UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ANTONIO BRUNO DOS SANTOS SHIRAKAWA

Ensino de Funções Polinomiais na Cultura Digital: Uma Proposta de Livro Didático Interativo para o Ensino Médio

JUAZEIRO – BA
2026

ANTONIO BRUNO DOS SANTOS SHIRAKWA

Ensino de Funções Polinomiais na Cultura Digital: Uma Proposta de Livro Didático Interativo para o Ensino Médio

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Ysmailyn Siqueira Costa

JUAZEIRO – BA

2026

FICHA CATALOGRÁFICA

S558e

Shirakawa, Antonio Bruno dos Santos

Ensino de funções polinomiais na cultura digital: uma proposta de livro didático interativo para o ensino médio/ Antonio Bruno dos Santos Shirakawa. - Juazeiro, 2026.

111 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2025.

Orientador: Dr. Ysmailyn Siqueira Costa

1. Tecnologias educacionais. 2. GeoGebra-Book. 3. Funções Afim e Quadráticas. I. Título. II. Costa, Ysmailyn Siqueira III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 371.33

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Márcio Pataro. CRB 5/1369.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

ANTONIO BRUNO DOS SANTOS SHIRAKAWA

Ensino de Funções Polinomiais na Cultura Digital: Uma Proposta de Livro Didático Interativo para o Ensino Médio

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovada em: 27 de março de 2026.

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
YSMAILYN SIQUEIRA COSTA
Data: 27/04/2026 12:40:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Professor Dr. Ysmailyn Siqueira Costa – Orientador
Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF)

Documento assinado digitalmente
ALISON MARCELO VAN DER LAAN MELO
Data: 27/04/2026 12:38:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

.Professor Dr. Alison Marcelo Van Der Laan Melo – Membro Interno
Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF)

Documento assinado digitalmente
FERNANDO GOMES DE ANDRADE
Data: 27/04/2026 11:46:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Professor Dr. Fernando Gomes de Andrade – Membro Externo Instituto Federal do Piauí (IFPI)

“Tudo é dedicado à Minha mãe Célia Maria, por todo o carinho, amor e empenho na minha vida”.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por me conceder força, sabedoria ao longo de todo o curso de mestrado, permitindo superação de desafios e alcançasse mais esta etapa importante da minha vida.

À minha família, pelo apoio, incentivo e compreensão durante todos os momentos desta trajetória acadêmica. Em especial, à minha mãe, que sempre foi exemplo de dedicação, amor e força, estando presente em cada passo desta jornada e sendo uma das maiores motivações para que eu nunca desistisse.

Agradeço ao professor Dr. Ysmailyn Siqueira Costa por acreditar, oferecer conselhos e conhecimentos imprescindíveis para a realização deste trabalho.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT da unidade de Juazeiro – BA, por todos os ensinamentos e empenho nas aulas ministradas.

Aos meus amigos, que compartilharam momentos de estudo, dificuldades e conquistas, contribuindo com apoio, companheirismo e incentivo durante todo esse processo.

À minha namorada, pelo carinho, paciência, compreensão e apoio constante, principalmente nos momentos mais desafiadores, tornando esta caminhada mais leve e significativa.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho e para a minha formação acadêmica e pessoal.

RESUMO

Diante do atual cenário de transformações tecnológicas que permeiam a sociedade contemporânea, torna-se necessário que o processo de ensino e aprendizagem acompanhe esta realidade, nesse contexto exige-se dos educadores não apenas domínio dos conteúdos curriculares, mas também a constante atualização em relação às tecnologias digitais aplicadas à educação voltadas a práticas que dinamizem aulas, promovam um ensino ativo, lúdico e que envolvam diferentes tipos de representações semióticas como a exploração de métodos de resolução de problemas matemáticos. Desta forma, buscou-se por meio de revisões bibliográficas a criação de um livro digital, com atividades e exercícios gráficos e ilustrativos, responder a seguinte questão-problema: Como ajudar docentes a continuar se atualizando e promover atividades, com uso de tecnologia, neste caso um GeoGebra Book para ensino de funções polinomiais de 1° e 2º graus para estudantes do 1°Ano do ensino médio? De caráter exploratório e abordagem qualitativa, essa pesquisa tem o objetivo de melhorar o trabalho docente, por meio de um livro digital, que possui explicações, e atividades que seguem habilidades descritas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), promovendo um ensino diferenciado e ativo para estudantes, de forma que ele possa construir um conhecimento sólido e verídico a respeito dos conteúdos trabalhados. Espera-se, portanto, que a dissertação contribua para que outros professores atualizem-se no ramo das tecnologias voltadas ao ensino básico, ampliando suas possibilidades metodológicas não somente na matemática, mas também em outras áreas de estudo. Pretende-se também que o trabalho estimule a utilização da ferramenta de criação de livros digitais do GeoGebra para a elaboração de novos materiais didáticos, favorecendo a construção de práticas pedagógicas alinhadas às demandas educacionais na atualidade.

Palavras-chave: Tecnologias na educação, GeoGebra-Book, Funções Afim e Quadráticas.

ABSTRACT

In view of the current scenario of technological transformations that permeate contemporary society, it becomes necessary for the teaching and learning process to keep pace with this dynamic context. In this sense, educators are required not only to master curricular content but also to continuously update and develop their knowledge regarding digital technologies applied to education. These technologies can support pedagogical practices that make classes more dynamic, promote active and engaging learning, and involve different types of semiotic representations, as well as the exploration of various methods for solving mathematical problems. Thus, through bibliographic reviews, guidance for teachers, and the development of a digital book containing graphical and illustrative activities and exercises, this study sought to answer the following research question: How can teachers be supported in continuing their professional development and in promoting technology-based activities, specifically through a GeoGebra Book, for teaching first- and second-degree polynomial functions to first-year high school students? With an exploratory nature and a qualitative approach, this research aims to improve teaching practices through the creation of a digital book that includes guidelines, explanations, and activities aligned with the skills described in the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC). The material seeks to promote a differentiated and active learning process for students, enabling them to build solid and reliable knowledge regarding the mathematical concepts addressed. It is expected that this dissertation will contribute to encouraging other teachers to update their practices in the use of technologies applied to basic education, expanding their methodological possibilities not only in mathematics but also in other areas of study. Furthermore, the study aims to stimulate the use of GeoGebra's digital book creation tool for the development of new teaching materials, fostering innovative pedagogical practices aligned with current educational demands.

Keywords: Educational technologies, GeoGebra Book, Linear and Quadratic Functions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, o processo de ensino e aprendizagem tem sido modificado conforme transformações ocorridas na sociedade e no modo de agir e pensar. Nas escolas não pode ser diferente, discentes e docentes devem acompanhar esse ritmo. Inovações tecnológicas impactam diretamente a forma como o conhecimento e informações são produzidos e repassados em todo o mundo. Nesse contexto é imprescindível que a educação acompanhe essas mudanças incorporando metodologias e recursos pedagógicos que interaja com a realidade dos estudantes.

No Brasil, a implementação de algumas dessas inovações ocorreu com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nesse sentido a própria BNCC ressalta a "cultura digital" como uma de suas competências, afirmando que:

> A cultura digital diz respeito às mudanças nas formas de comunicação, no acesso à informação, na produção de conhecimento, no exercício da cidadania e nas práticas de consumo, entre outras dimensões da vida social (BRASIL, 2018, p. 9).

Esse contexto de transformações exige dos educadores o planejamento e a execução de ações que favoreçam o desenvolvimento de competências nos educandos.

O produto educacional apresentado nessa dissertação, um livro digital, em forma de aplicativo ou site, foi elaborado com o objetivo de fornecer aos professores e, mais especificamente, aos professores do ensino médio, um material teórico, lúdico e suficientemente prático para que possam executar atividades curriculares matemáticas aplicadas para o ensino de funções polinomiais de 1° e 2° graus.

O trabalho está desenvolvido e estruturado em sete seções, sendo esta introdução a primeira delas. A segunda seção apresenta uma fundamentação histórica a respeito do surgimento e evolução das funções, desenvolvidas por grandes nomes da ciência.

Em seguida, na seção três, é apresentada uma fundamentação teórica, com a descrição de importantes fundamentos para estudo contínuo e metodologias ativas da aprendizagem, juntamente como o modo resolver problemas e visualização destes problemas através de outros jeitos pelas representações semióticas da matéria.

Já o capítulo quatro descreve uma fundamentação teórica a respeito de funções afim e quadráticas, de modo a contextualizar ensinamentos e descrever o porquê de características das funções ocorrerem, descrevendo de forma matemática esses ensinamentos.

A metodologia do trabalho está descrita no capítulo cinco, o qual mostra uma sequência didática que pode ser aplicada pelo professor em turmas de 1°ano do ensino médio. Nela estão descritas as atividades e orientações, bem como a coleta de dados para análise e decisões.

Já a seção seis relata sobre as considerações finais do projeto e descreve os benefícios a serem alcançados com o estudo assistido por tecnologias, bem como a importância da atualização docente no cenário brasileiro. E por fim o capítulo sete estão expostas as referências bibliográficas utilizadas nesta dissertação.

2 FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA

2.1 INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DAS FUNÇÕES

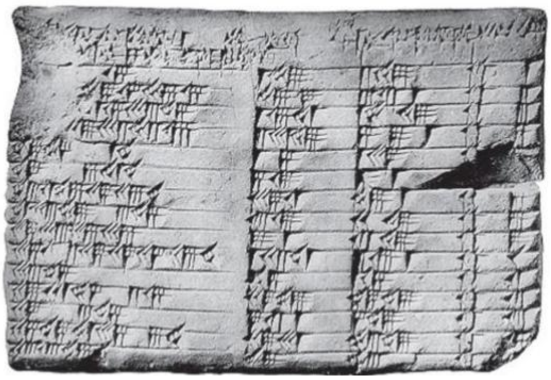
A compreensão da Matemática como um conhecimento já pronto e sem contextualização tem sido, historicamente, um dos fatores que dificultam sua aprendizagem no contexto escolar. Logo a história da matemática é uma ferramenta pedagógica para entendimento de conceitos desenvolvidos ao longo do tempo devido a necessidades humanas que foram surgindo.

Dessa forma, este capítulo tem como objetivo apresentar uma abordagem histórica do conceito de função, destacando os principais momentos de sua evolução, desde as ideias iniciais de dependência entre grandezas até sua definição moderna.

2.1.1 Na Babilônia

Para Zuffi (2001, p. 11) não existe um consenso, entre diversos autores, que fale sobre a origem exata do conceito de funções. Alguns deles consideram que os babilônios já possuíam um “instinto de funcionalidade”, que para Youschkevitch (1976, p. 5) uma tendência natural dos matemáticos (e das ciências em geral) de perceber e estudar relações de dependência entre grandezas, mesmo antes de existir a definição rigorosa de função, que precede a ideia mais geral, para estes povos, desde cerca de 2000 a.C., em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e raízes quadradas, as quais eram destinadas a um fim prático. A Figura 1 mostra-nos a tábua de Plimpton 322, que segundo Boyler (2012, p. 47) é uma tabela de argila com registros da matemática na babilônia.

Figura 1 – Tábua de Plimpton 322



Fonte: (Boyer, 2012, p. 47).

A tábua de Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C., aproximadamente) não faz uma referência direta ao uso de funções, mas para Boyler (2012, p. 46) este material organiza triplas pitagóricas, ou seja, números que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$. Logo existia a lógica de que os babilônios trabalhavam com a ideia que uma grandeza depende de outra através de uma regra matemática. A Figura 2 mostra a tábua transcrita e na base sexagesimal, ou seja, na base 60.

Figura 1 – Tábua de Plimpton 322 transcrita

1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
1,48,54,1,40	1,4	1,37	5
1,47,6,41,40	5,19	8,1	6
1,43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
1,41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
1,38,33,36,36	8,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45,0	1,15,0	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
1,27,0,3,45	2,41	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
1,23,13,46,40	56	1,46	15

Fonte: (Boyer, 2012, p. 46).

A tábua possui quinze linhas, enumeradas na última coluna. É importante falar que a segunda e terceira colunas (da esquerda para a direita) representam um cateto a e uma hipotenusa c respectivamente, enquanto que a primeira coluna corresponde ao quadrado da razão entre c para o outro cateto b, formando a secante ao quadrado num triângulo retângulo (Boyler, 2012, p.46).

2.1.2 Origem na Grécia

Saber a história da matemática é de suma importância para se entender como conceitos matemáticos surgiram, evoluíram e ganharam significado ao longo do tempo, sendo aplicados em resposta às necessidades humanas e aos contextos culturais de cada época. Neste sentido Lopes e Ferreira (2013, p. 77) fala que:

> Ao longo dos últimos trinta anos, a História da Matemática vem se consolidando como área de conhecimento e investigação em Educação Matemática. Pesquisas desenvolvidas na área mostram que o saber da matemática está intimamente ligado à motivação e interesse dos alunos por essa ciência.

Para D'ambrósio (1996, p. 29) a história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas foram criadas, logo saber origens significa dizer que a matemática foi produzida ao longo dos tempos por diferentes povos e culturas. Neste contexto, é importante saber que a matemática não são apenas conceitos e conjuntos de fórmulas abstratas sem contexto.

Entender a história da matemática ajuda a entender como e por que e por quem ideias e teorias foram criadas. Neste contexto Botelho e Rezende (2007, p. 65) fala que o conceito de função, presente nos mais diversos ramos da ciência, teve sua origem na tentativa de filósofos e cientistas em compreender a realidade e encontrar métodos que permitissem estudar e descrever os fenômenos naturais. Escolas de filosofia grega, como a de Talles de Mileto (século IV a.C.), também conhecida como escola Jônica procurava explicações racionais para eventos do mundo que os cercava. Botelho e Renzende (2007, p. 66) falam que esses experimentos deveriam ser estudados pela matemática, tendo como um de seus precursores o filósofo Platão (427-347 a.C.), o autor relata também a importância do filósofo Aristóteles (384-322 a.C.) como figura principal no estudo das mudanças físicas, principalmente do movimento, analisando medições de grandeza de forma qualitativa não algébrica.

A seguir, tem-se algumas concepções e importâncias de alguns renomados estudiosos a respeito das funções.

2.2 CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICAS

Outro importante aspecto a ser tratado refere-se a como alguns pensadores, estudiosos e cientistas contribuíram para o desenvolvimento do conceito e aplicações das funções ao longo do tempo.

2.2.1 Galileu Galilei

Para Zuffi (2001, p. 11) Galileu Galilei (1564 – 1642) contribuiu para a revolução da ideia de função ao introduzir o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas, pois nessa época o aprimoramento dos instrumentos de medida propiciaram a busca de resultados inspirados na experiência e observação.

O cientista adotou e ensinou a teoria heliocêntrica nas Universidades de Pisa e de Pádua e, nesta época, seus experimentos mostraram que o peso de um corpo não exerce influência na velocidade da queda livre, contrariando Aristóteles. Ele ainda escreveu "As novas duas ciências", em que a obra sobre dinâmica e resistência dos materiais, entre outros resultados, enunciou a lei da queda dos corpos no vácuo: o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo necessário para percorrer este espaço. Esta lei, assim como a 3ª Lei de Kepler, traz em seu enunciado claramente o conceito de função (Botelho; Rezende, 2007, p. 67).

2.2.2 René Descartes

Descartes (1596–1650) utilizou-se de equações em x e y para estabelecer uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas a partir dos valores da outra (Zuffi, 2001, p. 11).

Escritor da obra "*Discours de la méthode*", publicado em 1637, Descartes expõe suas ideias científicas e filosóficas. Em *"La Géometrie"*, utilizou-se da álgebra como ferramenta para a resolução de problemas geométricos. As grandes inovações foram a associação de curvas a equações algébricas e o uso de um sistema de coordenadas para relacionar as variáveis envolvidas naquelas equações, procedimentos que deram origem ao que chamamos hoje de geometria analítica (Botelho; Rezende, 2007, p. 68).

2.2.3 Pierre de Fermat

No seu estudo de curvas, Pierre de Fermat (1601-1665), utilizou-se de um sistema de coordenadas e relacionou as duas variáveis que apareciam no final de uma equação a partir do seguinte princípio: “Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha reta ou curva” (Botelho; Rezende, 2007, p. 68).

Rachelli (2021, p. 68) relata que em 1629, o matemático Pierre de Fermat estava interessado em resolver problemas que consistiam em maximizar determinadas grandezas que dependiam de uma variável. Nesse sentido, Fermat desenvolveu um método bastante eficiente para resolver alguns de seus problemas. tal método foi baseado nos trabalhos de Kepler sobre a melhor forma a dar aos barris de vinho, nos quais Kepler afirma que perto do máximo qualquer variação parece insensível.

O autor ainda fala que o método de Fermat pode ser descrito da seguinte forma: suponha que se deseje achar os valores máximo ou mínimo de uma expressão $f(A)$, usando-se a notação funcional moderna, mas denotando-se a variável por A. Fermat seguia a notação de indicar incógnitas ou variáveis por vogais e quantidades conhecidas ou constantes por consoantes. Façamos agora a substituição de A por $A + E,$ sendo E uma variável muito pequena em relação a A.

$$\left(\frac{\big(f(A+E) - f(A)\big)}{E}\right)_{E=0} \;=\; 0.$$

Esta equação nos diz que $f'(A) = 0$, ou seja, a derivada de f em A deve ser igual a zero. Esta é a condição necessária para que uma função diferenciável tenha um máximo ou mínimo num intervalo aberto (Rachelli, 2021, p. 68).

2.2.4 Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz

Isaac Newton (1643–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) são, para Rachelli (2021, p. 66) são os criadores do Cálculo diferencial e integral, porém o autor fala ainda que o Cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por eles. Newton e Leibniz demonstraram que os dois problemas centrais estudados no século XVII, o das tangentes – problema fundamental do cálculo diferencial e o das quadraturas – problema fundamental do cálculo integral, apresentavam entre si uma relação inversa, que constitui o teorema fundamental do Cálculo e, por isso, a invenção do Cálculo é, tradicionalmente, atribuída a ambos.

Zuffi (2001, p. 11) relata que foi a partir dos trabalhos de Newton e Leibniz que surgiram as primeiras contribuições efetivas para o delineamento do conceito de função. O autor ainda revela que Newton descreveu suas ideias de funções estavam ligadas às noções de curvas e as “taxas de mudança” de uma quantidade variando continuamente. Ele também expressou as ideias de funções através de séries infinitas e tentou definir limite de uma função falando em quantidades e taxa de quantidades. Já Leibniz em 1670 foi quem usou o termo função para se referir a “certos segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas a curvas”, logo após o termo foi usado para se referir a quantidades dependentes ou a expressões (Zuffi, 2001, p. 11).

Falando um pouco sobre o Cálculo diferencial e integral, este constitui um dos marcos mais importantes do desenvolvimento da matemática moderna, pois segundo Alves (2023, p. 01) é uma das mais importantes ferramentas matemáticas utilizadas em diversas áreas do conhecimento, desde a própria matemática até áreas como a física, economia, engrenharias e medicina. Ainda segundo o autor o cálculo é usado para resoluções de problemas estatísticos, medições geométricas, descrições de forma, movimento de planetas, operação de máquinas, fluxo de líquidos, expansão de gases, forças físicas como magnetismo e eletricidade, voo, crescimento de plantas e animais, a propagação de epidemias e flutuações no lucro, dentre outras aplicações práticas.

2.2.5 Jean Bernoulli e Leonard Euler

Zuffi (2001, p. 12) mostra que Jean Bernoulli (1667-1748) deu grandes contribuições para a geometria diferencial, o matemático suíço também se interessava por comportamento de funções, nas quais ele ajudou no desenvolvimento e aprimoramento da regra de L’Hospital para formas indeterminadas de limite que envolviam funções diferenciáveis.

Já para Botelho e Rezende (2007, p. 67) Bernoulli fala que cada função poderia ser representada por uma única expressão analítica, podendo-se observar que na definição o conceito de função como combinação de símbolos algébricos. Esta "expressão analítica" aparece na definição de função dada por Leonhard Euler (1707-1783) em seu clássico "*Introduction in Analysin Infinitorum*", de 1748, primeira obra em que o conceito de função desempenha um papel central.

O matemático Leonard Euler, discípulo de Bernoulli, também teve contribuições muito relevantes para o estudo das funções, pois segundo Zuffi (2001, p. 12) ele foi responsável por consolidar e sistematizar o conceito moderno de função, ao defini-la como uma relação analítica expressa por uma fórmula envolvendo variáveis. Euler ampliou o uso da notação funcional, introduzindo o símbolo $f(x)$, que se tornou padrão na matemática, além de aprofundar o estudo das funções elementares, como as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

2.2.6 Joseph Fourier

O matemático francês teve uma grande importância nos estudos e aplicações de funções, pois segundo Alexander e Sadiku (2013, p. 684) Fourier apresentou pela primeira vez, as séries e transformadas que levaram seu nome. Fourier teve a brilhante ideia de que qualquer função periódica prática pode ser representada por uma soma de senoides, na prática as funções periódicas $f(t) = f(t + nT)$ em que n é um inteiro e T é período da função podem ser expressas por:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nw_0 t) + b_n sen(nw_0 t)$$

Em que $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência fundamental medida em radianos por segundo e a_n e b_n são coeficientes das senoides. Vale destacar que o estudo de Fourier permitiu um grande avanço na engenharia elétrica, pois Alexander e Sadiku (2013, p. 688) as componentes senoidais são componentes harmônicas e a partir delas pode-se estudar espectros de frequências de um sinal elétrico.

Vale destacar que existem muitos outros matemáticos e cientistas que contribuíram significativamente para o estudo, desenvolvimento de teoria e aplicação das funções, mas o viés do trabalho está além de todas os estudos feitos por grandes nomes da ciência.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, serão abordados o documento norteador, a BNCC, como base das habilidades a serem estudadas na educação básica, algumas teorias de grandes autores, como o método de resolução de problemas de Pólya e a importância dos registros semióticos Duval. Outros estudos importantes dizem respeito às teorias das tendências da educação, como a tradicional e a construtivista, bem como à formação docente, à modelagem de sistemas reais e às tecnologias da educação.

3.1 DOCUMENTO NORTEADOR

3.1.1 Base nacional comum curricular (BNCC)

Ao longo da educação básica, no Brasil, os estudantes devem ter aprendizagens essenciais, neste sentido o ministério da educação elaborou e homologou a BNCC, em 2018 para o ensino médio, documento normativo que orienta os currículos das redes públicas e privadas, estabelecendo competências e habilidades que asseguram uma formação integral e equitativa. O documento BRASIL (2018, p. 07) ainda expõe que:

> Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.

Em se tratando de tecnologias, BRASIL (2018, p. 528) propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas.

O documento fala ainda que a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas (BRASIL, 2018, p. 529).

Tratando-se de funções o documento destaca a importância de trabalhar diferentes representações, tais como a algébrica, gráfica, tabular e computacional, de modo articulado, possibilitando ao estudante interpretar e modelar situações do cotidiano por meio de funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Além disso, a BNCC enfatiza que o estudo de funções deve ir além da mera manipulação simbólica, promovendo a análise crítica de dados, a resolução de problemas e a aplicação da Matemática em contextos sociais, científicos e econômicos (BRASIL, 2018, p. 531).

3.2 TENDENCIAS PEDAGÓGICAS

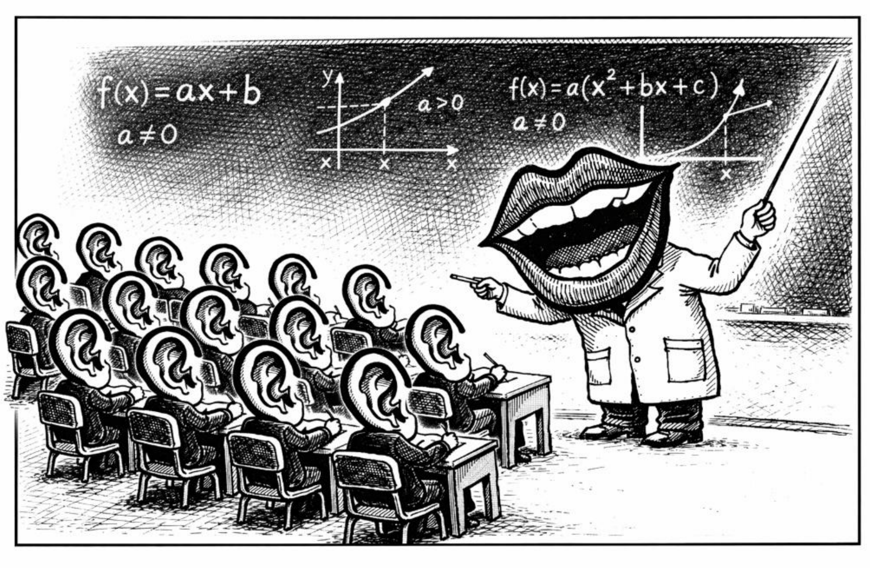
No Brasil existem várias tendencias pedagógicas que diferem concepções de ensino e aprendizagem dividindo-se em dois grandes grupos, os liberais e progressistas. Rossi (2025, p. 66) discute que as tendencias liberais dividem-se em quatro vertentes, sendo elas: Tradicional; Renovada Progressivista; Renovada Não-Diretiva; Tecnicista. Este tipo de Tendência visa a conservação social, manter o *status quo*, quer permanecer como está, sem mudanças. Por outro lado, a Progressista se divide em três vertentes, a citar: Libertadora; Libertária; Crítico-social dos conteúdos. Esta, busca a transformação social, ela questiona as normas e práticas da educação, não se conformando com elas.

Descrever todas as tendencias citadas anteriormente não é o foco desta dissertação, mas é necessário que se tenha noção de duas delas, a Tendencia Liberal tradicional e a Tendencia construtivista, pois ambas refletem um contraste significativo quanto às concepções de ensino, aprendizagem e papel do professor e do aluno no processo educativo.

3.2.1 Tendencia Liberal Tradicional

Segundo Rodrigues, Barros e Fraguas (2020, p. 03) a Tendência Tradicional valoriza o ensino humanístico e conservador, pois coloca o aluno em contato com as grandes realizações da humanidade. Seu ensino é rígido e funciona através da transmissão e confrontação com modelos de demonstrações. Essa escola é um “mundo fechado”, não há renovação de ideias e nem renovação da prática didática do professor, cujo papel era apresentar um conteúdo pronto e acabado, para que seus alunos repetissem e reproduzissem o modelo proposto. O professor era o dono da verdade, era severo, rigoroso, autoritário e objetivo. E o aluno era um ser repetitivo e passivo, e obedecia sem questionar. A Figura 3 mostra uma Ilustração satírica da tendência pedagógica tradicional.

Figura 2 – Ensino tradicional e a passividade discente no conteúdo de funções



Fonte: (Gerada por Inteligência Artificial com a ferramenta ChatGPT (OpenAI), em 05/02/2026, com a finalidade de representar por caricatura o ensino tradicional em matemática).

Logo é possível dizer que o ensino tradicional não incentiva o protagonismo discente, uma vez que a ênfase recai sobre a memorização e a reprodução dos conteúdos, limitando o desenvolvimento da autonomia, da reflexão crítica e da construção ativa do saber.

3.2.2 Tendencia Construtivista

Para Castañon (2015, p. 216) foi Jean Piaget (1896–1980) aquele que introduziu o termo 'construtivismo' no século XX, em sua obra *"Logique et connaissance Scientifique"*, de 1967. O autor ainda revela que Piajet apresenta seu modelo construtivista de desenvolvimento cognitivo sustentado por dados empíricos (informações obtidas por meio da observação, experimentação ou coleta direta da realidade), com um sujeito construtor, através da ação no mundo, de suas próprias estruturas cognitivas. Dois de seus conceitos principais que esclarecem sua posição quanto ao processo de construção são os de assimilação e acomodação.

É importante falar que a concepção de construtivismo não se limita a Piaget, mas sim a muitos outros estudiosos. Neste sentido Guimarães (2010, p. 40) afirma que:

> "Construtivismo significa isto: a ideia de que nada, a rigor, está pronto, acabado, e de que, especificamente, o conhecimento não é dado, em nenhuma instância, como algo terminado. Ele se constitui pela interação do indivíduo com o meio físico e social, com o simbolismo humano com o mundo das relações sociais; e se constitui por força de sua ação".

Logo, é válido ressaltar que o construtivismo compreende a aprendizagem como um processo ativo de construção do conhecimento, no qual o estudante deixa de ser mero receptor de informações e passa a assumir papel protagonista na elaboração de conceitos.

Falando-se no ensino de funções, é importante falar que essa perspectiva pedagógica possibilita que os alunos compreendam o conceito a partir da resolução de situações-problema, da análise de gráficos, da investigação de padrões e da utilização de recursos tecnológicos, fazendo com que os discentes possam ter um ensino diferenciado do padrão tradicional.

3.3 PERSPECTIVAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Existem várias maneiras de ensino da matemática no Brasil e no mundo, logo é válido o estudo de algumas perspectivas, que são formas diferentes de organizar e compreender o processo de ensinar e aprender Matemática, baseadas em teorias educacionais e filosóficas.

3.3.1 Resolução de questões

Quando se trabalha com o ensino de matemática e ciências exatas, um dos principais aspectos a ser mencionado refere-se à resolução de problemas, pois é por meio dela que o estudante desenvolve o raciocínio lógico, a autonomia intelectual e a capacidade de aplicar conceitos em diferentes situações.

Pólya (1995, p. 01) fala que o estudante deve adquirir experiência pelo trabalho independente, tanto quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente nenhum progresso. Já se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar nem demais nem de menos, mas de tal modo que caiba ao estudante uma parcela razoável de trabalho.

O ensino sobre Resolução de Problemas corresponde a considerá-la como um conteúdo a ser abordado em sala de aula, orientando os estudantes a seguir heurísticas, ou seja, um método ou procedimento, como estratégia geral para se buscar a solução de qualquer problema, enfatizando as etapas e o processo independente do conteúdo abordado (Possamai, 2021, p. 02).

É válido salientar que para Possamai (2021, p. 05) a concepção de ensinar através da resolução de problemas provoca alterações nas funções exercidas pelo professor e pelo aluno em sala de aula, se comparado com o ensino tradicional, em que o docente é o “portador do conhecimento” e atua como transmissor de conhecimento e o discente é um agente passivo. Na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o professor assume um papel de mediador do conhecimento e o estudante tem a oportunidade de participar ativamente no processo de construção do conhecimento, o que os permite serem mais comprometidos com a sua aprendizagem.

Uma importante informação a ser sobre esse tema, refere-se às quatro fases de resolução de problemas. Pólya (1995, p. 03 – 11) mostra-nos que:

- **Compreensão do problema:** O aluno deve compreender o problema, mas não só isso: deve também desejar respondê-lo. O enunciado verbal do problema deve ser bem entendido. O aluno deve também estar em condições de identificar as partes principais do problema, a sua incógnita, os dados e as condicionantes. Vale destacar que as partes principais do problema devem ser vistas repetidamente sob vários pontos de vista;
- **Estabelecimento de um plano:** O caminho que vai desde a compreensão do problema até a elaboração de um plano, pode ser longo e tortuoso. A ideia do plano pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas. Logo a melhor coisa que o professor pode fazer por seu aluno é propicia-lhe, discretamente, uma ideia luminosa. É válido destacar que as boas ideias são baseadas na experiencia passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Pólya apresenta: considerar a incógnita e procurar pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.
- **Execução do plano:** O plano proporciona apenas um roteiro geral. O aluno precisa estar convicto dos detalhes que se inserem neste roteiro, e para isso, deve examiná-los, um após o outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro. O maior risco dessa fase é se o estudante esquecer o seu plano, o que pode acontecer se ele aceitou um plano de fora e o aceitou por influência do professor. É válido ressaltar que se o aluno tiver elaborado o próprio plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. Neste caso, cabe ao professor insistir que o aluno verifique cada passo.
- **Retrospecto:** Ao fazer um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e examinando o resultado final e o caminho que levou até este, os alunos poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver um problema. Cabe ao professor compreender e transmitir aos alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Com estudo e aprofundamento, pode-se melhorar qualquer

resolução, e seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a compreensão da resolução.

A Figura 4 a seguir mostra-nos a relação entre as fases descritas por Pólya. Vale destacar que as fases interagem entre si, sendo possível o retorno e a ida de uma fase para outra a qualquer momento da resolução.

Figura 3 – Interação entre fases de Pólya

Fonte: (Moura, 2023 p. 18).

Refletindo sobre esses quatro passos, se forem aplicados corretamente, sem dúvida contribuirão para o desenvolvimento cognitivo do aluno, pois vão lhe proporcionar partir de uma determinada estrutura cognitiva e construir uma mais complexa, acarretando um desenvolvimento do raciocínio lógico-formal. Entretanto, é necessário que se entenda que esse processo não é linear e sim cíclico, dinâmico, e que cada vez que ocorre atinge-se um nível superior (Moura, 2023, p. 18).

3.3.2 Representações semióticas

Para Denardi (2017, p. 05) um sistema semiótico é um conjunto de signos, organizados segundo regras próprias de formação e convenções, que apresentam relações internas que permitem identificar os objetos representados. Em outras palavras, é um sistema que desempenha a função de comunicação uma vez que é capaz de produzir e transmitir informações.

O autor ainda revela que a principal dificuldade na aprendizagem da matemática decorre do fato que os objetos matemáticos não possuem existência física e, sendo assim, o acesso a esses objetos só é possível com a utilização de um sistema semiótico, que é um sistema de representação por meio do qual se produz e interpreta-se sentidos. Desta forma, na matemática, muito mais do que em qualquer outra área do conhecimento, a diversidade dos sistemas semióticos é fundamental para a aprendizagem e para a construção de novos conceitos.

Já Duval (2012, p. 03) fala que a distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática. O autor menciona que as diversas representações de um objeto matemático são absolutamente necessárias, pois os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representações. E por outro lado, a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado.

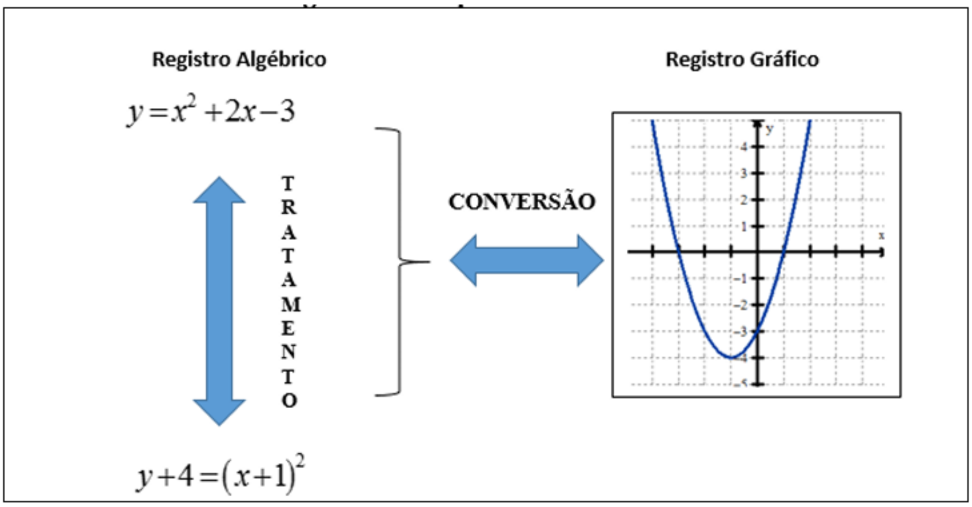
Denardi (2017, p. 06) mostra que na visão de Duval, os diferentes sistemas semióticos permitem uma diversificação de representações de um mesmo objeto, aumentando as capacidades cognitivas dos sujeitos. O autor afirma que o conhecimento matemático só é transformado em saber quando ocorre a mobilização espontânea pelos alunos, de distintos registros semióticos de um mesmo objeto matemático.

Para compreender como ocorre a aquisição conceitual, segundo Duval (2012, p. 06), por meio da mobilização e coordenação dos registros de representação é necessário entender três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose, sendo elas:

- **Formação de uma representação identificável:** uma representação de um registro dado, como a enunciação de uma frase, uma composição de um texto, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, entre outros;
- **O tratamento:** é uma transformação da representação no mesmo registro que ela foi formada. Como exemplo, pode-se citar a paráfrase ou inferência são formas de tratamento da língua natural, o cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas, a reconfiguração é um tipo de tratamento particular para figuras geométricas;
- **A conversão:** é transformação de uma representação em outra notação com outro registro, conservando a totalidade ou somente uma parte do conteúdo da representação inicial.

A Figura 5 mostra a forma de transição de representações para registros semióticos de uma função quadrática.

Figura 4 – Exemplo de tratamento e conversão



Fonte: (Denardi, 2017, p. 07).

Denardi (2017, p. 05) salienta que o tratamento, normalmente, é a transformação que mais se prioriza no ensino. Enfatiza, ainda, que a atividade de conversão, principalmente em seus dois sentidos, é relevante para a aprendizagem em Matemática e, por isso, necessita ser levada em consideração nas atividades de ensino. São nelas que as mudanças nos registros de representação se mostram mais eficazes para a formação conceitual e transformação em saberes.

No estudo de funções, essas representações tornam-se bastantes relevantes, pois o conceito pode ser expresso por meio de distintos registros, como o algébrico (fórmula), o gráfico (plano cartesiano), o tabular (tabelas de valores) e o verbal (descrição em linguagem natural).

Logo é possível dizer que o ensino de funções precisa estimular a integração dessas múltiplas formas de representação, permitindo que o estudante atribua sentido ao conceito ao circular entre elas, consolidando uma compreensão mais ampla, articulada e significativa do conhecimento matemático.

3.4 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO NA EDUCAÇÃO

Tecnologias digitais no uso educacional podem ser grandes aliadas no processo de ensino e aprendizagem. Constantemente professores, em geral de ciências exatas, pedem uso de calculadoras para auxílio de exercícios, mas vale destacar que existem muitas outras formas de uso das tecnologias, como o uso de softwares educativos, aplicativos educacionais, computadores com acesso à internet, calculadoras gráficas, plataformas digitais como Google Classroom e o Moodle, entre outros.

A Tabela 1 a seguir mostra-nos exemplos e sugestões de conteúdos e programas que podem ser utilizados para ensino da matemática.

Tabela 1 - Sugestão de tópicos matemáticos que podem ser abordados em atividades de aprendizagem Matemática usando os programas relacionados.

Recurso computacional	**Sugestão de tópicos**	**Exemplos de Programas**
Planilhas Eletrônicas	•Números reais e suas operações; • Equações e funções reais de uma variável; • Introdução ao conceito de limite; • Matemática financeira; • Tratamento da informação.	•Microsoft_Excel (Comercial); •OpenOffice_Calc (Gratuito); •Google_Planilha (Gratuito).
Ambientes Gráficos	• Equações; • Sistemas e funções reais de uma variável real; • Conceito de limite; • Geometria Analítica Plana.	• Winplot (Gratuito); •Graphmatica (Gratuito).
Ambientes de Geometria Dinâmica	• Geometria sintética plana e espacial; • Geometria analítica plana; •Funções reais de uma variável real.	• Geogebra (Gratuito); •Tabulae (Gratuito); •Cabri_Géomètre (Comercial).
Sistemas de Computação Algébrica	• Raízes de funções; • Sistemas lineares; • Polinômios; • Matrizes.	• Maxima (Gratuito); • Algebrator (Comercial); • Maple (Comercial); • MathCAD (Comercial).

Fonte: (Moura, 2023 p. 26).

Quando se fala no uso de tecnologias na educação, Borba e Penteado (2001, p. 11) relatam uma preocupação, sobre os riscos que a utilização da informática poderia trazer para a aprendizagem dos alunos. Um deles era o de que o aluno iria só apertar teclas e obedecer a orientação dada pela máquina. Isso contribuiria ainda mais para torná-lo um mero repetidor de tarefas. Nesse sentido, se o raciocínio matemático passa a ser realizado pelo computador, o aluno não precisará raciocinar mais e deixará de desenvolver sua inteligência. Além dessa preocupação com o desenvolvimento dos alunos, um outro argumento utilizado pelos que são "contra a informática na escola" é a questão econômica. Muitos questionam: Como comprar computadores para as escolas, se nem mesmo há giz em várias delas?

Questões como esta levantam um apontamento de que as tecnologias podem não ser favoráveis ao ensino. É válido destacar que estas são apenas observações feitas a respeito do tema, pois existem muitos benefícios no uso da tecnologia na educação. Logo o professor deve saber utilizar a tecnologia de maneira benéfica ao ensino, atualizando-se sobre o tema orientando discentes de forma adequada.

Borba e Penteado (2001, p. 15) aponta devido às cores, ao dinamismo e à importância dada aos computadores do ponto de vista social, o seu uso na educação poderia ser a solução para a falta de motivação dos alunos. O autor ainda cita que o uso da informática na educação pode contribuir para a preparação do jovem no mercado de trabalho. Ainda é válido destacar a seguinte fala do autor:

> O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma "alfabetização tecnológica". Tal alfabetização deve ser vista não como um Curso de Informática, mas, sim, como um aprender a ler essa nova mídia. Assim, o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. E, nesse sentido, a informática na escola passa a ser parte da resposta a questões ligadas à cidadania (Borba, Penteado (2001, p. 17).

Moura (2023, p. 27 – 34) mostra ainda outros benefícios do uso da matemática na educação, tais como o uso de planilhas eletrônicas, que vêm equipadas com funções pré-definidas de Matemática Financeira, Trigonometria, Estatística e Lógica, que auxiliam na elaboração e resolução de atividades; as construções geométricas virtuais que se movem ao arrastar do mouse ou por um simples comando e integração de recursos simbólicos, algébricos e gráficos. Esses sistemas basicamente facilitam o cálculo na Matemática simbólica, conseguem produzir gráficos e realizar de forma automática manipulações algébricas obtendo respostas que podem ser apresentadas tanto de forma numérica quanto de expressões simplificadas.

Logo, é possível afirmar que existem vantagens bem expressivas para o uso da tecnologia na educação, mas é preciso que a escola e professor atualizem-se a respeito de materiais e formações docentes, respectivamente.

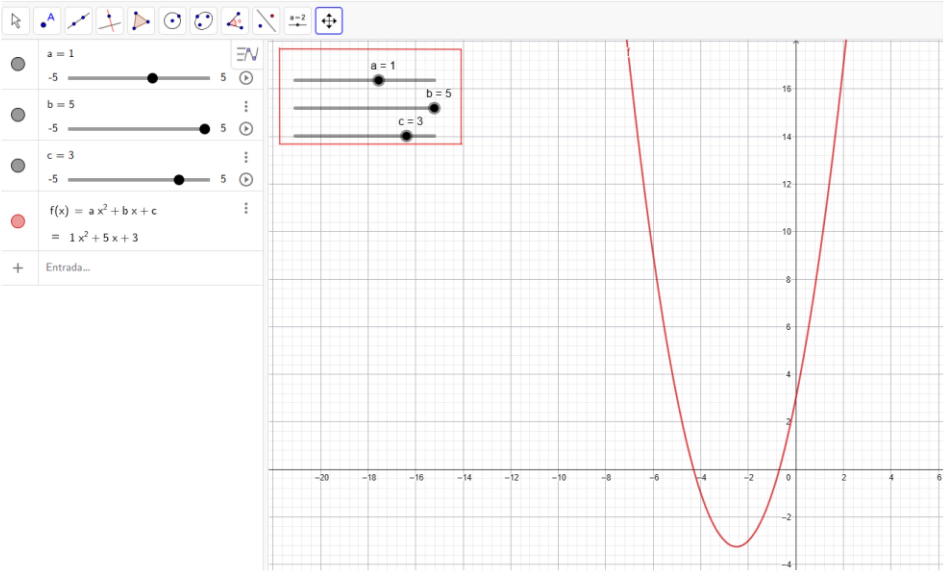
3.4.1 Sofware Geogebra

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica para todos os níveis de ensino, teve seu desenvolvimento iniciado em 2001 por Markus Horhenwarter da Universidade de Salzburg, Áustria e segue em desenvolvimento. Moura (2023, p. 33) revela que o software educacional, reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo em um pacote fácil de usar. Na página tube.geogebra.org a aprendizagem, ensino e avaliação de recursos interativos criados com GeoGebra pode ser compartilhado e utilizado por todos. Existe a versão online e outra disponível para instalação em: https://www.geogebra.org/download.

O layout do GeoGebra é organizado de forma intuitiva e interativa, integrando diferentes representações matemáticas. Destaca-se a barra de ferramentas, que reúne ícones para a construção de objetos matemáticos, como pontos, retas e gráficos, facilitando a criação e manipulação das atividades. Já a janela de visualização gráfica é o espaço onde essas construções são exibidas dinamicamente, permitindo ao usuário observar alterações em tempo real.

O software é gratuito e acessível, podendo ser utilizado em computadores, táblets, celulares e outros dispositivos eletrônicos conectados a rede. Outra vantagem refere-se à integração de múltiplas representações, onde o estudante consegue visualizar simultaneamente a expressão algébrica, o gráfico e a representação geométricas, podendo fazer alterações em seus valores através de controles deslizantes, assim como é mostrado na Figura 6.

Figura 6 – Layout do GeoGebra e função $f(x) = ax^2 + bx + c$ podendo ser modelada por controles deslizantes



Fonte: (Autoria própria, 2026).

O GeoGebra Book, que é um recurso digital disponível no software GeoGebra que permite a criação de livros organizados em capítulos. Para compor um GeoGebra Book, o autor pode incorporar atividades previamente desenvolvidas por outros usuários ou elaborar suas próprias atividades do inéditas, como foi realizado neste trabalho. Na criação do GeoGebra Book o usuário pode colocar um título para o livro e algumas informações: descrição, público-alvo (idade), palavras-chaves e visibilidade (público, compartilhado com link, particular).

Logo é válido falar que para um docente, o programa traz a possibilidade de produzir aulas dinamizando o ensino da matemática por meio da construção e da manipulação interativa de gráficos, figuras geométricas e representações algébricas.

3.5 MODELAGEM MATEMÁTICA

Para Goés e Goés (2023, p. 22) a modelagem, em geral, pode ser entendida como o ato de modelar um problema, utilizando modelos físicos, matemáticos, híbridos, entre outros, para prever, classificar e associar fenômenos. O autor ainda relata que:

> Modelo matemático é um conjunto de equações e inequações que representam um sistema real, sendo que tais equações devem satisfazer critérios que, por sua vez, são as hipóteses relacionadas ao problema, na busca de sua solução.

Já Bisognin e Bisognin (2012, p. 03) afirma que Modelagem Matemática é eficaz na abordagem de conteúdos em sala de aula destacando vários pontos positivos de sua utilização tais como: motivação, compartilhamento de ações, interatividade entre professor e aluno e entre os alunos e a interdisciplinaridade. Acredita-se que, uma das abordagens metodológicas que atende à necessidade de ensino lúdico é a Modelagem Matemática, pela possibilidade de encontrar modelos matemáticos para descrever situações do mundo real; por propiciar o estudo, a pesquisa e a problematização de situações do cotidiano e por estabelecer uma relação dialógica de troca de conhecimentos entre aluno e professor.

Falando um pouco da modelagem retratada de forma computacional, Nascimento (2007, p. 21) relata que com a evolução da informática, assim como seu aproveitamento para a educação, em particular o ensino da matemática, as diversas potencialidades computacionais que vêm contribuindo para o ensino apontam-se: a possibilidade a potencialidade de atribuir movimentos a objetos matemáticos mantendo suas propriedades invariantes; a apresentação de diferentes representações conectadas entre si; a possibilidade de alterar uma representação, obtendo outra noção do objeto matemático e a possibilidade de simulações em tempo real.

Logo é possível dizer que a modelagem de situações usando computação, pode ajudar o estudante a formular hipóteses, manipular parâmetros, visualizar variações em tempo real e testar soluções, tornando o processo de modelagem mais investigativo e significativo. Assim, a tecnologia digital não apenas auxilia na construção do modelo, mas também amplia a compreensão conceitual, favorecendo uma aprendizagem mais ativa.

3.6 FORMAÇÃO DOCENTE CONTINUADA

A formação docente é um processo de aperfeiçoamento profissional que ocorre após a graduação do professor. No Brasil, Magalhães e Azevedo (2015, p. 17) relatam o grande percentual dos professores da Educação Básica sem formação adequada. Segundo o Observatório do Plano Nacional da Educação, 74,8% de professores que atuam na educação básica possuem curso superior, mas apenas 32,8% que atuam nos anos finais do ensino fundamental e 48,3% dos que lecionam no Ensino Médio têm licenciatura na área em que atuam. Essa realidade vem na contramão do legislado, que almeja a formação específica em nível superior, a todos os professores, além de garantia da formação continuada.

Magalhães e Azevedo (2015, p. 17) ainda ressaltam que a formação continuada tem se dado em perspectiva mercadológica, enaltecendo modelos, na medida em que pressupõe o professor como executor, responsável pelo preparo de alunos para o mercado de trabalho, na perspectiva do novo desenvolvimentismo. O autor revela ainda a observação com frequência do agravamento das condições de ensino em nosso país, especialmente no que se refere à formação docente inicial e continuada, resultado de uma política educacional autoritária, que tem sido criticada em diversos encontros, congressos, publicações e reuniões de educadores.

Logo, a formação torna-se essencial para o docente continuar com seu trabalho, produzindo educação de qualidade. Silva e Macário (2022, p. 10) ressaltam algumas das contribuições do processo, sendo elas as atualizações de mudanças nas instâncias cultural, política, econômica, social, afetivas e modernização de habilidades e atitudes, dando maior importância ao trabalho em equipe e à colegialidade verdadeira.

Falando um pouco sobre tecnologias, Borba e Penteado (2001, p. 15) relatam que um argumento favorável pode ser o de que, pelas exigências que coloca sobre os professores, a inserção de tecnologia na escola estimule o aperfeiçoamento profissional para que eles possam trabalhar com informática. A possibilidade de que trabalhar com os computadores, tablets ou celulares conectados a rede abre novas perspectivas para a profissão docente. Os meios tecnológicos, portanto, podem ser um problema a mais na vida já atribulada do professor, mas pode também desencadear o surgimento de novas possibilidades para o seu desenvolvimento como um profissional da educação.

É válido destacar que as formações docentes continuadas com uso de tecnologias na educação devem ser contínuas e articuladas com práticas pedagógicas, como o ensino de ferramentas a professores, o fornecimento de cursos de aperfeiçoamento e oficinas formativas, projetos práticos experimentados, entre outras práticas digitais.

4 FUNÇÕES POLINOMIAIS

Um importante conteúdo a ser trabalhado no ensino médio refere-se a funções polinomiais, mas antes disso é importante que os estudantes tenham contato com conteúdos pré-requisitos para esse estudo, neste sentido Mattos (2017, p. 26) mostra uma representação de como se dá a sequência de conteúdos abordadas em diferentes níveis da educação básica.

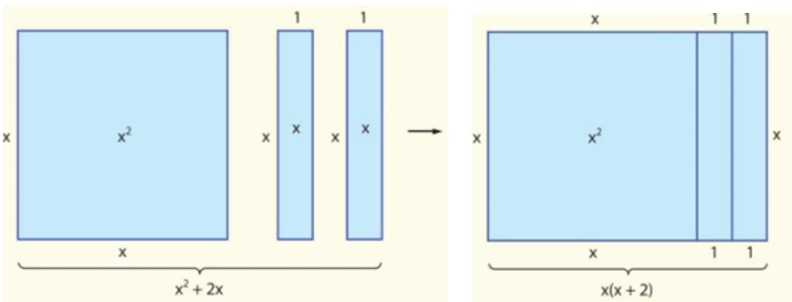
Tabela 2 – Currículo Mínimo para o Ensino Fundamental e Médio

Ano Escolar	Conteúdo
7^o ano do Ensino Fundamental	Equação do 1^o grau
8^o ano do Ensino Fundamental	Polinômios e Fatoração
9^o ano do Ensino Fundamental	Equação do 2^o grau e Funções
1^a série do Ensino Médio	Funções, Função do 1^o grau e Função do 2^o grau
2^a série do Ensino Médio	Revisão de Função do 1^o grau e Função do 2^o grau
3^a série do Ensino Médio	Funções Polinomiais e Equações Algébricas

Fonte: (Mattos, 2017, p. 26).

Por ser um conteúdo que está presente em diversos contextos matemáticos e situações cotidianas, como no ramo da economia, o cálculo de áreas e volumes, os cálculos de custo de energia, as funções polinomiais têm diversas aplicações. Na Figura 7 é mostrada um exemplo de cálculo de área de um terreno retangular de lados x e $x + 2$.

Figura 7 – Cálculo de área do retângulo de lados x e $x + 2$.



Fonte: (Dante, 2008, p. 90).

Logo torna-se necessário entender, calcular e manusear algébrica e graficamente, interpretando e analisando comportamentos. Vale destacar que essa articulação entre os registros algébrico e gráfico possibilita uma compreensão mais significativa do conceito de função.

Polinômios são expressões matemáticas formadas por somas de termos, compostos por um coeficiente numérico multiplicado por uma variável elevada a um expoente inteiro não negativo.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \quad (1)$$

No qual tem-se que:

- $a_n,\ a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1\ e\ a_0$ são números reais;
- n é o grau do polinômio sendo um número inteiro não negativo;
- x representa a variável complexa do polinômio.

Vale destacar que o grau que o polinômio assume é o expoente da maior potência não nula.

Já as funções polinomiais $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, são expressas por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \quad (2)$$

Podendo ser expressa também na forma:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \quad (3)$$

Pode-se citar alguns exemplos de funções polinomiais a seguir:

- $f(x) = 2$, onde o polinômio tem grau nulo;
- $f(x) = -3x + 2$, onde o polinômio tem grau um;
- $f(x) = -5x^2 + 2x - 9$, onde o polinômio tem grau dois;
- $f(x) = x^4 - x^3 - 2x + 8$, onde o polinômio tem grau quatro.

As funções polinomiais possuem diferentes comportamentos em relação aos seus respectivos graus, uma vez que este influencia diretamente o formato do gráfico, o número máximo de raízes reais, os pontos de máximo e mínimo e as características de crescimento e decrescimento da função. A seguir serão mostrados estudos das características das funções de 1° e 2° graus.

4.1 FUNÇÕES DO 1° GRAU

Também chamadas de função afim, Dante (2008, p. 64) a representa como uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, no formato:

$$f(x) = ax + b \tag{3}$$

Em que:

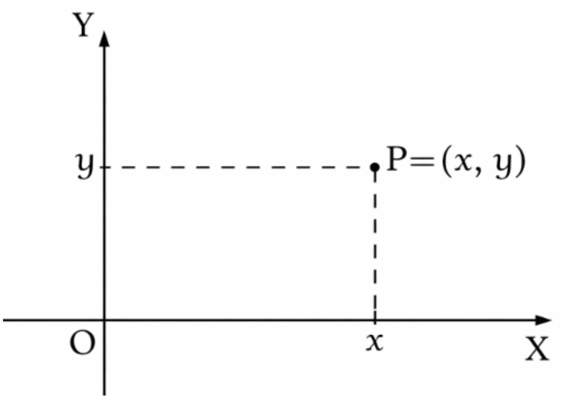
- a é um número real, chamado de coeficiente angular;
- b é um número real, chamado de coeficiente linear.

Pode-se citar alguns exemplos de funções afim a seguir:

- $f(x) = x + 3$, onde $a = 1, b = 3$;
- $f(x) = -2x + 5$, onde $a = -2, b = 5$;
- $f(x) = 3x$, onde $a = 3, b = 0$.

Antes de prosseguir com o conteúdo de funções, é imprescindível ressaltar o o estudo do plano cartesiano, pois é nele que se dará a parte geométrica do estudo. Lima et al. (2016, p. 82) descreve que o plano numérico $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$, é um exemplo de produto cartesiano particular, que deu origem a ideia geral. Os elementos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ são naturalmente pares ordenados de números reais. Eles surgem como coordenadas cartesianas do ponto P no plano, onde x é a abscissa e y é a ordenada, quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais OY e OX, que se intersectam no ponto O, chamado de origem do sistema de coordenadas. A Figura 8 mostra graficamente o que o autor descreveu.

Figura 8 – Plano cartesiano



Fonte: (Lima, 2016, p. 82).

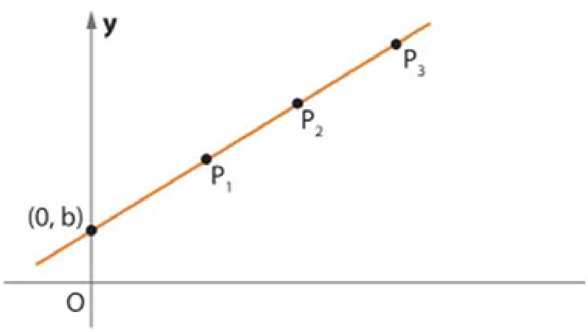
Vale lembrar que os coeficientes angular e linear podem modificar características das funções, logo existem alguns casos particulares a serem mencionados.

É válido destacar que, segundo Dante (2008, p.66) o gráfico de toda função afim sempre será uma reta, onde geometricamente o coeficiente linear b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f(x) = ax + b$ toca o eixo Oy, pois quando $x = 0$, tem-se que:

$$f(x) = ax + b$$
$$f(0) = b \tag{4}$$

A Figura 9 mostra justamente esse ponto de intersecção:

Figura 9 – Intersecção do gráfico da função afim com o eixo Oy



Fonte: (Dante, 2008, p. 66).

4.1.1 Casos particulares de funções afim

São casos que ocorrem quando a função afim admite valores nulos para o coeficiente linear ou o coeficiente angular, a seguir estão expostos esses casos.

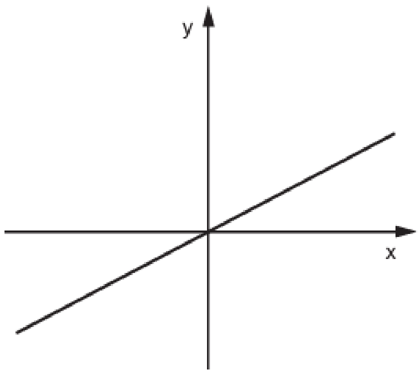
4.1.1.1 Função Linear

As funções lineares, segundo Iezzi (2013, p. 98) são aquelas que ocorrem quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$ em que $a \neq 0$ é um número real dado, isto é:

$$f(x) = ax \tag{4}$$

O gráfico desse tipo de função será uma reta que passa pela origem, pois ao fazer a substituição $x = 0$, a função admiti $f(0) = a.0 = 0$. A Figura 10 mostra o gráfico desse tipo de função para $a > 0$.

Figura 10 – Gráfico de uma função linear, com $a > 0$



Fonte: (Iezzi, 2013, p. 98).

O conjunto imagem será o conjunto dos reais $\mathbb{R}$, ou seja, $Im = \mathbb{R}$, e isso é demonstrado pois, qualquer que seja o $y \in R$, existe $x = \frac{y}{a} \in R$, com $a \neq 0$ tal que:

$$f(x) = ax$$
$$f(x) = f\left(\frac{y}{a}\right) = a\,.\frac{y}{a} = y$$
$$f(x) = y \tag{5}$$

Logo, a equação (5) mostra que todo número real pode ser obtido como resultado da função, concluindo-se que sua imagem é $\mathbb{R}$.

Tem-se como exemplos de funções lineares:

- $f(x) = 2x$, onde $a = 2$ e $b = 0$;
- $f(x) = \sqrt{7}x$, onde $a = \sqrt{7}$ e $b = 0$;
- $f(x) = -\frac{x}{5}$, onde $a = -\frac{1}{5}$.

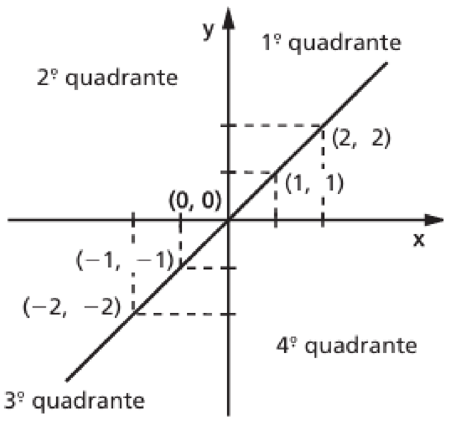
4.1.1.2 Função Identidade

A função identidade é descrita como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio x, isto é:

$$f(x) = x \tag{6}$$

A Figura 11 nos mostra como é o comportamento desse gráfico.

Figura 11 – Gráfico da função identidade



Fonte: (Iezzi, 2013, p. 98).

Vale destacar que o gráfico dessa função será uma bissetriz que corta o primeiro e o terceiro quadrante no plano cartesiano. Iezzi (2013, p. 98) nos mostra também que a imagem da função será $Im = \mathbb{R}$, pois como mostrado na equação (6) a função $f(x) = x = y$, e $x \in \mathbb{R}$, a imagem também será o conjunto dos reais.

4.1.1.3 Função Constante

A função constante é definida por uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $x \in \mathbb{R}$ e $a = 0$, como sendo:

$$f(x) = b \tag{7}$$

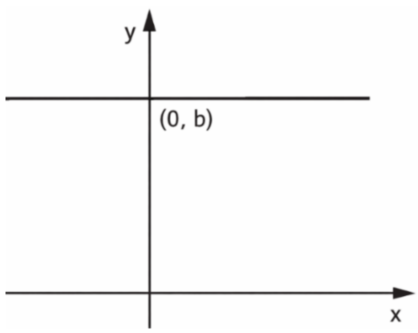
A equação (7) mostra que independentemente do valor da variável x, a função terá o valor constante b. Neste sentido, Iezzi (2013, p. 97) fala que o gráfico desta função será uma reta que corta o eixo Oy no ponto $(0, b)$ e sua imagem será o conjunto $Im = \{b\}$.

Tem-se como exemplos de funções constantes:

- $f(x) = 3$, em que $a = 0\ e\ b = 3$;
- $f(x) = -5$, em que $a = 0\ e\ b = -5$;
- $f(x) = \sqrt{3}$, em que $a = 0\ e\ b = \sqrt{3}$.

A Figura 12 a seguir mostra o comportamento do gráfico desse tipo de função.

Figura 12 – Gráfico da função constante

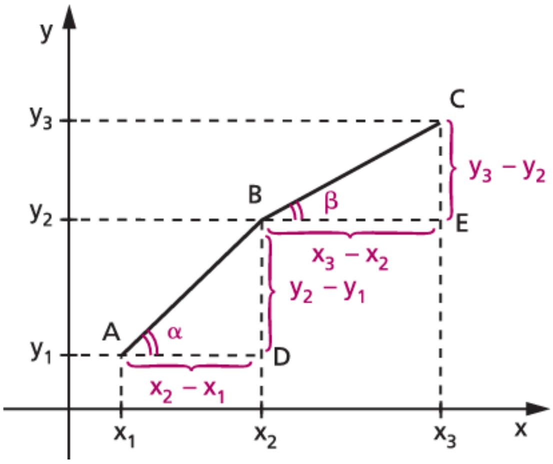


Fonte: (Modificada de Iezzi, 2013, p. 97).

4.1.2 Gráficos de uma função afim

Para um estudo de qualidade não basta apenas dizer que o gráfico da função é uma reta, neste sentido Iezzi (2013, p. 100 - 101) demonstra que dados três pontos quaisquer A, B e C distintos dois a dois do gráfico da função $y = ax + b$, com $a \neq 0$, e $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_x)$ as coordenadas respectivas dos pontos citados, é possível provar que os pontos A, B e C estão alinhados em uma reta, formando assim o gráfico da função afim. Para a prova, deve-se inicialmente mostrar que os triângulos ABC e BCE, mostrados na Figura 13 são semelhantes.

Figura 13 – Representação gráfica dos pontos A, B e C para prova de alinhamento deles



Fonte: (Iezzi, 2013, p. 101).

Para mostrar o que os triângulos são semelhantes, pode-se fazer a seguinte demonstração:

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b$$
$$y_3 = ax_3 + b$$

Agora subtraindo y_3 de y_2, tem-se que:

$$y_3 - y_2 = ax_3 + b - (ax_2 + b)$$
$$y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2)$$
$$a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \tag{8}$$

Subtraindo y_1 de y_2, tem-se que:

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - (ax_1 + b)$$
$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{9}$$

Igualando as equações (8) e (9) tem-se que:

$$a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{10}$$

A equação (10) mostra que como os lados $(y_3 - y_2)$ e $(x_3 - x_2)$ do triangulo BCE e os lados $(y_2 - y_1)$ e $(x_2 - x_1)$ do triangulo ABD são proporcionais e como estes triângulos são retângulos, o ângulo α será igual ao ângulo β, fazendo com que a reta AB e BC possuam a mesma inclinação, portanto, fazendo com que os pontos A, B e C estejam alinhados.

Outra importante informação é que o coeficiente angular é dado pela tangente do ângulo α, sendo dada pela razão entre os lados do triângulo ABD, assim como é mostrado na equação (11):

$$a = tg(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{11}$$

4.1.2 Taxa de variação

Dante (2008, p. 65) chama-se taxa de variação, o coeficiente angular $'a'$ da função $f(x) = ax + b$. Esta taxa também é conhecida como taxa de crescimento e seu valor é dado conforme a seguinte demonstração.

Lima et al. (2016, p. 90 - 91) mostra que dados dois pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ da função considerada, tem-se que:

$$f(x_1) = ax_1 + b$$
$$f(x_2) = ax_2 + b$$

Subtraindo as funções achadas anteriormente, tem-se que:

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b)$$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (12)$$

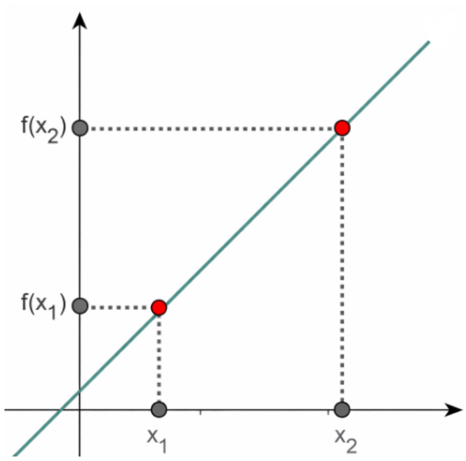
Dante (2008, p. 65) ainda afirma que a taxa de variação de uma função afim, como descrita na equação (12) sempre será um valor constante, pois independentemente dos valores de x_1 e x_2 sua variação não muda ao longo do domínio.

4.1.2.1 – Função crescente

A taxa de variação implica o comportamento do gráfico da função afim, sabe-se que quando $a > 0$ a função é crescente, mas por qual motivo ocorre essa característica? A Figura 14 mostra esse comportamento.

Figura 14 – Representação gráfica de uma função afim crescente.

.



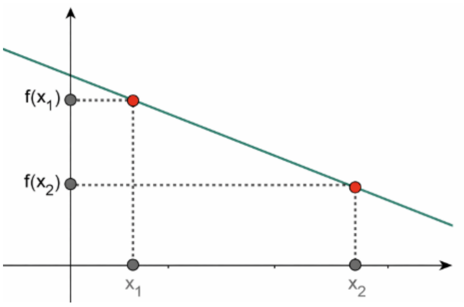
Fonte: (Autoria própria, 2026).

O fato da taxa de variação ser positiva para esse caso ocorre devido a variação $f(x_2) - f(x_1)$ ser positiva e a variação $x_2 - x_1$ também ser positiva. Logo, o valor da taxa de variação, descrito na equação (12) também será positivo.

4.1.2.2 – Função decrescente

A função será decrescente quando o valor do coeficiente angular $a < 0$, isto ocorre devido a $f(x_2)$ possuir valor maior que $f(x_1)$ fazendo a variação $f(x_2) - f(x_1)$ ficar negativa, enquanto que a variação $x_2 - x_1$ continua sendo positiva. A Figura 15 mostra o comportamento destes pontos no eixo cartesiano no eixo cartesiano.

Figura 15 – Representação gráfica de uma função afim decrescente

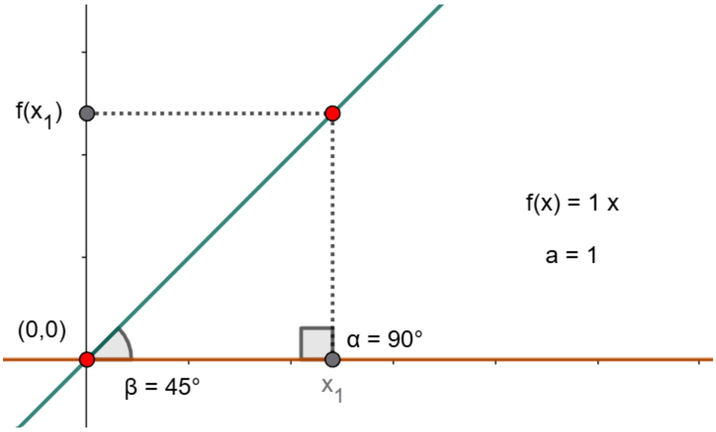


Fonte: (Autoria própria, 2026).

4.1.3 Influência dos coeficientes angular e linear no gráfico da função

É importante falar também sobre a influência que os coeficientes fazem a respeito do comportamento da função afim. Como mostrado na Figura 16, o coeficiente angular representa a tangente de um triângulo retângulo, logo ao se aumentar o valor do coeficiente, aumenta-se também o valor da tangente, fazendo com que a o gráfico tenda ao eixo y sem tocá-lo.

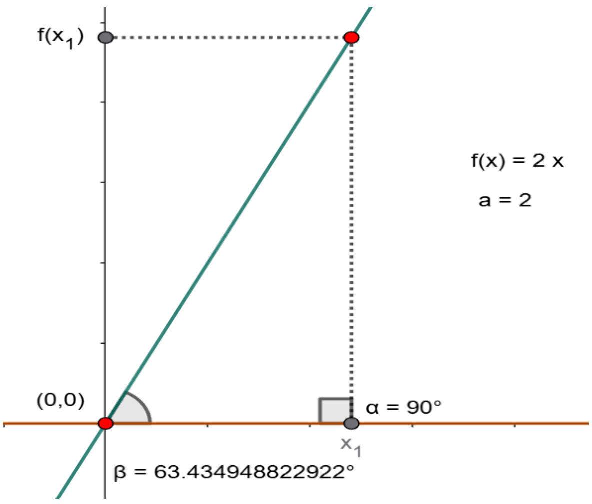
Figura 16 – Representação gráfica da função $f(x) = x$



Fonte: (Autoria própria, 2026).

A Figura 16 mostra o gráfico da função $f(x) = x,$ fazendo com que $a = 1$. Isso faz com que a tangente de β seja igual a 1, e o valor de β sendo igual a 45°. Já a Figura 17 mostra o gráfico da função $f(x) = 2x$, fazendo a inclinação mudar e logo aumentando o valor de β.

Figura 17 – Representação gráfica da função $f(x) = 2x$



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Comparando a Figura 16 com a Figura 17, nota-se o grande aumento do valor de β, pois ele irá crescer tendendo a 90° à medida que aumentamos o valor do coeficiente angular. A tangente de 90° não existe, mas a inclinação da reta continua a aumentar sem nunca tocar o eixo y.

Já o coeficiente linear “b" é responsável por transladar o gráfico da função. Deixando o coeficiente angular fixo e mudando apenas o linear, muda-se o ponto de intersecção da reta com o eixo y.

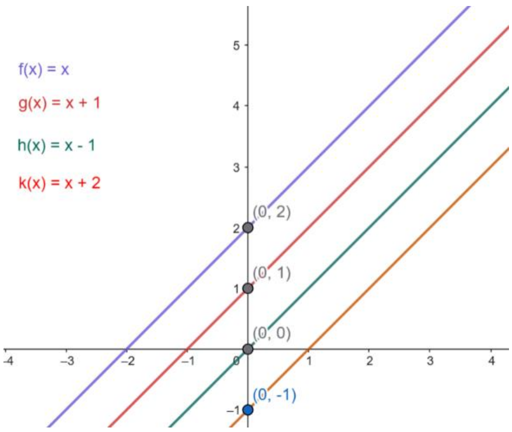
Alterando o valor de b em k unidades tem-se que:

$$f(x) = ax + (b + k)$$
$$f(0) = b + k \tag{13}$$

A equação (13) mostra que a intersecção da função com o eixo das ordenadas é variável em relação ao valor de $k,$ fazendo com que a reta translade, sobre o eixo das abscissas sem modificar sua inclinação.

A Figura 18 mostra alguns casos de funções de coeficiente angular fixo e coeficientes lineares diferentes.

Figura 18 – Representação gráfica de funções com diferentes coeficientes lineares



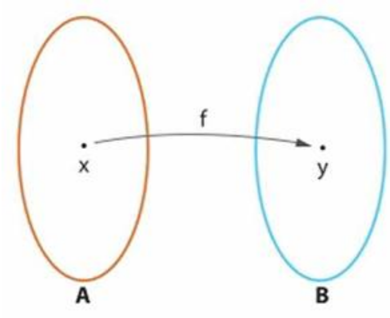
Fonte: (Autoria própria, 2026).

4.1.3 Domínio, contradomínio e imagem

É o conjunto de todos os valores de entrada, ou seja, valores de x para os quais a função está definida. Já o contradomínio é o conjunto de todos os valores possíveis que a função pode assumir como saída, ou seja, valores de y, Vale destacar que ele é definido previamente, mesmo que nem todos esses valores sejam realmente atingidos. É o conjunto de todos os valores de saída (valores de y) que a função realmente assume quando você usa todos os valores do domínio. Ou seja, a imagem é um subconjunto do contradomínio.

Uma função f de A em B, o conjunto A chama-se domínio $D(f)$, o conjunto B é o contradomínio da função $Cd(f)$. Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ chama-se imagem de x pela função f, sendo denominada por $Im(f)$. A Figura 19 mostra a relação descrita.

Figura 19 – Diagrama representativo de uma função $f: A \rightarrow B$



Fonte: (Dante, 2008, p. 40).

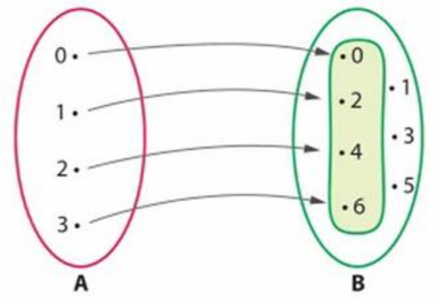
Pelas análises feitas anteriormente, pode-se afirmar que o domínio da função afim, por não conter restrições como uma divisão nem raízes, é o conjunto dos números reais.

Já o conjunto imagem depende dos casos especiais de funções afim, sendo que:

- **Quando $\boldsymbol{a \neq 0}$**: a reta é inclinada, logo a imagem percorre todo o conjunto dos números reais, sendo $Im(f) = \mathbb{R}$;
- **Quando $\boldsymbol{a = 0}$**: a função será constante, sendo dada por $f(x) = b,$ logo a imagem assume o valor de b, sendo $Im(f) = b$.

Considere a função $f(x) = 2x,$ para os conjuntos do domínio $A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ como segue na Figura 20.

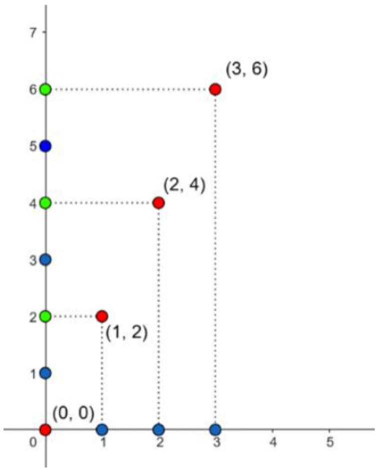
Figura 20 – Diagrama representativo da função $f(x) = 2x$, com domínio especificado



Fonte: (Dante, 2008, p. 40).

É possível mostrar, no plano cartesiano o que o diagrama esbouça, a Figura 21 mostra esse exemplo.

Figura 21 – Esboço de pontos, especificados no domínio, da função $f(x) = 2x$



Fonte: (Autoria própria, 2026).

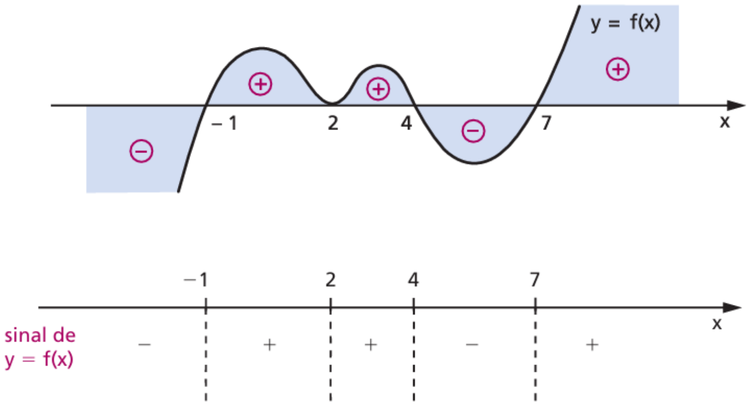
Na Figura 21 é possível notar que nos pontos vermelhos estão indicadas as coordenadas do domínio, pontos azuis no eixo x, e da imagem, pontos verdes no eixo y. Nota-se também que há pontos azuis no eixo y que não estão associados a pontos vermelhos, esses não são imagem da função, neste caso, mas fazem parte do contradomínio da função.

4.1.4 Estudo do sinal e Raízes

Uma função $f: A \to B$ definida por $y = f(x)$, estudar o sinal da função significa verificar valores para os quais $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$.

Estudar o sinal de uma função, quando ela está representada no plano cartesiano, basta examinar se a ordenada de cada ponto da curva é positiva, nula ou negativa. A Figura 22 mostra um exemplo de estudo do sinal de uma função.

Figura 22 – Estudo do sinal de uma função $y = f(x)$



Fonte: (Iezzi, 2013, p. 115).

Para este caso, pode-se afirmar que:

- $f(x) = 0$ quando $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = 4$ ou $x = 7$;
- $f(x) > 0$ quando $-1 < x < 2$ ou $2 < x < 4$ ou $x > 7$;
- $f(x) < 0$ quando $x < -1$ ou $4 < x < 7$.

Para funções do 1° grau, como o gráfico é uma reta, a função terá uma parte positiva, uma parte negativa e um único zero, chamado de raiz. A raiz da função é calculada quando $f(x) = 0$, logo tem-se que:

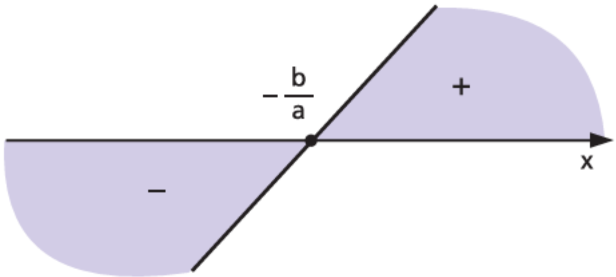
$$f(x) = ax + b = 0$$
$$x = -\frac{b}{a} \tag{14}$$

A equação (14) mostra que a raiz de uma função afim será um valor que depende apenas de seus coeficientes.

Existem dois casos de estudo de sinal da função afim, sendo eles:

- Quando $a > 0$: a reta é crescente, logo a função assume valores positivos para $x > -\frac{b}{a}$, negativos quando $x < -\frac{b}{a}$. Este comportamento é mostrado na Figura 23.

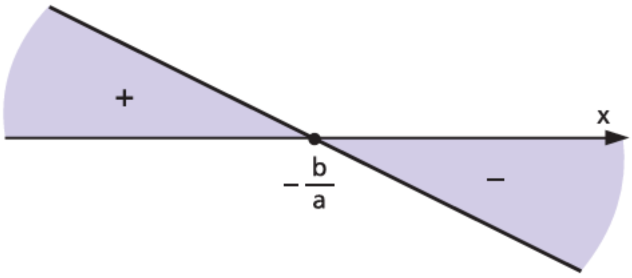
Figura 23 – Estudo do sinal da função quando $a > 0$



Fonte: (Iezzi, 2013, p. 117).

- Quando $a < 0$: a reta é decrescente, logo a função assume valores positivos para $x < -\frac{b}{a}$, negativos quando $x > -\frac{b}{a}$. Este comportamento é mostrado na Figura 24.

Figura 24 – Estudo do sinal da função quando $a < 0$



Fonte: (Iezzi, 2013, p. 117).

4.2 FUNÇÕES DO 2°GRAU

A função quadrática como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quando se associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + x) \in \mathbb{R}$, em que a, b e c são números reais dados e o valor $a \neq 0$. Sendo descrita na equação (15) na forma geral por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{15}$$

Como exemplo de funções quadráticas, pode-se citar:

- $f(x) = x^2 + 2x - 3$, em que $a = 1, b = 2, c = -3$;
- $f(x) = -5x^2 + x - 9$, em que $a = -5, b = 1, c = -9$;
- $f(x) = 5x^2 + 2x$, em que $a = 5, b = 2, c = 0$;
- $f(x) = 7x^2 - 3$, em que $a =, b = 0, c = -3$.

4.2.1 Forma canônica da função quadrática

Iezzi (2013, p. 139) fala que a forma canônica da função é uma outra maneira de representá-la para visualizar alguns parâmetros com mais facilidade, e como sendo a diferente de zero, faz-se a divisão dos termos bx e c por este elemento, como é mostrado a seguir com objetivo de chegar na forma canônica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + \frac{abx}{a} + \frac{ac}{a}$$

Colocando o coeficiente a em evidência, tem-se:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

Os dois primeiros termos dos parênteses são os mesmos do desenvolvimento do seguinte quadrado, assim como é mostrado na equação (16):

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2} \quad (16)$$

Assim, ao completar quadrado, ou seja, somar e subtrair o termo $\frac{b^2}{4a^2}$ na função $f(x)$, tem-se que:

$$f(x) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$f(x) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

Colocando os termos $\frac{4ac}{4a^2}$ e $-\frac{b^2}{4a^2}$ para fora dos parênteses, tem-se:

$$f(x) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{4ac}{4a}-\frac{b^2}{4a}$$

Substituindo a equação (16) na função acima, tem-se a forma canônica, dada pela equação (17):

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \quad (17)$$

Iezzi (2013, p. 140) chama Δ como discriminante e o equaciona como descrito na equação (18):

$$\Delta = b^2-4ac \quad (18)$$

Logo a forma canônica da função do 2°grau pode ser reescrita, como mostrado na equação (19):

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \quad (19)$$

A dissertação mostrará nos tópicos a seguir o tipo de gráfico da função, juntamente com o estudo dos coeficientes dela, mas é válido, nesse momento, destacar que o gráfico será uma parábola, que possui um ponto extremo chamado de vértice e concavidade voltada para cima quando o coeficiente $a > 0$ e concavidade voltada para baixo quando $a < 0$.

É importante falar que a forma canônica da função tem as mesmas propriedades da forma geral, mas a partir desse novo modo de expressá-la, pode se obter os pontos máximos ou mínimos da função descritos a seguir.

4.2.1.1 Vértice da parábola quando $a > 0$

O ponto mínimo da função é a imagem do menor valor que a função assume. Quando $a > 0$ a função terá concavidade voltada para cima, logo o ponto mínimo da função ocorrerá quando o termo $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ for igual a zero, pois como este termo está elevado ao quadrado e seu valor sempre será positivo. Para que função é expressa na equação (19) tenha valor mínimo a soma das duas parcelas que a terá que ser o menor possível, e isso ocorre quando$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right) = 0$, tomando $x = -\frac{b}{2a}$. Logo a imagem da função, neste caso, será $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac^2-b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$. Portanto, o ponto mínimo da função será o vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

4.2.1.2 Vértice da parábola quando $a < 0$

A função terá concavidade voltada para baixo, logo o ponto máximo ocorrerá quando o termo $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ for igual a zero, pois como $a < 0$ esse termo sempre será negativo. Portanto, o valor máximo que a função alcança deve ser quando $x = -\frac{b}{2a}$, pois assim a soma das parcelas $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ e $-\frac{\Delta}{4a}$. é a máxima possível. Como falado anteriormente, a função alcançará seu ponto máximo no vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Sendo esse vértice dado pela abcissa na equação (20):

$$x_v = -\frac{b}{2a} \tag{20}$$

E a ordenada desse vértice é dada pela equação (21):

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \tag{21}$$

4.2.2 Zeros da função quadrática

Para Iezzi (2013, p. 140) os zeros da função são valores para a variável x que tornam a função nula, logo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Utilizando-se da forma canônica, da equação (19) pode-se expressar:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{22}$$

A equação (22), mostra que a função do 2°grau terá duas raízes reais, em casos que o valor do discriminante seja maior que zero.

É importante ressaltar que o valor de Δ influencia onde o gráfico tocará o eixo das abscissas, pois segundo Iezzi (2013, p. 14), podem ser listados três casos:

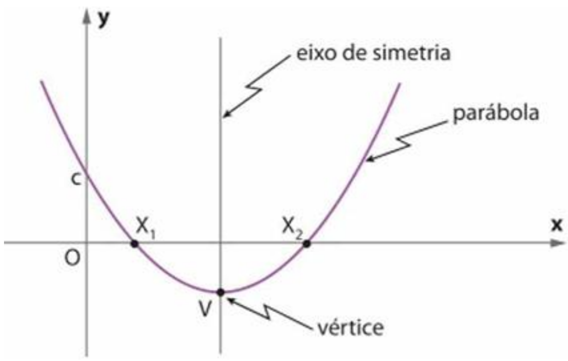
- **Quando** $\Delta > \mathbf{0}$: A função apresenta duas raízes distintas e reais, pois como o $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$, sendo estas raízes dadas por $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- **Quando** $\Delta = \mathbf{0}$: A função terá duas raízes iguais, sendo $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

- **Quando** $\Delta < \mathbf{0}$**:** A função não tem raízes reais, pois $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$.

4.2.3 Gráfico da função quadrática

O gráfico da parábola representada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, é mostrado a seguir:

Figura 25 – Representação geométrica do gráfico de uma parábola do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$



Fonte: (Dante, 2008, p. 98).

Na Figura 25 é possível identificar os elementos, como o eixo de simetria, o vértice, o ponto onde o gráfico corta o eixo y e os pontos onde a parábola conta o eixo x.

Vale salientar que o gráfico se comporta dessa maneira, pois a função é composta por uma parte não linear ax^2 fazendo com que a taxa de variação, diferentemente da função do 1° grau, não seja constante, alterando assim sua curvatura.

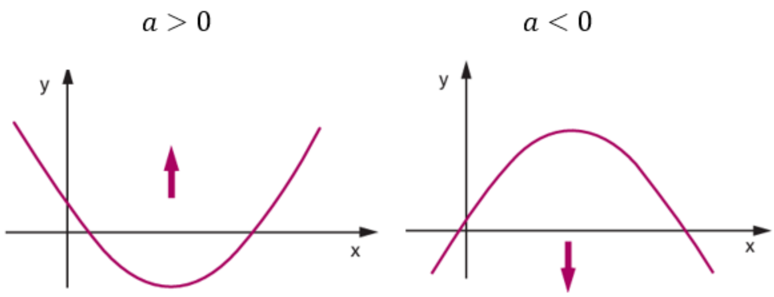
4.2.4 Influência dos coeficientes no gráfico da função quadrática

Uma forte aprendizagem se dá pelo estudo e influência dos coeficientes da parábola, pois são eles que mostraram a concavidade e abertura; ponto de intersecção com o eixo y; pontos de intersecção com o eixo x, caso houver, e corte no eixo y no ramo crescente ou decrescente.

4.2.4.1 Influência do coeficiente a

O coeficiente a é o responsável pela concavidade da parábola segundo Iezzi (2013, p. 139). Isso ocorre pois este é o valor que está multiplicado por x^2 que comanda o formato da do gráfico em relação a $bx + c$ quando o valor de seu módulo aumenta. O autor relata ainda que quando $a > 0$ a concavidade é para cima, pois o valor ax^2 sempre será positivo e quando $a < 0$ a concavidade é para baixo, pois o valor ax^2 sempre será negativo. A Figura 26 mostra essa representação.

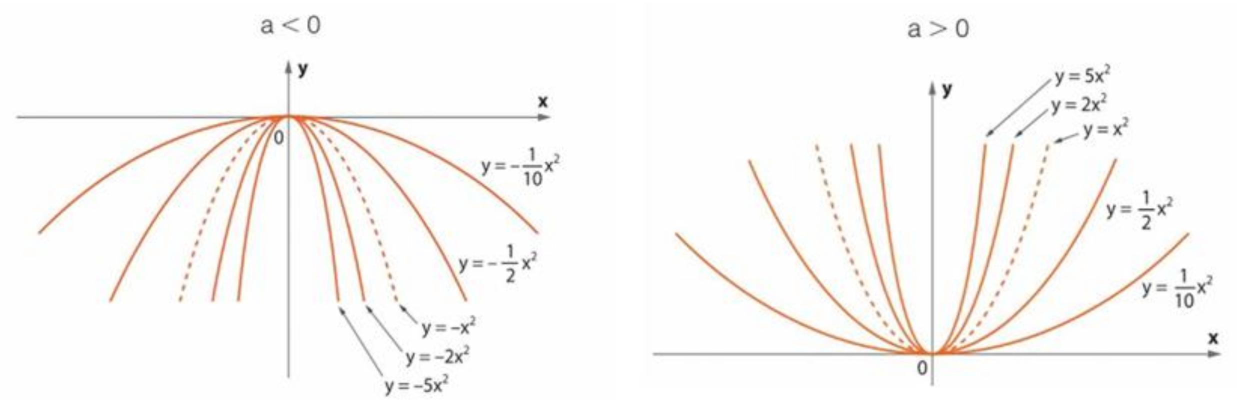
Figura 26 – Representação geométrica da parábola pela influência do coeficiente a



Fonte: (Modificado de Iezzi, 2013, p. 139).

É válido ressaltar também que segundo Dante (2008, p. 98) a abertura da parábola está ligada diretamente ao valor de a, sendo que quanto maior o seu valor em módulo, menor sua abertura. Isso se deve pelo fato de ax^2 comandar o crescimento e decrescimento em relação aos outros termos na função quando o valor da variável se afasta de zero. Caso o valor absoluto de a seja pequeno, o crescimento é lento, fazendo com que a parábola fique mais aberta. Já se o valor absoluto de a for grande, o crescimento da função é mais rápido, fazendo a função se estreitar. A Figura 27 mostra-nos exemplos de aberturas da função $f(x) = ax^2$ para diferentes valores de a.

Figura 27 – Influência do coeficiente a na concavidade e na abertura da parábola



Fonte: (Modificada de Dante, 2008, p. 98).

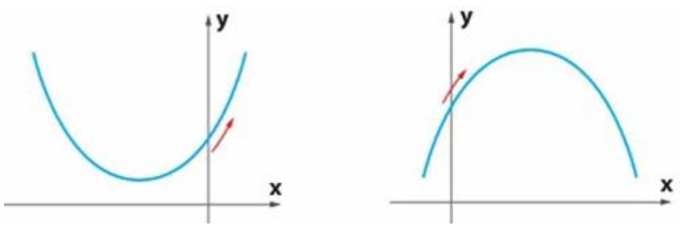
4.2.4.2 Influência do coeficiente b

O coeficiente b da parábola é responsável diretamente pelo valor da abscissa de seu vértice, dado pela equação (20). Logo tem-se que:

- **Quando $\boldsymbol{b > 0}$ e $\boldsymbol{a > 0}$**: O valor da abscissa do vértice será negativo e a parábola terá concavidade voltada para cima, fazendo com que a função corte o eixo y no seu ramo crescente;
- **Quando $\boldsymbol{b > 0}$ e $\boldsymbol{a < 0}$**: O valor da abscissa do do vértice será positivo e a parábola terá concavidade voltada para baixo, fazendo com que a função corte o eixo y no seu ramo crescente.

A Figura 28 mostra o comportamento da função para os casos descritos.

Figura 28 – Influência do coeficiente $b > 0$ no gráfico da parábola

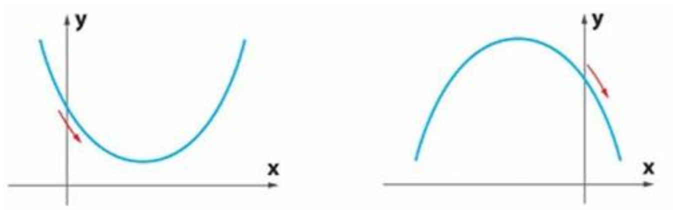


Fonte: (Dante, 2008, p. 98).

- **Quando $\boldsymbol{b < 0}$ e $\boldsymbol{a > 0}$**: O valor da abscissa do vértice será positivo e a parábola terá concavidade voltada para cima, fazendo com que a função corte o eixo y no seu ramo decrescente;
- **Quando $\boldsymbol{b < 0}$ e $\boldsymbol{a < 0}$**: O valor do vértice abscissa do será negativo e a parábola terá concavidade voltada para baixo, fazendo com que a função corte o eixo y no seu ramo decrescente.

A Figura 29 mostra o comportamento da função para os casos descritos.

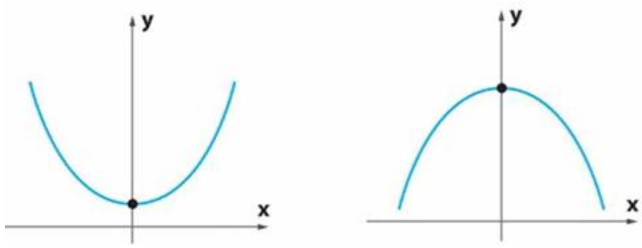
Figura 29 – Influência do coeficiente $b < 0$ no gráfico da parábola



Fonte: (Dante, 2008, p. 99).

- **Quando $\boldsymbol{b = 0}$**: A abscissa do vértice da parábola será zero, fazendo com que este ponto esteja sobre o eixo y, independentemente do valor dos outros coeficientes, como mostra a Figura 30.

Figura 30 – Influência do coeficiente $b = 0$no gráfico da parábola



Fonte: (Dante, 2008, p. 99).

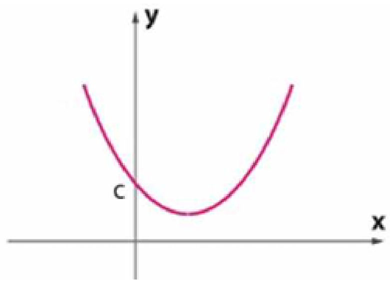
4.2.4.3 Influência do coeficiente c

Dante (2008, p. 99) afirma que coeficiente c é o que a ordenada intersecta o eixo y, isso se deve pelo fato de calcular a função na abscissa 0, como é mostrado a seguir:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(0) = c \quad (23)$$

A Figura 31 mostra o comportamento desse gráfico.

Figura 31 – Influência do coeficiente c no gráfico da parábola



Fonte: (Dante, 2008, p. 99).

4.2.5 Domínio, contradomínio e imagem da função quadrática

Segundo Iezzi (2013, p. 90) funções numéricas são aquelas que o domínio A e o contradomínio B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. As funções numéricas são também chamadas funções reais de variável real. Como a função quadrática é definida nos reais, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o conjunto do domínio e contradomínio da função pertencem aos números reais.

Já a imagem depende da concavidade da parábola, sendo este estudo dividido em duas etapas segundo Iezzi (2013, p. 149):

- **Quando $a > 0$:** A parábola terá a concavidade voltada para cima, o valor $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ sempre será um valor positivo e o vértice será o ponto mínimo do gráfico. Então para conseguir verificar a imagem, a função só alcança esse valor mínimo quando $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Isso ocorre quando a função cumpre a seguinte inequação $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$, tornando a imagem da função:

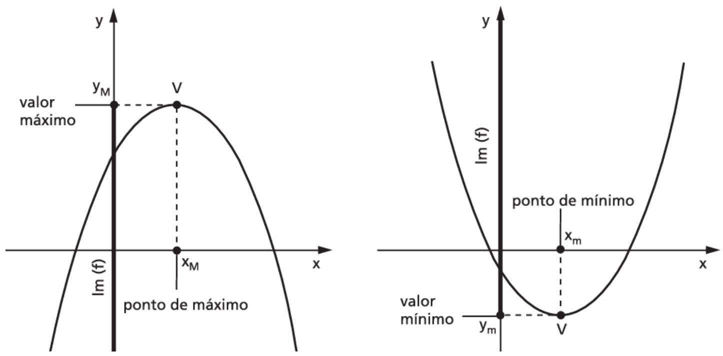
$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\} \quad (24)$$

- **Quando $a < 0$:** A parábola tem concavidade voltada para baixo, o valor $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ sempre será um valor negativo e o vértice será o ponto máximo do gráfico. Então para conseguir verificar a imagem, a função só alcança esse valor máximo quando $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Isso ocorre quando a função cumpre a seguinte inequação $f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$, tornando a imagem da função:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\} \quad (25)$$

A Figura 32 mostra graficamente o descrito.

Figura 32 – Imagem de funções quadráticas



Fonte: (Iezzi, 2013, p. 145).

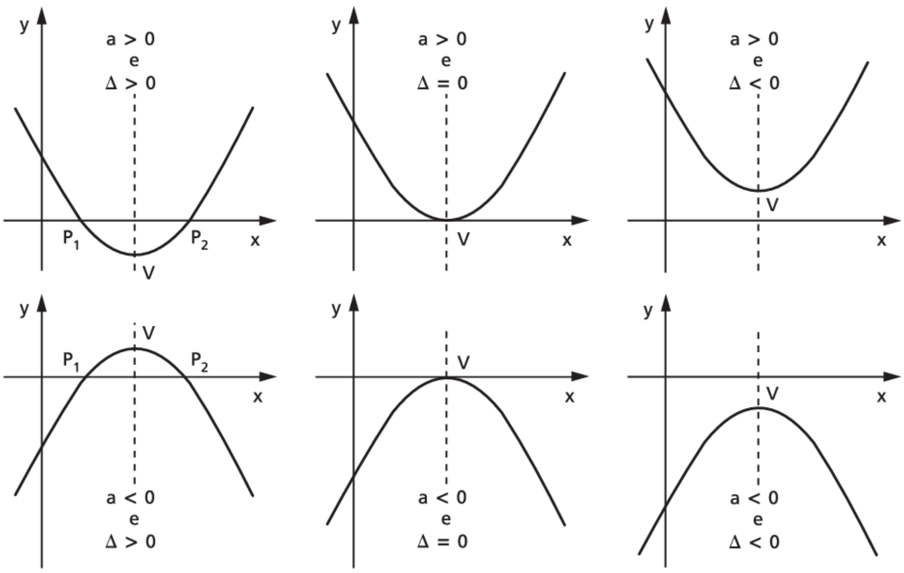
4.2.6 Informações para construção do gráfico da função polinomial do 2° grau

Iezzi (2013, p. 153) destaca alguns pontos importantes para a construção do gráfico da função, sendo eles:

- O gráfico será uma parábola com eixo de simetria a reta $x = -\frac{b}{2a}$;
- Observar o sinal de a. Caso $a > 0$ a parábola terá concavidade para cima, caso $a < 0$ a parábola terá concavidade para baixo;
- Calcular o valor do discriminante Δ. Caso $\Delta > 0$ a função terá duas raízes de pontos $P_1\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ e $P_2\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$; caso $\Delta = 0$, a função terá apenas uma raiz de ponto $P\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$; e caso $\Delta < 0$ a função não tem raízes e por isso não toca o eixo x;
- O vértice da parábola é o ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{\Delta}{4a}\right)$, que será mínimo quando $a > 0$ e máximo quando $a < 0$.

A Figura 33 destaca os modos que as funções do 2°grau estão dispostos.

Figura 33 –Tipos de gráfico da função do 2°grau



Fonte: (Iezzi, 2013, p. 153).

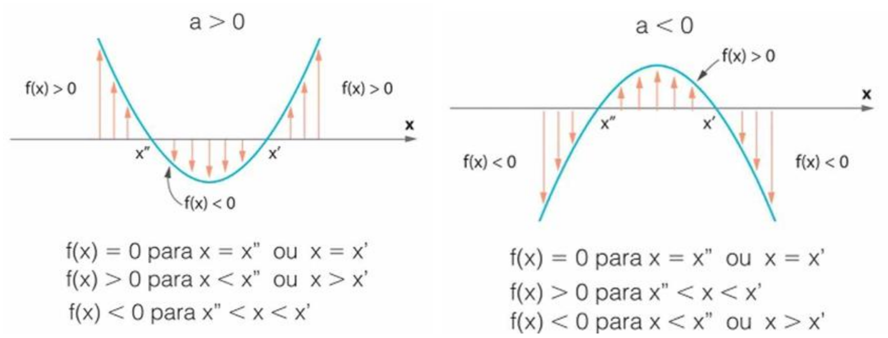
4.2.6 Estudo do sinal da função quadrática

O estudo do sinal da função depende do valor do discriminante Δ, do valor do coeficiente a e das raízes (x' e x'') se existirem.

Dependendo do discriminante, podem ocorrer três casos e dependendo do valor de a podem ocorrer dois casos em cada uma delas. Esses casos são mostrados a seguir:

- **Quando** $\Delta > \mathbf{0}$: Neste caso, a parábola apresenta duas raízes e os casos são descritos na Figura 34.

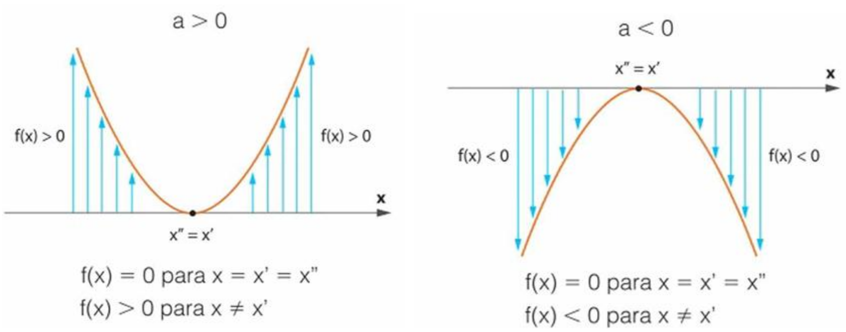
Figura 34 – Estudo do sinal da função quando ∆ >0



Fonte: (Modificada de Dante, 2008, p. 104).

- **Quando** $\Delta = \mathbf{0}$: A parábola terá uma raiz dupla ($x' = x''$) e irá tangenciar o eixo x em um único ponto, como mostra a Figura 35.

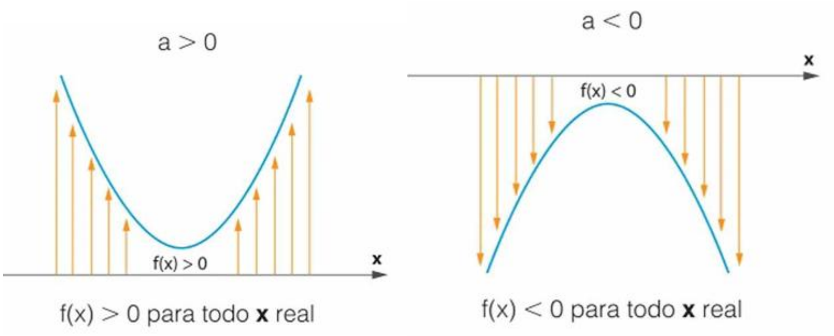
Figura 35 – Estudo do sinal da função quando ∆ =0



Fonte: (Modificada de Dante, 2008, p. 105).

- **Quando** $\Delta < \mathbf{0}$: A função não admite raízes reais, logo não intersecta o eixo x em nenhum ponto, como mostra a Figura 36.

Figura 36 – Estudo do sinal da função quando Δ <0



Fonte: (Modificada de Dante, 2008, p. 105).

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Como já mencionado, esta dissertação tem como proposta a construção de um ebook, desenvolvido no GeoGebra, voltado ao ensino de funções polinomiais. O material foi concebido para ser utilizado pelo professor da Educação Básica (tipicamente do 1º ano do Ensino Médio) como suporte para um ensino sequencial e gradativo dos conteúdos abordados. Neste capítulo, apresenta-se uma sequência didática destinada ao docente que adota o GeoGebra Book elaborado pelo autor, com a descrição de cada seção do livro e sugestões de atividades que podem ser realizadas em sala de aula.

Para que o trabalho pedagógico apresente organização e coerência, é fundamental que seja estruturado por meio de uma sequência didática, possibilitando a articulação progressiva dos conteúdos, a definição clara de objetivos e a sistematização das atividades propostas. Logo é imprescindível citar que Zabala (1998, p. 18) usa o termo “Sequências Didáticas” como sendo “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. Para esse autor é de grande importância uma perspectiva de sistematização de atividades e, portanto, de planejamento meticuloso vinculado aos objetivos de ensino.

A sequência didática apresentada é um material direcionado ao professor, para que ele possa conduzir as atividades e explicações, bem como a análise de resultados do material apresentado. Vale lembrar que o GeoGebra-Book pode ser usado para essa avaliação através da opção do "Google Classroom”, onde o discente realiza e envia a atividade ao professor.

5.1 DESCRIÇÃO DE ATIVIDADES

As atividades confeccionadas no E-book, contendo uma parte de explicação teórica de conteúdos trabalhados e seguindo habilidades da BNCC, são direcionadas para que estudantes possam colocar em prática o exercício de resolução de problemas, de conteúdos já trabalhados anteriormente, com o uso da tecnologia para auxiliá-los a visualizar comportamentos gráficos, ajudando no entendimento do conteúdo.

Cada nova atividade contém conteúdos e objetivos específicos a serem alcançados, neste sentido o professor deve acompanhar o desenvolvimento das atividades, instigando o estudante a realizar simulações, testes e hipóteses sobre cada tema apresentado. As atividades são descritas a seguir a fim de orientar o docente em cada situação.

O livro completo é encontrado no link: https://www.geogebra.org/m/bpjdrs73

5.1.1 Atividade 1

Esta atividade é composta por quatro exercícios, tendo como objetivos:

- Compreender o conceito de função afim;
- Identificar o formato da função afim como sendo $f(x) = ax + b$;
- Identificar e localizar pontos no eixo cartesiano;
- Relacionar função com situações reais.

A metodologia é aplicada da seguinte forma:

- **Número de aulas:** Uma aula;
- **Conteúdo:** Definição de Funções afim;
- **Materiais:** Computadores, táblets ou celulares conectados à internet, juntamente com instrumentos de estudo como caneta, lápis, papel, entre outros;
- **Avaliação:** avaliação qualitativa em anotações feitas em diários pelo professor e avaliação quantitativa entregue pelo Google Classroom;
- **Disponível em:** https://www.geogebra.org/m/qgysqu5c

O exercício 1, como mostrado na Figura 37, mostra uma aplicação simples de função afim numa corrida de táxi.

Figura 37 – Exercício 1 da 1ª atividade do E-book

1) Exercício

O preço da gasolina, em Petrolina, custa R$6,00 por litro.
Preencha a tabela com os valores correspondentes aos seguintes volume em litros comprados.
OBS: Defina a quantidade de litros como x e a preço como y = f(x).

i) 0 Litro
ii) 1 Litro
iii) 2 Litros
iv) 3 Litros
v) 4 Litros

Tabela de preços em relação a litros de gasolina comprados

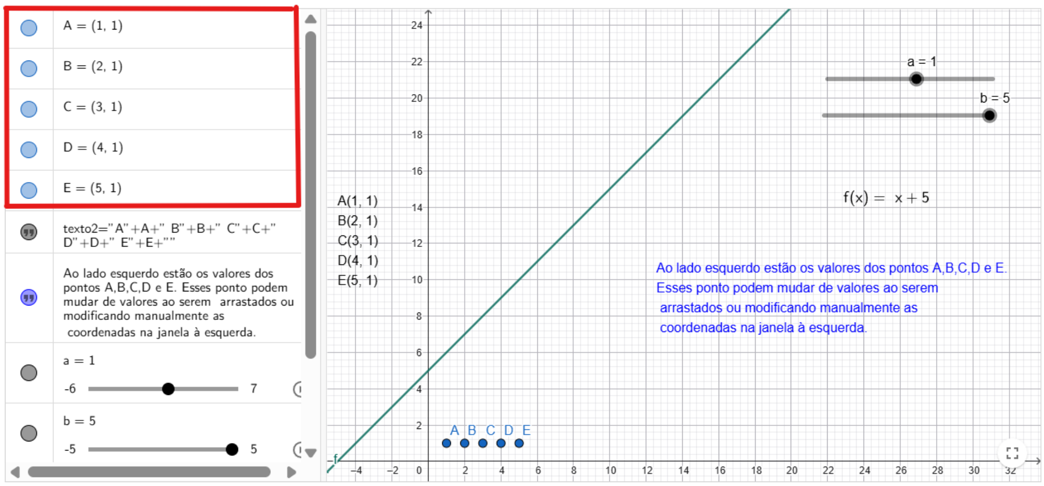
Litros	Preço
0	
1	
2	
3	
4	

Fonte: (Autoria própria, 2026).

Para este caso, orienta-se que o aluno complete a tabela com valores calculados através de forma escrita ou mental e assim preencha os espaços vazios.

Neste exercício, há um gráfico interativo, no qual é possível colocar valores dos pontos achados anteriormente, sugere-se que o estudante clique em cada ponto e altere seus valores manualmente como é destacado na Figura 38.

Figura 38 – Gráfico interativo 1 da 1ª atividade do E-book



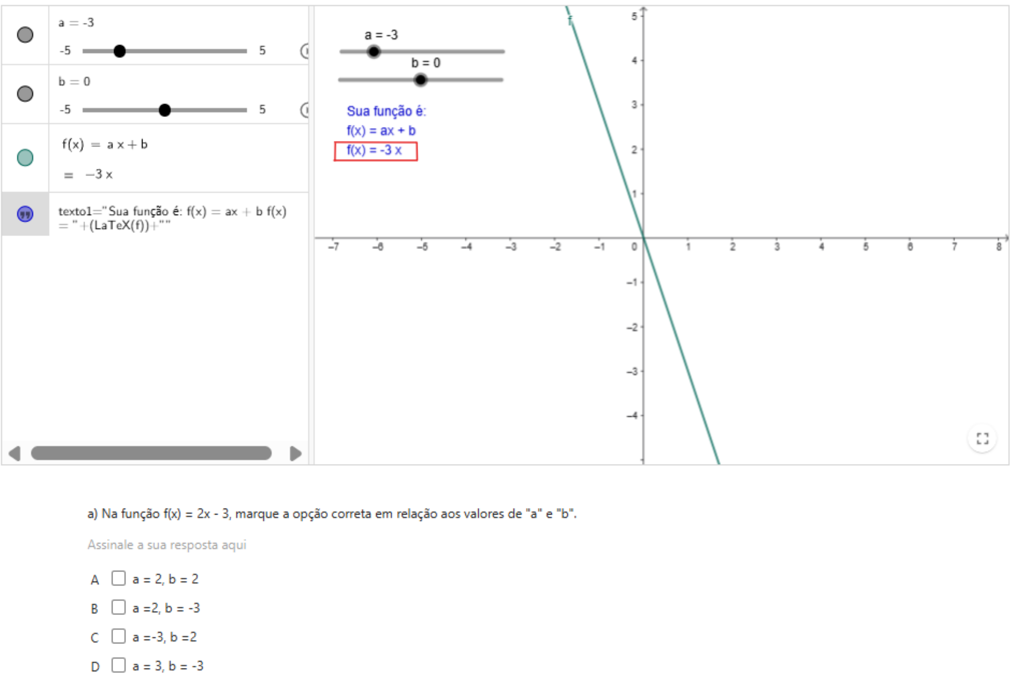
Fonte: (Autoria própria, 2026).

Após a realocação dos pontos, ainda no gráfico interativo é possível visualizar uma função afim, com os coeficientes angular e linear que podem ser alterados.

O professor deve pedir para que os estudantes mudem os valores dos coeficientes da função afim de que eles intersectem todos os pontos, assim verificando o alinhamento entre eles, e logo em seguida responder as perguntas que seguem.

Outra atividade interativa é realizada no exercício 3, no qual o estudante tem acesso à mudança de valores de coeficientes da função de maneira a observar que esses valores alteram a função em tempo real. As perguntas desse exercício podem ser conferidas alterando os valores dos coeficientes como é mostrado na Figura 39 a seguir.

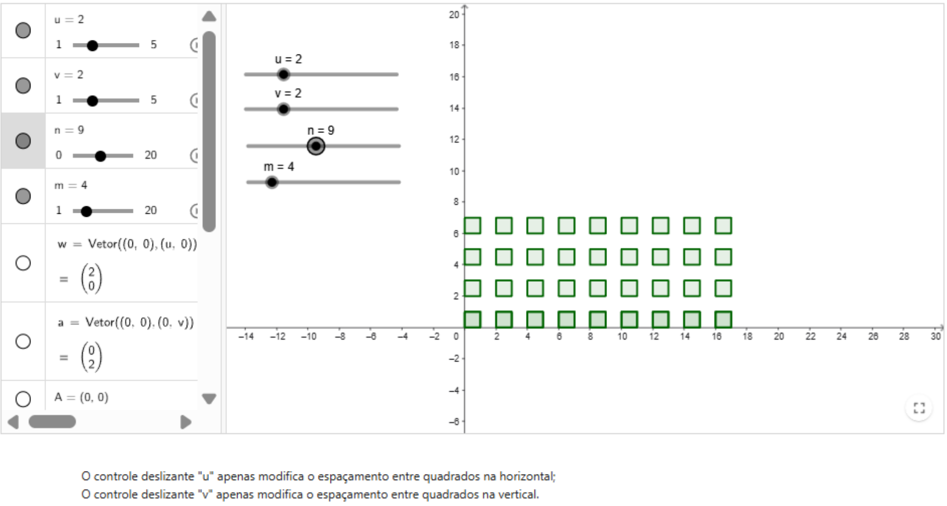
Figura 39 – Gráfico interativo para exercício 3 da 1ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Já no exercício 4, é possível verificar que a quantidade de quadrados que surgem dentro de um espaço interativo aumenta ou diminui em relação à variação de coeficientes “n” e “m”, como é mostrado na Figura 40.

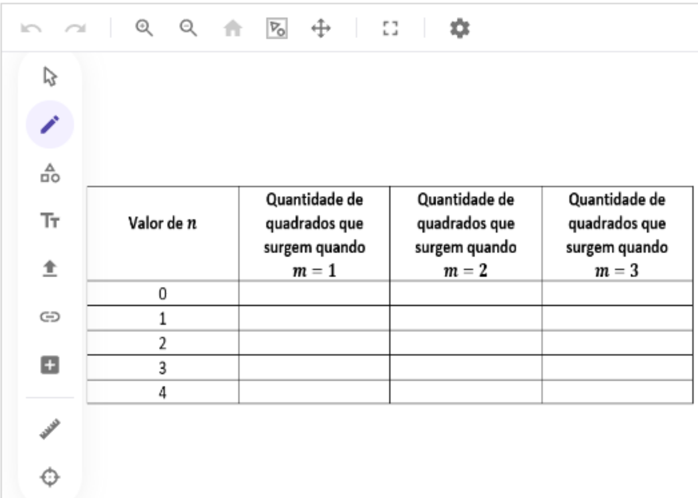
Figura 40 – Espaço interativo para exercício 4 da 1ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Esse exercício tem como objetivo mostrar que a quantidade de quadrados que aparecem na tela é variável em relação aos valores “n” e “m”. Completando a tabela para valores fixos de “m” e variando “n”, esse exercício tem como objetivo fazer o estudante enxergar que a variação da quantidade de quadrados que aparecem é representada pala função $f(n) = m * n$, de forma a trabalhar a ideia de função linear.

Figura 41 – Tabela para exercício 4 da 1ª atividade do E-book



Valor de n	Quantidade de quadrados que surgem quando $m = 1$	Quantidade de quadrados que surgem quando $m = 2$	Quantidade de quadrados que surgem quando $m = 3$
0			
1			
2			
3			
4			

Fonte: (Autoria própria, 2026).

5.1.2 Atividade 2

Esta atividade é composta por três exercícios, tendo como objetivos:

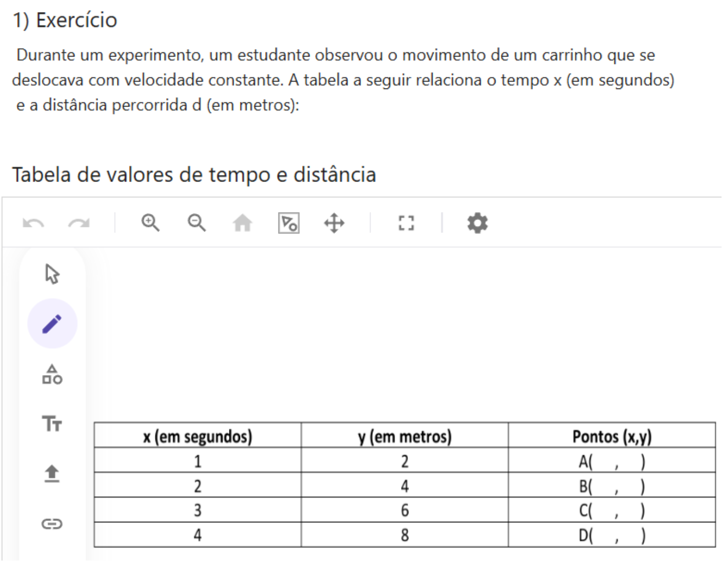
- Avaliar a relação entre duas variáveis quantitativas, usando diagrama de dispersão;
- Promover letramento estatístico e pensamento computacional;
- Distinção de casos em que as funções tenham um comportamento proporcional.

A metodologia é aplicada da seguinte forma:

- **Número de aulas:** Uma aula;
- **Conteúdo:** Proporção entre conjunto de dados numéricos;
- **Materiais:** Computadores, táblets ou celulares conectados à internet, juntamente com instrumentos de estudo como caneta, lápis, papel, entre outros;
- **Avaliação:** avaliação qualitativa em anotações feitas em diários pelo professor e avaliação quantitativa entregue pelo Google Classroom;
- **Disponível em:** https://www.geogebra.org/m/bpjdrs73#material/y3vwcb26

O exercício 1 mostrado a seguir mostra a proporção entre o movimento de um carrinho que se desloca numa velocidade constante.

Figura 42 – Exercício 1 da 2ª atividade do E-book



1) Exercício

Durante um experimento, um estudante observou o movimento de um carrinho que se deslocava com velocidade constante. A tabela a seguir relaciona o tempo x (em segundos) e a distância percorrida d (em metros):

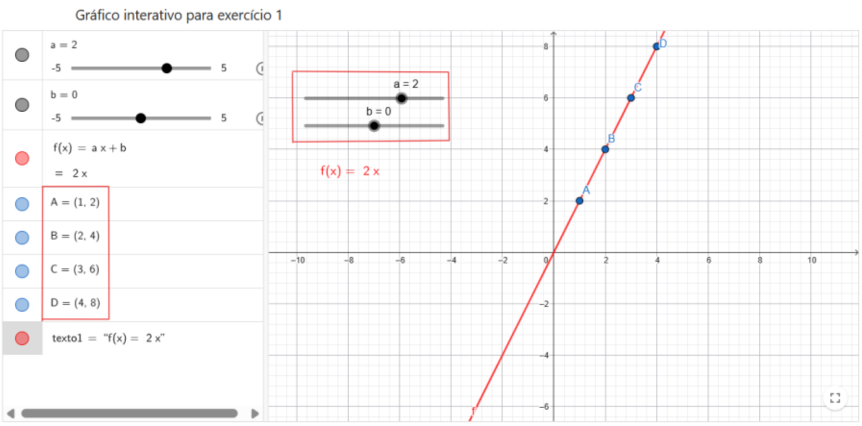
Tabela de valores de tempo e distância

x (em segundos)	y (em metros)	Pontos (x,y)
1	2	A(,)
2	4	B(,)
3	6	C(,)
4	8	D(,)

Fonte: (Autoria própria, 2026).

Vale destacar que esse exercício é muito parecido com o exercício 1 da 1° atividade, mostrado na Figura 38, mas é imprescindível falar que a análise de dados é diferente, pois não relaciona nenhuma função específica. O professor deve auxiliar, incentivando-o a realizar as realocações dos pontos no gráfico interativo, mostrado na Figura 43, para que o aluno perceba a relação de proporcionalidade entre os pontos que se alinham em uma função afim.

Figura 43 – Gráfico interativo para exercício 1 da 2ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Deve-se ter em mente que o aluno também precisa alinhar os coeficientes angular “a” e linear “b”, que estão no gráfico interativo, de forma a saber qual a função que descreve esses pontos.

Já o exercício 2 desta aula foi selecionado da prova do ENEM, no ano de 2024, e faz referência a um conjunto de dados estatísticos, no qual o exercício mostra a regressão linear destes pontos. Para este caso, o professor deve auxiliar o estudante a inicialmente tentar resolver o exercício de forma algébrica e após isso verificar que o ponto P, em vermelho, no gráfico interativo da Figura 44 colocado sobre a reta de regressão na abscissa de valor 2022 terá a ordenada como resposta.

Figura 44 – Gráfico interativo para exercício 2 da 2ª atividade do E-book

Fonte: (Autoria própria, 2026).

No exercício 3, estão mostrados dados estatísticos que relacionam a idade com a altura, como é mostrado na Figura 45 a seguir.

Figura 45 – Exercício 1 da 2ª atividade do E-book

3) Exercício

A tabela a seguir mostra um exemplo de relação da altura de uma pessoa com sua idade.

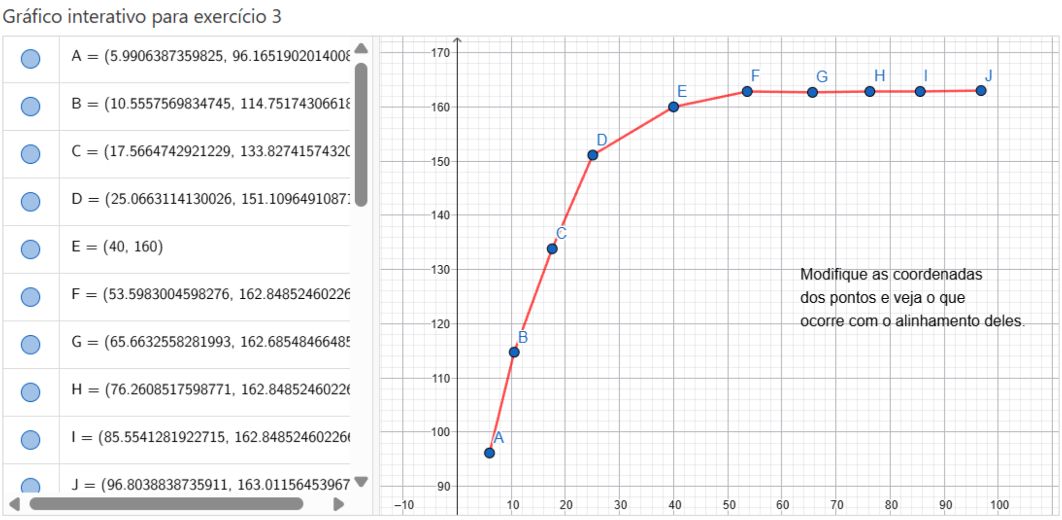
Tabela de altura em relação à idade

Idade (anos)	Altura (cm)	Pontos
2	88	A (2,88)
4	102	B (4, 102)
6	116	C (6, 116)
10	128	D (10, 128)
12	138	E (12, 138)
14	150	F (14, 150)
16	168	G (16, 168)
18	170	H (18, 170)
25	170	I (25, 170)
30	170	J (30, 170)

Fonte: (Autoria própria, 2026).

O professor deve incentivar para que os alunos coloquem os pontos descritos nas coordenadas descritas e após isso, pedir que os discentes verificarem o comportamento o tipo de comportamento que eles apresentam. Neste caso, é válido ressaltar que o gráfico interativo mostrará que os pontos não se alinham em uma reta, fazendo com que eles não sejam proporcionais entre si, como é mostrado na Figura 46.

Figura 45 – Gráfico interativo para exercício 3 da 2ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

5.1.3 Atividade 3

Esta atividade é composta por dois exercícios, tendo como objetivos:

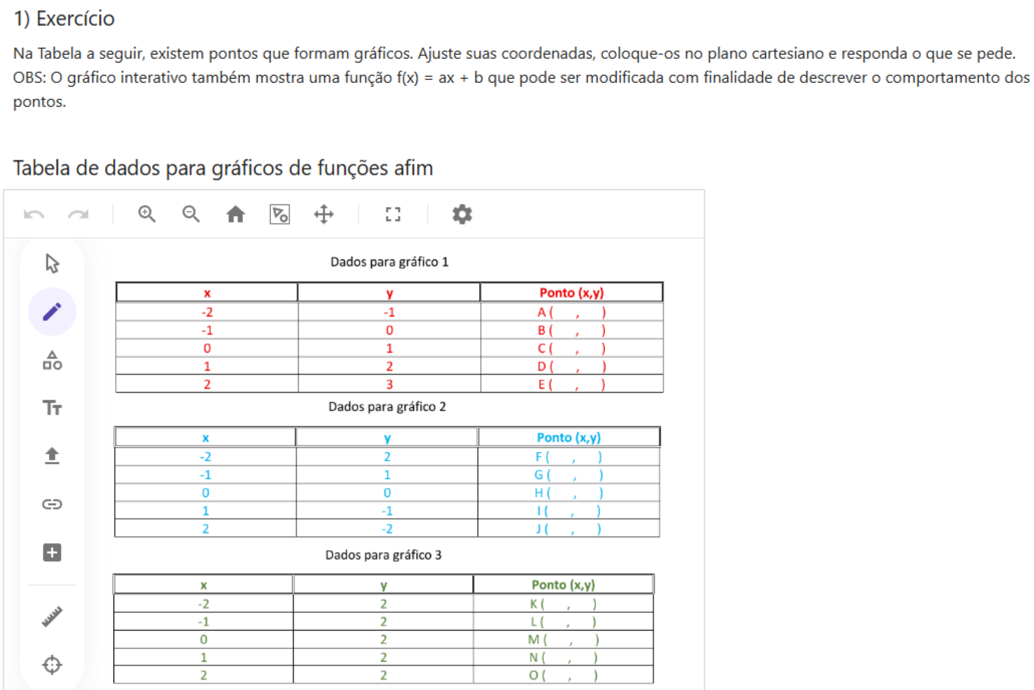
- Distinguir Eixos do plano do cartesiano, origem e quadrantes;
- Identificar que o gráfico de uma função afim é uma reta;
- Reconhecer casos particulares da função afim;
- Estudar importância do coeficiente angular e linear do gráfico da função.

A metodologia é aplicada da seguinte forma:

- **Número de aulas:** Uma aula;
- **Conteúdo:** Gráfico da função afim, plano cartesiano, casos particulares e influência dos coeficientes angular e linear;
- **Materiais:** Computadores, táblets ou celulares conectados à internet, juntamente com instrumentos de estudo como caneta, lápis, papel, entre outros;
- **Avaliação:** avaliação qualitativa em anotações feitas em diários pelo professor e avaliação quantitativa entregue pelo Google Classroom;
- **Disponível em:** https://www.geogebra.org/m/jsjkqhhm

O exercício 1 a seguir mostra a três tabelas com conjunto de pontos que podem ser plotados no gráfico interativo.

Figura 47 – Exercício 1 da 3ª atividade do E-book



1) Exercício

Na Tabela a seguir, existem pontos que formam gráficos. Ajuste suas coordenadas, coloque-os no plano cartesiano e responda o que se pede. OBS: O gráfico interativo também mostra uma função f(x) = ax + b que pode ser modificada com finalidade de descrever o comportamento dos pontos.

Tabela de dados para gráficos de funções afim

Dados para gráfico 1

x	y	Ponto (x,y)
-2	-1	A (,)
-1	0	B (,)
0	1	C (,)
1	2	D (,)
2	3	E (,)

Dados para gráfico 2

x	y	Ponto (x,y)
-2	2	F (,)
-1	1	G (,)
0	0	H (,)
1	-1	I (,)
2	-2	J (,)

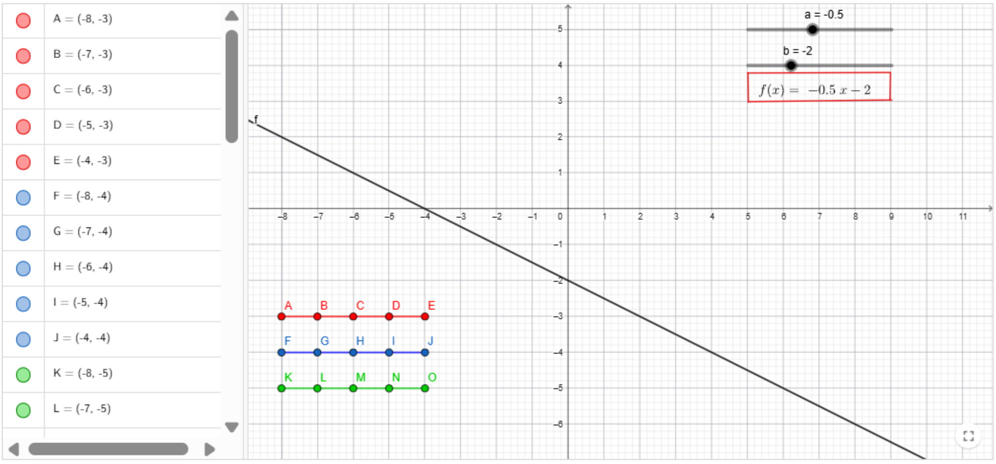
Dados para gráfico 3

x	y	Ponto (x,y)
-2	2	K (,)
-1	2	L (,)
0	2	M (,)
1	2	N (,)
2	2	O (,)

Fonte: (Autoria própria, 2026).

Para esse exercício, o aluno deve alterar as coordenadas dos pontos e colocá-las nos lugares mostrados nas tabelas. O professor deve orientá-los a observar o comportamento de gráfico e com o auxílio de uma função f(x) descrita, ajustar os coeficientes angular e linear em cada situação para verificar o que ocorre com cada conjunto de pontos, pedindo aos alunos para verificarem quando uma função é crescente, decrescente, constante e analisando os casos particulares da função afim, como é mostrada na Figura 48.

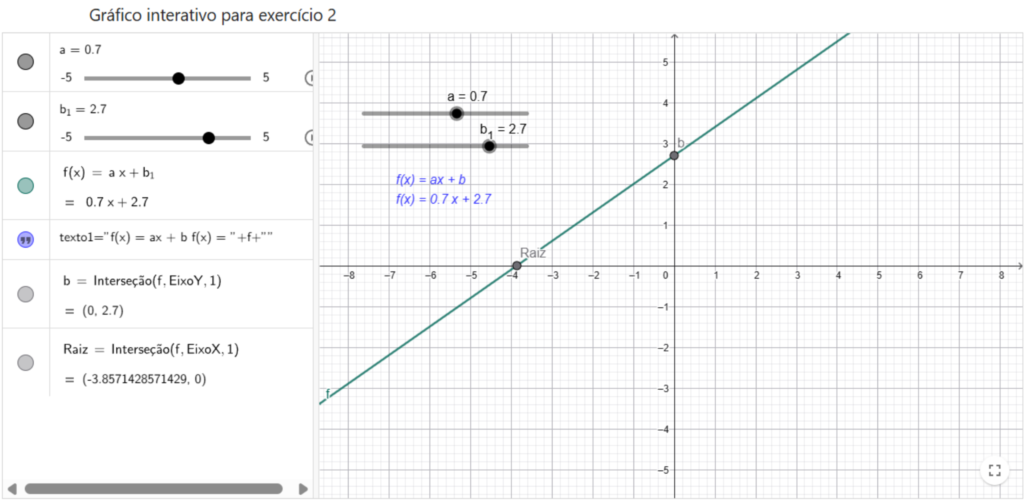
Figura 48 – Gráfico interativo para exercício 1 da 3ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Já o exercício 2, mostra o gráfico de uma função, com a intersecção no Eixo y sendo o valor do coeficiente linear “b” e a raiz sendo a intersecção com o Eixo x, como mostra a Figura 49 a seguir.

Figura 49 – Gráfico interativo para exercício 2 da 3ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Para esse exercício é importante que o aluno deixe sempre um dos coeficientes num determinado valor e mude o outro para verificar o que ocorre com o gráfico da função. Mudando apenas o valor do coeficiente angular, o aluno deve perceber que apenas a inclinação da função muda, sendo que quanto maior o módulo de “a” mais a reta tende a inclinação ao Eixo y. Quando se altera apenas o coeficiente

"b", a reta muda sua intersecção com o Eixo y, fazendo-a transladar pelo plano cartesiano, mas permanecendo com mesma inclinação, mudando a raiz.

5.1.4 Atividade 4

Esta atividade é composta por quatro exercícios, tendo como objetivos:

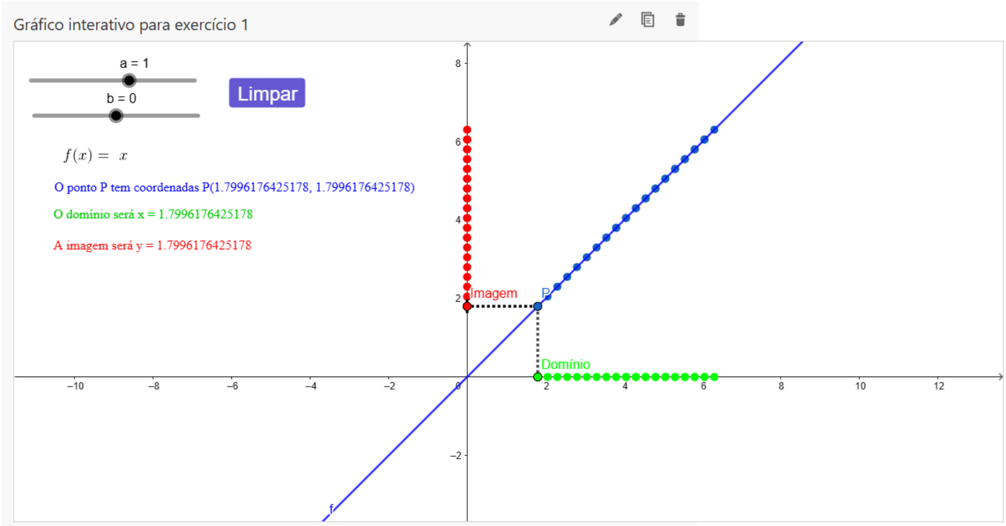
- Conhecer domínio e imagem da função afim;
- Analisar ponto de intersecção de duas funções afim;
- Identificar o domínio e imagem funções crescentes, decrescente e constante;
- Analisar funções compostas por mais de uma sentença, identificando seu domínio e imagem.

A metodologia é aplicada da seguinte forma:

- **Número de aulas:** Uma aula;
- **Conteúdo**: Domínio e imagem de uma função afim e funções definidas por mais de uma sentença;
- **Materiais:** Computadores, táblets ou celulares conectados à internet, juntamente com instrumentos de estudo como caneta, lápis, papel, entre outros;
- **Avaliação:** avaliação qualitativa em anotações feitas em diários pelo professor e avaliação quantitativa entregue pelo Google Classroom;
- **Disponível em:** https://www.geogebra.org/m/bpjdrs73#material/ddwabeez

O exercício 1 mostra um gráfico interativo, no qual o ponto P se desloca sobre uma função $f(x) = ax + b$, deixando o rastro do domínio e imagem da função como é mostrado na Figura 50.

Figura 50 – Gráfico interativo para exercício 1 da 4ª atividade do E-book

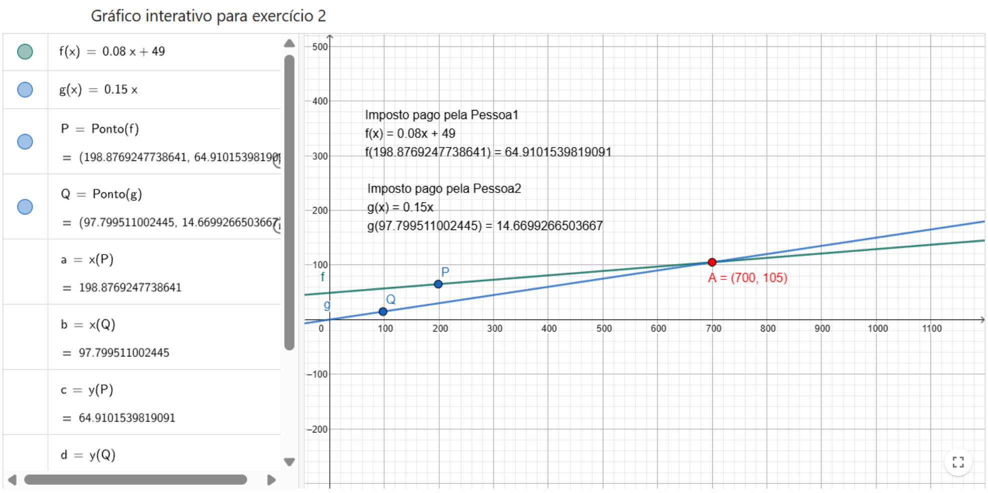


Fonte: (Autoria própria, 2026).

Nesta imagem, o aluno deve notar que o domínio está representado sobre o Eixo y, pois estes são os valores assumidos da função no ponto P. Já o domínio é representado sobre o Eixo x. É importante notar que, para este caso, pode-se alterar os valores dos coeficientes da função $f(x)$ e assim poder analisar o domínio e imagem da função crescente, decrescente e constante.

O exercício 2 faz referência a impostos cobrados de maneiras distintas, sendo dados pelas seguintes funções $f(x) = 0{,}08x + 49$ e $g(x) = 0{,}15x$. O gráfico da Figura 51 mostra-nos a representação delas.

Figura 51 – Gráfico interativo para exercício 2 da 4ª atividade do E-book

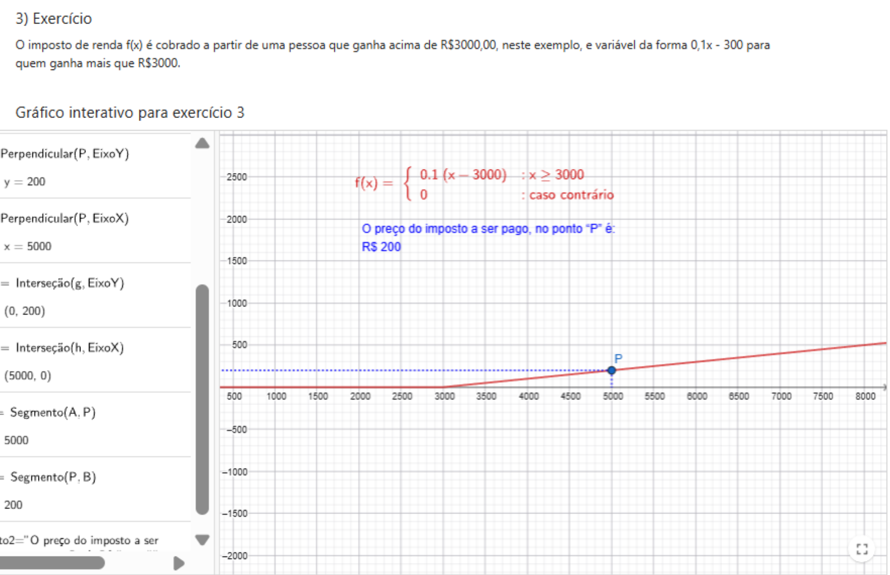


Fonte: (Autoria própria, 2026).

É importante que o professor oriente os alunos que os pontos P e Q podem ser deslocados sobre as funções f(x) e g(x) respectivamente. O domínio neste caso é o valor do tempo, em dias, e a imagem é o valor pago devido ao imposto. O ponto em vermelho A mostra exatamente quando as funções se tocam. O professor deve orientar o estudante a perceber que antes do ponto A, uma pessoa que paga imposto seguindo a função g(x) desembolsa menos dinheiro que uma pessoa que usa a função f(x) e para valores maiores que o ponto A, a situação se inverte.

O exercício 3 usa-se de uma função composta por duas sentenças, para cálculo de imposto, neste caso é imprescindível que o professor mostre que o domínio permanece como sendo o Eixo x, mas a imagem não será igual a de uma função afim que tem apenas uma sentença. A Figura 52 mostra-nos o gráfico interativo do exercício.

Figura 52 – Gráfico interativo para exercício 3 da 4ª atividade do E-book

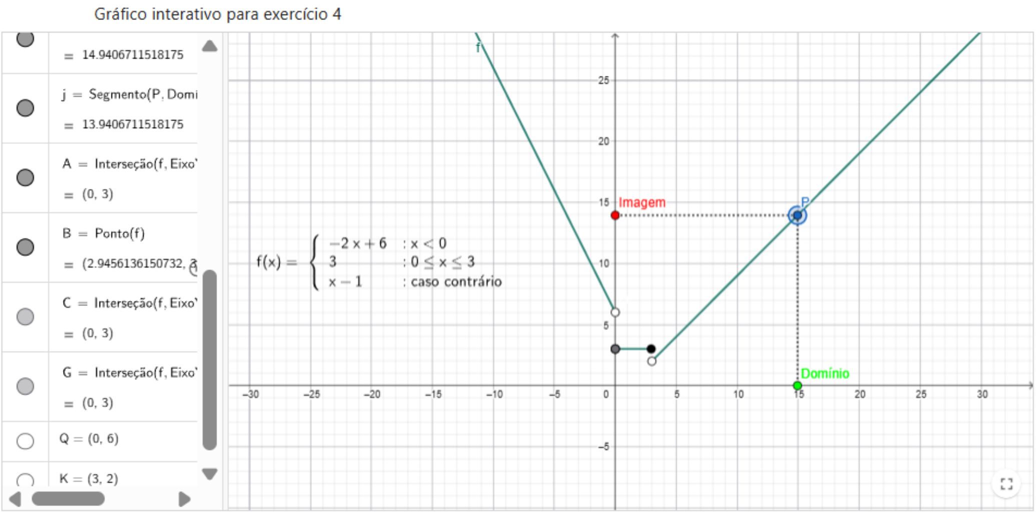


Fonte: (Autoria própria, 2026).

Diferentemente do exercício 2, o exercício 3 mostra que o domínio vai ser dado pelo valor do salário que uma pessoa recebe, já a imagem continua sendo o valor pago de imposto. O professor deve orientar o aluno a perceber que, para este caso, uma pessoa que recebe até R$3000,00 está isenta de pagamento, enquanto que quem ganha mais já começa a paga impostos.

O exercício 4 desta atividade mostra uma função afim definida por três sentenças. Neste caso, o professor deverá orientar que o aluno mova o ponto P sobre a função e analise o que ocorre com o domínio, que continua sendo o Eixo x, e a imagem que será definida por partes.

Figura 53 – Gráfico interativo para exercício 4 da 4ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

É importante notar que os pontos brancos, no gráfico, não fazem parte da imagem, pois ela está definida nos pontos pretos.

5.1.5 Atividade 5

Esta atividade é composta por cinco exercícios, tendo como objetivos:

- Conhecer o conceito de taxa de variação;
- Relacionar a taxa de variação à inclinação da reta;
- Comparar funções afins distintas a partir de suas taxas de variação.

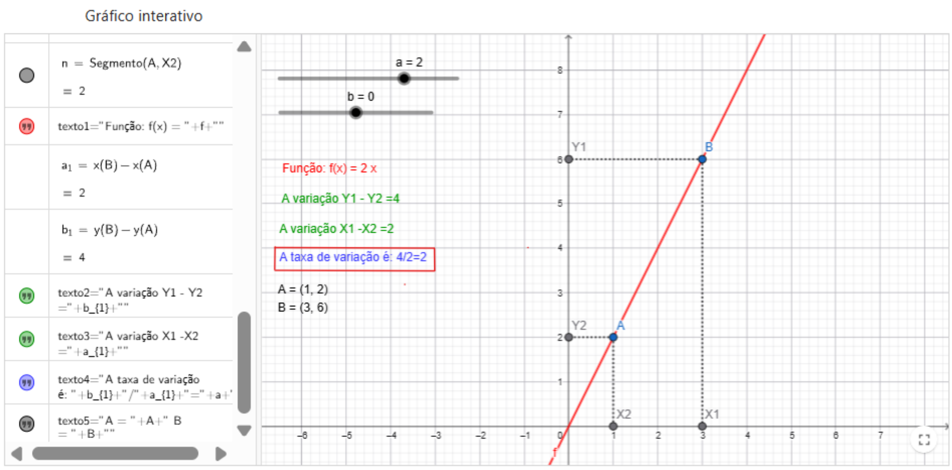
A metodologia é aplicada da seguinte forma:

- **Número de aulas:** Uma aula;
- **Conteúdo**: Taxa de variação de uma função afim;
- **Materiais:** Computadores, táblets ou celulares conectados à internet, juntamente com instrumentos de estudo como caneta, lápis, papel, entre outros;

- **Avaliação:** avaliação qualitativa em anotações feitas em diários pelo professor e avaliação quantitativa entregue pelo Google Classroom;
- **Disponível em:** https://www.geogebra.org/m/bpjdrs73#material/rsqhnv9f

Os exercícios 1, 2 e 3 usam o mesmo gráfico interativo para observar comportamento da função afim e sua taxa de variação, assim como é mostrado na Figura 54.

Figura 54 – Gráfico interativo para exercício 1,2 e 3 da 5ª atividade do E-book

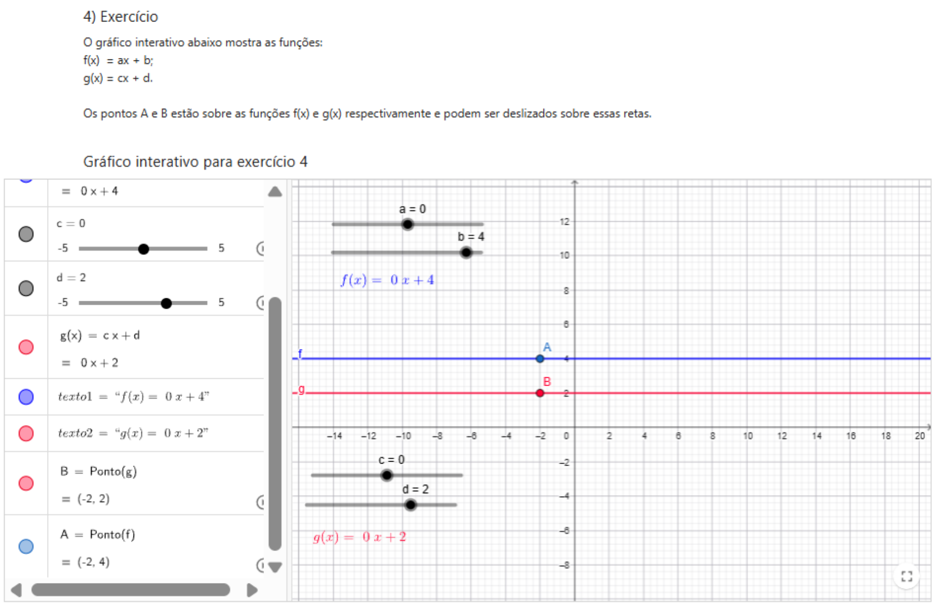


Fonte: (Autoria própria, 2026).

Para este gráfico, é importante que o professor oriente os alunos a modificar os coeficientes da função f(x) e perceber que o coeficiente angular é o único que altera a taxa de variação, podendo esta ser positiva, negativa ou nula, enquanto o coeficiente linear não terá qualquer influência sobre essa taxa. Outra importante observação a ser feita é que a alteração de coordenadas dos pontos A e B pertencentes à reta não irá alterar a taxa, pois a divisão entre as diferenças de valores das ordenadas pela diferença de valores das abscissas permanece constante.

No exercício 4 existem duas funções que podem ter seus coeficientes alterados, assim como é mostrada na Figura 55.

Figura 55 – Gráfico interativo para exercício 4 da 5ª atividade do E-book



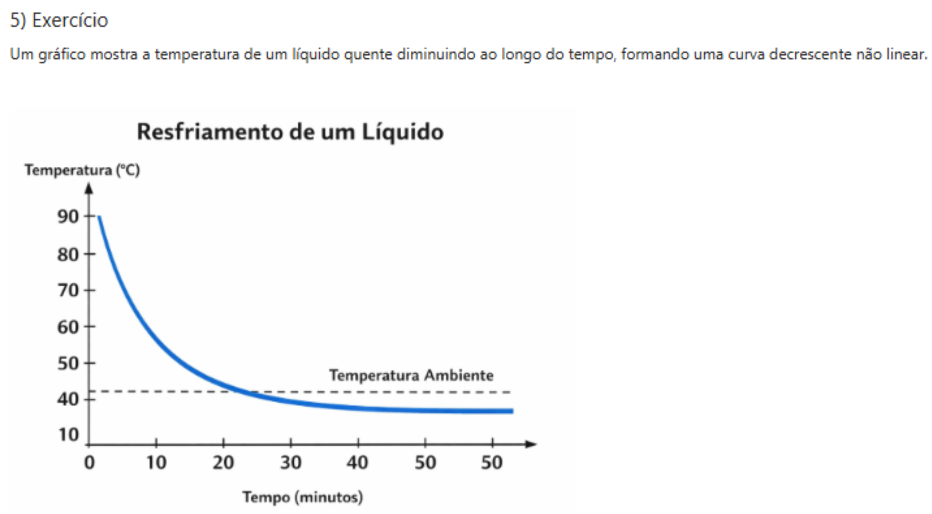
Fonte: (Autoria própria, 2026).

Neste exercício as funções $f(x)$ e $g(x)$ devem ser modificadas a fim de que o aluno possa comparar em quais situações uma função apresenta maior crescimento e decrescimento que a outra, relacionando-as com suas respectivas taxas de variação. É válido mostrar ressaltar na importância de observar quando uma taxa será nula e qual o efeito sobre o gráfico da função.

O exercício 5 mostra um caso de uma função não linear de resfriamento de um líquido, como é mostrada na Figura 56.

O objetivo desta atividade é mostrar que a taxa de variação pode ser utilizada em diferentes pontos sobre uma curva não linear para verificar crescimento e decrescimento sobre estes tipos de gráficos.

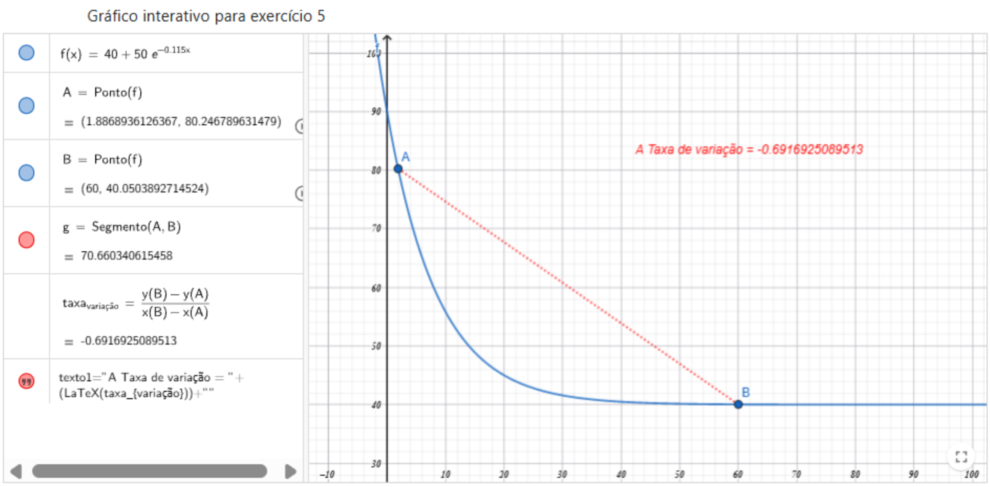
Figura 56 – Exercício 5 da 5ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

A função de decaimento é dada por $f(x) = 40 + 50e^{-0,115x}$, sendo esta uma função não linear. Para este caso, o professor deve orientar os alunos a avaliar a taxa de variação desta função através de dois pontos A e B, de forma que, com a variação destes pontos a taxa de variação sempre será diferente, indicando o padrão não linear da função de resfriamento, assim como é mostrado na Figura 57.

Figura 57 – Gráfico interativo para exercício 5 da 5ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

É importante notar que quando os valores de A e B tiverem com valores de abscissas maiores que 40, a taxa de variação vai se aproximando de zero, sem nunca alcançá-lo, revelando assim o padrão quase linear da função de decaimento.

5.1.6 Atividade 6

Esta atividade é composta por três exercícios, tendo como objetivos:

- Conhecer os métodos de substituição e adição para resolver sistemas lineares com duas equações;
- Identificar o ponto de intersecção das equações como solução do sistema;
- Compreender o conceito de equação linear com duas incógnitas algebricamente e geometricamente;

A metodologia é aplicada da seguinte forma:

- **Número de aulas:** Uma aula;
- **Conteúdo**: Resolução de sistemas lineares;
- **Materiais:** Computadores, táblets ou celulares conectados à internet, juntamente com instrumentos de estudo como caneta, lápis, papel, entre outros;
- **Avaliação:** avaliação qualitativa em anotações feitas em diários pelo professor e avaliação quantitativa entregue pelo Google Classroom;
- **Disponível em:** https://www.geogebra.org/m/bpjdrs73#material/fsuzyjuk

O exercício 1 é um caso em que existem duas funções e pede-se o ponto de intersecção entre elas, como é mostrado na Figura 58 a seguir.

Figura 58– Exercício 1 da 6ª atividade do E-book

1) Exercício

(Enem- 2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas por:

$Q_O(x) = -20+4x$

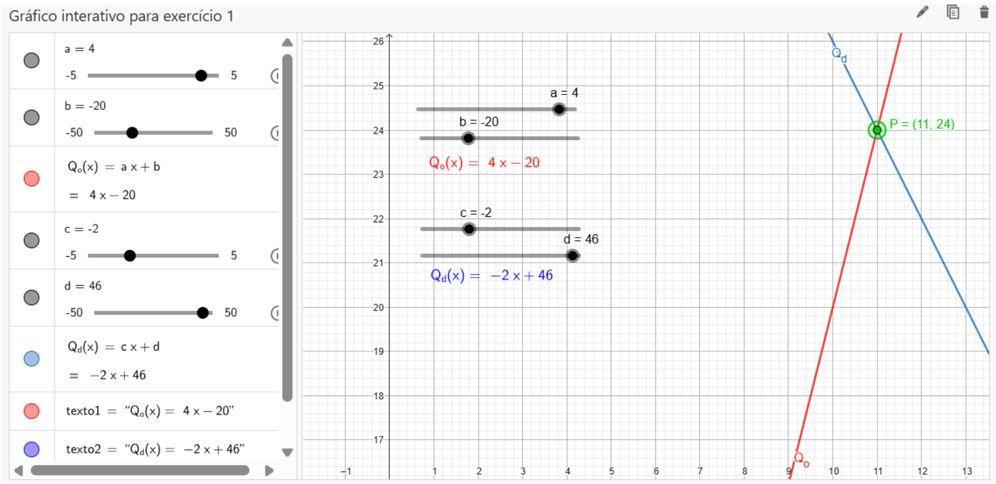
$Q_D(x) = 46-2x$

Em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e x é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam.

Fonte: (Autoria própria, 2026).

Para esse exercício, o professor deve orientar os alunos a resolverem o problema por meio da resolução de sistemas lineares no método da adição ou método da substituição. Fazendo esse processo, o aluno deve conferir, pelo gráfico interativo, mostrado na Figura 59 que a intersecção entre as retas é justamente a resolução do problema.

Figura 59 – Gráfico interativo para exercício 1 da 6ª atividade do E-book

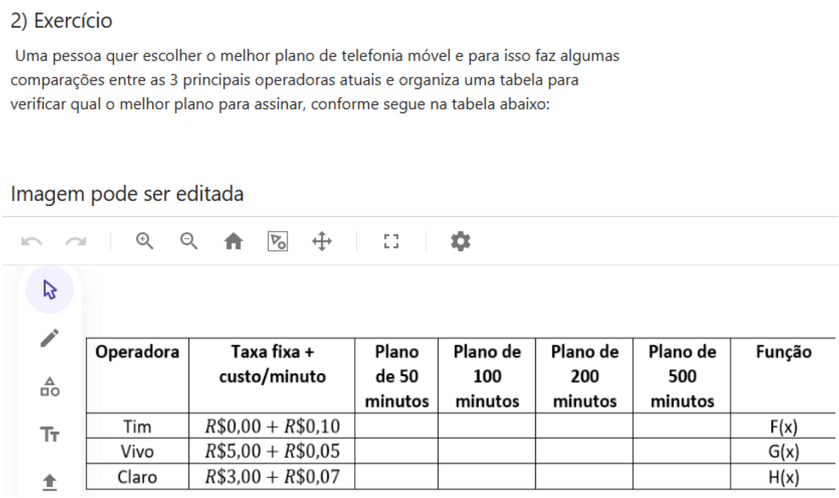


Fonte: (Autoria própria, 2026).

É válido ressaltar que as funções são dadas $Q_o(x) = ax + b$ e $Q_d(x) = cx + d$ e esses coeficientes podem ser alterados no gráfico. O professor deve mostrar aos alunos que o ponto P, intersecção entre as retas, representa a solução do problema.

Já o exercício 2 mostra a comparação entre três planos de operadoras diferentes, como mostra a Figura 60.

Figura 60 – Exercício 2 da 6ª atividade do E-book



2) Exercício

Uma pessoa quer escolher o melhor plano de telefonia móvel e para isso faz algumas comparações entre as 3 principais operadoras atuais e organiza uma tabela para verificar qual o melhor plano para assinar, conforme segue na tabela abaixo:

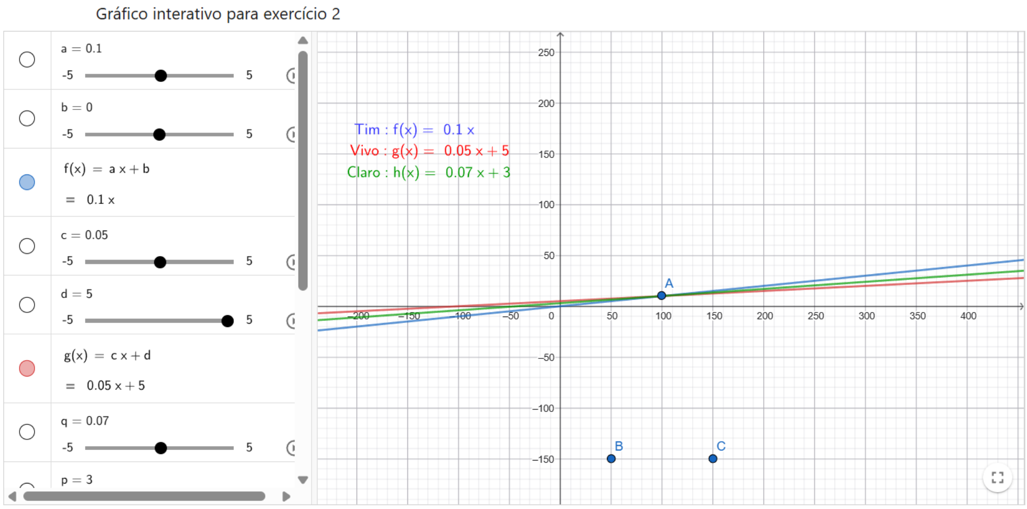
Imagem pode ser editada

Operadora	Taxa fixa + custo/minuto	Plano de 50 minutos	Plano de 100 minutos	Plano de 200 minutos	Plano de 500 minutos	Função
Tim	$R\$0,00 + R\$0,10$					F(x)
Vivo	$R\$5,00 + R\$0,05$					G(x)
Claro	$R\$3,00 + R\$0,07$					H(x)

Fonte: (Autoria própria, 2026).

Para este caso, o aluno deverá calcular e preencher a tabela mostrada e após isso achar as funções respectivas para as operadoras. Com a ajuda do gráfico interativo mostrado na Figura 61 analisar o que ocorre com cada plano e compará-los.

Figura 61 – Gráfico interativo para exercício 2 da 6ª atividade do E-book

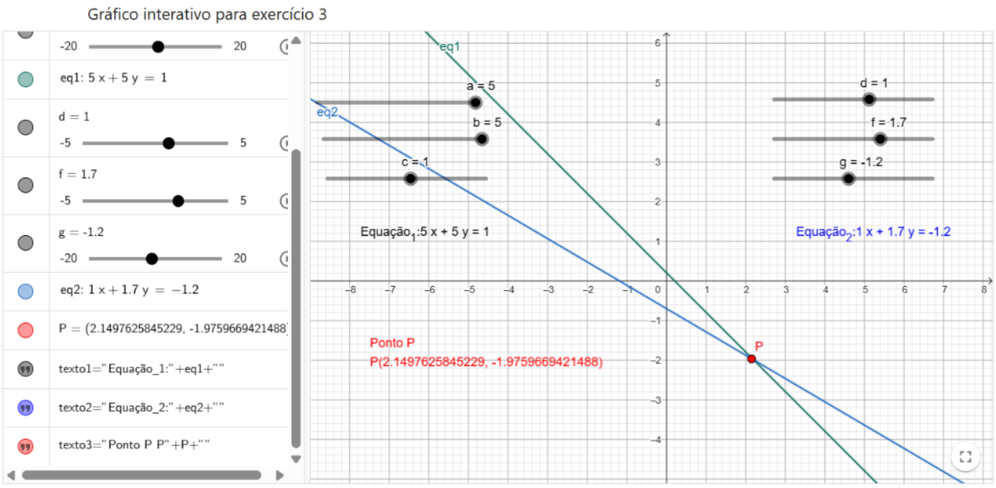


Fonte: (Autoria própria, 2026).

O professor deve mostrar aos alunos que existe um ponto de intersecção entre essas três funções, e é justamente neste lugar que o sistema é resolvido, fazendo com que quando o cliente comprar um plano de 100 minutos, o valor a ser pago será o mesmo em qualquer operadora. Os pontos A, B e C podem ser movidos livremente no gráfico para melhor compreensão do problema.

Por fim tem-se o terceiro exercício mostra duas retas em suas formas gerais dadas por $ax + by = c$ e $dx + fy = g$. Os alunos devem resolver os sistemas propostos de forma da resolução de sistemas por adição ou substituição e após usar o gráfico interativo, mostrado na Figura 62 para conferir a solução do problema.

Figura 62 – Gráfico interativo para exercício 3 da 6ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

5.1.7 Atividade 7

Esta atividade é composta por quatro exercícios, tendo como objetivos:

- Compreender que dois pontos distintos no plano formam uma reta;
- Determinar a lei de formação da função através do cálculo de seus coeficientes;
- Conhecer a raiz da função;
- Estudar o sinal da função crescente ou decrescente.

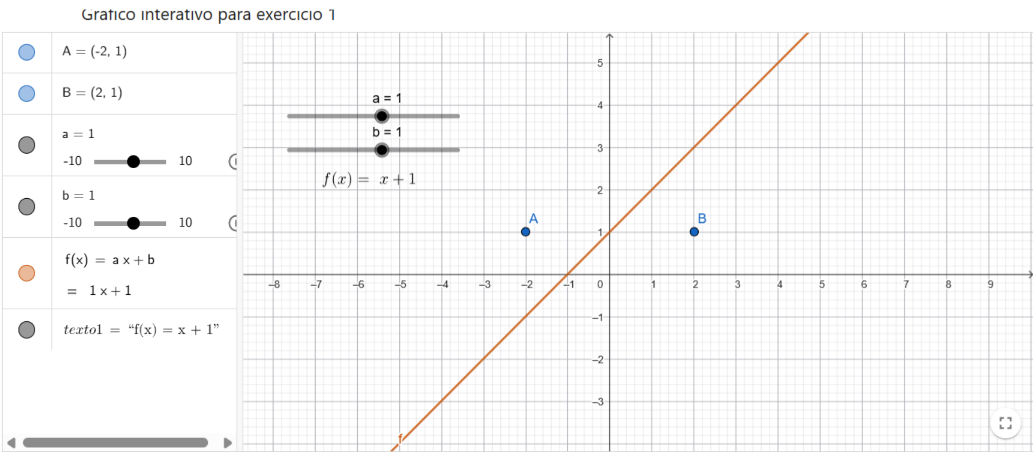
A metodologia é aplicada da seguinte forma:

- **Número de aulas:** Uma aula;
- **Conteúdo**:Traçado de gráfico a partir de pontos e Estudo do sinal da função afim

- **Materiais:** Computadores, táblets ou celulares conectados à internet, juntamente com instrumentos de estudo como caneta, lápis, papel, entre outros;
- **Avaliação:** avaliação qualitativa em anotações feitas em diários pelo professor e avaliação quantitativa entregue pelo Google Classroom;
- **Disponível em:** https://www.geogebra.org/m/bpjdrs73#material/hcwd8gtq https://www.geogebra.org/m/bpjdrs73#material/yqxv79ue

O exercício 1 mostra-nos um gráfico interativo com os pontos A e B que podem ser colocados em qualquer coordenada, assim como mostra a Figura 63.

Figura 63 – Gráfico interativo para exercício 1, da primeira etapa, da 7ª atividade do E-book

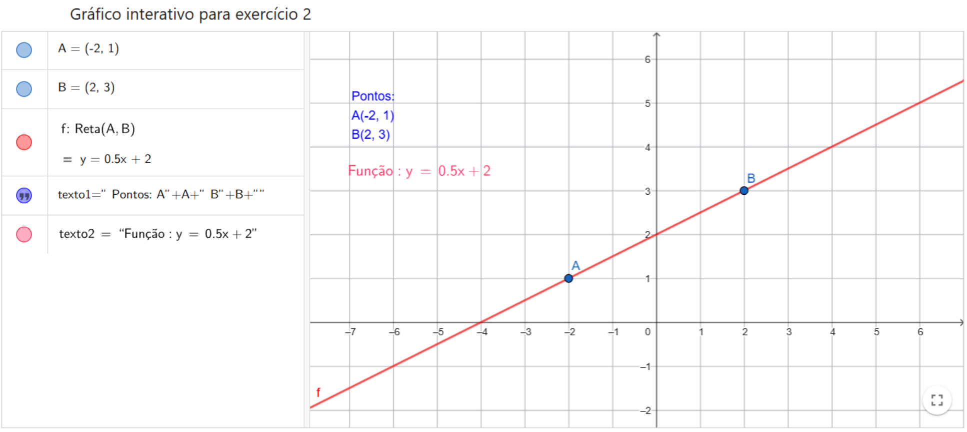


Fonte: (Autoria própria, 2026).

É necessário que o professor oriente os alunos a mudarem as coordenadas dos pontos A e B, logo após mudar os coeficientes angular e linear da função afim de modo a fazê-la passar por esses pontos. É imprescindível falar que a partir desses pontos é possível calcular a função e descrever seu comportamento.

Já o exercício 2 traz dois pontos pertencentes à função e quando alterados suas coordenadas a função também muda automaticamente. Para este caso o professor deve mostrar aos alunos que existem casos particulares das funções afim em relação aos pontos que a compões, como por exemplo ocorre que a função não existe quando os pontos estão sobrepostos. A Figura 64 mostra-nos o gráfico interativo deste exercício.

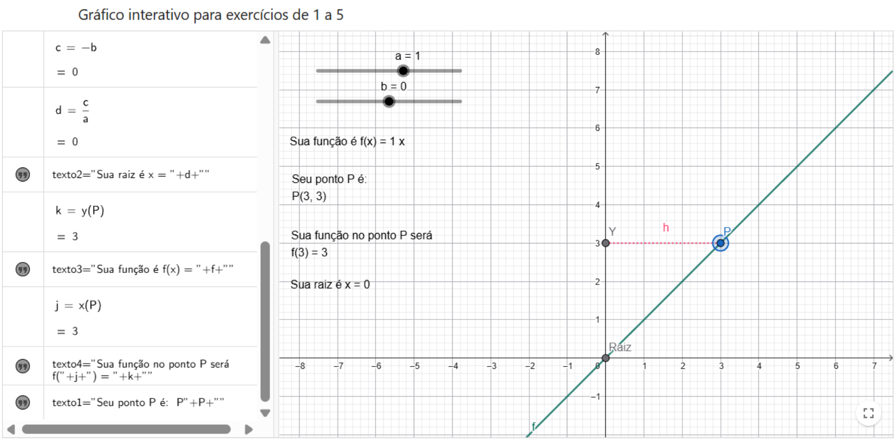
Figura 64 – Gráfico interativo para exercício 2, da primeira etapa, da 7ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Nos exercícios de 1 a 5 da segunda etapa, tem-se o gráfico interativo mostrados na Figura 65.

Figura 65 – Gráfico interativo para exercícios 1 a 5, da segunda etapa, da 7ª atividade do E-book

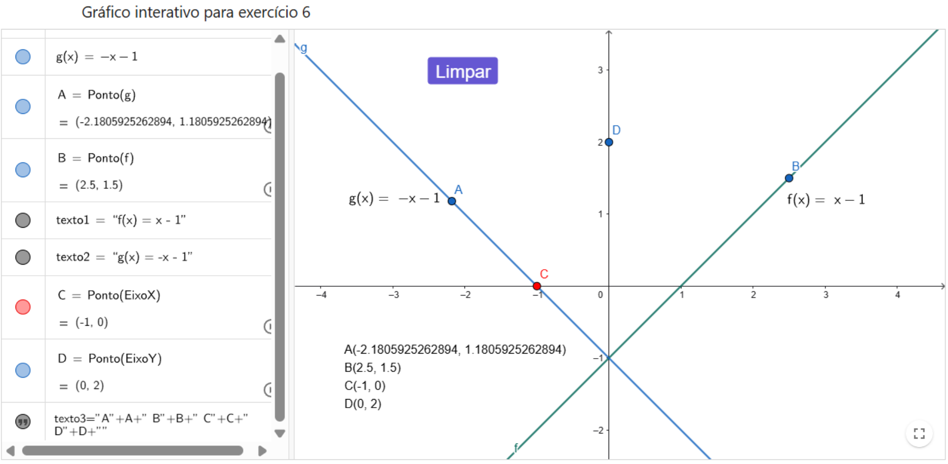


Fonte: (Autoria própria, 2026).

O professor deve orientar os alunos a fazer mudanças nos coeficientes linear e angular da função e verificar que o valor da raiz sempre será dada por $-b/a$.

No exercício 6 são mostradas duas funções e $f(x)$ e $g(x)$ nos quais seus coeficientes já são fixos. O professor deve orientar os estudantes a fazer o estudo do sinal de cada uma delas e determinar os lugares onde as funções são positivas, negativas e nulas. A Figura 66 mostra o gráfico interativo.

Figura 66 – Gráfico interativo para exercício 6, da segunda etapa, da 7ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Os pontos A e B podem ser usados para marcar as raízes das funções $g(x)$ e $f(x)$ respectivamente, enquanto que o ponto D pode ser usado para determinar o ponto de intersecção das funções. É importante dizer que o ponto C, no Eixo x, pode ser usado para fazer marcações sobre o domínio e ajudar a responder intervalo em que a multiplicação das funções é positiva e negativa.

5.1.8 Atividade 8

Esta atividade é composta por três exercícios, tendo como objetivos:

- Modelar situações com função do 2º grau;
- Resolver problemas contextualizados sobre funções do 2°grau;
- Interpretar os resultados obtidos, avaliando se fazem sentido no contexto do problema.

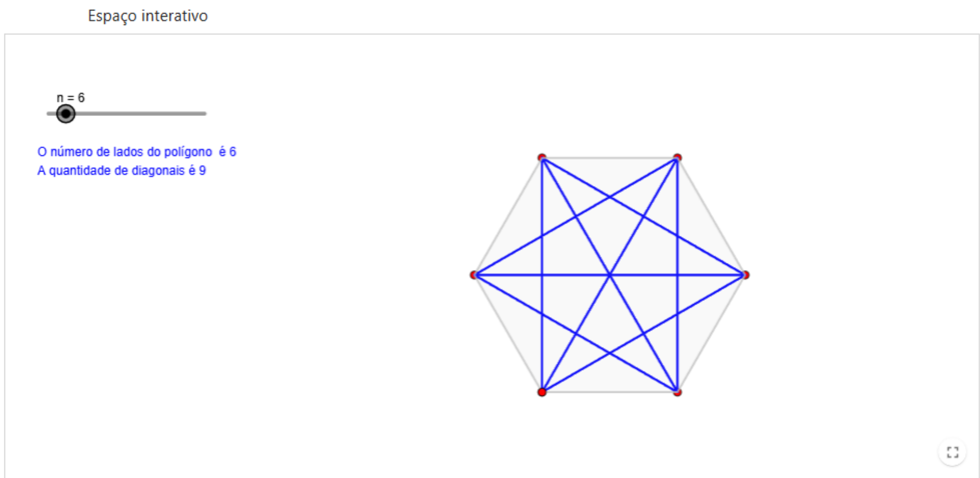
A metodologia é aplicada da seguinte forma:

- **Número de aulas:** Uma aula;
- **Conteúdo**: Definição de função quadrática;
- **Materiais:** Computadores, táblets ou celulares conectados à internet, juntamente com instrumentos de estudo como caneta, lápis, papel, entre outros;

- **Avaliação:** avaliação qualitativa em anotações feitas em diários pelo professor e avaliação quantitativa entregue pelo Google Classroom;
- **Disponível em:** https://www.geogebra.org/m/bpjdrs73#material/xrewadnj

No exercício 2 é mostrada a variação da quantidade de diagonais de um polígono de “n” lados. No espaço interativo é possível mudar a quantidade de lados do polígono e observar que a quantidade de diagonais também se altera.

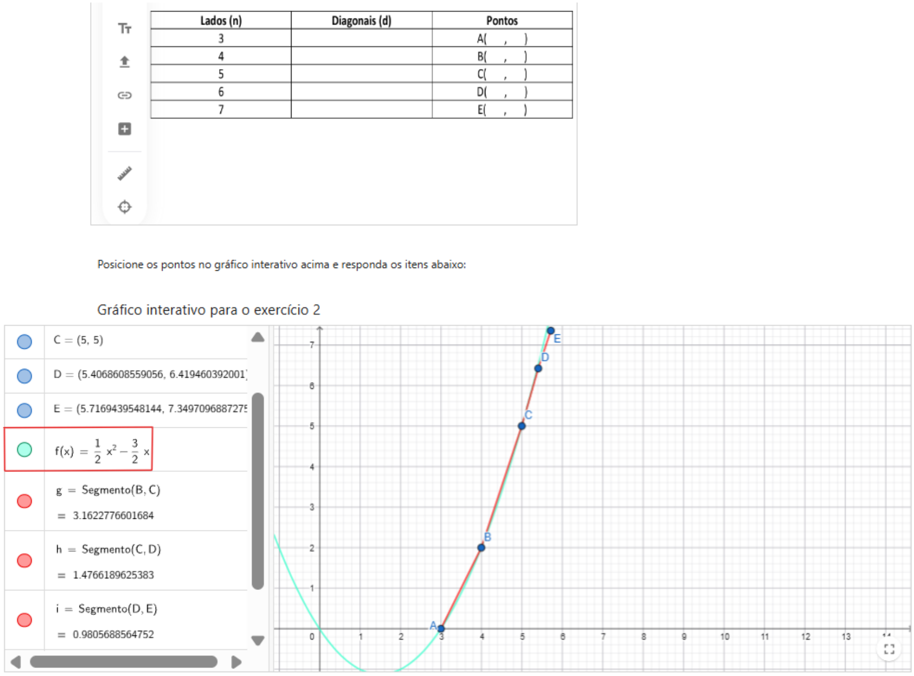
Figura 67 – Gráfico interativo para exercício 2 da 8ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

O professor deve orientar os estudantes a moverem o deslizante “n” e assim contar e preencher a tabela que relaciona a quantidade de diagonais em relação a quantidade de lados do polígono. A Figura 68 mostra a tabela e o gráfico interativo onde os pontos devem ser colocados.

Figura 68 – Tabela e Gráfico interativo para exercício 2 da 8ª atividade do E-book

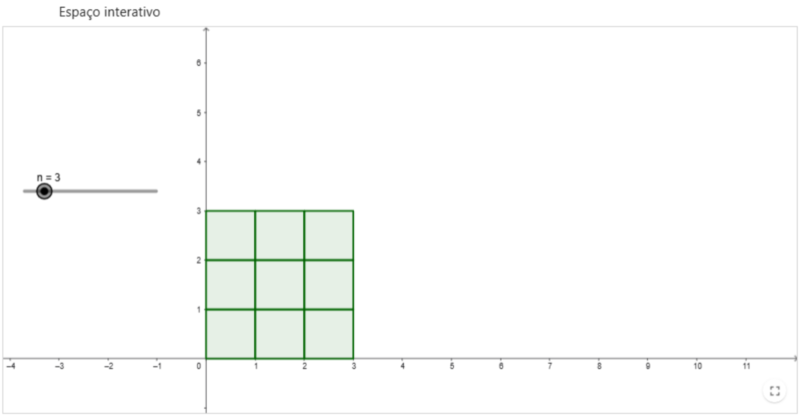


Fonte: (Autoria própria, 2026).

Após a realocação dos pontos descritos na tabela, é importante que o professor peça para os alunos clicarem na opção, marcada em vermelho, que mostra a função $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$ e perceber que os pontos estão exatamente sobre essa função. A relação de pontos mostra que eles estão dispostos sobre a função do 2°grau.

Já no exercício 3, um controle deslizante “n” mostra a relação de quadrados que aparecem quando se altera esse valor, como é mostrada na Figura 69.

Figura 69 – Gráfico interativo para exercício 3 da 8ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Ao variar o valor de “n”, o aluno deve perceber que a relação de quadrados que aparecem é sempre a multiplicação de n por n, fornecendo assim uma função quadrática do tipo $f(n) = n^2$.

5.1.9 Atividade 9

Esta atividade é composta por três exercícios, tendo como objetivos:

- Substituir um valor numérico na variável x para calcular o valor da função;
- Determinar pares ordenados (x, f(x)) a partir da lei de formação da função;
- Relacionar o valor da função em um ponto com a representação no plano cartesiano;
- Identificar o domínio de uma função quadrática;
- Determinar a imagem de uma função quadrática analisando o gráfico da parábola;
- Utilizar o gráfico no plano cartesiano para visualizar domínio e imagem da função;
- Relacionar o vértice da parábola com o valor mínimo ou máximo da função.

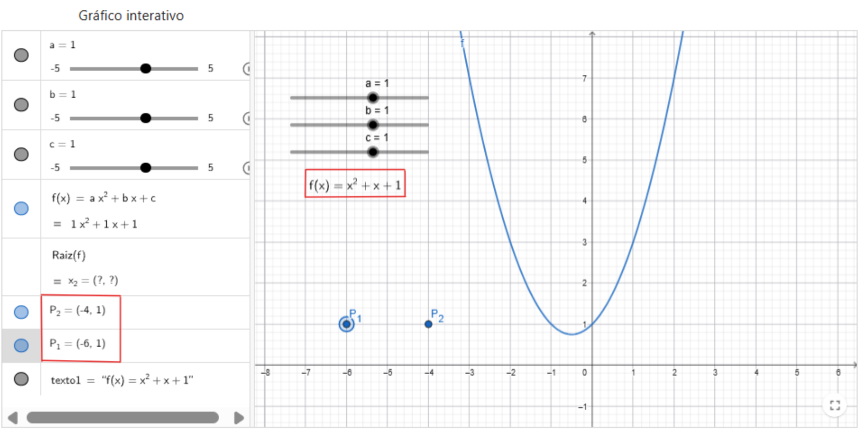
A metodologia é aplicada da seguinte forma:

- **Número de aulas:** Uma aula;

- **Conteúdo**: Valor da função quadrática em um ponto e Imagem e domínio de uma função quadrática;
- **Materiais:** Computadores, táblets ou celulares conectados à internet, juntamente com instrumentos de estudo como caneta, lápis, papel, entre outros;
- **Avaliação:** avaliação qualitativa em anotações feitas em diários pelo professor e avaliação quantitativa entregue pelo Google Classroom;
- **Disponível em:** https://www.geogebra.org/m/bpjdrs73#material/rfym5zcy https://www.geogebra.org/m/bpjdrs73#material/uenvvrnf

Os exercícios 1 e 2 da primeira etapa desta aula estão relacionados diretamente ao gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, nos quais os coeficientes podem ser alterados por controles deslizantes assim como é mostrado na Figura 70.

Figura 70 – Gráfico interativo para exercícios 1 e 2, da primeira etapa, da 9ª atividade do E-book

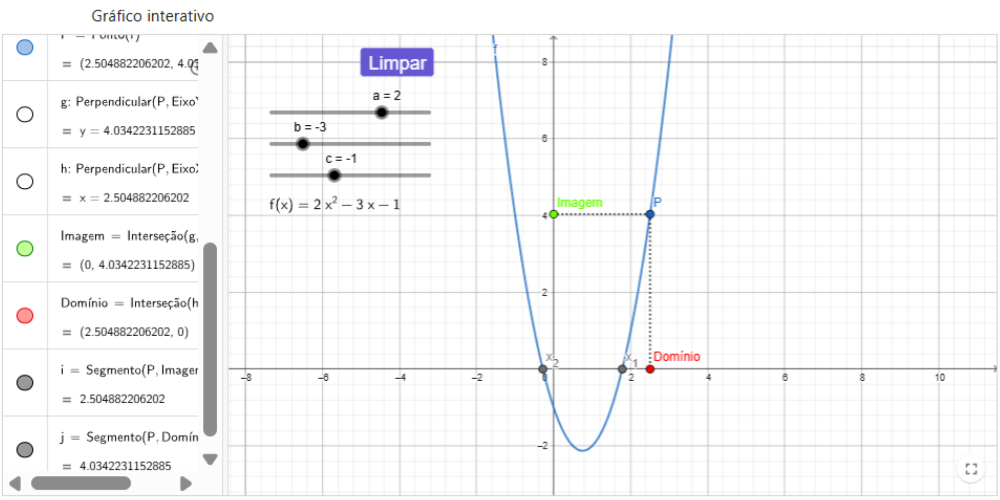


Fonte: (Autoria própria, 2026).

O professor deve orientar os estudantes modificar os coeficientes da função, logo após calcular manualmente as funções em determinados pontos e verificar os resultados seguindo através da modificação das coordenadas dos pontos P_1 e P_2, observando que eles devem pertencer ao gráfico da função quadrática descrita.

No exercício 1 da segunda etapa da atividade, o gráfico interativo mostra o uma função quadrática nos quais os coeficientes podem ser modificados por deslizantes. Outra importante característica deste gráfico é que podem ser vistos o domínio e imagem da função quadrática relacionada ao um ponto P pertencente a função, como é vista na Figura 71 a seguir.

Figura 71 – Gráfico interativo para exercício 1, da segunda etapa, da 9ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Os alunos devem modificar os coeficientes da função, fazendo-a variar seu formato e características e após isso mover o ponto P pelo gráfico da função quadrática de forma a descobrir que o domínio pertence aos números reais enquanto a imagem é um conjunto de valores que possuem ponto mínimo ou máximo dependente do valor do coeficiente “a” da função.

5.1.10 Atividade 10

Esta atividade é composta por cinco exercícios, tendo como objetivos:

- Substituir um valor numérico na variável x para calcular o valor da função;
- Compreender que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola no plano cartesiano;
- Identificar os principais elementos do gráfico: vértice, raízes (zeros da função), eixo de simetria e intercepto no Eixo y;

- Relacionar os coeficientes a, b e c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com as características do gráfico;
- Construir o gráfico da função quadrática no plano cartesiano a partir de pontos.

A metodologia é aplicada da seguinte forma:

- **Número de aulas:** Uma aula;
- **Conteúdo**: Gráfico de uma função Quadrática, zeros da função quadrática e estudo do sinal;
- **Materiais:** Computadores, táblets ou celulares conectados à internet, juntamente com instrumentos de estudo como caneta, lápis, papel, entre outros;
- **Avaliação:** avaliação qualitativa em anotações feitas em diários pelo professor e avaliação quantitativa entregue pelo Google Classroom;
- **Disponível em:** https://www.geogebra.org/m/bpjdrs73#material/rfym5zcy https://www.geogebra.org/m/samqg6eq

O exercício 1 mostra a função $f(x) = x^2 + 1$ e uma tabela que deve ser completada com os valores específicos mostrados para valores específicos de x.

Figura 72 – Tabela para o exercício 1, da primeira etapa, da 10ª atividade do E-book

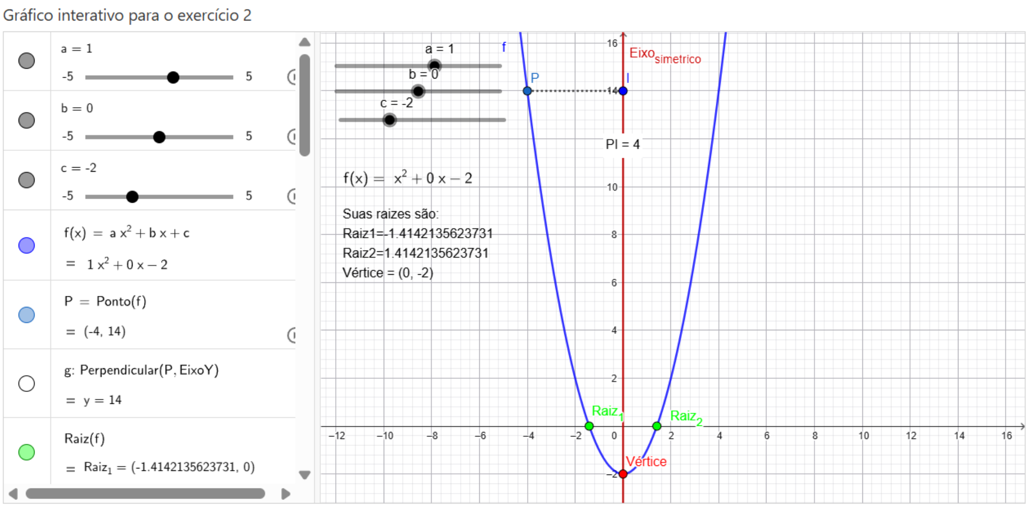
x	$f(x) = x^2 + 1$	Ponto
-3		A(,)
-2		B(,)
-1		C(,)
0		D(,)
1		E(,)
2		F(,)
3		G(,)

Fonte: (Autoria própria, 2026).

Após o preenchimento da tabela, o aluno deve perceber que eles não estão alinhados no formato de uma reta, mas sim de uma parábola. O professor deve pedir que os estudantes cliquem no ícone onde está a função $f(x) = x^2 + 1$, logo o gráfico desta função irá aparecer e mostrar que os pontos calculados anteriormente pertencem a ela e através do cálculo de outros pontos, não descritos na tabela, é possível formar o gráfico desta função.

No exercício 2 estão presentes alguns pontos característicos do gráfico, sendo eles o vértice, eixo de simetria, distância entre um ponto e o eixo de simetria e raízes. O professor deve orientar os alunos a modificarem, separadamente os coeficientes da função quadrática, e estudar o que ocorre com o gráfico da função e pontos descritos quando se faz cada alteração. A Figura 73 traz esse gráfico interativo.

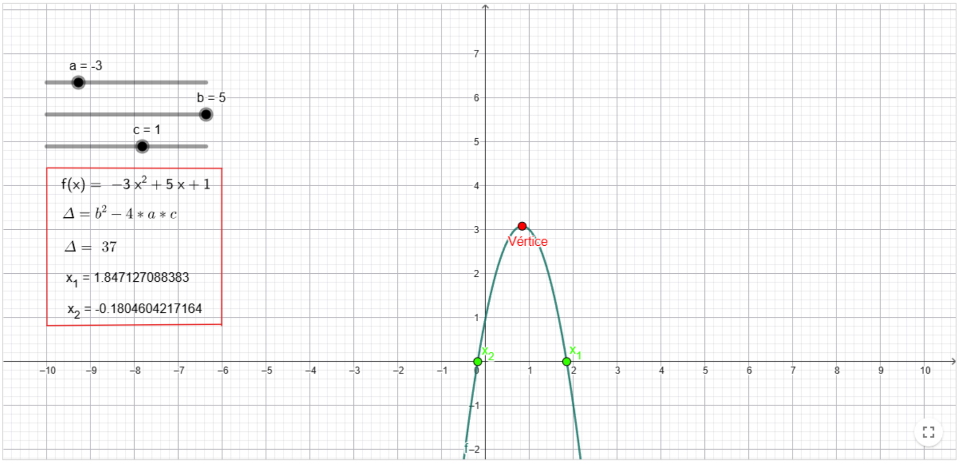
Figura 73 – Gráfico interativo para exercícios 2, da segunda etapa, da 10ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Para os exercícios 1 e 2 da segunda etapa é mostrado um gráfico interativo que mostra o vértice e as raízes da função. É imprescindível que o aluno varie os coeficientes da função e calcule manualmente o valor do discriminante da equação do 2° grau juntamente com as raízes e após isso conferir no gráfico suas respostas. A Figura 74 mostra como isso ocorre.

Figura 74 – Gráfico interativo para exercício 1, da segunda etapa, da 10ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

O professor deve também orientar que os alunos observem a influência do discriminante em relação à intersecção da função com o Eixo das abscissas, de forma que se ele for positivo, a função terá raízes reais enquanto que se negativo, o gráfico não toca no Eixo x, fazendo com que não haja raízes reais.

5.1.11 Atividade 11

Esta atividade é composta por cinco exercícios, tendo como objetivos:

- Compreender a forma canônica da função quadrática;
- Identificar o vértice da parábola a partir da forma canônica da função;
- Transformar a forma geral da função quadrática na forma canônica;
- Analisar a influência dos coeficientes na posição do vértice no plano cartesiano.

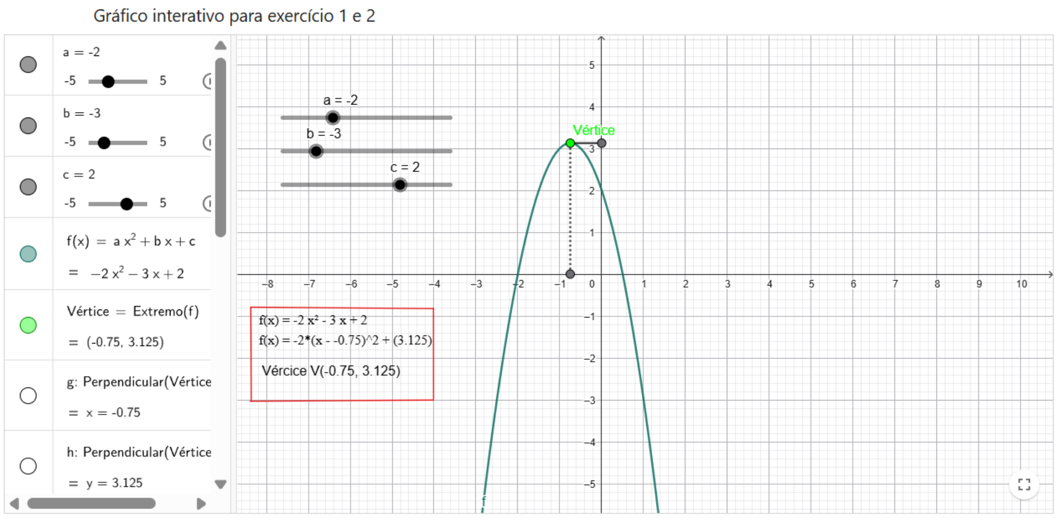
A metodologia é aplicada da seguinte forma:

- **Número de aulas:** Uma aula;
- **Conteúdo**: Forma canônica e vértice da função quadrática;

- **Materiais:** Computadores, táblets ou celulares conectados à internet, juntamente com instrumentos de estudo como caneta, lápis, papel, entre outros;
- **Avaliação:** avaliação qualitativa em anotações feitas em diários pelo professor e avaliação quantitativa entregue pelo Google Classroom;
- **Disponível em:** https://www.geogebra.org/m/du2m9cyf

O exercício 1 usa o gráfico interativo da Figura 75 para mostrar a função quadrática na forma canônica.

Figura 75 – Gráfico interativo para exercícios 1 da 11ª atividade do E-book

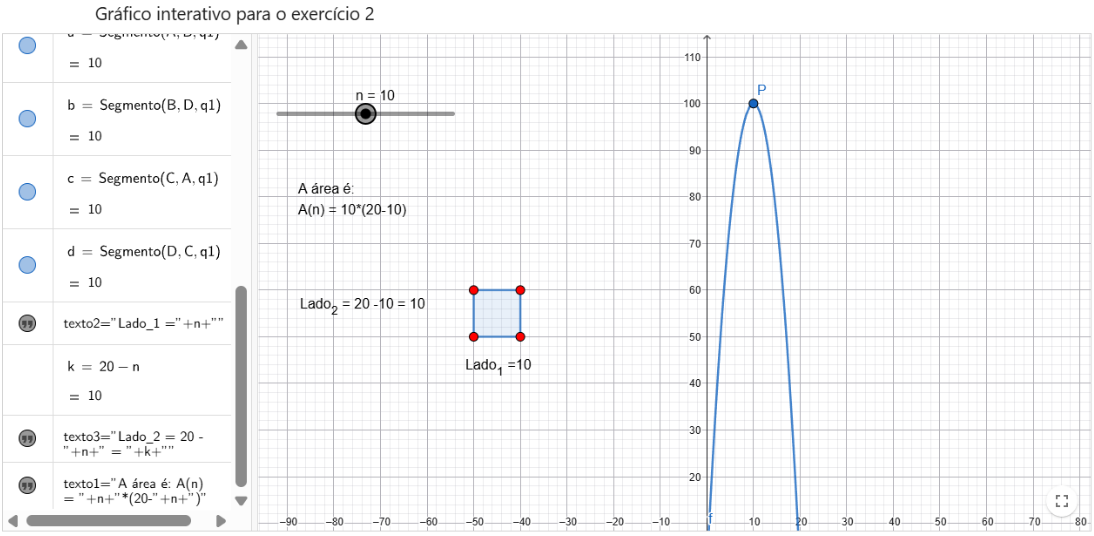


Fonte: (Autoria própria, 2026).

Nesta figura é importante notar que estão presentes a forma geral e a forma canônica da função e ao se alterar os valores dos coeficientes, muda-se também o ponto do vértice. É válido salientar que alterando os coeficientes “a” e “b” o vértice muda de coordenadas nos eixos das abscissas e ordenadas, enquanto que se o coeficiente “c” for alterado, apenas altera-se a ordenada do vértice.

O exercício 2 desta atividade é um exemplo de aplicação prática no cálculo de área máxima de um quadrilátero com lados “n” e “$n - 20$”. Ao se alterar o valor de “n” observa-se que a forma e área do quadrilátero também mudam. A Figura 76 mostra o gráfico interativo.

Figura 76 – Gráfico interativo para exercícios 2 da 11ª atividade do E-book

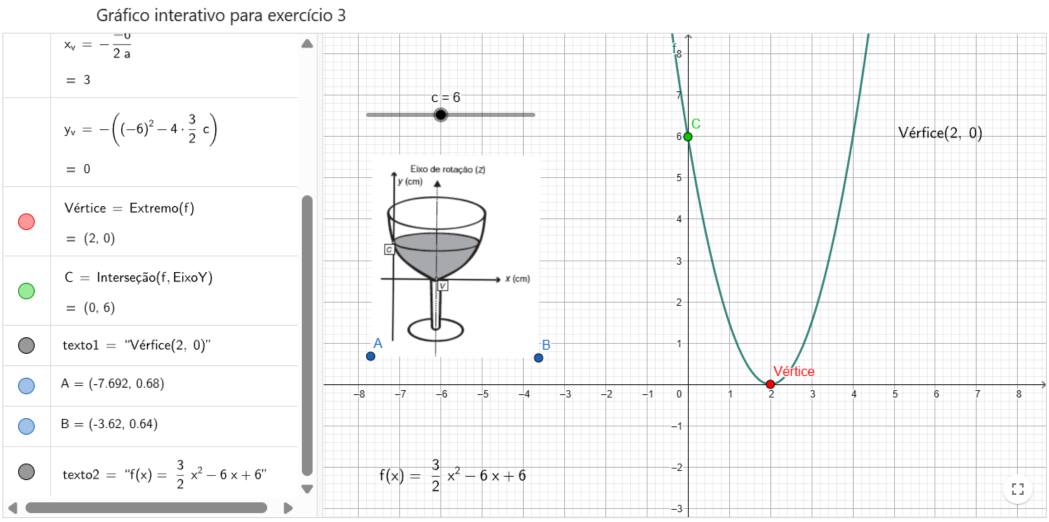


Fonte: (Autoria própria, 2026).

O professor deve mostrar aos alunos, por meio algébrico, que a área deste quadrilátero é justamente uma função quadrática com concavidade voltada para baixo e que o ponto onde ela é máxima é justamente na ordenada do vértice da função.

Por fim, tem-se o exercício 3, retirado da prova do ENEM 2013, onde está descrita uma função quadrática relacionada à lateral de uma taça de vidro. Pede-se o ponto "c" no qual a função toca o Eixo y. A Figura 77 mostra o gráfico interativo juntamente com a ilustração da taça.

Figura 77– Gráfico interativo para exercícios 3 da 11ª atividade do E-book



Fonte: (Autoria própria, 2026).

Neste exercício a função que descreve a lateral da taça é dada pela função de 2° grau $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + c$, cujo gráfico é uma parábola. O professor deve orientar os estudantes a calcular o valor de c de forma algébrica, de modo que a parábola toque o Eixo y apenas quando a ordenada do vértice for igual a zero. Para esse cálculo precisa-se apenas que se faça $y_v = 0$ e calcular o valor de c. No gráfico interativo é mostrado um único controle deslizante c que altera o valor do da intersecção do gráfico com o Eixo y. O aluno deve então modificar o valor desse deslizante até que o vértice toque no Eixo x para a resposta esteja completa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação desta pesquisa surgiu da motivação de perceber, por observações, que muitos estudantes não compreendiam os conceitos relacionados às funções, mesmo trabalhando-as com representações gráficas e algébricas. A partir deste contexto, foi criado um GeoGebra-Book, um livro digital, com explicações e atividades computacionais relacionando conceitos das funções polinomiais.

Ao longo de estudos e pesquisas foram feitas revisões referentes à importância do conceito de funções, juntamente com contribuições históricas para o desenvolvimento de estudos sobre o tema.

A partir da revisão bibliográfica realizada, foi possível compreender a importância da integração entre tecnologia, metodologias ativas e diferentes formas de representação matemática no processo de ensino e aprendizagem. Autores que discutem o ensino de matemática na cultura digital apontam que o uso de ferramentas tecnológicas pode favorecer a construção do conhecimento ao permitir maior interação, visualização e experimentação por parte dos estudantes.

Foi feita também uma análise envolvendo etapas para resolução de problemas, bem como a importância de se considerar diferentes formas de abordar conteúdos, através sistemas de representações semióticas.

Além disso, o material também procura servir como apoio ao professor, oferecendo orientações pedagógicas e sugestões de uso das atividades em sala de aula. Dessa forma, espera-se contribuir para a ampliação das possibilidades metodológicas no ensino de matemática, estimulando práticas que valorizem a participação ativa dos estudantes e o uso consciente das tecnologias digitais no ambiente educacional.

Por fim, espera-se que esta dissertação contribua para o fortalecimento de práticas pedagógicas inovadoras no ensino de matemática, incentivando o uso de tecnologias digitais como ferramentas que favoreçam a construção do conhecimento. Também se espera que o produto educacional desenvolvido possa inspirar outros professores a explorar novas possibilidades didáticas, promovendo um ensino mais interativo, investigativo e significativo para os estudantes do ensino básico.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N. O**. Fundamentos de circuitos elétricos***.* 5. ed. São Paulo: McGraw Hill, 2013. ISBN 978-8580551723

ALVES, Jose Max de Souza; ALMEIDA, José Joelson Pimentel de. Uma breve história do cálculo diferencial e integral: contribuições de *Newton e Leibniz*. In: **Anais IX CONEDU – Congresso Nacional de Educação**, Campina Grande: Realize Editora, 2023. ISSN 2358-8829.

BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde**. Explorando o conceito de função por meio da modelagem matemática**. V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Petrópolis, Rio de Janeiro, 28–31 out. 2012. 17 p. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT10/CC13244833004_A.pdf

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOTELHO, Leila; REZENDE, Wanderley Moura. Um breve histórico do conceito de função. **Caderno Dá-Licença**, Niterói: Instituto de Matemática, Universidade Federal Fluminense, v. 6, p. 65–75, dez. 2007.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. ISBN 978-8521206415.

CASTAÑON, Gustavo Arja. O que é construtivismo? **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, Série 4, v. 1, n. 2, p. 209-242, jul.-dez. 2015.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações***:* volume único. São Paulo: Ática, 2008.

DENARDI, Vânia Bolzan. Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática. In: **Anais do XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática** **–**EBRAPEM,_Pelotas,_2017._Disponível_em: https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/files/2018/10/gd04_vania_denardi.pdf

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**.** Tradução de Méricles Thadeu Moretti. Revemat **– Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. Disponível_em:http://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266

GÓES, Anderson Roges Teixeira; GÓES, Heliza Colaço. **Modelagem Matemática: Teoria, pesquisa e práticas pedagógicas.** 2.ed. rev. e atual. Curitiba: Editora Intersaberes, 2023.

GUIMARÃES, Sandra Lopes. **Construtivismo e aprendizagem.** Florianópolis: Publicações do Instituto Federal de Santa Catarina, 2010. 69 p. ISBN 978-85-62798-33-7.Disponível_em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/206266/2/Pos%C3%20Ciencias%20-%20Construtivismo%20e%20aprendizagem%20-%20MIOLO.pdf

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções**. São Paulo: Saraiva, 2013.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio**: volume 1. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2016. ISBN 978-85-8337-090-1.

LOPES, Lidiane Schimitz e FERREIRA, André Luis Andrejew. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática**. Revista Abakós**. Belo Horizonte (MG): Ed. PUC Minas, 2013.

MAGALHÃES, Lígia Karam Corrêa de; AZEVEDO, Leny Cristina Soares Souza. Formação continuada e suas implicações: entre a lei e o trabalho docente. Cadernos CEDES, Campinas, v. 35, n. 95, p. 15-36, jan./abr. 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ccedes/a/G7Fqdms45c6bxtK8XSF6tbq/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 18/03/2026. DOI: https://doi.org/10.1590/CC0101-32622015146769

MATTOS, Tuane Gomes de Oliveira Fuly de. O estudo das funções polinomiais no ensino médio. 2017. 112 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2017.

MOURA, Fabrício Marom de. **A resolução de problemas através do método de Pólya amparado por sistemas de ensino**. Rio de Janeiro: Atena Editora, 2023. DOI: 10.22533/at.ed.191230310.-Disponível_em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/738840/1/a-resolucao-de-problemas-atraves-do-metodo-de-polya-amparado-por-sistemas-de-ensino.pdf

NASCIMENTO, Ross Alves. Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções. 2007. 344 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife,_2007_Disponível_em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/4113/1/arquivo5517_1.pdf

PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POSSAMAI, Janaína Poffo; TERES, Silvana Leonora Lehmkuhl; AZEVEDO, Eliane Bihuna de; TALARICO, Lucas Ramiro. **Concepções de resolução de problemas e a BNCC**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional SC, 2021.

RACHELLI, Janice; MARTINS, Paulo Damião Christo. Máximos e mínimos de funções: um estudo com base em problemas históricos. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 8, n. 24, p. 65–83, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v8i24.5359.

RODRIGUES, Karin Débora; BARROS, Irany Gomes; FRAGUAS, Andreia Dutra. Tendências pedagógicas atuais. In: VIII Congresso Nacional de Educação – CONEDU, **2020**, [S.l.]. Anais… [S.l.]: Realize Editora, 2020. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2020/TRABALHO_EV140_MD1_SA3_ID2660_01092020121904.pdf

ROSSI, Mayara; *et al*. **Análise das tendências pedagógicas liberais no ensino e aprendizagem.** [S.l.]: Editora Científica, 2025. ISBN978-65-5360-885-6._Disponível_em: https://downloads.editoracientifica.com.br/articles/250118675.pdf

SILVA, Ana Paula da. Geometria com GeoGebra: uma proposta para o ensino de geometria no Ensino Médio. 2025. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2025.

SILVA, Romero Nunes da; MACARIO, Rilma Leda*.* As contribuições da formação continuada na prática pedagógica dos professores de matemática do ensino médio. **Anais–Congresso SENAC PE**, 2022. Disponível em: https://www.pe.senac.br/congresso/anais/2022/pdfs/As%20contribui%C3%A7%C3%B5es%20da%20forma%C3%A7%C3%A3o%20continuada%20na%20pr%C3%A1tica%20pedag%C3%B3gica%20dos%20professores%20de%20matem%C3%A1tica%20do%20ensino%20m%C3%A9dio.pdf

YOUSCHKEVITCH, A. P. — ***The concept of function up to the middle of the 19th century*** Publicação: *Archive for History of Exact Sciences*, Volume 16, Número 1, páginas 37–85, 1976

ZABALA, Antônio. **Como se faz uma sequência didática: organização e avaliação do trabalho pedagógico.** 5. ed. Porto Alegre: Mediação, 1998.

Zuffi, E. M. (2001). Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**, 8(9/10), 10–16. Recuperado de https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/1684.