores de variáveis independentes x_1, x_2 no intervalo $D = \{x \mid 3x+2 > 0\}$, com $x_1 < x_2$,

Sabemos que a função $y = \log_2 x$ é estritamente crescente no intervalo $(0, +\infty)$.

Então, temos:

$$0 < 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \log_2(3x_1 + 2) < \log_2(3x_2 + 2)$$

Logo, a função $y = \log_2(3x + 2)$ é estritamente crescente em seu domínio de definição.

4. Definição de Função Monótona e Intervalo Monótono

Após a utilização de dois exercícios para fixação e compreensão dos alunos, define-se função monótona e intervalo monótono:

Definição - Função monótona e intervalo monótono

Define-se que, se a função $y = f(x)$ for crescente (decrescente) em um intervalo I, então a função $y = f(x)$ é uma **função monótona** no intervalo I, e o intervalo I é um **intervalo monótono** da função $y = f(x)$.

5. Resolva os problemas 3 e 4 para aprimorar sua compreensão da definição de Função Monótona e Intervalo Monótono.

Problemas sobre função monótona e intervalo monótono

Problema 3

Analise a monotonicidade da função $y = x^2 - 2x$, com $x \in [-2, 2]$, e encontre seus intervalos monótonos.

Solução:

Note que:

$$f(x) = x^2 - 2x, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = 0, \quad f(1) = -1.$$

Portanto, a função não é crescente nem decrescente em todo o intervalo $[-2, 2]$.

Para quaisquer dois valores independentes x_1 e x_2:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2).$$

Quando $x_1 < x_2$ e $x_1, x_2 \in [-2, 1]$, temos:

$$x_1 + x_2 - 2 < 0 \quad \text{e} \quad x_1 - x_2 < 0,$$

logo:

$$f(x_1) - f(x_2) > 0.$$

Portanto, o intervalo $[-2, 1]$ é estritamente decrescente para a função $f(x) = x^2 - 2x$.
Similarmente, quando $x_1 < x_2$ e $x_1, x_2 \in [1, 2]$:

$$x_1 + x_2 - 2 > 0 \quad \text{e} \quad x_1 - x_2 < 0,$$

então:

$$f(x_1) - f(x_2) < 0.$$

Portanto, o intervalo $[1, 2]$ é estritamente crescente para a função $f(x) = x^2 - 2x$.

Problema 4

Seja $y = f(x)$ uma função par e estritamente decrescente no intervalo $[-2, -1]$. Analise sua monotonicidade no intervalo $[1, 2]$ e justifique.

Solução:

Considere duas variáveis independentes $x_1, x_2 \in [1, 2]$, com $x_1 < x_2$. Então:

$$-x_1, -x_2 \in [-2, -1] \quad \text{e} \quad -x_2 < -x_1.$$

Como $f(x)$ é par e estritamente decrescente em $[-2, -1]$, então:

$$f(-x_2) > f(-x_1).$$

Logo, como f é par:

$$f(x_2) = f(-x_2) > f(-x_1) = f(x_1).$$

Portanto, a função $f(x)$ é estritamente crescente no intervalo $[1, 2]$.

3.1.1.4 Máximos e Mínimos de Funções

1. Questões Iniciais

Finalizando o capítulo, é feito a introdução de Máximos e Mínimos de Funções. A seção inicia-se apresentando a seguinte questão:

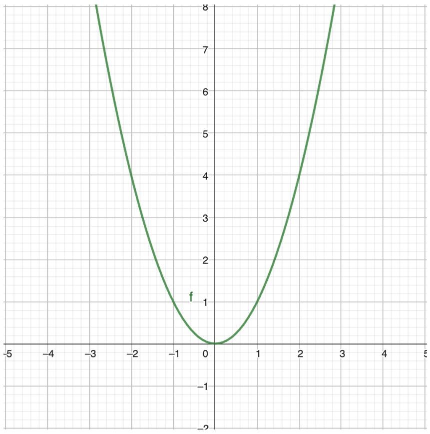
Questão 1:

Como mostrado na figura, seja dada a função $f(x) = x^2$.

A partir da imagem, observa-se que ela possui um ponto mais baixo: $(0, 0)$.

Como utilizar a linguagem matemática para provar que o valor da função neste ponto é o valor mínimo? Ou seja, que para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) \geq 0$?

Figura 9 – Gráfico $f(x) = x^2$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa pergunta leva à reflexão dos alunos, que podem tentar utilizar o crescimento e decrescimento, ou seja, a monotonicidade das funções para responder. No material, é esperado que os alunos cheguem à seguinte conclusão:

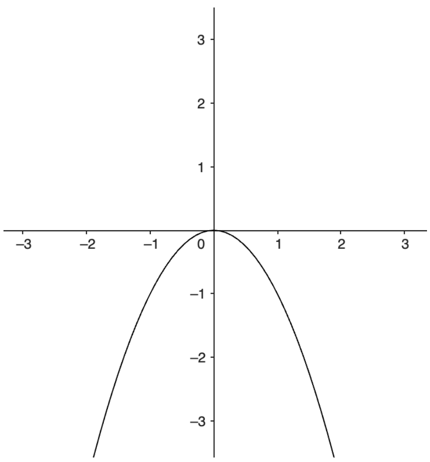
Solução: Usando a monotonicidade da função.

- $f(x) = x^2$ é uma função decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$. Assim, obtemos: quando $x \leq 0$, $f(x) \geq f(0)$.
- $f(x) = x^2$ é uma função crescente no intervalo $(0, +\infty)$. Assim, obtemos: quando $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0)$.

Portanto, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, sempre temos $f(x) \geq f(0)$.

Questão 2: Dada a função $f(x) = -x^2$, ilustre o significado do valor máximo da função $f(x)$.

Figura 10 – Gráfico de $f(x) = -x^2$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Solução

De acordo com a monotonicidade da função, sabemos que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq f(0) \quad \text{e} \quad f(0) = 0$$

Assim, quando $x = 0$, a função atinge seu valor máximo.
Portanto, a função $f(x) = -x^2$ possui valor máximo dado por $f(0) = 0$.

Pense e Discuta:

Com base nisso, como representar a definição dos valores máximo e mínimo de funções gerais?

Solução:

Combinando com exemplos específicos, fortalece-se a compreensão da expressão simbólica matemática dos conceitos.

2. Definição de valores máximos e mínimos de uma função

Após isso, finalizando o capítulo, o professor pode deixar a definição formal, dada por:

Definição: Máximos e Mínimos

Para a função $y = f(x)$ definida em D, o valor da função $y = f(x)$ em x_0 é $f(x_0)$. Para qualquer x dado no domínio, se

$$f(x) \geq f(x_0)$$

é sempre verdadeiro, então $f(x_0)$ é chamado de **valor mínimo** da função.
Por outro lado, se

$$f(x) \leq f(x_0)$$

é sempre verdadeiro, então $f(x_0)$ é chamado de **valor máximo** da função.

3. Resolva os Problemas 1, 2 e 3 para aprofundar sua compreensão sobre a definição dos valores máximos e mínimos de funções em geral. Devem encontrar o valor máximo de uma função com o auxílio do gráfico da função ou por meio da monotonicidade da função.

Problema 1

Encontre os valores máximo e mínimo da função $y = 2x^2 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

Sabemos que:

$$y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \geq -\frac{1}{8}$$

$$\text{e} \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\text{então} \quad f(x)_{\text{min}} = -\frac{1}{8}$$

De acordo com a monotonicidade da função quadrática, a função não possui valor máximo.

Problema 2

Encontre os valores máximo e mínimo da função $y = \dfrac{2}{x}$, $x \in [1, 2]$.

Solução:

A função $y = \dfrac{2}{x}$ é estritamente decrescente no intervalo $[1, 2]$.

Assim, o valor máximo ocorre no extremo esquerdo do intervalo (quando $x = 1$), que é 2, e o valor mínimo ocorre no extremo direito do intervalo (quando $x = 2$), que é 1.

Problema 3

Dado $a < 2$, encontre o valor máximo da função $y = |x - 1|$, com $x \in [a, 2]$.

Solução:

Para a função $y = |x - 1|$, temos:

$$\text{quando } x \geq 1, \quad y = x - 1$$

$$\text{quando } x \leq 1, \quad y = -x + 1$$

Portanto, a função é estritamente crescente no intervalo $[1, +\infty[$ e estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, 1]$.

Discussão Classificada

① Quando $1 \leq a < 2$, a função é estritamente crescente no intervalo $[a, 2]$. O valor máximo da função é 1.

② Quando $a < 1$, a função é estritamente decrescente no intervalo $[a, 1]$ e estritamente crescente em $[1, 2]$.

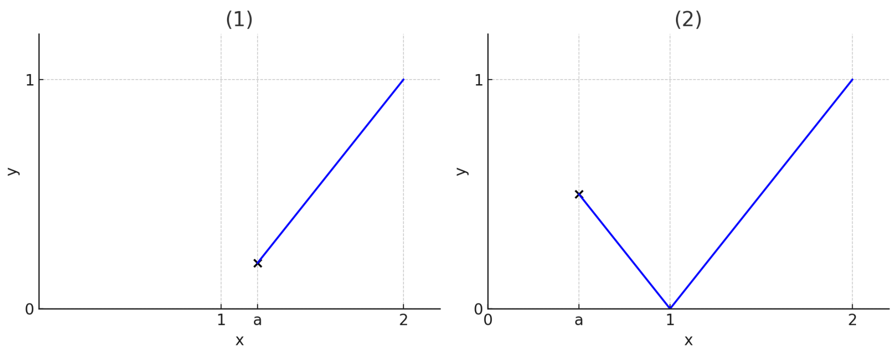
Nesse caso:

O valor máximo da função será o maior entre $|2 - 1| = 1$ e $|a - 1| = 1 - a$

Resumo:

- Se $a < 0$, o valor máximo é $1 - a$
- Se $0 \leq a < 2$, o valor máximo é 1

Figura 11 – Representações gráficas para os diferentes valores de a



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.1.2 Livro do Programa Nacional do Livro Didático

A análise do material didático utilizado na Escola Estadual Quintiliano Jardim, de Uberaba - Minas Gerais, o livro que faz parte do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), da coleção Prisma, de (BONJORNO; GIOVANNI; SOUSA, 2020), revelou similaridades e diferenças entre os métodos utilizados para o ensino, apresentados pelo material da china em análise.

Inicialmente, vale destacar, que as primeiras noções de funções e as funções afim são trabalhadas em um mesmo capítulo do livro **Conjuntos e Funções**, diferentemente do material curricular de Xangai, que possui um capítulo exclusivo para tratar das noções iniciais de funções.

No início do capítulo de (BONJORNO; GIOVANNI; SOUSA, 2020) são apresentados os descritores da BNCC que serão abordados no capítulo, sendo eles: EM13MAT101, EM13MAT103, EM13MAT302, EM13MAT401,EM13MAT501 e EM13MAT510.

Uma semelhança que pode ser observada entre os capítulos, é que a abordagem neste livro didático também utiliza exemplos do dia a dia para explicar o conceito de função.

Exemplos como o valor de uma corrida de táxi, o valor de uma conta de energia, ou o preço de um prato em um restaurante a quilo são apresentados para se iniciar a ideia. Contudo, diferente do que é proposto no material curricular Chinês, é sugerido que o professor já explique o conceito para os alunos, ao invés de incentivar eles a formular suas teorias.

A seguir, o exemplo inicial utilizado no livro de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020):

Exemplo 1

Você sabe como é calculado o valor de uma corrida de táxi?

Tudo depende de onde você está e para onde quer ir.

O valor de uma corrida de táxi está relacionado a uma tarifa fixa, conhecida como bandeirada, e a outra que é cobrada por quilômetro rodado e por outros fatores que possam influenciar nesse valor, como o tempo do veículo parado no trânsito.

A determinação dessas tarifas é incumbência das prefeituras; por isso, estados e até cidades dentro do mesmo estado podem ter valores diferentes. Por exemplo, em 2020, no município de São Paulo (SP), o preço da bandeirada era de R$4,50, e a taxa por quilômetro rodado era de R$2,75. Além disso, havia a tarifa de R$33,00 por hora parada. Já em Porto Alegre (RS), esses valores eram R$ 5,18 (bandeirada), R$ 2,59 (por quilômetro rodado) e R$ 18,31 (por hora parada).

Para realizar esses cálculos, os táxis possuem um aparelho chamado de taxímetro, similar a uma calculadora, que mostra o valor a ser pago à medida que o veículo se desloca. Atualmente, algumas empresas que oferecem serviço de táxi operam por meio de aplicativos, e quando um usuário solicita uma corrida, o preço aproximado aparece na tela do celular, incluindo o tempo estimado da viagem.

O estudo de funções em Matemática pode nos auxiliar a modelar situações, fazer estimativas e compreender como esses valores são obtidos.

A ideia de Função

À partir desse exemplo é iniciada a discussão sobre os conceitos das funções, primeiramente, com a relação de dependência entre as variáveis:

Relações de Dependência

Muitas vezes nos deparamos com situações no dia a dia em que diferentes grandezas estão associadas por uma relação de dependência.
Na situação apresentada na abertura, por exemplo, quanto maior a distância percorrida pelo táxi, maior será o valor a ser pago pela corrida. Nesse caso, dizemos que, entre outros fatores, o valor pago por uma corrida de táxi **depende** da distância percorrida.
Também podemos verificar essa relação de dependência em um restaurante "por quilo": quanto maior a quantidade, em quilograma, de comida consumida, maior será o valor a ser pago por ela.
Além das situações anteriores, podemos também pensar na relação de dependência entre o valor total de uma fatura de energia elétrica e a quantidade de energia consumida. Nesse caso, o valor da fatura depende da energia consumida: quanto menor o consumo, menor será o valor a ser cobrado na fatura.
Em geral, os valores que as grandezas podem assumir nessas relações são representados genericamente por **variáveis**, que podem ser classificadas como **variável dependente** e **variável independente**.

Tabela 9 – Tabela de variáveis

Variável independente	**Variável dependente**
Distância percorrida pelo táxi	**Valor pago pela corrida**
Quantidade de comida consumida	**Valor pago pela refeição**
Quantidade de energia elétrica consumida	**Valor da fatura de energia elétrica**

Fonte: Adaptado de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

As situações apresentadas têm duas características em comum:

- **Todos os valores** que podem ser assumidos pela variável independente são associados a valores da variável dependente.
- Cada valor atribuído à variável independente está associado a um **único valor** da variável dependente.

Uma relação que possui essas duas características é chamada de **função**. Assim, podemos dizer que:

- o valor pago por uma corrida de táxi é função da distância percorrida pelo táxi naquela corrida;

- o valor a ser pago em um restaurante "por quilo" é função da quantidade, em quilograma, de comida consumida;
- o valor de uma fatura de energia elétrica é função da quantidade de energia elétrica consumida.

As três situações a seguir são apresentadas no livro para demonstrar como podem ser obtidas funções.

Situação 1 — Correios

Observe, na tabela a seguir, as tarifas vigentes em 31 de janeiro de 2020 para os serviços de envio de carta não comercial e cartão-postal, praticadas pelos Correios:

Tabela 10 – Carta não comercial e cartão-postal (vigência 31/1/2020)

Peso (g)	**Preço básico (R$)**
Até 20	2,05
Mais de 20 até 50	2,85
Mais de 50 até 100	3,95
Mais de 100 até 150	4,80
Mais de 150 até 200	5,65
Mais de 200 até 250	6,55
Mais de 250 até 300	7,50
Mais de 300 até 350	8,35
Mais de 350 até 400	9,25
Mais de 400 até 450	10,10
Mais de 450 até 500	11,00

Fonte: Adaptado de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Para determinar a relação entre "peso" e preço, escolhemos uma faixa de valores na coluna **Peso (g)** e lemos, na linha horizontal da tabela, o valor correspondente na coluna **Preço básico (R$)**.
Exemplo: carta com 25g → Preço = R$ 2,85.
Nessa situação, o preço básico da carta não comercial depende do "peso" da carta e, com base nessa tabela, podemos afirmar que o preço é uma **função** do "peso" da carta.
O "peso" da carta é a **variável independente**, e o preço básico é a **variável dependente**.

Situação 2

Durante um dia, um centro de meteorologia realizou medições de temperatura, de quatro em quatro horas, no centro de sua cidade. A menor temperatura registrada foi 18 °C, e a maior, 28 °C. Observe a seguir as temperaturas obtidas, de acordo com o horário da medição.

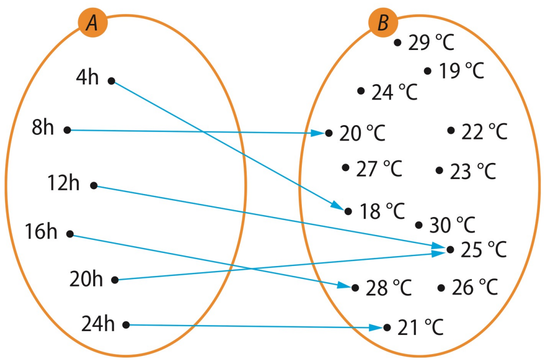
Tabela 11 – Temperatura ao longo do dia

Horário	**Temperatura**
4 h	18 °C
8 h	20 °C
12 h	25 °C
16 h	28 °C
20 h	25 °C
24 h	21 °C

Fonte: Adaptado de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Podemos também representar essas informações por meio de um esquema, conhecido como **diagrama de flechas**. Consideramos como elementos de um conjunto A os horários nos quais foram realizadas as medições, e como elementos de um conjunto B alguns dos possíveis valores de temperatura verificados nesse dia, como indicado na imagem a seguir.

Figura 12 – Diagrama de flechas representando a função temperatura em função do tempo.



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Como cada um dos elementos do conjunto A está relacionado a um único elemento do conjunto B, podemos dizer que essa relação é uma **função**.
No diagrama podemos observar que em dois horários distintos a temperatura obtida pela medição foi 25 °C. Além disso, em nenhum dos horários em que foi realizada uma medição a temperatura registrada foi 19 °C, 22 °C, 23 °C, 24 °C, 26 °C, 27 °C, 29 °C ou 30 °C.

Situação 3

Para determinar a área A de um quadrado, multiplicamos a medida de seu lado ℓ por ela mesma, ou seja, elevamos ℓ ao quadrado. Podemos representar esse cálculo por meio da fórmula $A = \ell^2$. Considerando A e ℓ números reais positivos, essa fórmula estabelece uma correspondência entre esses valores, de modo que a área de um quadrado é uma função da medida de seu lado. Por exemplo, se ℓ for igual a 5 cm, a área A será 25 cm².

Tabela 12 – Relação entre comprimento ℓ e área A

ℓ (u.c.)	1	2	3	10	50	100
A (u.a.)	1	4	9	100	2 500	10 000

Fonte: Adaptado de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Como a área do quadrado depende da medida de seu lado, a variável independente é a medida do lado, e a variável dependente é a área.

A fórmula da área de um quadrado pode ser interpretada como a **lei de formação** ou a **lei de correspondência** da função que relaciona a área A de um quadrado e a medida do lado ℓ correspondente. Uma possível maneira de compreender a lei de formação de uma função é pensar em uma máquina que transforma a matéria-prima (variável independente) em produto final (variável dependente). Observe a seguir um esquema que mostra como uma máquina "transforma" a medida do lado (ℓ) de um quadrado em sua respectiva área (A).

Figura 13 – Maquina que transforma medida do lado em área.

Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Com essas situações foram apresentados conceitos importantes de funções, como **variável dependente e variável independente**, **Diagrama de flechas**, **lei de formação de uma função**.

Definição de Função

A partir dos conceitos abordados nas situações-problema, é dada a definição formal de função:

Definição - Função

Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma **função de** A **em** B, representada por $f : A \to B$, é uma relação que associa cada elemento x de A a um único elemento y de B.

São apresentados os exemplos abaixo, para ilustrar a relação de conjuntos de variáveis que são ou não funções:

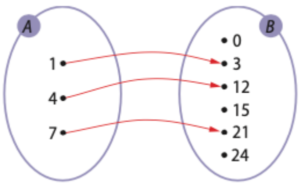
Análise de Relações com Diagramas

Vamos agora utilizar diagramas para analisar algumas relações entre conjuntos de números e, com base nessa análise, concluir se são ou não uma função. Acompanhe os exemplos a seguir.
a) Dados os conjuntos $A = \{1, 4, 7\}$ e $B = \{0, 3, 12, 15, 21, 24\}$, seja a relação de A em B expressa por $y = 3x$, com $x \in A$ e $y \in B$.
Observe que:

- todos os elementos de A estão associados a elementos de B;
- cada elemento de A está associado a um único elemento de B.

Nesse caso, a relação de A em B expressa por $y = 3x$ é uma **função de** A **em** B e corresponde à função “multiplicar por 3”.

Figura 14 – Relação entre A e B



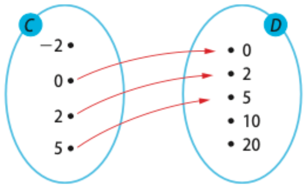
Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

b) Dados os conjuntos $C = \{-2, 0, 2, 5\}$ e $D = \{0, 2, 5, 10, 20\}$, seja a relação de C em D expressa por $y = x$, com $x \in C$ e $y \in D$.
Observe que:

- existe um elemento de C (o número -2) que não está associado a nenhum elemento de D.

Portanto, a relação de C em D expressa por $y = x$ **não é uma função de** C **em** D.

Figura 15 – Relação entre C e D



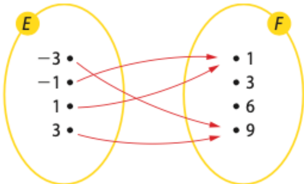
Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

c) Dados os conjuntos $E = \{-3, -1, 1, 3\}$ e $F = \{1, 3, 6, 9\}$, seja a relação de E em F expressa por $y = x^2$, com $x \in E$ e $y \in F$.
Observe que:

- todos os elementos de E estão associados a elementos de F;
- cada elemento de E está associado a um único elemento de F.

A relação de E em F expressa por $y = x^2$ representa uma **função de** E **em** F e corresponde à função "elevar ao quadrado".

Figura 16 – Relação entre E e F

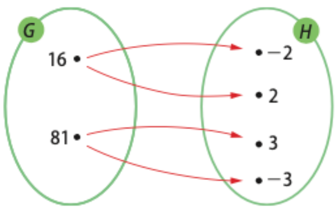


Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

d) Dados os conjuntos $G = \{16, 81\}$ e $H = \{-3, -2, 2, 3\}$, seja a relação de G em H expressa por $y = \pm\sqrt{x}$, com $x \in G$ e $y \in H$.
Observe que:

- todos os elementos de G estão associados a elementos de H;
- os elementos de G (tanto o número 16 quanto o 81) estão associados a mais de um elemento de H.

Figura 17 – Relação entre G e H



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Nesse caso, a relação de G em H **não representa uma função de** G **em** H, pois existe pelo menos um elemento de G que está associado a mais de um elemento de H.

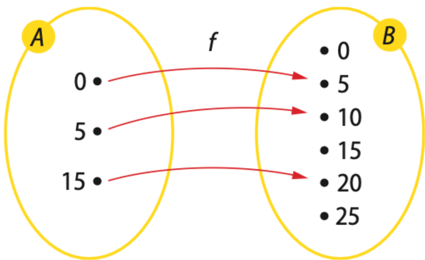
Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

O livro aborda as definições de domínio, contradomínio e imagem de funções, como exposto a seguir:

Domínio, Contradomínio e Imagem

Observe o diagrama que representa a função $f : A \to B$, definida por $y = x + 5$.

Figura 18 – Relação entre os conjuntos A e B



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

O conjunto A chama-se **domínio** da função. Esse conjunto é constituído de todos os elementos x (variável independente) de A e é indicado por $D(f)$.
O conjunto B é chamado de **contradomínio** da função. Esse conjunto é constituído de todos os elementos y (variável dependente) de B e é indicado por $CD(f)$.
Assim, de acordo com o diagrama, temos:

- $D(f) = A = \{0, 5, 15\}$
- $CD(f) = B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$

Cada elemento x do domínio tem um correspondente y no contradomínio. A esse valor de y, associado a x pela função f, damos o nome de **imagem** de x pela função f e indicamos por $y = f(x)$.
Essa notação é muito comum e simplifica a linguagem, pois, em vez de dizermos “Qual é o valor de y quando x é igual a 15?”, podemos dizer simplesmente “Qual é o valor de $f(15)$?”.
Nesse caso, para obtermos o valor de y quando x é igual a 15, considerando a lei da função f, dada por $y = x + 5$, determinamos:

$$f(15) = 15 + 5 \Rightarrow f(15) = 20 \quad \text{ou} \quad y = 20$$

O conjunto de todos os valores de y pertencentes a $CD(f)$, que são imagens de x pela função, é chamado de **conjunto imagem** da função. O conjunto imagem, indicado por $\text{Im}(f)$, é um subconjunto do contradomínio.
No exemplo anterior, temos:

$$\text{Im}(f) = \{5, 10, 20\}$$

Uma função é precisamente definida quando explicitamos o domínio, o contradomínio e a relação que associa cada elemento do domínio a um único elemento do contradomínio.

Estudo do domínio de uma função real

Uma função cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos reais $\mathbb{R}$ é chamada de **função real de variável real**.

Exemplos:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R},\ CD(f) = \mathbb{R}$

b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{-x}{2} + 5 \Rightarrow D(g) = \mathbb{Z},\ CD(g) = \mathbb{R}$

c) $h : [-2, 5[\to \mathbb{R}_+,\ h(x) = 2^{x+3} \Rightarrow D(h) = [-2, 5[,\ CD(h) = \mathbb{R}_+$

Quando não há menção explícita ao domínio e contradomínio, considera-se:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}, \quad CD(f) = \mathbb{R}$$

Outros exemplos:

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R},\ CD(f) = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3} \Rightarrow D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\},\ CD(f) = \mathbb{R}$

f) $g(x) = \sqrt{x+5} \Rightarrow D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\},\ CD(g) = \mathbb{R}$

Conclusão: Para encontrar o domínio de uma função real de variável real definida apenas por sua lei de formação, considera-se o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a função está definida.

O livro utiliza-se de exemplos e atividades para fixar o conteúdo, como as expostas a seguir:

Atividades Resolvidas

1. Em uma festa, os salgados são vendidos com desconto se comprados em maior quantidade, como indicado na tabela:

Quantidade de salgados	Preço (R$)
1	4,00
2	7,00
3	10,00
4	12,00
5 ou mais	2,50 cada salgado

Fonte: Adaptado de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Com base nesses dados, responda:

a) O que essa tabela representa?

b) O preço é uma função da quantidade de salgados?

c) Qual é a variável independente nessa situação? E a variável dependente?

d) Qual é o valor a ser pago por 3 salgados? E por 6 salgados?

Resolução:

a) Essa tabela representa a variação do preço dos salgados de acordo com a quantidade comprada.

b) Sim. O preço a ser pago é uma função da quantidade de salgados, pois cada quantidade corresponde a um único preço.

c) A variável independente é a quantidade de salgados comprados. A variável dependente é o preço a ser pago.

d) 3 salgados: R$10,00. 6 salgados: $6 \cdot 2{,}50 = 15{,}00$.

2. Marina é vendedora de uma loja de roupas, e seu salário mensal bruto é composto de uma parte fixa de R$1.500,00 mais uma comissão de 5% sobre o valor total das vendas realizadas no mês.

a) Escreva a lei de formação que expressa o salário bruto de Marina.

b) Qual será o salário bruto de Marina se ela vender R$5.000,00 em mercadorias no mês?

c) Sabendo que no mês passado o salário bruto de Marina foi de R$2.750,00, qual foi o valor total das vendas por ela realizada?

Resolução:

a) Seja S o salário mensal bruto e x o valor total das vendas. A lei é:

$$S = 1500 + 0{,}05x$$

b) Se $x = 5000$, então:

$$S = 1500 + 0{,}05 \cdot 5000 = 1750$$

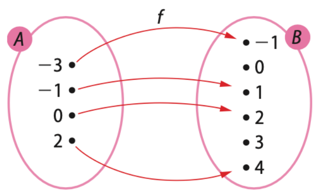
c) Se $S = 2750$, então:

$$2750 = 1500 + 0{,}05x \Rightarrow 0{,}05x = 1250 \Rightarrow x = 25000$$

Marina vendeu R$25.000,00 em mercadorias.

3. Dada a função $f : A \to B$, definida por $f(x) = x + 2$, representada no diagrama a seguir, identifique o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de f.

Figura 19 – Relação entre os conjuntos A e B



Fonte:Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Resolução: Observando o diagrama, temos:

$$D(f) = A = \{-3, -1, 0, 2\}$$

$$CD(f) = B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{Im}(f) = \{-1, 1, 2, 4\}$$

Atividades

1. Nos itens a seguir, estão descritas algumas relações entre variáveis. Em cada caso, identifique a variável independente e a variável dependente.

a) O número de barras de chocolate que alguém compra e a quantia paga por elas.

b) O andar do apartamento em que uma pessoa mora e o tempo necessário para o elevador, a partir do térreo e sem nenhuma parada, chegar até o apartamento.

2. (Saresp-SP) As variáveis s e t estão relacionadas de acordo com a tabela abaixo:

t	1	2	3	4	5
s	0	3	8	15	24

Fonte: Adaptado de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

A relação algébrica entre s e t é:

a) $s = 2t - 2$

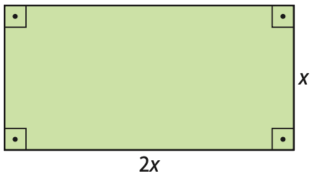
b) $s = t - 1$

c) $s = t^2 - 1$

d) $s = t^2$

3. O retângulo representado na figura tem lados que medem x e $2x$.

Figura 20 – Representação do retângulo com medidas x e $2x$.



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Expresse o perímetro P, a área A e a medida d da diagonal desse retângulo em função de x.

Gráfico de uma função

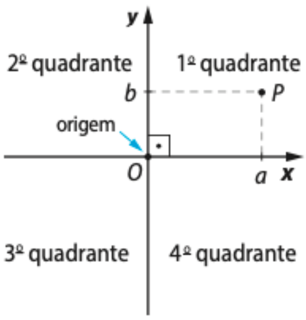
O livro traz a possibilidade de representar as funções através de um sistema de coordenadas, o sistema cartesiano ortogonal.

Sistema Cartesiano Ortogonal

Para determinar a localização de um ponto no plano, utilizamos o **sistema cartesiano ortogonal**, que é estabelecido por duas retas perpendiculares entre si, denominadas **eixos** do sistema cartesiano. Esses eixos representam retas reais, e o ponto O, de interseção desses eixos, é a **origem** do sistema cartesiano.

O eixo horizontal (eixo x) é denominado **eixo das abscissas**, e o eixo vertical (eixo y) é denominado **eixo das ordenadas**. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões, chamadas de **quadrantes**, como indicado na figura.

Figura 21 – Representação dos quadrantes no Plano Cartesiano



Fonte:Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

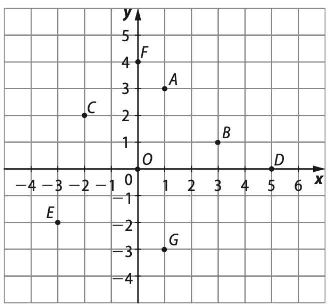
O ponto P representado nessa figura tem **coordenadas cartesianas** a e b, números reais que formam o **par ordenado** (a, b). Indicamos assim: $P(a, b)$.

- O número real a é a **abscissa** do ponto P. Esse número é associado ao ponto de interseção do eixo x com a reta paralela ao eixo y, passando por P.
- O número real b é a **ordenada** do ponto P. Esse número é associado ao ponto de interseção do eixo y com a reta paralela ao eixo x, passando por P.

Importante: Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Qualquer ponto do plano pode ser localizado no sistema cartesiano e, para isso, usamos um par ordenado de números reais, que são as coordenadas do ponto. Por exemplo, os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 1)$ e $O(0, 0)$ são distintos e têm diferentes localizações no plano.
Observações:

- O ponto O (origem) tem coordenadas $(0, 0)$.
- Os pontos dos eixos x e y não pertencem a nenhum dos quadrantes.
- Todo ponto do eixo x tem ordenada igual a zero.
- Todo ponto do eixo y tem abscissa igual a zero.

Figura 22 – Representação de pontos no plano cartesiano



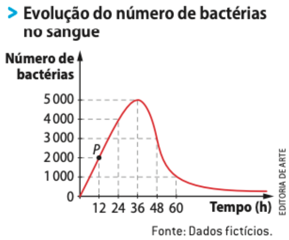
Fonte:Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Interpretação e leitura de gráficos

O livro traz a possibilidade de interpretar uma função à partir de seu gráfico, como o exemplo abaixo:

Análise de gráfico – Bactérias no sangue

Figura 23 – Gráfico para análise



Fonte:Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

O gráfico apresentado mostra a evolução da quantidade de bactérias por milímetro cúbico de sangue ao longo do tempo (em horas), após o contágio de um paciente.

- O tempo é a variável independente e o número de bactérias é a variável dependente.
- Cada instante de tempo corresponde a um único valor de quantidade de bactérias.
- O ponto $(12, 2000)$ indica que, após 12 horas do contágio, havia aproximadamente 2000 bactérias por mm³ de sangue.
- O número de bactérias aumentou entre 0 e 36 horas após o contágio.
- A quantidade máxima foi observada por volta de 36 horas.
- Após 60 horas, a quantidade caiu para cerca de 1000 bactérias por mm³.

A representação gráfica permite identificar facilmente os valores, analisar variações e relacionar grandezas.

Construção de gráficos

Construção de gráficos de funções no plano cartesiano

Para construir gráficos de funções no sistema cartesiano ortogonal, devemos considerar os valores do domínio da função no eixo x (eixo das abscissas) e as respectivas imagens no eixo y (eixo das ordenadas).
O gráfico da função é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano, tais que $y = f(x)$ com $x \in D(f)$.
Como exemplo, vamos construir o gráfico da função $f : A \to \mathbb{R}$, dada por $y = x + 1$, em que $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
Iniciamos construindo a tabela com os valores de x pertencentes ao domínio e determinando as

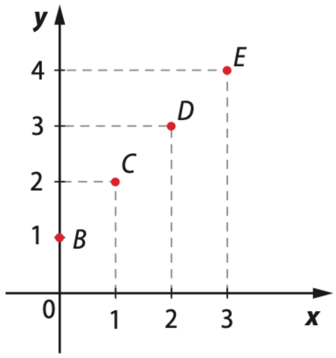
imagens de x pela função f, ou seja, os valores de $y = f(x)$ para representar os pontos obtidos no plano cartesiano.

x	y
0	1
1	2
2	3
3	4

Fonte: Adaptado de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Observe que $D(f) = A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $\text{Im}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$.
Como o conjunto A é finito, o gráfico de f é formado apenas pelos quatro pontos obtidos por meio da tabela: $B(0, 1)$, $C(1, 2)$, $D(2, 3)$ e $E(3, 4)$.

Figura 24 – Representação dos pontos B, C, D e E no plano cartesiano



Fonte:Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

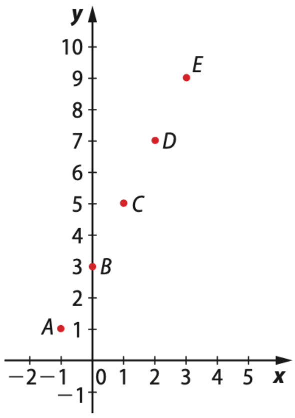
Agora, vamos construir o gráfico da função f dada por $f(x) = 2x+3$, considerando três domínios distintos, e observar as semelhanças e as diferenças entre esses gráficos.
a) Considerando $D(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
Inicialmente, construímos uma tabela com os valores de $x \in D(f)$ e determinamos as imagens de x pela função f, ou seja, os valores de $y = f(x)$, para obter os respectivos pares ordenados.

x	$y = 2x + 3$	(x, y)
-1	$2 \cdot (-1) + 3 = 1$	$(-1, 1)$
0	$2 \cdot 0 + 3 = 3$	$(0, 3)$
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$	$(1, 5)$
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$	$(2, 7)$
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$	$(3, 9)$

Fonte: Adaptado de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Em seguida, representamos no sistema cartesiano os pontos cujas coordenadas são os pares ordenados da tabela.
Como o domínio da função é o conjunto $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, o gráfico de f são os pontos $A(-1, 1)$, $B(0, 3)$, $C(1, 5)$, $D(2, 7)$ e $E(3, 9)$, representados nessa figura.

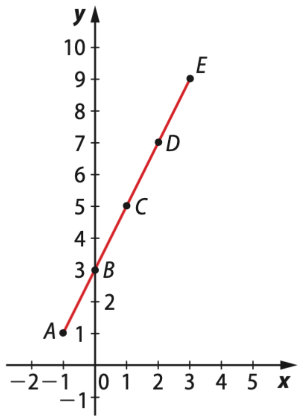
Figura 25 – Representação no plano cartesianos dos pontos de $y = 2x + 3$



Fonte:Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

b) Considerando $D(f) = [-1, 3]$
Nesse caso, o domínio da função é um intervalo real, e os valores de x considerados no exemplo anterior pertencem a esse intervalo. Entretanto, no intervalo $[-1, 3]$ existem infinitos valores de x que têm imagem correspondente pela função f.
Quando representamos esses infinitos pontos no sistema cartesiano, obtemos um segmento de reta, que é o gráfico da função f quando $D(f) = [-1, 3]$.
Observe que essa função não está definida para valores de x menores do que -1 nem para valores de x maiores do que 3.

Figura 26 – Representação da reta $y = 2x + 3$ para $D(f) = [-1, 3]$

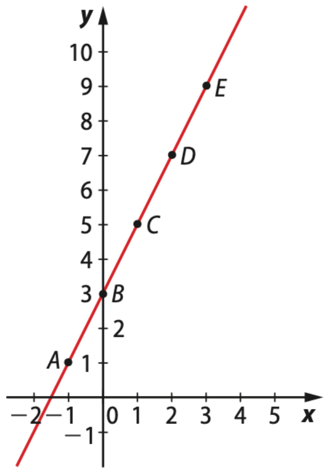


Fonte:Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

c) Considerando $D(f) = \mathbb{R}$

Nesse caso, o domínio da função f é todo o conjunto dos números reais e, como nos exemplos anteriores, os pontos A, B, C, D e E fazem parte do gráfico da função. Além desses pontos, existem infinitos pontos que satisfazem à lei da função f.
Assim, o gráfico de f é uma reta em que todo valor de $x \in \mathbb{R}$ tem uma imagem pela função f, expressa por $y = f(x)$. Observe o gráfico da função f quando $D(f) = \mathbb{R}$.

Figura 27 – Representação da reta $y = 2x + 3$ para $D(f) = \mathbb{R}$



Fonte:Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Portanto, apesar de a lei que define a função ser a mesma nos três casos apresentados anteriormente, os gráficos são diferentes, pois dependem do domínio considerado.

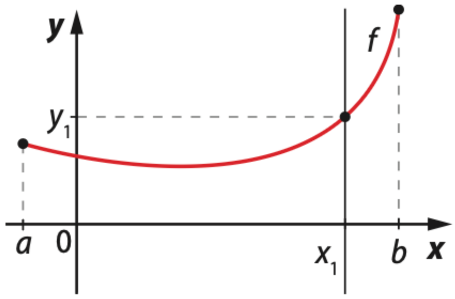
Identificação do gráfico de uma função

O livro também traz a maneira de identificar, através do gráfico se ele é ou não de uma função:

Domínio e imagem no gráfico de uma função

Vimos que, dada uma função definida por $y = f(x)$, cada valor de x do domínio deve corresponder a um único valor de y no contradomínio. Assim, é possível identificar se um gráfico representa ou não uma função traçando retas paralelas ao eixo y.
Para que o gráfico analisado represente uma função, cada reta vertical traçada por pontos de abscissa $x \in D(f)$ deve cruzar o gráfico em **um único ponto**, de coordenadas $(x, f(x))$.
O gráfico a seguir, por exemplo, representa uma função f com domínio $D(f) = [a, b]$, pois qualquer reta vertical traçada por pontos de abscissa $x \in D(f)$ cruza o gráfico em um único ponto.

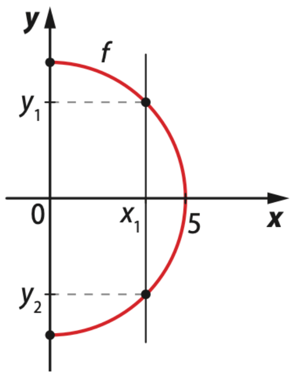
Figura 28 – Representação gráfica que configura uma função de x em relação a y



Fonte:Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Verifique, nesse gráfico, que todas as abscissas $x_1 \in D(f)$ estão associadas a uma única imagem $y_1 = f(x_1)$, ou seja, para todo $x \in D(f)$ existe um único ponto que pertence ao gráfico e à reta que passa por $(x, 0)$ e é perpendicular ao eixo x.
Se uma reta vertical cruza o gráfico em **mais de um ponto**, então esse gráfico **não** representa uma função, como indicado a seguir.
Nesse caso, existem retas paralelas ao eixo y que cruzam o gráfico em dois pontos. Verifique, por exemplo, que a abscissa x_1 está associada a dois pontos distintos do gráfico, (x_1, y_1) e (x_1, y_2), o que permite concluir que esse gráfico não representa uma função de x em y.

Figura 29 – Representação gráfica que não configura uma função de x em relação a y

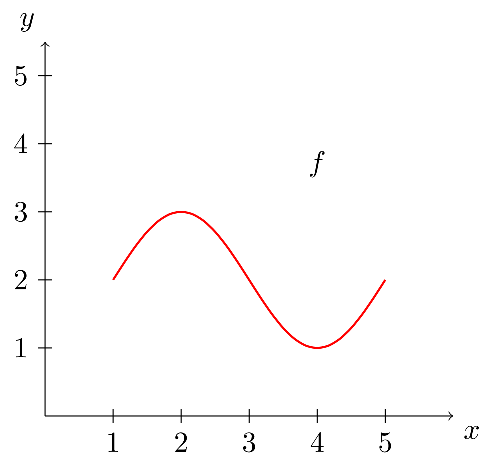


Fonte:Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

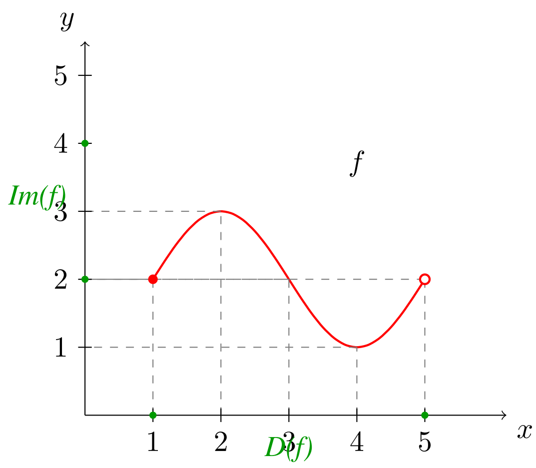
Domínio e imagem no gráfico de uma função

Finalizando essa parte do capítulo, é apresentado a forma que se pode obter as informações sobre o domínio e a imagem de uma função através da analise dos gráficos.

Considere o gráfico a seguir, que representa uma função f.



Para determinar o domínio e o conjunto imagem de f, projetamos os pontos do gráfico sobre os eixos x e y, como indicado a seguir.



O domínio da função f é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico. Nesse exemplo, temos:

$$D(f) = [1, 5[\quad \text{ou} \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 5\}$$

O conjunto imagem da função f é o conjunto das ordenadas de todos os pontos do gráfico. Nesse exemplo, temos:

$$\text{Im}(f) = [2, 4[\quad \text{ou} \quad \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y < 4\}$$

3.2 Funções Lineares

O estudo das funções lineares desempenha um importante papel na matemática, servindo como base para a compreensão de diversas relações entre grandezas no cotidiano e em áreas aplicadas. Uma função linear, caracterizada por uma relação de proporcionalidade direta entre duas variáveis, é representada na forma geral $y = ax + b$, onde a e b são constantes reais, com $b \neq 0$.

Nesta seção, serão comparadas as diferentes abordagens pedagógicas para o ensino das funções lineares presentes nos materiais didáticos utilizados em distintos contextos educacionais. Primeiramente, analisaremos a metodologia do *Material de Xangai*, que enfatiza a construção do conceito a partir da proporcionalidade direta, estimulando a reflexão dos alunos por meio de exemplos práticos e discussões. Em seguida, investigaremos a abordagem adotada pelo livro do PNLD, que introduz o conceito de função afim diretamente, ilustrando suas aplicações com exemplos concretos.

Além de explorar as diferenças metodológicas entre os materiais, discutiremos a evolução do ensino de funções lineares a partir da construção gráfica, do estudo do crescimento e decrescimento das funções e da análise dos sinais das expressões algébricas. O objetivo é compreender como essas abordagens influenciam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e qual impacto têm na aprendizagem significativa do conceito de função linear.

3.2.1 Material de Xangai

3.2.1.1 Função Diretamente Proporcional

A abordagem das Funções Lineares no material de Xangai é iniciada com a apresentação do conceito de proporcionalidade direta.

1. Questões Iniciais

O texto inicial é um exemplo onde o professor deve apresentar aos alunos uma pergunta para fazê-los pensar sobre a proporcionalidade, como uma forma de introduzir o tema com uma motivação de reflexão. O exemplo do material é sobre uma loja que vende lápis, com o seguinte registro de vendas:

Função Diretamente Proporcional

1. Aquecimento

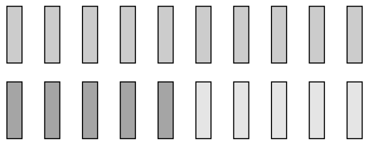
O professor propõe uma questão para despertar a curiosidade dos alunos e refletir sobre o que é uma Função Diretamente Proporcional.

Pense! Uma loja vende um certo tipo de lápis, e o registro de vendas é o seguinte:

Tabela 13 – Relação entre o número de lápis vendidos e o faturamento.

Número de Lápis Vendidos (unidades)	2	5	4	3	10	15	...
Faturamento (moedas)	5	12,5	10	7,5	25	37,5	...

Fonte: Elaborado pelo autor.



Pegue qualquer par de dados da tabela e calcule a razão entre o faturamento e o número de lápis vendidos. Por exemplo:

$$\frac{5}{2} = 2{,}5 \quad \frac{12{,}5}{5} = 2{,}5 \quad \frac{37{,}5}{15} = 2{,}5$$

Pode-se ver facilmente que todas essas razões são iguais. Isso indica que o preço unitário do lápis é **2,5 moedas por unidade**.

Seja x o número de lápis vendidos e y o faturamento. Temos então:

$$\frac{y}{x} = 2{,}5 \quad \text{ou} \quad y = 2{,}5x$$

2. Discussão

É passada aos alunos a definição de fator de proporcionalidade, e são apresentados alguns exemplos para que se ilustrem as situações e discutam.

Definição

Se a razão entre cada conjunto de valores for constante e diferente de zero, então duas variáveis são ditas como diretamente proporcionais.

A expressão matemática para duas variáveis que são **diretamente proporcionais** é:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{ou} \quad y = kx,$$

onde k é uma constante diferente de zero. A constante k é chamada de **fator de proporcionalidade**.

Discussão:

As duas variáveis nos itens a seguir são diretamente proporcionais? Em caso afirmativo, diga qual é o fator de proporcionalidade:

(1) Se cada cópia de papel custa 0,4 moedas, então as variáveis são o número de cópias x (unidades) e o custo y (moedas).

(2) Se os lados do quadrado medem 6 e o ponto P está sobre a aresta $\overline{BC}$, então as duas variáveis são o comprimento de $\overline{BP}$ e a área do triângulo ABP.

3. Exemplos e explicação

Quando duas variáveis são diretamente proporcionais, uma delas é uma função da outra.

Mais geralmente, funções como $y = kx$ são chamadas de **funções diretamente proporcionais**. E a constante k é chamada de **fator de proporcionalidade**.

São apresentados os exemplos a seguir para consolidar o conteúdo:

Exemplos

Exemplo 1 Considere a função $y = -4x$, que é uma função diretamente proporcional.
Tarefa: Informe o fator de proporcionalidade e calcule o valor da função para os seguintes valores:

$$x = -5, \quad x = 0, \quad x = 3$$

Explicação: O fator de proporcionalidade é -4.
Definindo $f(x) = -4x$, temos:

$$f(-5) = (-4) \cdot (-5) = 20$$

$$f(0) = (-4) \cdot 0 = 0$$

$$f(3) = (-4) \cdot 3 = -12$$

Exemplo 2 Sabemos que y é uma função diretamente proporcional de x, e que $y = 24$ quando $x = 3$.
Tarefa: Encontre a expressão algébrica de y em função de x.
Explicação: Seja $y = kx$, com $k \neq 0$. Substituindo $x = 3$ e $y = 24$, temos:

$$24 = 3k \Rightarrow k = 8$$

Portanto:

$$y = 8x$$

4. Prática

Se sabemos que y é uma função diretamente proporcional de x, e que $y = -12$ quando $x = 2$, determine a expressão analítica de y em função de x.

5. Resumo

(1) Peça aos alunos que resumam o que aprenderam nesta aula.

(2) Revise o resumo com a turma

Pergunta: O que é uma função diretamente proporcional?

6. Tarefa de Casa

Nesta seção, **Função Diretamente Proporcional** , o material curricular de Xangai propõe um planejamento de tempo para executar cada uma das 5 (cinco) atividades propostas para a sala de aula, antes da sexta atividade, Tarefa de Casa. O somatório dos minutos propostos totaliza 40 minutos, uma vez que este é o tempo total de cada aula no Ensino Médio de Xangai.

Planejamento proposto:

1. Aquecimento (10 minutos)

2. Discussão (10 minutos)

3. Exemplos e explicação (10 minutos)

4. Prática (5 minutos)

5. Resumo (5 minutos)

3.2.1.2 Função diretamente proporcional 2

A continuação do conteúdo se inicia com o professor utilizando uma questão para instigar a curiosidade dos alunos. Nesta segunda parte, o material propõe explorar a teoria de gráficos de uma função diretamente proporcional.

1. Introdução

O professor propõe uma pergunta para despertar a curiosidade dos alunos e incentivá-los a pensar sobre qual é o gráfico da **Função Diretamente Proporcional**.

Sabemos que qualquer ponto no plano cartesiano possui uma coordenada (x, y) unicamente determinada.

Por outro lado, dado qualquer par ordenado de números reais como coordenadas, um ponto pode ser unicamente determinado no plano cartesiano.

De acordo com a expressão analítica da função diretamente proporcional, $y = kx$, o valor da função correspondente pode ser determinado para todo valor da variável independente x no domínio de definição.

Pense!

Tomando o valor de x e o valor da função correspondente como abscissa e ordenada do ponto, respectivamente, o ponto correspondente pode ser traçado no plano cartesiano.

2. Prática e Discussão

Assim, é solicitado aos alunos que preencham a seguinte tabela, e construam os gráficos, que devem ser como os apresentados abaixo, após seguir os seguintes passos.

Etapa 1: Preencha a tabela.

Tabela 14 – Tabela com os valores de x, $y = 2x$ e $y = -2x$.

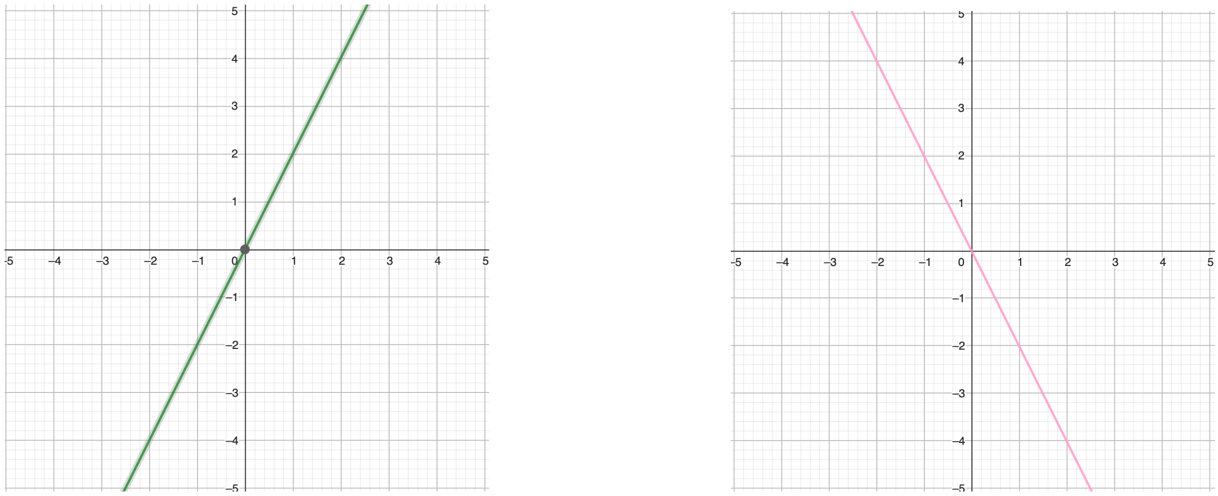
x	...	-2	-1	0	1	2	...
y = 2x	...	-4	-2	0	2	4	...
y = -2x	...	4	2	0	-2	-4	...

Fonte: Elaborado pelo autor.

Etapa 2: Trace os pontos no plano de coordenadas cartesianas.

Etapa 3: Una os pontos com linhas suaves.

Figura 30 – Gráficos de Funções Diretamente Proporcionais



(a) $y = 2x$ (b) $y = -2x$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo em seguida à parte prática da construção do gráfico, o material propõe uma lista de perguntas e reflexões para o professor conduzir uma discussão em sala de aula sobre a teoria dos gráficos construídos e, assim, consolidar o conteúdo explorado. Essa etapa tem como propósito consolidar o conteúdo a partir da observação e análise das características gráficas das funções exploradas.

Pense!

Quais características os gráficos da função $y = 2x$ têm em comum com o gráfico da função $y = -2x$?

Os gráficos das funções na Figura 30 são ambas retas. E podemos observar que essas duas retas passam pela origem $(0, 0)$.

De fato, a origem satisfaz a fórmula analítica dessas duas funções, portanto a observação está correta.

Sabemos que dois pontos determinam uma reta. A reta $y = 2x$, por exemplo, é unicamente determinada pela origem $(0, 0)$ e pelo ponto $(1, 2)$; a reta $y = -2x$ é unicamente determinada pela origem $(0, 0)$ e pelo ponto $(1, -2)$.

De forma geral, o gráfico de uma função diretamente proporcional, $y = kx$, é uma reta que passa pela origem $(0, 0)$ e pelo ponto $(1, k)$.

Chamamos o gráfico da função diretamente proporcional $y = kx$, de reta $y = kx$.

3. Propriedades da função diretamente proporcional

Continuando o conteúdo, é levado para a reflexão dos alunos algumas questões para se pensar em possíveis propriedades das funções diretamente proporcionais:

Propriedades das funções diretamente proporcionais

Observe os gráficos das funções nas questões anteriores, e considere e responda às seguintes perguntas:

(1) Por quais dois quadrantes passa o gráfico da função y = 2x , na Figura 30a? E o gráfico da

função y = -2x , na Figura 30b?

(2) Qual é a relação entre os dois quadrantes pelos quais o gráfico da função diretamente proporcional y = kx passa e a constante k ?

(3) Na Figura 30a, em uma reta, quando a coordenada x de um ponto muda gradualmente de valores pequenos para grandes, a posição do ponto muda gradualmente de _____ para _____ (preencher com “alta” ou “baixa”). Isto é, à medida que o valor da variável independente x muda gradualmente de valores pequenos para grandes, o valor da função y muda gradualmente de _____ para _____(preencher com “pequeno” ou “grande”).

(4) Na Figura 30b, em uma reta, quando a coordenada x de um ponto muda gradualmente de valores pequenos para grandes, a posição do ponto muda gradualmente de _____ para _____ (preencher com “alta” ou “baixa”). Isto é, à medida que o valor da variável independente x muda gradualmente de valores pequenos para grandes, o valor da função y muda gradualmente de _____ para _____ (preencher com “pequeno” ou “grande”).

(5) Em geral, para funções de proporcionalidade direta y = kx , à medida que o valor de x aumenta, o que acontece com o valor de y ?

A etapa seguinte visa aprofundar a compreensão das representações gráficas da função diretamente proporcional por meio da análise do comportamento do gráfico conforme o sinal do coeficiente angular k. Ao retomar as observações realizadas em sala, busca-se consolidar as ideias sobre crescimento e decrescimento da função, promovendo uma reflexão guiada a partir da localização da reta nos quadrantes do plano cartesiano.

Pense!

Após essa análise, os alunos devem ter concluído o seguinte:

Por meio da observação e reflexão, podemos concluir que a função diretamente proporcional, $y = kx$, possui as seguintes propriedades:

(1) Quando $k > 0$, o gráfico da função diretamente proporcional passa pelo **primeiro** e **terceiro quadrantes**; à medida que o valor da variável independente x aumenta gradualmente, o valor de y também aumenta gradualmente.

(2) Quando $k < 0$, o gráfico da função diretamente proporcional passa pelo **segundo** e **quarto quadrantes**; à medida que o valor da variável independente x aumenta gradualmente, o valor de y diminui gradualmente.

4. Exemplo e explicação

Exemplo: Se o gráfico da função diretamente proporcional, $y = (1 - 2a)x$, passa pelo primeiro e terceiro quadrantes, então o valor de y ________ à medida que o valor de x aumenta.

Explicação: A partir das condições dadas, temos:

$$1 - 2a > 0$$

$$\Rightarrow a < \frac{1}{2}$$

5. Prática

(1) No mesmo plano cartesiano, por favor, represente graficamente as seguintes funções separadamente:

$$y = 4x, \quad y = -\frac{1}{2}x$$

(2) Se o gráfico da Função diretamente proporcional, $y = kx$, passa pelos primeiro e terceiro quadrantes, o valor de y ________________ à medida que o valor de x aumenta.

6. Resumo

(1) Peça aos alunos que resumam o que aprendemos nesta aula.

(2) Revejam o resumo juntos:

- Qual é o gráfico da função diretamente proporcional?
- Quais são as propriedades da função diretamente proporcional?

7. Tarefa de casa

Nesta seção, **Função Diretamente Proporcional 2**, o material curricular de Xangai também propõe um planejamento de tempo para executar cada uma das 6 (seis) atividades propostas para a sala de aula, antes da sétima atividade, Tarefa de Casa.

Planejamento proposto:

1. Introdução (5 minutos)
2. Prática e Discussão (10 minutos)
3. Propriedades da função diretamente proporcional (10 minutos)
4. Exemplo e explicação (5 minutos)
5. Prática (5 minutos)
6. Resumo (5 minutos)

3.2.1.3 Gráficos de Funções Lineares 1

1. Questões Iniciais

Na próxima aula, o tema definido são os gráficos das funções lineares. O professor utiliza como exemplo a função $y = 2x + 1$, para o qual os alunos devem construir uma tabela e desenhar o gráfico de acordo com os passos abaixo:

Etapa 1: Liste os pares ordenados (x, y)

Nesta etapa, os alunos devem chegar a uma tabela semelhante à Tabela 15.

Tabela 15 – Lista de pares (x, y) para a função $y = 2x + 1$.

x	...	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...
$y = 2x + 1$	...	-3	-1	0	1	2	3	5	...

Fonte: Elaborado pelo autor.

Etapa 2: Marque os pontos

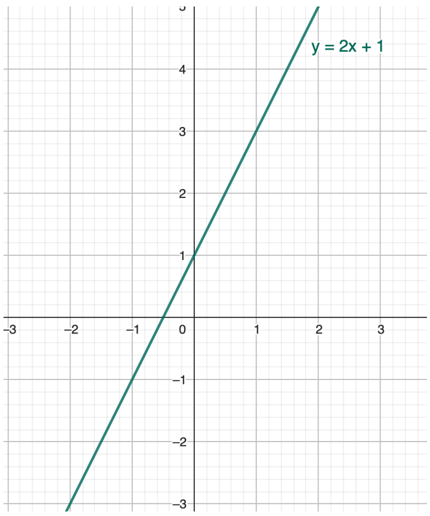
O valor de x e y de cada par representa a abscissa e ordenada de cada ponto, respectivamente.

Etapa 3: Una os pontos

Una todos os pontos utilizando uma linha suave.

Após unir todos os pontos, o resultado deverá ser semelhante ao representado na Figura 31.

Figura 31 – Gráfico $y = 2x + 1$



Fonte: Elaborado pelo autor.

2. Observe e pense

Qual é o gráfico da função $y = 2x + 1$?

Descobrimos que, ao representar os valores de várias soluções da função $y = 2x + 1$ como pares ordenados, e ao plotar esses pares ordenados em um plano cartesiano, os pontos se alinham em uma **linha reta**. Essa linha reta é chamada de **gráfico da função**.

De modo geral, o gráfico de uma função linear $y = kx + b$ (onde k e b são constantes e $k \neq 0$) é uma **reta**. Assim, a função linear $y = kx + b$ também é chamada de **reta** $y = kx + b$. A forma $y = kx + b$ é considerada como a expressão da reta.

3. Reflita e tente

Qual é a relação entre a expressão da função linear e as coordenadas de seus pontos de interseção com os eixos no sistema de coordenadas cartesianas?

Exemplo 1

Encontre as coordenadas onde o gráfico das seguintes funções lineares intercepta os eixos no sistema de coordenadas cartesianas.

(1) $y = \frac{1}{2}x - 1$

(2) $y = 3x + 3$

(3) $y = -4x + 8$

Solução:

- (1) Se $y = 0$, então $x = 2$. Se $x = 0$, então $y = -1$.
  Assim, o gráfico da função $y = \frac{1}{2}x - 1$ intercepta o eixo x no ponto $(2, 0)$ e o eixo y no ponto $(0, -1)$.
- (2) Se $y = 0$, então $x = -1$. Se $x = 0$, então $y = 3$.
  Assim, o gráfico da função $y = 3x + 3$ intercepta o eixo x no ponto $(-1, 0)$ e o eixo y no ponto $(0, 3)$.
- (3) Se $y = 0$, então $x = 2$. Se $x = 0$, então $y = 8$.
  Assim, o gráfico da função $y = -4x + 8$ intercepta o eixo x no ponto $(2, 0)$ e o eixo y no ponto $(0, 8)$.

Observe e descubra as características das coordenadas onde o gráfico intercepta o eixo y. Qual é a relação entre a coordenada e a expressão da função?

Em geral: a reta $y = kx + b$ ($k \neq 0$) intercepta o eixo y no ponto $(0, b)$. O *coeficiente linear* é a ordenada do ponto onde a reta cruza o eixo y.

Exemplo 2

Escreva o coeficiente linear e as coordenadas do ponto onde a reta cruza o eixo y para as seguintes funções lineares.

(1) $y = -3x - 8$

(2) $y = 10x$

(3) $y = (m - 9)x + 7 \quad (m \neq 9)$

Solução:

- (1) O coeficiente linear é -8 e o ponto de interseção com o eixo y é $(0, -8)$;
- (2) O coeficiente linear é 0 e o ponto de interseção com o eixo y é $(0, 0)$;
- (3) O coeficiente linear é 7 e o ponto de interseção com o eixo y é $(0, 7)$.

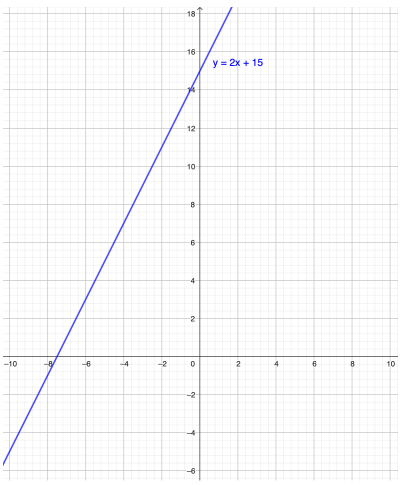
Exemplo 3

Dada a equação $y = kx + b$, e sabendo que os pontos $A(-5, 5)$ e $B(5, 25)$ pertencem ao gráfico,
(1) Encontre os valores de k e b.
(2) Esboce o gráfico no sistema de coordenadas cartesianas.
Solução:
(1) Os pontos $A(-5, 5)$ e $B(5, 25)$ pertencem ao gráfico de $y = kx + b$. Logo, temos o sistema:

$$\begin{cases} -5k + b = 5 \\ 5k + b = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ b = 15 \end{cases}$$

Assim, a equação da reta é $y = 2x + 15$.
O ponto de interseção com o eixo x é $(-7{,}5,\ 0)$ e com o eixo y é $(0,\ 15)$.
Uma linha reta pode ser determinada por dois pontos.
Desta forma, podemos obter o gráfico de $y = 2x + 15$, traçando uma reta passando por A e B, conforme Figura 32.

Figura 32 – Gráfico $y = 2x + 15$



Fonte: Elaborado pelo autor.

4. Prática

(1) Escreva as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos e esboce o gráfico da função $y = -6x + 2$ no sistema de coordenadas retangulares.

(2) Dada a reta $y = kx + b$ e o ponto $A(-1, 2)$ pertencente ao gráfico. Sabendo que o coeficiente linear é 3, determine os valores de k e b.

Encontre os valores de k e b.

Esboce o gráfico no sistema de coordenadas retangulares.

(3) Dada a função linear $y = (t + 2)x + 2t - 1$, se o coeficiente linear for 1, determine a área do triângulo formado pela reta $y = (t + 2)x + 2t - 1$ e os eixos coordenados.

3.2.1.4 Gráficos de Funções Lineares 2

A seção dá continuidade ao estudo dos gráficos iniciado na seção anterior, começando por um problema inicial. Nesta seção, o material irá explorar o significado geométrico dos coeficientes k e b da função linear $y = kx + b$

1. Questões Iniciais

1) Desenhe os gráficos das seguintes funções lineares:

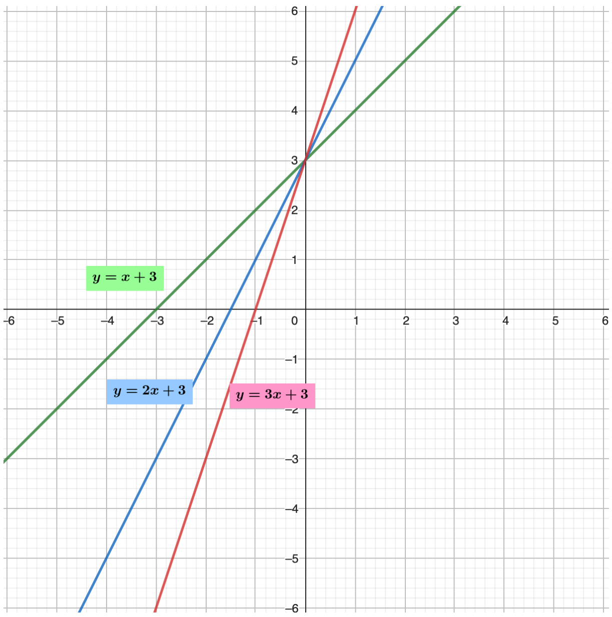
   (a) $y = x + 3$

   (b) $y = 2x + 3$

   (c) $y = 3x + 3$

   Qual a semelhança e a diferença entre os gráficos?

Figura 33 – Gráficos das funções $y = x + 3$, $y = 2x + 3$ e $y = 3x + 3$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2) Desenhe os gráficos das seguintes funções lineares:

   (a) $y = -0{,}5x + 10$

   (b) $y = -2x + 10$

   (c) $y = -6x + 10$

Figura 34 – Gráficos das funções $y = -0{,}5x + 10$, $y = -2x + 10$ e $y = -6x + 10$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O significado geométrico de k e b

Que papel desempenham os coeficientes b e k?

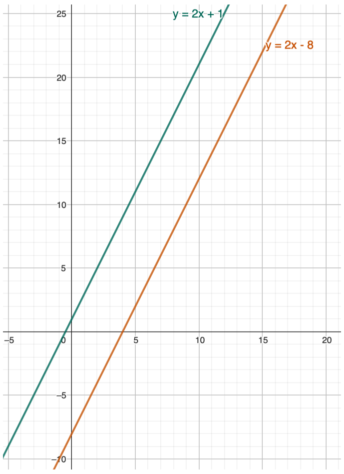
i - **Constante** b: O gráfico da função $y = kx + b$ intercepta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, b)$.

ii - **Coeficiente** k: A inclinação da reta $y = kx + b$ depende do valor de $|k|$. Quanto maior o valor de $|k|$, mais inclinada é a reta.

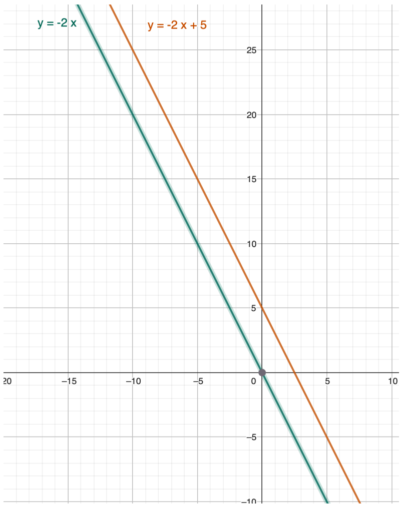
Observe e Pense

(1) **Qual é a relação entre as retas $y = kx + b$ com o mesmo valor do coeficiente k?**

Figura 35 – Gráficos de funções com o mesmo coeficiente angular k (retas paralelas)



(a) Funções $y = 2x+1$ e $y = 2x - 8$



(b) Funções $y = -2x$ e $y = -2x + 5$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Conclusão

- De modo geral, o gráfico da função linear $y = kx + b$ (com $b \neq 0$) é uma linha reta, que é uma translação da reta $y = kx$.
- Se $b > 0$, a reta é transladada em b unidades para cima ; se $b < 0$, é transladada $|b|$ unidades para baixo .
- Se $k_1 = k_2$ e $b_1 \neq b_2$, então as retas $y = k_1x + b_1$ e $y = k_2x + b_2$ são paralelas.
- Reciprocamente, se duas retas $y = k_1x + b_1$ e $y = k_2x + b_2$ são paralelas, então $k_1 = k_2$ e $b_1 \neq b_2$.

Exemplo: Reta passando por um ponto e paralela a outra

Dada uma reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e é paralela à reta $y = 3x - 4$.

(1) Determinar a expressão analítica da função linear.

(2) Calcular a área do triângulo formado pela reta, o eixo x e o eixo y.

Solução:

(1) Suponha que a expressão analítica da reta seja $y = kx + b$, com $k \neq 0$.

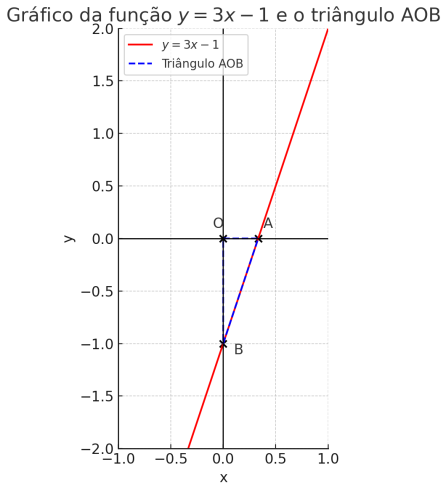
- Como a reta é paralela à reta $y = 3x - 4$, o coeficiente angular é o mesmo: $k = 3$.
- A reta $y = kx + b$ passa pelo ponto $(1, 2)$. Substituindo:

$$2 = 3 \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

- Portanto, a expressão da reta é: $y = 3x - 1$.

(2) A reta $y = 3x - 1$ intercepta:

Figura 36 – Gráfico da função $y = 3x - 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

- O eixo y no ponto $(0, -1)$, então $OB = 1$
- O eixo x quando $y = 0 \Rightarrow 0 = 3x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$, logo $OA = \frac{1}{3}$

A área do triângulo $\triangle AOB$ formado é:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

3. Prática

(1) Translade o gráfico da reta $y = 3x + 2$, 4 unidades para cima ao longo do eixo y, então a reta obtida é ________________________.

(2) Se o gráfico de uma função linear é paralelo à reta $y = -x$ e passa pelos pontos $(0, 2)$ e $(m, 0)$, então $m =$ __________________.

(3) Sabendo que o gráfico de $y_1 = k_1x + b_1$ é paralelo ao de $y_2 = k_2x + b_2$, e que a reta $y_1 = k_1x + b_1$ passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(-3, -4)$, e que a reta $y_2 = k_2x + b_2$ intercepta o eixo y no ponto $(0, 12)$, determine a expressão analítica de $y_1 = k_1x + b_1$ e $y_2 = k_2x + b_2$.

3.2.1.5 Gráficos de Função Linear 3

Nesta terceira parte do estudo sobre os gráficos de funções lineares, é aprofundada a compreensão da relação entre a função e os conjuntos de valores associados às desigualdades e aos pontos de interseção com os eixos coordenados.

São abordadas situações envolvendo o posicionamento do gráfico da função linear em relação ao eixo x, assim como a análise dos valores de x para os quais a função assume valores positivos, negativos ou nulos. Também é explorada a interpretação geométrica de pontos acima ou abaixo de um dado ponto da reta, reforçando a conexão entre álgebra e geometria.

O objetivo desta seção é desenvolver a habilidade de analisar graficamente condições do tipo $y > 0$, $y < 0$, $y > k$, bem como trabalhar com translações verticais e identificar seus efeitos sobre os conjuntos solução de equações e desigualdades lineares.

1. Questões Iniciais

Reflita e revise

(1) Desenhe o gráfico de $y = -2x + 1$

(i) Determine o conjunto dos possíveis valores da coordenada x, se $y > 0$;

(ii) Determine o conjunto dos possíveis valores da coordenada x, se $y = 0$;

(iii) Determine o conjunto dos possíveis valores da coordenada x, se $y < 0$.

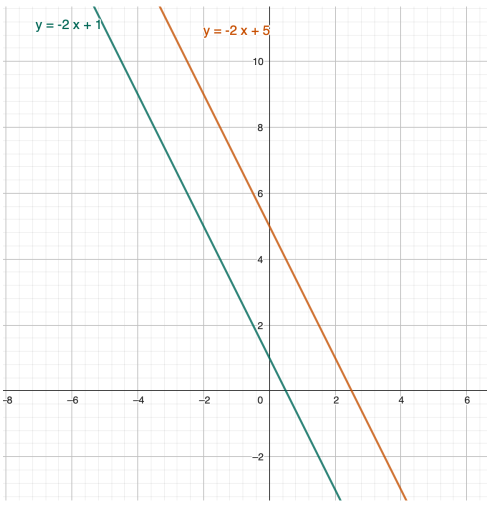
(2) Translade o gráfico de $y = -2x + 1$, 4 unidades para cima

(i) Determine o conjunto dos possíveis valores da coordenada x, se $y > 0$;

(ii) Determine o conjunto dos possíveis valores da coordenada x, se $y = 0$;

(iii) Determine o conjunto dos possíveis valores da coordenada x, se $y < 0$.

Figura 37 – Gráfico das funções $y = -2x + 1$ e $y = -2x + 5$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Combinando álgebra e figuras: Qual é a relação entre o conjunto de valores e os gráficos?

Considere $y = kx + b$, com k e b números reais e $k \neq 0$.

- Quando $y = 0$, o valor de x é a solução da equação $kx + b = 0$, bem como a coordenada do ponto no qual o gráfico de $y = kx + b$ intercepta o eixo x;
- Quando $y > 0$, o conjunto de valores de x é a solução da desigualdade $kx + b > 0$, bem como a parte do gráfico de $y = kx + b$ que está acima do eixo x;
- Quando $y < 0$, o conjunto de valores de x é a solução da desigualdade $kx + b < 0$, bem como a parte do gráfico de $y = kx + b$ que está abaixo do eixo x.

2. Exemplo

Exemplo

É dado que o gráfico da função linear $y = kx + b$ é paralelo à reta $y = \frac{1}{2}x - 2$ e passa pelo ponto $M(2, 2)$.

(1) Encontre a expressão analítica da função linear.

(2) Encontre o conjunto de valores possíveis das abscissas dos pontos que estão na parte da reta acima do ponto M.

(3) Encontre o conjunto de valores possíveis das abscissas dos pontos que estão na parte da reta abaixo do ponto M e acima do eixo x.

Solução:

(1) Sabemos que a função é paralela à reta $y = \frac{1}{2}x - 2$, então o coeficiente angular é $k = \frac{1}{2}$, logo:

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

Como a reta passa pelo ponto $M(2, 2)$, substituímos:

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow 2 = 1 + b \Rightarrow b = 1$$

Assim, a expressão analítica da função linear é:

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

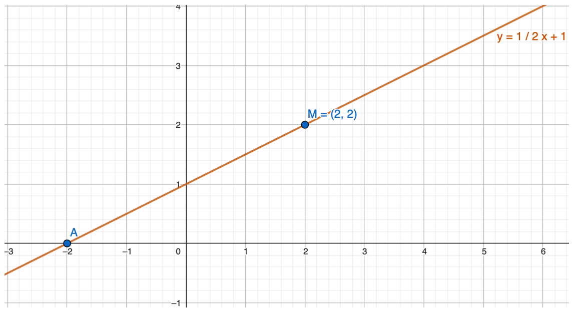
(2) Para encontrar os valores de x para os quais os pontos estão acima de M, resolvemos:

$$\frac{1}{2}x + 1 > 2 \Rightarrow \frac{1}{2}x > 1 \Rightarrow x > 2$$

(3) Conforme mostrado no gráfico, os pontos abaixo do ponto M satisfazem $x < 2$, e os pontos acima do eixo x satisfazem $\frac{1}{2}x + 1 > 0 \Rightarrow x > -2$. Portanto, o conjunto solução é:

$$-2 < x < 2$$

Figura 38 – Gráfico da função $y = \frac{1}{2}x + 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3. Prática

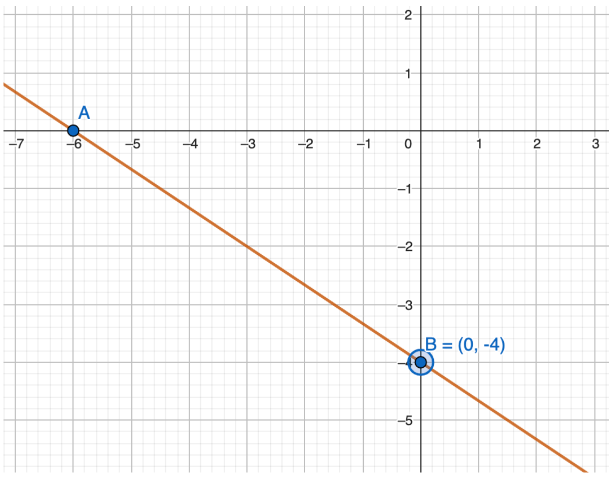
(1) Considere que o gráfico da função linear $y = kx + b$ passa pelo ponto $A(-6, 0)$ e pelo ponto $B(0, -4)$. Responda às perguntas abaixo de acordo com o gráfico a seguir.

I - Quais valores x pode assumir para que tenhamos $y > 0$?

II - Quais valores y pode assumir para que tenhamos$x > 0$?

III - Encontre o conjunto de possíveis valores das abscissas dos pontos que estão ao mesmo tempo na parte da reta acima do ponto B e abaixo do eixo x.

Figura 39 – Gráfico da função $y = -\frac{2}{3}x - 4$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

(2) **Correção de erro:** Dada a função $y = -x + 3$, encontre o conjunto dos valores possíveis da abscissa dos pontos que estão abaixo do ponto $C(2, t)$. Lily escreveu como $t < 1$ e Ryan escreveu como $t < 0$. Quem está correto?

(3) **Desafio:** Dada a função $y = -x - 6$, encontre o conjunto solução de $-x < y < -x - 10$.

Para além de tudo isso, fica destacado também que pela estrutura do material, essa temática foi dividida em quatro aulas, sendo as três primeiras com o conteúdo programático, e a última aula uma revisão geral do tema. Além dessa revisão, ao final da explicação de cada aula são deixados alguns exercícios para prática.

Fica evidente, também, que o método de ensino preza por uma maior autonomia do aluno, fazendo com que o aluno chegue às próprias conclusões antes de serem apresentados ao conteúdo formalmente pelo professor, o que estimula o senso crítico e raciocínio lógico dos educandos.

3.2.2 Livro do Programa Nacional do Livro Didático

Diferentemente do material de Xangai, o livro de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020) não separa as noções iniciais de funções do estudo das funções lineares. A seção do livro se inicia retomando o exemplo do taxímetro abordado anteriormente, na subseção do Livro Didático do PNLD da seção de Noções Iniciais de Funções:

Problema do Taxímetro

Em São Paulo (SP), em fevereiro de 2020, o valor da bandeirada dos táxis era de R$ 4,50, e o custo por quilômetro rodado na bandeira 1 era de R$ 2,75.
O preço p a ser cobrado por uma corrida depende da distância percorrida x e pode ser representado por uma função.
Considerando que o táxi não cobra tempo de parada, o valor total é composto pela bandeirada (parte fixa) e pela distância percorrida (parte variável).
Assim, a função que expressa o preço p em função da distância x é estabelecida com base nesses valores e pode ser expressa da forma abaixo:

$$\boxed{p(x) = 4{,}50 + 2{,}75x \quad \text{ou} \quad y = 2{,}75x + 4{,}50}$$

É apresentada outra situação que pode ser modelada e analisada por meio de uma função:

Problema da caixa d'água

Um encanador foi contratado para resolver o problema de vazamento em uma residência e, para ter noção da quantidade de água desperdiçada e localizar o vazamento, fechou todos os registros até que a caixa-d'água de 1000 litros ficasse completamente cheia. Na rede em que detectou o vazamento, ele percebeu que 8 litros de água eram desperdiçados a cada hora.
A quantidade de água q (em litro) que resta na caixa-d'água é uma função do tempo t (em hora) e pode ser representada pela lei:

$$\boxed{q(t) = 1000 - 8t \quad \text{ou} \quad y = -8t + 1000}$$

As leis de formação utilizadas para representar cada situação apresentada anteriormente são exemplos de leis de função afim, que podemos definir como indicado a seguir. Dessa forma é definida a Função Afim:

Definição - Função Afim

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais, é chamada de **função afim**.

O livro apresenta outros exemplos de leis de função afim:

a) $f(x) = 5x + 1$ ou $y = 5x + 1$;

b) $g(x) = -\sqrt{2}\,x - 1$ ou $y = -\sqrt{2}\,x - 1$;

c) $h(x) = -\dfrac{2}{5}x$ ou $y = -\dfrac{2}{5}x$;

d) $z(x) = 14{,}90$ ou $y = 14{,}90$.

Reafirmando aos alunos de que x é a variável independente e y é a variável dependente na função afim dada por $y = ax + b$. Ao atribuir valores para a variável independente x, obtemos y, o **valor da função**. Observe alguns exemplos:

- Considerando a função dada por $f(x) = 5x + 1$, podemos calcular $f(3)$ da seguinte maneira:

$$f(3) = 5 \cdot 3 + 1 \Rightarrow f(3) = 16$$

Portanto, 16 é o valor da função f para $x = 3$.

- Considerando a função dada por $h(x) = -\dfrac{2}{5}x$, podemos calcular $h(-20)$ da seguinte maneira:

$$h(-20) = -\frac{2}{5} \cdot (-20) \Rightarrow h(-20) = 8$$

Portanto, 8 é o valor da função h para $x = -20$.

O livro finaliza enfatizando que em uma **função afim** dada por $f(x) = ax + b$, os números reais a e b são chamados **coeficientes** e, de acordo com seus valores, a **função afim** recebe alguns nomes particulares que serão estudados a seguir.

3.2.2.1 Função Polinomial do 1° Grau

Quando o coeficiente a da função afim é **diferente de zero**, a função recebe o nome de **função polinomial do 1° grau**, pois a relação entre a variável dependente e a variável independente é expressa por um polinômio do 1° grau.

Definição - Função Polinomial do 1° Grau:

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, é chamada de **função polinomial do 1° grau**.

a) $f(x) = 2x - 1$, em que $a = 2$ e $b = -1$;

b) $y = 0{,}5x + \sqrt{2}$, em que $a = 0{,}5$ e $b = \sqrt{2}$;

c) $y = \frac{2}{3} + 2x$, em que $a = 2$ e $b = \frac{2}{3}$;

d) $f(x) = 4x$, em que $a = 4$ e $b = 0$.

1. Função Identidade

Quando $a = 1$ e $b = 0$, a função polinomial do 1º grau é expressa pela lei $f(x) = x$ e é chamada **função identidade**.

Definição - Função Identidade:

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é chamada de **função identidade**.

A função identidade recebe esse nome, pois associa cada valor de $x \in \mathbb{R}$ a ele mesmo. Por exemplo:

- $f(1) = 1$;
- $f(0{,}5) = 0{,}5$;
- $f(-3) = -3$;
- $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

3.2.2.2 Função Linear

O livro apresenta um exemplo de um novo tipo de função afim:

Considere, agora, a situação a seguir.

Um certo modelo de veículo blindado consome aproximadamente 0,25 litro de combustível por quilômetro rodado. Podemos dizer que a quantidade y de combustível consumido (em litro) é função da distância x percorrida (em quilômetro) e pode ser indicada pela lei:

$$\boxed{y = 0{,}25x}$$

Nessa situação, temos um exemplo de função afim, conhecida também como **função linear**, que definimos da seguinte maneira:

Definição - Função Linear:

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, com a real é chamada de **função linear**.

Observe alguns exemplos de leis de função linear:

a) $f(x) = -7x$, em que $a = -7$;

b) $y = x\sqrt{3}$, em que $a = \sqrt{3}$;

c) $y = -\frac{x}{3}$, em que $a = -\frac{1}{3}$;

d) $y = x$, em que $a = 1$.

1. Função linear e proporcionalidade

É retomado, brevemente, sobre a característica de proporcionalidade das funções lineares. Pensando na situação que relaciona o consumo de combustível y (em litro) de um modelo de carro blindado e a distância x que ele percorre (em quilômetro) por meio de uma função linear dada por $y = 0{,}25x$, podemos construir uma tabela para analisar a relação entre alguns valores. Observe:

Figura 40 – Relação entre a distância percorrida e o consumo de combustível de um carro blindado

x (em quilômetro)	*y* (em litro)
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	1,00
⋮	⋮
10	2,50

Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Perceba que, ao dobrarmos o valor de x, o valor correspondente de y também dobra. Se multiplicarmos x por 3, o valor correspondente de y também será multiplicado por 3, e assim sucessivamente.

Nesse caso, dizemos que as variáveis x e y representam **grandezas diretamente proporcionais** e a constante de proporcionalidade k pode ser obtida pela razão $\frac{y}{x}$, quando $x \neq 0$.

$$k = \frac{0{,}25}{1} = \frac{0{,}50}{2} = \frac{0{,}75}{3} = \frac{1{,}00}{4} = \cdots = \frac{2{,}50}{10} = 0{,}25, \text{ ou seja, } k = 0{,}25$$

/

> Em uma função linear, cuja lei de formação é dada por $y = ax$, com $a \neq 0$, quando $a > 0$, dizemos que as variáveis x e y representam **grandezas diretamente proporcionais**. A constante de proporcionalidade k é o coeficiente a da função.

2. Função Constante

Outro tipo de função afim é a **função constante**, definida a seguir.

Definição - Função Costante:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = b, \quad \text{com } b \in \mathbb{R}.$$

A função constante associa cada valor de $x \in \mathbb{R}$ sempre ao mesmo valor b. Nesse caso, o conjunto imagem da função constante é $\text{Im}(f) = \{b\}$.

Por exemplo, para a função constante f dada por $f(x) = 12$, todos os elementos de $D(f)$ têm imagem igual a 12. Veja alguns deles:

- $f(0) = 12$;

- $f(-3) = 12$;
- $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 12$;
- $f(\sqrt{2}) = 12$.

A seção é finalizada com exercícios, como os abaixo:

Alguns Exercícios apresentados no livro

22. Considere as funções reais definidas a seguir:

I. $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

II. $g(x) = -2x + \sqrt{3}$

III. $h(x) = \frac{2}{5}x$

IV. $i(x) = 0{,}01$

a) Qual(is) dessas leis é(são) de função afim?

b) Classifique as funções afins em função polinomial do 1º grau, função linear e/ou função constante.

c) Para as funções afins, identifique os valores dos coeficientes a e b.

23. Dada a função definida por $f(x) = 5x - 2$, determine:

a) $f(2)$

b) o valor de x para $f(x) = 0$

24. (FEI-SP) As locadoras X e Y alugam carros do mesmo tipo. A locadora X cobra uma diária fixa de R$ 100,00, mais R$ 1,30 por quilômetro rodado. A locadora Y cobra uma diária fixa de R$ 70,00, mais R$ 1,50 por quilômetro rodado. Assinale a alternativa correta. Se um indivíduo rodar:

a) 100 quilômetros em um dia, ele pagará R$ 230,00 na locadora Y.

b) 100 quilômetros em um dia, será mais vantajoso contratar a locadora X.

c) acima de 150 quilômetros em um dia, será mais vantajoso contratar a locadora X.

d) 200 quilômetros em um dia, ele pagará a mesma quantia nas locadoras X e Y.

25. Considere uma função afim, dada por $y = h(x)$. Sabendo que $h(1) = 4e + h(-2) = 10$, escreva a lei da função h e calcule $h\left(-\frac{1}{2}\right)$.

26. Dada a função definida por $f(x) = ax+2$, determine o valor de a para que se tenha $f(4) = 20$.

27. Sofia quer produzir folhetos com a propaganda de sua empresa. Na gráfica A, o valor da impressão desse folheto, por unidade, é de R$ 0,30. A gráfica B cobra R$ 0,25 para impressão e uma taxa fixa de R$ 50,00.

a) Escreva a função que relaciona o valor y a ser pago pela impressão, em reais, com o número de folhetos impressos x, no caso de cada uma dessas gráficas.

b) Na gráfica A, o valor pago pela impressão é diretamente proporcional ao número de unidades impressas? E na gráfica B? Justifique.

c) Se Sofia encomendar 1000 folhetos na gráfica B, quantos reais gastará?

28. Sabendo que f é uma função linear e que $f(-3) = 4$, determine o valor de $f(6)$.

3.2.2.3 Gráfico da função afim

O estudo dos gráficos é feito com a apresentação do conceito do gráfico de uma função f, da forma apresentada à seguir:

Vimos que o gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x \in D(f)$ e $y = f(x)$.

É possível demonstrar que o gráfico da função afim é uma **reta**. Com base nisso, podemos localizar no sistema cartesiano dois pontos distintos pertencentes ao gráfico da função afim e traçar a reta correspondente.

Inicialmente, construímos uma tabela com dois valores de $x \in \mathbb{R}$ e determinamos os valores de $y = f(x)$ para obter os pares ordenados desses pontos. Em seguida, localizamos esses pontos no sistema cartesiano e traçamos a reta determinada por eles, que é o gráfico da função f.

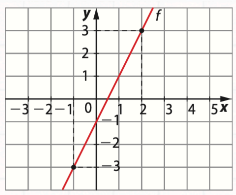
Acompanhe alguns exemplos.

a) O gráfico da função afim definida por $f(x) = 2x - 1$.

Primeiramente, escolhemos dois valores reais para x e obtemos os pares ordenados dos dois pontos pertencentes ao gráfico de f. Em seguida, traçamos o gráfico.

Figura 41 – Gráfico da Função $f(x) = 2x - 1$

x	$y = 2x - 1$	(x, y)
−1	$y = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$	$(-1, -3)$
2	$y = 2 \cdot (2) - 1 = 3$	$(2, 3)$



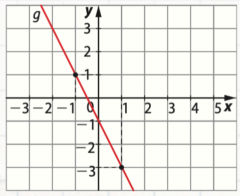
Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

b) O gráfico da função afim definida por $g(x) = -2x - 1$.

Inicialmente, escolhemos dois valores reais para x e obtemos os pares ordenados de dois pontos pertencentes ao gráfico de g. Em seguida, traçamos o gráfico.

Figura 42 – Gráfico da Função $f(x) = -2x - 1$

x	**y = −2x − 1**	**(x, y)**
−1	$y = -2 \cdot (-1) - 1 = 1$	(−1, 1)
1	$y = -2 \cdot (1) - 1 = -3$	(1, −3)

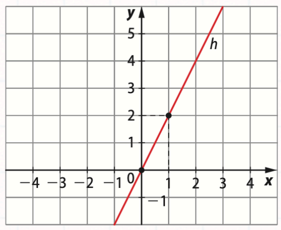


Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

c) O gráfico da função afim definida por $h(x) = 2x$.
Observe que a função h é uma função linear. Como a lei de formação de uma função linear é da forma $y = ax$, substituindo $x = 0$ nessa lei, temos $y = a \cdot 0 = 0$. Portanto, o gráfico da função linear sempre passa pelo ponto $(0, 0)$, origem do sistema cartesiano.

Figura 43 – Gráfico da Função $f(x) = 2x$

x	**y = 2x**	**(x, y)**
0	$y = 2 \cdot (0) = 0$	(0, 0)
1	$y = 2 \cdot (1) = 2$	(1, 2)

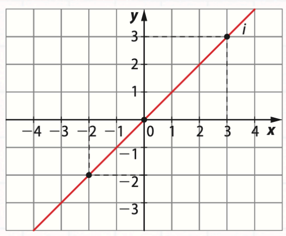


Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

d) O gráfico da função afim definida por $i(x) = x$.
Observe que a função i é a função identidade, que associa cada valor de x do domínio a ele mesmo. O gráfico da função i também passa pela origem do sistema cartesiano.

Figura 44 – Gráfico da Função $f(x) = x$

x	**y = x**	**(x, y)**
−2	$y = -2$	(−2, −2)
3	$y = 3$	(3, 3)



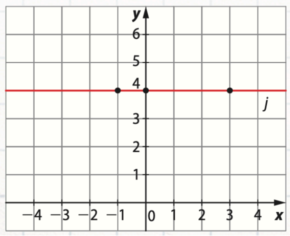
Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

O gráfico da função identidade é a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares do plano cartesiano.

e) O gráfico da função afim definida por $j(x) = 4$.
Observe que a função j é uma função constante. Para qualquer valor de x no domínio da função, y é igual a 4. Portanto, o gráfico é uma reta paralela ao eixo x que intersecta o eixo y no ponto $(0, 4)$.

Figura 45 – Gráfico da Função $f(x) = 4$

x	y = 4	(x, y)
−1	y = 4	(−1, 4)
3	y = 4	(3, 4)



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

O gráfico de uma função constante definida por $y = k$, em que $k \in \mathbb{R}$, é uma reta paralela ao eixo x que intersecta o eixo y no ponto $(0, k)$.

3.2.2.4 Zero da função afim

O material segue então com a apresentação do conceito de Zero de uma função:

Definição - Zero de uma Função:

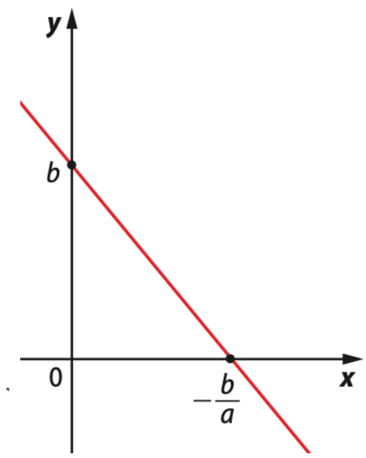
Em uma função $f : A \to B$, um valor de $x \in A$ tal que $f(x) = 0$ é chamado **zero da função** f.

No caso da função afim, definida por $f(x) = ax + b$, quando $a \neq 0$, resolvemos a equação $f(x) = 0$, ou seja, $ax + b = 0$ para determinar o zero da função f. Nesse caso, temos:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Logo, quando $a \neq 0$, o zero de uma função afim é dado por $x = -\frac{b}{a}$. O zero da função afim é a abscissa do ponto em que o gráfico cruza o eixo x, como indicado na figura.

Figura 46 – Representação de uma Função Afim



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Se $a = 0$, temos duas situações:

- $b \neq 0$: nesse caso, temos uma função constante cujo gráfico não cruza o eixo x e, portanto, não há zero da função;

- $b = 0$: nesse caso, temos uma função constante dada por $y = 0$, conhecida também como função nula, cujo gráfico é uma reta coincidente com o eixo x e, portanto, todo $x \in \mathbb{R}$ é zero da função nula.

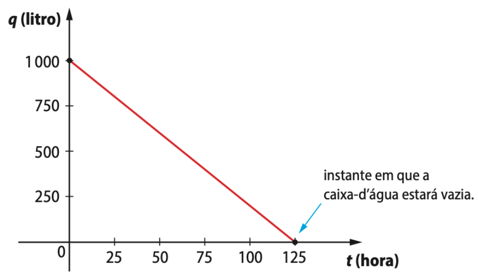
Vimos em uma situação apresentada anteriormente que, por causa de um vazamento, a quantidade de água q em uma caixa-d'água, em litro, varia em função do tempo t, em hora, de acordo com a lei $y = -8t + 1000$.

Para saber em quanto tempo esse vazamento esvaziará essa caixa-d'água, considerando que o registro de entrada de água na caixa permaneça fechado, podemos determinar o zero dessa função. Nesse caso, temos:

$$-8t + 1000 = 0 \Rightarrow -8t = -1000 \Rightarrow t = 125$$

Portanto, nas condições apresentadas, o vazamento esvaziará essa caixa-d'água em 125 horas. Geometricamente, essa situação também pode ser interpretada por meio do gráfico da função, como indicado a seguir.

Figura 47 – Gráfico da função $y = -8t + 1000$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

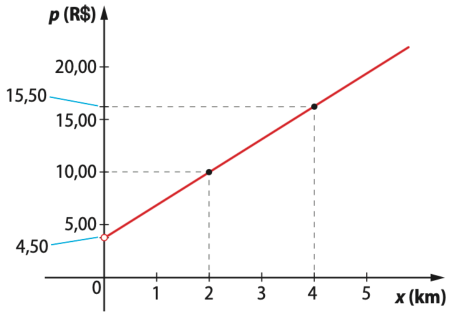
3.2.2.5 Taxa de variação

O próximo tema abordado é a taxa de variação de uma função, onde é explicado aos alunos como a variação dos valores da função pode ser obtida.

O livro utiliza de exemplo uma função dada por $p(x) = 2{,}75x + 4{,}50$ para representar a relação entre o preço de uma corrida de táxi, em reais, e a distância percorrida, em quilômetro.

Observe a seguir o gráfico dessa função, verificando que, nessa situação, temos $x > 0$.

Figura 48 – Gráfico da função $p(x) = 2,75x + 4,50$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Perceba que, na situação apresentada, há uma variação nos valores da função p à medida que os valores correspondentes de x também variam. Estudaremos agora uma maneira de fazer essa análise utilizando a **taxa de variação média**.

Taxa de variação média de uma função

Considerando uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dois números reais x_1 e x_2, tais que $x_1 < x_2$, a **taxa de variação média da função** no intervalo $[x_1, x_2]$ é dada por:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

O livro demonstra como pode ser feita a determinação da taxa de variação da função:

Determinação da taxa de variação

Podemos determinar a taxa de variação média da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax+b$, em um intervalo $[x_1, x_2]$, com $x_1 \neq x_2$, da seguinte maneira:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Logo, a taxa de variação média da função afim definida por $f(x) = ax+b$, em relação a x, é dada pelo coeficiente a.

O coeficiente a é também conhecido como **coeficiente angular** ou **declividade** da reta correspondente ao gráfico da função afim e está relacionado com a inclinação da reta em relação ao eixo x.

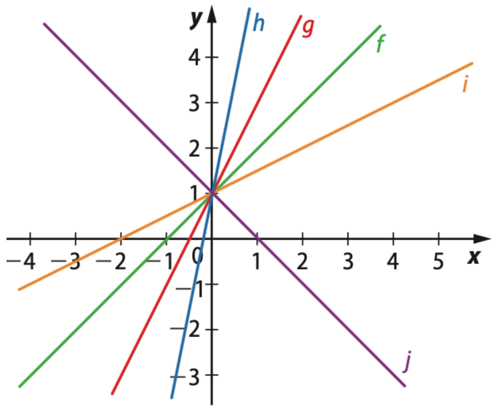
O coeficiente b, denominado **coeficiente linear** dessa reta, é a ordenada do ponto em que o gráfico da função afim cruza o eixo y.

Observe e compare, em um mesmo sistema cartesiano, o gráfico de algumas funções afins, considerando diferentes valores de a.

- $f(x) = x + 1$
- $g(x) = 2x + 1$
- $h(x) = 5x + 1$
- $i(x) = \frac{1}{2}x + 1$

- $j(x) = -x + 1$

Figura 49 – Gráficos de funções afins com o mesmo valor de b e diferentes valores de a

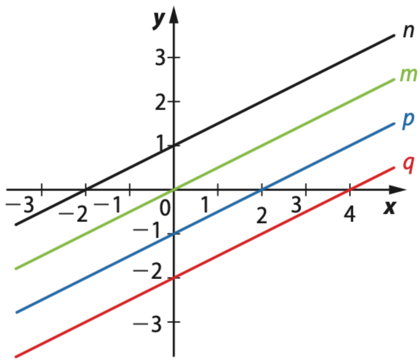


Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Observe e compare agora, em um mesmo sistema cartesiano, o gráfico de algumas funções afins, considerando diferentes valores de b.

- $m(x) = \dfrac{1}{2}x$
- $n(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$
- $p(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$
- $q(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$

Figura 50 – Gráficos de funções afins com o mesmo valor de a e diferentes valores de b



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Veja que os gráficos das funções afins com o mesmo coeficiente a possuem a mesma inclinação em relação ao eixo x, ou seja, são retas paralelas entre si.

A seção do livro é finalizada com alguns exercícios como os abaixo:

Alguns Exercícios apresentados no livro

34. Construa no sistema cartesiano ortogonal o gráfico das funções afins dadas por:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $g(x) = -x + 4$

c) $y = -\frac{1}{2}x$

d) $h(x) = -2x$

35. Determine o valor de p de modo que o gráfico da função, definida por $f(x) = 3x + p - 2$, cruze o eixo y no ponto de ordenada 4.

36. Determine m de modo que o gráfico da função f, dada por $f(x) = -2x + 4m + 5$, cruze o eixo x no ponto de abscissa 3.

37. Determine o zero de cada uma das funções afins definidas a seguir.

a) $f(x) = -3x + 4$

b) $y = \frac{3}{8}x$

c) $y = 2x + 8$

d) $y = 6 + \frac{x}{4}$

38. (**Ufop-MG**) O custo total da fabricação de determinado artigo depende do custo de produção, que é de R$ 45,00 por unidade fabricada, mais um custo fixo de R$ 2 000,00. Pede-se:

a) A função que representa o custo total em relação à quantidade fabricada.

b) O custo total da fabricação de 10 unidades.

c) O número de unidades que deverão ser fabricadas para que o custo total seja de R$ 3 800,00.

d) O gráfico da função custo total, destacando os dados obtidos nos itens anteriores.

3.2.2.6 Crescimento e decrescimento da função afim

A próxima seção do livro aborda o tema do crescimento e decrescimento da função afim. O livro destaca que estudar o comportamento de uma função à medida que os valores do domínio aumentam ou diminuem, nos permite verificar se essa função é crescente ou decrescente em um intervalo do seu domínio.

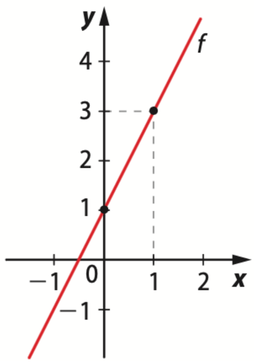
Definição - Funções Crescentes e Decrescentes

Uma função f é **crescente** em um intervalo $[a, b]$ de seu domínio $D(f)$ quando, para quaisquer valores de x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.
Uma função f é **decrescente** em um intervalo $[a, b]$ de seu domínio $D(f)$ quando, para quaisquer valores de x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

No caso da função afim, podemos determinar se ela é crescente ou decrescente com base no sinal do coeficiente a na lei de formação $y = ax + b$.

Observe os exemplos a seguir.

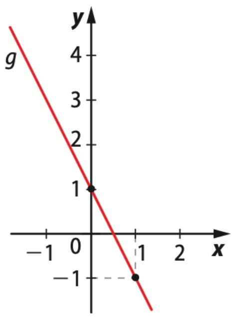
Figura 51 – Gráficos de $f(x) = 2x + 1 \quad (a > 0)$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

- Aumentando os valores atribuídos a x, aumentam também os valores correspondentes da imagem $f(x)$. A função f é **crescente** em todo seu domínio.

Figura 52 – Gráficos de $g(x) = -2x + 1 \quad (a < 0)$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

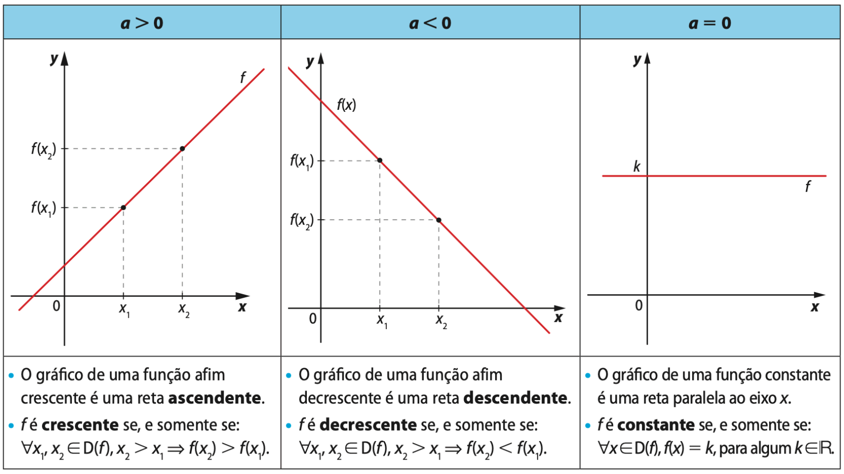
- Aumentando os valores atribuídos a x, diminuem os valores correspondentes da imagem $g(x)$. A função g é **decrescente** em todo seu domínio.

É destacado aos alunos que é possível determinar se uma função linear é crescente ou decrescente de acordo com o sinal de seu coeficiente angular, ou seja:

- Se $a > 0$, a função é crescente em todo seu domínio.
- Se $a < 0$, a função é decrescente em todo seu domínio.
- Se $a = 0$ a função é constante em todo seu domínio

Podemos também identificar se uma função afim é crescente ou se é decrescente observando a inclinação da reta que constitui o gráfico da função.

Figura 53 – Comportamento gráfico das funções afins



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

3.2.2.7 Estudo do sinal da função afim

Quanto ao estudo de sinais da função, os autores destaca que para estudar o sinal de uma função, verificamos os elementos do seu domínio para os quais a imagem pela função é um valor positivo, um valor negativo ou um valor nulo.

Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020) também utiliza uma breve definição:

Estudo dos sinais de uma função afim f

Considerando uma função f, de domínio $D(f)$, temos:

- f **é positiva** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) > 0$;
- f **é negativa** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) < 0$;
- f **é nula** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) = 0$ (zeros da função).

O livro orienta que para estudar o sinal de uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, considerando $a \neq 0$, podemos inicialmente determinar o zero da função, que genericamente pode ser escrito como:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

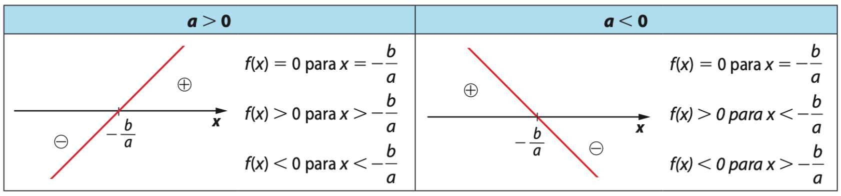
Em seguida, deve-se criar um esboço do gráfico da função afim, levando em consideração o fato de ela ser crescente ($a > 0$) ou ser decrescente ($a < 0$). Por fim, analisamos esse esboço, como indicado a seguir:

Se $a = 0$ e $b \neq 0$, a função afim é a função constante dada por $f(x) = b$. Nesse caso, temos:

Se $a = 0$ e $b = 0$, a função afim é a função nula dada por $f(x) = 0$. Portanto, a função é nula para todos os valores de x do domínio.

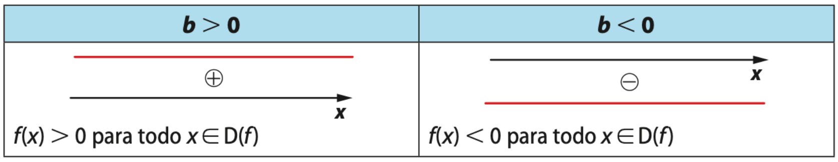
Neste ponto é finalizado o estudo das Funções Lineares. Vale destacar que o capítulo ainda possui uma seção que aborda as inequações do primeiro grau. Outro aspecto relevante é a utilização de exercícios,

Figura 54 – Estudo do sinal de uma Função Linear 1



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Figura 55 – Estudo do sinal de Função Linear 2



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

que totalizam 52 atividades em todo o capítulo, que aborda desde as noções iniciais de funções até as inequações.

3.3 Funções Quadráticas

As funções quadráticas são um alicerce da matemática, essenciais para compreender as relações que observamos em nosso dia a dia, da trajetória de uma bola a estratégias de negócios. Uma função quadrática é facilmente identificada por sua forma principal, $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números, e o $a \neq 0$. Este capítulo analisa essas funções, comparando como são ensinadas nos dois materiais didáticos: o Material de Xangai e um livro do PNLD de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020).

Começaremos explorando o Material de Xangai, que como principal característica desafia os alunos a descobrir as funções quadráticas a partir de problemas reais, como calcular a área de um cubo ou o número de jogos em um campeonato. Veremos como essa abordagem nos ajuda a construir os conceitos passo a passo, inclusive desenhando os gráficos das parábolas e entendendo como o coeficiente a afeta sua forma e para onde se abrem. Também aprenderemos sobre as translações dos gráficos, ou seja, como eles se movem para os lados ou para cima e para baixo.

Em seguida, analisaremos a abordagem de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020), que contextualiza as funções quadráticas com exemplos práticos, como o lucro de uma empresa , e explora suas aplicações em física e engenharia. Este material enfatiza o cálculo dos ”zeros”da função (onde o gráfico cruza o eixo X) usando a conhecida fórmula de Bhaskara, e nos mostrará como o ponto mais alto ou mais baixo da parábola, denominado vértice da parábola, é crucial para entender seu comportamento.

3.3.1 Material de Xangai

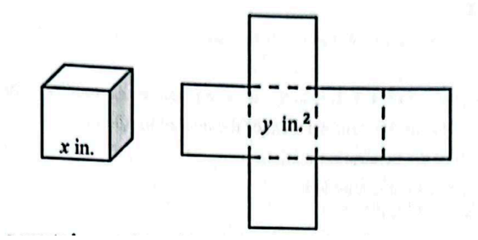
3.3.1.1 Função Quadrática

1. Questões Iniciais

O capítulo sobre equações do segundo grau se inicia com a apresentação dos seguintes problemas para que os alunos possam encontrar equações que os representem e verificar características comuns entre as equações.

(a) A área de superfície y, em polegadas quadradas (in^2), de um cubo e o comprimento do lado do cubo x, em polegadas (in).

Figura 56 – Planificação do cubo

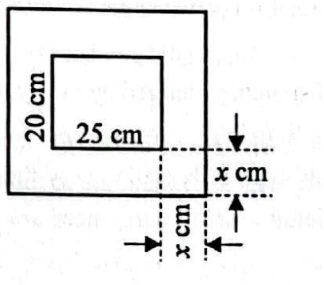


Fonte: Material de Xangai

(b) Há n times em uma liga esportiva. Em cada temporada, cada time joga contra todos os outros times uma vez. O total de jogos a serem disputados na temporada é G. Qual é a relação entre G e n?

(c) Uma borda uniforme é montada como moldura de uma fotografia. Após ser emoldurada, as dimensões da parte exposta da fotografia são 25 cm por 20 cm. Qual é a relação entre a área da moldura A (em cm^2) e a largura da borda x, em cm?

Figura 57 – Representação de uma moldura de fotografia



Fonte: Material de Xangai

Solução

(a) Aplicando a fórmula da área da superfície de um cubo, teremos:

$$y = 6x^2$$

(b) Cada time jogará com $n - 1$ times, mas a partida do time A com o time B é a mesma que a do time B com o time A.
Portanto, o número total de jogos jogados é

$$G = \frac{1}{2}n(n-1),$$

o que pode ser simplificado para:

$$G = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

(c)

$$A = (25 + 2x)(20 + 2x) - 25 \times 20,$$

o que pode ser simplificado para:

$$A = 4x^2 - 90x$$

Nas equações acima, cada variável dependente é escrita como uma **expressão quadrática** da variável independente, e cada variável independente pode ser associada a exatamente uma variável dependente. Chamamos essas funções de **funções quadráticas**:

Definição - Função Quadrática

Uma função quadrática é uma função que pode ser escrita na forma

$$y = ax^2 + bx + c,$$

onde x é a variável independente, a, b, c são constantes, e $a \neq 0$. Essa forma é chamada de **forma geral de uma função quadrática**.
Exemplos:

a) $y = x^2$

b) $y = 2x^2 + 3$

c) $y = x^2 - x + 2$

São apresentadas, a seguir, alguns exemplos de funções, para que os alunos identifiquem quais são funções quadráticas.

Exemplos do material didático

Exemplo 1: Qual das seguintes funções são funções quadráticas?

a) $y = 1 - 3x^2$

b) $y = 2x(1 + 5x) + 7$

c) $y = 1 + \frac{1}{x^2}$

d) $y = tx^2$ (t é uma constante)

Solução:

a) **Sim.** A função pode ser reescrita como $y = -3x^2 + 1$, que está na forma geral da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, com $a = -3$, $b = 0$, $c = 1$. Portanto, trata-se de uma função quadrática.

b) **Sim.** Desenvolvendo a expressão:

$$y = 2x(1 + 5x) + 7 = 2x + 10x^2 + 7 = 10x^2 + 2x + 7,$$

que está na forma $ax^2 + bx + c$, com $a = 10$, $b = 2$, $c = 7$. Logo, é uma função quadrática.

c) **Não.** A função dada é $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, e não pode ser escrita na forma polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c$, pois contém um termo com expoente negativo (inverso de x^2), o que a caracteriza como uma função racional, e não uma função quadrática.

d) **Depende.** A expressão $y = tx^2$ está na forma quadrática desde que $t \neq 0$. Caso $t = 0$, a função torna-se constante ($y = 0$) e, portanto, deixa de ser uma função quadrática. Assim, a função é quadrática somente quando $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exemplo 2: Cada relação pode ser modelada por uma função quadrática? Explique como você sabe.

a) Considere que a distância h percorrida por uma bola em queda livre em t segundos pode ser expressa pela equação
$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$
onde g é uma constante não nula. A relação entre h e t pode ser modelada por uma função quadrática?

b) Um cilindro tem altura fixa h. A relação entre o volume do cilindro V e o raio da base r pode ser modelada por uma função quadrática?

c) Uma academia cobra \$15 por aula. O valor total y cobrado pela academia por x aulas de fitness é dado em reais. A relação entre y e x pode ser modelada por uma função quadrática?

d) Um antibiótico elimina 10% de um determinado tipo de bactéria a cada hora. No início, a quantidade desse tipo de bactéria é A. Após a aplicação do antibiótico por h horas, restam N bactérias. A relação entre N e h pode ser modelada por uma função quadrática?

Solução:

a) Na equação, a variável dependente h pode ser escrita na forma $\frac{1}{2}gt^2$, onde $\frac{1}{2}g$ é uma constante, e t é a variável independente.
Usando y para h, x para t, e a para $\frac{1}{2}g$, a equação pode ser reescrita como $y = ax^2$.
Como $g \neq 0$, $\frac{1}{2}g \neq 0$, a equação está na forma de uma função quadrática. Essa situação pode ser modelada por uma função quadrática.

b) O volume V de um cilindro e sua altura h, e raio da base r, possuem a relação $V = \pi r^2 h$. Quando h é fixado, temos $V = (\pi h)r^2$. Portanto, o volume V e o raio r podem ser modelados por uma função quadrática.

c) Nesta situação, o valor total cobrado y por x aulas é $y = 15x$.
Tal relação não é uma função quadrática, mas uma função linear.

d) $N = (1 - 10\%)^h A$.
A variável independente h está no expoente. Portanto, o número de antibióticos N e as horas passadas h estão em uma relação exponencial, não quadrática.

Exemplo 3: Um fazendeiro está plantando laranjeiras. Ele plantou 30 laranjeiras por hectare, e cada árvore pode produzir 350 laranjas. Para cada árvore adicional plantada por hectare, a produção por árvore para todas as árvores no hectare diminui em 10 laranjas devido à superlotação.

a) Expresse o número de laranjas que cada árvore pode produzir, y, como uma função do número de laranjeiras por hectare, x.

b) Expresse a produção total por hectare, T, em laranjas, como uma função do número de laranjeiras por hectare, x.

Solução

a) O número extra de árvores plantadas é $x - 30$, então cada árvore pode produzir

$$350 - 10(x - 30) = 650 - 10x \text{ laranjas.}$$

É necessário observar que, para que a equação $y = 650 - 10x$ seja válida, devemos ter $x \geq 30$, que é o domínio da função.

Resposta: A função que pode modelar a relação entre o número de laranjas que cada árvore pode produzir, y, e o número de laranjeiras por hectare, x, é

$$y = 650 - 10x \quad (x \geq 30).$$

b) A produção total por hectare, T, é o produto entre o número de árvores por hectare, x, e o número de laranjas produzidas por árvore, y:

$$T = x \cdot y = x(650 - 10x) = 650x - 10x^2, \quad \text{onde } x \geq 30.$$

Resposta: A função que pode modelar a relação entre o número de laranjas que cada hectare pode produzir, T, e o número de laranjeiras por hectare, x, é

$$T = 650x - 10x^2 \quad (x \geq 30).$$

2. Resumo

Uma função quadrática é uma função que pode ser escrita na forma $y = ax^2 + bx + c$, onde x é a variável independente, a, b, c são constantes, e $a \neq 0$.

O **domínio geral** de uma função quadrática é o conjunto formado por todos os números reais. No entanto, em situações do mundo real, o domínio deve atender às restrições do contexto.

Finalizando a seção, são apresentados os exercícios abaixo:

Exercícios sobre Funções Quadráticas

1. **Quais das funções a seguir são funções quadráticas se x for a variável independente?**

(a) $y = 3x^2$

(b) $y = 5x^2 - 2x$

(c) $y = -2x^2 + x - 1$

(d) $y = 4 - x^2$

(e) $y = \dfrac{1}{x^2}$

(f) $y = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$

(g) $y = ax^2$

2. **Seja r o raio de um círculo:**

   (a) O comprimento da circunferência $C =$ ________________ pode ser modelado como uma função ______________________ do raio.

   (b) A área do círculo $A =$ ________________ pode ser modelada como uma função ______________________ do raio.

3. **Cada relação abaixo pode ser modelada por uma função quadrática? Justifique sua resposta.**

   (a) A frequência cardíaca b que um ser humano pode atingir na idade a, sabendo que $b = 0{,}8(220 - a)$.

   (b) O lucro total P de produzir x unidades, sabendo que o lucro é a diferença entre a receita total R e o custo total C, e que:

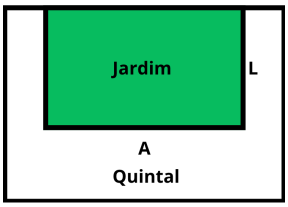
$$R = 1000x - x^2 \quad \text{e} \quad C = 3300 + 15x.$$

4. **O ingresso para um baile escolar custa R$4 por pessoa e a previsão de público é de 300 pessoas.**
   A cada aumento de R$0,10 no preço do ingresso, a comissão organizadora projeta que a presença diminua em 5 pessoas. Expresse a receita y como função do preço do ingresso x (em reais) e determine o domínio da função.

   (Valores originalmente apresentados em dólares foram adaptados para reais a fim de contextualizar a questão à realidade brasileira.)

5. **Maria quer cercar um espaço retangular em seu quintal para um jardim.**
   Ela comprou 80 pés de cerca de arame para cercar três lados, deixando o quarto lado encostado na cerca do quintal. Encontre a função que descreve a área cercada em função do comprimento L dos lados perpendiculares à cerca existente, e determine seu domínio.

Figura 58 – Jardim da Maria



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.1.2 Gráficos e características da função quadrática $y = ax^2$

Na próxima seção do capítulo, são introduzidos os gráficos da função quadrática. É destacada a importância da representação algébrico-geométrica na educação matemática chinesa. É relembrado que o material propõe que, ao estudar as funções lineares, deve-se combinar a matemática algébrica com a matemática geométrica e investigar as características das funções por meio da representação gráfica. E dessa forma, para o estudo da família das funções quadráticas, deve-se continuar a aplicar esse método e iniciando com a investigação da função quadrática mais simples: $y = x^2$.

1. Questões Iniciais

Pede-se aos alunos que representem graficamente a função $y = x^2$, os quais devem seguir a seguinte orientação:

(1) Construir uma tabela para encontrar pontos no gráfico:

Tabela 16 – Tabela de valores para a função $y = x^2$.

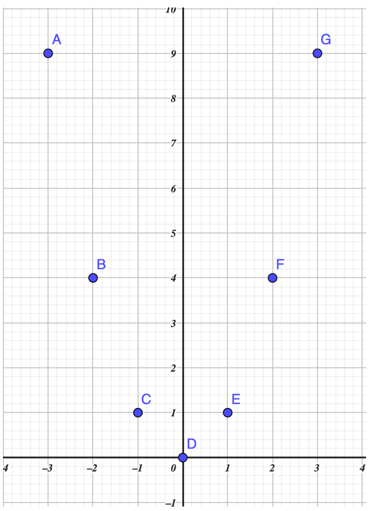
x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

Fonte: Elaborado pelo autor.

Certifique-se de que os valores de x na tabela contenham números negativos, zero e positivos, e que os valores de x estejam ordenados do menor para o maior. O zero é especial e deve ser incluído, pois é o único valor que faz com que y seja zero.

(2) Localizar os pontos no plano cartesiano.

Figura 59 – Pontos da função $y = x^2$

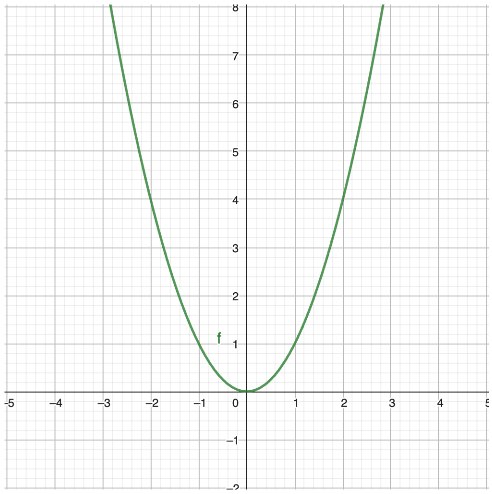


Fonte: Elaborado pelo autor.

(3) Conectar os pontos suavemente para formar o gráfico da função quadrática.

Ao final, os alunos devem chegar ao gráfico abaixo:

Figura 60 – Gráfico da Função $y = x^2$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após essa etapa, o material propõe uma reflexão guiada sobre o gráfico da função quadrática $y = x^2$. Por meio de perguntas orientadoras, os alunos são incentivados a observar a forma do gráfico, identificar padrões de variação e reconhecer propriedades geométricas fundamentais, como simetria e o ponto de mínimo. Esse momento de análise tem como objetivo aprofundar a compreensão teórica a partir da representação gráfica construída anteriormente.

Pense!

Use o gráfico da função quadrática $y = x^2$ para responder às seguintes questões:

a) Com qual letra do alfabeto o formato do gráfico se parece? Quais propriedades essa letra possui (estudamos essa questão ao analisar transformações geométricas)?

b) Quando $x < 0$, como o valor de y se altera conforme x aumenta? E se $x > 0$?

c) Com base na sua resposta ao item (b), quais características o ponto com $x = 0$ possui?

Espera-se que os alunos sejam capazes de responder a essas perguntas, em que devem chegar às seguintes conclusões:

Solução:

a) O gráfico da função quadrática $y = x^2$ tem forma de U e é chamado de **parábola**.

b) Uma parábola é um gráfico simétrico em relação ao eixo y. O **eixo de simetria** da parábola é o eixo y ou a reta $x = 0$.

c) Quando $x < 0$, y diminui conforme x aumenta. Quando $x > 0$, y aumenta conforme x aumenta. Isso torna o ponto com $x = 0$ o **ponto mínimo**, ou o ponto mais baixo da parábola. O ponto mais baixo $(0, 0)$ é chamado de **vértice** da parábola.

Na verdade, o gráfico de qualquer função quadrática é uma curva em forma de U chamada **parábola**. Isso nos permite nomear o gráfico de tal função de maneira mais específica. Por exemplo, podemos chamar o gráfico da função $y = x^2$ de **parábola** $y = x^2$.

É apresentado um novo exemplo para auxiliar na explicação:

Exemplo 1: Gráfico da função $y = -x^2$

Passo 1: Faça uma tabela

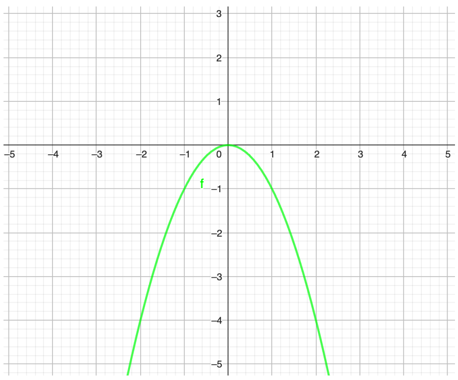
Tabela 17 – Tabela de valores para a função $y = -x^2$.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	...

Fonte: Elaborado pelo autor.

Passo 2: Localize os pontos e conecte-os usando uma curva suave.

Figura 61 – Gráfico da Função $y = -x^2$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Passo 3: Características observadas no gráfico:

- O eixo de simetria é $x = 0$
- O vértice é o ponto $(0, 0)$
- Quando $x < 0$, os valores de y aumentam conforme x aumenta.
- Quando $x > 0$, os valores de y diminuem conforme x aumenta.
- O conjunto imagem (alcance) da função é $y \leq 0$

O material sugere que o professor peça aos alunos que comparem os gráficos das funções $y = x^2$ e $y = -x^2$.

Pense:

Compare os gráficos de $y = x^2$ e $y = -x^2$. Qual é a principal diferença? O que causou essa diferença?

Os gráficos de $y = x^2$ e $y = -x^2$ possuem direções de abertura diferentes. Isso ocorre porque seus coeficientes de x^2 são opostos.

Esses dois gráficos são simétricos em relação ao eixo x, ou seja, $y = 0$.

Então, o valor y do vértice representa o valor mínimo ou máximo do conjunto imagem da função, e podemos denotá-lo como $y_{\text{mín}}$ ou $y_{\text{máx}}$.

Por exemplo, para a função $y = x^2$, temos $y_{\text{mín}} = 0$; para a função $y = -x^2$, temos $y_{\text{máx}} = 0$.

Uma parábola possui as seguintes características:

1. Ela pode ter concavidade para cima ou para baixo.

2. Possui um **eixo de simetria**.

3. Possui um **vértice** que está sobre o eixo de simetria.

4. O domínio da função é o conjunto dos **números reais**.

5. Quando $a > 0$, em $y = ax^2$, o vértice é o **ponto mínimo**, ou ponto mais baixo, da parábola; o conjunto imagem é $y \geq 0$ e a parábola se **abre para cima**.
   Quando $x < 0$, y decresce conforme x aumenta;
   Quando $x > 0$, y cresce conforme x aumenta.

6. Quando $a < 0$, o vértice é o **ponto máximo**, ou ponto mais alto, da parábola; o conjunto imagem é $y \leq 0$ e a parábola se **abre para baixo**.
   Quando $x < 0$, y cresce conforme x aumenta;
   Quando $x > 0$, y decresce conforme x aumenta.

No próximo tópico é abordada a abertura da parábola, e é pedido no próximo exemplo que compare algumas funções quadráticas.

Análise dos Gráficos das Funções Quadráticas

Exemplo 2: Represente graficamente as funções $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = 4x^2$ no mesmo plano cartesiano. Em seguida, identifique a direção de abertura, o eixo de simetria, o vértice, os intervalos de crescimento e decrescimento e o conjunto imagem de cada função.

Passo 1: Construa uma tabela de valores para cada função:

Tabela 18 – Tabela de valores para $y = \frac{1}{2}x^2$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = \frac{1}{2}x^2$	...	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	...

Fonte: Elaborado pelo autor.

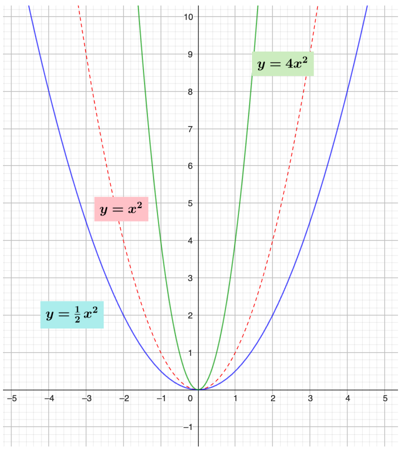
Tabela 19 – Tabela de valores para $y = 4x^2$

x	...	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	...
$y = 4x^2$	...	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	...

Fonte: Elaborado pelo autor.

Passo 2: Represente os pontos e conecte-os com uma curva suave. O gráfico resultante mostrará parábolas com aberturas para cima.

Figura 62 – Funções quadráticas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Passo 3: Características dos gráficos:

- Ambas as funções possuem o **eixo de simetria** em $x = 0$ e o **vértice** na origem $(0, 0)$.
- Para $x < 0$, o valor de y diminui à medida que x aumenta.
- Para $x > 0$, o valor de y aumenta à medida que x aumenta.
- O **conjunto imagem** das funções é $y \geq 0$.

2. Discussão:

- Analisando os gráficos do Exemplo 2, como o parâmetro a na função $y = ax^2$ afeta o formato da parábola quando $a > 0$?
- Como o parâmetro a na função $y = ax^2$ afeta o formato da parábola quando $a < 0$?

Quando $0 < a_1 < a_2$, o gráfico da função $y = a_1x^2$ é mais **aberto** (mais largo) do que o gráfico da função $y = a_2x^2$.

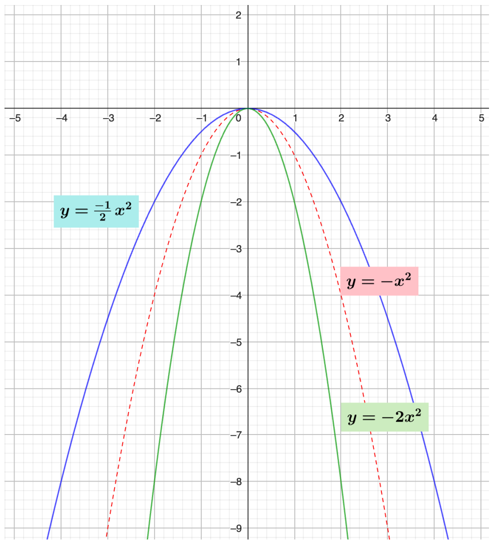
Para investigar o efeito do parâmetro a na função quadrática $y = ax^2$ com $a < 0$, podemos escolher dois ou três valores negativos de a, representar graficamente as funções no plano cartesiano e comparar os gráficos.

Por exemplo, podemos representar as funções:

$$y = -x^2, \quad y = -\frac{1}{2}x^2, \quad \text{e} \quad y = -2x^2$$

Perceba que quando $a_2 < a_1 < 0$, o gráfico da função $y = a_1x^2$ é mais aberto do que o gráfico da função $y = a_2x^2$.

Figura 63 – Funções quadráticas com $a < 0$



Fonte: Elaborado pelo autor.

O material destaca que, de modo geral, o coeficiente do termo x^2 em uma função quadrática afeta tanto a **largura** da parábola quanto a **direção** da sua abertura.

- Quando $|a_1| < |a_2|$, o gráfico da função $y = a_1x^2$ é mais **aberto** do que o gráfico da função $y = a_2x^2$.
- Quando $a > 0$, a parábola $y = ax^2$ se abre para **cima**;
- Quando $a < 0$, a parábola $y = ax^2$ se abre para **baixo**.

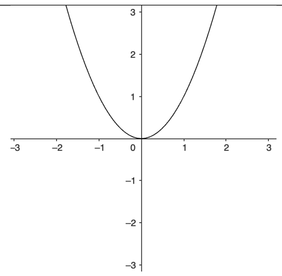
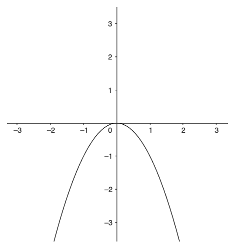
3. Resumo:

1. **Como representar graficamente $y = ax^2$:**
   a) Use 5 pontos para esboçar a parábola: o vértice e dois pares de pontos simétricos em relação ao eixo de simetria.
   b) Ao construir a tabela, organize os valores de x do menor para o maior.
2. **Vocabulário relacionado ao gráfico:**
   a) O gráfico de uma função quadrática é uma curva em forma de U, chamada parábola.
   b) Uma parábola possui um eixo de simetria e um vértice.

3. **Características da função $y = ax^2$ com base no gráfico.**

A seção então é finalizada com o quadro de resumo a seguir, e logo em seguida, são propostos alguns exercícios para explorar a teoria estudada.

Tabela 20 – Características da parábola $y = ax^2$

Parábola $y = ax^2$	$a > 0$	$a < 0$
Gráfico		
Direção da abertura	Abre para cima	Abre para baixo
Eixo de Simetria	$x = 0$ *Para x e $-x$, a função gera o mesmo resultado.*	
Vértice	$(0, 0)$ *Ponto mais baixo; Mínimo*	$(0, 0)$ *Ponto mais alto; Máximo*
Domínio	Todos os números reais	
Conjunto Imagem	$y \geq 0$	$y \leq 0$
Intervalo de Crescimento/Decrescimento	$x < 0$, y diminui conforme x aumenta. $x > 0$, y aumenta conforme x aumenta.	$x < 0$, y aumenta conforme x aumenta. $x > 0$, y diminui conforme x aumenta.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exercícios propostos no material de Xangai

1. Identifique a direção, o eixo de simetria e o vértice de cada parábola.

(a) $y = 3x^2$

(b) $y = -\frac{2}{3}x^2$

(c) $y = \frac{2}{7}x^2$

(d) $y = -1.5x^2$

2. Ordene cada grupo de funções quadráticas da **mais larga** para a **mais estreita**.

(a) $y = 3x^2$, $y = 2.33x^2$, $y = 4x^2$

(b) $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$, $y = \frac{2}{3}x^2$

3. Relacione cada uma das parábolas A até D com as equações abaixo:

(a) $y = 0.25x^2$

(b) $y = 5x^2$

(c) $y = 2x^2$

(d) $y = 0.1x^2$

4. Represente graficamente cada função e identifique o eixo de simetria, o vértice, o domínio e o conjunto imagem. Em seguida, nomeie o intervalo no qual y aumenta à medida que x aumenta.

(a) $y = 3x^2$

(b) $y = -\frac{1}{2}x^2$

5. Durante o período de aceleração, a distância s, em metros, que um carro percorre ao longo de t segundos pode ser descrita pela equação $s = 0.4t^2$.

(a) Encontre a distância percorrida pelo carro em $3s$ e $5.5s$.

(b) Faça o gráfico de s como função de t.

(c) Use o gráfico para determinar o tempo necessário para o carro percorrer $10m$ e $15m$.

6. Complete as lacunas:

(a) Dado que a reta $y = ax + 3$ passa pelos quadrantes I, II e III, podemos concluir que a parábola $y = ax^2$ se abre __________.

(b) Dado que o ponto (a, b) está em uma parábola $y = -x^2$, podemos concluir que o(s) ponto(s) __________ também pertencem à parábola.

A. $(-a, -b)$
B. $(-a, b)$
C. $(a, -b)$
D. (b, a)

(c) Dadas duas parábolas: $y_1 = mx^2$ e $y_2 = nx^2$, onde $0 < m < n < 1$, podemos concluir que, quando $x = 2$,

$$y_1 \quad \underline{\qquad\qquad} \quad y_2$$

(d) Construa um gráfico e ordene a_1, a_2, a_3, a_4 do menor para o maior valor.

3.3.1.3 Gráficos e características da função quadrática $y = a(x-h)^2 + k$

Na seção seguinte do material começa o estudo dos gráficos e características da Função Quadrática do tipo $y = a(x-h)^2 + k$. Inicialmente, é trabalhado o exemplo abaixo:

1. Questões Iniciais

Exemplo 1 – Gráficos, Domínio e Imagem de Funções Quadráticas

Represente graficamente cada função no plano cartesiano. Determine o domínio e a imagem de cada função.

Funções: $y = 2x^2 + 1$ e $y = 2x^2 - 1$

Passo 1: Construir uma tabela de valores

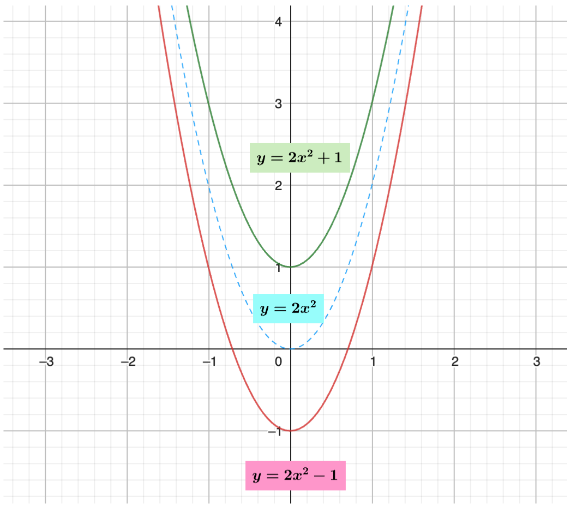
Tabela 21 – Tabela de valores para as funções $y = 2x^2 + 1$ e $y = 2x^2 - 1$

x	...	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	...
$y = 2x^2 + 1$	...	5.5	3	1.5	1	1.5	3	5.5	...
$y = 2x^2 - 1$	...	3.5	1	-0.5	-1	-0.5	1	3.5	...

Fonte: Elaborado pelo autor.

Passo 2: Traçar os gráficos, localizando os pontos da tabela e usando uma curva suave para conectar os pontos.

Figura 64 – Funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Passo 3: Determinar domínio e imagem

- **Domínio:** $x \in \mathbb{R}$
- **Imagem:**

- Para $y = 2x^2 + 1$: $y \geq 1$
- Para $y = 2x^2 - 1$: $y \geq -1$

Pense:

1. Encontre o eixo de simetria e o vértice das duas funções.
2. Como as parábolas das funções $y = 2x^2 + 1$ e $y = 2x^2 - 1$ se relacionam com a parábola $y = 2x^2$, respectivamente?

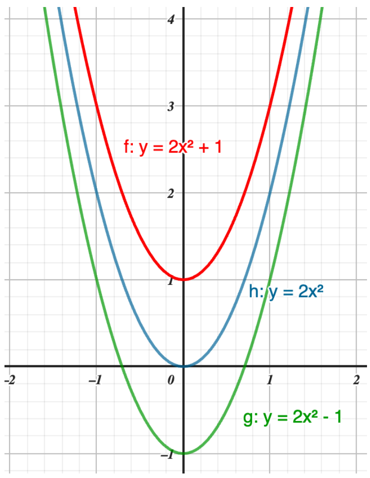
Após as análises, os alunos devem chegar às informações da tabela abaixo:

Tabela 22 – Tabela de Eixo de Simetria e Vértice

Função	**Eixo de Simetria**	**Vértice**
$y = 2x^2$	$x = 0$	$(0, 0)$
$y = 2x^2 + 1$	$x = 0$	$(0, 1)$
$y = 2x^2 - 1$	$x = 0$	$(0, -1)$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 65 – Gráfico das funções $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x^2$ e $y = 2x^2 - 1$: efeito da variação do termo k na parábola $y = a(x - h)^2 + k$



Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico da função $y = 2x^2 + 1$ possui o mesmo formato do gráfico de $y = 2x^2$, mas está deslocado 1 unidade para cima.

De forma semelhante, o gráfico da função $y = 2x^2 - 1$ possui o mesmo formato do gráfico de $y = 2x^2$, mas está deslocado 1 unidade para baixo.

O documento traz mais um questionamento em forma de investigação para os alunos.

2. Investigue a função $y = ax^2 + k$

Como a parábola $y = ax^2 + k$ está relacionada à parábola $y = ax^2$?

Para investigar os efeitos gerais do parâmetro k na função $y = ax^2 + k$ sobre o formato de uma função quadrática $y = ax^2$, podemos formular uma conjectura com base em nossas conclusões sobre as funções $y = 2x^2 + 1$ e $y = 2x^2 - 1$ em comparação com $y = 2x^2$, e usar diferentes valores de k para testar a conjectura.

Espera-se que os alunos concluam o caso geral, como a seguir.

Espera-se, com esse exemplo, que os alunos sejam capazes de inferir que o coeficiente k nessas funções representa seu deslocamento no eixo y.

Em resumo, os alunos devem ser capazes de perceber o exposto abaixo:

Translação Vertical da Parábola

De modo geral, o gráfico da função $y = ax^2 + k$ é uma translação vertical do gráfico da função $y = ax^2$. Seja k um número positivo. Então:

- $y = ax^2 + k$ desloca o gráfico de $y = ax^2$, k unidades para cima;
- $y = ax^2 - k$ desloca o gráfico de $y = ax^2$, k unidades para baixo.

Se $a > 0$, o conjunto imagem da função $y = ax^2 + k$ é $y \geq k$.
Se $a < 0$, o conjunto imagem da função $y = ax^2 + k$ é $y \leq k$.

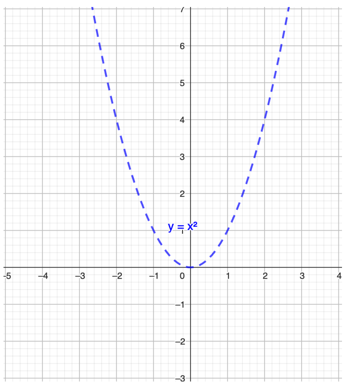
A próxima análise proposta no material é de funções do tipo $y = (x \pm h)^2$, que é apresentada aos alunos através do exemplo abaixo.

Exemplo 2: Representação gráfica de funções quadráticas

Enunciado: Represente graficamente cada função no plano cartesiano fornecido. Determine o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a) $y = (x - 1)^2$ b) $y = (x + 1)^2$

Figura 66 – Função $y = (x)^2$



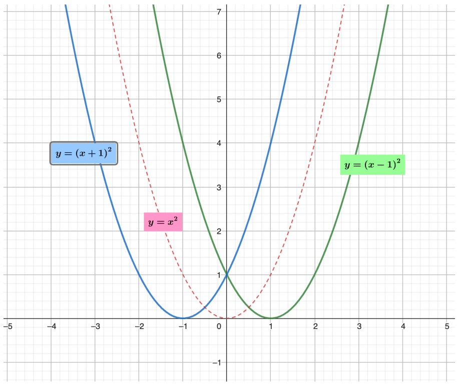
Fonte: Elaborado pelo autor.

Etapa 1: Construa uma tabela de valores.

x	$\cdots$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	$\cdots$
$y = (x-1)^2$	$\cdots$	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	$\cdots$
$y = (x+1)^2$	$\cdots$	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	$\cdots$

Etapa 2: Localize os pontos no plano cartesiano e conecte-os com uma curva suave.

Figura 67 – Funções $y = (x+1)^2$ e $y = (x-1)^2$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Etapa 3: Determine o domínio e o conjunto imagem de cada função.

- Domínio: $x \in \mathbb{R}$
- Imagem: $y \geq 0$

Observações: Ambas as parábolas têm a mesma forma (curvatura), pois têm o mesmo coeficiente $a = 1$. A parábola $y = (x-1)^2$ é uma translação da parábola $y = x^2$ uma unidade para a direita, enquanto $y = (x+1)^2$ é uma translação de uma unidade para a esquerda.

O professor deve, então, pedir aos alunos que analisem e encontrem os lugares geométricos dos eixos de simetria e os vértices das funções.

Pense:

1. Encontre o eixo de simetria e o vértice das duas funções.
2. Como a parábola de $y = (x-1)^2$ e $y = (x+1)^2$ está relacionada, respectivamente, à parábola $y = x^2$?

Assim, devem ser encontrados os valores relacionados na tabela abaixo:
Assim, os alunos podem concluir que:

- O gráfico da função $y = (x-1)^2$ possui o mesmo formato que o gráfico de $y = x^2$, mas está deslocado 1 unidade para a direita.

Tabela 23 – Eixos de simetria e vértices das parábolas.

	Eixo de Simetria	**Vértice**
$y = x^2$	$x = 0$	$(0, 0)$
$y = (x-1)^2$	$x = 1$	$(1, 0)$
$y = (x+1)^2$	$x = -1$	$(-1, 0)$

Fonte: Elaborado pelo Autor

- O gráfico da função $y = (x+1)^2$ possui o mesmo formato que o gráfico de $y = x^2$, mas está deslocado 1 unidade para a esquerda.

3. Investigue a função

$$y = a(x-h)^2$$

Como a parábola $y = a(x-h)^2$ está relacionada com a parábola $y = ax^2$?

Os alunos devem ser capazes de chegar à conclusão a seguir:

Translação Horizontal da Parábola

De modo geral, o gráfico de $y = a(x-h)^2$ é uma translação horizontal do gráfico de $y = ax^2$.
Seja h um número positivo, então $y = a(x-h)^2$ desloca o gráfico de $y = ax^2$, h unidades para a direita, enquanto $y = a(x+h)^2$ desloca o gráfico de $y = ax^2$, h unidades para a esquerda.
A translação horizontal não afeta o domínio nem a imagem da função.
O eixo de simetria da parábola $y = a(x-h)^2$ é $x = h$.

A seguir é apresentado o exemplo 3:

Exemplo 3 — Representação gráfica de função quadrática

Como representar graficamente a função

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$$

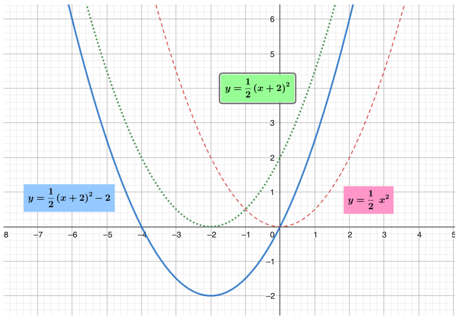
1. Como a parábola está relacionada com a parábola $y = \frac{1}{2}x^2$?
2. A parábola se abrirá para cima ou para baixo?
3. Qual será o eixo de simetria e o vértice da parábola?
4. Qual é o domínio e o contradomínio da função?

Solução

Sabemos que a parábola $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$ é uma translação da parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ para a esquerda, 2 unidades.
Para qualquer valor de x, o valor de $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$ é dois a menos do que o valor de $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$. Isso significa que a parábola $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$ pode ser obtida transladando a parábola

$y = \frac{1}{2}(x+2)^2$, 2 unidades para baixo.

Figura 68 – Função $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$



Fonte: Elaborado pelo autor.

a) Portanto, $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$ pode ser obtida transladando $y = \frac{1}{2}x^2$, 2 unidades para a esquerda e depois 2 unidades para baixo.

b) A parábola $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$ se abre na mesma direção da parábola $y = \frac{1}{2}x^2$: para cima.

c) Movendo o vértice de $y = \frac{1}{2}x^2$, 2 unidades para a esquerda e 2 unidades para baixo, obtemos o vértice da parábola $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$. O vértice é $(-2, -2)$.

De forma semelhante, o eixo de simetria da parábola $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$ pode ser obtido transladando o eixo de simetria da parábola $y = \frac{1}{2}x^2$, 2 unidades para a esquerda. Assim, o eixo de simetria é $x = -2$.

d) **Domínio:** $x \in \mathbb{R}$

Imagem: $y \geq -2$

Como último tópico dessa seção do livro, é levantado para os alunos o questionamento a seguir.

Pense:

Como a parábola $y = a(x-h)^2 + k$ se relaciona com a parábola $y = ax^2$?

A função $y = a(x-h)^2 + k$ é chamada de **forma de vértice** de uma função quadrática. Com base nela, podemos determinar:

1. Se $a > 0$, a parábola se abre para cima;
   Se $a < 0$, a parábola se abre para baixo.

2. O eixo de simetria é dado por $x = h$.

3. O vértice é o ponto (h, k).

Aplicando essas características de simetria, podemos representar graficamente a função localizando o vértice primeiro e, em seguida, dois pontos simétricos ao vértice.

Finalizando a seção, é apresentado o seguinte resumo e os exercícios listados abaixo:

4. Resumo:

As características da parábola $y = a(x-h)^2 + k$:

(1) Ela translada a parábola $y = ax^2$, h unidades para a direita e k unidades para cima (quando $h > 0$ e $k > 0$).

- Quando $h < 0$, transladar h unidades para a direita é equivalente a transladar $|h|$ unidades para a esquerda.
- De forma similar, quando $k < 0$, transladar k unidades para cima é equivalente a transladar $|k|$ unidades para baixo.

(2) Se $a > 0$, a parábola se abre para cima;
Se $a < 0$, a parábola se abre para baixo.

(3) O eixo de simetria é $x = h$.

(4) O vértice da parábola é (h, k).

(5) O domínio é $x \in \mathbb{R}$.

(6) O conjunto imagem é dado por:

$$\begin{cases} y \geq k, & \text{se } a > 0 \\ y \leq k, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Exercícios propostos no material de Xangai

1. Identifique o eixo de simetria, o vértice, o domínio e a imagem de cada parábola.

(a) $y = 2(x+3)^2 + 5$

(b) $y = \frac{2}{3}(x-1)^2 - 2$

(c) $y = -4(x-3)^2 + 7$

(d) $y = -1.5(x+2)^2 - 6$

2. Relacione cada parábola de A a F com as equações abaixo.

(a) $y = (x-3)^2$

(b) $y = (x+3)^2$

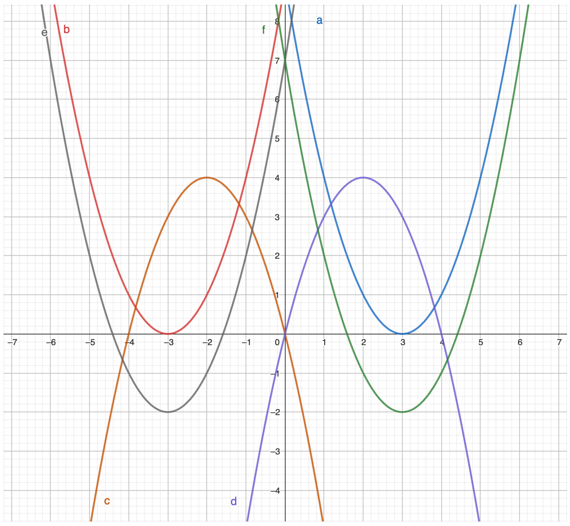
(c) $y = -(x+2)^2 + 4$

(d) $y = -(x-2)^2 + 4$

(e) $y = (x+3)^2 - 2$

(f) $y = (x-3)^2 - 2$

Figura 69 – Exercício 2.



Fonte: Elaborado pelo Autor

3. Represente graficamente cada função e identifique o eixo de simetria, o vértice, o domínio e a imagem.

(a) $y = (x+4)^2 + 3$

(b) $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - 5$

4. O vértice de uma parábola é $(-2, 7)$, e sua forma e direção são as mesmas da parábola $y = \frac{2}{3}(x+1)^2$. Qual é a equação dessa parábola?

5. Suponha que um jogador de tênis acerte a bola sobre a rede. A bola sai da raquete a 0,5m do solo. A equação $h = -5(t-0.4)^2 + 0.6$ dá a altura h, em metros, da bola após t segundos.

(a) Em que momento a bola atinge o ponto mais alto de sua trajetória? Qual é essa altura?

(b) Se você dobrar sua resposta do item (a), encontrará o tempo total que a bola fica no ar antes de atingir o solo? Explique.

3.3.1.4 Gráficos e Características das Funções Quadráticas

Na próxima seção, são estudados os gráficos e as características das funções quadráticas. O material relembra que na seção anterior aprendemos como esboçar o gráfico de $y = a(x-h)^2 + k$ e as características da parábola. A partir disso, traz alguns questionamentos iniciais aos alunos.

1. Questões iniciais

No estudo anterior, aprendemos como representar graficamente $y = a(x-h)^2 + k$ e as características da parábola.

Como podemos usar esse conhecimento para representar graficamente $y = x^2 + 2x + 1$? E quanto à função $f(x) = x^2 + 2x + 3$?

Completando o quadrado, podemos converter:

$$y = x^2 + 2x + 1 \quad \text{para a forma de vértice:} \quad y = (x+1)^2$$

De forma similar, podemos converter:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \quad \text{para a forma de vértice:} \quad f(x) = (x+1)^2 + 2$$

Então, podemos aplicar nosso conhecimento da lição anterior para representar graficamente essas funções.

Após isso, é levantada para os alunos a questão abaixo:

Exemplo 1 — Representação gráfica da função

Represente graficamente a função $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$. Identifique o eixo de simetria, o vértice e o conjunto imagem da função.

Etapa 1: Converta a função da forma geral para a forma de vértice:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 6x) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x-3)^2 - 4 \end{aligned}$$

Etapa 2: Monte uma tabela com o vértice no centro:

Tabela 24 – Tabela de valores para a função $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 4$

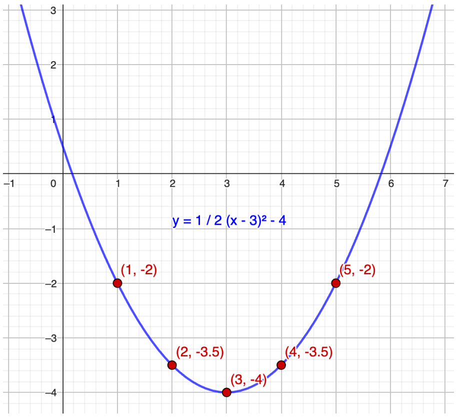
x	...	1	2	3	4	5
$y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 4$	...	-2	-3,5	-4	-3,5	-2

Fonte: Elaborado pelo Autor

Comentário *A construção desta tabela segue a mesma lógica da Tabela 16, referente à função $y = x^2$, cujo vértice está na origem e foi posicionado no centro da tabela. Aqui, foi centralizado o ponto $x = 3$, correspondente ao vértice da parábola $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 4$, permitindo ao estudante visualizar melhor a simetria da função quadrática e reconhecer a estrutura do gráfico. Essa abordagem favorece o uso de exemplos indutivos e suficientemente genéricos, conforme discutido anteriormente, estimulando o raciocínio por analogia antes da formalização.*

Etapa 3: Conecte os pontos com uma curva suave em forma de U.

Figura 70 – Representação gráfica da função $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 4$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Etapa 4: Respostas da questão:

1. A parábola se abre para cima, tem eixo de simetria na reta $x = 3$, vértice no ponto $(3, -4)$, que é seu ponto mais baixo; por isso, o valor mínimo da função é $y_{\text{min}} = -4$, e seu conjunto imagem é $y \geq -4$.

2. Investigue

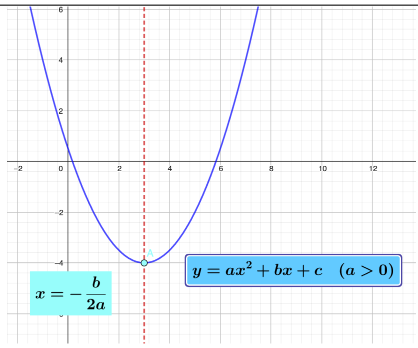
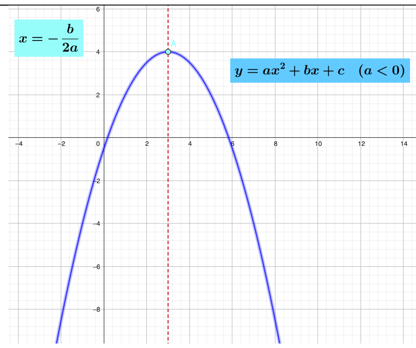
Podemos generalizar os passos para esboçar o gráfico de uma função na forma padrão $y = ax^2 + bx + c$? Quais são as características da parábola?

Deve-se demonstrar aos alunos que podemos converter a função na forma padrão para a forma de vértice:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Dessa forma, com base nas características que concluímos na lição anterior, podemos generalizar as propriedades da forma padrão da seguinte maneira:

Tabela 25 – Gráfico e características da parábola na forma padrão $y = ax^2 + bx + c$

$y = ax^2 + bx + c$	$a > 0$	$a < 0$
Gráfico		
Direção da abertura	Para cima	Para baixo
Eixo de Simetria	$x = -\frac{b}{2a}$	
Vértice (ponto de Mínimo/Máximo)	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$	
Domínio	Todos os números reais ($x \in \mathbb{R}$)	
Conjunto Imagem	$y_{\text{mín}} = \frac{-b^2+4ac}{4a}, \quad y \geq \frac{-b^2+4ac}{4a}$	$y_{\text{máx}} = \frac{-b^2+4ac}{4a}, \quad y \leq \frac{-b^2+4ac}{4a}$
Intervalo de Crescimento ou Decrescimento	$x < -\frac{b}{2a}$, y diminui conforme x aumenta. $x > -\frac{b}{2a}$, y aumenta conforme x aumenta.	$x < -\frac{b}{2a}$, y aumenta conforme x aumenta. $x > -\frac{b}{2a}$, y diminui conforme x aumenta.
Interseção com o eixo y	c	

Fonte: Adaptado do material original.

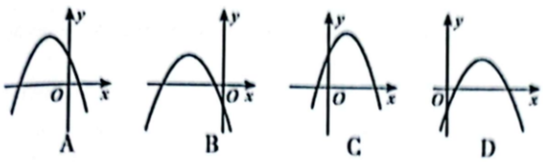
O material traz então alguns exemplos para que fiquem ilustradas as características das funções quadráticas.

Exemplos do material didático

Exemplo 2 — Aplicando as características

O gráfico possível da função $y = -x^2 + 2kx + 1 \quad (k < 0)$ é:

Figura 71 – Gráficos possíveis para a função $y = -x^2 + 2kx + 1$



Fonte: Material de Xangai

Solução

1. Pela forma padrão, podemos afirmar que o intercepto em y deve ser 1.
   Assim, sabemos que as respostas possíveis são os gráficos A e C.

2. O eixo de simetria é dado por:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2k}{2(-1)} = k$$

   $\therefore$ Como $k < 0$, o eixo de simetria está à esquerda do eixo y.
   A resposta correta é a letra A.

Exemplo 3: Aplicação em Problemas do Mundo Real
Uma empresa de telefonia vende cerca de 500 celulares por semana quando cobra R$75 por aparelho. A cada redução de R$1 no preço, vende-se aproximadamente 20 celulares a mais por semana. A receita da empresa é o produto do número de celulares vendidos pelo preço de cada um. Qual deve ser o preço do celular para maximizar a receita da empresa? *(Valores originalmente apresentados em dólares foram adaptados para reais a fim de contextualizar a questão à realidade brasileira.)*
Solução:
Seja x o valor, em reais, da redução do preço, e seja y a receita total da empresa. Então:

$$y = (500 + 20x)(75 - x)$$

Expandindo a equação:

$$y = -20x^2 + 1000x + 37500$$

Reescrevendo na forma de vértice:

$$y = -20(x - 25)^2 + 50000$$

Como o coeficiente de x^2 é negativo ($-20 < 0$), a parábola se abre para baixo, indicando que o ponto de vértice $(25, 50000)$ representa o ponto máximo.
Isso significa que o preço ideal do celular deve ser:

$$75 - 25 = 50$$

Resposta final: A empresa deve vender o celular por R$50 para maximizar sua receita.

Após os exemplos, o material faz um adendo sobre o que se é necessário para encontrar a equação de uma parábola:

Aprofundamento: Determine a Regra de uma função que representa uma parábola

Pense!
Ao aprender funções lineares, sabemos que podemos identificar a regra de uma função de uma reta quando temos dois pontos sobre ela. Se quisermos determinar a equação de uma função quadrática,

quais condições devem ser atendidas?
Dado que os pontos $(-1, 10)$, $(1, 4)$ e $(2, 7)$ estão sobre a parábola, podemos identificar a equação da função quadrática?
Soluções
Análise: Podemos determinar a equação de uma função linear conhecendo dois pontos, pois conseguimos montar um sistema de duas equações com duas variáveis (o coeficiente angular m e o coeficiente linear b).
Em uma função quadrática, existem três constantes desconhecidas, nomeadamente, a, b e c na equação $y = ax^2 + bx + c$, ou a, h e k na forma de vértice $y = a(x - h)^2 + k$. Portanto, seguindo a lógica de identificação de uma função linear, precisamos de três pontos para construir um sistema de três equações com três variáveis.

A partir disso, o material enuncia a conjectura a seguir.

Conjectura

Conjectura 1. *São necessários três pontos para identificar uma função quadrática.*

Teste da Conjectura:
Dado que os pontos $(-1, 10)$, $(1, 4)$ e $(2, 7)$ estão na parábola, podemos identificar a equação da parábola?
Substituímos os pontos x e y na forma padrão de uma função quadrática para construir um sistema de três equações lineares:

$$\begin{cases} 10 = a(-1)^2 + b(-1) + c \\ 4 = a(1)^2 + b(1) + c \\ 7 = a(2)^2 + b(2) + c \end{cases}$$

A solução do sistema é:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 5 \end{cases}$$

Portanto, a função quadrática é:

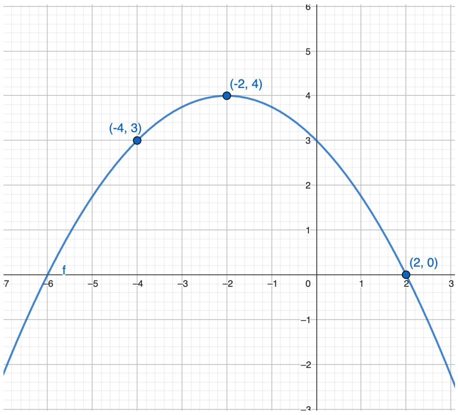
$$y = 2x^2 - 3x + 5$$

Conclusão:
Para identificar a equação de uma função quadrática, normalmente precisamos de três pontos.
Usamos os pontos para construir um sistema de três equações lineares para os parâmetros a, b e c na equação $y = ax^2 + bx + c$, de modo a identificá-la.

Após essa conclusão é dada a parábola abaixo para que os alunos possam encontrar qual função descreve o gráfico:

Exercício 1: Qual a lei de formação da parábola à seguir:

Figura 72 – Função Quadrática



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, para encontrar a função, os alunos podem seguir o exposto a seguir.

Solução

Dado que os pontos $(-4, 3)$, $(-2, 4)$ e $(2, 0)$ estão na parábola, podemos identificar a equação da parábola?

Substituímos os pontos para x e y na forma padrão de uma função quadrática para construir um sistema de três equações lineares:

$$\begin{cases} 3 = a(-4)^2 + b(-4) + c \\ 4 = a(-2)^2 + b(-2) + c \\ 0 = a(2)^2 + b(2) + c \end{cases}$$

A solução do sistema é:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

Portanto, a função quadrática é:

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$$

Mais que um Método

No exercicio anterior, na verdade, temos uma maneira mais fácil de resolver o problema. Como $(-2, 4)$ é o vértice, podemos usar a forma do vértice para obter:

$$y = a(x+2)^2 + 4$$

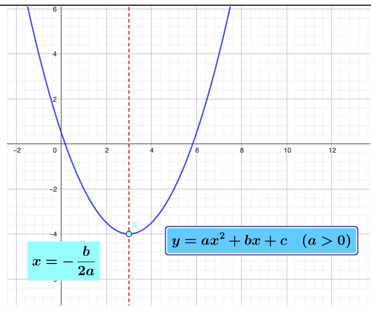
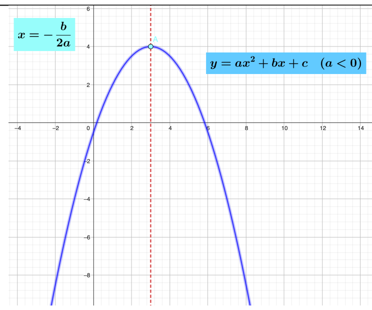
Há apenas uma constante desconhecida, a, a ser determinada. Portanto, precisamos usar apenas um dos outros dois pontos.

Logo após essa discussão, o material propõe a pergunta para reflexão do aluno: ”Você percebeu isso?”. Essa pergunta abre espaço para o professor aprofundar sobre esse assunto, trazendo mais detalhes para a compreensão da teoria.

3. Resumo

a) Gráfico e características da parábola na forma padrão $y = ax^2 + bx + c$:

Tabela 26 – Gráfico e características da parábola

$y = ax^2 + bx + c$	$a > 0$	$a < 0$
Gráfico		
Direção da abertura	Para cima	Para baixo
Eixo de Simetria	$x = -\frac{b}{2a}$	
Vértice (ponto de Mínimo/Máximo)	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$	
Domínio	Todos os números reais ($x \in \mathbb{R}$)	
Conjunto Imagem	$y_{\text{mín}} = \frac{-b^2+4ac}{4a}, \quad y \geq \frac{-b^2+4ac}{4a}$	$y_{\text{máx}} = \frac{-b^2+4ac}{4a}, \quad y \leq \frac{-b^2+4ac}{4a}$
Intervalo de Crescimento ou Decrescimento	$x < -\frac{b}{2a}$, y diminui conforme x aumenta. $x > -\frac{b}{2a}$, y aumenta conforme x aumenta.	$x < -\frac{b}{2a}$, y aumenta conforme x aumenta. $x > -\frac{b}{2a}$, y diminui conforme x aumenta.
Interseção com o eixo y	c	

Fonte: Adaptado do material original.

b) Uma parábola possui um ponto de máximo ou de mínimo. Essa característica é muito útil para determinar o conjunto imagem da função e resolver problemas do cotidiano relacionados a ela.

4. Atividades

Dessa forma, o capítulo é finalizado com os exercícios propostos a seguir.

Exercícios propostos no material de Xangai

1. Esboce o gráfico de cada função e identifique o eixo de simetria, o vértice e o conjunto imagem:

   a) $y = -2x^2 - 8x - 7$

   b) $y = -3x^2 + 6x$

   c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

   d) $y = (2 - x)(2x + 1)$

   e) $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + 6x$

2. Complete as lacunas:

   A forma de vértice da função $y = -3x^2 + 12x - 1$ é ________________.

   A parábola se abre ________________, o eixo de simetria é ________________, e o vértice é ________________.

   O valor de y atinge seu ________________ (mínimo/máximo) quando $x =$ ________________, ou seja, $y =$ ________________.

   A parábola $y = -3x^2+12x-1$ é uma translação da parábola $y = -3x^2$ ________________ (para a esquerda/direita) ________________ unidades e ________________ (para cima/-baixo) ________________ unidades.

3. No triângulo $\triangle ABC$, $\angle B = 90°$, $AB = 12mm$ e $BC = 24mm$. O ponto P parte do ponto A e se move em direção ao ponto B ao longo da linha AB a uma velocidade de 2mm/s. O ponto Q parte do ponto B e se move até o ponto C ao longo da linha BC a uma velocidade de 4mm/s.

   Dados que os pontos P e Q começam ao mesmo tempo:

   a) Escreva a área do $\triangle PBQ$ em função do tempo t.

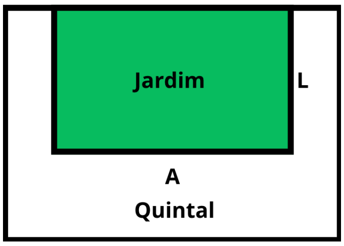
   b) Encontre os possíveis valores de t e A.

4. Um fazendeiro está plantando laranjeiras. Ele plantou 30 laranjeiras por hectare, e cada árvore pode produzir 350 laranjas. Para cada árvore adicional plantada por hectare, a produção por árvore diminui em 10 laranjas devido ao excesso de plantas.

   Qual é a produção máxima possível por hectare? Quantas laranjeiras há por hectare neste caso?

5. Mary deseja cercar um espaço retangular em seu quintal para um novo jardim. Ela comprou 80 pés de arame para cercar três lados, e usará a cerca existente para fechar o quarto lado. Qual é a área máxima possível do jardim?

Figura 73 – Jardim da Maria



Fonte: Elaborado pelo autor.

6. **Aprofundamento**: Identifique a equação da parábola que passa pelos três pontos dados:

    a) $(-1,3),(1,3),(2,6)$

    b) $(0,0),(-1,-11),(1,9)$

3.3.2 Livro do Programa Nacional do Livro Didático

O capítulo que trata sobre as Funções Quadráticas na coleção Prisma, de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020), encontra-se no livro **Conjuntos e Funções**. No início do capítulo são informadas as habilidades da BNCC que são trabalhadas: EM13MAT101, EM13MAT302,EM13MAT402, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT510.

O capítulo do livro se inicia com uma contextualização sobre como podem ser utilizadas as funções quadráticas, para se calcular o lucro de uma empresa:

Contextualização

Quando falamos de produção e venda de um produto ou serviço, seja de uma grande, média ou pequena empresa, é fundamental estudar como essa atividade empresarial vai gerar lucro e como esse lucro conseguirá manter as atividades e os negócios da empresa.
Nesse sentido, muitos profissionais são envolvidos para analisar custos, identificar maneiras mais eficientes de produção, fazer pesquisas de mercado, pensar em embalagens mais econômicas, propor formas sustentáveis de produção etc. Para grande parte dessas atividades, é imprescindível o uso de conhecimento matemático para analisar a situação e alcançar resultados satisfatórios.
O estudo de **função quadrática** e de outros conceitos relacionados pode nos auxiliar a compreender como o conhecimento matemático é utilizado para modelar situações como essas, além de outras que vivenciamos em nosso dia a dia.

Após essa contextualização são apresentadas as seguintes questões para os alunos:

1. O que vocês entendem por lucro?

2. Na opinião de vocês, para obter maior lucro, é necessário apenas aumentar a quantidade de bens produzidos por uma empresa? Justifique sua resposta.

3. Vocês acreditam que há um lucro máximo a ser atingido em um negócio ou que ele aumenta indefinidamente? Pesquisem sobre o assunto e discutam com a turma.

Essas questões têm a finalidade de instigar a curiosidade e fazer os alunos pensar em como chegar a uma expressão matemática que possa ser utilizada para calcular o lucro de uma empresa.

3.3.2.1 Função Quadrática

A introdução do material relembra que, no capítulo que trata das funções afins, foram utilizadas ideias e conceitos para que se utilizassem as funções na compreensão e análise de situações do dia a dia, e que, neste capítulo, serão utilizadas as mesmas estratégias para abordar as funções quadráticas.

Assim, o material cita que situações envolvendo trajetórias parabólicas, como lançamentos de projéteis, podem ser modeladas por meio de funções quadráticas, assim como certos tipos de movimentos estudados pela Física. Ainda traz que alguns objetos, como antenas parabólicas e faróis de veículos, são construídos utilizando propriedades da parábola, a curva que representa o gráfico de funções quadráticas.

O material segue para uma explicação do que é uma função quadrática e sua definição formal.

A função quadrática também pode ser denominada função polinomial do 2º grau, pois as relações entre a variável dependente e a variável independente são expressas por polinômios do 2º grau.

Definição - Função Quadrática

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$, é chamada de **Função Quadrática**.

Os números a, b e c são os **coeficientes** (ou parâmetros) da função, sendo que a é o coeficiente do termo x^2, b é o coeficiente do termo x e c é o coeficiente independente.

São apresentados, a seguir, alguns exemplos de leis de formação de funções quadráticas.

Leis de formação de funções quadráticas

Observe a seguir a lei de formação de algumas funções quadráticas.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, em que os coeficientes são: $a = 1, b = -3$ e $c = 2$.

b) $g(x) = 0{,}8x^2 - 1$, em que os coeficientes são: $a = 0{,}8, b = 0$ e $c = -1$.

c) $y = -x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$, em que os coeficientes são: $a = -1, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $c = 0$.

d) $y = -5x^2$, com os coeficientes: $a = -5, b = 0$ e $c = 0$.

Não são leis de funções quadráticas:

- $h(x) = 7x$
- $y = x^4 + 2x^2$
- $y = 5x$

O livro apresenta a seguir uma situação problema para demonstrar como uma função quadrática pode ser utilizada.

Situação-problema:

Agora, considere a situação a seguir. Elisa trabalha com artigos para dispositivos eletrônicos e, fazendo uma pesquisa na internet de preço de capas para celular, obteve uma função quadrática que modela o lucro diário L, em reais, de uma loja em relação ao preço pelo qual cada capa é vendida, também em reais. Essa função é dada pela lei:

$$L(x) = -x^2 + 55x - 250.$$

1. **Pense e Responda:**[1]

Com os dados apresentados na situação, é possível calcular quantas capas de celular a loja precisa vender diariamente para obter esse lucro de R$ 450,00? Justifique.
Utilizando essa lei, Elisa calculou o lucro diário dessa loja supondo que cada capa fosse vendida a R$ 20,00. Veja como ela calculou.

$$L(20) = -(20)^2 + 55 \cdot 20 - 250$$
$$L(20) = -400 + 1100 - 250$$
$$L(20) = 450$$

Assim, Elisa verificou que vender cada capa a R$ 20,00 gera um lucro diário de R$ 450,00, considerando a função L.

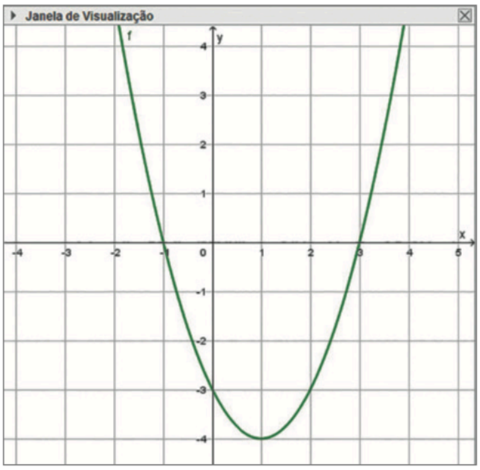
[1]A situação-problema apresentada está transcrita exatamente conforme proposta no livro didático da PNLD. Observa-se que, já na introdução da atividade, é fornecido o valor do lucro de R$450,00, bem como o raciocínio que teria sido utilizado por Elisa para chegar a esse resultado, com base na função quadrática fornecida.

É importante destacar que o livro adota uma estratégia didática de antecipação: o problema foi apresentado de forma motivacional antes da exposição formal da teoria. A ideia parece ser provocar a curiosidade dos estudantes e criar um contexto significativo para o estudo posterior da função quadrática. Mais adiante, após a apresentação dos conceitos matemáticos envolvidos, o mesmo problema é retomado, agora com uma proposta de resolução mais estruturada e detalhada.

3.3.2.2 Gráfico da função quadrática

O livro apresenta os dois gráficos de funções quadráticas a seguir, e enfatiza que, como resultado, obtêm-se duas curvas chamadas parábolas.

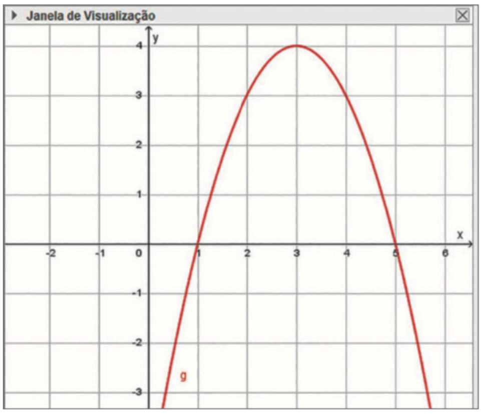
Figura 74 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

- Os coeficientes da função f são: $a = 1$, $b = -2$ e $c = -3$. Note que, nesse caso, $a > 0$.

Figura 75 – Gráfico da função $g(x) = -x^2 + 6x - 5$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

- Os coeficientes da função g são: $a = -1$, $b = 6$ e $c = -5$. Note que, nesse caso, $a < 0$.

O livro traz a possibilidade de demonstrar que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola que pode ter sua concavidade voltada para cima, se o coeficiente a for positivo, ou para baixo, se a for negativo.

Construção do gráfico de funções quadráticas

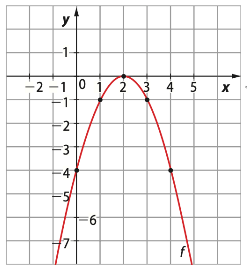
Destacamos também que, para qualquer função quadrática, o ponto de interseção da parábola com o eixo y é o ponto de coordenadas $(0, c)$, em que c é o coeficiente independente na lei da função quadrática. Observe:

Considerando a lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$; portanto, $f(0) = c$.

Assim como vimos no estudo de função afim, para construir o gráfico da função quadrática, podemos elaborar uma tabela com alguns valores de x e calcular os valores de y correspondentes para obter alguns pontos pertencentes ao gráfico da função dada. No entanto, no caso da função quadrática, precisamos de mais do que dois pontos para ter uma noção do traçado da parábola.
Acompanhe alguns exemplos:
a) O gráfico da função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.
Inicialmente, construímos uma tabela com alguns valores de x e calculamos $y = f(x)$. Em seguida, localizamos, no sistema cartesiano, os pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função f e traçamos a parábola que contém esses pontos.

Figura 76 – Tabela e Gráfico da função $f(x) = -x^2 - 4x - 4$

x	$y = -x^2 + 4x - 4$	(x, y)
0	$y = -(0)^2 + 4 \cdot 0 - 4 = -4$	$(0, -4)$
1	$y = -(1)^2 + 4 \cdot 1 - 4 = -1 + 4 - 4 = -1$	$(1, -1)$
2	$y = -(2)^2 + 4 \cdot 2 - 4 = -4 + 8 - 4 = 0$	$(2, 0)$
3	$y = -(3)^2 + 4 \cdot 3 - 4 = -9 + 12 - 4 = -1$	$(3, -1)$
4	$y = -(4)^2 + 4 \cdot 4 - 4 = -16 + 16 - 4 = -4$	$(4, -4)$

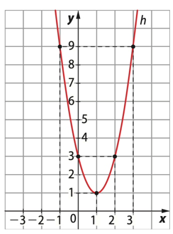


Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Como $a < 0$, a parábola terá concavidade voltada para **baixo**.
b) O gráfico da função quadrática definida por $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$.
Assim como no exemplo anterior, construímos uma tabela com alguns valores de x e calculamos $y = h(x)$. Em seguida, localizamos, no sistema cartesiano, os pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função h e traçamos a parábola que contém esses pontos.
Como $a > 0$, nesse caso, a parábola terá concavidade voltada para **cima**.

Figura 77 – Tabela e Gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

x	$y = 2x^2 - 4x + 3$	(x, y)
-1	$y = 2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 2 + 4 + 3 = 9$	$(-1, 9)$
0	$y = 2 \cdot (0)^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$	$(0, 3)$
1	$y = 2 \cdot (1)^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 2 - 4 + 3 = 1$	$(1, 1)$
2	$y = 2 \cdot (2)^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 8 - 8 + 3 = 3$	$(2, 3)$
3	$y = 2 \cdot (3)^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 18 - 12 + 3 = 9$	$(3, 9)$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

A seção que aborda os gráficos é finalizada com alguns exemplos resolvidos e questões para os alunos realizarem como as apresentadas no quadro a seguir:

Lista de Exercícios — Função Quadrática

1. Um objeto é lançado para cima, a partir do solo, e a altura h, em metro, varia em função do tempo t, em segundo, decorrido após o lançamento. Supondo que a lei dessa função seja $h(t) = 30t - 5t^2$, responda:

a) Qual é a altura do objeto 3 segundos após o lançamento?

b) Quanto tempo após o lançamento o objeto encontra-se a 40 metros de altura?

c) Como podemos interpretar o resultado obtido no item b?

2. Considere a função definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e calcule:

a) $f(0)$

b) $f(-4)$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $f(\sqrt{2})$

3. (Unifesp-SP) A tabela mostra a distância s em centímetros que uma bola percorre descendo por um plano inclinado em t segundos.

Tabela 27 – Distância percorrida por uma bola em função do tempo

t (s)	0	1	2	3	4
s (cm)	0	32	128	288	512

Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

A distância s é função de t dada pela expressão $s(t) = at^2 + bt + c$, onde a, b, c são constantes. A distância s, em centímetros, quando $t = 2{,}5$ segundos, é igual a:

a) 248

b) 228

c) 208

d) 200

e) 190

4. A soma S dos n primeiros números naturais diferentes de zero $(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)$ pode ser calculada utilizando a função quadrática dada por $S(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. Qual é a soma dos 50 primeiros números naturais diferentes de zero?

5. Dada a função $f(x) = -x^2 + 9x - 8$, determine os valores reais de x para que se tenha:

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 10$

c) $f(x) = 11$

d) $f(x) = -\dfrac{15}{4}$

6. (UFPR) A distância que um automóvel percorre a partir do momento em que um condutor pisa no freio até a parada total do veículo é chamada de distância de frenagem. Suponha que a distância de frenagem d, em metros, possa ser calculada pela fórmula

$$d(v) = \frac{1}{120}(v^2 + 8v),$$

sendo v a velocidade do automóvel, em quilômetros por hora, no momento em que o condutor pisa no freio.

a) Qual é a distância de frenagem de um automóvel que se desloca a uma velocidade de 40 km/h?

b) A que velocidade um automóvel deve estar para que sua distância de frenagem seja de 53,2 m?

7. Uma função quadrática f é tal que $f(0) = 6$, $f(1) = 2$ e $f(-2) = 20$. Determine o valor de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

3.3.2.3 Zeros da função quadrática

Nesta seção, Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020) aborda as raízes da função quadrática, demonstrando como calcular as raízes para equações completas e incompletas, com o método da **fórmula resolutiva da equação do segundo grau**, também conhecido como **fórmula de Bhaskara**, com o **método da soma e produto** e a **forma fatorada da equação quadrática**.

Zeros de uma Função Quadrática

O **zero** de uma função é um valor de x tal que anula a função, ou seja, o valor de x para o qual $f(x) = 0$. Vimos também que, considerando a função afim, é possível determinar o zero da função definida por $f(x) = ax + b$ resolvendo a equação $ax + b = 0$.
Para determinar os zeros de uma função quadrática, devemos proceder de maneira análoga: os zeros da função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.
Agora, vamos explorar algumas maneiras de resolver equações do 2º grau, que você já pode ter estudado no Ensino Fundamental. Uma dessas maneiras é aplicar uma fórmula resolutiva, também conhecida como fórmula de Bhaskara, na qual os coeficientes a, b e c são utilizados. Essa fórmula

é dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},} \quad \text{em que } \boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}}$$

O livro traz, então, como podem ser encontradas as raízes em cada caso:

Equações do 2º grau incompletas

As equações do 2º grau incompletas são aquelas em que algum dos coeficientes, b ou c, ou ambos, são nulos. Quando isso acontece, além da fórmula resolutiva, podemos resolvê-las utilizando fatoração, conforme cada caso a seguir.
1º caso: quando $b = 0$

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Nesse caso, para existir uma solução real, devemos ter $-\frac{c}{a} > 0$.
2º caso: quando $c = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad ax + b = 0$$

Logo, $x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$.
3º caso: quando $b = 0$ e $c = 0$

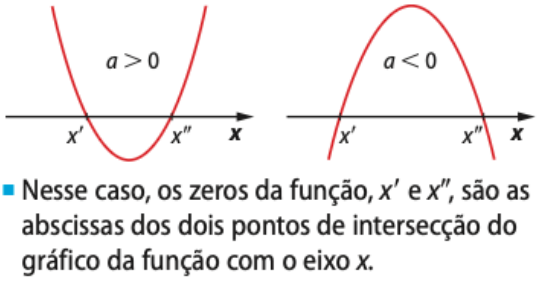
$$ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Equação do 2º grau completa

Quando resolvemos a equação do 2º grau completa $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, utilizando a fórmula resolutiva, deparamos com uma das três situações a seguir:
I. Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais e distintas. Portanto, a função quadrática correspondente tem dois zeros:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Figura 78 – Se $\Delta > 0$

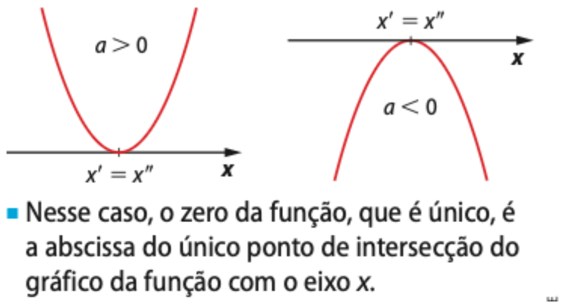


Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

II. Se $\Delta = 0$, então a equação possui duas raízes reais iguais. Portanto, a função quadrática correspondente tem um único zero:

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$$

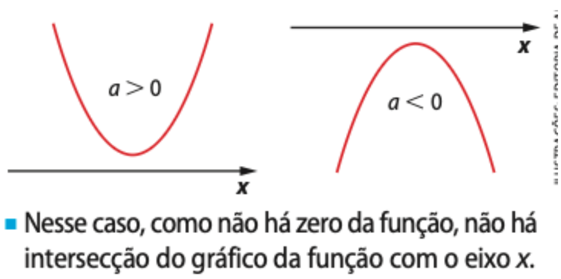
Figura 79 – Se $\Delta = 0$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

III. Se $\Delta < 0$, então a equação não possui raízes reais. Portanto, a função quadrática correspondente não tem zero.

Figura 80 – Se $\Delta < 0$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau

Considerando x' e x'' as raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},$$

podemos calcular a soma e o produto dessas raízes:

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a},$$

$$x' \cdot x'' = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Portanto, a soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau são, respectivamente:

$$\boldsymbol{x' + x'' = \frac{-b}{a}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x' \cdot x'' = \frac{c}{a}}$$

Forma fatorada da equação do 2º grau

Vamos utilizar a soma e o produto das raízes x' e x'' de uma equação

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{com } a \neq 0,$$

para obter a **forma fatorada** da lei de formação da função quadrática correspondente, que é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Colocando em evidência o coeficiente a na lei da função, temos:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow f(x) = a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right)$$

Como

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x' \cdot x'' = \frac{c}{a},$$

temos:

$$f(x) = a\left[x^2 - (x'+x'')x + x' \cdot x''\right]$$

Desenvolvendo e fatorando essa expressão:

$$f(x) = a\left[x^2 - x'x - x''x + x'x''\right] \Rightarrow f(x) = a(x-x')(x-x'')$$

Portanto, a forma fatorada da lei da função quadrática é:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = a(x-x')(x-x'')}}$$

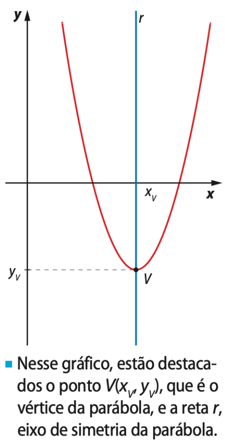
3.3.2.4 Vértice da parábola

Nesta seção, Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020) aborda o vértice de uma párabola e suas principais propriedades.

Vértice da Parábola

Vimos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Em uma parábola, existe um único ponto pelo qual se pode traçar uma reta r, perpendicular ao eixo x, e que é um **eixo de simetria** da parábola.
Qual é esse ponto?
No caso do gráfico de uma função polinomial do segundo grau $h(x) = ax^2 + bx + c$, esse ponto tem coordenadas (x_v, y_v), é chamado **vértice da parábola**, e o eixo de simetria da parábola é uma reta perpendicular ao eixo x que passa por esse ponto.
Observe o gráfico de uma função quadrática f.
O vértice $V(x_v, y_v)$ também é o ponto em que a função quadrática assume **valor mínimo** (quando a concavidade é voltada para cima) ou **valor máximo** (quando a concavidade é voltada para baixo).
Conhecer as coordenadas do vértice da parábola nos permite estudar o ponto de máximo ou de mínimo da função quadrática, bem como determinar o seu conjunto imagem. Acompanhe, a seguir, uma maneira de obter essas coordenadas.

Figura 81 – Vértice da Parábola



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

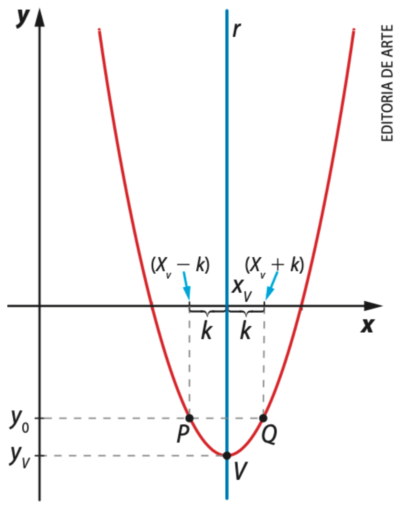
Assim, é demonstrado como se chega às fórmulas das coordenadas do vértice de uma função quadrática:

Coordenadas do vértice de uma parábola

Considere uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e dois pontos pertencentes ao gráfico de f que têm ordenadas iguais. Sabemos que esses pontos estão à mesma distância do eixo de simetria da parábola e que este, por sua vez, é perpendicular ao eixo x e cruza esse mesmo eixo no ponto de abscissa x_v, do vértice.

Podemos, então, indicar as coordenadas desses dois pontos considerados por $P(x_v - k, y_0)$ e $Q(x_v + k, y_0)$, em que $k \neq 0$ é a diferença entre as abscissas de P e de V, e de Q e de V, como pode ser verificado a seguir.

Figura 82 – Coordenadas do Vértice da Parábola



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Como as ordenadas dos pontos P e Q são iguais, temos $f(x_v - k) = f(x_v + k)$. Substituindo esses valores na lei da função f, temos:

$$a(x_v - k)^2 + b(x_v - k) + c = a(x_v + k)^2 + b(x_v + k) + c$$

$$\Rightarrow a(x_v^2 - 2x_vk + k^2) + bx_v - bk + c = a(x_v^2 + 2x_vk + k^2) + bx_v + bk + c$$

$$\Rightarrow ax_v^2 - 2ax_vk + ak^2 + bx_v - bk + c = ax_v^2 + 2ax_vk + ak^2 + bx_v + bk + c$$

$$\Rightarrow -2ax_vk - 2ax_vk = bk + bk \Rightarrow -4ax_vk = 2bk \Rightarrow x_v = \frac{2bk}{-4ak} \Rightarrow \boxed{x_v = \frac{-b}{2a}}$$

Para calcular a ordenada y_v do vértice, substituímos, na lei da função, o valor de x_v obtido. Nesse caso, temos:

$$y_v = f(x_v) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow y_v = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow \boxed{y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$$

Portanto, as coordenadas do vértice da parábola são:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right).$$

Finalizando a seção, é retomado o exemplo do início do capítulo e disponibilizados alguns exercícios para resolução dos alunos.

Preço que maximiza o lucro

Vimos no início deste capítulo uma situação na qual o lucro diário de uma loja de artigos para dispositivos eletrônicos é modelado por uma função quadrática. Nessa situação, o lucro L, em reais, é função do preço x pelo qual cada capa é vendida, também em reais, e é expresso por:

$$L(x) = -x^2 + 55x - 250.$$

Utilizando a coordenada x_v do vértice, podemos determinar o preço pelo qual cada capa deve ser vendida para que a loja obtenha o maior lucro diário, de acordo com essa função:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-55}{2(-1)} \Rightarrow x_v = \frac{55}{2} \Rightarrow x_v = 27{,}5$$

Logo, para que a loja obtenha o maior lucro diário, cada capa de celular deve ser vendida por R$ 27,50.

Exercícios do Livro

1. Determine, se existirem, os zeros da função e as coordenadas do vértice da parábola que representa o gráfico das funções quadráticas definidas a seguir:

   a) $y = x^2 - 6x + 5$

   b) $y = 3x^2 - 4x$

   c) $y = x^2 - \frac{3}{4}$

   d) $y = x^2 - 9$

   e) $y = -6x^2 - x$

   f) $y = 4x^2 - x + \frac{3}{5}$

2. A trajetória de uma bola de futebol em uma cobrança de falta foi descrita por uma função quadrática que relaciona a altura h com o deslocamento horizontal x, dada por $h(x) = -\frac{x^2}{60} + 0,5x$.

   a) Qual é a distância entre o ponto em que a bola sai do solo e o ponto em que a bola chega ao solo?

   b) Qual é a altura máxima atingida pela bola nessa trajetória?

3. Faça um esboço do gráfico das funções quadráticas a seguir. Indique o vértice da parábola e, se existirem, os zeros da função.

   a) $y = x^2 - 5x + 6$

   b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = x^2 - 4x + 4$

d) $y = x^2 + 2x + 5$

4. Considerando a função definida por $f(x) = 3x^2 - 6x - m$, determine para qual valor de m a ordenada do vértice é 4.

5. A parábola correspondente ao gráfico da função definida por $y = ax^2$ passa pelo vértice de outra parábola, que representa a função $y = 4x - x^2$. Determine o valor de a.

6. Determine a e b para que o gráfico da função definida por $y = ax^2 + bx + 6$ tenha o vértice no ponto de coordenadas $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

7. A parábola que representa graficamente a função $y = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e seu vértice é o ponto de coordenadas $(3, k)$. Determine o valor de k.

8. Calcule a, b, c de modo que a parábola correspondente ao gráfico da função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenha o vértice de coordenadas $(1, -16)$ e que -3 seja um zero dessa função.

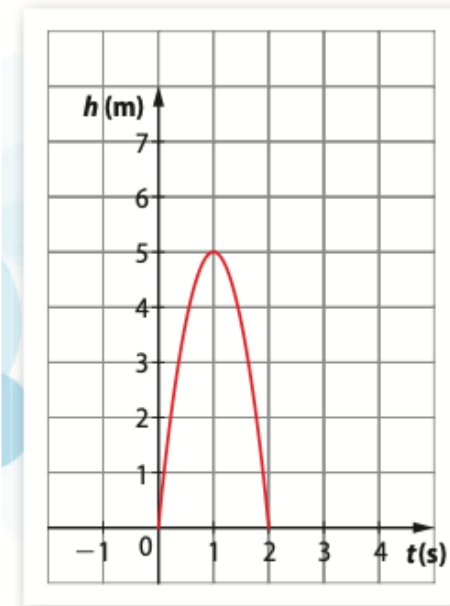
9. Determine m para que a função dada por $f(x) = (m + 1)x^2 - 2mx + 5$ possua dois zeros distintos.

3.3.2.5 Crescimento e decrescimento da função quadrática

A seção inicia fazendo um paralelo, relembrando que o estudo do crescimento e decrescimento da função já foi visto no capítulo de função do primeiro grau.

Vimos anteriormente quando uma função real de variável real é crescente em um intervalo e quando ela é decrescente. Estudaremos agora o comportamento da função quadrática em relação a crescimento e decrescimento.
Acompanhe a situação a seguir.
Em determinado momento de uma coreografia de ginástica rítmica, uma bola é lançada do solo verticalmente para cima. A altura h da bola em relação ao solo, em metro, varia de acordo com o tempo t, em segundos (s), de acordo com a lei $h(t) = -5t^2 + 10t$, considerando $0 \leq t \leq 2$ s.
Observe o gráfico que representa a função h.

Figura 83 – Gráfico de $h(t) = -5t^2 + 10t$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

- Qual é a altura máxima alcançada pela bola? Em que instante isso é observado?
- Podemos dizer que à medida que t aumenta no intervalo $[0, 2]$, $h(t)$ também aumenta?

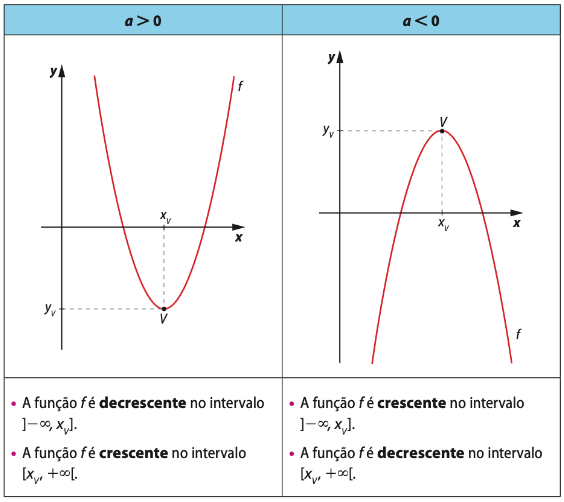
A função h é **crescente** no intervalo $[0, 1]$, pois à medida que t aumenta nesse intervalo, $h(t)$ também aumenta. Em outras palavras, para quaisquer valores de t_1 e t_2 pertencentes a $[0, 1]$, com $t_1 < t_2$, temos $h(t_1) < h(t_2)$.
Por outro lado, a função h é **decrescente** no intervalo $[1, 2]$, pois à medida que t aumenta nesse intervalo, $h(t)$ diminui. Em outras palavras, para quaisquer valores de t_1 e t_2 pertencentes a $[1, 2]$, com $t_1 < t_2$, temos $h(t_1) > h(t_2)$.

Após isso, é demonstrada a diferença nas parábolas quando se tem o coeficiente $a > 0$ ou $a < 0$, e finaliza com um exemplo.

Concavidade da parábola

Considerando uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabemos que a parábola correspondente ao gráfico dessa função terá a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e que terá a concavidade voltada para baixo se $a < 0$.
De forma geral, podemos estudar o crescimento e o decrescimento da função quadrática com base no valor de a e na abscissa x_v do vértice da parábola como indicado a seguir.

Figura 84 – Quadro de crescimento e decrescimento de uma função quadrática



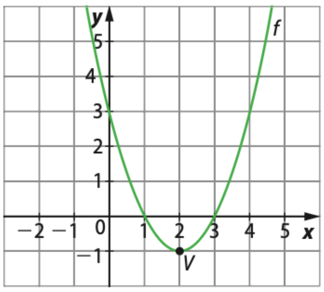
Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Considere, por exemplo, a função definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
Calculando a abscissa x_v do vértice da parábola correspondente, temos:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_v = 2$$

Assim, como $a > 0$, essa função é **decrescente** no intervalo $]-\infty, 2]$ e **crescente** no intervalo $[2, +\infty[$. Isso também pode ser observado por meio do gráfico a seguir:

Figura 85 – Gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

3.3.2.6 Valor mínimo e valor máximo da função quadrática

O livro aborda os valores máximos e mínimos das funções quadráticas, explicitando a importância do coeficiente a, e como ele influencia na concavidade da parábola, como demonstrado a seguir.

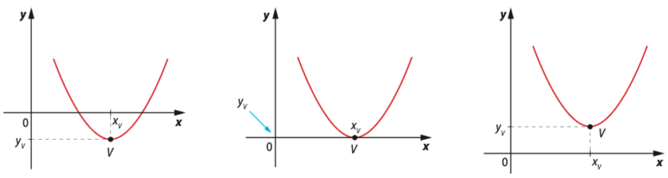
Concavidade e extremos da parábola

Ao esboçarmos o gráfico de uma função quadrática f, dada por $f(x) = ax^2+bx+c$, consideramos o sinal do coeficiente a para identificar se a concavidade da parábola será voltada para cima ou voltada para baixo.

Utilizando esse esboço, podemos verificar, entre outras propriedades, que a função f tem um **valor mínimo** ou um **valor máximo**, que corresponde à **ordenada do vértice da parábola**.

Nesse caso, se $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima e temos três situações possíveis para o gráfico:

Figura 86 – Gráfico de uma função quadrática com $a > 0$

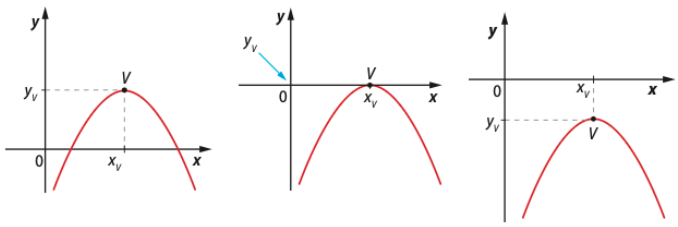


Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Observe que, nos três casos, o vértice V da parábola é o ponto cuja ordenada é o **menor valor** assumido pela função para todo $x \in D(f)$, chamado também de **ponto de mínimo** da função. A ordenada de V, que pode ser obtida por $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, é o **valor mínimo** da função, que ocorre quando $x_v = \frac{-b}{2a}$.

De maneira análoga, se $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo e temos outras três possibilidades para o gráfico da função:

Figura 87 – Gráfico de uma função quadrática com $a < 0$



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Considerando esses três casos, o vértice V da parábola é o ponto cuja ordenada é o **maior valor** assumido pela função para todo $x \in D(f)$, chamado também de **ponto de máximo** da função. A ordenada de V, que pode ser obtida por $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, é o **valor máximo** da função, que ocorre quando $x_v = \frac{-b}{2a}$.

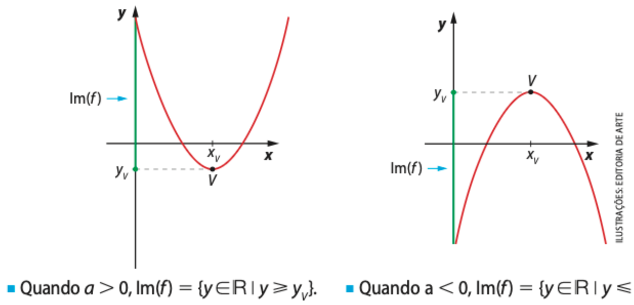
3.3.2.7 Imagem da função quadrática

Nesta seção do livro, Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020) aborda o conjunto Imagem de uma função quadrática, e qual a influência do coeficiente a neste conjunto.

Conjunto imagem de uma função quadrática

Utilizando as coordenadas do vértice da parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática f, podemos determinar o seu **conjunto imagem**.
Vimos que quando $a > 0$, o vértice V é o ponto de mínimo da função e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ é o **valor mínimo** que a função assume, ou seja, é o menor valor de imagem da função.
Por outro lado, quando $a < 0$, o vértice V é o ponto de máximo da função e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ é o **valor máximo** que a função assume, ou seja, é o maior valor de imagem da função.

Figura 88 – Imagem da Função Quadrática



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

- Quando $a > 0$, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$.
- Quando $a < 0$, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$.

Após isso, a seção é finalizada com algumas questões, como as apresentadas a seguir.

Exercícios sobre Funções Quadráticas

1. Determine o **conjunto imagem** das funções quadráticas definidas a seguir:

   a) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

   b) $g(x) = -2x^2 + 1$

2. (FGV-SP) Um vidraceiro tem um pedaço de espelho, na forma de um triângulo retângulo cujos lados medem 60 cm, 80 cm e 1 m, e quer recortar um espelho retangular cujo tamanho seja o maior possível. Para ganhar tempo, ele quer que dois dos lados do retângulo estejam sobre os lados do triângulo. Determine a medida dos lados do retângulo e a sua área.

3. (FEI-SP) Durante o processo de tratamento, uma peça de metal sofre uma variação de temperatura descrita pela função $f(t) = 2+4t-t^2$, $0 < t < 5$. Em que instante t a temperatura atinge seu valor máximo?

4. Considere todos os possíveis retângulos que possuem perímetro igual a 80 cm. Dentre esses retângulos, determine aquele que tem área máxima. Qual é essa área?

5. (Fuvest-SP) A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um combo a R$ 10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$ 1,00 nesse preço, ela vende 100 combos a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse combo?

   a) R$ 2.000,00
   b) R$ 3.200,00
   c) R$ 3.600,00
   d) R$ 4.000,00
   e) R$ 4.800,00

6. (UEMG) Suponha que numa fábrica de barras de chocolate o custo total da produção, em reais, é dado por $C(x) = x^2 - 20x + 600$, em que x é a quantidade de barras produzidas. Nesse caso, é **CORRETO** afirmar que:

   a) a produção de 10 barras é a que proporciona o custo mínimo da produção.
   b) quando são produzidas 20 barras, o custo total da produção é de R$ 400,00.
   c) o custo máximo da produção é de R$ 600,00.
   d) o custo mínimo da produção é de R$ 650,00.

7. (UEG-GO) O lucro de uma empresa é dado pela relação $R = L + C$, em que L é o lucro, R é a receita e C é o custo de produção. Numa empresa que produz x unidades de um produto, verificou-se que $C(x) = 2x^2 + 2500x + 3000$ e $R(x) = x^2 + 7500x + 3000$.

   a) Esboce o gráfico da função L.
   b) Quantas unidades essa empresa deve produzir para obter o maior lucro possível?

3.3.2.8 Investigando o comportamento de variáveis

Nesta seção, Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020) utiliza de exemplos contextualizados para analisar o comportamento das variáveis em funções do segundo grau.

Exemplo 1 - Plano de internet

Considere a situação proposta a seguir.
Uma operadora de telefonia celular oferece um plano de internet 5G em que o cliente paga pela velocidade média de *download*, em megabite por segundo, fornecida pela empresa durante o período de contratação. Essa velocidade pode chegar a 60 Mbps.
Observe a seguir os valores a serem pagos, dependendo da velocidade média de *download* fornecida por essa empresa.

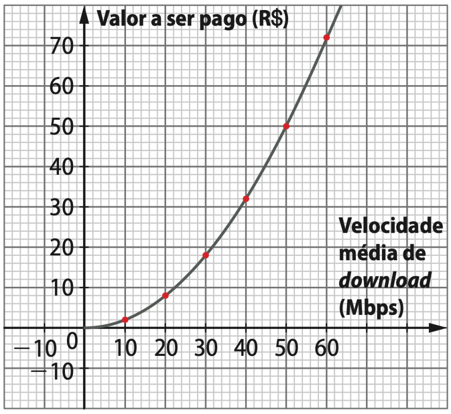
Tabela 28 – Preço de *download*

Velocidade média de *download* (Mbps)	**Valor a ser pago em R$**
10	2
20	8
30	18
40	32
50	50
60	72

Fonte: Adaptado de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Em uma aula de Matemática, os estudantes utilizaram um aplicativo para representar esses valores em um sistema cartesiano e perceberam que essas coordenadas eram de pontos pertencentes a uma parábola.

Figura 89 – Relação entre custo e velocidade de downloads



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Com base na tabela e no gráfico, os estudantes perceberam que havia uma regularidade ao comparar valores correspondentes de diferentes linhas da tabela, embora as grandezas não fossem diretamente proporcionais.

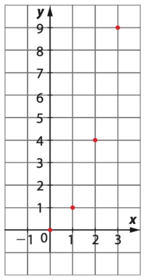
Eles observaram que, ao dobrar a velocidade média de *download*, o valor correspondente a ser pago quadruplicava, ou seja, ficava multiplicado por 2^2. Além disso, ao triplicar a velocidade média de *download*, o valor a ser pago seria multiplicado por 9, ou seja 3^2.

A situação que relaciona a velocidade média de *download* e o valor a ser pago pelo plano motivou os estudantes a analisar a relação entre o comportamento das variáveis x e y, relacionadas pela função quadrática definida por $y = x^2$.

Para fazer essa análise, atribuíram valores naturais para x, construindo uma tabela e o gráfico correspondente.

Figura 90 – Relação entre custo e velocidade de downloads

x	*y*
0	0
1	1
2	4
3	9



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Eles observaram uma relação análoga à que tinham verificado na situação envolvendo a velocidade média de *download* e o valor correspondente a ser pago: ao dobrar o valor de x, o valor correspondente de y fica multiplicado por 2^2. Ao triplicar o valor de x, o valor correspondente de y fica multiplicado por 3^2.

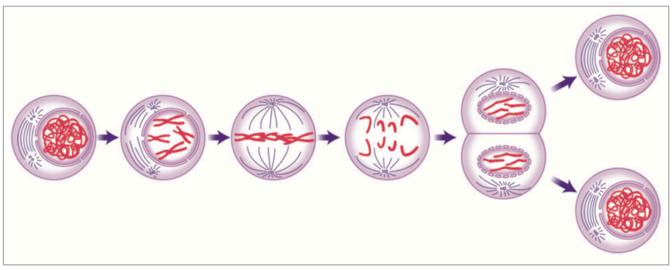
Isso acontece porque é uma propriedade das funções quadráticas do tipo $y = ax^2$. Quando multiplicamos a variável x por uma constante real k, o valor correspondente de y é multiplicado por k^2.

Exemplo 2 - Divisão celular

Considere, agora, uma outra situação.

No processo de divisão celular conhecido como mitose, uma célula dá origem a duas células iguais. Cada uma dessas células, por sua vez, pode se dividir em outras duas células, e assim sucessivamente em diversas divisões.

Figura 91 – Divisão celular



Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Na tabela a seguir, verificamos um modelo que conta a quantidade de células obtidas por meio desse tipo de divisão celular, considerando um processo contínuo a partir de uma única célula.

Tabela 29 – Relação entre divisões celulares e a multiplicação da quantidade de células

Divisão celular	**Quantidade de células**
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Fonte: Adaptado de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Essa contagem não pode ser modelada por uma função quadrática que relaciona a quantidade de divisões no processo e a quantidade de células obtidas.
Verifique que, quando multiplicamos um número de divisões no processo por uma constante k, o número correspondente de células não fica multiplicado por k^2.

3.3.2.9 Estudo do sinal da função quadrática

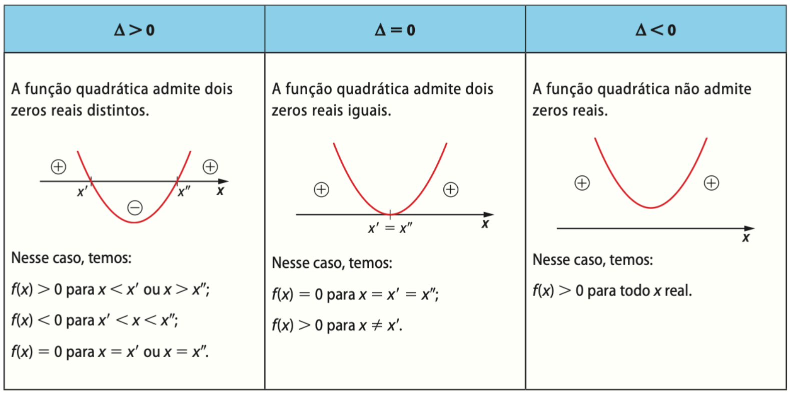
A parte de funções do segundo grau é finalizada com o estudo do sinal das funções.

Estudo do sinal

Vimos que estudar o sinal de uma função definida por $y = f(x)$ significa determinar os valores reais de $x \in D(f)$ que tornam a função positiva ($f(x) > 0$), negativa ($f(x) < 0$) ou nula ($f(x) = 0$).
O estudo do sinal de uma função quadrática pode ser feito observando o esboço de sua representação gráfica que, como já estudamos, é uma parábola.
De acordo com a concavidade da parábola, relacionada com o coeficiente a, e com a quantidade de zeros da função, relacionada com o valor de Δ, podemos esboçar o gráfico de uma função quadrática e fazer o estudo de sinais, como verificado a seguir.

- Considerando $a > 0$, temos as seguintes possibilidades:

Figura 92 – Parábola caso $a > 0$

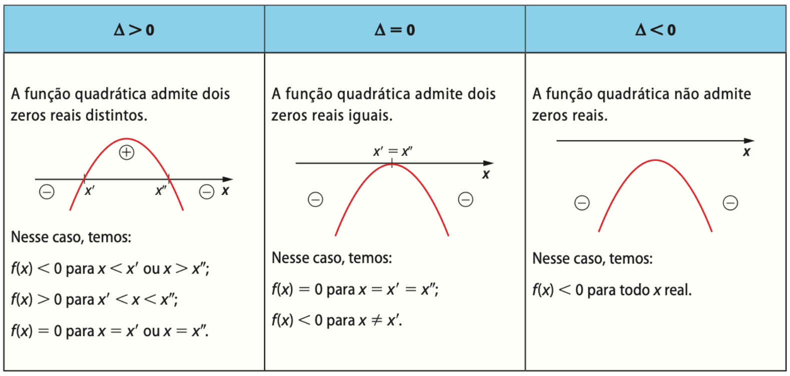


$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
A função quadrática admite dois zeros reais distintos.	A função quadrática admite dois zeros reais iguais.	A função quadrática não admite zeros reais.
Nesse caso, temos: $f(x) > 0$ para $x < x'$ ou $x > x''$; $f(x) < 0$ para $x' < x < x''$; $f(x) = 0$ para $x = x'$ ou $x = x''$.	Nesse caso, temos: $f(x) = 0$ para $x = x' = x''$; $f(x) > 0$ para $x \neq x'$.	Nesse caso, temos: $f(x) > 0$ para todo x real.

Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

- Considerando $a < 0$, temos as seguintes possibilidades:

Figura 93 – Parábola caso $a < 0$



$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
A função quadrática admite dois zeros reais distintos.	A função quadrática admite dois zeros reais iguais.	A função quadrática não admite zeros reais.
Nesse caso, temos: $f(x) < 0$ para $x < x'$ ou $x > x''$; $f(x) > 0$ para $x' < x < x''$; $f(x) = 0$ para $x = x'$ ou $x = x''$.	Nesse caso, temos: $f(x) = 0$ para $x = x' = x''$; $f(x) < 0$ para $x \neq x'$.	Nesse caso, temos: $f(x) < 0$ para todo x real.

Fonte: Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020)

Após essa explicação final, são deixados alguns exercícios para que os alunos respondam, como os apresentados a seguir.

Atividades do livro didático

1. Estude os sinais das funções definidas a seguir.

   a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$

   b) $f(x) = -x^2 + 2x$

   c) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

   d) $f(x) = x^2 - x + 10$

2. Dada a função definida por

$$f(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2,$$

determine m de modo que $f(x) > 0$ para todo x real

3. Considerando uma função dada por

$$f(x) = kx^2 - 2kx + k - 1,$$

calcule os valores de k para que $f(x)$ assuma valores negativos para todo x real.

4. (UFJF-MG) Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(t) = -5t^2 + 7t + 6.$$

   a) Para quais valores de t tem-se $h(t) \geq 8$?

   b) Determine o conjunto imagem da função h.

5. (FGV-SP) O lucro mensal de uma empresa é dado por

$$L = -x^2 + 30x - 5,$$

onde x é a quantidade mensal vendida.

   a) Qual o lucro mensal máximo possível?

   b) Entre quais valores deve variar x para que o lucro mensal seja, no mínimo, igual a 195?

4 ANÁLISE COMPARATIVA

Antes de iniciar a análise comparativa entre os materiais didáticos do Brasil e da China, é fundamental compreender o contexto pedagógico no qual se insere o ensino de Matemática na cidade de Xangai, China, onde foi produzido o material analisado para o desenvolvimento deste trabalho.

Segundo a experiência vivenciada por professores brasileiros durante um intercâmbio promovido pela Olimpíada Brasileira de Professores de Matemática do Ensino Médio (OPMbr), realizado em Xangai, China, em parceria com instituições chinesas, conforme relatado em (SILVA et al., 2025) e fundamentado na análise de pesquisas sobre o ensino de Matemática e a formação de professores na China, evidencia-se que as escolas de Xangai operam a partir de práticas pedagógicas consolidadas, entre as quais se destaca a metodologia do *Teaching Research Group* (Grupo de Pesquisa em Ensino) (TRG).

Segundo Silva et al. (2025), o programa de intercâmbio proporcionou uma imersão nas práticas pedagógicas adotadas em escolas e universidades locais de Xangai, com destaque para o funcionamento dos TRG. Essa metodologia, análoga ao *Lesson Study* (LS) do Japão, fundamenta-se na colaboração entre professores no planejamento, na observação e na análise coletiva de aulas, com o objetivo de aprimorar continuamente a qualidade do ensino.

Como parte do processo investigativo desenvolvido nesta pesquisa, foram incorporados instrumentos e materiais de observação utilizados no contexto das práticas formativas analisadas, os quais se encontram reunidos na seção de Anexos. Esses documentos foram obtidos diretamente junto a um dos autores do artigo de Silva et al. (2025), no qual são descritas e analisadas ações formativas desenvolvidas no âmbito dos TRG, o que assegura a aderência desses instrumentos às práticas efetivamente adotadas no contexto educacional de Xangai.

O Anexo A apresenta um guia de observação de aulas, utilizado como instrumento orientador para a análise das práticas docentes, contemplando aspectos relacionados às tarefas matemáticas propostas, às estratégias de ensino mobilizadas, à participação dos estudantes e aos processos de reflexão sobre a aula. Já o Anexo B consiste em um formulário estruturado de observação em sala, empregado para o registro sistemático das informações coletadas durante a implementação das aulas, permitindo organizar dados referentes aos recursos utilizados, às dificuldades encontradas pelos estudantes e às estratégias de acompanhamento adotadas pelo professor.

A inclusão desses anexos tem por finalidade conferir maior transparência e rigor ao percurso metodológico da pesquisa, além de possibilitar ao leitor uma compreensão mais detalhada dos procedimentos de observação e análise que fundamentam as discussões desenvolvidas ao longo da dissertação.

Segundo Fernandez e Yoshida (2012), o LS, embora originado no Japão, tem sido amplamente adaptado na China, desempenhando um papel central na formação docente.

> Nas Filipinas, desde 1994 a JICA forneceu 87 projetos de assistência técnica em educação matemática para países em desenvolvimento, que mudaram com o tempo, dependendo de seu status de desenvolvimento. Neste contexto, "*Before It's Too Late: Report to the Nation from the National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century*" (2000) (em português, "Antes que Seja Tarde Demais: Relatório à Nação da Comissão Na-

> cional de Ensino de Matemática e Ciências para o Século XXI") foi publicado nos EUA. Esse documento tornou-se o disparador da divulgação do *Lesson Study* (LS) para o mundo. (FERNANDEZ; YOSHIDA, 2012, p. 12)

No mundo, por influência de Yoshida e outros, o LS ficou conhecido pelo ciclo do processo de "planejar (aula), realizar e ver", com colaborações de diversos agentes e participantes. O início do LS em cada país é geralmente feito por pesquisadores. (FERNANDEZ; YOSHIDA, 2012, p. 13)

De acordo com a Universidade Normal da China Oriental (2021), a adaptação do *Lesson Study* (LS) na China, conhecida como *Teaching Research Group* (Grupo de Pesquisa em Ensino) (TRG), tem proporcionado um ambiente colaborativo, no qual os docentes podem refletir coletivamente e aprimorar continuamente suas práticas pedagógicas.

Segundo Silva et al. (2025, p. 2), essa metodologia promove o planejamento colaborativo, a observação estruturada das aulas e a reflexão coletiva como instrumentos fundamentais para o aprimoramento da prática docente. Durante a vivência nas escolas chinesas, os professores brasileiros observaram que, diferentemente do que ocorre com frequência no Brasil, as aulas são centradas em poucos conceitos, trabalhados de maneira aprofundada e progressiva, com base no princípio pedagógico denominado *step by step*, ou "passo a passo" (SILVA et al., 2025, p. 3).

Além disso, a clareza nas explicações, a gestão rigorosa do tempo e o foco na aprendizagem efetiva foram apontados como elementos centrais no modelo chinês. De acordo com os relatos, "a colaboração contínua entre os docentes durante o planejamento e a reflexão pós-aula foi crucial para o aprimoramento da prática pedagógica" (SILVA et al., 2025, p. 4), o que se aproxima de um ideal de formação permanente enraizada no cotidiano escolar. Esses elementos são centrais para compreender os fundamentos da proposta de desenvolvimento profissional adotada em Xangai, como o *Exemplary Lesson Development* (Desenvolvimento de Aula Exemplar) (Keli)[1], que será apresentado a seguir como um dos pilares do desenvolvimento profissional docente na China.

O material didático de Xangai analisado nesta dissertação deve ser compreendido no contexto de um modelo mais amplo de formação docente, conhecido como Keli. Segundo os autores, Keli é um novo modelo de formação continuada de professores implementado no âmbito do programa Xingdong Jiaoyu (Action Education)" (HUANG; BAO, 2006, p. 279).

A abordagem é descrita como "uma característica fundamental da *Action Education* é que o desenvolvimento do programa é mediado por todo o processo de elaboração de uma aula exemplar (Keli), incluindo o planejamento da aula, sua aplicação, a reflexão pós-aula e a reaplicação da aula revisada" (HUANG; BAO, 2006, p. 280). Esse processo propõe que "o Keli geralmente inclui as seguintes três fases: (1) Familiarização e Focalização; (2) O Ciclo de Ensino, Reflexão e Revisão; (3) Disseminação do processo Keli e da Aula Exemplar" (HUANG; BAO, 2006, p. 284), promovendo, assim, uma melhoria contínua na prática pedagógica.

O termo Keli refere-se, literalmente, ao desenvolvimento de uma "aula exemplar". Seu processo se inicia com a identificação de uma prática de ensino que se deseja aperfeiçoar. Em seguida, professores se reúnem para propor uma nova forma de abordagem, constroem coletivamente um novo plano de aula, im-

[1] Keli é a sigla para *Exemplary Lesson Development*, traduzido como "Desenvolvimento de Aula Exemplar". Trata-se de um modelo chinês de formação docente que integra planejamento colaborativo, aplicação em sala e reflexão coletiva, conforme descrito por Huang e Bao (2006, p. 279).

plementam esse plano em sala de aula, observam sua execução, realizam reflexões conjuntas com colegas e especialistas, e então revisam a proposta para uma nova implementação. Trata-se, portanto, de um ciclo sistemático de ação-reflexão-ação, centrado na prática e no aperfeiçoamento progressivo da ação docente (HUANG; BAO, 2006, p. 280–283).

Segundo os autores, "o modelo Keli enfatiza a aprendizagem profissional contínua, a atualização de ideias pedagógicas, a revisão dos planejamentos e a ação docente renovada" (HUANG; BAO, 2006, p. 295). Ao contrário dos modelos tradicionais de formação, centrados em palestras e transmissões unilaterais de conhecimento, o Keli envolve os professores como sujeitos ativos do processo, que aprendem a partir de suas próprias práticas, em interação com seus pares e com especialistas em conteúdo.

A dimensão colaborativa do modelo é um dos seus elementos mais relevantes. Como destacam Huang e Bao (2006, p. 292), "o planejamento colaborativo ajuda os professores a formarem ideias pedagógicas inovadoras e a encontrar maneiras mais eficazes de lidar com dificuldades, ao aprender com outros docentes experientes e especialistas". Esse trabalho coletivo, ao mesmo tempo técnico e formativo, cria uma "comunidade de aprendizagem" em que "todos os membros ora ensinam, ora aprendem — o que impulsiona o crescimento profissional mútuo" (HUANG; BAO, 2006, p. 282).

Outro aspecto importante do Keli é o foco na experiência do estudante. A análise de vídeos de aulas mostrou que, após a implementação do modelo, "o tempo de fala do professor caiu de 51,2% para 26,7%, enquanto o tempo de exploração ativa pelos alunos aumentou de 3,8% para 46,6%" (HUANG; BAO, 2006, p. 290). Ou seja, os alunos passaram a ter maior protagonismo, sendo incentivados a formular hipóteses, refinar estratégias e refletir sobre seus próprios erros — como no caso de um estudante que propôs uma conjectura incorreta e, mesmo assim, foi valorizado pelo professor por contribuir para a construção coletiva do raciocínio matemático (HUANG; BAO, 2006, p. 289).

Essa centralidade na atividade do estudante também dialoga com o princípio orientador do currículo japonês, que preconiza que os alunos aprendam de forma autônoma e reflexiva. Como destacam Isoda e Baldin (2023, p. 25), "esses objetivos são simbolizados por um conceito singular: 'Desenvolver alunos que aprendem matemática por e para si mesmos'." Essa perspectiva ressignifica o papel do professor, que se torna mediador da construção ativa de conhecimento.

Em síntese, o Keli configura-se como um modelo de desenvolvimento profissional que integra teoria e prática, estimula a autonomia e a colaboração docente, e favorece a construção de um ensino mais reflexivo e eficaz. Seu impacto se reflete não apenas na formação dos professores, mas também na qualidade da aprendizagem dos alunos e na elaboração de materiais didáticos mais coerentes com as práticas investigativas propostas em sala de aula.

Nesse sentido, é importante observar que o próprio modelo japonês de *Lesson Study* (LS) contribui significativamente para a reformulação dos materiais didáticos escolares. Segundo Isoda e Baldin (2023, p. 18), "o LS promove claramente a renovação dos livros didáticos e complementares para a formação de alunos e professores, bem como do currículo de matemática." Tal prática evidencia o entrelaçamento entre o desenvolvimento profissional docente e a produção de recursos pedagógicos, em um ciclo de retroalimentação contínuo.

4.1 Análise Comparativa e Reflexiva: Um livro do PNLD e um Material Curricular de Xangai

A comparação entre os métodos de ensino das funções adotados no Brasil e em Xangai evidencia diferenças bastante significativas, tanto na abordagem pedagógica quanto na forma como os conteúdos são organizados e apresentados aos estudantes. A partir da leitura do livro da Coleção Prisma de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020), aprovado pelo PNLD, e dos capítulos traduzidos do material curricular chinês de Xangai, é possível traçar paralelos e contrastes que revelam as diferentes intenções formativas de cada proposta.

Tanto no material curricular chinês, quanto no brasileiro, observa-se a presença de exemplos contextualizados como porta de entrada para o tema. Essas situações são importantes para apoiar os alunos na construção do conceito de função, ajudando-os a interpretar fenômenos cotidianos e fazer conexões com o conteúdo matemático. Também há, nos dois casos, a suposição de que os estudantes já tenham algum conhecimento prévio, no caso brasileiro, vindo do estudo de variáveis e relações entre grandezas no Ensino Fundamental, especialmente entre o 7° e o 9° ano. Já o documento de Xangai explicita essa expectativa, ao propor questões que partem diretamente da análise de tabelas e gráficos.

No entanto, a forma como cada material conduz o processo de construção do conceito diverge de forma significativa. Enquanto o material brasileiro tende a apresentar definições formais logo no início e, em seguida, usa exemplos como forma de fixação, o material chinês propõe uma abordagem investigativa, em que os exemplos aparecem antes das definições. Essa inversão não é apenas metodológica, mas epistemológica: em Xangai, o conhecimento matemático é apresentado como algo a ser descoberto, discutido e refinado pelos próprios estudantes.

Essa diferença se reflete diretamente na postura esperada dos alunos. No Brasil, a sequência didática é mais linear e centrada na explicação do professor, com foco na aplicação de procedimentos e na identificação de elementos como domínio, imagem e coeficientes. Já em Xangai, há uma clara valorização da formulação de conjecturas, da análise de padrões e da generalização. Os estudantes são levados a levantar hipóteses com base em exemplos variados, como ao comparar os gráficos das funções $y = 2x^2$, $y = 2x^2+1$ e $y = 2x^2-1$, percebendo por si próprios os efeitos do parâmetro k no deslocamento vertical da parábola $y = 2x^2 + k$. Trata-se de uma estratégia que promove uma compreensão mais profunda e ativa dos conceitos.

Outro ponto importante a destacar é que o material de Xangai dá maior liberdade para a exploração de múltiplas estratégias de resolução. Por exemplo, ao tratar da identificação da equação de uma função quadrática, o texto afirma que "normalmente precisamos de três pontos", mas reconhece que conhecer o vértice e mais um ponto já pode ser suficiente. Essa flexibilidade metodológica é pouco explorada nos livros brasileiros, que costumam apresentar apenas um caminho para resolver cada tipo de problema.

Além disso, nota-se que conceitos fundamentais como monotonicidade e paridade, importantes para a compreensão do comportamento das funções e para a análise de máximos e mínimos, não são abordados de forma clara no livro de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020). Essas lacunas podem comprometer o entendimento de temas mais avançados e evidenciam um distanciamento entre o conteúdo trabalhado em sala e a estrutura lógica da matemática.

Também é relevante mencionar a presença de problemas do mundo real no material chinês. Um exemplo clássico é o da empresa de telefonia que deseja maximizar a receita, levando os alunos a construir e analisar uma função quadrática a partir de uma situação concreta. Embora livros aprovados pelo PNLD também tragam exemplos contextualizados, muitas vezes eles são usados apenas como motivação superficial e não como fonte de modelagem ou de reflexão mais profunda. Nesse sentido, a proposta de Xangai se alinha melhor às competências previstas na BNCC, que destaca a importância de usar a matemática como ferramenta para compreender e intervir no mundo.

Por fim, essa comparação reforça que, mais do que diferenças curriculares ou culturais, estamos diante de concepções distintas sobre o papel do estudante e da matemática na escola. O material curricular chinês se mostra mais coerente com uma proposta de formação investigativa e reflexiva, enquanto o modelo do livro didático brasileiro ainda carrega traços de uma pedagogia centrada na transmissão e na reprodução de procedimentos. Refletir sobre essas diferenças é um passo importante para pensar em melhorias reais no ensino de matemática no Brasil.

4.1.1 Funções Lineares

Ao comparar o ensino de funções do primeiro grau entre o material didático de Xangai e a Coleção Prisma, aprovada pelo PNLD, evidencia-se, novamente, a diferença fundamental entre uma abordagem investigativa e construtivista e outra de caráter mais expositivo e procedimental.

O material de Xangai inicia o capítulo com situações-problema contextualizadas que envolvem proporcionalidade e variação entre grandezas, como a quantidade de tinta necessária para pintar diferentes áreas. Esses exemplos são organizados de forma a induzir o estudante à percepção de uma regularidade linear entre os pares de valores, sem que o termo "função" apareça explicitamente no início. Somente após o trabalho com tabelas, gráficos e perguntas orientadoras é que surge a generalização algébrica da relação, culminando na definição de função do primeiro grau. Trata-se, portanto, de uma sequência que respeita o princípio do "concreto ao abstrato", favorecendo a construção significativa do conceito.

Já no livro de (BONJORNO; GIOVANNI; SOUSA, 2020), a função afim é introduzida com definição formal já na primeira página do capítulo, com a expressão $f(x) = ax + b$ apresentada de forma direta. Em seguida, são oferecidos exemplos de aplicação e exercícios padronizados. Embora haja também o uso de contextos cotidianos, como preços e consumo, esses aparecem muitas vezes como simples aplicação da fórmula previamente dada, não havendo espaço para que o estudante descubra ou formule o modelo por si só.

Enquanto o material chinês utiliza tabelas e gráficos como ferramentas exploratórias que precedem a generalização algébrica, o material brasileiro tende a apresentá-los de forma ilustrativa e confirmatória. A função é, assim, tratada como um objeto já pronto, cujo objetivo é ser identificado e manipulado, e não como uma ideia a ser construída a partir de regularidades percebidas.

Outro aspecto digno de nota é o trabalho com múltiplas representações. O material curricular de Xangai explora simultaneamente as formas tabular, gráfica e algébrica da função, incentivando os estudantes a transitar entre essas representações. Isso se alinha à competência prevista pela BNCC, EM13MAT401, que propõe o desenvolvimento da capacidade de estabelecer conexões entre diferentes linguagens matemáticas. No entanto, no livro apresentado do PNLD, essas representações são tratadas de forma mais compartimentalizada, com menor ênfase na inter-relação entre elas.

Adicionalmente, o material chinês propõe aos estudantes o levantamento e teste de conjecturas a partir da variação sistemática dos parâmetros a e b, como ao comparar os gráficos de $y = 2x$, $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 2$, levando-os a identificar o papel de cada coeficiente no comportamento da reta. Essa estratégia favorece o pensamento generalizador e promove uma compreensão mais sólida da geometria analítica. No livro brasileiro, as variações dos parâmetros são apresentadas, mas raramente exploradas por meio de atividades investigativas.

Essa diferença pode ser explicada, em parte, pelo fato de que, em Xangai, a construção do currículo e dos materiais didáticos está fortemente vinculada à atuação dos TRGs, que são unidades organizadas dentro das escolas responsáveis por planejar, testar, revisar e aprimorar coletivamente as propostas de ensino (WANG, 2020, p. 2). Os TRGs funcionam como espaços permanentes de estudo e formação entre professores da mesma área, nos quais as práticas pedagógicas são constantemente discutidas, revisadas e aprimoradas.

Segundo Wang (2020, p. 3), os TRGs criam um ambiente no qual os professores são incentivados a refletir sobre sua prática, testar ideias inovadoras e colaborar com seus colegas. Essa cultura de experimentação e refinamento contínuo impacta diretamente a maneira como o ensino é conduzido, tornando-o mais dinâmico, responsivo e centrado na aprendizagem dos estudantes.

Por fim, o material chinês propõe situações nas quais os estudantes devem determinar a equação da função a partir de dois pontos dados, incentivando o uso do coeficiente angular e da ordenada na origem como elementos construtivos. No material do PNLD, essa dedução muitas vezes é substituída por aplicações diretas de fórmulas, o que pode reduzir a autonomia dos alunos e seu envolvimento cognitivo com o processo.

Essa comparação mostra que o ensino de funções do primeiro grau no material curricular de Xangai está mais alinhado com uma perspectiva investigativa e construtivista da aprendizagem, sustentada por uma cultura escolar colaborativa promovida pelos TRGs, enquanto o material brasileiro ainda apresenta traços de uma pedagogia centrada na exposição de conteúdos e na aplicação de procedimentos previamente definidos. Incorporar práticas mais reflexivas e exploratórias no PNLD, inspiradas nas dinâmicas dos grupos de pesquisa docente chineses, poderia favorecer uma aprendizagem mais significativa e crítica por parte dos estudantes brasileiros.

4.1.2 Funções do Segundo Grau

A comparação sobre a abordagem das funções quadráticas entre o material de Xangai e o livro didático brasileiro da Coleção Prisma, continua evidenciando duas concepções distintas de ensino da Matemática. O mesmo observado nos primeiros capítulos ocorre neste, onde o material chinês destaca-se por uma estrutura altamente investigativa, baseada em problemas contextualizados e situações reais, enquanto o livro do PNLD, embora também traga contextualizações, mantém uma forte ênfase na técnica e na aplicação direta de fórmulas.

No material de Xangai, a apresentação da função quadrática inicia-se com problemas práticos de modelagem matemática, como o cálculo da área da moldura de uma fotografia ou a previsão do número de jogos em um campeonato. Os alunos são levados a construir, investigar e interpretar expressões quadráticas a partir dessas situações. Em seguida, o material os conduz à generalização das propriedades algébricas e gráficas da função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, por meio da construção colaborativa de gráficos, exploração dos coeficientes e investigação de transformações.

Essa abordagem evidencia o compromisso com o desenvolvimento do raciocínio analítico e da compreensão estrutural da função, explorando gradualmente variações dos parâmetros a, b e c com apoio de representações múltiplas (tabelas, gráficos e expressões algébricas).

Vale destacar que o material faz uso sistemático de exemplos suficientemente genéricos, como nos momentos em que os alunos são levados a comparar os gráficos das funções $y = ax^2$, $y = ax^2 + k$ e $y = a(x - h)^2 + k$, identificando as variações no vértice e na concavidade. Essa estratégia didática dialoga diretamente com a noção de *exemplos suficientemente genéricos*, discutida por Ripoll, Rangel e Giraldo (2016, p. 87). De acordo com os autores, a escolha de exemplos no ensino da Matemática deve permitir a extrapolação de padrões e a construção de argumentos mais amplos. No caso em análise, a comparação entre funções com valores distintos de k fornece ao estudante indícios suficientes para que ele mesmo identifique a regra de deslocamento vertical, favorecendo a compreensão do papel estrutural do parâmetro na equação.

Já o livro de Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020), inicia sua abordagem sobre funções quadráticas com um problema contextualizado envolvendo lucro empresarial, um exemplo pertinente e cotidiano, mas que antecipa a formalização algébrica e a busca por máximos e mínimos a partir da fórmula de Bhaskara, assim como é mencionado no livro, e da forma canônica da função.

A proposta brasileira valoriza o ensino das propriedades algébricas clássicas, como raízes da função, vértice e concavidade, e busca apresentar problemas aplicados à realidade. No entanto, há uma tendência mais evidente ao uso direto de fórmulas e à resolução mecânica de equações do segundo grau, com menor ênfase na construção dos conceitos ou na dedução colaborativa das propriedades matemáticas.

Essa diferença metodológica revela uma lacuna em relação à formação do pensamento matemático mais abstrato e investigativo, sobretudo no que tange à compreensão geométrica das funções. Enquanto o material chinês conduz o aluno a descobrir, por exemplo, que o vértice da parábola se desloca com a mudança dos parâmetros h e k das funções $y = ax^2, \quad y = ax^2 + k, \quad y = a(x - h)^2 + k$, o livro do PNLD costuma apresentar diretamente a fórmula do vértice ou a forma canônica da função.

Outro ponto a se destacar é que apesar da proposta didática apresentada por Bonjorno, Giovanni e Sousa (2020) ser válida do ponto de vista introdutório, ao utilizar tabelas de valores e representações gráficas para familiarizar o estudante com o comportamento da função quadrática, há uma lacuna importante no que diz respeito à escolha dos valores de x utilizados para construir tais gráficos.

O livro apresenta diretamente as tabelas com os pares ordenados e os respectivos gráficos, mas não orienta o leitor sobre os critérios adotados para a seleção dos valores de x. Essa omissão pode comprometer a autonomia do estudante, que pode não compreender como escolher valores relevantes para a construção da parábola em outras situações.

Para que o aluno compreenda o raciocínio subjacente à construção do gráfico, seria essencial que o livro discutisse:

- a importância de incluir o vértice da parábola;
- a escolha de valores simétricos em relação ao eixo de simetria;

- a necessidade de cobrir intervalos suficientemente amplos para representar o comportamento global da função.

Sem essa mediação teórica, a atividade pode se tornar apenas uma reprodução de tabelas já prontas, perdendo parte de seu potencial investigativo e conceitual. Ensinar o aluno a escolher conscientemente os valores de x é tão importante quanto construir o gráfico em si, pois desenvolve o pensamento matemático, a análise de domínio e a antecipação de comportamentos funcionais.

Ambos os materiais reconhecem a importância das funções quadráticas para a compreensão do mundo, mas o fazem de maneiras distintas. O material de Xangai aposta em uma pedagogia da investigação, na qual a construção dos conceitos se dá de forma mais ativa e visual. O livro brasileiro, por sua vez, adota uma abordagem mais tradicional, voltada à preparação para exames e avaliações externas, embora traga bons exemplos contextualizados.

Em um material curricular que valorize tanto o raciocínio matemático quanto sua aplicabilidade, a combinação das duas abordagens seria altamente enriquecedora, especialmente se o livro do PNLD incorporasse práticas mais investigativas e o uso de exemplos que permitam a abstração progressiva dos conceitos, como os sugeridos por Ripoll, Rangel e Giraldo (2016).

Ainda que o foco deste estudo recaia sobre o currículo chinês de Xangai, é pertinente observar que experiências internacionais que valorizam a integração entre conceitos e a progressão coerente das ideias matemáticas contribuem para uma aprendizagem mais significativa. Como apontam Isoda e Baldin (2023, p. 31), ao analisar os parâmetros curriculares japoneses, "o princípio dos parâmetros curriculares japoneses de 'extensão e integração' é orientado para melhorar as atividades matemáticas e desenvolver o pensamento matemático." Tal abordagem, embora contextualizada no Japão, sustenta um argumento pedagógico mais amplo: a importância de sequências didáticas que articulem significados conceituais e procedimentos, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio matemático em diferentes contextos curriculares.

4.2 O uso do *Teaching Research Group* (Grupo de Pesquisa em Ensino) (TRG) e do *Lesson Study* (LS) para o ensino da matemática

Ao investigar os fundamentos pedagógicos presentes nos materiais curriculares chineses contemporâneos, torna-se imprescindível compreender os modelos de formação docente que lhes dão sustentação. Um dos pilares dessa organização curricular é o trabalho sistemático desenvolvido pelos TRGs, grupos escolares responsáveis pela elaboração, implementação e refinamento contínuo das práticas de ensino por meio do modelo *Exemplary Lesson Development* (Desenvolvimento de Aula Exemplar) (Keli). Esse processo, caracterizado pela construção coletiva de aulas exemplares, é parte integrante da política educacional chinesa voltada à profissionalização docente e à elevação da qualidade da educação matemática (HUANG; BAO, 2006).

Nesse contexto, este capítulo discute como o Keli se articula com o ensino da matemática, especialmente em conteúdos que exigem elevado grau de compreensão conceitual, como o Teorema de Pitágoras.

A título de contraste e aprofundamento, também se considera o *Lesson Study* (LS), modelo japonês amplamente difundido em estudos internacionais, cuja proposta formativa, embora distinta, compartilha com o Keli o foco na prática colaborativa e na centralidade da aprendizagem dos estudantes.

4.2.1 O modelo japonês do *Lesson Study* (LS)

A proposta do *Lesson Study* (LS) se destaca como uma importante contribuição para o ensino da matemática, ao promover práticas pedagógicas centradas no desenvolvimento do pensamento dos estudantes. Conforme apontam Isoda e Baldin (2023), essa abordagem coloca o aluno em uma posição ativa na construção do conhecimento, incentivando a formulação de significados próprios, a autonomia intelectual e a capacidade de aprender matemática "por e para si mesmo" (ISODA; BALDIN, 2023, p. 25). Essa concepção está em consonância com a visão de Shimizu (1984, apud Isoda e Baldin (2023, p. 25)), que defende uma educação matemática pautada na construção reflexiva e independente dos conceitos.

O LS valoriza a resolução de problemas como eixo metodológico fundamental. Em vez de tratar os exercícios como meras aplicações procedimentais, essa abordagem propõe a utilização de situações-problema como contextos de investigação. Nesses cenários, os estudantes são desafiados a levantar hipóteses, explorar estratégias variadas e justificar suas escolhas, fazendo do erro um elemento formativo e essencial ao processo de aprendizagem.

Além disso, o ensino da matemática apoiado no LS promove a articulação entre diferentes representações – algébricas, gráficas, tabulares e verbais – como forma de aprofundar a compreensão conceitual. Como argumentam Isoda e Baldin (2023, p. 31), essa prática favorece o desenvolvimento do raciocínio matemático ao integrar conceitos ao longo da progressão dos conteúdos, permitindo ao estudante perceber relações, padrões e estruturas com maior clareza.

Outro aspecto de destaque é a forma como o LS articula formação docente e ensino-aprendizagem. Trata-se de um processo cíclico e colaborativo de planejamento, observação e análise da prática pedagógica, no qual os professores atuam como pesquisadores da própria ação. Isso permite não apenas o aprimoramento das estratégias de ensino, mas também a produção de materiais didáticos mais coerentes com os objetivos formativos. Como afirmam os autores, "o LS promove claramente a renovação dos livros didáticos e complementares para a formação de alunos e professores, bem como do currículo de matemática" (ISODA; BALDIN, 2023, p. 18).

4.2.2 A proposta chinesa do Keli e os TRGs

No contexto do ensino de matemática, podemos ver um exemplo claro da utilização do Keli no artigo de (HUANG; BAO, 2006), onde o Keli foi aplicado de maneira concreta ao conteúdo do Teorema de Pitágoras, revelando o potencial do modelo para desenvolver o raciocínio matemático dos estudantes. Segundo os autores, ao se tentar conduzir os estudantes à formulação da relação $a^2 + b^2 = c^2$ apenas por meio de medições empíricas, esbarrava-se em dificuldades relacionadas à precisão e à generalização dos resultados. Além disso, a formulação de provas era um desafio para a maioria dos estudantes (HUANG; BAO, 2006, p. 286). Com base nisso, o grupo TRG elaborou uma sequência didática ancorada em atividades investigativas, com a utilização de figuras geométricas e construção de conjecturas.

Neste estudo, a organização do grupo Keli contou com pesquisadores de universidades e institutos educacionais, juntamente com docentes experientes de uma escola de ensino secundário (HUANG; BAO, 2006, p. 287). A aula iniciou-se com a proposição de questões exploratórias, levando os estudantes à coleta de dados e à formulação de hipóteses sobre as relações entre os lados de triângulos retângulos. Essa abordagem permitiu que conjecturas fossem discutidas coletivamente, algumas refutadas por contraexemplos, e outras sustentadas e conduzidas à demonstração (HUANG; BAO, 2006, p. 289).

Durante a reflexão pós-aula, os autores destacaram dois aspectos centrais:

1. A limitação do uso exclusivo de dados empíricos para formular a conjectura, dado o risco de imprecisões nas medições realizadas pelos estudantes;

2. A necessidade de que os estudantes compreendam não apenas a prova final do teorema, mas também o processo de elaboração dessa prova.

Nesse sentido, os materiais de apoio, como planilhas progressivamente estruturadas, atuaram como elementos de *scaffolding*[1], facilitando tanto a construção do raciocínio quanto a internalização do método de demonstração matemática (HUANG; BAO, 2006, p. 288–289).

Os autores trouxeram como resultado que o modelo culminou em uma mudança de paradigma no ensino: reduziu-se o tempo de fala do professor e de prática mecânica, enquanto ampliou-se significativamente o tempo dedicado à interação e à exploração por parte dos estudantes. O Keli demonstrou, assim, ser um instrumento efetivo para a promoção de aulas centradas na atividade investigativa dos alunos, como exige o currículo nacional chinês (HUANG; BAO, 2006, p. 290).

Na comparação com o LS, ambos os modelos compartilham a preocupação com o planejamento colaborativo, a observação de aula e a reflexão pós-aula. No entanto, o Keli diferencia-se por enfatizar a participação de especialistas, a revisão sistemática do planejamento e a implementação de ações subsequentes. Tais elementos o tornam particularmente eficaz em contextos de reformas curriculares profundas, ao favorecer a articulação entre teoria e prática e ao estimular a produção de narrativas docentes como forma de sistematização da aprendizagem profissional (HUANG; BAO, 2006, p. 295).

Nesse sentido, o Keli, inserido na estrutura dos TRGs, configura-se como um modelo promissor de desenvolvimento profissional docente em matemática, por integrar reflexão, ação e pesquisa colaborativa, sempre com foco no aprimoramento da prática pedagógica e na promoção de aprendizagens matemáticas mais significativas por parte dos estudantes.

De forma mais ampla, tanto o LS japonês quanto o modelo Keli, desenvolvido no contexto da chamada "Educação em Ação" na China, constituem abordagens colaborativas voltadas à formação docente e à qualificação das práticas de ensino. Enquanto o LS enfatiza a observação detalhada das respostas dos alunos como ferramenta para alinhar as intenções pedagógicas às reais necessidades e modos de pensar dos estudantes — de modo que "as aulas são planejadas não apenas para ensinar conteúdos, mas para desenvolver o pensamento matemático dos alunos" (ISODA; BALDIN, 2023, p. 20) —, o Keli destaca-se por integrar professores em serviço, especialistas e pesquisadores na construção e replanejamento coletivo de aulas exemplares (HUANG; BAO, 2006).

[1] *Scaffolding* é um termo da psicologia educacional que pode ser traduzido como "andaimagem pedagógica" ou "apoio instrucional estruturado". Refere-se a um suporte temporário e deliberado oferecido ao estudante com o objetivo de promover sua autonomia progressiva na resolução de tarefas cognitivamente desafiadoras.

Ambos os modelos compartilham o compromisso com a qualidade do ensino e a centralidade da aprendizagem dos estudantes, promovendo práticas mais reflexivas, integradas e eficazes no ensino da matemática, ainda que apresentem especificidades estruturais e culturais em suas formas de implementação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação teve como objetivo analisar, de forma comparativa e reflexiva, materiais curriculares de Matemática utilizados no Brasil e em Xangai, tomando como referência, no contexto brasileiro, o livro didático da Coleção *Prisma*, aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) (BONJORNO; GIOVANNI; SOUSA, 2020), e, no contexto chinês, materiais curriculares e propostas didáticas desenvolvidas no âmbito dos *Teaching Research Group* (Grupo de Pesquisa em Ensino) (TRG) e do modelo de *Exemplary Lesson Development* (Desenvolvimento de Aula Exemplar) (Keli). No caso chinês, a análise fundamentou-se nos *Padrões Curriculares de Matemática da Educação Obrigatória* (CHINA. Ministério da Educação, 2022) e em materiais curriculares produzidos para o ensino de funções em Xangai (FUNCTIONS, 202?; LINEAR FUNCTIONS, 202?; QUADRATIC FUNCTIONS, 202?).

Com foco no ensino de funções, a investigação articulou a análise dos materiais às concepções de currículo, de ensino e de formação docente subjacentes a cada contexto educacional. Ao longo do trabalho, buscou-se evidenciar que as diferenças observadas entre os materiais não se restringem a aspectos metodológicos pontuais ou à organização dos conteúdos, mas refletem concepções mais amplas acerca do papel do estudante, do professor e do conhecimento matemático no processo educativo.

A análise do Materiail Curricular de Xangai evidenciou uma proposta pedagógica fortemente orientada por princípios investigativos, progressivos e reflexivos, nos quais o ensino de funções é concebido como um processo de construção conceitual gradual. Situações-problema contextualizadas, o uso articulado de múltiplas representações algébricas, gráficas e tabulares, a exploração sistemática de parâmetros e a valorização da formulação de conjecturas constituem elementos centrais dessa abordagem. Essas características favorecem a construção de uma compreensão conceitual aprofundada, o desenvolvimento do raciocínio matemático e a autonomia intelectual dos estudantes, aspectos amplamente reconhecidos pela literatura em Educação Matemática como fundamentais para a promoção de aprendizagens significativas.

Em contraposição, o material brasileiro analisado, aprovado pelo PNLD, embora apresente avanços relevantes no que se refere à contextualização e à diversidade de exemplos, ainda revela a predominância de uma abordagem mais expositiva e procedimental. Observa-se, com frequência, a antecipação de definições formais e a ênfase na aplicação direta de fórmulas, com menor espaço para atividades investigativas que promovam a exploração, a generalização e a argumentação matemática por parte dos estudantes. Essa organização didática tende a limitar a construção autônoma dos conceitos, especialmente no estudo de funções, conteúdo estruturante para a formação matemática na Educação Básica.

Um dos aspectos mais significativos evidenciados ao longo da pesquisa refere-se à relação intrínseca entre a organização dos materiais curriculares e os modelos de formação docente adotados em cada contexto. No caso de Xangai, os TRG e o modelo de Keli configuram-se como pilares centrais do desenvolvimento profissional docente. Esses dispositivos institucionais estruturam uma cultura colaborativa consolidada, na qual o planejamento coletivo, a observação de aulas, a reflexão sistemática sobre a prática e o replanejamento pedagógico constituem um ciclo contínuo de aprimoramento. Como resultado, os materiais curriculares produzidos refletem coerência interna, intencionalidade pedagógica e alinhamento entre objetivos formativos, práticas de ensino e aprendizagem dos estudantes.

Ao dialogar com o modelo japonês de *Lesson Study* (LS), observa-se que, embora existam diferenças estruturais e culturais em suas formas de implementação, ambos os modelos compartilham princípios fundamentais. Tanto os TRG quanto o LS se organizam em torno do compromisso com a qualidade do ensino e com a centralidade da aprendizagem dos estudantes, promovendo práticas docentes mais reflexivas, integradas e eficazes. Enquanto o LS enfatiza o planejamento minucioso da aula, a observação sistemática e a análise aprofundada das respostas dos estudantes, o modelo chinês destaca a continuidade do trabalho coletivo e a institucionalização da reflexão pedagógica. Em comum, ambos reconhecem o professor como pesquisador de sua própria prática e o estudante como protagonista do processo de aprendizagem.

Em contraste, no contexto brasileiro, apesar da existência de documentos curriculares orientadores, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a articulação entre currículo, material didático e formação docente ainda se mostra fragmentada. A ausência de espaços institucionais consolidados para o estudo coletivo, a observação de aulas e a reflexão sistemática sobre a prática pedagógica dificulta a incorporação consistente de abordagens investigativas nos materiais didáticos e no cotidiano escolar. Essa lacuna evidencia que a melhoria do ensino de Matemática não depende apenas da reformulação de conteúdos, mas exige políticas públicas que valorizem e fortaleçam o desenvolvimento profissional docente de forma contínua, colaborativa e contextualizada.

No que se refere ao aprofundamento teórico do professor de Matemática, destaca-se a relevância de obras que extrapolam a abordagem usual dos livros didáticos, contribuindo para uma compreensão mais consistente do conceito de função. Nesse sentido, a Coleção do Professor de Matemática, publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), configura-se como importante referência formativa.

Obras como Números e Funções Reais (LIMA, 2023) e A Matemática do Ensino Médio (LIMA et al., 2016) apresentam o conceito de função com rigor matemático e clareza conceitual, articulando-o a outros temas estruturantes, como progressões, limites e continuidade. Tal perspectiva aproxima-se, em diversos aspectos, da abordagem observada nos materiais didáticos de Xangai, especialmente no que se refere à valorização da coerência conceitual e à integração entre diferentes representações.

Assim, o estudo dessas obras, aliado às reflexões desenvolvidas ao longo desta pesquisa, aponta para a importância de uma formação docente que vá além da dimensão instrumental, favorecendo a construção de práticas pedagógicas mais fundamentadas, críticas e significativas no ensino de funções.

Os resultados desta pesquisa não têm a pretensão de estabelecer hierarquias entre sistemas educacionais, tampouco de defender a transposição acrítica de modelos estrangeiros para a realidade brasileira. Ao contrário, a análise comparativa desenvolvida busca contribuir para uma reflexão crítica sobre caminhos possíveis para o aprimoramento do ensino de Matemática no Brasil, especialmente no que se refere à integração entre currículo, material didático e formação docente. A experiência de Xangai evidencia que práticas colaborativas institucionalizadas e sustentadas por uma cultura de estudo e reflexão podem impactar positivamente tanto a formação dos professores quanto a aprendizagem dos estudantes.

Por fim, espera-se que esta dissertação contribua para o debate acadêmico e educacional acerca da elaboração de materiais curriculares mais coerentes com propostas investigativas e formativas, bem como para a formulação de políticas educacionais que promovam a valorização do trabalho docente. Como perspectivas para pesquisas futuras, sugere-se aprofundar investigações empíricas sobre a implementação de práticas colaborativas inspiradas em modelos como o TRG e o LS em contextos brasileiros, analisando seus impactos na aprendizagem dos estudantes e no desenvolvimento profissional docente. Nesse sentido, este trabalho se apresenta como um convite à reflexão e ao diálogo sobre possibilidades concretas de qualificação do ensino de Matemática na Educação Básica.

Referências

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R.; SOUSA, P. R. C. *Prisma Matemática: Conjunto e Funções: Ensino Médio: Manual do Professor*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

BRASIL. *Constituição da República Federativa do Brasil de 1988*. Brasília: Senado Federal, 1988.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional: Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Brasília: Ministério da Educação, 1996.

BRASIL. *Plano Nacional de Educação: Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014*. Brasília: Ministério da Educação, 2014.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 1. ed. Brasília: Ministério da Educação, 2017.

CHINA. Ministério da Educação. *Padrões Curriculares de Matemática da Educação Obrigatória*: Edição 2022. Pequim: People's Education Press, 2022. Documento oficial do Ministério da Educação da República Popular da China.

FERNANDEZ, C.; YOSHIDA, M. *Lesson Study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. New York: Routledge, 2012.

FUNCTIONS. Functions. In: *Curriculum material for secondary school*. [S.l.]: [s.n.], 202? cap. 1. [S.d.].

HUANG, R.; BAO, J. Towards a model for teacher professional development in china: Introducing keli. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 9, n. 3, p. 279–298, 2006.

ISODA, M.; BALDIN, Y. Y. Estudio de clases japonés, su naturaleza y su impacto en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, Maracay, v. 44, n. 2, p. 5–35, 2023. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p5-35.id1410.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2023. (Coleção PROFMAT).

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 10. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1).

LINEAR FUNCTIONS. Linear functions. In: *Curriculum material for secondary school*. [S.l.]: [s.n.], 202? cap. 3. [S.d.].

PAINE, L.; MA, L. Teachers working together: A dialogue on organizational and cultural perspectives of chinese teachers. In: *The International Handbook of Research on Teachers and Teaching*. Westport: Greenwood Publishing, 1993. p. 447–458.

QUADRATIC FUNCTIONS. Quadratic functions. In: *Curriculum material for secondary school*. [S.l.]: [s.n.], 202? cap. 5. [S.d.].

RIPOLL, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica: Volume I - Números Naturais*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

SHIMIZU, S. Designing mathematics education for students who learn mathematics by and for themselves. *Epsilon: Mathematics Education Journal of the Aichi University of Education*, v. 26, p. 92–114, 1984.

SILVA, S. L. d. et al. Re-rc – experiência de teaching research group em xangai: Reflexões e desafios para o ensino de matemática. In: BEZERRA, R. C.; CAETANO, R. S. (Ed.). *Anais do III Seminário Internacional de Lesson Study no Ensino de Matemática*. [s.l.]: Grupo de Pesquisa Interfaces em Educação Matemática (GPIEM), UNIOESTE; GEPEM@T/UFFS; GIEM/UnB; PraPeM/UNICAMP, 2025. p. 255–260. Evento online, 14–16 maio 2025. ISBN 3086-0628 (E-book).

Universidade Normal da China Oriental. *Relatórios de pesquisa sobre o Lesson Study na China*. Xangai: Universidade Normal da China Oriental, 2021.

WANG, L. Teaching research group (jiaoyanzu) and teacher development in china. In: PETERS, M. A. (Ed.). *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory*. [S.l.]: Springer Nature Singapore, 2020. p. 1–5.

YANG, X. *Conception and Characteristics of Expert Mathematics Teachers in China*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2014.

Anexo A – Guia de Observação na Aula

Classroom Observation Guide

Guia de Observação na Aula

What mathematical tasks in classroom instruction have you noticed?

- Quais tarefas matemáticas você notou durante a instrução na aula?

What mathematics/ teaching methods have you noticed the teacher using to help students solve this task? How did students respond to teacher's method?

- Quais métodos matemáticos/de ensino você notou que o professor usou para ajudar os alunos a resolver esta tarefa? Como os alunos responderam ao método do professor?

- **How many mathematics/ teaching methods are there to solve the task in the class?**
  - Quantos métodos matemáticos/de ensino existem para resolver a tarefa na aula?
- **Which mathematics/ teaching method(s) do you think is more effective? Why?**
  - Qual(is) método(s) matemático(s)/de ensino você acha que é mais eficaz? Por quê?
- **Are there any other effective mathematics/ teaching methods you would recommend adding?**
  - Há outros métodos matemáticos/de ensino eficazes que você recomendaria adicionar?
- **How did the teacher build connections between the task to others?**
  - Como o professor estabeleceu conexões entre as tarefas?

What resources and tools did the students use?

- Quais recursos e ferramentas os alunos usaram?

- **What specific resources and tools were used in the class?**
  - Quais recursos e ferramentas específicos foram usados na aula?
- **How did students use them in the class?**
  - Como os alunos os utilizaram na aula?
- **How did they contribute to student learning process?**
  - Como eles contribuíram para o processo de aprendizagem dos alunos?
- **Do you think students had sufficient time and opportunities to use these resources and tools in class? Why or why not?**
  - Você acha que os alunos tiveram tempo e oportunidades suficientes para usar esses recursos e ferramentas na aula? Por que sim ou por que não?

How did the students operate? What difficulties did they encounter?
- Como os alunos operaram? Quais dificuldades encontraram?

- **Please describe the process of how students completed the task.**
  - Descreva o processo de como os alunos completaram a tarefa.
- **Did the students complete this task collaboratively or independently?**
  - Os alunos completaram esta tarefa de forma colaborativa ou independente?
- **Was there enough time for student exploration?**
  - Houve tempo suficiente para os alunos fazerem exploração?
- **What difficulties did they encounter?**
  - Quais dificuldades eles encontraram?

How did students record and report their methods and solutions? What were the challenges for them in this process?
- Como os alunos registraram e relataram seus métodos e soluções? Quais foram os desafios para eles neste processo?

- **Was there enough time for student recording and reporting?**
  - Houve tempo suficiente para o registro e relato dos alunos?
- **Which follow-up questions did the teacher ask during the students' reports?**
  - Quais perguntas consequentes o professor fez durante os relatos dos alunos?
- **How did the teacher provide other supports in this process?**
  - Como o professor forneceu outros apoios neste processo?
- **What challenges or misconceptions did the students face in the process?**
  - Quais desafios ou equívocos os alunos enfrentaram no processo?

During the implementation of this task by the teacher, which practices do you think need improvement?
- Durante a implementação desta tarefa pelo professor, quais práticas você acha que precisam de melhoria?

- **Do you have any comments on the lesson?**
  - Você tem algum comentário sobre a aula?
- **Do you have any advice to improve the lesson?**
  - Você tem algum conselho para melhorar a aula?

Anexo B – Formulário de Observação em Sala

Name (Nome): ______________________________ **School (Escola):** _________________________

Date (Data): ____________________ **Topic (Tópico):** ___________________________________

Implement Mathematical Tasks in the Classroom

Implementação de Tarefa Matemática na Aula

What mathematical tasks in classroom instruction have you noticed? *- Quais tarefas matemáticas você notou durante a instrução na aula?*
What mathematics/ teaching methods have you noticed the teacher using to help students solve this task? How did students respond to teacher's method? *- Quais métodos matemáticos/de ensino você notou que o professor usou para ajudar os alunos a resolver esta tarefa? Como os alunos responderam ao método do professor?*

What tools did the students use? How can these tools be utilized to generate resources for student learning? *- Quais ferramentas os alunos usaram? Como essas ferramentas podem ser utilizadas para gerar recursos para a aprendizagem dos alunos?*	**How did the students explore the task? What difficulties did they encounter?** *- Como os alunos exploraram a tarefa? Quais dificuldades encontraram?*
How did students record and report their solutions? What were the challenges for them in this process? *- Como os alunos registraram e relataram suas soluções? Quais foram os desafios para eles neste processo?*	**During the implementation of this task by the teacher, which practices do you think need improvement?** *- Durante a implementação desta tarefa pelo professor, quais práticas você acha que precisam de melhoria?*