INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

JOSÉ VICTOR BARBOSA JARDIM CASTRO

UMA PROPOSTA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO POR MEIO DA METODOLOGIA DE ENSINO EXPLORATÓRIO PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

SÃO PAULO – SP

2025

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática

JOSÉ VICTOR BARBOSA JARDIM CASTRO

UMA PROPOSTA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO POR MEIO DA METODOLOGIA DE ENSINO EXPLORATÓRIO PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática na Educação Básica

Orientador: Profa. Drª Valéria Ostete Jannis Luchetta

SÃO PAULO – SP
2025

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

c355p Castro, José Victor Barbosa Jardim
Uma proposta para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da metodologia de ensino exploratório para os anos finais do ensino fundamental / José Victor Barbosa Jardim Castro. São Paulo: [s.n.], 2025.
177 f.

Orientadora: Valéria Ostete Jannis Luchetta

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2025.

1. Matemática. 2. Educação. 3. Álgebra. 4. Pensamento Algébrico. 5. Ensino Exploratório. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
Campus São Paulo

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

UMA PROPOSTA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO POR MEIO DA METODOLOGIA DE ENSINO EXPLORATÓRIO PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Autor: José Victor Barbosa Jardim Castro

Orientadora: Profa. Drª Valéria Ostete Jannis Luchetta

A banca examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta dissertação:

Profa. Drª Valéria Ostete Jannis Luchetta
IFSP – Campus Cubatão
Orientadora e Presidente da Banca

Prof. Drª Gabriela Cotrim de Moraes
IFSP – Campus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Marcio Vieira de Almeida
IME – USP
Membro da Banca

São Paulo, 03 de outubro de 2025

AGRADECIMENTOS

À minha mãe e ao meu falecido pai, cujo amor, dedicação e empenho tornaram possível a realização deste percurso acadêmico.

À Prof.ª Dr.ª Valéria Ostete Jannis Luchetta, minha orientadora, pela paciência, generosidade e rigor, que guiaram cada etapa da elaboração desta dissertação com dedicação exemplar.

Aos amigos Elisa, Gabriel, Vinicius, Patrícia e Ana Luísa, pelo constante incentivo e presença que iluminaram os momentos desafiadores desta jornada.

Aos docentes do Instituto Federal de São Paulo (IFSP) vinculados ao PROFMAT, especialmente aos professores Valéria, Márcio, Marco e Emiliano, pela partilha generosa de saberes que enriqueceu profundamente minha formação.

Aos colegas do PROFMAT, em particular Sigridi, Luccas, Alex, Inah, Ruth e Fábio, pelo convívio fraterno e pelas trocas de experiências que tornaram o caminho mais leve e significativo.

À psicóloga Luana Carmo, pelo acompanhamento atento e orientador, que favoreceu o equilíbrio necessário ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas da EMEFM Vereador Antônio Sampaio e da EMEF Professor Roberto Patrício, pelo apoio institucional constante ao longo das diferentes fases do mestrado.

Aos professores participantes da primeira Jornada Pedagógica da Diretoria Regional de Educação – Freguesia/Brasilândia, pela colaboração e pelo diálogo construtivo que subsidiaram as reflexões desta dissertação.

Aos participantes das 16.ª e 17.ª edições da Semana de Educação, Ciência e Tecnologia do Campus São Paulo (SEDCITEC), pelo interesse e pelas contribuições que ampliaram e aprofundaram minha pesquisa.

E, sobretudo, aos meus estudantes, pela aprendizagem contínua e pelo entusiasmo que renovam, a cada dia, o sentido de ensinar e de aprender.

"O diálogo é a confirmação conjunta do professor e dos alunos no ato comum de conhecer e reconhecer o objeto de estudo. Então, em vez de transferir o conhecimento estaticamente, como se fosse pose fixa do professor, o diálogo requer uma aproximação dinâmica na direção do objeto".

Madalena Freire (1983)

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo investigar a construção do pensamento algébrico nos anos finais do ensino fundamental, utilizando a metodologia de ensino exploratório. Inicialmente, são apresentados os referenciais teóricos sobre a álgebra e seu ensino, o desenvolvimento do pensamento algébrico e a metodologia de ensino exploratório. Em seguida, aborda-se a proposta curricular da Rede Municipal de Educação de São Paulo, com ênfase em sua perspectiva para o ensino de álgebra. Nesse contexto, foram analisadas atividades voltadas ao 6º e 7º anos do ensino fundamental, extraídas do “Caderno da Cidade” – material pedagógico desenvolvido pela Prefeitura de São Paulo para apoiar o trabalho docente em sala de aula. Com base nos resultados dessa análise, foi elaborado um produto educacional: um conjunto de quatro tarefas investigativas, destinado a professores que desejam fomentar o pensamento algébrico por meio de uma abordagem exploratória.

Palavras-chave: álgebra; pensamento algébrico; ensino exploratório.

ABSTRACT

This dissertation aims to investigate the development of algebraic thinking in the final years of elementary school, using the exploratory teaching methodology. Initially, the theoretical frameworks on algebra and its teaching, the development of algebraic thinking, and the exploratory teaching methodology are presented. Next, the curricular proposal of the Municipal Public Education Network of São Paulo is discussed, with emphasis on its perspective on algebra teaching. In this context, activities aimed at the 6th and 7th grades of elementary school were analyzed, drawn from the “Caderno da Cidade” – a pedagogical material developed by the São Paulo City Hall to support teachers’ classroom practices. Based on the results of this analysis, an educational product was designed: a set of four investigative tasks intended for teachers who wish to foster algebraic thinking through an exploratory approach.

Keywords: algebra; algebraic thinking; exploratory teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Iniciamos esta dissertação com o poema "A flor e a náusea" de Carlos Drummond de Andrade:

A flor e a náusea

Preso à minha classe e a algumas roupas,
vou de branco pela rua cinzenta.
Melancolias, mercadorias espreitam-me.
Devo seguir até o enjoo?
Posso, sem armas, revoltar-me?

Olhos sujos no relógio da torre:
Não, o tempo não chegou de completa justiça.
O tempo é ainda de fezes, maus poemas, alucinações e espera.
O tempo pobre, o poeta pobre
fundem-se no mesmo impasse.

Em vão me tento explicar, os muros são surdos.
Sob a pele das palavras há cifras e códigos.
O sol consola os doentes e não os renova.
As coisas. Que tristes são as coisas, consideradas sem ênfase.

Vomitar esse tédio sobre a cidade.
Quarenta anos e nenhum problema
resolvido, sequer colocado.
Nenhuma carta escrita nem recebida.
Todos os homens voltam para casa.
Estão menos livres mas levam jornais
e soletram o mundo, sabendo que o perdem.

Crimes da terra, como perdoá-los?
Tomei parte em muitos, outros escondi.
Alguns achei belos, foram publicados.
Crimes suaves, que ajudam a viver.
Ração diária de erro, distribuída em casa.
Os ferozes padeiros do mal.
Os ferozes leiteiros do mal.

Pôr fogo em tudo, inclusive em mim.
Ao menino de 1918 chamavam anarquista.

> Porém meu ódio é o melhor de mim.
> Com ele me salvo
> e dou a poucos uma esperança mínima.
>
> Uma flor nasceu na rua!
> Passem de longe, bondes, ônibus, rio de aço do tráfego.
> Uma flor ainda desbotada
> ilude a polícia, rompe o asfalto.
> Façam completo silêncio, paralisem os negócios,
> garanto que uma flor nasceu.
>
> Sua cor não se percebe.
> Suas pétalas não se abrem.
> Seu nome não está nos livros.
> É feia. Mas é realmente uma flor.
>
> Sento-me no chão da capital do país às cinco horas da tarde
> e lentamente passo a mão nessa forma insegura.
> Do lado das montanhas, nuvens maciças avolumam-se.
> Pequenos pontos brancos movem-se no mar, galinhas em pânico.
> É feia. Mas é uma flor. Furou o asfalto, o tédio, o nojo e o ódio.
>
> (Andrade, 1945, p. 15-17).

Construir uma dissertação sobre o ensino de Matemática no Brasil é, de certa forma, um exercício de resistência em meio ao desencanto. Assim como o eu lírico de Drummond caminha pelas ruas cinzentas, enfrentando a náusea das injustiças e impasses, o pesquisador enfrenta as dificuldades históricas e estruturais de um sistema educacional marcado por desigualdades e limitações. Ensinar Matemática, nesse contexto, também carrega esse sentimento: é caminhar contra a corrente, insistir na potência do conhecimento mesmo diante do desânimo e da precariedade.

O cenário do ensino de matemática no Brasil é repleto de desafios que parecem surdos às explicações e esforços dos educadores. E assim como o poeta questiona se é possível revoltar-se sem armas, o educador e o pesquisador frequentemente se perguntam como transformar a realidade sem os recursos adequados e o suporte necessário.

No entanto, no coração desse trabalho árduo, nasce a flor. A flor de Drummond, que rompe o asfalto e o tédio, é a metáfora perfeita para a possibilidade de transformação dentro do ensino de Matemática. Mesmo em meio ao cinza das dificuldades, o surgimento de novas práticas pedagógicas, **como o ensino exploratório e o desenvolvimento do pensamento algébrico**, representam essa flor que insiste em brotar.

O pesquisador que se senta para escrever sobre esses temas diante das complexidades impostas pela realidade é como o poeta que contempla a flor. Reconhece suas imperfeições e fragilidades – "é feia, mas é uma flor" –, mas vê nela a possibilidade de romper com o conformismo e o tédio que aprisionam o sistema educacional. A flor da inovação educacional, por menor que seja, traz a esperança de que algo novo e significativo pode nascer e se fortalecer, mesmo no ambiente mais adverso.

Assim como a flor inspira o poeta a enxergar a beleza no inesperado, a construção de uma dissertação sobre o ensino de Matemática carrega em si o potencial de inspirar educadores a persistirem, encontrarem novos caminhos e acreditarem na possibilidade de furar o asfalto das dificuldades e desigualdades. Essa flor simboliza a busca por uma educação mais justa, significativa e transformadora – um esforço que, mesmo pequeno, é uma vitória contra "o tédio, o nojo e o ódio".

O ensino de Matemática no Brasil vai mal

O ensino de Matemática no Brasil enfrenta uma crise histórica, amplamente reconhecida tanto por especialistas quanto pela sociedade em geral. Não é raro ouvir relatos sobre as dificuldades dessa disciplina escolar, seja na própria escola ou fora dela. Essa percepção é frequentemente reforçada pelos resultados de avaliações educacionais, como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb). Manchetes como as seguintes evidenciam a gravidade da situação:

- Brasil está entre os 17 países com pior nota em matemática da OCDE (Poder 360, 2023).
- Resultados do Pisa reforçam gargalo no ensino de matemática no Brasil (Agência Brasil , 2023).

- Entre os alunos mais pobres, só 3% têm conhecimentos adequados de matemática no Brasil, mostra Pisa (G1, 2024).
- Alunos da rede pública terminam o ensino médio sem saber porcentagem (Poder360, 2024).

De acordo com o Instituto Interdisciplinaridade e Evidências no Debate Educacional (Iede, 2023), os principais indicadores nacionais e internacionais apontam para os seguintes problemas:

- Há uma dificuldade histórica com o ensino e aprendizagem de Matemática no Brasil.
- Estudantes brasileiros de 15-16 anos estão, em média, três anos atrás em relação ao aprendizado de Matemática dos estudantes de países desenvolvidos.
- É raro que estudantes de baixo nível socioeconômico alcancem um aprendizado adequado em Matemática.
- Apenas um número muito pequeno de escolas que atendem estudantes de baixa renda consegue obter resultados expressivos em Matemática.
- As desigualdades no aprendizado de Matemática não se limitam ao nível socioeconômico, mas também estão relacionadas à cor e raça dos estudantes.

Essas dificuldades evidenciam a necessidade de se repensar o ensino de Matemática e, para isso, deve-se considerar os desafios do século XXI para a educação de modo geral. Como argumenta o historiador e filósofo Harari (2018), vivemos em uma era de rápidas transformações tecnológicas e sociais, onde a abundância de informação requer habilidades para interpretar dados, discernir o que é relevante e compreender um mundo saturado por informações contraditórias.

Além disso, Harari (2018) destaca que o futuro será marcado por mudanças aceleradas, tornando muitas habilidades técnicas rapidamente ultrapassadas. Por isso, ele reforça que especialistas têm defendido que a educação enfatize os "quatro Cs": *Critical Thinking* (Pensamento Crítico), *Creativity* (Criatividade), *Collaboration* (Colaboração) e *Communication* (Comunicação). A capacidade de se adaptar, aprender continuamente e lidar com a incerteza será essencial para preparar os estudantes para o mundo de 2050, que será profundamente diferente do atual.

Em meio a esse olhar sobre a educação e a crise no ensino da matemática, mas que também toma contornos também gerais, destaca-se os anos finais do ensino fundamental (6° a 9° ano). Segundo LEPES USP (2023), é nos anos finais do ensino fundamental que começam os maiores problemas da educação pública brasileira e isso se justifica por um "esquecimento" dos responsáveis por políticas públicas e até de muitos pesquisadores da área educacional.

Nesse cenário, é possível inferir que o ensino de Matemática geral, mas sobretudo para a etapa de anos finais do ensino fundamental, deve ir além de conteúdos técnicos e contribuir para formar indivíduos resilientes, críticos e criativos, capazes de enfrentar os desafios de um futuro incerto. Essa demanda, no entanto, esbarra em uma visão predominante que enxerga a matemática como uma disciplina estática, focada em resultados precisos e procedimentos infalíveis, com pouco espaço para criatividade e investigação, conforme argumenta D'Ambrosio (1992). Tal percepção absolutista limita o potencial transformador da matemática, restringindo-a a uma ferramenta técnica, quando, na verdade, ela poderia contribuir para o desenvolvimento integral dos estudantes. D'Ambrosio propõe que a matemática seja apresentada como um campo dinâmico e humano, que avança por meio da resolução de problemas, da interação social e da negociação de significados.

Para que essa transformação ocorra, é fundamental repensar as práticas pedagógicas, possibilitando aos estudantes uma vivência da matemática como uma disciplina viva e criativa. Essa mudança exige superar a abordagem tradicional, na qual, segundo D'Ambrosio (1989), "os professores mostram a matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido" (p. 15), negligenciando a oportunidade de proporcionar aos estudantes experiências de criação e exploração. Esse modelo conservador reforça a crença de que aprender matemática consiste em acumular fórmulas e algoritmos, tornando o aprendizado passivo e desinteressante.

Diante desse cenário, torna-se imprescindível conceber a matemática como um processo ativo e investigativo, em que o estudante ocupa uma posição central na construção de seu conhecimento. Conforme D'Ambrosio (1989), estratégias como a resolução de problemas, a modelagem matemática e o uso de jogos são caminhos promissores para revitalizar o ensino da matemática, incentivando a curiosidade, a criatividade e a autonomia. Nesse contexto, o papel do professor deve ser o de um mediador, capaz de criar um ambiente propício à exploração, experimentação e descoberta, conectando a matemática às experiências concretas e significativas dos estudantes.

A história do ensino de Matemática no Brasil

Para avançar nesse debate, é crucial também considerar o histórico do ensino de Matemática no Brasil. Conforme São Paulo (1992), durante o período colonial brasileiro, os jesuítas estabeleceram uma rede de colégios voltada aos jovens da elite. O ensino inicial abordava habilidades básicas como leitura, escrita e aritmética, avançando posteriormente para Humanidades e História Sacra, com currículos inspirados nos colégios jesuítas da Europa.

Delfiol (2022) ressalta que nas escolas jesuíticas, o ensino seguia o *Ratio Studiorum*, plano pedagógico criado pela Companhia de Jesus em 1599, que organizava o currículo e os métodos de ensino. Nesse modelo, a Matemática aparecia apenas no segundo ano do curso de Filosofia, com uma hora diária de aulas voltadas à leitura dos Elementos de Euclides, acompanhadas de noções de Geografia e tratados sobre a esfera. O foco era a memorização e a repetição, o que limitava a aprendizagem à reprodução de regras e procedimentos.

Após a expulsão dos jesuítas em 1759, Delfiol (2022) destaca que o ensino de Matemática ganhou novo sentido prático, principalmente ligado às necessidades da Coroa Portuguesa. A Matemática passou a servir às demandas do Exército e da Marinha, especialmente na formação de pilotos náuticos e engenheiros militares. Essa mudança culminou na criação da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, resultado da Reforma Pombalina de 1772, que estabeleceu um curso independente de quatro anos, com disciplinas como Álgebra, Geometria, Hidráulica e Astronomia. A formação dos primeiros doutores brasileiros em Matemática em Coimbra marcou a transição da Matemática como parte da Filosofia para uma área com aplicação técnica e científica, ainda que voltada prioritariamente aos interesses coloniais.

Esses doutores, segundo Delfiol (2022), atuavam em missões técnicas e políticas para a Coroa, com destaque para figuras como Antônio Pires da Silva Pontes Leme, Francisco José de Lacerda e Almeida, Manuel Jacinto Nogueira da Gama e Francisco Vilela Barbosa, que utilizaram seus conhecimentos em demarcações territoriais, navegação e cartografia. Embora importantes, essas iniciativas não se traduziram em avanços significativos para a educação matemática na colônia, já que a formação continuava restrita à elite e à lógica utilitária do serviço à metrópole.

De acordo com São Paulo (1992), a vinda da família real em 1808 trouxe avanços, com a criação de academias militares, faculdades de medicina e escolas de Química e Arte, embora o ensino básico para crianças e adolescentes continuasse negligenciado. O período imperial trouxe preocupações educacionais que, embora discutidas, resultaram em avanços concretos limitados. Em 1834, foi fundado o Colégio Pedro II, cuja estrutura curricular se tornou referência para colégios particulares, predominantemente religiosos, voltados para as classes abastadas. Nesse contexto, disciplinas como aritmética, álgebra, geometria e trigonometria eram tratadas como matérias autônomas, e surgiram os primeiros textos didáticos inspirados em obras francesas do final do século XVIII.

Segundo São Paulo (1992), o período republicano até 1930 foi marcado por esforços para democratizar a educação, com a tentativa de oferecer ensino primário gratuito e não religioso à população. Apesar do aumento no número de matrículas – de 14 crianças por mil habitantes em 1871 para 50 por mil em 1930 –, cerca de 60% das crianças em idade escolar permaneciam analfabetas, e mais da metade dos professores do ensino primário eram leigos. O ensino de Matemática manteve características herdadas do Império, com aritmética e álgebra baseadas em regras e fórmulas pragmáticas e uma geometria dedutiva, valorizada pelas elites como instrumento de "ensinar a pensar". Contudo, essas práticas muitas vezes se limitavam à memorização e não desenvolviam a compreensão conceitual da maioria dos estudantes.

Pierro (2022) destaca que, desde o final do século XIX, já havia experiências educativas que buscavam superar esse ensino puramente formal. No Rio de Janeiro, por exemplo, os trabalhos manuais foram introduzidos no currículo das escolas primárias como forma de ensinar geometria a partir da prática: crianças construíam objetos de madeira e papelão para compreender conceitos como linhas perpendiculares, ângulos e figuras planas. Entretanto, havia distinções de gênero: enquanto meninos realizavam construções geométricas, as meninas aprendiam "trabalhos de agulha", voltados à costura e ao bordado, reforçando papéis sociais tradicionais.

Pierro (2022) também analisa as tensões entre educadores inovadores e professores tradicionais. Autores como Ezequiel Benigno de Vasconcellos Júnior, com Trabalho manual: Cartonagem escolar (1897), defendiam o aprendizado geométrico por meio da prática e da criatividade, enquanto outros, como Olavo Freire da Silva, valorizavam o ensino formal, baseado na abstração e na repetição.

A Revolução de 1930 trouxe mudanças significativas, como a criação do Ministério da Educação e a reforma liderada por Francisco Campos, que estruturou o ensino em ciclos e consolidou a unificação de aritmética, álgebra e geometria sob o nome de “Matemática”. Pierro (2022) ressalta o papel de Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II, que defendeu essa integração e a necessidade de uma formação docente que contemplasse tanto o domínio do conteúdo quanto os aspectos pedagógicos.

Conforme São Paulo (1992), após 1960, o maior destaque foi a chegada do movimento da Matemática Moderna, que propôs uma abordagem mais conceitual, influenciada por correntes internacionais. Contudo, Pierro (2022) aponta que os debates entre matemáticos e educadores matemáticos continuaram intensos, refletindo diferentes visões sobre o papel da Matemática na escola: de um lado, a ênfase na abstração e na formalização; de outro, a valorização da prática, da resolução de problemas e da contextualização.

Com o tempo, os limites da proposta moderna tornaram-se evidentes, e o movimento perdeu força, embora sua influência tenha persistido até a década de 1970. A partir dos anos 1980, novas perspectivas começaram a surgir, com base em pesquisas em Psicologia Cognitiva, e passaram a valorizar métodos como resolução de problemas, modelagem e etnomatemática. Essas abordagens marcaram uma nova fase na Educação Matemática Brasileira, na qual se busca maior sentido, participação e contextualização no ensino da disciplina.

Esse percurso histórico permite compreender os desafios enfrentados e justifica a formulação dos objetivos desta dissertação, que se insere nesse movimento contemporâneo de busca por uma prática mais significativa e reflexiva no ensino de Matemática.

Sobre esta dissertação

Como parte fundamental da Matemática, a Álgebra reflete as dificuldades e desigualdades que marcam a educação básica no Brasil. No entanto, sua relevância para o desenvolvimento do raciocínio lógico e abstrato exige uma abordagem que vá além da simples aplicação de regras e procedimentos algébricos. Este trabalho justifica-se pela necessidade de enfrentar os desafios históricos do ensino de Matemática, com ênfase na Álgebra, propondo alternativas que valorizem a construção de sentido e a participação ativa dos estudantes.

O objetivo geral da pesquisa é elaborar tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico de forma exploratória nos anos finais do Ensino Fundamental. Para isso, os objetivos específicos são: compreender os conceitos de pensamento algébrico e ensino exploratório; identificar e analisar tarefas voltadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, presentes em materiais da Rede Municipal de São Paulo, avaliando também suas potencialidades para o ensino exploratório; e, por fim, criar propostas de tarefas que favoreçam essa abordagem em sala de aula.

A metodologia adotada consiste em uma pesquisa bibliográfica, centrada em estudos que discutem o pensamento algébrico e as práticas de ensino exploratório. Serão analisados artigos acadêmicos, livros, dissertações e documentos oficiais, com ênfase em autores e pesquisas de referência na área. Essa fundamentação teórica orientará a análise crítica de atividades propostas pela Prefeitura de São Paulo, servindo de base para a elaboração do produto educacional: um conjunto de tarefas destinadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do ensino exploratório, oferecendo ao professor instrumentos didáticos contextualizados e alinhados com as necessidades do ensino contemporâneo.

A dissertação está organizada em cinco capítulos. No Capítulo 1, será apresentada uma discussão sobre o que é Álgebra e o que se entende por pensamento algébrico. O Capítulo 2 trata do ensino exploratório, destacando seus fundamentos e contribuições para o ensino de Matemática. No Capítulo 3, abordam-se as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e da Rede Municipal de São Paulo, além da análise de atividades extraídas de seus materiais oficiais, no que se refere ao ensino da Álgebra. No Capítulo 4, é apresentado de forma objetiva as tarefas desenvolvidas como produto final desta dissertação. O Capítulo 5 apresenta as considerações finais do trabalho. Como complemento, o produto final da pesquisa será apresentado como anexo, contendo as tarefas elaboradas com foco no desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de uma abordagem exploratória.

1. ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO

Neste capítulo serão apresentadas as discussões em torno do pensamento algébrico, bem como será explicitada a abordagem sobre o tema a ser utilizada nesta dissertação. O objetivo é subsidiar as discussões que ocorrerão nos capítulos seguintes.

1.1 O que é álgebra?

Antes do início da discussão sobre pensamento algébrico, cabe um questionamento: *o que é álgebra?.* Fazendo uma pesquisa na rede social *Instagram* utilizando a palavra-chave “algebra”, chegamos em muitos vídeos explicando manipulação de expressões algébricas, sobretudo no campo de operações com polinômios e propriedades das potências, conforme o exemplo a seguir.

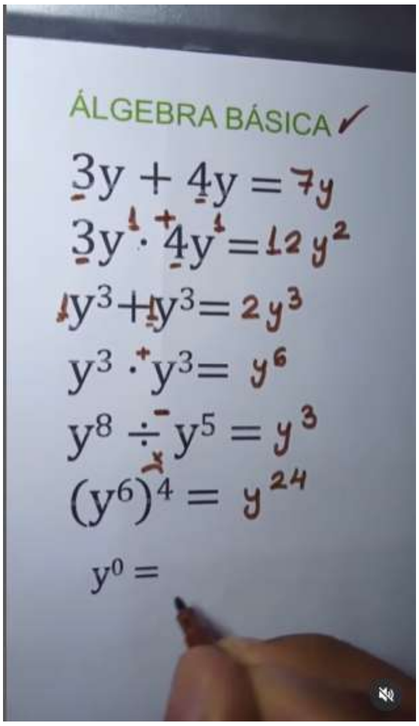


Figura 1: Imagem de vídeo do *Instagram* sobre Álgebra.

Fonte: Álgebra básica - @matemáticadopi, 2025[1]

[1] Disponível em: http://bit.ly/45WHHoa. Acesso em: 30 Jul. 2025.

Segundo Teixeira Júnior e Silveira (2019), a resposta para a pergunta “o que é álgebra?”, seguindo uma perspectiva wittgensteiniana[2], dependerá de quem a responde, uma vez que uma pessoa que nunca tenha lidado com a palavra “álgebra” não conseguirá responder a pergunta, enquanto que um estudante do ensino fundamental, um estudante do ensino médio ou um professor de matemática possuem diferentes experiências com aquilo que lhe foi e é apresentado como álgebra e, portanto, possuem diferentes respostas para essa mesma pergunta.

Em Lima, Bianchini e Lima (2023) é possível localizar uma análise mais aprofundada sobre as diferentes concepções da Álgebra. Esses mesmos autores destacam as principais dimensões observadas nessas concepções (Lima; Bianchini; Lima, p. 83-85, 2023):

- **Dimensão Cognitiva:** Constitui-se de uma forte ferramenta cognitiva para recuperar ideias e conceitos, estabelecer e compreender relações, generalizações, etc. e abstrações de maneira geral.
- **Dimensão Linguística:** Constitui-se de uma linguagem para resolver problemas por meio de cálculos.
- **Dimensão Procedimental:** Constitui-se de um procedimento para resolver determinados tipos de equações e problemas, incluindo os relacionados à Aritmética.
- **Dimensão Relacional:** Constitui-se de um estudo das relações entre as grandezas, os procedimentos e as técnicas de resolução de problemas.
- **Dimensão Generalizadora:** Constitui-se em uma ação matemática voltada para a generalização, como na Aritmética Generalizada, independente dos instrumentos utilizados para representar essa generalidade.
- **Dimensão Instrumental:** Constitui-se como um instrumento para estudo e desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento.
- **Dimensão Integradora:** Constitui-se como as estruturas gerais comuns de toda a Matemática.

Além dessas dimensões, podemos considerar a Álgebra sob a dimensão epistemológica e histórica, retornando nosso olhar para a Álgebra no ensino básico. De todas as perspectivas dentro do espaço escolar, a do professor é a que mais

[2] Ludwig Wittgenstein (1889-1951).

interessa esta dissertação, uma vez que, conforme Lima e Bianchini (2021), a forma como os docentes praticam o ensino da Álgebra está fortemente ligada às suas respectivas concepções sobre a Álgebra. Tendo em vista a construção de uma concepção sobre a Álgebra e seu ensino para um professor de matemática do ensino básico, a seguir será apresentada uma visão geral sobre a Álgebra enquanto conhecimento desenvolvido ao longo da história da humanidade e também uma discussão preliminar sobre seu ensino, a ser aprofundada no decorrer desta dissertação.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), as origens da Álgebra remontam-se para a Antiguidade - no Egito, na Babilônia, na China e na Índia. Esse início é marcado pela formalização e sistematização de técnicas de resolução de problemas. Um exemplo relevante é o Papiro de Ahmes, também conhecido como Papiro de Rhind, que remonta a aproximadamente 1650 a.E.C (Pitzer e Fávero, 2017).

O Papiro de Ahmes apresenta 75 problemas que abrangem desde operações básicas até conceitos avançados de geometria e álgebra. Entre os problemas registrados, destacam-se a resolução de equações lineares e o uso de frações unitárias, uma característica particular do sistema numérico egípcio. (Pitzer e Fávero, 2017).

Outro aspecto significativo do Papiro de Ahmes é o uso do método conhecido como 'falsa posição' para resolver equações, precursor de técnicas algébricas modernas. Esse método consistia em assumir um valor inicial para a solução de um problema e ajustá-lo iterativamente até chegar ao resultado correto. Essa abordagem evidencia a sofisticação do raciocínio matemático egípcio e sua capacidade de sistematizar processos matemáticos (Pitzer e Fávero, 2017).

Posteriormente ao período da antiguidade, conforme descrito por Ponte, Branco e Matos (2009), a evolução da Álgebra levou à definição formal do conceito de equação, consolidando-se como uma área de estudo dedicada à resolução de equações. Entre os principais nomes associados a essa evolução está Diofanto de Alexandria (200 – 284), frequentemente considerado o fundador da Álgebra.

Conforme Roque (2012), Diofanto introduziu métodos inovadores para resolver equações e sistemas de equações, utilizando uma notação "sincopada", que representava as quantidades desconhecidas e suas potências por meio de abreviações. Isso marcou um avanço significativo em relação às práticas anteriores, facilitando a manipulação dos elementos do problema. Por exemplo, na obra

Aritmética, Diofanto utilizava símbolos como ζ para a quantidade desconhecida e Δ^Y para seu quadrado, permitindo uma escrita mais compacta e ágil.

Entretanto, o título de "pai da álgebra" atribuído a Diofanto é frequentemente questionado. Roque (2012) argumenta que tal designação pode ser enganosa, pois a obra de Diofanto não possui o grau de abstração e generalização característico da álgebra abstrata. Suas notações eram abreviações e não símbolos no sentido moderno, uma distinção crucial. Como aponta Roque,

> [...] símbolos não são somente abreviações ou notações empregadas para facilitar a prática de procedimentos de cálculo e resolução de problemas; o simbolismo algébrico é um tipo de representação que conduz a abstrações que não estavam presentes na *Aritmética* de Diofanto. Para caracterizar o pensamento algébrico não basta associá-lo ao uso de símbolos, e menos ainda ao uso de abreviações (p. 234).

Além disso, conforme Roque (2012), autores como Nesselman descrevem os métodos de Diofanto como uma "álgebra sincopada", isto é, uma transição entre a álgebra retórica, totalmente escrita em linguagem natural, e a álgebra simbólica moderna. No entanto, a autora enfatiza que essa classificação, ainda comum, ignora a especificidade do contexto histórico e metodológico de Diofanto. Por outro lado, há quem reconheça em sua obra um precursor da álgebra, devido à introdução de conceitos e notações que influenciaram matemáticos posteriores.

Ainda segundo Ponte, Branco e Matos (2009), é no trabalho de Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi, mais conhecido por Al-Khwarizmi (790 - 840) que o termo “Álgebra” surge para nomear a operação de *transposição de termos,* tendo como objetivo a resolução de equações. A álgebra de Al-Khwarizmi, desenvolvida no século IX, marca um momento fundamental na história da matemática, sendo considerada por muitos como o ponto de partida para a consolidação da álgebra como disciplina. Diferentemente da abordagem de Diofanto, que era mais restrita e centrada em notações sincopadas, Al-Khwarizmi desenvolveu uma álgebra sistemática, voltada para a solução de equações lineares e quadráticas.

Roque (2012) enfatiza que Al-Khwarizmi introduziu uma estrutura metódica para a resolução de problemas matemáticos, apresentando uma organização lógica que permitia classificar as equações e resolvê-las de maneira padronizada. Sua obra, *Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala*, descreve processos como **al-jabr**, que significa restauração, e **al-muqabala**, que se refere ao balanceamento. Esses procedimentos contribuíram para a sistematização de um conjunto de técnicas que se tornou uma base sólida para o desenvolvimento posterior da álgebra.

Como exemplo, seja a equação em termos atuais $2x^2 + 22 = 100 - 20x$. Para que os coeficientes sejam positivos, é preciso al-jabr (restaurar) a equação em relação a retirada de 20x, de modo que ela ficará $2x^2 + 22 + 20x = 100$. Depois, é preciso al-muqabala (balancear) a equação retirando 22 nos dois membros da igualdade, resultando em $2x^2 + 20x = 78$. Dividindo essa equação por 2, chegamos em $x^2 + 10x = 39$. Para esta equação (do tipo $ax^2 + bx = c$), utiliza-se o seguinte procedimento para descobrir sua resolução: adiciona-se 25 em ambos os lados (para formar um quadrado), transformando a equação em $x^2 + 10x + 25 = 64$. Isso permite reescrevê-la como $(x+5)^2 = 64$, de onde conclui-se que a raiz do quadrado é $x + 5 = 8$. A solução, então, é $x = 3$. Atualmente, considera-se que o valor de x também pode ser igual a -13 no caso desta equação, mas no contexto da criação do procedimento descrito, esta raiz não era sequer cogitada, uma vez que Al-Khwarizmi utilizava técnicas geométricas para justificar e validar seus métodos algébricos e não há medidas geométricas negativas.

Para Ponte, Branco e Matos (2009), é no século XVI que François Viète (1540 - 1603) dá início à chamada Álgebra simbólica. O conceito de álgebra simbólica refere-se a uma transformação fundamental na maneira como os problemas matemáticos eram formulados e resolvidos. Antes de Viète, predominava uma álgebra retórica, na qual as operações e relações matemáticas eram descritas em texto corrido, sem o uso sistemático de símbolos.

Viète revolucionou essa abordagem ao introduzir a ideia de utilizar letras para representar tanto grandezas desconhecidas quanto constantes. Essa notação permitiu um maior grau de generalidade e abstração nos cálculos matemáticos. O texto de Roque (2012) destaca que Viète descrevia sua abordagem como uma "arte analítica", com o objetivo de renovar práticas algébricas que ele considerava contaminadas por tradições bárbaras. Nesse mesmo sentido, Corrêa e Roque (2008) ressaltam que a Álgebra simbólica de Viète proporcionou um novo *status* à matemática ao legitimar procedimentos analíticos e estabelecer fundamentos para o desenvolvimento de métodos gerais e universais.

A álgebra simbólica de Viète estabeleceu bases para a álgebra moderna ao sistematizar o uso de notações para manipular equações de forma abstrata. Ele introduziu símbolos que podiam representar números e parâmetros de forma universal, permitindo expressar relações matemáticas sem depender de valores específicos. Isso facilitou a resolução de equações e o desenvolvimento de métodos gerais para abordá-las.

Ainda segundo o texto de Roque (2012) e de Corrêa e Roque (2008), essa transformação deve ser entendida no contexto mais amplo da história da matemática, onde a álgebra começa a assumir um papel central no desenvolvimento do pensamento matemático ocidental, especialmente durante o Renascimento. Esse período foi marcado por uma retomada crítica das tradições matemáticas gregas e árabes, proporcionando um ambiente fértil para as inovações trazidas por Viète.

Ao mesmo tempo que foi desenvolvido o conhecimento de equações algébricas, também ocorreu o desenvolvimento do conceito de função, que quando abordada com conceitos de infinitésimo geraram uma outra área da Matemática, separada da Álgebra: a Análise infinitesimal. É no século XIX que, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), a Álgebra encontra uma evolução profunda com a demonstração do Teorema fundamental da Álgebra e com a demonstração de que não existem métodos de resoluções de equações de grau maior que 4. E outros matemáticos passaram a se preocupar com as estruturas abstratas como grupo, espaço vetorial, anel e corpo, temas que irão fazer parte da chamada Álgebra abstrata.

Para fins didáticos, será apresentada abaixo um quadro com o desenvolvimento histórico da álgebra e seus principais estudiosos ou locais com base em Ponte, Branco e Matos (2009):

Quadro 1 - Percurso histórico da Álgebra

O quê?	Onde?	Quem?
Formalização e sistematização de técnicas de resolução de problemas.	Egito, Babilônia, China e Índia.	-
Álgebra como área de estudo da resolução de equações.	Alexandria	Diophantus of Alexandria (200 – 284)

Surge o termo “Álgebra”	Bagdá	Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (c. 790 – c. 840)
Álgebra simbólica	França	François Viète (1540 –1603)
Resolução da equação geral de 3º grau.	Itália	Scipione del Ferro (1465 – 1526) Niccolò Tartaglia (1500 – 1557) Girolamo Cardano (1501 – 1576)
Resolução da equação geral de 4º grau.	Itália	Lodovico Ferrari (1522 – 1565)
Teorema fundamental da Álgebra	França, Alemanha e Suíça	Albert Girard (1595 – 1632) Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) Leonhard Euler (1707– 1783) Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783) Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) Jean Robert Argand (c. 1768 – c.1822) Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)
Prova da impossibilidade de encontrar uma solução geral para equações de grau superior a 4.	Noruega	Niels Henrik Abel (1802 – 1832)
Formulação de condições necessárias e suficientes para que uma equação de grau superior ao 4º tenha solução por métodos algébricos; Surgimento da “Álgebra abstrata” com apresentação da estrutura de grupo.	França	Évariste Galois (1811 –1832)

Fonte: Adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009).

Também de forma a resumir o desenvolvimento da Álgebra ao longo da história da humanidade, Coelho e Aguiar (2018) apresentam três estágios:

1. **Resolvendo problemas de equações de primeiro e segundo grau (números relacionados às medidas geométricas);**

Inicialmente, a resolução de equações de 1º e 2º graus estava ligada a problemas geométricos e apresentada de forma retórica, refletindo-se inclusive na terminologia como "raízes quadradas" e "equações cúbicas". Nesse contexto, os números eram compreendidos com base em aspectos geométricos, o que dificultava a aceitação de conceitos como o zero e os números negativos, frequentemente vistos como "soluções falsas", mesmo em obras importantes como *Ars Magna*, de Cardano. A dificuldade de operar com negativos persistia por falta de uma estrutura conceitual adequada, o que ainda hoje se reflete nas dificuldades dos estudantes. Por outro lado, matemáticos indianos, como Brahmagupta, já haviam desenvolvido noções operacionais para o zero e números negativos desde o século VII, embora esse entendimento só tenha chegado parcialmente à Europa. A aceitação plena desses conceitos só ocorreria com a formalização dos conjuntos numéricos e das operações matemáticas (Coelho e Aguiar, 2018).

2. **Busca de regras e padrões (propriedades das operações);**

O segundo estágio do desenvolvimento da Álgebra é marcado pela busca de padrões e regras comuns entre diferentes estruturas matemáticas. Mesmo conjuntos com naturezas distintas, como o dos números inteiros e o das funções bijetoras definidas em um domínio finito, podem apresentar propriedades semelhantes quando submetidos a operações específicas. Por exemplo, a operação de adição nos inteiros e a composição de funções bijetoras compartilham propriedades como associatividade, existência de elemento neutro e de elementos inversos, características que definem o conceito de grupo algébrico. Embora apresentem diferenças — como a comutatividade presente na adição, mas ausente na composição de funções —, esses exemplos demonstram como a Álgebra se desenvolveu a partir da identificação de padrões estruturais entre conjuntos distintos. A clareza desses padrões foi potencializada pelo surgimento de uma linguagem matemática própria, cuja consolidação, iniciada no século XVI, foi essencial para o avanço da área (Coelho e Aguiar, 2018).

3. **Álgebra como área de pesquisa.**

A consolidação da Álgebra como campo autônomo do conhecimento ocorreu com o avanço da simbologia matemática e a busca por justificativas que não dependessem exclusivamente da geometria. A substituição da linguagem retórica por uma notação simbólica permitiu maior clareza e precisão, impulsionando a formalização dos conceitos algébricos. Esse processo culminou no final do século XIX, com a definição rigorosa dos conjuntos numéricos e de suas propriedades, o que possibilitou uma abordagem mais abstrata e sistemática. Foi nesse contexto que a Álgebra se estabeleceu definitivamente como uma área de pesquisa (Coelho e Aguiar, 2018).

Se tratando das notações algébricas, Coelho e Aguiar (2018) apresentam três estágios:

1. **Notação Retórica:** Toda a expressão algébrica era escrita por extenso, em linguagem natural, sem uso de símbolos específicos. Exemplo adaptado: "O número que adicionado com cinco resulta em doze".
2. **Notação Sincopada:** Introdução de abreviações e símbolos parciais misturados à linguagem escrita. Foi um estágio intermediário, com uso de letras ou sinais para representar operações e incógnitas, mas sem a padronização atual. Exemplo: N m 5 i 12, onde **N** é o número, **m** significa adição e **i** representa o igual.
3. **Notação Simbólica:** Uso completo de símbolos matemáticos padronizados para representar operações, relações e incógnitas. Esse estágio só se estabilizou a partir do século XVI e é a base da linguagem algébrica moderna. Exemplo: $x + 5 = 12$.

Segundo Coelho e Aguiar (2018), a história da álgebra revela uma progressão que parte de problemas concretos e avança em direção a níveis cada vez mais abstratos, um processo que se reflete no ensino da disciplina. Desde os métodos empíricos utilizados em civilizações antigas até a formalização de conceitos no século XIX, a álgebra evoluiu com o objetivo de identificar padrões, estabelecer propriedades e desenvolver uma linguagem simbólica adequada às suas necessidades. No entanto, os autores argumentam que o ensino contemporâneo frequentemente enfatiza técnicas operatórias, negligenciando o desenvolvimento do pensamento algébrico, que é essencial para a formação lógica e abstrata dos estudantes.

Essa perspectiva complementa as análises de Ponte, Branco e Matos (2009), que apontam para a relevância de conectar o aprendizado da álgebra à sua história e evolução. Ao explorar as origens e o desenvolvimento dos conceitos algébricos, é possível não apenas enriquecer o ensino, mas também oferecer aos estudantes uma visão mais ampla e integrada da matemática, promovendo sua aplicação em situações do cotidiano e na resolução de problemas abstratos.

Aprofundando os conhecimentos relacionados ao ensino da álgebra, com base em Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), é possível identificar três grandes concepções que marcaram o ensino de Álgebra em diferentes períodos históricos. Abaixo, cada uma delas é sintetizada em um tópico:

1. Transformismo Algébrico (séculos XIX e primeira metade do século XX);

Essa concepção dominou o ensino de Álgebra por um longo período, baseando-se na aplicação mecânica de regras e propriedades para a obtenção de expressões algébricas equivalentes. O foco era a manipulação simbólica, muitas vezes descontextualizada, com o objetivo de resolver problemas formais. O processo era essencialmente técnico e considerado suficiente para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, ainda que estes fossem geralmente artificiais e distantes da realidade dos alunos (Fiorentini, Miguel e Miorim, 1993).

2. Justificativa das passagens algébricas por meio das propriedades estruturais das operações (Movimento da Matemática Moderna);

A partir da década de 1950, o Movimento da Matemática Moderna propôs uma nova abordagem, onde a Álgebra deveria fundamentar todo o ensino matemático. As transformações algébricas passaram a ser justificadas com base nas propriedades estruturais dos conjuntos numéricos e das operações. A intenção era levar o aluno a reconhecer tais estruturas em diferentes contextos, favorecendo um entendimento mais profundo e abstrato da Álgebra. Essa mudança envolveu uma reestruturação do currículo, priorizando inicialmente o estudo dos conjuntos, sentenças, equações e somente depois introduzindo expressões algébricas e funções (Fiorentini, Miguel e Miorim, 1993).

3. Junção das fases anteriores com justificativa geométrica/visual;

Em uma tentativa de integrar as duas concepções anteriores, surgiu uma abordagem que mescla o valor instrumental do transformismo algébrico com a justificativa lógica da Matemática Moderna, utilizando, no entanto, recursos geométricos e visuais como forma de mediação. O uso de construções visuais — como balanças, gangorras e analogias espaciais — serve para justificar identidades algébricas e facilitar a compreensão dos alunos. Essa etapa é vista como introdutória, preparando o caminho para o pensamento algébrico simbólico. No entanto, segundo os autores, a transição do visual para o simbólico permanece como um dos maiores desafios no ensino da Álgebra (Fiorentini, Miguel e Miorim, 1993).

Coelho e Aguiar (2018) argumentam que essas três concepções apresentadas reforçam o ensino da álgebra como apenas manipulação de regras algébricas. Atualmente, destacam os autores, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reconhece a importância da álgebra desde os anos iniciais do ensino fundamental, com o objetivo de **desenvolver o pensamento algébrico**. Contudo, na prática, o foco predominante em regras e operações tem gerado lacunas no aprendizado conceitual. Coelho e Aguiar (2018) defendem que o ensino da álgebra deve priorizar a identificação de padrões, a generalização e a exploração de ideias que promovam uma compreensão profunda dos conceitos, indo além da mera resolução de exercícios.

1.2 Pensamento algébrico

No artigo intitulado "Pensamento algébrico: em busca de uma definição", os pesquisadores Almeida e Santos (2020) apresentam uma comparação de três definições de pensamento algébrico: a de Rômulo Lins, a de James Kaput e a de Luis Radford.

Segundo os autores, a abordagem de Rômulo Lins enfatiza a construção de significado para os objetos algébricos por meio do "Modelo Teórico dos Campos Semânticos" (MTCS). Para Lins, o pensamento algébrico se manifesta quando o aluno compreende as relações representadas por equações e variáveis, não apenas de forma operacional, mas como objetos com significado em diferentes contextos (Almeida, Santos, 2020, *apud* Lins, 1992, 1994b).

James Kaput, por sua vez, caracteriza o pensamento algébrico como uma atividade humana que emerge da generalização de padrões e relações matemáticas. Para ele, essa forma de pensar transcende casos específicos, utilizando uma linguagem progressivamente mais formal para expressar essas generalizações. Blanton e Kaput (2005) complementam essa perspectiva ao afirmar que o pensamento algébrico se revela por meio da generalização de ideias matemáticas, estabelecendo relações por meio de discursos argumentativos e expressando-as de forma formal e adequada à idade dos alunos.

Por fim, Luis Radford adota uma visão cultural e semiótica, descrevendo o pensamento algébrico como uma forma particular de reflexão matemática que não ocorre naturalmente, mas é refinada ao longo do tempo. Radford identifica três elementos inter-relacionados que o caracterizam: o senso de indeterminação, a manipulação analítica de objetos desconhecidos e o uso de sistemas simbólicos.

O primeiro elemento refere-se à percepção de que a álgebra lida com quantidades indeterminadas, como incógnitas e variáveis, em contraste com a aritmética, que trabalha com valores determinados. É essa indeterminação que permite ao sujeito operar e substituir variáveis umas pelas outras, reconhecendo que é possível raciocinar sobre o que ainda não tem valor definido. O segundo elemento, a manipulação analítica de objetos desconhecidos, diz respeito à capacidade de tratar o desconhecido como se fosse conhecido, realizando transformações e operações válidas segundo as propriedades gerais das operações aritméticas — ou seja, manipular símbolos de modo analítico, como na resolução de equações, aproximando-se da noção de analiticidade proposta por Lins. Já o terceiro elemento envolve o uso de sistemas simbólicos, isto é, o modo particular como o pensamento algébrico se expressa por meio de sinais — sejam eles alfanuméricos, gestuais, gráficos ou linguísticos — que dão forma e comunicabilidade às ideias matemáticas. Radford ressalta que, embora a escrita simbólica moderna da álgebra seja seu sistema semiótico por excelência, outras formas de representação, como gestos, palavras ou diagramas, também podem expressar raciocínios genuinamente algébricos, pois o essencial está no modo de significar e não apenas no tipo de símbolo utilizado. Assim, esses três elementos compõem um todo integrado que articula a percepção do indeterminado, o raciocínio analítico e a mediação simbólica, constituindo a base cultural e semiótica do pensamento algébrico segundo Radford. (Almeida,Santos, 2020, *apud* Radford, 2006; 2011b).

Almeida e Santos (2020) concluem que, apesar das diferenças nas abordagens, há consenso sobre a importância de características como generalização, modelagem, operação com o desconhecido e construção de significado no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Observa-se que não há um consenso consolidado sobre o significado de pensamento algébrico. No entanto, tanto a Base Nacional Comum Curricular

(BNCC) quanto o Currículo e as Orientações da Rede Municipal de São Paulo — documentos analisados nesta dissertação — não apresentam uma definição própria ou explícita desse conceito.

Diante dessa lacuna, esta dissertação adota a concepção de pensamento algébrico proposta por James Kaput, por ser a abordagem assumida pelos referenciais teóricos que fundamentam este trabalho. Além disso, essa perspectiva mostra-se adequada à proposta de desenvolver o pensamento algébrico por meio do ensino exploratório, uma vez que valoriza a construção de significados, a generalização de padrões e a articulação entre representações — elementos centrais na abordagem aqui defendida.

Kaput (1999, 2008) defende que o ensino de Álgebra deve ocorrer desde os anos iniciais da escolarização, com uma progressiva introdução do formalismo, em consonância com o desenvolvimento dos estudantes. Embora suas reflexões estejam voltadas ao contexto dos Estados Unidos, essa realidade também se reflete no Brasil, onde, historicamente, a Álgebra tem sido apresentada apenas nos anos finais do Ensino Fundamental.

Kaput (2008) observa que o ensino básico de Matemática era tradicionalmente estruturado em seis a oito anos dedicados à Aritmética, sendo a Álgebra introduzida apenas posteriormente. Essa prática — em que a Álgebra surge como uma etapa final, após um longo percurso centrado nos números — leva muitos estudantes a concluírem que, se não se saem bem na Álgebra tradicional, então não obtiveram sucesso em Matemática como um todo.

Conforme Lima, Bianchini e Lima (2023), no contexto brasileiro, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2017 e publicada em 2018, representa uma mudança importante em relação à tradição descrita por Kaput (2008), na qual a Álgebra era introduzida após anos dedicados à Aritmética. Ainda que o termo *Early Algebra* não apareça explicitamente no documento, é possível identificar sua influência na ênfase dada ao desenvolvimento precoce do pensamento algébrico. No Capítulo 3 desta dissertação, será apresentado um trecho da BNCC que corrobora com essa afirmação. Essa abordagem propõe não um ensino tardio e apartado da Álgebra, mas sim a introdução gradual de ideias algébricas desde os primeiros anos escolares, alinhando-se ao que defende o movimento internacional.

Segundo Kieran et al. (2016, *apud* Lima, Bianchini e Lima, 2023), o movimento *Early Algebra* promove uma nova perspectiva sobre o ensino de Álgebra, ao priorizar processos de raciocínio matemático e representações, especialmente adequados para as crianças nos primeiros anos escolares. Entre os principais focos dessa proposta estão a generalização a partir de padrões, a compreensão das propriedades das operações e das estruturas numéricas, a representação de relações entre quantidades e a introdução à notação alfanumérica.

Nos últimos anos, a presença da "Álgebra nos anos iniciais" — algo que era impensável para boa parte da geração de professores atualmente em sala de aula — tem sido objeto de investigação em diversos trabalhos. No âmbito do programa ao qual esta dissertação está vinculada, o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), citamos a seguir alguns desses estudos:

Medeiros (2021) propõe, com base em autoras selecionadas, reflexões sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais, em consonância com as orientações da BNCC. A partir de um levantamento bibliográfico, o trabalho destaca a importância de metodologias que valorizem a resolução de problemas envolvendo padrões e relações, o uso de estratégias pessoais e a sistematização de generalizações, como defendem pesquisadoras que vêm contribuindo para essa temática, entre elas Carolyn Kieran, Bárbara Brizuela e Ana Paula Canavarro .

Campeão (2020) apresenta uma proposta para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais por meio do uso do aplicativo Algebrizar, aliado à estratégia de Investigação Matemática, em conformidade com a BNCC. O estudo destaca como o aplicativo, em formato de jogo, pode apoiar professores na promoção de habilidades algébricas, incentivando a generalização, a percepção de regularidades e a formulação de conjecturas, por meio de atividades lúdicas, diálogos e momentos de reflexão mediados pelo professor.

Pitombeira (2020) discute o potencial das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no ensino da Álgebra nos anos iniciais, destacando o uso do *Kahoot* como ferramenta alinhada às orientações da BNCC. O autor defende que, ao introduzir a Álgebra de forma gradual e lúdica, é possível promover a generalização da Aritmética, favorecendo o desenvolvimento cognitivo, social e emocional dos estudantes, bem como a construção do pensamento algébrico por meio da análise e representação de situações matemáticas.

Silva (2021) apresenta uma proposta de curso de formação continuada para professores dos anos iniciais, com foco na Álgebra, em consonância com as diretrizes da BNCC. A dissertação destaca a introdução da Álgebra como unidade temática própria nos primeiros anos e propõe um curso híbrido fundamentado em referenciais teóricos alinhados à BNCC. O curso visa promover reflexões e trocas de experiências sobre o ensino da Álgebra, por meio de atividades investigativas, incentivando uma postura docente reflexiva e contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Vogt (2022) analisa como a unidade temática de Álgebra vem sendo apresentada nos anos iniciais, com base na BNCC de 2018 e em documentos de referência. O estudo discute as concepções dos professores sobre o ensino de Álgebra nessa etapa e propõe a criação de um curso de formação continuada, ofertado por meio de um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA). Os resultados apontam para as potencialidades do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação na formação docente para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Para finalizarmos este capítulo, é importante retomarmos a visão geral de pensamento algébrico. Van de Walle (2009) destaca que, segundo Kaput, o pensamento algébrico pode ser compreendido em cinco formas distintas: (1) a generalização da aritmética e de padrões presentes em toda a matemática; (2) o uso significativo de simbolismo; (3) o estudo da estrutura no sistema de numeração; (4) o estudo de padrões e funções; e (5) o processo de modelagem matemática, que integra as quatro anteriores. Essa concepção ampla reforça a importância de desenvolver o pensamento algébrico desde os anos iniciais, não como antecipação do formalismo da álgebra tradicional, mas como uma forma de promover raciocínio generalizador e conexões entre diferentes representações matemáticas. Além disso, em Van de Walle (2009) é possível encontrar diversos exemplos de atividades que incorporam essa abordagem, oferecendo subsídios concretos para a prática docente alinhada ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

O produto final desta dissertação tem como objetivo apresentar algumas tarefas voltadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do Ensino Fundamental, especificamente no 6º e 7º anos. Essas tarefas foram planejadas para favorecer a construção de generalizações, o reconhecimento de padrões e a articulação de representações matemáticas, conforme discutido ao longo deste capítulo. A proposta metodológica adotada para a elaboração dessas tarefas baseia-se no ensino exploratório, que será detalhado no capítulo seguinte.

2. ENSINO EXPLORATÓRIO

No livro Práticas Profissionais dos Professores de Matemática, João Pedro da Ponte (2014) observa que as orientações curriculares têm progressivamente valorizado uma abordagem pedagógica conhecida como ensino exploratório (em inglês: *inquiry-based teaching*). Essa proposta rompe com o modelo tradicional, centrado na exposição de conteúdos e na resolução repetitiva de exercícios, ao propor um ensino que envolve os alunos em tarefas desafiadoras, capazes de mobilizar seus conhecimentos prévios e favorecer a elaboração de soluções originais. Nesse contexto, o professor assume um papel ativo na mediação da aprendizagem, promovendo discussões matemáticas que contribuem para a construção coletiva de significados. Trata-se de uma abordagem que valoriza o raciocínio, a comunicação e a resolução de problemas, favorecendo uma aprendizagem mais profunda e significativa.

Antes de aprofundarmos a discussão sobre o ensino exploratório, é essencial destacar o papel das tarefas matemáticas nesse processo e compreender a diferença entre os conceitos de tarefa e atividade, fundamentais para a reflexão sobre a prática docente e a aprendizagem dos alunos.

2.1 Tarefas ou Atividades?

Conforme Ponte (2014):

> [..] as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior. Pelo seu lado, uma atividade corresponde a uma ou mais tarefas realizadas no quadro de uma certa situação. É pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende mas é importante ter presente que esta depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor. (Ponte, p.16-17, 2014).

De forma ilustrativa, podemos pensar que se um professor pretende que seus estudantes de 6º ano exerçam a **atividade** de resolver problemas relacionados às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais, então esse mesmo profissional elaborará **tarefas** que promovam-a, sempre levando em conta que a atividade ocorrerá pela junção da tarefa (ou tarefas) e a forma como se desenvolve a aula de matemática do professor.

Ainda sobre as tarefas, Ponte (2014) ressalta orientações do *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (1991/1994), em que as tarefas devem ser baseadas

> (i) em Matemática correta e significativa;
> (ii) no conhecimento das compreensões, interesses e experiências dos alunos, e
> (iii) no conhecimento das diversas maneiras como diferentes alunos aprendem Matemática (Ponte, p. 17, 2014).

E Ponte (2014) complementa que, ainda segundo NCTM (1991/1994), as tarefas devem

> - envolver os alunos em atividade intelectuais;
> - desenvolver as compreensões e capacidades matemáticas dos alunos;
> - estimular os alunos a fazer ligações e a desenvolver um quadro coerente de ideias matemáticas;
> - exigir a formulação e resolução de problemas e o raciocínio matemático;
> - promover a comunicação acerca da Matemática;
> - representar a Matemática como uma atividade humana em constante desenvolvimento;
> - mostrar sensibilidade apoiar-se nas experiências e disposições dos alunos;
> - promover o desenvolvimento da disposição de todos os alunos para fazer Matemática. (Ponte, p. 17, 2014).

As tarefas que compõem o produto educacional, organizadas para os 6º e 7º anos, serão apresentadas no ANEXO I e seguirão as orientações do NCTM (1991/1994), destacadas por Ponte (2014), ao priorizarem Matemática correta e significativa, a consideração dos conhecimentos e experiências dos estudantes e a promoção do raciocínio, da comunicação e da resolução de problemas no ensino de Álgebra.

2.2 Os tipos de tarefas

No contexto do ensino e da aprendizagem da Matemática, a seleção e a organização das tarefas propostas aos estudantes pelo professor assumem um papel importante na construção do conhecimento. Segundo Ponte (2014), as tarefas podem ser analisadas a partir de duas dimensões fundamentais: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio refere-se à percepção da dificuldade da tarefa pelos alunos, podendo variar de reduzido a elevado. Já o grau de estrutura distingue-se entre tarefas abertas — que apresentam maior indeterminação — e tarefas fechadas, nas quais os dados e os objetivos estão claramente definidos.

A partir do cruzamento dessas duas dimensões, Ponte (2014) categoriza as tarefas em quatro tipos: **exercícios**, caracterizados por serem fechados e de desafio reduzido; **problemas**, que, apesar de também serem fechados, possuem desafio elevado; **explorações**, que são abertas, porém acessíveis à maioria dos alunos; e **investigações**, tarefas abertas e com elevado grau de desafio. Essa classificação (Figura 2), no entanto, não deve ser vista de forma rígida, pois, como ressalta o autor, a mesma tarefa pode assumir diferentes características dependendo do contexto, dos conhecimentos prévios e das experiências dos alunos.

Figura 2: Classificação de tarefas.
Fonte: Ponte (2014).

Além das dimensões de desafio e estrutura, Ponte (2014) destaca outros aspectos relevantes na elaboração e na escolha das tarefas, como a duração e o contexto. As tarefas de longa duração, como projetos, possibilitam aprendizagens profundas, mas exigem atenção redobrada do professor para evitar que os estudantes se dispersem. O contexto, por sua vez, serve para distinguir as tarefas voltadas a um contexto da realidade e as tarefas formuladas em termos matemáticos, apenas.

Ponte (2014) ressalta que, além de saber diversificar as tarefas para alcançar os objetivos de aprendizagem, o professor precisa organizar certo percurso de tarefas coerente, o que exige escolhas intencionais e bem fundamentadas. No entanto, para que esse percurso realmente promova a aprendizagem, é fundamental considerar não apenas os tipos de tarefas, mas também os processos cognitivos envolvidos na sua realização.

2.3 As representações matemáticas

No contexto até agora apresentado, destaca-se o papel central das representações matemáticas, que são os meios pelos quais os alunos acessam, constroem e dão significado aos conceitos. Como afirma o próprio autor, o sucesso na resolução de uma tarefa está diretamente relacionado à maneira como os alunos interpretam as representações presentes no enunciado, bem como à forma como elaboram e compreendem suas próprias representações ao longo do processo. Por isso, compreender a função das representações não é apenas um aspecto acessório, mas um elemento essencial no desenvolvimento da competência matemática.

A definição de representação, segundo Goldin (2008, p. 180, *apud* Ponte, 2014), é “uma configuração que representa algo, de alguma forma”. Isso significa que, ao pensar matematicamente, o indivíduo mobiliza representações diversas, que podem assumir naturezas distintas, como linguística, simbólica, visual ou concreta. Essa diversidade de representações é fundamental, uma vez que os objetos matemáticos são abstrações que não existem fisicamente no mundo real e, portanto, só podem ser acessados e compreendidos por meio de representações construídas cultural e socialmente.

Bruner (1999, *apud* Ponte, 2014) classifica as representações em três categorias: ativa, icônica e simbólica. A representação ativa se manifesta pela ação direta sobre objetos ou materiais, sendo fundamental nos estágios iniciais da aprendizagem. A representação icônica baseia-se em imagens, esquemas, diagramas ou qualquer forma de organização sensorial que sintetize uma ideia. Já a representação simbólica se apoia na linguagem, nos códigos e nos signos abstratos — como os números, as expressões algébricas e os sistemas formais —, que são predominantes no discurso matemático. Essas três formas de representação são complementares e desempenham papéis importantes em diferentes momentos do desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Em Matemática, a relação entre objeto e representação não é biunívoca, ou seja, um objeto matemático pode ser representado de diferentes maneiras, a depender do contexto, da linguagem e do sistema de notação adotado. Como exemplifica Ponte (2014), o número quatro pode ser representado pelo dígito “4”, pelo algarismo romano “IV”, pela palavra “quatro” em português, pela sequência de quatro pontos (●●●●) ou ainda pelo número binário “100”. Além disso, uma mesma representação pode assumir significados distintos, conforme o contexto. O sinal de igual (=), por exemplo, pode indicar uma equivalência, um resultado de operação ou uma relação de identidade, o que exige dos alunos um olhar atento às regras do sistema de representação em uso.

Duval (2006, *apud* Ponte, 2014) alerta para um dos maiores desafios na aprendizagem da Matemática: a tendência dos alunos em confundir o objeto matemático com sua representação. Como não é possível acessar diretamente os objetos matemáticos sem recorrer às representações, essa distinção nem sempre é clara, o que pode gerar dificuldades na compreensão dos conceitos. Por isso, torna-se essencial que o ensino da Matemática promova reflexões constantes sobre as diferentes formas de representar, interpretar e converter informações dentro dos registros matemáticos.

Goldin (2008, *apud* Ponte, 2014) também diferencia dois tipos de representações: externas e internas. As representações externas são aquelas que possuem existência física — seja em papel, quadro, tela de computador ou qualquer outro suporte —, como números, gráficos, equações, diagramas e figuras geométricas. Por outro lado, as representações internas são aquelas que ocorrem no pensamento do indivíduo, manifestando-se em processos mentais, imaginações, construções subjetivas e raciocínios, que nem sempre são visíveis ao professor, mas que podem ser inferidos a partir das produções externas dos alunos.

Nesse contexto, Webb, Boswinkel e Dekker (2008, *apud* Ponte, 2014) destacam que os conceitos matemáticos podem ser expressos por meio de representações informais, pré-formais e formais. As informais estão ligadas ao cotidiano e às experiências concretas dos alunos; as pré-formais começam a introduzir estruturas mais abstratas, como tabelas e esquemas; e as formais correspondem aos registros simbólicos convencionais da Matemática, como expressões algébricas, gráficos cartesianos e linguagens específicas. O desenvolvimento da aprendizagem matemática pressupõe que os alunos possam transitar entre esses níveis, construindo significados progressivamente mais abstratos.

Duval (2004, 2006, *apud* Ponte, 2014) ainda esclarece que o domínio das representações matemáticas envolve dois tipos fundamentais de transformações: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos consistem na manipulação dentro de um mesmo registro — por exemplo, resolver uma equação algébrica mantendo-se no plano simbólico. Já as conversões são transformações entre registros diferentes, como transformar uma equação algébrica em um gráfico cartesiano, ou interpretar uma situação-problema descrita em linguagem natural para uma expressão simbólica.

Por fim, conforme ressalta o NCTM (2007, *apud* Ponte, 2014), trabalhar com múltiplas representações é fundamental porque cada uma delas evidencia aspectos diferentes de conceitos e relações matemáticas. Portanto, para que os alunos desenvolvam uma compreensão profunda e significativa, é necessário que sejam expostos a uma diversidade de representações e que aprendam não apenas a utilizá-las, mas também a transitar entre elas de forma flexível e crítica.

Conforme discutido, as tarefas devem ser cuidadosamente planejadas e articuladas de forma a promover a aprendizagem dos estudantes, considerando, ainda, a importância das representações matemáticas no processo de construção do conhecimento. No entanto, como destaca Ponte (2014), a partir das contribuições de Stein e Smith (1998), é preciso reconhecer que os processos que ocorrem na sala de aula — como a própria apresentação da tarefa pelo professor, as orientações oferecidas e as interações entre os alunos — podem transformar significativamente a tarefa inicialmente proposta, desde sua enunciação até sua conclusão. Diante disso, um professor que busca adotar uma abordagem baseada no ensino exploratório, privilegiando tarefas abertas e desafiadoras, mas acessíveis a todos os estudantes, precisa desenvolver habilidades de gestão da aula que favoreçam a manutenção do potencial cognitivo das tarefas, conduzindo as interações de forma intencional para potencializar as aprendizagens.

2.4 Afinal, o que é ensino exploratório?

Conforme apresentado na Seção 3.2, Ponte (2005) classifica as tarefas matemáticas em quatro tipos: exercício, problema, exploração e investigação. No mesmo artigo, e com base na tipologia das tarefas, o autor apresenta duas estratégias para o ensino da matemática. A primeira seria o ensino direto, voltada para as tarefas classificadas como exercícios e problemas. A segunda seria voltada para as tarefas de exploração e investigação e essa:

> [...] estratégia alternativa têm sido sugeridas muitas designações – "ensino por descoberta", "ensino ativo", etc. O melhor termo, a meu ver, talvez seja o de "ensino-aprendizagem exploratório". A sua característica principal é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem. A ênfase desloca-se da actividade "ensino" para a actividade mais complexa "ensino aprendizagem" (Ponte, p.13, 2005).

Desse modo, o ensino exploratório na matemática se baseia na ideia de que os estudantes aprendem de maneira mais significativa quando engajam ativamente em tarefas desafiadoras e relevantes. Nesse modelo, o papel do professor é fundamental, sendo responsável por selecionar e propor atividades que promovam a descoberta e a compreensão dos conceitos matemáticos. As tarefas exploratórias são desenhadas para estimular o raciocínio matemático, a resolução de problemas e a comunicação, permitindo que os alunos conectem suas ideias iniciais a conceitos mais formais por meio de discussões coletivas (Canavarro, 2011).

Embora o ensino exploratório valorize a autonomia dos estudantes, ele não se baseia na ideia de que aprendem isoladamente ou de forma completamente autodirigida. Pelo contrário, o professor desempenha um papel ativo ao monitorar, orientar e organizar as discussões em sala de aula, garantindo que as atividades cumpram seus objetivos matemáticos. Essa abordagem promove um ambiente dinâmico, onde os alunos desenvolvem habilidades críticas e criativas para lidar com problemas e compreender profundamente os conceitos matemáticos (Canavarro, 2011).

O ensino exploratório da Matemática organiza-se em etapas bem definidas, que estruturam a aula em quatro fases principais: introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. Na introdução, o professor apresenta o desafio matemático, esclarecendo o enunciado e motivando os alunos. Na fase de realização, os estudantes trabalham de forma autônoma ou em pares, enquanto o professor acompanha sem retirar a responsabilidade da resolução. Em seguida, ocorre a discussão, em que diferentes estratégias são compartilhadas e confrontadas, promovendo a argumentação matemática. Por fim, a sistematização é conduzida pelo professor, institucionalizando conceitos e conexões matemáticas relevantes (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012).

Quadro 2 - Fases de uma aula exploratória

Fase da aula	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
Introdução da tarefa	- Esclarecer a interpretação da tarefa - Estabelecer objetivos - Motivar e conectar com experiências anteriores	- Organizar os alunos em pares/grupos - Distribuir materiais - Definir tempo e organização
Realização da tarefa	- Estimular raciocínio e autonomia - Fazer perguntas sem dar respostas - Valorizar diferentes representações	- Monitorar grupos - Garantir registros escritos - Selecionar produções para discussão
Discussão da tarefa	- Incentivar explicações e justificações - Comparar diferentes estratégias - Promover pensamento crítico	- Organizar ordem das apresentações - Garantir participação de todos - Criar clima de respeito e interesse
Sistematização	- Institucionalizar conceitos e procedimentos - Destacar o valor das generalizações - Relacionar com conhecimentos prévios	- Focar atenção da turma no fechamento - Registrar ideias principais - Estruturar síntese coletiva

Fonte: adaptado de Canavarro, Oliveira e Menezes (2012).

O ensino exploratório, como discutido neste capítulo, representa uma alternativa pedagógica potente para o desenvolvimento do pensamento matemático, especialmente quando se valoriza a seleção intencional de tarefas e a mobilização de múltiplas representações. O produto final desta dissertação foi construído com base nessa abordagem, buscando propor tarefas que envolvam os estudantes de forma ativa e reflexiva. No capítulo seguinte, aprofundaremos as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e do Currículo da Rede Municipal de São Paulo no que se refere à Álgebra, a fim de situar a proposta deste trabalho em consonância com os documentos oficiais que fundamentam o ensino nos anos finais do Ensino Fundamental.

3. BNCC E REDE MUNICIPAL DE SÃO PAULO: ORIENTAÇÕES E ATIVIDADES PARA A ÁREA DE ÁLGEBRA

Neste capítulo, apresentaremos as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) referentes à área de Álgebra no Ensino Fundamental. Além disso, abordaremos a forma como o tema é tratado no currículo e nas orientações curriculares da Rede Municipal de Educação da cidade de São Paulo, com foco nos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano).

Considerando que tanto a BNCC quanto a proposta curricular das escolas municipais paulistanas enfatizam o desenvolvimento do pensamento algébrico, também analisaremos algumas atividades voltadas para esse objetivo, propostas pela Prefeitura de São Paulo em cadernos destinados ao trabalho em sala de aula. Neste ponto, concentraremos a análise nos 6º e 7º anos. A ideia é construir repertório para a elaboração do produto final desta dissertação.

3.1 BNCC, Currículo da cidade e Orientações

A BNCC estabelece divisão da Matemática em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Essas unidades receberão, segundo o documento, diferentes ênfases de acordo com o ano no ensino fundamental (Brasil, p. 268, 2018).

A BNCC apresenta a unidade temática chamada Álgebra como aquela que possui a finalidade de desenvolver o pensamento algébrico (Brasil, p. 270, 2018). E para que esse desenvolvimento aconteça:

> [...] é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência

de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (Brasil, p. 270, 2018).

A BNCC também reforça a necessidade do trabalho com a Álgebra nos anos iniciais, uma vez que nessa etapa de ensino é possível fazer com que os estudantes reconheçam regularidades em sequências numéricas, compreendam a relação de equivalência sem que vejam o sinal de igualdade como apenas indicação de um cálculo a ser feito, lidem com a noção intuitiva de função e resolvam problemas de proporcionalidade, sem uso de regra de três e sem uso de qualquer representação por letras (Brasil, 2018).

Sobre os anos finais do ensino fundamental, a BNCC reforça que nessa etapa:

> [...] os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos (Brasil, 2018, p. 270-271).

Por fim, cabe destacar que a BNCC reforça não só a importância da Álgebra, bem como das outras unidades temáticas, no desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018).

Em 2017, mesmo ano em que foi publicada a terceira e última versão da BNCC para a educação infantil e o ensino fundamental, a Rede Municipal de São Paulo publicou seu “Currículo da Cidade” para o ensino fundamental, um volume para cada componente curricular dessa etapa de ensino.

O “Currículo da Cidade” de Matemática para o Ensino Fundamental destaca que a disciplina é composta por três dimensões interconectadas: social, cultural e formal:

> A **dimensão social** engloba a reflexão sobre a criação e o uso da Matemática em diferentes contextos sociais, apontando para uma dimensão histórica e social do conhecimento matemático.

A **dimensão cultural** considera a Matemática como fruto de diferentes culturas e etnias (contagem, localização, medição, desenhos e jogos) que permitem uma reflexão sobre a construção do conhecimento matemático.

A **dimensão formal** envolve as ideias matemáticas fundamentais com a utilização de uma simbologia própria e universal, desenvolvidas ao longo da Educação Básica, articulando-se com diferentes objetos de conhecimento e eixos estruturantes (Álgebra, Geometria, Números etc.). (São Paulo, 2017, p. 64).

O “Currículo da cidade” também leva em conta as chamadas “ideias fundamentais da Matemática”, sendo que algumas delas já foram apresentadas pela BNCC. Segundo o documento, essas ideias se fazem presentes em diversos assuntos da Matemática, estabelecendo uma articulação natural entre eles ao longo de todo o ensino fundamental (São Paulo, 2017):

Figura 3: Ideias Fundamentais da Matemática
Fonte: São Paulo (2017, p. 65).

Segundo São Paulo (2017):

A ideia de **proporcionalidade** está presente em diversos objetos de conhecimento, como os números racionais, as razões e proporções, a semelhança de figuras e outros.

> A ideia de **equivalência** está presente no estudo dos números racionais, nas equações, nas áreas ou nos volumes, entre muitos outros.
> A ideia de **ordem** permite a observação da organização sequencial de números, de ordem de grandeza numérica e de estudos de sequências numéricas ou figurais.
> A ideia de **aproximação** está ligada aos cálculos que não precisam ser exatos, às medidas, à aproximação dos números irracionais, entre outros.
> A ideia de **variação** em Matemática se refere a alguns objetos de conhecimento como a variação percentual, a variação entre duas grandezas, o coeficiente de variação, entre outros.
> A ideia de **interdependência** se relaciona à noção de função, com relações entre grandezas numéricas ou geométricas e com ampliação e redução de figuras.
> A ideia de **representação** está relacionada com a simbologia matemática, mas também se apoia na linguagem oral e escrita, nas representações icônicas (figuras, esquemas, diagramas, etc.), além de representações de objetos do meio físico para indicar entes matemáticos. (São Paulo, 2017, p. 64 - 65).

O documento também propõe uma diversidade de estratégias pedagógicas que enriquecem o ensino da Matemática, como resolução de problemas, tarefas investigativas, o uso de tecnologias digitais, etnomatemática, modelagem e história da Matemática. Essas abordagens permitem que o estudante desenvolva não apenas competências técnicas, mas também habilidades críticas, criativas e colaborativas, conectando os conteúdos às realidades sociais e culturais dos aprendizes (São Paulo, 2017).

A estrutura curricular de Matemática está organizada em eixos estruturantes e articuladores. Os eixos estruturantes incluem Números, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, e Álgebra, proporcionando uma base sólida de conhecimento matemático. Os eixos articuladores – como Jogos e Brincadeiras, Processos Matemáticos e Conexões Extramatemática – promovem a aplicação prática e interdisciplinar, incentivando o protagonismo do estudante e a valorização do conhecimento em contextos diversos (São Paulo, 2017).

No eixo Álgebra, o desenvolvimento do pensamento algébrico é enfatizado por meio de situações que envolvam relações quantitativas e qualitativas de diferentes grandezas e estruturas matemáticas. Esse eixo busca permitir aos estudantes conjecturar, sistematizar, generalizar e justificar, utilizando representações e linguagens matemáticas variadas. Dessa forma, o eixo promove a construção de conceitos fundamentais como equivalência, proporcionalidade, variação, interdependência e representação (São Paulo, 2017).

O quadro a seguir apresenta os objetos de conhecimento (conteúdos) e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento de Álgebra para os anos finais do ensino fundamental:

Quadro 3 - Álgebra no Currículo da Cidade nos anos finais do ensino fundamental

ASSUNTOS E OBJETIVOS PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL, SEGUNDO O CURRÍCULO DA CIDADE (2017)		
ANO	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM E DESENVOLVIMENTO**
6º ANO	- Noções de divisibilidade; - Sinais de associação; - Variação de grandezas: direta e inversamente proporcionais ou não proporcionais.	(EF06M13) Investigar se há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades. (EF06M14) Compreender e utilizar os sinais de associação (parênteses, colchetes e chaves) para estabelecer uma ordem de prioridade entre as operações numa expressão numérica. (EF06M15) Investigar relações de proporcionalidade direta, inversa ou de não proporcionalidade entre duas grandezas.
7º ANO	- Linguagem algébrica: expressões, variável e incógnita; - Funções da álgebra;	(EF07M10) Identificar diferentes usos para as letras ou símbolos, em situações que envolvam

	- Equações polinomiais do 1º grau; - Proporcionalidade.	generalização de propriedades, incógnitas, fórmulas, relações numéricas e padrões. (EF07M11) Traduzir e resolver um problema em linguagem algébrica, usando equações do 1º grau. (EF07M12) Solucionar equações do 1º grau compreendendo o significado de incógnita e da raiz. (EF07M13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a de incógnita. (EF07M14) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. (EF07M15) Solucionar e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
8º ANO	- Valor numérico de expressões algébricas; - Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano; - Padrões e relações algébricas; - Inequação de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano, discussão das soluções; - Equação de 1° Grau; - Variação de grandezas: direta e	(EF08M07) Construir procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas, utilizando propriedades conhecidas. (EF08M08) Traduzir um problema por sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas e resolvê-lo, utilizando inclusive o plano cartesiano como recurso e discutindo a validade das raízes. (EF08M09) Produzir e interpretar escritas algébricas, em

	inversamente proporcionais ou não proporcionais; - Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis.	situações que envolvem generalização de propriedades, incógnitas, fórmulas, relações numéricas e padrões. (EF08M10) Traduzir um problema que envolva inequações do primeiro grau, resolvê-lo utilizando inclusive o plano cartesiano como recurso, discutindo e validando o significado das soluções. (EF08M11) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano. (EF08M12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica, e representá-la no plano cartesiano. (EF08M13) Elaborar problemas que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais e resolvê-los por meio de estratégias variadas. (EF08M14) Compreender e utilizar os processos de fatoração e de produtos notáveis de expressões algébricas com base em suas relações.
9º ANO	- Representação em sistema de coordenadas cartesianas da variação de grandezas; - Equação de 2º grau; - Frações algébricas: operações; - Problemas envolvendo sistemas de equação do 1° e 2° grau.	(EF09M08) Representar a variação de duas grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação. (EF09M09) Relacionar expressões algébricas e gráficas em planos cartesianos, explorando os significados de intersecção e declive, com uso de tecnologias

		digitais ou não. (EF09M10) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau, discutindo o significado das soluções, incluindo a fatoração e o cálculo mental quando possível. (EF09M11) Construir procedimentos de cálculo para operar com frações algébricas, estabelecendo analogias com procedimentos numéricos. (EF09M12) Analisar, interpretar, formular e resolver problemas que incluam sistemas de equações de 1º e 2º graus. (EF09M13) Analisar e representar padrões e funções utilizando expressões algébricas, palavras, tabelas e gráficos.

Fonte: São Paulo (2017).

Em 2018, a Rede Municipal de São Paulo publicou o documento "Orientações curriculares para o currículo da cidade" composto de dois volumes e que divide as orientações nas cinco unidades temáticas da matemática. Em relação ao ensino de Álgebra:

O ensino da álgebra no currículo escolar do Município de São Paulo é orientado pela ênfase no desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. A proposta vai além da simples manipulação de símbolos, priorizando a construção de um raciocínio matemático baseado na observação de padrões, na generalização de conceitos e na aplicação prática em diferentes contextos (São Paulo, 2018). Essas orientações estão alinhadas à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que estabelece a álgebra como uma das unidades temáticas da Matemática (Brasil, 2018).

Os objetivos principais do ensino de álgebra incluem o desenvolvimento do pensamento algébrico para compreender relações matemáticas e generalizar padrões, a utilização de modelos matemáticos para analisar grandezas quantitativas e resolver problemas com base em equações e inequações. Essa abordagem amplia a compreensão dos estudantes sobre a matemática e facilita sua aplicação em situações reais (São Paulo, 2018).

O ensino da álgebra é estruturado em diferentes concepções fundamentais. Primeiro, a álgebra é apresentada como uma extensão da aritmética, permitindo a exploração de regularidades e padrões, como na generalização de propriedades matemáticas. Em seguida, há o foco na resolução de problemas, introduzindo variantes variáveis como incógnitas e promovendo a simplificação e solução de equações. Outra concepção enfatiza o estudo de relações entre grandezas, representadas por fórmulas e gráficos, enquanto a álgebra estrutural aborda operações como fatoração e manipulação de polinômios (São Paulo, 2018).

Para alcançar esses objetivos, as orientações destacam a importância de atividades exploratórias que estimulem a generalização e o raciocínio. Por exemplo, no pensamento relacional, os estudantes podem trabalhar com sentenças matemáticas que explorem o conceito de equivalência, como $12 + 8 = 9 + 11$, promovendo a compreensão do significado do sinal de igualdade. No pensamento funcional, tarefas que envolvam padrões de crescimento ou repetição, como sequências de figuras geométricas ou numéricas, incentivam a identificação e descrição de regularidades (São Paulo, 2018).

Apesar dos avanços, as orientações reconhecem desafios no ensino da álgebra. Dificuldades comuns incluem a interpretação limitada do conceito de variável e erros na manipulação de símbolos. Por isso, recomenda-se integrar diversas formas de representação algébrica, como tabelas, gráficos e linguagem natural, para enriquecer a compreensão dos estudantes e facilitar a aplicação prática dos conceitos aprendidos (São Paulo, 2018).

3.2 Análise das atividades do Caderno da Cidade voltadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico

A análise das atividades[3] da área de Álgebra presentes no Caderno da Cidade – Saberes e Aprendizagens dos 6º e 7º anos, disponíveis no **ANEXO II – Atividades da Rede Municipal de Educação de São Paulo**, tem como objetivo compreender em que medida as propostas contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico e identificar suas potencialidades no contexto do ensino exploratório. O pensamento algébrico, conforme Kaput (1999, 2008), caracteriza-se pela capacidade de reconhecer e generalizar padrões, representar relações e compreender estruturas matemáticas. Já o ensino exploratório, segundo Ponte (2014), propõe tarefas que favorecem a investigação, a comunicação e a construção de significados pelos estudantes.

No 6º ano, o objetivo (EF06M13) propõe "investigar se há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades". A Atividade 4 (p. 45) estimula o estudante a observar padrões nos restos das divisões, favorecendo a identificação de regularidades e a construção de generalizações. Essa prática contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico ao promover o raciocínio sobre invariâncias, conforme destaca Kaput (1999). A exploração de padrões permite que os alunos avancem na compreensão da estrutura dos números e das relações entre divisibilidade e resto. Sob a perspectiva exploratória (Ponte, 2014), a atividade pode ser enriquecida por meio de discussões em grupo e experimentações com materiais concretos, o que possibilita a formulação de hipóteses e a argumentação matemática.

O objetivo (EF06M14) busca "compreender e utilizar os sinais de associação (parênteses, colchetes e chaves) para estabelecer uma ordem de prioridade entre as operações numa expressão numérica". As Sequências de Atividades 2 (p. 82–84) e 3 (p. 235–241) abordam o uso de sinais de associação e a hierarquia das operações. Embora o tema pareça estritamente aritmético, o trabalho com a estrutura das expressões favorece uma visão relacional, desenvolvendo o olhar

[3] O termo "atividades" será utilizado aqui por ser o presente no material analisado. Apesar da diferenciação entre atividades e tarefas apresentada por Ponte (2014), aqui serão utilizadas como sinônimas.

algébrico sobre as operações. Segundo Van de Walle (2009), compreender estruturas e padrões é uma das formas de manifestação do pensamento algébrico. Essas atividades, ao exigir que o estudante analise diferentes possibilidades de resolução, também estimulam a argumentação e a comparação de estratégias. Quando mediadas de forma exploratória, as discussões coletivas e a justificativa das escolhas fortalecem o raciocínio lógico e a comunicação matemática (Ponte, 2014).

O objetivo (EF06M15) propõe “investigar relações de proporcionalidade direta, inversa ou de não proporcionalidade entre duas grandezas”. A Atividade 4 (p. 109–114) contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico ao explorar a ideia de relação entre grandezas, permitindo ao estudante compreender invariâncias e dependências. De acordo com Kaput (2008), o pensamento algébrico envolve perceber regularidades e relações que se mantêm, mesmo quando os valores numéricos mudam. Assim, ao identificar relações de proporcionalidade, o aluno desenvolve uma compreensão relacional da matemática. Sob uma perspectiva exploratória, o professor pode ampliar o potencial dessa tarefa propondo comparações entre situações distintas e incentivando os alunos a explicitar seus raciocínios, o que torna o processo investigativo e significativo (Ponte, 2014).

No 7º ano, o objetivo (EF07M10) visa “identificar diferentes usos para as letras ou símbolos, em situações que envolvam generalização de propriedades, incógnitas, fórmulas, relações numéricas e padrões”. A Atividade 2 (p. 10–12) apresenta uma sequência figural em que os alunos devem construir uma expressão algébrica que represente o padrão observado. Essa atividade favorece a generalização e a transição entre representações concretas e simbólicas, o que está em consonância com Kaput (1999) e com a noção de registros de representação de Duval (2006, *apud* Ponte, 2014). Ao trabalhar em grupo, os estudantes podem formular conjecturas, justificar suas expressões e comparar estratégias, evidenciando um ambiente de aprendizagem exploratória. Na Atividade 3 (p. 13–16), o contexto geométrico das diagonais de um polígono convexo leva à dedução de uma expressão geral para o número de diagonais em função do número de lados. Essa relação entre grandezas geométricas permite perceber que o pensamento algébrico também se desenvolve fora do campo numérico, articulando-se com a Geometria (Kaput, 2008). O uso de geoplanos e representações visuais pode favorecer a compreensão estrutural da situação e potencializar o caráter investigativo da proposta.

Ainda dentro do mesmo objetivo, os itens 2 e 3 da Atividade 5 (p. 18–19) exploram as propriedades das operações e o uso de letras para expressá-las. Essa tarefa contribui para o entendimento da álgebra como uma generalização da aritmética, ao permitir que o estudante perceba regularidades e compreenda a igualdade como uma relação entre expressões (Kaput, 1999). Embora a estrutura seja mais direcionada, o professor pode ampliá-la de modo exploratório ao solicitar justificativas e diferentes exemplos de aplicação das propriedades.

O objetivo (EF07M11) orienta o estudante a "traduzir e resolver um problema em linguagem algébrica, usando equações do 1º grau". A Atividade 4 (p. 16–17) e a Sequência de Atividades 2 (p. 108–111) envolvem a conversão de enunciados em expressões e equações, mobilizando diferentes registros de representação. De acordo com (Almeida, Santos, 2020, *apud* Lins, 1992, 1994b), o aprendizado algébrico envolve a construção de significado para os objetos simbólicos, e isso ocorre quando o estudante compreende as relações que as letras expressam. No ensino exploratório, o foco desloca-se do simples cálculo para o processo de modelagem e interpretação das relações, permitindo que o aluno compreenda a função representacional da álgebra (Ponte, 2014).

O objetivo (EF07M12) prevê "solucionar equações do 1º grau compreendendo o significado de incógnita e da raiz". O item 1 da Atividade 5 (p. 18–19) trabalha a resolução de equações de forma direta. Ainda que seja uma tarefa mais técnica, ela é fundamental para consolidar o entendimento da relação entre incógnita e igualdade. De acordo com Kaput (2008), a manipulação simbólica é parte integrante do pensamento algébrico, desde que associada à compreensão conceitual. No ensino exploratório, o professor pode ampliar o alcance dessa tarefa ao propor comparações entre diferentes métodos de resolução, promovendo reflexão sobre o significado das operações realizadas.

O objetivo (EF07M13) busca "compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a de incógnita". A Atividade 1 (p. 8–10) apresenta a introdução conceitual da álgebra, diferenciando variável e incógnita. Essa compreensão é essencial para que o estudante reconheça as múltiplas funções das letras, construindo uma visão mais ampla da linguagem algébrica (Kaput, 1999). Já a Atividade 3 (p. 165–166) apresenta uma situação em que o estudante deve estabelecer relações entre duas variáveis. Ao compreender que uma variável pode assumir diferentes papéis conforme o contexto, o aluno desenvolve um raciocínio relacional e funcional (Van de Walle, 2009). Quando o professor promove discussões e comparações de estratégias, a atividade adquire um caráter exploratório, favorecendo a argumentação e a construção coletiva de significados.

O objetivo (EF07M14) propõe "utilizar simbologia algébrica para expressar regularidades em sequências numéricas". As Atividades 1, 2 e 4 (p. 48–57) e a Sequência de Atividades 3 (p. 231–233) trabalham o reconhecimento de padrões e a escrita da lei de formação de sequências. Essas tarefas exploram a generalização e a formalização, dimensões centrais do pensamento algébrico segundo Kaput (1999) e Lima, Bianchini e Lima (2023). Ao formular e testar conjecturas, os estudantes exercitam o raciocínio generalizador. A mediação docente é decisiva para que a tarefa mantenha seu potencial exploratório, estimulando a explicitação de estratégias e a justificativa das relações encontradas (Ponte, 2014).

Por fim, o objetivo (EF07M15) busca "solucionar e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas". A Sequência de Atividades 2 (p. 82–86) amplia as noções trabalhadas no 6º ano e introduz o uso de expressões algébricas para representar relações entre variáveis. Essa proposta envolve o raciocínio funcional, uma das manifestações do pensamento algébrico identificadas por Van de Walle (2009). No ensino exploratório, cabe ao professor incentivar a análise das relações, a formulação de hipóteses e a comparação de estratégias de resolução, de modo que o foco recaia sobre o processo de raciocínio e não apenas sobre o resultado final (Ponte, 2014).

De modo geral, as análises indicam que as atividades do Caderno da Cidade contemplam diferentes dimensões do pensamento algébrico, incluindo generalização, representação simbólica e raciocínio relacional. Em consonância com Kaput (1999, 2008) e Lima, Bianchini e Lima (2023), o desenvolvimento desse tipo de pensamento requer a criação de situações que levem o estudante a identificar padrões, formular generalizações e compreender as relações entre grandezas. A abordagem exploratória proposta por Ponte (2014) amplia o potencial dessas atividades ao transformar exercícios estruturados em oportunidades de investigação e argumentação. Assim, as tarefas analisadas contribuem para a formação de uma base conceitual sólida, essencial à consolidação do pensamento algébrico nos anos finais do Ensino Fundamental.

Ao longo destas análises, foi possível observar diferentes exemplos de atividades e refletir sobre maneiras de ampliá-las com base na abordagem do ensino exploratório. No próximo capítulo, após a conceituação de pensamento algébrico, do ensino exploratório e da experiência descrita neste capítulo, será apresentada a forma como foram elaboradas tarefas para os 6º e 7º anos, com foco no desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do ensino exploratório.

4. PROPOSTA DE TAREFAS PARA DESENVOLVER O PENSAMENTO ALGÉBRICO POR MEIO DO ENSINO EXPLORATÓRIO

Após a compreensão dos conceitos de pensamento algébrico e ensino exploratório, buscou-se, por meio da análise de atividades propostas na Rede Municipal de São Paulo, entender como ocorre na prática o desenvolvimento desse tipo de pensamento e identificar as potencialidades do ensino exploratório para essa finalidade. Essa investigação proporcionou subsídios e experiências para a elaboração de tarefas voltadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, fundamentadas na abordagem do ensino exploratório. Essas tarefas compõem o produto final desta dissertação.

As tarefas foram planejadas para o 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. A escolha desses anos se justifica, sob uma perspectiva tradicional, pelo fato de que é nesse período que os estudantes passam a utilizar letras em seus cálculos — ou seja, iniciam formalmente o estudo da álgebra, superando a ênfase exclusiva na aritmética. Por outro lado, pela linha do pensamento algébrico, que reconhece a presença de ideias algébricas desde os anos iniciais, é nesse estágio que os alunos têm o primeiro contato com formalismos mais estruturados e conceitualmente mais próximos da álgebra acadêmica.

O desenvolvimento do pensamento algébrico nos sextos e sétimos anos também foi objeto de estudo em Nacour (2022), que investigou questões de livros didáticos com potencial para essa finalidade, destacando a importância da postura docente em provocar generalizações e extrapolações a partir das questões propostas, indo além da resolução mecânica dos exercícios.

Ao elaborar este produto educacional, buscou-se também oferecer subsídios teóricos e práticos ao professor, destacando sua importância no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes por meio da prática do ensino exploratório. As quatro tarefas propostas a seguir foram construídas com essa finalidade, considerando o uso de materiais concretos, o estímulo à observação de padrões, a generalização de ideias matemáticas e o incentivo ao raciocínio independente dos estudantes.

Tarefa 1: Explorando padrões com pedrinhas

Pensada para o 6º ano, esta tarefa foi inspirada nas ideias dos pitagóricos, que investigavam relações numéricas de forma concreta. A atividade utiliza materiais manipuláveis para representar e explorar sequências de números triangulares e quadrados perfeitos. A proposta envolve a identificação de padrões visuais e numéricos e sua posterior formalização algébrica, promovendo o desenvolvimento do pensamento algébrico, entendido como a capacidade de formular conjecturas e estabelecer generalizações sobre dados e relações matemáticas em linguagens cada vez mais formais (Kaput, 1999). O objetivo é favorecer a transição do raciocínio aritmético para o algébrico, valorizando a observação, a descrição e a generalização de regularidades, em consonância com a perspectiva de Early Algebra defendida por Lima, Bianchini e Lima (2023), que destacam a importância de introduzir ideias algébricas de forma investigativa e significativa desde os primeiros anos escolares

O uso de materiais concretos e representações visuais possibilita aos estudantes transitar entre diferentes registros de representação, conforme a classificação de Bruner (apud Ponte, 2014), favorecendo a construção de significados que evoluem do concreto para o simbólico. Essa abordagem aproxima-se da concepção de ensino exploratório descrita por Ponte (2014), segundo a qual os alunos participam ativamente da formulação de hipóteses, da testagem de padrões e da argumentação coletiva, construindo o conhecimento por meio da interação e da reflexão sobre suas próprias descobertas.

Tarefa 2: Descobrindo padrões em divisões com palitos

Destinada também ao 6º ano, esta tarefa introduz conceitos de divisibilidade por meio da construção de representações com palitos de sorvete ou outros materiais. Os estudantes são convidados a criar tabelas, observar padrões que surgem nas divisões e formular hipóteses sobre múltiplos e divisores. A atividade estimula o pensamento algébrico ao envolver a análise de regularidades e a busca de relações numéricas em contextos concretos, aproximando o raciocínio dos processos de generalização e modelagem. Essa proposta está em consonância com Kaput (2008), que entende o pensamento algébrico como a capacidade de identificar relações invariantes e expressá-las por meio de representações simbólicas, mesmo que inicialmente informais. Lima, Bianchini e Lima (2023) afirmam que compreender a estrutura das operações e suas propriedades é parte essencial da formação de um pensamento matemático generalizador, o que antecede o domínio formal da linguagem algébrica. Do ponto de vista do ensino exploratório, a tarefa ganha potência quando o professor valoriza a construção coletiva do conhecimento, encorajando os alunos a apresentar suas conjecturas e discutir as regularidades identificadas, conforme propõe Ponte (2014). A elaboração de representações externas, como tabelas e diagramas, contribui para que os estudantes transformem observações empíricas em relações abstratas, movimento fundamental para a constituição do pensamento algébrico.

Tarefa 3: Construindo jogos da memória com incógnitas

Voltada ao 7º ano, esta tarefa propõe a criação de um jogo da memória em que as peças envolvem equações do primeiro grau e suas respectivas soluções. A atividade estimula a participação ativa dos estudantes em todas as etapas, desde a elaboração das peças até a resolução das equações durante o jogo. O objetivo é aprofundar o raciocínio algébrico por meio da manipulação simbólica e da compreensão das equações como representações de relações, e não apenas como operações a serem resolvidas. Kaput (1999) destaca que o desenvolvimento do pensamento algébrico ocorre quando o estudante compreende que os símbolos matemáticos expressam generalizações e relações entre quantidades. O jogo transforma a aprendizagem das equações em uma experiência de investigação e diálogo, promovendo a reflexão sobre as propriedades das operações e sobre o significado das incógnitas. A inclusão do método da falsa posição, conhecido desde o Egito Antigo, reforça a articulação entre o estudo da álgebra e sua dimensão histórica e cultural, como argumentam Coelho e Aguiar (2018), que defendem a importância de integrar a história da matemática ao ensino para favorecer a compreensão conceitual e o sentido das práticas matemáticas. Nessa perspectiva, o professor atua como mediador, criando condições para que os alunos elaborem estratégias, justifiquem soluções e discutam procedimentos matemáticos de forma colaborativa, em consonância com as ideias de Ponte (2014) sobre tarefas exploratórias e ambientes de aprendizagem que valorizam a argumentação.

Tarefa 4: Descobrindo relações entre ângulos e polígonos

Esta atividade, também destinada ao 7º ano, propõe investigar a soma dos ângulos internos de polígonos por meio da triangulação, ou seja, da observação de quantos triângulos podem ser formados dentro de um polígono de determinado número de lados. O uso de geoplanos físicos ou digitais permite visualizar as relações geométricas envolvidas e auxilia os estudantes a construir a expressão geral que determina a soma dos ângulos internos de um polígono. O objetivo é promover a generalização a partir de uma situação geométrica concreta, evidenciando que o pensamento algébrico não se restringe à álgebra simbólica, mas está presente em diversas áreas da matemática, inclusive na Geometria. Coelho e Aguiar (2018) ressaltam que a identificação de regularidades e a formulação de expressões gerais representam a essência do raciocínio algébrico em contextos geométricos. Segundo Kaput (2008), o pensamento algébrico manifesta-se quando o aluno reconhece padrões e estruturas que podem ser generalizados e formalizados.

A tarefa também permite explorar diferentes registros de representação, do geométrico ao simbólico, conforme a abordagem de Bruner (apud Ponte, 2014), contribuindo para a compreensão das relações entre variáveis e para o desenvolvimento do raciocínio funcional. Sob a ótica do ensino exploratório, conforme Ponte (2014), a investigação, a formulação de conjecturas e as discussões coletivas promovem um ambiente de aprendizagem no qual os estudantes constroem significados a partir da experimentação, da argumentação e da colaboração, fortalecendo a compreensão das propriedades geométricas e suas relações algébricas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi compreender de que forma o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser promovido por meio do ensino exploratório e, a partir dessa compreensão, elaborar tarefas voltadas especificamente para essa finalidade. Esse objetivo foi efetivamente alcançado ao longo da pesquisa, que articulou fundamentos teóricos, análise de práticas existentes e a produção de um conjunto de tarefas destinadas ao 6º e 7º anos do Ensino Fundamental.

Embora a Matemática seja tradicionalmente considerada uma “ciência exata”, seu ensino está longe de obedecer a padrões rígidos e inflexíveis. Ensinar — em qualquer área do conhecimento — é uma atividade essencialmente humana, marcada por contextos, trajetórias, interpretações e intenções. Por isso, esperar que as práticas tradicionais de ensino da álgebra sejam substituídas de forma rápida e automática é uma expectativa ingênua. Não por acaso, a proposta de desenvolver o pensamento algébrico vem sendo discutida desde a década de 1990 e, ainda hoje, enfrenta resistências ou é incorporada parcialmente por professores em sala de aula.

Mesmo quando tal proposta é acolhida, muitas vezes ela ainda mantém marcas das abordagens tradicionais, como foi possível observar nas atividades voltadas ao 7º ano da Rede Municipal de São Paulo. Esse cenário reforça a ideia de que o ensino da matemática é um processo profundamente humano, influenciado por concepções, práticas e experiências históricas.

No que diz respeito ao ensino exploratório, observou-se que essa abordagem reúne princípios amplamente defendidos por pesquisadores da área: a valorização da construção de significados, da experimentação, da argumentação e da resolução de problemas em contextos que façam sentido para os estudantes. Embora este trabalho tenha se apoiado, entre outras fontes, em Ponte (2014), é importante reconhecer que práticas alinhadas ao ensino exploratório já ocorriam nas salas de aula antes mesmo que essa expressão fosse sistematizada ou nomeada. Em muitos casos, o que a literatura faz é legitimar e dar visibilidade a experiências que já vinham sendo construídas por professores em suas realidades concretas.

Ao longo desta pesquisa, ficou evidente que não há material didático, proposta curricular ou conjunto de tarefas capaz de substituir a atuação dinâmica, intencional e dialógica do professor. Essa postura docente, que no contexto brasileiro se aproxima da pedagogia de Paulo Freire, é indispensável tanto para o desenvolvimento do pensamento algébrico quanto para a aplicação efetiva do ensino exploratório. É por meio do diálogo, da escuta, da problematização e da mediação que se constrói uma prática pedagógica capaz de provocar o pensamento, acolher as diferenças e promover aprendizagens significativas.

REFERÊNCIAS

AGÊNCIA BRASIL. **Resultados do Pisa reforçam gargalo no ensino de matemática no Brasil.** Disponível em: https://bit.ly/4oXs8Dw. Acesso em 30 ago. 2025.

ANDRADE, C. D. de. **A rosa do povo**. São Paulo: Círculo do livro, 1945.

ALMEIDA, J. R. de; SANTOS, M. C. dos. **Pensamento algébrico: em busca de uma definição**. Revista Paranaense de Educação Matemática, p. 34–60, 2020. Disponível em: https://bit.ly/3CKqvFz. Acesso em: 11 out. 2024.

BLANTON, M.; KAPUT, J. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning**. Journal for Research in Mathematics Education, v.36, n.5, 2005, p.412-46.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. **A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino**. *Estudos Avançados*, São Paulo, Brasil, v. 32, n. 94, p. 171–187, 2018. Disponível em: http://bit.ly/4eFUahl. Acesso em: 12 out. 2024.

CAMPEÃO, V. **Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: uma proposta de aplicativo.** 2020. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, 2020.

CANAVARRO, A. P.. **Ensino exploratório da Matemática**: práticas e desafios. *Educação e Matemática*, Lisboa, n. 115, p. 11-17, nov./dez. 2011.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.. **Práticas de ensino exploratório da Matemática**: o caso de Célia. In: CANAVARRO, A. P.; SANTOS, L.; BOAVIDA,

A.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CARREIRA, S. (org.). Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática. Lisboa: APM, 2012. p. 255-266.

CORREA, B. M.; ROQUE, T. **Análise x Síntese:** A Transformação da Matemática. In: IV HTEM (IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática), 2008, Rio de Janeiro. Anais do IV HTEM, 2008. v. 1. p. 1-6

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** *Temas e Debates*. SBEM, Ano II, n. 2, Brasília, 1999. p. 15-19.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Formação de professores de matemática para o século XXI:** o grande desafio. Educational Studies in Mathematics, v. 23, 1992. p. 213-230.

DELFIOL, T. Um breve contexto do ensino da matemática no brasil no século XVIII. **Revista de História da Educação Matemática**, [S. l.], v. 8, p. 1–17, 2022. Disponível em: https://bit.ly/4qhnmkT. Acesso em: 19 out. 2025.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar**. Pro-Posições, Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação - Unicamp. Campinas, v.4, n.1[10], 1993, p.78-91.

FREIRE, M. **A paixão de conhecer o mundo** (1983). 6. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1988.

G1. **Entre os alunos mais pobres, só 3% têm conhecimentos adequados de matemática no Brasil, mostra Pisa.** Disponível em: https://bit.ly/4mYxqgZ. Acesso em: 30 ago. 2025.

HARARI, Y. N. **21 lições para o século 21**. São Paulo. Editora Companhia das Letras, 2018.

KAPUT, J. **Teaching and learning a new algebra with understanding**. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), Mathematics classrooms that promote understanding. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999. p. 133-155.

KAPUT, J. **What is algebra? What is algebraic reasoning?** In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades. New York: Lawrence Erlbaum Associates, p. 5–17, 2008.

LEPES USP. **ESQUECIDOS:** crise nos anos finais do ensino fundamental. São Paulo: LEPES USP, 2023. Disponível em: https://bit.ly/3E3HJP1. Acesso em: 20 jan. 2025.

LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L. **Álgebra como integrante da cultura matemática do cidadão**. *In:* GUALANDI, J. H. (org.). Ensino de matemática: desafios e possibilidades. Curitiba: Bagai, 2021. p. 10-28.

LIMA, A. P. de A. B.; BIANCHINI, B. L; LIMA, G. L. de. **Pensamento Algébrico**. In: BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. de (org.). *O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem*. São Paulo: Livraria da Física, 2023. p. 75-116.

MEDEIROS, R. G. de. **Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar para pesquisas científicas que contribuam para o aprendizado do que é proposto pela BNCC**. 2021. Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), São Paulo, 2021.

NACOUR, G. M. **Características do pensamento algébrico em questões do livro didático de Matemática do 6º e 7º anos.** 2022. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, 2022.

PIERRO, B. Embates teóricos marcaram história da educação matemática. Revista Pesquisa FAPESP, São Paulo, Edição 313, mar. 2022. Disponível em: https://bit.ly/48ERyAe. Acesso em: 19 out. 2025.

PITOMBEIRA, J. R. de S. **O Kahoot no ensino da álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental.** 2020. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Alagoas (UFAL), Maceió, 2020.

PITZER, L. C. FÁVERO, J. D.. **A História do Papiro de Rhind**. Revista Maiêutica, Indaial, v. 5, n. 1, 2017. p. 79-86.

PODER 360. **Brasil está entre os 17 países com pior nota em matemática da OCDE.** Disponível em: http://bit.ly/3C93UCI. Acesso em: 08 jan. 2025.

PODER 360. **Alunos da rede pública terminam o ensino médio sem saber porcentagem.** Disponível em: http://bit.ly/3HTsR8f. Acesso em 30 ago. 2025.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: ME – DGIDC, 2009.

PONTE, J. P. da (org.) - **Práticas profissionais dos professores de matemática. Lisboa** : Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014.

ROQUE, T. **História da Matemática.** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1ª edição. Rio de Janeiro: Ed Zahar, 2012.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Divisão de Orientação Técnica. **Matemática, visão de área**. Documento 5: 1992.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. **Currículo da Cidade - Ensino Fundamental: Matemática**. São Paulo: SME/COPED, 2017. Disponível em: https://bit.ly/48WAd3O. Acesso em: 11 out. 2024.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. **Orientações didáticas do currículo da cidade: Matemática v. 1.** São Paulo: SME / COPED, 2019. Disponível em: https://bit.ly/4fUhDLV. Acesso em: 11 out. 2024.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. **Caderno da cidade: saberes e aprendizagens** : Matemática – 6º ano. São Paulo : SME/COPED, 2024.

SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. **Caderno da cidade: saberes e aprendizagens** : Matemática – 7º ano. São Paulo : SME/COPED, 2024.

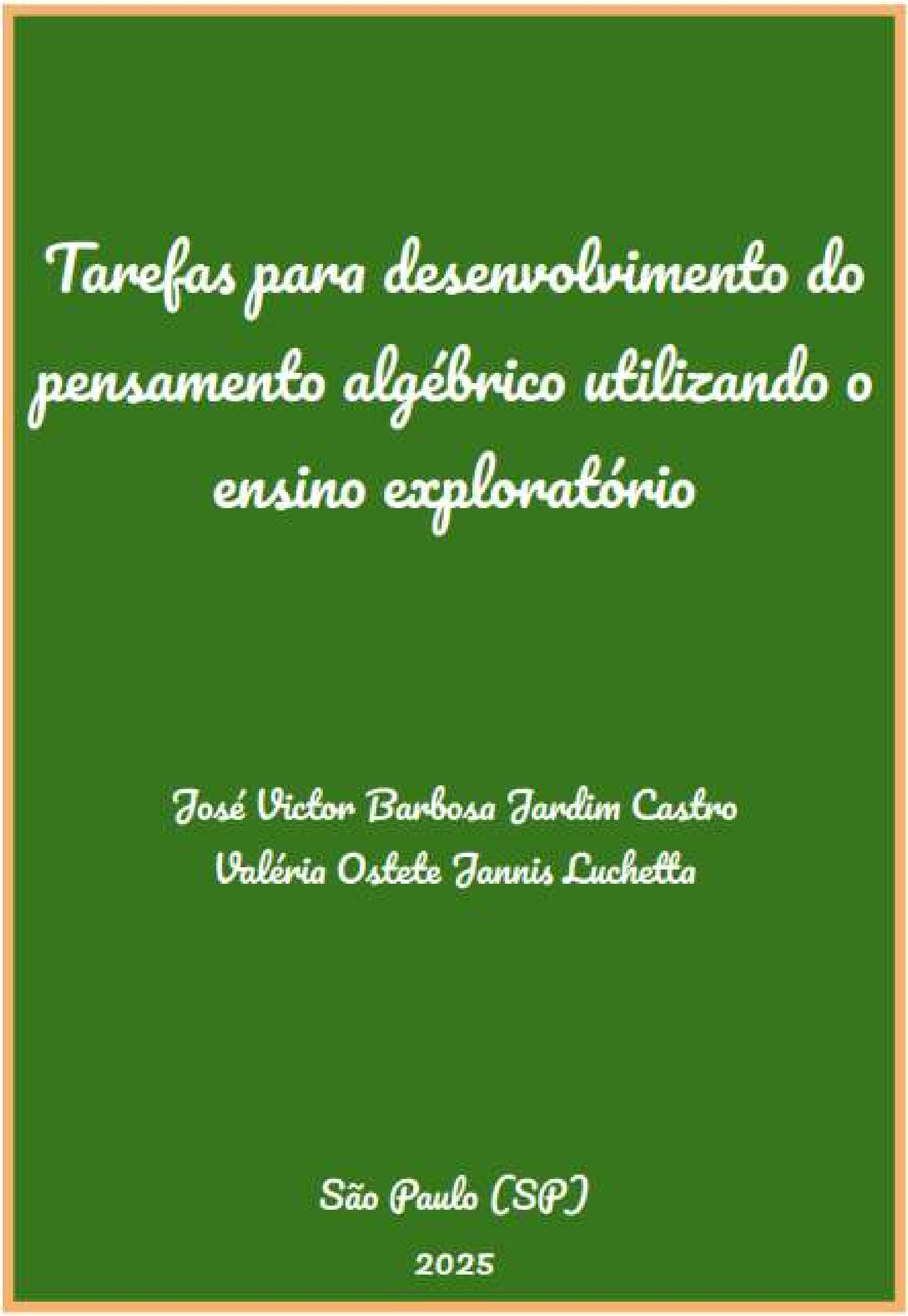
SILVA, T. L. da. **O ensino da álgebra nos anos iniciais: uma proposta de curso de formação continuada à luz das ideias da BNCC.** 2021. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro, 2021.

TEIXEIRA JUNIOR, V. P.; SILVEIRA, M. R. A. da. **O ensino de álgebra e a filosofia de Wittgenstein: sobre regras e essência**. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 21, n.3, 2019. Disponível em: https://bit.ly/3ZelgqC. Acesso em: 11 out. 2024.

VAN DE WALLE, J. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VOGT, G. G. **O ensino de álgebra nos anos iniciais: uma proposta de formação continuada por meio do uso de um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).** 2022. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Chapecó, 2022.

ANEXO I - PRODUTO EDUCACIONAL:



Tarefas para desenvolvimento do pensamento algébrico utilizando o ensino exploratório

Produto Educacional apresentado como requisito à obtenção do grau de Mestre em Matemática, com área de concentração em Matemática na Educação Básica, pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São Paulo. Aprovado em banca de defesa de mestrado no dia 3 de Outubro de 2025.

AUTORES

José Victor Barbosa Jardim Castro: Licenciado em Matemática pela USP (2014), em Educomunicação pela USP (2019), em Pedagogia pela UMESP (2020) e em Filosofia pela UCB (2021). MBA em Gestão escolar pela USP (2024) e Mestre em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo IFSP (2025). É professor de matemática efetivo do Ensino Fundamental II e Médio da Rede Municipal de São Paulo desde 2017.

Valéria Ostete Jannis Luchetta: Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Unesp - campus de Rio Claro. Mestre em Ciências, área de concentração: Matemática (Álgebra) e Licenciada em Matemática, ambos pela Universidade de São Paulo - USP - campus São Paulo. Professora do ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP (Campus Cubatão), onde faz parte do corpo de docentes permanentes do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - IFSP/SPO. Tem experiência na área de Matemática e Educação Matemática, com ênfase na área de ensino e história, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino e aprendizagem de matemática, ensino de álgebra, formação de professores, história da matemática e produção de significados.

Sumário

Apresentação

É com grande satisfação que disponibilizamos este material, composto por quatro tarefas cuidadosamente elaboradas para desenvolver o pensamento algébrico por meio do ensino exploratório.

Nosso conjunto de tarefas reflete o entendimento globalmente consolidado desde o final da década de 1980 sobre o chamado "desenvolvimento do pensamento algébrico" — conceito que também influencia a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2017. Para isso, adotamos uma abordagem baseada no ensino exploratório, em que o estudante assume um papel ativo no processo de aprendizagem.

Vale destacar que a Álgebra, em suas diversas dimensões, é um pilar essencial do conhecimento matemático. Assim, o propósito dessas tarefas não é criar um novo saber, mas tornar o conhecimento matemático já consolidado mais acessível e disponível a todos, garantindo esse direito de aprendizagem a cidadãos e cidadãs, independentemente de seu interesse em carreiras voltadas à matemática.

Convidamos você a explorar este material, refletir sobre as propostas apresentadas e, se for o caso, realizá-las com seus estudantes. Esperamos que essa experiência contribua para o enriquecimento do ensino e da aprendizagem da Álgebra!

José Victor Barbosa Jardim Castro

Dra Valéria Ostete Jannis Luchetta (orientadora)

O que é pensamento algébrico?

Os que foram estudantes do ensino básico no Brasil até a primeira década do século XXI, provavelmente se depararam com um ou mais professores que conscientemente ou não adotavam práticas que indicavam que o ensino da álgebra era destinado apenas aos estudantes de maior idade, a partir da antiga 6ª série e atual 7º ano, e seu conteúdo consistia apenas em resolver equações, inequações e sistemas lineares do primeiro e segundo grau, escrever leis de formação de funções e, de forma geral, fazer exercícios de manipulação de letras "como se elas fossem números".

Mas a Educação Matemática como atividade humana, repleta de influências nacionais e internacionais, vive em constante movimento, como a própria ciência. E a perspectiva citada sobre o ensino da álgebra, apesar de ainda presente em concepções de muitos professores em tempos atuais, têm sido sistematicamente substituída por aquilo que vem sendo chamado de "desenvolvimento do pensamento algébrico".

Desse modo, a Álgebra no seu sentido mais formal, apesar de ainda ser um conhecimento distinto de outras áreas que compõem aquilo que chamamos de Matemática, para o ensino básico representa um tipo de pensamento a ser explorado na resolução dos diversos problemas da vida cotidiana.

Segundo James Kaput (1999), o desenvolvimento do pensamento algébrico é algo que ocorre quando, por meio de conjecturas e argumentos, criam-se generalizações sobre dados e relações matemáticas, em linguagens cada vez mais formais. Essas generalizações podem ocorrer na Aritmética, na Geometria, em situações de modelagem matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático lecionado desde os primeiros anos de escolaridade.

Referência

KAPUT, J. **Teaching and learning a new algebra with understanding**. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), Mathematics classrooms that promote understanding. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999. p. 133-155.

O que é ensino exploratório?

O ensino exploratório na matemática se baseia na ideia de que os estudantes aprendem de maneira mais significativa quando engajam ativamente em tarefas desafiadoras e relevantes. Nesse modelo, o papel do professor é fundamental, sendo responsável por selecionar e propor atividades que promovam a descoberta e a compreensão dos conceitos matemáticos. As tarefas exploratórias são desenhadas para estimular o raciocínio matemático, a resolução de problemas e a comunicação, permitindo que os alunos conectem suas ideias iniciais a conceitos mais formais por meio de discussões coletivas (Canavarro, 2011).

Embora o ensino exploratório valorize a autonomia dos alunos, ele não se baseia na ideia de que aprendem isoladamente ou de forma completamente autodirigida. Pelo contrário, o professor desempenha um papel ativo ao monitorar, orientar e organizar as discussões em sala de aula, garantindo que as tarefas cumpram seus objetivos matemáticos. Essa abordagem promove um ambiente dinâmico, onde os alunos desenvolvem habilidades críticas e criativas para lidar com problemas e compreender profundamente os conceitos matemáticos (Canavarro, 2011).

O ensino exploratório da Matemática organiza-se em etapas bem definidas, que estruturam a aula em quatro fases principais: introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. Na introdução, o professor apresenta o desafio matemático, esclarecendo o enunciado e motivando os alunos. Na fase de realização, os estudantes trabalham de forma autônoma ou em pares, enquanto o professor acompanha sem retirar a responsabilidade da resolução. Em seguida, ocorre a discussão, em que diferentes estratégias são compartilhadas e confrontadas, promovendo a argumentação matemática. Por fim, a sistematização é conduzida pelo professor, institucionalizando conceitos e conexões matemáticas relevantes (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012).

O quadro a seguir resume as fases de uma aula com uma proposta exploratória:

Fase da aula	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
Introdução da tarefa	- Esclarecer a interpretação da tarefa - Estabelecer objetivos - Motivar e conectar com experiências anteriores	- Organizar os alunos em pares/grupos - Distribuir materiais - Definir tempo e organização
Realização da tarefa	- Estimular raciocínio e autonomia - Fazer perguntas sem dar respostas - Valorizar diferentes representações	- Monitorar grupos - Garantir registros escritos - Selecionar produções para discussão
Discussão da tarefa	- Incentivar explicações e justificações - Comparar diferentes estratégias - Promover pensamento crítico	- Organizar ordem das apresentações - Garantir participação de todos - Criar clima de respeito e interesse
Sistematização	- Institucionalizar conceitos e procedimentos - Destacar o valor das generalizações - Relacionar com conhecimentos prévios	- Focar atenção da turma no fechamento - Registrar ideias principais - Estruturar síntese coletiva

Fonte: adaptado de Canavarro, Oliveira e Menezes (2012).

Referências

CANAVARRO, A. P.. **Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios.** Educação e Matemática, Lisboa, n. 115, p. 11-17, nov./dez. 2011.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.. **Práticas de ensino exploratório da Matemática: o caso de Célia**. In: CANAVARRO, A. P.; SANTOS, L.; BOAVIDA, A.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CARREIRA, S. (org.). Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática. Lisboa: APM, 2012. p. 255-266.

TAREFA 1: Explorando padrões com pedrinhas

Objetivo: Reconhecer e representar padrões de sequências figurais.

Público-alvo: 6º ano do ensino fundamental.

Duração: Quatro aulas de 45 minutos cada.

Materiais necessários:

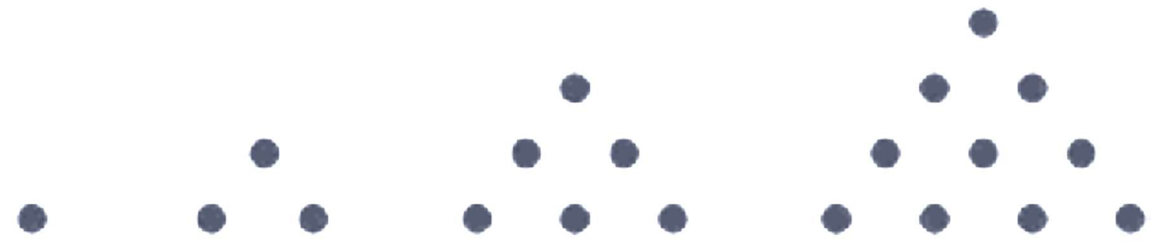
- Lápis;
- Borracha;
- Caderno;
- Pedrinhas utilizadas em aquários ou em construção civil.

Desenvolvimento:

Parte 1

Introdução

Os estudantes devem ser apresentados à sequência dos números triangulares, conforme a imagem abaixo:



Realização

Em duplas ou trios, os estudantes devem responder às questões, fazendo anotações em seus cadernos de maneira individual quando for necessário:

1) Com as pedrinhas, reproduzam a sequência apresentada pelo(a) professor(a). Depois, represente-as no caderno.

2) Quais seriam os próximos elementos da sequência? Reproduzam com pedrinhas os dois próximos elementos e, quando todos concordarem com as construções, represente-os no caderno.

3) No primeiro elemento da sequência, o número de pedrinhas é 1. No segundo elemento, 3 pedrinhas. No terceiro, 6 pedrinhas. E assim por diante. Discuta com colegas e escrevam os 20 primeiros números dessa sequência.

4) Se T_1 é o primeiro triângulo da sequência, T_2 o segundo e assim por diante, complete a tabela a seguir:

Triângulo	**N° de pedrinhas**
T_1	
T_2	
T_3	
T_4	
T_5	
T_6	
T_7	
T_8	
T_9	
T_{10}	

5) Você e seus colegas conseguem estabelecer uma relação a

partir do T_2 entre o número de pedrinhas do atual elemento e as pedrinhas do elemento anterior? Estejam prontos para apresentar suas conclusões para os colegas.

Discussão

Uma discussão deve ser feita de forma geral, ouvindo as duplas ou trios, apresentando as conclusões sobre os padrões da sequência de números triangulares.

Sistematização

Após a conclusão da recorrência entre os números triangulares, desenvolva os valores encontrados na tabela da seguinte forma:

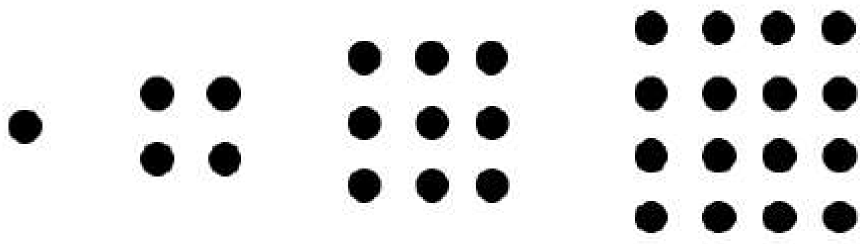
Triângulo	N° de pedrinhas
T_1	1
T_2	1 + 2
T_3	1+ 2 + 3
T_4	1 + 2 + 3 + 4
T_5	1 + 2 + 3 + 4 + 5
T_6	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
T_7	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
T_8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8
T_9	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
T_{10}	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10

Discuta com os estudantes como podemos calcular essas somas rapidamente.

Parte 2

Introdução

Os estudantes devem ser apresentados à sequência dos quadrados perfeitos, conforme a imagem abaixo:



Peça que os estudantes prossigam a sequência dos quadrados perfeitos até o décimo quinto termo no caderno.

Realização

Apresente a seguinte notação: Se Q_1 é o primeiro quadrado da sequência, Q_2 o segundo e assim por diante, complete a tabela a seguir:

Quadrado	N° de pedrinhas
Q_1	
Q_2	
Q_3	
Q_4	
Q_5	
Q_6	
Q_7	
Q_8	
Q_9	
Q_{10}	

Discussão e sistematização

Uma discussão deve ser feita com toda a turma em relação às seguintes questões:

a) Podemos estabelecer alguma relação de recorrência do número de pedrinhas de um elemento com seu anterior?

b) Que relação podemos estabelecer na sequência dos quadrados perfeitos entre o número do elemento e a quantidade de pedrinhas?

c) Que relação podemos estabelecer entre a sequência dos quadrados perfeitos e a sequência dos números triangulares.

Respostas esperadas e comentários:

Parte 1

Introdução

Professor(a), você pode fazer uma abordagem histórica dessa sequência falando sobre os pitagóricos e a duvidosa existência de Pitágoras. Para mais informações, consulte Roque (2012).

Realização

1) Desenho do estudante.
2) O quinto elemento terá 15 pedrinhas e o sexto elemento terá 21 pedrinhas.
3) Os vinte primeiros elementos da sequência dos números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210,...
4)

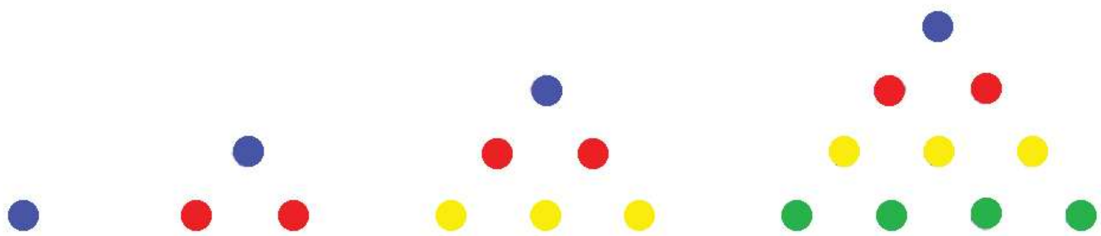
Triângulo	**N° de pedrinhas**
T_1	1
T_2	3
T_3	6

T_4	10
T_5	15
T_6	21
T_7	28
T_8	36
T_9	45
T_{10}	55

5) Professor(a), nessa parte os estudantes devem perceber que:

$$
\begin{gathered}
T_2 = T_1 + 2\\
T_3 = T_2 + 3\\
T_4 = T_3 + 4\\
T_5 = T_4 + 5\\
T_6 = T_5 + 6\\
T_7 = T_6 + 7\\
T_8 = T_7 + 8\\
T_9 = T_8 + 9\\
T_{10} = T_9 + 10
\end{gathered}
$$

Reforce a recorrência por meio visual:



Discussão

Professor(a), mostre para os estudantes que existe uma técnica para realizar a soma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10:

$$
\begin{array}{l}
\ \ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \quad + \\
10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\
\hline
11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11
\end{array}
$$

Isso significa que $2 \cdot T_{10} = 10 \cdot 11$. Ou seja: $T_{10} = \frac{10 \cdot (10+1)}{2}$.

Sistematização

Desse modo, podemos concluir que: a partir do segundo elemento, o número do elemento vezes o número do elemento mais 1 é igual ao dobro do número de pedrinhas. Analogamente, o número de pedrinhas é igual ao número do elemento vezes o número do elemento mais 1 dividido por dois. Professor(a), discuta com os estudantes formas de expressar essa ideia. Primeiro, faça-os perceber a relação que existe entre um número e seu sucessor. Inicialmente, utilize exemplos numéricos, por exemplo, 8 e 9, e façam perceber que se um número é 💙, então seu sucessor será 💙+1. Depois, conclua expressando que o número de pedrinhas será $\frac{\text{💙} \cdot (\text{💙}+1)}{2}$, onde 💙 é o número do elemento da sequência de números triangulares.

Parte 2

Introdução

Professor(a), pergunte aos estudantes se eles e elas sabem o motivo do nome “quadrados perfeitos”. Esse início de discussão pode ser aproveitado para os itens seguintes, onde se espera que os estudantes compreendam que o número do elemento ao quadrado resulta no número de pedrinhas.

Sequência dos quadrados perfeitos: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, …

Realização

Quadrado	N° de pedrinhas
Q_1	1
Q_2	4
Q_3	9

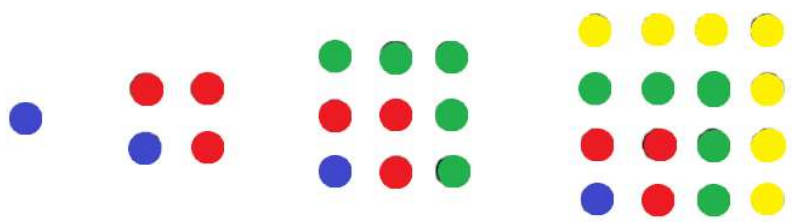
Q_4	16
Q_5	25
Q_6	36
Q_7	49
Q_8	64
Q_9	81
Q_{10}	100

Discussão e sistematização

a) Professor(a), nessa parte os estudantes devem perceber que:

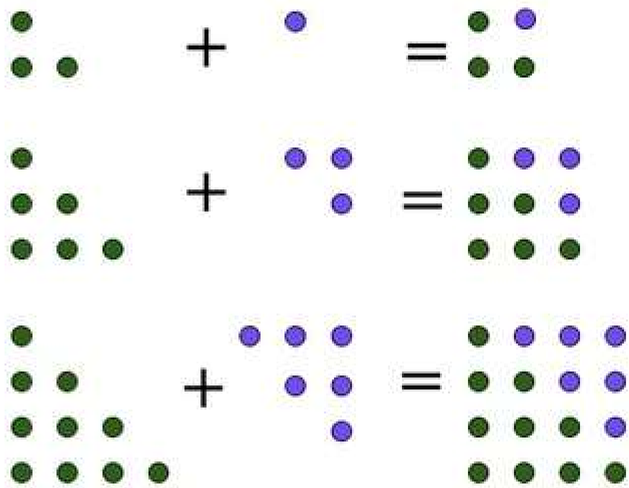
$$Q_2 = Q_1 + 3$$
$$Q_3 = Q_2 + 5$$
$$Q_4 = Q_3 + 7$$
$$Q_5 = Q_4 + 9$$
$$Q_6 = Q_5 + 11$$
$$Q_7 = Q_6 + 13$$
$$Q_8 = Q_7 + 15$$
$$Q_9 = Q_8 + 17$$
$$Q_{10} = Q_9 + 19$$

Reforce a recorrência por meio visual:



b) O número do elemento ao quadrado é igual ao número de pedrinhas. Logo, se 💚 é o número de elementos, o número de pedrinhas é 💚 x 💚 ou 💚². Sobre a relação entre as sequências, consulte a referência números figurados (IMAT, 2008).

c) Professor(a), os estudantes devem perceber que a soma de dois números triangulares consecutivos resulta em um número quadrado.



Fonte: Falando de Matemática (2014).

Avaliação: A avaliação da aprendizagem dos estudantes deve ocorrer, primeiramente, pela observação do professor nos momentos de interação entre as duplas e trios. Caberá ao professor mediar as discussões e observar se todos estão participando ativamente das construções. Importante lembrar que, mesmo que uma dupla ou trio não consiga alcançar as respostas esperadas, a discussão dos itens não pode ser considerada inválida. Até porque toda discussão foi resultado de um exercício mental em prol daqueles conhecimentos explorados. Após a realização da tarefa, aos professores que preferirem medir as aprendizagens de forma individual, segue uma sugestão avaliação:

Avaliação individual:

1. Qual é o 21º termo da sequência dos números triangulares?

2. Qual é o 33º termo da sequência dos quadrados perfeitos?

3. Indique se os números abaixo fazem parte da sequência dos números triangulares (A), sequência dos quadrados perfeitos (B), das duas sequências (C) ou nenhuma delas (D).

36	210	102	231	441

Respostas:

1. 231.

2. 1089.

3.

C	A	D	A	B

Observação: Importante notar que a soma dos números triangulares 210 e 231 resultam no quadrado perfeito 441.

Referências

IMÁTICA. **Números figurados**. 2008. Disponível em: https://bit.ly/4jl6bpm. Acesso em: 01 fev. 2025.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

FALANDO DE MATEMÁTICA. **Números poligonais como introdução ao estudo de sequências.** 2014. Disponível em: https://falandodematematica.weebly.com/ensino-meacutedio/numeros-poligonais-como-introducao-ao-estudo-de-sequencias. Acesso em: 05 jun. 2025.

TAREFA 2: Descobrindo padrões em divisões com palitos

Objetivo: Identificar e representar padrões nos restos de divisões entre números naturais.

Público-alvo: 6° ano do ensino fundamental.

Duração: Duas aulas de 45 minutos cada.

Materiais necessários:

- Lápis;
- Borracha;
- Folhas de sulfite;
- Palitos de sorvete.

Desenvolvimento:

Introdução

A turma deve ser dividida em grupos de até quatro pessoas e cada grupo receberá uma quantidade de palitos de sorvete diferente de outro grupo. A distribuição das quantidades pode ser feita por sorteio. A seguir, são colocadas as quantidades de palitos interessantes para a tarefa:

10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
18	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**

Realização

Utilizando a folha de sulfite, cada grupo deverá construir uma tabela conforme o modelo abaixo, efetuando divisões por 1 até o próprio número, observando se existe algum padrão com os restos.

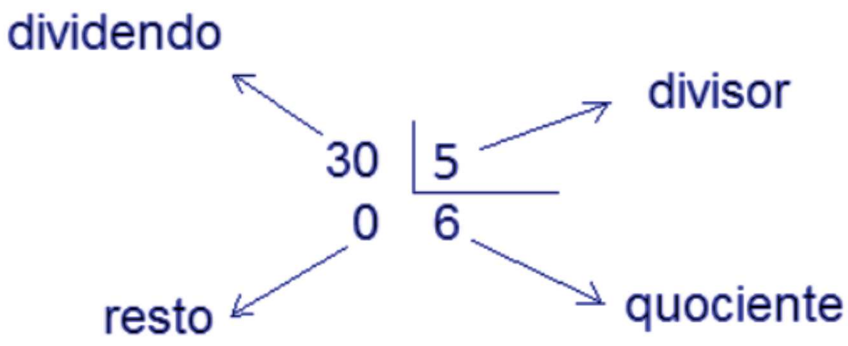
Para o grupo com 10 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
10	1		
10	2		
10	3		
10	4		
10	5		
10	6		
10	7		
10	8		
10	9		
10	10		

Discussão

Após cada grupo finalizar a confecção e preenchimento da tabela, o professor deve solicitar que os estudantes analisem os dados obtidos. Cada grupo deverá apresentar para toda a turma em um minuto quais foram suas observações.

Durante as apresentações, além de controlar o tempo, o professor deve ampliar comentários, sobretudo quando o grupo destacar algo relacionado aos restos das divisões. Se necessário, relembre a nomenclatura relacionada à divisão de números naturais e faça com que os estudantes estabeleçam relações com as colunas da tabela.



Sistematização

Por fim, o professor deve fazer algumas perguntas sobre os restos das divisões para toda a turma:

- O que podemos perceber sobre os restos das divisões realizadas?
- Dado um número qualquer, quais são as possibilidades de restos para divisões por 1 até o próprio número?
- Se fixarmos um dos divisores, qual é o comportamento dos restos? Qual é o menor resto apresentado? Qual é o maior resto?

As conclusões da atividade devem gerar um texto coletivo a ser escrito na lousa pelo professor e copiado pelos estudantes em seus próprios cadernos.

Respostas esperadas e comentários:

Introdução

Professor(a), a distribuição da quantidade de palitos de sorvete por grupo pode ser feita de diversas maneiras: sorteio, decisão do professor, escolha dos estudantes, etc.

Realização

10 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
10	1	10	0

10	2	5	0
10	3	3	1
10	4	2	2
10	5	2	0
10	6	1	4
10	7	1	3
10	8	1	2
10	9	1	1
10	10	1	0

11 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
11	1	11	0
11	2	5	1
11	3	3	2
11	4	2	3
11	5	2	1
11	6	1	5
11	7	1	4
11	8	1	3
11	9	1	2
11	10	1	1
11	11	1	0

12 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
12	1	12	0
12	2	6	0

12	3	4	0
12	4	3	0
12	5	2	2
12	6	2	0
12	7	1	5
12	8	1	4
12	9	1	3
12	10	1	2
12	11	1	1
12	12	1	0

13 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
13	1	13	0
13	2	6	1
13	3	4	1
13	4	3	1
13	5	2	3
13	6	2	1
13	7	1	6
13	8	1	5
13	9	1	4
13	10	1	3
13	11	1	2
13	12	1	1
13	13	1	0

14 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
14	1	14	0
14	2	7	0
14	3	4	2
14	4	3	2
14	5	2	4
14	6	2	2
14	7	2	0
14	8	1	6
14	9	1	5
14	10	1	4
14	11	1	3
14	12	1	2
14	13	1	1
14	14	1	0

15 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
15	1	15	0
15	2	7	1
15	3	5	0
15	4	3	3
15	5	3	0
15	6	2	3
15	7	2	1
15	8	1	7
15	9	1	6
15	10	1	5

15	11	1	4
15	12	1	3
15	13	1	2
15	14	1	1
15	15	1	0

16 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
16	1	16	0
16	2	8	0
16	3	5	1
16	4	4	0
16	5	3	1
16	6	2	4
16	7	2	2
16	8	2	0
16	9	1	7
16	10	1	6
16	11	1	5
16	12	1	4
16	13	1	3
16	14	1	2
16	15	1	1
16	16	1	0

17 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
17	1	17	0

17	2	8	1
17	3	5	2
17	4	4	1
17	5	3	2
17	6	2	5
17	7	2	3
17	8	2	1
17	9	1	8
17	10	1	7
17	11	1	6
17	12	1	5
17	13	1	4
17	14	1	3
17	15	1	2
17	16	1	1
17	17	1	0

18 palitos:

Divido	**Por**	**Cada um fica com**	**Sobra**
18	1	18	0
18	2	9	0
18	3	6	0
18	4	4	2
18	5	3	3
18	6	3	0
18	7	2	4
18	8	2	2

18	9	2	0
18	10	1	8
18	11	1	7
18	12	1	6
18	13	1	5
18	14	1	4
18	15	1	3
18	16	1	2
18	17	1	1
18	18	1	0

19 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
19	1	19	0
19	2	9	1
19	3	6	1
19	4	4	3
19	5	3	4
19	6	3	1
19	7	2	5
19	8	2	3
19	9	2	1
19	10	1	9
19	11	1	8
19	12	1	7
19	13	1	6
19	14	1	5
19	15	1	4

19	16	1	3
19	17	1	2
19	18	1	1
19	19	1	0

20 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
20	1	20	0
20	2	10	0
20	3	6	2
20	4	5	0
20	5	4	0
20	6	3	2
20	7	2	6
20	8	2	4
20	9	2	2
20	10	2	0
20	11	1	9
20	12	1	8
20	13	1	7
20	14	1	6
20	15	1	5
20	16	1	4
20	17	1	3
20	18	1	2
20	19	1	1
20	20	1	0

21 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
21	1	21	0
21	2	10	1
21	3	7	0
21	4	5	1
21	5	4	1
21	6	3	3
21	7	3	0
21	8	2	5
21	9	2	3
21	10	2	1
21	11	1	10
21	12	1	9
21	13	1	8
21	14	1	7
21	15	1	6
21	16	1	5
21	17	1	4
21	18	1	3
21	19	1	2
21	20	1	1
21	21	1	0

22 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
22	1	22	0
22	2	11	0
22	3	7	1

22	4	5	2
22	5	4	2
22	6	3	4
22	7	3	1
22	8	2	6
22	9	2	4
22	10	2	2
22	11	2	0
22	12	1	10
22	13	1	9
22	14	1	8
22	15	1	7
22	16	1	6
22	17	1	5
22	18	1	4
22	19	1	3
22	20	1	2
22	21	1	1
22	22	1	0

23 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
23	1	23	0
23	2	11	1
23	3	7	2
23	4	5	3
23	5	4	3
23	6	3	5

23	7	3	2
23	8	2	7
23	9	2	5
23	10	2	3
23	11	2	1
23	12	1	11
23	13	1	10
23	14	1	9
23	15	1	8
23	16	1	7
23	17	1	6
23	18	1	5
23	19	1	4
23	20	1	3
23	21	1	2
23	22	1	1
23	23	1	0

24 palitos:

Divido	**Por**	**Cada um fica com**	**Sobra**
24	1	24	0
24	2	12	0
24	3	8	0
24	4	6	0
24	5	4	4
24	6	4	0
24	7	3	3
24	8	3	0

24	9	2	6
24	10	2	4
24	11	2	2
24	12	2	0
24	13	1	11
24	14	1	10
24	15	1	9
24	16	1	8
24	17	1	7
24	18	1	6
24	19	1	5
24	20	1	4
24	21	1	3
24	22	1	2
24	23	1	1
24	24	1	0

25 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
25	1	25	0
25	2	12	1
25	3	8	1
25	4	6	1
25	5	5	0
25	6	4	1
25	7	3	4
25	8	3	1
25	9	2	7

25	10	2	5
25	11	2	3
25	12	2	1
25	13	1	12
25	14	1	11
25	15	1	10
25	16	1	9
25	17	1	8
25	18	1	7
25	19	1	6
25	20	1	5
25	21	1	4
25	22	1	3
25	23	1	2
25	24	1	1
25	25	1	0

Discussão

- O que podemos perceber sobre os restos das divisões realizadas?

Professor(a), existem diversos assuntos que podem ser percebidos pelos estudantes. Dependendo do que for, relembre os conceitos de múltiplos, divisores e números primos. Algumas percepções possíveis: Todos os números são divisíveis por 1 (o resto é zero); Alguns números só são divisíveis por 1 e eles mesmos (números primos); Após a metade do número ou o natural mais próximo dela, os restos seguem uma ordem decrescente até chegar no zero, quando o divisor é o próprio número; etc.

- Dado um número qualquer, quais são as possibilidades de restos para divisões por 1 até o próprio número?

Os restos são sempre inferiores aos dividendos e aos divisores.

- Se fixarmos um dos divisores, qual é o comportamento dos restos? Qual é o menor resto apresentado? Qual é o maior resto?

Professor(a), para essa percepção refaça a dinâmica da atividade, mas agora com os divisores fixos. Por exemplo: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,... Estipule que dividam uma determinada quantidade de números pelo divisor dado e observem os restos . Os estudantes irão perceber que:

Quando dividimos por…	**Os restos podem ser…**
2	0 e 1
3	0, 1 e 2
4	0, 1, 2 e 3
5	0, 1, 2, 3 e 4
6	0, 1, 2, 3, 4 e 5
7	0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6
8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7
9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8
10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9
11	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10

Dessa forma, é possível compreender que o menor resto é zero e o maior resto é sempre o antecessor do divisor.

Sistematização

Sugestão de texto:

Professor(a), lembre-se que a proposta é a construção de um texto coletivo. Sendo assim, a seguir apresentamos as ideias trabalhadas, mas não se prenda às palavras que utilizamos aqui para representar essas ideias, uma vez que o texto deve fazer sentido aos seus estudantes:

Na divisão de números naturais, o resto é o valor que sobra quando dividimos um número (dividendo) por outro (divisor) e a divisão não é exata. Por exemplo, ao dividir 7 por 3, o resto é 1, pois 3 cabe duas vezes em 7, sobrando 1. O menor resto sempre será 0, quando a divisão for exata, ou seja, quando o dividendo for múltiplo do divisor. O maior resto possível é sempre o valor anterior ao divisor, ou seja, o resto nunca pode ser igual ao divisor, pois o resto precisa ser menor que o divisor.

Quando dividimos um número por outros números, os restos possíveis variam. Se dividirmos por 2, os restos possíveis são 0 e 1. Se dividirmos por 3, os restos podem ser 0, 1 ou 2. De forma geral, os restos de uma divisão podem variar de 0 até o divisor menos 1. Isso significa que, ao dividir um número por divisores cada vez maiores, o número de possíveis restos também aumenta, mas sempre permanecem dentro dessa faixa.

Avaliação: A avaliação da aprendizagem dos estudantes deve ocorrer pela observação do professor nos momentos de interação dos grupos. Caberá ao professor mediar as discussões e observar se todos estão participando ativamente do que foi proposto. Importante lembrar que, mesmo que os grupos não consigam alcançar as respostas esperadas sozinhos, a discussão dos itens não pode ser considerada inválida. Até porque toda discussão foi resultado de um exercício mental em prol daqueles conhecimentos explorados. Após a realização da tarefa, aos professores que preferirem medir as aprendizagens de forma individual, segue uma sugestão de avaliação:

Avaliação individual:

1. Dado um divisor qualquer, qual é o menor e o maior resto possível em uma divisão?

2. Se dividirmos 14 por 3, qual será o resto?

3. Quais são os restos possíveis ao dividir um número por 5?

Respostas:

1. O menor resto possível é 0; O maior resto possível é **divisor - 1**.

2. O resto será 2 (14 ÷ 3 = 4, resto 2).

3. Os restos possíveis são 0, 1, 2, 3 e 4.

Referências (para saber mais)

CARRER, Janete Jacinta; DOERING, Luisa Rodríguez; RIPOLL, Cydara Cavedon. **Divisão Euclidiana e seu resto desde os anos iniciais**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2018. Disponível em: https://bit.ly/3XC1hRk. Acesso em: 9 mar. 2025.

SOBRINHO, J. de A.; SILVEIRA, H. B.; ALBUQUERQUE, O. D.; SIMAS, T. B. Division of natural numbers: A look at the rest. **The Journal of Engineering and Exact Sciences**, Viçosa/MG, BR, v. 7, n. 1, p. 11970–01, 2021. DOI: 10.18540/jcecvl7iss1pp11970-01-09e. Disponível em: http://bit.ly/4hfWaNP. Acesso em: 9 mar. 2025.

TAREFA 3: Construindo jogos da memória com incógnitas

Objetivo: Compreender a resolução de equações do 1° grau através de jogos e explorar a resolução através da falsa posição.

Público-alvo: 7° ano do ensino fundamental.

Duração: Três aulas de 45 minutos cada.

Materiais necessários:
- Lápis;
- Borracha;
- Caderno;
- Folhas de sulfite.

Desenvolvimento:

Introdução

A atividade será realizada em duplas. Cada dupla receberá duas folhas com 10 cartões (na página seguinte temos um exemplo).

Realização

O processo será o seguinte:

Folha 1: A dupla preencherá os cartões com números distintos e aleatórios à sua escolha.

Folha 2: Para cada número colocado na folha 1, os alunos deverão criar uma equação do primeiro grau que tenha aquele número como resultado. **Exemplo do processo a ser seguido pelos estudantes para construção da folha 2:** Se um dos números da folha 1 for 15, a dupla poderá pensar que "o dobro de quinze mais dois é igual a 32" ($2 \cdot 15 + 2 = 32$). Substituindo o 15 por x, temos: $2x + 2 = 32$. Essa equação deve ser colocada em um dos cartões da folha 2. Cada número deve ser associado a apenas uma equação. Esse processo será repetido até que todos os cartões da folha 2 estejam preenchidos.

Após concluírem suas equações e recortarem seus cartões das duas folhas, as duplas trocarão os cartões com outra dupla. Trata-se de um jogo da memória que tem como **objetivo identificar as equações do primeiro grau com seus resultados.**

Discussão e sistematização

Aproveitando o jogo realizado, a ideia é apresentar aos estudantes que é possível chegar ao valor correto de x mesmo inicialmente apostando em uma resposta incorreta. Esse método é conhecido como método da falsa posição, presente em papiros egípcios.

Vamos supor a situação do jogo da memória onde um estudante se deparou com uma carta com a equação $3x - 5 = 10$ e na outra o número 17. Supondo que a pessoa não soubesse nenhum método para resolver essas equação, poderia supor que o valor de x era 17:

$3 \cdot 17 - 5 = 46$. Repare que o resultado está muito distante do 10. Para chegarmos no valor do resultado da equação que é 10, podemos considerar retirar 36 dos dois lados da igualdade, pois $46 - 36 = 10$:

$$3 \cdot 17 - 5 - 36 = 46 - 36$$

Efetuada a multiplicação entre 3 e 17 e a subtração 46 - 36:

$$51 - 5 - 36 = 10$$

Agora, compare essa igualdade com a equação original. Não mexeremos no -5, pois faz parte da equação. E fazemos a subtração 51 - 36:

$$(51 - 36) - 5 = 10$$

$$15 - 5 = 10$$

Novamente, compare com a equação original. O 15 está ocupando o lugar na equação destinado ao 3x na equação original. Logo, $3x = 15$, assim $x = 5$.

Professor(a), após discutir com estudantes esse exemplo, apresente as seguintes equações e números para início do método da falsa posição:

a) $2x - 4 = 8$ e suponha $x = 12$.

b) $4x + 3 = 19$ e suponha $x = 5$.

Respostas esperadas e comentários:

Introdução

Professor(a), a montagem das duplas pode ser feita da maneira que preferir.

Realização

Professor(a), nesse momento verifique a aprendizagem dos estudantes quanto a resolução de equações do primeiro grau.

Discussão e sistematização

a) $2x - 4 = 8$ para $x = 12$

$2 \cdot 12 - 4 = 24 - 4$

$2 \cdot 12 - 4 = 20$

$2 \cdot 12 - 4 - 12 = 20 - 12$

$24 - 4 - 12 = 8$

$(24 - 12) - 4 = 8$

$12 - 4 = 8$

Como 12 está no lugar de $2x$, então $x = 6$.

b) $4x + 3 = 19$ para $x = 5$

$4 \cdot 5 + 3 = 20 + 3$

$4 \cdot 5 + 3 = 23$

$4 \cdot 5 + 3 - 4 = 23 - 4$

$4 \cdot 5 + 3 - 4 = 19$

$20 + 3 - 4 = 19$

$(20 - 4) + 3 = 19$

$16 + 3 = 19$

Como 16 está no lugar de 4x, então x = 4.

Avaliação: A avaliação da aprendizagem dos estudantes deve ocorrer pela observação do professor nos momentos de interação das duplas. Caberá ao professor mediar as discussões e observar se todos estão participando ativamente do que foi proposto. Importante lembrar que, mesmo que as duplas não consigam alcançar sozinhas as respostas esperadas, a discussão dos itens propostos não pode ser considerada inválida. Até porque toda discussão foi resultado de um exercício mental em prol daqueles conhecimentos explorados. Após realização da tarefa, aos professores que preferirem medir as aprendizagens de forma individual, segue uma sugestão de avaliação:

Avaliação individual

1. O salário de Joana é o dobro do salário de Maria. Se o salário de Maria é x reais, escreva o salário de Joana em termos de x e, em seguida, calcule o salário de Joana se o salário de Maria for 1.500 reais.

2. Resolva a equação $4x - 7 = 21$.

3. Dada a equação $5x - 20 = 10$, suponha que o valor inicial de x seja 7. Realize os cálculos e determine o valor correto de x.

Respostas:

1. Maria: x e Joana: $2x$. Se $x = 1500$, então $2x = 3000$. Logo, o salário de Joana é 3000 reais.

2. $x = 7$

3. $5x - 20 = 10$ para $x = 7$

$5 \cdot 7 - 20 = 35 - 20$

$5 \cdot 7 - 20 = 15$

$5 \cdot 7 - 20 - 5 = 15 - 5$

$5 \cdot 7 - 20 - 5 = 10$

$35 - 20 - 5 = 10$

$(35 - 5) - 20 = 10$

$30 - 20 = 10$

30 está ocupando a posição de $5x$, ou seja, $x = 6$.

Referências (para saber mais)

IMÁTICA. **Regra da Falsa Posição**. 2008. Disponível em: https://bit.ly/4ifGz25. Acesso em: 01 fev. 2025.

OBMEP. **Equações e Inequações do 1° grau**. Portal da OBMEP. Disponível em: https://bit.ly/4iuys1e. Acesso em: 9 mar. 2025

TAREFA 4: Descobrindo relações entre ângulos e polígonos

Objetivo: Compreender os padrões em torno da soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

Público-alvo: 7° ano do ensino fundamental.

Duração: Quatro aulas de 45 minutos cada.

Materiais necessários:

- Lápis;
- Borracha;
- Caderno;
- Folhas de sulfite;
- Geoplano físico ou virtual (https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/).

Desenvolvimento:

Introdução

Montagem das duplas, disponibilização de geoplanos.

Realização

Em duplas, os estudantes deverão com o auxílio do Geoplano identificar quantos triângulos internos existem em polígonos convexos com mais de três lados. Para essa atividade, os estudantes já devem saber que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Com isso, identificado a quantidade de triângulos em polígonos com mais de três lados, será possível somar os ângulos internos desses outros polígonos pela quantidade de triângulos possíveis em seu interior. Cada dupla deve preencher a seguinte tabela:

Nome do polígono convexo	Número de lados do polígono	Número de triângulos internos possíveis	Soma dos ângulos internos do polígono
Triângulo	3	1	$1 \cdot 180° = 180°$
Quadrilátero	4	2	$2 \cdot 180° = 360°$
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octógono			
Eneágono			
Decágono			
Undecágono			
Dodecágono			

Discussão

Professor(a), após o preenchimento correto da tabela, uma discussão deve ser feita com toda a turma sobre os padrões observados pelos estudantes, principalmente respondendo duas perguntas:

- Qual é a relação entre o número de lados dos polígonos convexos e a quantidade de triângulos internos possíveis neles? Dado um polígono convexo de **n** lados, qual é a quantidade de triângulos internos que ele deve ter?
- Qual é a relação entre a quantidade de triângulos internos possíveis em um polígono convexo e a soma dos seus ângulos internos? Dado um polígono convexo de **n** lados, qual é a soma dos ângulos internos desse polígono?

Sistematização

Nesta parte, os estudantes devem chegar em uma representação algébrica sobre a discussão apresentada. Se tivéssemos um polígono convexo de n lados. Qual seria a quantidade de triângulos possíveis em seu interior? Qual seria a soma dos seus ângulos internos?

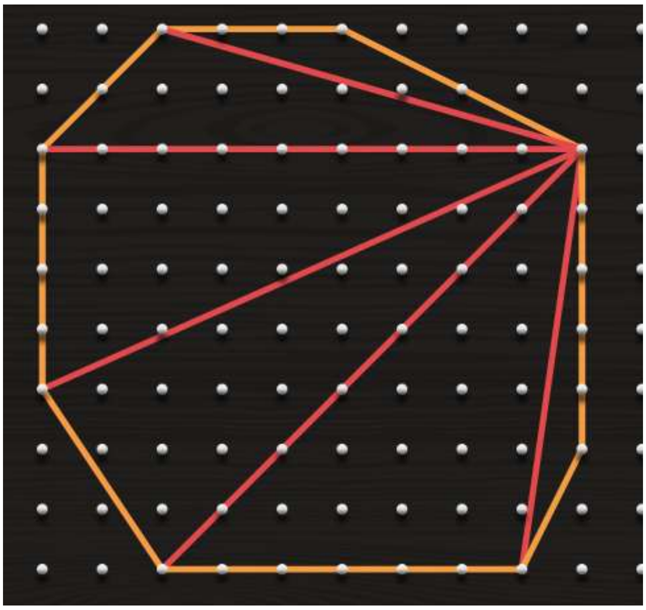
Respostas esperadas e comentários:

Realização

Professor(a), a seguir está o preenchimento correto da tabela. No momento de construção e explicação da comanda, talvez seja importante relembrar alguns conceitos como polígono convexo e ângulos internos.

Nome do polígono convexo	**Número de lados do polígono**	**Número de triângulos internos possíveis**	**Soma dos ângulos internos do polígono**
Triângulo	3	1	$1 \cdot 180° = 180°$
Quadrilátero	4	2	$2 \cdot 180° = 360°$
Pentágono	5	3	$3 \cdot 180° = 540°$
Hexágono	6	4	$4 \cdot 180° = 720°$
Heptágono	7	5	$5 \cdot 180° = 900°$
Octógono	8	6	$6 \cdot 180° = 1080°$
Eneágono	9	7	$7 \cdot 180° = 1260°$
Decágono	10	8	$8 \cdot 180° = 1440°$
Undecágono	11	9	$9 \cdot 180° = 1620°$
Dodecágono	12	10	$10 \cdot 180° = 1800°$

Possível uso do Geoplano online para obter a quantidade de triângulos possíveis em um octógono:



Discussão

- A quantidade de triângulos internos possíveis em um polígono convexo é o número de lados desse polígono menos 2;
- A soma dos ângulos internos de um polígono convexo se dá pela multiplicação da quantidade de triângulos possíveis em seu interior e 180°.

Sistematização

Dado um polígono convexo de **n** lados. O número de triângulos internos desse polígono é **n - 2.** Desse modo, a soma dos ângulos internos desse polígono é **(n - 2)** · **180º.**

Avaliação: A avaliação da aprendizagem dos estudantes deve ocorrer pela observação do professor nos momentos de interação das duplas. Caberá ao professor mediar as discussões e observar se todos estão participando ativamente das construções. Importante lembrar que, mesmo que as duplas não consigam alcançar as respostas esperadas, a discussão dos itens não deve ser considerada inválida. Até porque toda discussão foi resultado de um exercício mental em prol daqueles conhecimentos explorados. Após a realização da tarefa, aos professores que preferirem medir as aprendizagens de forma individual, segue uma sugestão de avaliação:

Avaliação individual

1. Um polígono convexo tem 14 lados. Qual é a soma dos ângulos internos desse polígono?

2. Um polígono convexo possui 20 lados. Qual é a soma dos ângulos internos desse polígono?

3. A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 1440°. Quantos lados esse polígono possui?

4. Vamos pensar: Suponhamos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo seja 1550°, determine quantos lados tem esse polígono. Explique sua resposta.

Respostas:

1. A soma dos ângulos internos de um polígono de 14 lados é 2160°.

2. A soma dos ângulos internos de um polígono de 20 lados é 3240°.

3. O polígono possui 10 lados. Trata-se de um decágono.

4. Não existe polígono com essa soma de ângulos internos, uma vez que 1550° não é múltiplo de 180°.

Referências

MATH LEARNING CENTER. **Geoboard**. Disponível em: https://apps..org/geoboard/. Acesso em: 9 mar. 2025.

ANEXO II - ATIVIDADES DA REDE MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO DE SÃO PAULO

6º ano: SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. **Caderno da cidade: saberes e aprendizagens** : Matemática – 6º ano. São Paulo : SME/COPED, 2024.

(EF06M13) Investigar se há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

ATIVIDADE 4 - página 45

(EF06M14) Compreender e utilizar os sinais de associação (parênteses, colchetes e chaves) para estabelecer uma ordem de prioridade entre as operações numa expressão numérica.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2 - página 82 até a página 84.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3 - página 235 até a página 241.

(EF06M15) Investigar relações de proporcionalidade direta, inversa ou de não proporcionalidade entre duas grandezas.

ATIVIDADE 4 - página 109 até a página 114.

7º ano: SÃO PAULO (SP). Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. **Caderno da cidade: saberes e aprendizagens** : Matemática – 7º ano. São Paulo : SME/COPED, 2024.

(EF07M10) Identificar diferentes usos para as letras ou símbolos, em situações que envolvam generalização de propriedades, incógnitas, fórmulas, relações numéricas e padrões.

ATIVIDADE 2 - página 10 até página 12.

ATIVIDADE 3 - página 13 até página 16.

Itens 2 e 3 da ATIVIDADE 5 - páginas 18 e 19

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 4 - página 31 até página 35.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3 - página 57 até página 62.

(EF07M11) Traduzir e resolver um problema em linguagem algébrica, usando equações do 1º grau.

ATIVIDADE 4 - páginas 16 e 17

Item 4 da ATIVIDADE 5 - página 20.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2 - página 108 até página 111.

ATIVIDADE 4 - página 167 até página 168.

(EF07M12) Solucionar equações do 1º grau compreendendo o significado de incógnita e da raiz.

Item 1 da ATIVIDADE 5 - página 18 e 19.

(EF07M13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a de incógnita.

ATIVIDADE 1 - página 8 até página 10.

ATIVIDADE 3 - página 165 até página 166.

(EF07M14) Utilizar simbologia algébrica para expressar regularidades em sequências numéricas.

ATIVIDADES 1, 2 e 4 - página 48 até página 57

ATIVIDADE 4 - página 191 até página 192.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3 - página 231 até a página 233.

(EF07M15) Solucionar e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2 - página 82 até a página 86.

ATIVIDADE 4

1. João descobriu que os povos da antiguidade usavam pedras para fazer marcações numéricas, ou seja, cada pedra podia representar um animal, a quantidade de uma colheita etc. Muitas vezes, eles utilizavam pedras para identificar a quantidade de animais vendidos, por exemplo. João desafiou Ana a dividir quantidades em partes iguais e a analisar quando as divisões eram exatas e quando não eram. Vamos ajudá-la nessas divisões:

a) 100, 102, 113, 115, 116, 119, 120, 121 pedras divididas em duas partes iguais.

b) 100, 102, 113, 115, 116, 118, 119, 121, 123, 124 pedras divididas em três partes iguais.

c) 100, 102, 103, 115, 116, 121, 122, 125, 126 pedras divididas em cinco partes iguais.

d) Analise o resto de cada uma das divisões realizadas. Ele pode ser maior, menor ou igual ao divisor? Explique.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

O concurso de Matemática

João e Ana participaram de um concurso de Matemática, em duplas. O prêmio tão esperado era uma viagem à África. Eles ficaram animadíssimos, pois já estavam pesquisando muito a respeito do continente africano.

Veja algumas das questões desse concurso e ajude-os a resolvê-las.

ATIVIDADE 1

1 A primeira pergunta foi:

As expressões numéricas: $(34 + 27) \cdot 5$ e $34 + (27 \cdot 5)$ têm o mesmo resultado?

2 No primeiro momento, João disse que as duas expressões tinham o mesmo resultado. Ana discordou do amigo. Ana tem razão. Por quê?

TOME NOTA

Para resolver esse tipo de expressão numérica, é usada uma convenção matemática: os sinais de ( ), [ ], { } são inseridos para determinar a ordem em que as operações de uma expressão numérica devem ser resolvidas. Primeiro, são resolvidas as operações que ficam dentro dos ( ), depois as que ficam dentro dos [ ] e, por último, os que ficam dentro das { }.

ATIVIDADE 2

1 O segundo desafio foi encontrar as expressões numéricas que tenham resultados iguais. Resolva as expressões e circule as que apresentam o mesmo resultado:

a) $10 + (3 \cdot 9 - 7) =$	b) $40 : 10 + 4 \cdot (7 - 2) =$
c) $84 - (3 \cdot 2 - 6) - 15 =$	d) $30 + 2 - \{ 6 : 3 + [9 \cdot (5 - 5)] \} =$
e) $3 \cdot (2 + 5) + (8 : 4 - 2) =$	f) $10 - 2 + \{ 6 : 3 + [2 \cdot (15 - 5)] \} =$

ATIVIDADE 3

Após a conversa com a tia de Ana, João começou a pensar na quantidade de produtos que utilizamos ou consumimos, todos os dias, desde a hora que acordamos até a hora de dormir. Chegou à conclusão de que toda mudança começa por pequenos e significativos passos. Vamos experimentar alguns deles!

1 João pesquisou que, em média, um banho de ducha de 15 minutos consome 135 litros de água. A partir dessa informação, preencha o quadro:

Imagem: Adobe Stock

Água (litros)	Tempo (minutos)
135	15
	20
	5
90	

a) Analisando os dados do quadro, qual é a relação existente entre o consumo de água (litros) e o tempo (minutos)?

b) Quando o tempo do banho foi reduzido a 5 minutos, o que ocorreu com o consumo de água: aumentou, diminuiu ou se manteve?

c) Organize as duas primeiras colunas do quadro em ordem crescente e faça as divisões na terceira coluna:

Água (litros)	Tempo (minutos)	$\frac{\text{Água (L)}}{\text{Tempo (Min)}}$
45	5	45 : 5 = 9
90		
	15	
	20	

d) Ana disse ao amigo que as grandezas água e tempo variam proporcionalmente. Você concorda com Ana? Por quê?

TOME NOTA

Os resultados das divisões entre os valores correspondentes de duas grandezas, realizadas no quadro, são índices comparativos que chamamos de **razão de proporcionalidade**.

e) Qual é a razão de proporcionalidade entre as grandezas do quadro?

Ana percebeu que, nesse quadro, a razão de proporcionalidade entre as grandezas é a mesma. Em suas observações, ela constatou que, se uma grandeza aumenta, a outra também aumenta na mesma proporção.

TOME NOTA

Quando uma grandeza aumenta e a outra aumenta, na mesma proporção, e – além disso – quando uma grandeza diminui e a outra diminui, na mesma proporção, dizemos que essas grandezas são **diretamente proporcionais.** O índice de variação é denominado **coeficiente de proporcionalidade.**

1 Ana pensou a respeito do consumo de energia elétrica durante o banho. Pesquisou na internet e descobriu que 1 hora de banho com o chuveiro elétrico custa por volta de R$ 6,99. Com essa informação, preencha o quadro:

Valores (R$)	Tempo (minutos)
	60
	30
	10
	5

2 Observe a relação entre as grandezas tempo e valores monetários na situação anterior. Essas grandezas são diretamente proporcionais? Se forem, calcule o coeficiente de proporcionalidade:

3 A casa de Ana precisava de uma pintura. Seu pai iria pintar a casa, porém o serviço demoraria 6 dias. Ele só tinha o final de semana. O vizinho da casa de Ana se ofereceu para ajudar a família. Ana registrou a seguinte relação no quadro:

Pessoas	Dias
1	6
2	

Imagem: Adobe Stock

a) O que se pode dizer a respeito do quadro de Ana com relação às grandezas (quantidade de pessoas e dias de duração do trabalho) durante a pintura, sabendo que as duas pessoas trabalham no mesmo ritmo? Explique:

b) O que se pode dizer a respeito dessas grandezas? Elas são diretamente proporcionais? Justifique:

TOME NOTA

Quando uma grandeza aumenta e a outra diminui, na mesma proporção e vice versa, dizemos que essas grandezas são **inversamente proporcionais.** O índice de variação é denominado de **coeficiente de proporcionalidade.**

4 A velocidade média do transporte público, que faz o deslocamento diário da tia de Ana, de sua casa para a fábrica, é de 30 km/h. Esse trajeto, Ana percorre em 2 horas. Se ela for de carro, a velocidade média do deslocamento é de 60 km/h.

Velocidade (Km/h)	Tempo (h)
30	2
60	?

RODA DE CONVERSA

Discuta se a situação acima é um exemplo de grandezas direta ou inversamente proporcionais.

5 Escreva uma pequena síntese com as conclusões da discussão.

ATIVIDADE 4

1 João e Ana analisaram a conta de água, luz e telefone e perceberam que, em todas elas, há uma taxa fixa a ser paga, mesmo que não haja consumo. Na conta de telefone, a taxa fixa é de 42,30 reais e dá direito a realizar 100 minutos de ligação para telefone fixo da mesma cidade. Caso o cliente extrapole esse tempo, serão cobrados mais R$ 0,24 por minuto utilizado. Veja a tabela:

Valor da conta (R$)	Tempo (minutos)
42,30	100
66,30	200
90,30	300

RODA DE CONVERSA

Discuta oralmente: se o cliente dobrar o valor do consumo dos minutos, o que ocorrerá com o valor da conta? O que se pode dizer a respeito dessas grandezas? Existe proporcionalidade direta ou inversa entre elas? Por quê?

2 João disse que, como nas contas de água, luz e telefone há uma taxa fixa a ser paga, mesmo que não haja consumo, as grandezas valor e tempo de uso **não são diretamente proporcionais e nem inversamente proporcionais.** Você concorda com ele? Justifique.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

A visita ao Centro de Tradições Nordestinas

Isabela foi com sua família a uma festa no Centro de Tradições Nordestinas (CTN) e convidou o amigo Felipe. Ele estava curioso em conhecer o local, pois havia pesquisado que lá tem diversas comidas típicas e apresentações culturais. O CTN fica localizado no bairro do Limão, na Cidade de São Paulo.

ATIVIDADE 1

1 O pai de Isabela havia dado a ela 40 reais para gastar com comida. Felipe havia levado a mesma quantia.

Isabela comprou um suco por 5 reais, uma tapioca com queijo por 12 reais e dois munguzás por 3 reais cada.

a) Felipe desafiou a amiga Isabela a criar uma expressão numérica que retratasse a compra dela, envolvendo todos os valores da compra. Ajude-a representando quanto ela gastou utilizando uma expressão numérica.

b) Quanto Isabela recebeu de troco após a compra das comidas típicas? Resolva por meio de uma expressão numérica.

ATIVIDADE 2

1 A família de Isabela foi para o CTN de táxi. Logo que entraram, Felipe notou que o taxímetro já marcava o valor de R$ 5,50, que era a bandeirada. Cada quilômetro rodado sairia por R$ 4,00. O táxi percorreu 15 km da casa de Isabela até o CTN.

a) Complete as conclusões de Felipe com relação ao preço da corrida do táxi:

"Cada quilômetro percorrido custa ______reais, e foram percorridos _______quilômetros. ______ · ______ = _____ reais, logo 5,50 reais + ______ reais = ________ reais".

b) Esses cálculos realizados por Felipe podem ser representados por meio de uma expressão numérica. Que expressão é essa?

RODA DE CONVERSA

Você percebeu que há uma ordem na realização das operações? Converse com seu professor e colegas.

c) Qual é o resultado de uma expressão numérica quando realizamos primeiro a adição $6 + 15$ e depois multiplicamos por 3? E quando fazemos primeiro a multiplicação $15 \cdot 3$ e depois adicionamos 6?

VAMOS PESQUISAR

A linguagem matemática segue algumas regras, de modo que não sejam geradas respostas ambíguas ou equivocadas. Além disso, muitas regras têm suas justificativas, ou seja, não foram escolhidas ao acaso. É necessário conhecer as regras que envolvem as expressões numéricas para resolvê-las corretamente.

1ª regra: As multiplicações e divisões são as operações que devem ser efetuadas primeiro, na ordem em que aparecem. Depois, devem ser efetuadas as adições e subtrações, na ordem em que aparecem.

2ª regra: Se as operações apresentarem parênteses, colchetes e chaves, as operações que estiverem dentro deles deverão ser realizadas primeiro, também seguindo a 1ª regra.

3ª regra: O que está dentro dos parênteses deve ser resolvido primeiro, depois o que está dentro dos colchetes e, por último, o que está dentro das chaves.

E se uma expressão numérica tiver potenciações ou radiciações, como resolvê-las? Pesquise.

2 Após o lanche, os dois amigos se sentaram e Isabela anotou os seguintes números no guardanapo do amigo.

$$7 \square \; 8 \square \; 0 \square \; 1 \square$$

Ela o desafiou a resolver o problema preenchendo cada quadradinho com o sinal de adição (+) ou o de multiplicação (·), de modo que o resultado obtido seja:

a) o maior possível;

b) o menor possível.

Tente você também resolver o problema recorrendo a estratégias próprias e discuta as soluções com seu colega:

ATIVIDADE 3

1 Cada pessoa da família de Isabela gastou certa quantia de dinheiro com alimentação nas barracas. Crie uma expressão numérica utilizando apenas os algarismos 2, 3 e 4 uma única vez, para representar os gastos da mãe e do pai de Isabela. Você poderá utilizar as operações adição e multiplicação, os parênteses, colchetes e chaves.

a) A mãe gastou 24 reais:

b) O pai gastou 20 reais:

2 Observe agora a explicação de cada uma das personagens a respeito da resolução da expressão numérica. Identifique se alguma explicação está incorreta.

a) $17 \cdot (14 - 2) = ?$

Ilustração: Ana Rita Costa

b) $[(15 + 14) \cdot 5 - 20] = ?$

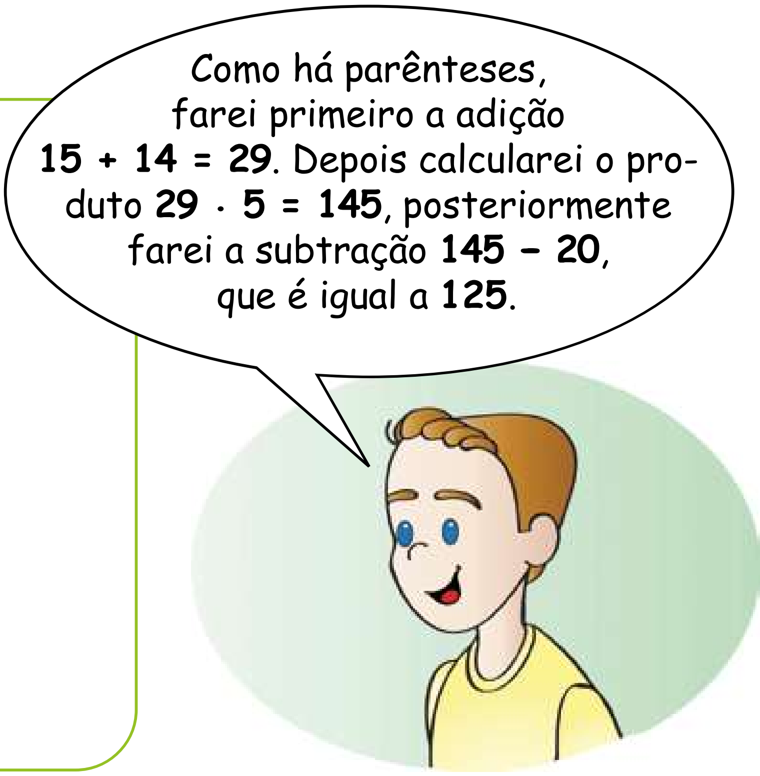


Ilustração: Ana Rita Costa

ATIVIDADE 4

1 Resolva você também algumas expressões numéricas:

a) $4^2 \cdot [2^4 : (10 + 2 \cdot 3)] + 2^0 =$	b) $7 \cdot [74 - (4 + 7 \cdot 10)] =$

c) $[(2^3 + 2^4) \cdot 3 : 4] + 3^2 =$	d) $25 + \{3^3 : 9 + [3^2 \cdot (5 - 3)]\} =$

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

Álgebra

Nesta sequência, você vai conhecer um pouco do contexto histórico da Álgebra e o significado dessa palavra.

Gustavo aprendeu, na escola, que há indícios de que os povos antigos, como os babilônicos, hindus, egípcios, gregos e árabes, já conheciam a Álgebra.

Ele fez uma pesquisa sobre a origem da palavra Álgebra e descobriu que ela se relaciona com o termo árabe **AL-JABR**, presente no título do livro Hisab al-jabr w'al-muqabalah, escrito pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi, por volta do ano 825, em Bagdá.

Descobriu também que uma tradução literal do título desse livro é "ciência da restauração (ou reunião) e redução". Essa tradução é dada por Boyer, que é um historiador matemático, e a explica como "a transposição de termos subtraídos para o outro membro da equação" e "o cancelamento de termos semelhantes (iguais) em membros opostos da equação".

Hoje, a tradução mais aceita para a palavra Álgebra seria a "ciência das equações". A Álgebra, no entanto, não se reduz às equações e as letras assumem outros papéis, diferentes de uma incógnita, como acontece nas equações.

SALA DIGITAL

Para saber mais sobre a história da Álgebra, pesquise na internet, seguindo as orientações do(a) professor(a) de Matemática.

ATIVIDADE 1

Laís e Gustavo aprenderam, na escola, que o papel mais conhecido da letra na Álgebra é o de incógnita, pois ela é utilizada para representar valores desconhecidos de uma equação. As letras podem, também, desempenhar o papel de variável, as quais representam valores que dependem de outros e, por isso, variam.

1 Leia as duas situações a seguir e verifique se a letra desempenha o papel de incógnita (**I**) ou de variável (**V**):

Alice foi à uma loja para alugar uma bicicleta e encontrou a seguinte informação: *Para alugar uma bicicleta, o valor é composto por uma taxa de R$ 12,00, adicionada ao valor de R$ 50,00 por dia de uso:* $p = 12 + 50d$	
Tia Vera não gosta de revelar sua idade. Neste ano, ela disse: *o dobro de minha idade hoje, menos 10, é igual a meio século e representou por:* $2 \cdot x - 10 = 50$	

TOME NOTA

Na primeira situação, o valor atribuído à letra *d* pode variar de acordo com o numero de dias de uso da bicicleta. Na segunda situação, o valor é único, ou seja, não há outro número que atenda à letra *x* para que se possa solucionar a equação.

2 Resolva estes dois problemas, depois marque com um **X** o papel que o valor desconhecido assume: incógnita ou variável.

a) Tenho 28 anos e sei que a soma da minha idade com a da minha irmã é 50 anos. Qual é a idade da minha irmã?

( ) variável ( ) incógnita

b) O salário de um vendedor é composto por uma parte fixa e outra variável. A parte fixa é de R$ 1 320,00 e a variável corresponde a 10% das vendas realizadas no mês. Qual o valor das vendas para que o salário dele ultrapasse R$ 3 000,00?

( ) variável ( ) incógnita

ATIVIDADE 2

Gustavo viu, na internet, painéis construídos a partir de uma regra que se repete. Ele perguntou à Laís se ela já tinha visto esse tipo de imagem, principalmente em ornamentos indígenas e africanos. Ela disse que conhecia alguns deles e, inspirada nessas fotos, esboçou algumas figuras em uma folha quadriculada. Observe:

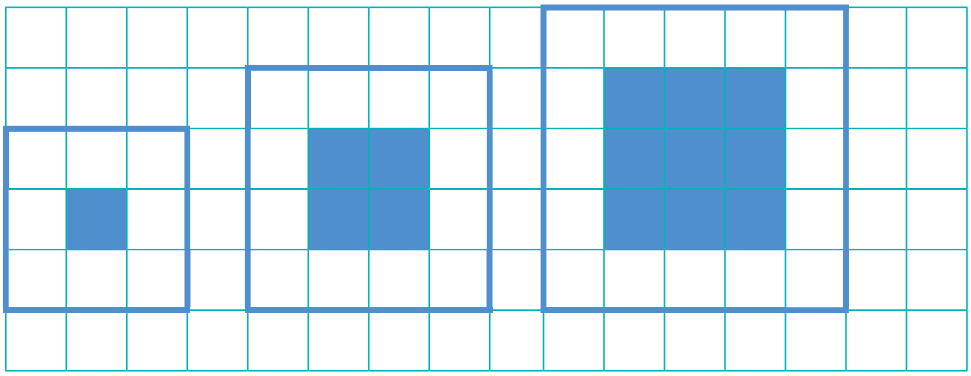


Ilustração: Joseane A. Ferreira

1 Se ela continuar com as figuras, seguindo a mesma regra, como ficará a próxima figura? Desenhe.

Ilustração: NUCA

2 Laís começou a preencher o quadro abaixo, mas não terminou, complete-o para ela:

Posição da figura	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Número de quadradinhos azuis	1	4				
Número total de quadradinhos (azuis e brancos)	9	16				

3 Laís queria saber quantos são os quadradinhos azuis e qual é o total de quadradinhos da figura que ocupa a 15ª posição. Vamos ajudá-la?

4 E na 30ª posição, quantos quadradinhos azuis há e qual é o total de quadradinhos da figura?

5 E na enésima figura, quantos quadradinhos azuis existem e qual é o total de quadradinhos da figura? Utilize a letra *n* para representar o número de unidades de quadradinhos azuis da figura e escreva a expressão correspondente.

ATIVIDADE 3

Laís e Gustavo já exploraram, na escola, a álgebra no contexto geométrico, observando polígonos para calcular o total de diagonais que partem de cada vértice.

Eles já sabiam que um triângulo não tem diagonais e que, nos demais polígonos convexos, é possível calcular o número de diagonais sem desenhá-los.

Observe a tabela que mostra o número de lados e de diagonais que partem de um vértice de alguns polígonos convexos.

Polígonos	Número de lados	Número de diagonais com origem em um vértice	Número de diagonais do polígono
Quadrilátero	4	1	
Pentágono	5	2	
Hexágono	6	3	
Heptágono	7	4	
Octógono	8	5	
Eneágono	9	6	
Decágono	10	7	
Undecágono	11	8	

1 Comparando as duas colunas, número de lados e número de diagonais com origem em um vértice, você percebe alguma regularidade? Explique.

2 O que é possível concluir a partir da análise da tabela? Escreva uma expressão que representa o número de diagonais em um vértice de um polígono convexo de *n* lados.

Como determinar o total de diagonais de um polígono? O que acontece se multiplicarmos por *n* a expressão registrada no ítem 2?

3 Escreva a sua conclusão. Você pode utilizar os polígonos da tabela anterior:

4 O que é preciso fazer para que a expressão obtida possibilite o cálculo do número total de diagonais de um polígono convexo qualquer? Justifique sua resposta.

Você chegou à fórmula que permite calcular o total de diagonais de um polígono. Retorne à tabela e verifique a validade dessa fórmula para cada polígono dado.

D =

5 Como você interpreta essa fórmula? Qual é o papel da letra *n* nesse caso?

6 Um polígono de 15 lados tem quantas diagonais?
Valide a sua resposta utilizando a fórmula do total de diagonais de um polígono convexo qualquer.

ATIVIDADE 4

Para que uma balança de dois pratos possa manter o equilíbrio, os “pesos”, em ambos os lados, devem ser iguais. Observe os problemas a seguir que envolvem balanças de dois pratos. Laís e Gustavo queriam saber o “peso” das bolas e dos dados de jogo. Ajude-os, resolvendo as equações, utilizando o processo de cálculo que preferir.

1 Quatro bolas, de *x* gramas cada, equilibram-se com 2 maçãs de 50 gramas cada. Escreva a equação correspondente e encontre o valor da incógnita *x* para determinar o valor da massa de cada bola:

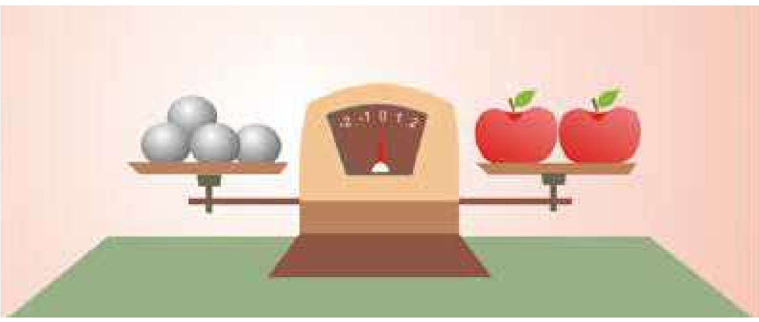


Ilustração: Joseane A. Ferreira

2 Para equilibrar a balança a seguir, foram utilizados 7 dados de jogos, iguais entre si, e 4 pesos de 5 g cada. Quanto "pesa" um dado?

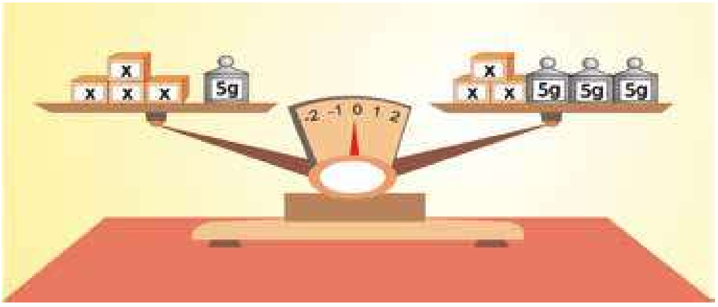


Ilustração: Joseane A. Ferreira

ATIVIDADE 5

Laís desafiou Gustavo a descobrir qual é o valor da incógnita nas equações.

1 Ajude Gustavo nesse desafio, determine o valor de *x* em cada um dos casos, utilizando o procedimento de cálculo que preferir. Deixe o seu raciocínio registrado:

$2x = 36$	$x - 15 = 9$

$4z = 20 + 2z$	$\frac{2(x+6)}{2} = 8$

2 Laís gosta muito de Matemática e investigou algumas propriedades das operações. De tanto ela investigar, chegou à conclusão de que uma propriedade das operações pode ser generalizada, utilizando a Álgebra. Observe uma investigação de Laís e preencha o quadro:

A + B	B + A	C
1 + 4	4 + 1	5
2 + 4	4 + 2	6
3 + 4	4 + 3	7
4 + 4	4 + 4	8

Laís pesquisou e descobriu que a propriedade comutativa da adição pode ser indicada como:

$$\mathbf{A + B = B + A = C}$$

Da mesma forma, ela explorou outra propriedade:

(A + B) + C	A + (B + C)	(A + B) + C = A + (B+C)
(1 + 4) + 5	1 + (4 + 5)	10
(2 + 4) + 5	2 + (4 + 5)	11
(3 + 4) + 5	3 + (4 + 5)	12

Ela descobriu que a propriedade associativa da adição pode ser indicada como

$$\mathbf{(A + B) + C = A + (B + C) = D}$$

3 Agora faça como Laís, para as multiplicações a seguir. Preencha os quadros, investigando as relações:

a)

A · B	B · A	C

b)

(A · B) · C	A · (B · C)	D

Com relação à multiplicação, também é possível explorar as propriedades comutativa e associativa, como você viu nas tabelas a e b.

Escreva as igualdades que você obteve nas tabelas a e b:

4 Escreva a equação que traduz o problema:
A soma do dobro de um número com 3 é igual a 7. Qual é esse número?

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

O dia a dia de Laís e Gustavo

Nesta sequência, você vai analisar, resolver e formular problemas com números racionais, envolvendo as operações matemáticas fundamentais. Vai, ainda, conhecer algumas situações do dia a dia vivenciadas pelos colegas Gustavo e Laís.

ATIVIDADE 1

Gustavo sempre ajuda sua mãe a fazer compras em um sacolão perto de sua casa. Ele faz muitas perguntas sobre coisas que observa no sacolão. Uma é sobre a escrita de números com vírgula.

Sua mãe falou que, os números racionais podem ser representados na forma fracionária e na forma decimal.

1 Complete o quadro abaixo:

Local	Legenda	Par ordenado da localização
Escadarias	C	
Museu Botânico	B	
Lago dos Bugios	D	
Brejo Natural	E	

TOME NOTA

Utilize a convenção: o primeiro elemento do par ordenado é do eixo horizontal – eixo das abscissas, e o segundo elemento do par ordenado é do eixo vertical – eixo das ordenadas.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 4

Investigações geométricas

Nesta sequência, junto com a turma de Laís, você vai investigar uma relação muito interessante entre o número de vértices, faces e arestas de um poliedro convexo em função do polígono da base.

ATIVIDADE 1

A turma de Laís fez uma investigação e preencheu uma tabela. Interprete-a e depois discuta com seus colegas.

Polígonos da base	Nº de lados do polígono da base	Nº de arestas da pirâmide	Nº de arestas do prisma
Triângulo	3	6	9
Quadrilátero	4	8	12
Pentágono	5	10	15
Hexágono	6	12	18
n lados	n	$2n$	$3n$

RODA DE CONVERSA

Discuta oralmente:

Que relação é possível observar no que diz respeito ao número de lados dos polígonos da base e o número de arestas dos prismas? Escreva uma pequena síntese da discussão.

A relação existente entre o número de lados dos polígonos da base e as arestas de qualquer pirâmide é a mesma? Justifique. Escreva uma pequena síntese da discussão.

ATIVIDADE 2

Ajude Laís a preencher outra tabela com o número de vértices do polígono da base e o número de vértices do poliedro correspondente ao polígono da base:

	Número de vértices do polígono da base	Número de vértices da pirâmide	Número de vértices do prisma
Triângulo	3		
Quadrilátero	4		
Pentágono	5		
Hexágono	6		
n vértices	n		

1. Que relação é possível observar entre o número de vértices do polígono da base e o número de vértices da pirâmide?

2. Há também uma relação entre o número de vértices do polígono da base e o número de vértices do prisma?

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

Os desafios de Davi e Fernanda com sequências numéricas

Nesta sequência, abordaremos a utilização da simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. Junte-se a Fernanda e Davi e os acompanhe na resolução dos desafios que envolvem sequências numéricas.

ATIVIDADE 1

1 Fernanda desafiou Davi para descobrir a continuidade de uma sequência numérica. Ela colocou os três primeiros elementos e fez algumas perguntas a seu irmão:

a) Quais são os três próximos elementos da sequência: 4, 8, 12, ...?

b) Qual é o elemento que fica na décima posição dessa sequência?

c) Complete a sequência com os elementos faltantes:

4, 8, 12 ,_____, _____, _____, _____, 32, _____, 40, _____, 48, 52, _____, _____.

d) Com base nas regularidades observadas, explique o padrão dessa sequência:

e) Qual é a expressão algébrica que relaciona um elemento qualquer da sequência com a sua posição?

2 Fernanda propôs mais um desafio para Davi descobrir a continuidade de uma sequência numérica. Novamente, ela colocou os três primeiros elementos e fez algumas perguntas: 5, 10, 15...

a) Quais são os três próximos elementos dessa sequência?

b) Qual é o elemento que fica na vigésima posição dessa sequência?

c) Complete a sequência com os elementos faltantes:

5, 10, 15, ______, ______, ______, 35, ______, 45, _____, 55, ______, ______.

d) Com base nas regularidades observadas, explique como é formada essa sequência:

e) Qual é a expressão algébrica que relaciona um elemento qualquer com sua posição na sequência?

f) Utilizando a expressão obtida anteriormente, calcule o centésimo elemento dessa sequência:

ATIVIDADE 2

1 Fernanda desafiou Davi a formar uma sequência numérica com a seguinte característica: os elementos são divisíveis por 3 e terminam em 0. Davi fez a seguinte sequência com 5 elementos:

0, 30, 60, 90, 120

a) Complete a sequência de Davi com mais 3 elementos:

b) Quais seriam o 10º, o 15º e o 20º elementos dessa sequência?

c) Qual é a expressão algébrica que representa cada elemento de posição *n* dessa sequência?

d) É possível que essa sequência tenha o seguinte padrão: ser múltiplo de algum número e terminar em 0? Explique como você pensou.

ATIVIDADE 3

Davi estava conversando com Fernanda e os dois lembraram que um número é divisível por outro quando a divisão for exata, ou seja, o resto é zero.

1. Davi analisou os números 125, 140, 234, 285, 90, 91, 542, 543, 600 e verificou se eram divisíveis por 2. Obteve duas situações. Quais são elas? Justifique.

2. Fernanda analisou os números 125, 140, 234, 285, 90, 91, 542, 543, 600 e verificou se eram divisíveis por 5. Obteve algumas situações. Quais são elas? Justifique.

3. Eles analisaram os números 125, 140, 234, 285, 90, 91, 542, 543, 600 e verificaram se eram divisíveis por 3. Obtiveram algumas situações. Quais são elas? Justifique.

4 Depois de analisar os itens 1, 2 e 3, Fernanda desafiou Davi a descobrir qual era o número divisível por 2, 3 e 5, simultaneamente, e pediu para ele justificar a escolha. Ajude-o nessa tarefa:

125	140	234	285	90	91	542	543	600

5 Fernanda pensou: se $2 \cdot 3 = 6$, será que os números divisíveis por 2 e por 3, ao mesmo tempo, seriam divisíveis também por 6? Qual sua hipótese? Verifique se, entre os números 125, 140, 234, 285, 90, 91, 542, 543, 600, os que são divisíveis por 2 e por 3 são também divisíveis por 6. Dê outros exemplos.

6 Entre os números divisíveis por 3, verifique quais são divisíveis por 9. Justifique como você procedeu. Tente elaborar uma regra para identificar quando um número é divisível por 9.

7 Entre os números divisíveis por 2, verifique os que são divisíveis por 4. Justifique como você procedeu. Tente elaborar uma regra para identificar quando um número é divisível por 4:

8 Entre os números divisíveis por 2 e por 4, verifique os que são divisíveis por 8. Justifique como você procedeu. Tente elaborar uma regra para identificar quando um número é divisível por 8:

9 Verifique se os números divisíveis por 2 e por 5 são divisíveis por 10. Dê exemplos e tente elaborar uma regra para identificar quando um número é divisível por 10:

ATIVIDADE 4

1 Após a realização das atividades 1 e 2, é possível concluir que m é múltiplo de t, quando existir um número natural n de modo que $m = n \cdot t$ ou, ainda, que m é divisível por t, quando existir um número natural n tal que $m = \frac{n}{t}$? Justifique sua resposta.

2 Investigue quais são os possíveis restos de uma divisão por 5. Depois, investigue quais são os possíveis restos de uma divisão por 7, 8, 9. Escreva uma conclusão:

3 Investigue quais são os possíveis restos de uma divisão de a por b, com $b \neq 0$:

4 A partir de suas investigações, escreva uma sentença algébrica (fórmula) que representa a relação existente entre o dividendo, o divisor, o quociente e o resto em uma divisão entre dois números naturais, na qual o divisor é um número diferente de zero. Chame de D o dividendo, d o divisor, q o quociente e r o resto. Explique como pensou:

5 Utilizando a fórmula obtida no item 4, resolva os problemas:

a) Calcule o dividendo de uma divisão cujo divisor é 8, o quociente é 12 e o resto é o maior possível:

b) Calcule o divisor de uma divisão cujo dividendo é 168, o quociente é 20 e o resto é 8:

c) Registre os possíveis restos de uma divisão por 16:

d) Calcule o quociente e o resto da divisão de 218 por 22:

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

Outras investigações geométricas

Na Unidade 1, você ajudou Laís e sua turma a investigar o número de vértices, de faces e de arestas de um poliedro convexo em função do polígono da base e explorar a álgebra no contexto geométrico. Agora, você vai explorar, junto com Fernanda, mais algumas relações geométricas e aplicá-las na resolução de problemas.

ATIVIDADE 1

Fernanda também gostava de fazer investigações geométricas. Ela resolveu registrar os resultados de sua investigação em tabelas, uma em relação às pirâmides e outra em relação aos prismas. Veja a tabela que ela construiu em relação às pirâmides:

Número de vértices, faces e arestas de Pirâmides				
Pirâmide de base	**Número de lados do polígono da base**	**V**	**F**	**A**
Triangular	3	4	4	6
Quadrangular	4	5	5	8
Pentagonal	5	6	6	10
Hexagonal	6	7	7	12
Com n lados	n	$n + 1$	$n + 1$	$2n$

RODA DE CONVERSA

Analise a tabela de Fernanda e discuta oralmente:

O que você pode observar em relação ao número de vértices e faces de uma pirâmide e o número de lados do polígono da base?

O que você pode observar em relação ao número de arestas de uma pirâmide e o número de lados do polígono da base?

Observe a tabela que Fernanda construiu com relação aos prismas:

Número de vértices, faces de arestas de Prismas				
Prismas de base	**Número de lados do polígono da base**	**V**	**F**	**A**
Triangular	3	6	5	9
Quadrangular	4	8	6	12
Pentagonal	5	10	7	15
Hexagonal	6	12	8	18
Com n lados	n	$2n$	$n + 2$	$3n$

Para realização da atividade utilize, os Anexos das páginas 243, 245, 247 e 249.

RODA DE CONVERSA

Analise a tabela de Fernanda e discuta oralmente:

- O que você pode observar em relação ao número de vértices e de faces de um prisma e o número de lados do polígono da base?
- O que você pode observar em relação ao número de arestas de um prisma e ao número de lados do polígono da base?
- O que você pode observar em relação ao número de vértices, de faces e de arestas de pirâmides e de prismas em função do polígono da base? Escreva uma pequena síntese com suas conclusões.
- Compare as conclusões dos itens anteriores com as conclusões realizadas por você na Sequência de atividades 4 da Unidade 1. O que você percebeu?

ATIVIDADE 2

As tabelas construídas inspiraram Fernanda. Ela pensava que tinha alguma relação especial entre vértices, faces e arestas de um poliedro, mas não conseguia descobrir qual era. Então, resolveu perguntar à sua professora, que disse que realmente havia uma relação especial entre esses elementos e que, para descobri-la, Fernanda deveria fazer adições e/ou subtrações entre esses elementos e, assim, encontraria, como resultado, o número 2.

Como ela era muito curiosa, foi tentando adicionar e subtrair o número desses elementos até encontrar o resultado 2.

1. Experimente e substitua as letras V, F, A das relações, a seguir, por números relativos à quantidade de vértices, faces e arestas de uma dada pirâmide (ou um prisma), escolhida por você e verifique qual relação é a verdadeira.

$$V + A - F = 2$$
$$F + A - V = 2$$
$$V + F - A = 2$$

Registre sua experimentação:

2 Fernanda encontrou a relação correta. Você também já tinha encontrado essa relação quando analisou os dados das tabelas da página 58?
Descreva, com palavras, a relação encontrada:

SALA DIGITAL

Descubra como essa relação é denominada, fazendo uma pesquisa.

___

___

___

3 Após realizar a pesquisa, verifique se essa relação é válida para esses poliedros:

Poliedros	V	F	A	V − A + F
Octaedro	6	8	12	
Dodecaedro	20	12	30	
Icosaedro	12	20	30	

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 4

Davi e Fernanda planejam uma pesquisa

Fernanda e seus colegas de turma farão uma pesquisa na escola. Eles aprenderão as etapas de uma pesquisa amostral e produzirão um relatório de pesquisa. Para começar, precisam escolher um tema e a amostra da população que pesquisarão.

Ajude Fernanda e seus colegas na elaboração de um projeto de pesquisa.

ATIVIDADE 1

Fernanda e seus colegas têm conversado muito sobre seus avós e bisavós, inclusive sobre as dificuldades enfrentadas pelos idosos na sociedade. Fernanda levou para classe a seguinte notícia:

7 Desafie seu colega a preencher a tabela e vejam quem ganha mais pontos. Seu colega resolve, mentalmente, as questões da **tabela A**. Depois você confere os resultados, usando calculadora. Em seguida, é sua vez de resolver, mentalmente, as questões da **tabela B** e seu colega faz a correção com calculadora. A cada resposta correta, ganham-se 2 pontos. A cada resposta errada, perdem-se 2 pontos. Quem vai ganhar?

Tabela A

+	–1	+2	–3	+4
–5				
–8				
+6				

Tabela B

–	–1	+2	–3	+4
–5				
–8				
+6				

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

Os 90 anos da avó de Clarissa e Daniel

Nessa sequência, vamos estudar grandezas direta, inversamente ou não proporcionais, auxiliando os irmãos Clarissa e Daniel a solucionarem alguns problemas. Vamos acompanhar a organização da festa da avó dos jovens, que fará 90 anos.

ATIVIDADE 1

Na preparação da festa de aniversário da avó, Clarissa e Daniel perceberam que, em algumas situações, as grandezas envolvidas se relacionam de forma diferente.

1 Mas, afinal, o que é uma “grandeza”? Escreva o que pensa a respeito.

2 Os jovens pensaram em algumas situações que envolviam grandezas e poderiam surgir na preparação da festa e, para isso, tentaram explicitar quais são essas grandezas e como variam. Registre suas conclusões.

a) O número de pratos a serem comprados para a festa e o preço pago por eles.	
b) O tempo e a velocidade de um carro, ao percorrer a distância até a casa da avó.	

3 Clarissa e Daniel foram, com sua mãe, a uma loja comprar pratos de sobremesa decorados para usar na festa da avó. Precisavam comprar uma quantidade grande, porque a família era numerosa e todos estariam presentes. Os pratos que gostaram eram vendidos em embalagens com 6 unidades, e o preço era de R$ 54,90 cada embalagem. Vejam o que os irmãos anotaram para sua mãe apresentar à família:

Embalagem de pratos	Valor
1	R$ 54,90
2	R$ 109,80
10	R$ 549,00

Analisando a tabela que Clarissa e Daniel criaram, qual é o valor de 12 embalagens desses pratos e quais são as grandezas envolvidas?

RODA DE CONVERSA

Clarissa percebeu que os valores monetários crescem de acordo com a quantidade de embalagens compradas. Mas não sabia se esse crescimento era proporcional.
Pense sobre isso e discuta oralmente!

4 O que você acha do aumento dos valores monetários em relação ao aumento da quantidade de embalagens de pratos? O aumento é proporcional? Justifique sua resposta.

ATIVIDADE 2

1 Uma das tias dos jovens levou seu bebê à festa. Ele tinha 3 meses. Nasceu com 3,100 kg. Com um mês de vida, o bebê "pesava" 4,000 kg. Com 2 meses de vida, "pesava" 4,840 kg. Agora, aos 3 meses, estava "pesando" 5,600 kg.

a) Quais são as grandezas envolvidas?

b) Faça uma tabela envolvendo o aumento dessas grandezas:

Meses	"Peso" (kg)

c) Como foi a variação do tempo? E a do "peso"? Essas grandezas variam na mesma proporção? Justifique sua resposta.

d) Qual seria o peso do bebê com 4 meses de vida? É possível calcular esse "peso"? Justifique.

2 O automóvel do pai de Daniel costuma percorrer um trecho da estrada, o qual leva até o condomínio da avó dos meninos em 30 minutos, com a velocidade constante de 90 km/h. Mas, no dia do aniversário e por causa de um conserto na estrada, ele teve de diminuir a velocidade, que passou a ser constante e de 60 km/h. Quanto tempo ele demorou para percorrer esse trecho nessa nova velocidade? Escreva uma sentença algébrica para expressar a relação entre as grandezas: I) distância e II) velocidade.

Beatriz fez alguns agrupamentos para verificar as comissões, mas não terminou:

Ordem das três mais votadas entre as quatro candidatas:

A, B e C: (A, B, C); (A, C, B); (B, A, C); (B, C, A); (C, A, B); (C, B, A);

Ordem das três mais votadas entre as quatro candidatas:

A, B, e D: (A, B, D); (A, D, B); (B, A, D); (B, D, A); (D, A, B); (D, B, A);

3 Termine os agrupamentos iniciados por Beatriz:

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

Os jogos dos amigos de Alice e Beatriz

Na turma de Alice e Beatriz, há, também, 3 amigos inseparáveis: Pedro, Miguel e Carlos. Alguns adoram jogar e inventar jogos, outros utilizam a Matemática para descobrir a pontuação. Veja algumas situações:

ATIVIDADE 1

Carlos resolveu distribuir suas 160 figurinhas entre seus amigos e amigas que participam dos jogos. Carlos ficou com algumas figurinhas. Beatriz recebeu 10 a mais que Carlos. Miguel recebeu o triplo de Beatriz:

1 Alice indicou, com uma expressão algébrica, o que cada amigo recebeu. Depois, montou uma equação e a resolveu, para encontrar a quantidade de figurinhas que cada um recebeu. Faça você também:

Carlos	Beatriz	Miguel
x		
Cálculo		

ATIVIDADE 2

Beatriz, Miguel e Carlos, depois que brincaram de bater figurinhas, resolveram disputar uma partida de videogame. Quando terminaram a partida, Miguel disse aos amigos que havia feito 240 pontos a mais que Carlos; Beatriz disse que havia feito o dobro de pontos de Miguel e afirmou, também, que tinha 2 000 pontos a mais que Carlos.

1 Pedro indicou uma sentença algébrica para representar a quantidade de pontos de cada amigo. Faça você também:

2 Beatriz afirmou que tinha 2 000 pontos a mais que Carlos. Ajude Pedro a descobrir quantos pontos teria cada amigo:

Carlos	Beatriz	Miguel
Cálculo		

3 Em outra partida de videogame, Carlos fez $\frac{1}{8}$ da pontuação de Miguel. Os dois, juntos, totalizaram 2 466 pontos. Ajude Pedro a calcular quantos pontos cada amigo fez:

ATIVIDADE 3

Carlos e Miguel inventaram um jogo que se parece com o jogo da memória, só que as cartelas ficam todas viradas para cima. O jogador deve olhar para a coluna da esquerda, escolher uma carta que contém uma sentença algébrica e, imediatamente, relacioná-la com a escrita na linguagem natural, que está nas cartelas da coluna da direita. De imediato, "pega" as duas cartelas e as retira da mesa. Se errar, devolve as cartelas e perde a vez. O Jogo termina quando todas as cartelas forem retiradas. Ganha o jogador que tiver o maior número de cartelas.

1 Jogue com um colega:

$100 - y$	o quádruplo de um número
$\frac{1}{4}d$	um número adicionado a 5
$5 + c$	o quociente de 10 por um número
$4b$	100 subtraído de um número
$a - 100$	o quociente de um número por 10
$x - 5$	a diferença entre um número e 5
$l + 2l$	um número diminuído de 100
$\frac{w}{10}$	um número somado ao dobro do mesmo número
$\frac{10}{b}$	a quarta parte de um número

Para realização da atividade utilize os Anexos das páginas 251 e 253.

2 **Desafio 2:** Um quadrilátero é formado por 2 triângulos retângulos isósceles iguais. Qual é a medida dos ângulos internos desse quadrilátero? Explique como pensou.

ATIVIDADE 3

1 Dois bloquinhos com o logotipo da feira de Matemática eram vendidos em um estande por R$ 3,00. Thaís e Isabela compraram alguns para dar de lembrança aos colegas que não foram à feira.

a) Considerando que elas levaram 10 blocos cada uma, quanto cada uma delas gastou?

b) O que podemos afirmar sobre a relação entre quantidade de bloquinhos e preço? Se aumentarmos a quantidade de bloquinhos, o preço aumenta? De forma proporcional ou não?

c) Represente com uma expressão algébrica a relação entre a quantidade de bloquinhos e o preço. Chame o preço de p e a quantidade de bloquinhos de b.

No item anterior, dizemos, que as letras p e b variam uma de acordo com a outra, e são chamadas de variáveis. Agora observe o que acontece com essas letras no problema a seguir:

2 Thaís descobriu que havia 12 500 bloquinhos para serem vendidos na Feira de Matemática. Ela queria calcular o valor da venda de todos os bloquinhos. Thaís sabia que a relação entre o preço e a quantidade de bloquinhos era dada por: $p = b \cdot 3,00$.

a) Para calcular o valor da venda de 12 500 bloquinhos, como Thaís poderia escrever essa relação?

Observe que em $p = b \cdot 3,00$, a letra p representa uma variável mas, em $p = 12\ 500 \cdot 3,00$, a mesma letra p representa uma incógnita. A letra p representa o valor desconhecido da sentença matemática e não depende da variação da quantidade de bloquinhos, pois foi fixada em 12 500.

b) Agora, calcule o valor da venda dos 12 500 bloquinhos:

ATIVIDADE 4

Isabela e Thaís participaram também da Oficina de Equações. Elas deveriam traduzir e resolver problemas utilizando equações do primeiro grau. Veja alguns dos problemas dessa oficina e os resolva:

1 A diferença entre o dobro de um número natural e 15 é igual a 45. Qual é esse número?

Tradução do enunciado para a linguagem algébrica	
Resolução da equação	

2 O triplo de um número natural mais seu quádruplo é igual a 140. Qual é esse número?

Tradução do enunciado para a linguagem algébrica	
Resolução da equação	

3 A soma da metade de um número natural com 30 é igual a 180. Qual é esse número?

Tradução do enunciado para a linguagem algébrica	
Resolução da equação	

4 A diferença entre o dobro de um número e 15 é igual a esse número mais 20. Qual é esse número?

Tradução do enunciado para a linguagem algébrica	
Resolução da equação	

5 Pensei em um número, multipliquei por 2, adicionei 15 ao resultado, depois subtraí 5 e obtive 95. Qual foi o número em que pensei?

Tradução do enunciado para a linguagem algébrica	
Resolução da equação	

6 Pensei em um número, dividi ele por 3, adicionei 25 ao resultado, depois subtraí 30 e obtive 10. Qual é esse número?

Tradução do enunciado para a linguagem algébrica	
Resolução da equação	

Para organizar as conclusões, complete cada espaço com “é” ou “não é”.

a) A potência da soma ______ igual à soma das potências.

b) A potência do produto ______ igual ao produto das potências.

c) A potência da diferença ______ igual à diferença das potências.

d) A potência do quociente _______ igual ao quociente das potências.

ATIVIDADE 4

Em outra semana, na reunião de jovens, Pedro e Júlia discutiram a utilização de simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

Pedro propôs algumas situações:

1 Em uma sequência de números, cada um é determinado pela lei: $n = 6x + 4$, em que x indica a posição que o número ocupa na sequência. Complete os dez primeiros números dessa sequência:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	10									

2 Após o preenchimento dessa sequência, Pedro mudou a lei de formação da sequência: $n = x^3 - x^2$ e propôs novamente que os jovens completassem os 10 primeiros termos. Faça você também:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	0									

3 Agora, desafie um colega para completar os 10 primeiros números de uma sequência a partir de uma lei de formação que você vai criar.

Lei de formação:

x	1	2	3							
n										

Em seguida, Pedro propôs uma atividade contrária à anterior. Ele apresentava uma sequência de números. A regra da sequência também envolvia a posição que cada elemento ocupava. Pedro então pedia a lei de formação da sequência.

Ele também chamou de *x* a posição que o número ocupa na sequência e de *n* o termo da sequência. Analise as situações propostas por Pedro e resolva-as:

4 A sequência é formada pelos números: 1, 4, 9, 16, ...

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	1	4	9	16	25	36	49			

a) O 10º termo dessa sequência é ___________

b) O 20º termo dessa sequência é __________

c) A lei de formação dessa sequência é _________

5 A sequência é formada pelos números: 3, 5, 7, ...

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	3	5	7	9	11	13				

a) O 10º termo dessa sequência é ___________

b) O 20º termo dessa sequência é __________

c) A lei de formação dessa sequência é _________

6 A sequência é formada pelos números: 0, 3, 8, 15, ...

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	0	3	8	15	24	35	48			

A lei de formação dessa sequência é _________

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

Desvendando os segredos das sequências numéricas

ATIVIDADE 1

1 Enzo deixou um quadro parcialmente preenchido sobre a mesa. Henrique olhou para ele e tentou compreendê-lo. Vamos ajudá-lo:

–3,6	–3,3	–3	–2,7	–2,4			

Observe os números e responda:

a) Há alguma regularidade nesses números? Explique.

b) Quais seriam os próximos três termos dessa sequência, de acordo com o que você descobriu?

ATIVIDADE 2

1 Enzo registrou a sequência de números utilizados na identificação dos computadores da sala de informática. Observe:

2	4	8	16	32	64		

a) Analise os números e verifique se há regularidades na sequência:

b) Registre no espaço abaixo os próximos dois termos dessa sequência:

c) Enzo descobriu o termo geral dessa sequência e expressou-o algebricamente por 2^n, em que *n* representa a posição do número na sequência, começando com o 1. Você concorda com ele? Justifique sua resposta.

ATIVIDADE 3

1 Para acessar o computador central do laboratório, Enzo programou uma senha composta por uma sequência de cinco números, todos menores que 50. Enzo esqueceu-se de dois desses números:

5 ? 9 11 ?

a) Descubra a lógica de formação dessa sequência. Escreva os dois números que faltam na senha. Explique como você fez para descobrir:

b) Se Enzo fizesse uma sequência de números naturais com a mesma lógica de sua senha, como ele faria para descobrir uma expressão algébrica que representasse um termo qualquer dessa sequência? Se chamarmos de n uma posição qualquer, qual seria a expressão algébrica que forneceria o termo da sequência, na posição n?