INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

MARCELO DA SILVA BARRETO

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS

São Paulo, SP

2026

MARCELO DA SILVA BARRETO

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Francisco

São Paulo, SP

2026

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

b273r Barreto, Marcelo da Silva
Representação matricial dos números complexos / Marcelo da Silva Barreto. São Paulo: [s.n.], 2026.
71 f. il.

Orientador: Samuel Francisco

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2026.

1. Números Complexos. 2. Matrizes. 3. Espaço Vetorial. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

Campus São Paulo

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

“REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS”

Autor: Marcelo da Silva Barreto

Orientador: Prof. Dr. Samuel Francisco

A banca examinadora composta pelos membros abaixo aprovou essa dissertação:

____

Prof. Dr. Samuel Francisco

IFSP - SPO

____

Prof. Dr. Amari Goulart

IFSP - SPO

____

Prof. Dr. Júlia Silva Silveira Borges

UFSCAR

São Paulo, 16 de abril de 2026

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa, Ana Flávia Barreto Paschoal, pelo encorajamento no progresso de meus estudos em Matemática e também na realização deste trabalho: sem seu apoio e incentivo inestimáveis, o caminhar pela vida se tornaria muito menos divertido; não há preço que pague o presente de podermos criar nossa filha Sophia em toda a sua beleza, serenidade e plenitude.

Às e aos meus colegas de curso presencial, na companhia durante as aulas de formação.

Ao Prof. Dr. Samuel Francisco, meu orientador, por me apoiar e sempre motivar os estudos através das suas orientações valiosas.

Às e aos demais professores presenciais do PROFMAT, pelas aulas que pude assistir e com os quais travei ótimas conversas.

Às e aos colegas de vida profissional dos diversos espaços de educação que frequentei e frequento, profissionais da área de Matemática e das demais disciplinas da educação básica com os quais sempre aprendo algo novo.

Por fim, agradeço a todas e todos que contribuíram de alguma forma para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

A presente dissertação tem por objetivo mostrar a relação próxima existente entre as matrizes e os números complexos que pode ser traçada ainda no Ensino Médio, relação essa que é uma fonte de valorização do ensino dos números imaginários ao mesmo tempo que exibe uma aplicação do universo matricial e produz um exercício intelectual de algebrização. Para esse fim, é necessário saber os conhecimentos básicos da álgebra dos complexos e das matrizes, o que é apresentado aqui. Demonstrações de alguns resultados são escolhidas para serem exibidas. Por fim, faz-se uma digressão acerca de espaços vetoriais matriciais, uma série de exercícios sugeridos e questões de vestibulares do IME e do ITA com resolução e propõe-se uma sequência de ensino para ser desenvolvida em sete aulas, com o intuito de ser um apoio para o professorado que desejar exibir a abordagem sugerida em suas aulas somada a um link para o *Geogebra* com uma atividade a ser realizada com o alunado.

Palavras-chave: Números complexos. Matrizes. Forma Matricial dos números Complexos.

ABSTRACT

This dissertation aims to show the close connection between matrices and complex numbers, a relationship that can already be established in high school. This connection serves as a means of valuing the teaching of imaginary numbers while simultaneously presenting an application of the matrix framework and providing an intellectual exercise in algebraization. To this end, it is necessary to understand the basic concepts of complex number algebra and matrix theory, which are presented here. Proofs of some results are selected and displayed. Finally, a discussion on matrix vector spaces is included, along with a series of suggested exercises and entrance exam questions from IME and ITA, with solutions. A seven-lesson teaching sequence is also proposed, intended to support teachers who wish to implement the suggested approach in their classes, together with a link to a GeoGebra activity to be carried out with students.

Keywords: Complex Numbers. Matrices. Matrix Form of Complex Numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muito se tem escrito e publicado sobre a teoria dos números complexos ao longo dos tempos, desde o século XVI, período em que ela iniciou seu processo de formalização como conhecemos hoje. O que motiva a criação deste material são dois pontos principais: a mudança de foco recente (sobretudo após os avanços produzidos pela LDB e pela BNCC) do ensino de complexos na educação básica brasileira, o que pode, a nosso ver, suscitar um menor interesse em explorar as oportunidades geradas por esse assunto na assimilação de outros inúmeros temas associados dentro da álgebra e da geometria; e a pouca produção de materiais de estudo que associam os complexos à estrutura matricial, relação que se pauta pela complementaridade de dois campos vastos e profundos. Esta posição se baseia em NETO (2013, p.3):

> Na busca de significados, a matemática deve ser resultado de um todo conectado, onde a informação tratada como elemento estanque deve ceder lugar a uma abordagem que busque conexões. Por consequência, a seleção de conteúdos deve pressupor o favorecimento destas conexões, destes significados e possuir relevância na busca do desenvolvimento social/intelectual dos alunos.

A gama de conquistas que podem ser obtidas no estudo do isomorfismo entre o conjunto dos números complexos e um subconjunto do conjunto das matrizes de ordem 2 orienta esta dissertação: o próprio estado de espaço vetorial destes conjuntos permite, por exemplo, desenvolver resultados que são naturalmente estendidos a outros campos de conhecimento matemático que compartilham da mesma característica (serem espaços vetoriais). Diante desse contexto, o trabalho aqui apresentado tem como objetivo geral investigar e apresentar a correspondência biunívoca entre o corpo dos números complexos e o conjunto das matrizes reais de ordem 2 da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, demonstrando como esse isomorfismo pode ser explorado como ferramenta pedagógica no Ensino Médio. Para alcançar esse propósito, delineiam-se os seguintes objetivos específicos:

- Revisitar a construção do conjunto dos números complexos a partir da definição de par ordenado, suas operações e propriedades, e apresentar os fundamentos da teoria de matrizes, com ênfase nas operações e propriedades das matrizes quadradas de ordem 2. Um especial destaque é dado para a fórmula de Euler, que de maneira elegante relaciona números complexos com a geometria;
- Estabelecer e demonstrar formalmente a correspondência entre um número complexo $z = a + bi$ e a matriz $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e explorar as consequências dessa correspondência, como a interpretação geométrica da unidade imaginária como rotação de 90° e a representação matricial da forma polar e da Fórmula de Euler;
- Elaborar uma sequência de ensino que permita a aplicação dessa abordagem em sala de aula no 3º ano do Ensino Médio e compilar e resolver exercícios contextualizados, incluindo questões de vestibulares do IME e do ITA, que explorem a conexão entre os dois temas.

Para cumprir os objetivos propostos, esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 1 apresenta-se a fundamentação teórica dos números complexos, abordando sua forma algébrica, o plano de Argand-Gauss, conjugado, módulo, forma trigonométrica e a Fórmula de Euler; o Capítulo 2 é dedicado à teoria elementar das matrizes, incluindo definições, tipos especiais, operações e propriedades, com foco nas matrizes de ordem 2, enquanto que o Capítulo 3 constitui o núcleo do trabalho, onde se estabelece e se demonstra a abordagem matricial dos números complexos, explorando a representação de i, a forma trigonométrica matricial e a equação de Euler na forma matricial. O Capítulo 4, por fim, apresenta uma proposta de sequência de ensino para aplicação em sala de aula e um produto educacional composto de um *link* para acesso a uma aplicação pronta no *Geogebra* com um roteiro para implementação. Na sequência, são apresentadas as Considerações Finais, seguidas das Referências Bibliográficas. Completam o trabalho os Apêndices, que trazem uma discussão sobre os espaços vetoriais das matrizes (Apêndice A), uma lista de exercícios propostos (Apêndice B), questões resolvidas do IME (Apêndice C) e do ITA (Apêndice D).

Com este trabalho, deseja-se apresentar, portanto, uma contribuição à abordagem da relação entre complexos e matrizes, destacando pontos dessa relação que apoiem a validade dos resultados obtidos e impulsionando outros trabalhos posteriores.

1. FORMA ALGÉBRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo, apresentamos os conceitos e resultados básicos da teoria algébrica e geométrica dos números complexos, construindo o conjunto destes números formalmente. As principais proposições e os principais teoremas servirão como suporte para esta construção, da forma como é feito usualmente no Ensino Médio.

Definição 1: O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é formado pelos pares ordenados $z = (a; b), a, b \in \mathbb{R}$, em que são definidas as seguintes operações de adição e de produto: dados $z_1 = (a_1; b_1), z_2 = (a_2; b_2)$,

i) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$;
ii) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)$.

Proposição 1: A adição e o produto têm as seguintes propriedades:

i. Para todos $(a; b), (c; d), (e; f) \in \mathbb{C}$ vale $[(a; b) + (c; d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$.

Demonstração: valendo-se da associatividade usual em $\mathbb{R}$,

$$[(a; b) + (c; d)] + (e; f) = (a + c; b + d) + (e; f) =$$
$$= [(a + c) + e; (b + d) + f]$$
$$= [a + (c + e); b + (d + f)]$$
$$= (a; b) + (c + e; d + f)$$
$$= (a; b) + [(c; d) + (e; f)].$$

ii. Para todos $(a; b), (c; d) \in \mathbb{C}$ vale $(a; b) + (c; d) = (c; d) + (a; b)$.

Demonstração: valendo-se da propriedade comutativa usual em $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a; b) + (c; d) &= (a + c; b + d)\\ &= (c + a; d + b)\\ &= (c; d) + (a; b).\end{aligned}$$

iii. Existe o elemento neutro aditivo $(0,0)$, isto é:

$$(a; b) + (0; 0) = (0; 0) + (a; b), \forall (a; b) \in \mathbb{C}.$$

Demonstração:

$$(a; b) + (0; 0) = (a + 0; b + 0) = (0 + a; 0 + b) = (a; b).$$

iv. Para todo $(a; b) \in \mathbb{C}$, o simétrico aditivo é o par ordenado $(-a; -b)$ que satisfaz $(a; b) + (-a; -b) = (0; 0)$.

Demonstração:

$$(a, b) + (-a, -b) = \big(a + (-a), b + (-b)\big) = (0,0).$$

v. Para todos $(a; b), (c; d), (e; f) \in \mathbb{C}$ vale

$$[(a; b) \cdot (c; d)] \cdot (e; f) = (a; b) \cdot [(c; d) \cdot (e; f)].$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
&[(a; b). (c; d)]. (e; f) = (ac - bd; ad + bc) \cdot (e; f) = \\
&= [(ac - bd)e + (ad + bc)f; (ac - bd)f + (ad + bc)e] \\
&= [ace - bde - adf - bcf; acf - bdf + ade + bce] \\
&= [a(ce - df) - b(de + cf); a(de + cf) + b(ce - df)] \\
&= (a; b). (ce - df; cf + de) \\
&= (a; b). [(c; d). (e; f)].
\end{aligned}$$

vi. Para todos $(a; b), (c; d) \in \mathbb{C}$ vale

$$(a; b) \cdot (c; d) = (c; d), (a; b).$$

Demonstração:

$$(a; b). (c; d) = (ac - bd; ad + bc) = (ca - db; cb + da) = (c; d). (a; b).$$

vii. Para todos $(a; b), (c; d), (e; f) \in \mathbb{C}$ vale:

$$(a; b) \cdot [(c; d) + (e; f)] = (a; b) \cdot (c; d) + (a; b) \cdot (e; f).$$

e

$$[(a; b) + (c; d)] \cdot (e; f) = (a; b) \cdot (e; f) + (c; d) \cdot (e; f).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
&(a; b). [(c; d) + (e; f)] = (a; b). (c + e; d + f) = \\
&= [a(c + e) - b(d + f); a(d + f) + b(c + e)] \\
&= (ac - bd; ad + bc) + (ae - bf; af + be) \\
&= (a; b). (c; d) + (a; b). (e; f)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&[(a; b) + (c; d)]. (e; f) = (a + c; b + d). (e; f) \\
&= [(a + c)e - (b + d)f; (a + c)f + (b + d)e] \\
&= (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + de) \\
&= (a, b). (e, f) + (c, d). (e, f).
\end{aligned}$$

viii. Existe o elemento neutro do produto $(1;0)$ tal que $(a;b)\cdot(1;0) = (a;b)$.

Demonstração:

$$(a;b).(1,0) = (a.1 - b.0; a.0 + b.1) = (a;b).$$

ix. Para todo (*a, b*) ∈ ℂ não nulo, o inverso multiplicativo é o par ordenado

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}; -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

tal que

$$(a;b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}; -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = (1;0).$$

Demonstração: seja $z = (a;b) \neq (0;0)$. Com isso, $a \neq 0 \vee b \neq 0$. Seja $z^{-1} = (x;y)$ tal que $z \cdot z^{-1} = (1;0)$:

$$(a,b).(x,y) = (1,0) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}, y = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Dados $z_1 = (a;b)$, $z_2 = (c;d)$ com $z_2 \neq (0,0)$, a divisão de z_1 por z_2 será definida como sendo $z_1 . z_2^{-1}$, o que resulta em:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Proposição 2: Seja $A = \{(a,0); a \in \mathbb{R}\}$. Definimos a função $\emptyset: \mathbb{R} \to A$ por $\emptyset(x) = (x,0)$. Desta forma, a função assim definida será bijetiva e, além disso,

i. $\emptyset(a+b) = \emptyset(a) + \emptyset(b), \forall a,b \in \mathbb{R}$;
ii. $\emptyset(a \cdot b) = \emptyset(a) \cdot \emptyset(b), \forall a,b \in \mathbb{R}$.

Demonstração: inicialmente, verificamos que todo par $(x,0) \in A$ é o correspondente pela função ∅, de algum $x \in \mathbb{R}$, o que a torna sobrejetiva; além disso, como $(x,0) \in A$ e $(y,0) \in A$ são distintos se $x \neq y$, então a função ∅ também é injetiva. Logo, temos garantida a bijetividade da função ∅.

Para demonstrar os itens i e ii acima, fazemos:

$$\emptyset(a+b) = (a+b,0) = (a,0) + (b,0) = \emptyset(a) + \emptyset(b);$$

$$\emptyset(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 0) = (a,0) \cdot (b,0) = \emptyset(a) \cdot \emptyset(b).$$

Pela bijetividade da função $\emptyset$ entre o conjunto dos números reais e o conjunto A que é conservante em relação às operações de soma e multiplicação, podemos então associar cada número real a a um par ordenado $(a;0)$ e, assim, o conjunto dos números reais passa a ser visto como um subconjunto do conjunto dos números complexos. Além disso, definiremos o número complexo $(0;1)$ como sendo a unidade imaginária e o representaremos por i. Verifique que:

$$i^2 = i \cdot i = (0{,}1) \cdot (0{,}1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1{,}0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = (-1{,}0) = -(1{,}0) = -1$$

Portanto, $i^2 = -1$.

Observação: concluímos que

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1 & i^4 = 1 & i^8 = 1 & i^{12} = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i & i^9 = i & i^{13} = i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & i^{10} = -1 & i^{14} = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = -i & i^{11} = -i & i^{15} = -i \end{array}$$

e assim sucessivamente. Com isso, pode-se afirmar que se $n = 4q + r$, em que n, q e r são naturais, então $i^n = i^r$, pois $i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$.

Dado um número complexo qualquer $z = (a; b), a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$z = (a; b) = (a; 0) + (0; b) = (a; 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1; b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = a + bi.$$

O número real a é chamado parte real de z e o número real b é chamado parte imaginária de z. Em símbolos indica-se por: $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$.

Um número complexo cuja parte imaginária é nula denomina-se real, enquanto um número complexo cuja parte real é nula e a imaginária não é chamado de imaginário puro.

Em resumo, o número complexo $z = a + bi$ herda as características e propriedades do par ordenado $(a; b)$. Assim sendo, o conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ munido das operações soma e produto, definidas da seguinte forma: dados $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$:

i) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;
ii) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)i$

é um corpo, visto que satisfaz as seguintes propriedades: para todo $z = a + bi$, $w = c + di$ e $t = e + fi$, temos:

(S1) $[(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) = (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)]$;

(S2) $(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)$;

(S3) elemento neutro aditivo: $(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi$;

(S4) inverso aditivo: $(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i = 0$;

(P1) $[(a+bi)(c+di)](e+fi) = (a+bi)[(c+di)(e+fi)]$;

(P2) $(a+bi)(c+di) = (c+di)(a+bi)$;

(P3) $(a+bi)[(c+di)+(e+fi)] = (a+bi)(c+di)+(a+bi)(e+fi)$;

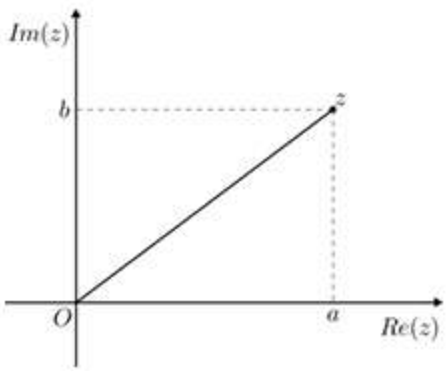
(P4) $[(a+bi)+(c+di)](e+fi) = (a+bi)(e+fi)+(c+di)(e+fi)$;

(P5) Elemento neutro multiplicativo: $(a+bi)(1+01) = a+bi$;

(P6) Inverso multiplicativo: $(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}i\right) = 1+0i = 1$.

1.1. PLANO DE ARGAND-GAUSS

Geometricamente, o número complexo $z = a + bi$ é representado no plano da seguinte forma:



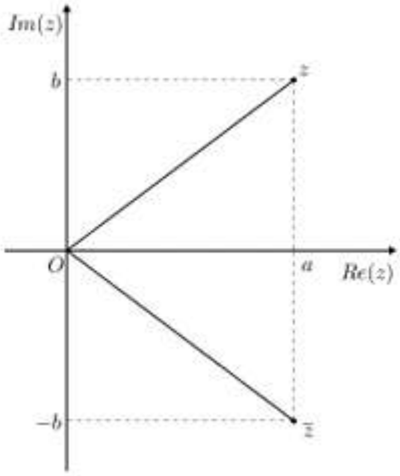
Representação de z no plano complexo. Fonte: (NASCIMENTO, 2015)

O plano utilizado para representar os números complexos é chamado de Argand-Gauss, onde o eixo horizontal é chamado de eixo real e o vertical de eixo imaginário.

1.2. CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Definição 2: Para o número complexo $z = a + bi$, o conjugado de z é o número complexo $\bar{z} = a - bi$.

Geometricamente:



Representação de $\bar{z}$ no plano complexo. Fonte: (NASCIMENTO, 2015)

Teorema 1: Se $z \in \mathbb{C}$, então:

i. $z + \bar{z} = 2Re(z)$;
ii. $z - \bar{z} = 2Im(z) \cdot i$;
iii. $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
iv. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

Demonstração:

i. $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2Re(z)$.
ii. $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2Im(z) \cdot i$.
iii. $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
iv. $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

Teorema 2: Se z_1 e z_2 são números complexos quaisquer, então:

i. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
ii. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
iii. $Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) = Re(\overline{z_1} \cdot z_2)$;
iv. $Im(z_1 \cdot \overline{z_2}) = -Im(\overline{z_1} \cdot z_2)$.

Demonstração:

i. Se $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$, então $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i =$
$= (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

ii. Se $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$:
$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i = a(c - di) - bi)(c - di) =$
$= (a - bi)(c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

iii. $z_1 \cdot \overline{z_2} = (a + bi)(c - di) = ac + bd - (ad - bc)i; \overline{z_1} \cdot z_2 = (a - bi)(c + di) = ac + bd + (ad - bc)i$.

Então, $Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) = Re(\overline{z_1} \cdot z_2)$ e $Im(z_1 \cdot \overline{z_2}) = -Im(\overline{z_1} \cdot z_2)$.

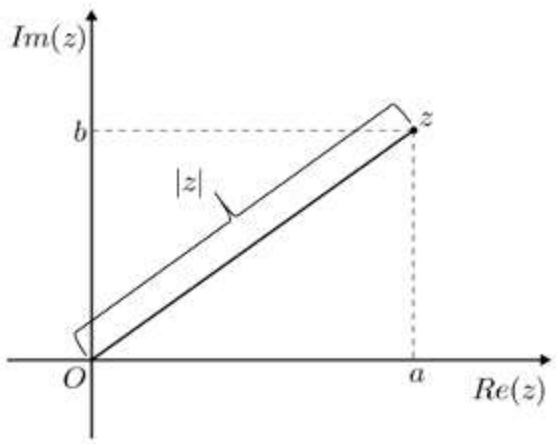
Para determinar $\frac{z_1}{z_2}$, multiplique o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, como a seguir:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c + di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

1.3. MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Dado um número complexo $z = a + bi$, denominamos **módulo** de z ao número real não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Comumente, escrevemos $|z| = r$.

Geometricamente, da mesma forma que o módulo de um número real representa a distância para a origem (do eixo real), o módulo de um número complexo *z* representa a distância de *z* à origem (do plano de Argand-Gauss):



Representação de $|z|$ no plano complexo. Fonte: (NASCIMENTO, 2015)

Teorema 3: Se $z \in \mathbb{C}$, então

i. $|z| \geq 0$;
ii. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
iii. $|z| = |\bar{z}|$;
iv. $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$;
v. $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$;
vi. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Demonstração: sendo $z = a + bi$:

i. $a^2 \geq 0; b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq 0$.
ii. $|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
iii. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\bar{z}|$.
iv. $a \geq 0 \Rightarrow a = |a|; a < 0 \Rightarrow a < |a|$; Portanto, $a \leq |a|$.
Por outro lado, $a^2 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |a| \leq |z|$.

Assim, concluímos que $a \leq |a| \leq |z|$.

v. Analogamente, $b \leq |b| \leq |z|$.
vi. Segue da definição de módulo e de resultado anterior para $z \cdot \bar{z}$.

Teorema 4: Se z_1 e z_2 são números complexos, então:

i. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
ii. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; z_2 \neq 0$;
iii. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
iv. $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$.

Demonstração: sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$:

i. $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \wedge \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \Rightarrow$
$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = (z_1 \cdot \overline{z_1})(z_2 \cdot \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

ii. $\left|\frac{1}{z_2}\right| = \left|\frac{1}{c+di}\right| = \left|\frac{c-di}{(c+di)(c-di)}\right| = \left|\frac{c-di}{c^2+d^2}\right| = \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{|c^2+d^2|} = \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sqrt{(c^2+d^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{1}{|z_2|}$

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \cdot \left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

iii. $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$.

Por outro lado:

$$|z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1 + z_2|)^2.$$

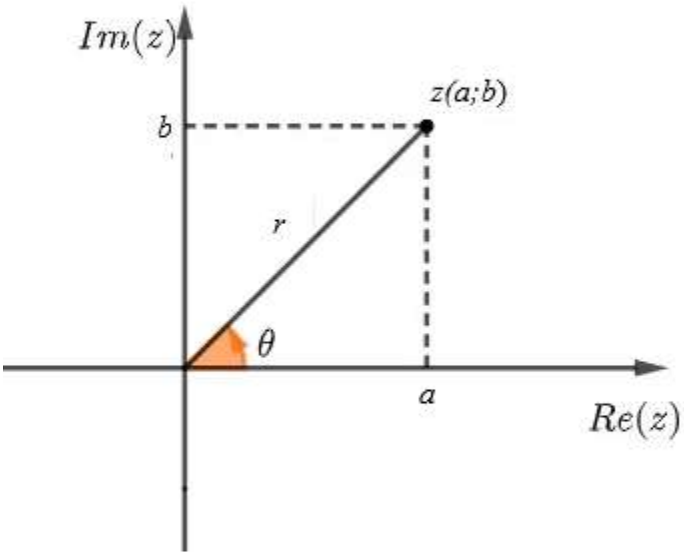
Assim:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1 + z_2|)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

iv. $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 - 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \geq |z_1|^2 - 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 - 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 \therefore |z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$.

1.4. FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Sejam $z = a + bi$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Seja o ponto $P(a; b)$ que representa z no plano através do ponto, e seja θ o ângulo formado entre o eixo real positivo e o segmento OP no sentido anti-horário, onde O é a origem do sistema, como mostra a figura abaixo.



Forma trigonométrica ou polar de z. Fonte: (BRASIL ESCOLA, 2020).
Disponível em: https://s5.static.brasilescola.uol.com.br/be/2020/05/11-plano-complexoargumento.jpg.
Acesso em: 28 de fevereiro de 2026.

Assim, pela figura,

$$cos\theta = \frac{a}{r}; sen\theta = \frac{b}{r}$$
$$\Rightarrow a = r \cdot cos\theta; b = r \cdot sen\theta$$
$$\Rightarrow z = (r \cdot cos\theta) + (r \cdot sen\theta) \cdot i.$$

Esta última expressão é chamada de forma trigonométrica ou polar de um número complexo.

1.5. FÓRMULA DE EULER

Para a definição de exponencial com expoente que seja imaginário puro na forma e^{xi} baseamo-nos nas séries de Taylor:

$$senx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Dessa forma:

$$e^{xi} = 1 + \frac{xi}{1!} + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \frac{(xi)^4}{4!} + \cdots$$
$$\Rightarrow e^{xi} = 1 + \frac{xi}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3 i}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\Rightarrow e^{xi} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \cdot i$$
$$\Rightarrow e^{xi} = cosx + (senx) \cdot i; \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. MATRIZES

Neste capítulo, serão exibidas as características básicas do conjunto das matrizes, suas definições e suas operações, da mesma forma que são exibidas, de maneira geral, no Ensino Médio. O objetivo aqui será, posteriormente, estabelecer uma relação formal entre um subconjunto deste conjunto das matrizes e o conjunto dos números complexos visto no capítulo anterior.

Definição 3: dados m e $n \in \mathbb{N}$, uma matriz real de ordem $m \times n$ é uma tabela $A = [a_{ij}]_{mxn}$, onde m representa o número de linhas, n o de colunas e a_{ij} representa os elementos da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

O conjunto das matrizes $m\ x\ n$ será denotado $\mathcal{M}(m; n)$.

Tipos de matrizes importantes:

i. Matriz linha: matrizes do tipo $1 \times n$.

ii. Matriz coluna: matrizes do tipo $m \times 1$.

iii. Matriz quadrada: matrizes do tipo $n \times n$. Nesse caso, os elementos do tipo a_{ii}, com $1 \leq i \leq n$ formam a diagonal principal.

iv. Matriz diagonal: é uma matriz quadrada em que todos os elementos não pertencentes à diagonal principal são iguais a zero:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

v. Matriz identidade: é uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix}.$$

vi. Matriz triangular superior de ordem n: matriz quadrada em todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero:

$$T_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

vii. Matriz triangular inferior de ordem n: matriz quadrada em todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero:

$$T_i = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

viii. Matriz nula: matriz $m \times n$ em que todos os elementos são nulos.

2.1. OPERAÇÕES COM MATRIZES

Definição 4: duas matrizes A e B, ambas $m \times n$, são iguais se todos os seus elementos correspondentes forem iguais dois a dois, ou seja, $a_{ij} = b_{ij}; 1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Definição 5: Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são duas matrizes $m\ x\ n$, então:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdot & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdot & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdot & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definição 6: dada uma matriz $A = [a_{ij}]$, a matriz oposta de A será a matriz $-A = [-a_{ij}]$.

Proposição 3: Se A, B e C são matrizes $m \times n$ e O é a matriz nula $m \times n$, então valem:

i. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
ii. $A + B = B + A$;
iii. $A + O = O + A$, onde O é matriz nula $m \times n$;
iv. $A + (-A) = O$.

Demonstração:

i. $A + (B + C) = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = (A + B) + C$;
ii. $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A$;
iii. $A + O = [a_{ij}] + [0_{ij}] = [a_{ij} + 0_{ij}] = [0_{ij} + a_{ij}] = [a_{ij}] = A$;
iv. $A + (-A) = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [a_{ij} + (-a_{ij})] = [0_{ij}] = O$.

Definição 7: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\ x\ n}$ e um número real a, definimos $a \cdot A = [a \cdot a_{ij}]_{m\ x\ n}$.

Proposição 4: Sejam A e B matrizes $m \times n$, a_1, a_2 e a números reais; então:

i. $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B;$
ii. $(a_1 + a_2) \cdot A = a_1 \cdot A + a_2 \cdot A;$
iii. $a_1 \cdot (a_2 \cdot A) = (a_1 \cdot a_2) \cdot A.$

Demonstração: Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, ambas $m \times n$:

i. $a \cdot (A + B) = a \cdot [a_{ij} + b_{ij}] = [a \cdot (a_{ij} + b_{ij})] = [a \cdot a_{ij} + a \cdot b_{ij}]$
$= [a \cdot a_{ij}] + [a \cdot b_{ij}] = a \cdot [a_{ij}] + a \cdot [b_{ij}] = a \cdot A + a \cdot B.$

ii. $(a_1 + a_2) \cdot A = (a_1 + a_2) \cdot [a_{ij}] = [(a_1 + a_2) \cdot a_{ij}] = [a_1 \cdot a_{ij} + a_2 \cdot a_{ij}] = a_1 \cdot [a_{ij}] + a_2 \cdot [a_{ij}] = a_1 \cdot A + a_2 \cdot A.$

iii. $a_1 \cdot (a_2 \cdot A) = a_1 \cdot (a_2 \cdot [a_{ij}]) = a_1 \cdot [a_2 \cdot a_{ij}] = [a_1 \cdot a_2 \cdot a_{ij}] = [(a_1 \cdot a_2) \cdot a_{ij}] = (a_1 \cdot a_2) \cdot [a_{ij}] = (a_1 \cdot a_2) \cdot A.$

Definição 8: sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}; B = [b_{ij}]_{n \times p}$ duas matrizes. O produto $A \cdot B$ de A por B é definido como a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj},$$

para todo $1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq p$.

O produto de matrizes não é comutativo. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$
$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Além disso, um produto $A \cdot B = O$ não implica necessariamente que $A = O$ ou $B = O$. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição 5: Desde que as operações sejam possíveis, valem as seguintes propriedades:

i. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
ii. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B$;
iii. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
iv. $A \cdot I = I \cdot A = A$.

Demonstração: para $A = [a_{ij}]_{n\,x\,r}$, $B = [b_{ij}]_{r\,x\,s}$ e $C = [c_{ij}]_{r\,x\,s}$:

i. $$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot \left[b_{kj} + c_{kj}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{r} (a_{ik} \cdot b_{kj} + a_{ik} \cdot c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot b_{kj} + \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot c_{kj} \\ &= A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned}$$

ii. para $A = [a_{ij}]_{n\,x\,r}$, $B = [b_{ij}]_{n\,x\,r}$ e $C = [c_{ij}]_{r\,x\,s}$:

$$(A + B) \cdot C = \sum_{k=1}^{r} (a_{ik} + b_{ik}) \cdot c_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \left(a_{ik} \cdot c_{kj} + b_{ik} \cdot c_{kj}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \left(a_{ik} \cdot c_{kj} + \sum_{k=1}^{r} b_{ik} \cdot c_{kj}\right)$$
$$= A \cdot C + B \cdot C.$$

iii. Sejam $A = [a_{ij}]_{n\,x\,r}$, $B = [b_{ij}]_{r\,x\,s}$ e $C = [c_{ij}]_{s\,x\,m}$:

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= \sum_{k=1}^{s} (A \cdot B)_{ik} c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{l=1}^{r} a_{il} \cdot b_{lk}\right) \cdot c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^{r} a_{il} \cdot \left(\sum_{k=1}^{s} b_{lk} \cdot c_{kj}\right) \\ &= A \cdot (B \cdot C). \end{aligned}$$

iv. Sejam $A = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$ e $I_n = [I_{ij}]_{nxn}$, onde $I_{ij} = \begin{cases} 0; i \neq j \\ 1; i = j \end{cases}$. Assim:

$$AI = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{k=1}^{r} b_{ik} \cdot c_{kj}\, I_{kj}$$
$$= \left[a_{i1}I_{1j} + a_{i2}I_{2j} + \cdots + a_{in}I_{nj}\right]$$
$$= \left[a_{ij}I_{jj}\right]$$
$$= \left[a_{ij}\right] = A$$
$$= \left[I_{jj}a_{ij}\right]$$
$$= \textstyle\sum_{k=1}^{n} I_{kj}a_{ik} = IA.$$

A potenciação de matrizes para expoentes naturais pode ser definida assim:

$$A^0 = I_n; A^1 = A; A^k = A \cdot A \cdots A \text{ } (k \text{ vezes}), \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

Definição 9: Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$, a transposta de A, denotada por A^t, será a matriz $A = [b_{ij}]_{n\,x\,m}$, onde $b_{ij} = a_{ji}$, para todo $1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m$.

Definição 10: o traço de uma matriz quadrada A, denotado por $tr(A)$, é a soma dos elementos da diagonal principal:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Proposição 6: Dadas duas matrizes quadradas *A* e *B,* ambas *n x n*, e um número real *k*, valem:

i. $tr(A + B) = tr(A) + \text{t } tr(B)$;
ii. $tr(A) = tr(A^t)$;
iii. $tr(I_n) = n$;
iv. $tr(k \cdot A) = \text{k} \cdot tr(A)$;
v. $tr(A{\cdot}B) = tr(B{\cdot}A)$.

Demonstração: sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } k \in \mathbb{R}.$$

Então:

i. $A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow tr(A + B) = (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \cdots + (a_{nn} + b_{nn})$$
$$= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn})$$
$$= tr(A) + tr(B).$$

ii. $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow tr(A^t) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = tr(A).$

iii. $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow tr(I_n) = 1 + 1 + \cdots 1 = n.$

iv. $kA = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \ldots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \ldots & k \cdot a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k \cdot a_{n1} & k \cdot a_{n2} & \ldots & k \cdot a_{nn} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow tr(k \cdot A) = k \cdot a_{11} + k \cdot a_{22} + \cdots + k \cdot a_{nn}$

$= k \cdot (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$

$= k \cdot tr(A).$

v. $A \cdot B = c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$; $B \cdot A = d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot a_{kj} = b_{i1} \cdot a_{1j} + b_{i2} \cdot a_{2j} + \cdots + b_{in} \cdot a_{nj}$.

Então:

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{ki}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} \cdot b_{1i} + a_{i2} \cdot b_{2i} + \cdots + a_{in} \cdot b_{ni})$$
$$= (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1}) + \cdots + (a_{n1} \cdot b_{1n} + a_{n2} \cdot b_{2n} + \cdots + a_{nn} \cdot b_{nn}).$$

Por outro lado:

$$tr(B \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot a_{ki}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (b_{i1} \cdot a_{1i} + b_{i2}.a_{2i} + \cdots + b_{in} \cdot a_{ni})$$
$$= (b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + \cdots + b_{1n} \cdot a_{n1}) + \cdots$$
$$+ (b_{n1} \cdot a_{1n} + b_{n2} \cdot a_{2n} + \cdots + b_{nn} \cdot a_{nn}).$$

Assim, concluímos que $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

Definição 11: uma matriz A é denominada simétrica se $A^t = A$, e antissimétrica se $A^t = -A$.

Definição 12: dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A uma matriz quadrada B de ordem n tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Proposição 7: sejam A e B matrizes quadradas. Se $B \cdot A = I$, então $A \cdot B = I$, ou seja, B é a inversa da matriz A.

Demonstração: $B \cdot A = I \Rightarrow A \cdot (B \cdot A) = A \cdot I = A \Rightarrow (A \cdot B) \cdot A = A \Rightarrow A \cdot B = I$.

Observações:

i. Uma matriz quadrada não necessariamente possui uma inversa. Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ não possui inversa, já que não existe uma matriz quadrada B, de ordem 2, tal que $A \cdot B = I_2$.

ii. Uma matriz quadrada A é dita inversível se A admite uma matriz inversa.

Proposição 8: se uma matriz A de ordem n possui uma inversa, então essa inversa é única.

Demonstração: seja A uma matriz inversível, e suponhamos que B e C sejam duas inversas da matriz A, isto é, $A \cdot B = I_n$ e $C \cdot A = I_n$. Assim:

$$C = C \cdot I_n = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = I_n \cdot B = B.$$

Definição 13: se $k \in \mathbb{N}$ e A é uma matriz inversível, então a matriz A^{-k} é definida por:

$$A^{-k} = (A^{-1})^k.$$

Proposição 9: sejam A e B matrizes quadradas de ordem n.

i. Se A é inversível, então A^{-1} também é inversível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
ii. Se A e B são inversíveis, então AB também é inversível e $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Demonstração:

i. Se A é inversível, então

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \Rightarrow A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n.$$

Logo,

$$A = (A^{-1})^{-1}.$$

ii. Se A é inversível, então

$$
\begin{aligned}
& A \cdot A^{-1} = I_n \\
& \Rightarrow (A \cdot I_n) \cdot A^{-1} = I_n \\
& \Rightarrow (A \cdot B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = I_n \\
& \Rightarrow (A \cdot B) \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = I_n.
\end{aligned}
$$

3. REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Este capítulo discorre sobre o isomorfismo que podemos estabelecer entre o conjunto dos números complexos e um subconjunto das matrizes de ordem 2 com entradas reais. Será, então, o cerne deste trabalho, o que possibilitará posteriormente a utilização deste isomorfismo como uma maneira nova de apresentar os números complexos, ao mesmo que exibe uma aplicação do conceito de matrizes.

Iniciemos a abordagem dos números complexos a partir da solução da equação

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1.$$

Sabemos que sobre $\mathbb{R}$ não há solução. Então, vamos definir um “número” i, satisfazendo i^2 = -1, que resolva esta equação. A existência desse “número” é postulada e desejamos encontrar um ente geométrico que represente a solução procurada. Assim, vamos considerar a equação sob a forma:

$$X \cdot X = -I,$$

onde X é uma matriz 2 x 2 com coeficientes reais, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e o sinal de produto indica a multiplicação de matrizes. Dessa forma, podemos verificar que $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma solução da equação matricial. De fato:

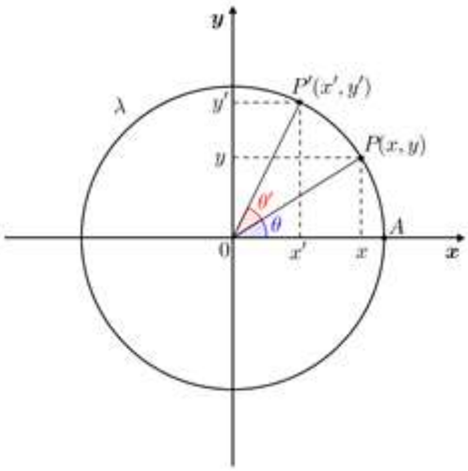
$$i^2 = i \cdot i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Proposição 10: Sejam X e I matrizes reais de ordem 2, sendo I a matriz identidade. A solução da equação

$$X \cdot X = -I,$$

representa geometricamente a rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário do plano cartesiano.

Demonstração:



Circunferência centrada na origem de raio r. Fonte:(NASCIMENTO, 2015)

$$cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cdot cos\theta; x' = r \cdot \cos(\theta + \theta').$$
$$sen\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cdot cos\theta; y' = r \cdot \cos(\theta + \theta').$$

$$x' = r \cdot \cos(\theta + \theta') = r \cdot (cos\theta \cdot cos\theta' - sen\theta \cdot sen\theta') = r \cdot \left(\frac{x}{r} \cdot cos\theta' - \frac{y}{r} \cdot sen\theta'\right)$$
$$= x \cdot cos\theta' - y \cdot sen\theta'.$$
$$y' = r \cdot \mathrm{sen}(\theta + \theta') = r \cdot (cos\theta \cdot sen\theta' + sen\theta \cdot cos\theta') = r \cdot \left(\frac{x}{r} \cdot sen\theta' + \frac{y}{r} \cdot cos\theta'\right)$$
$$= x \cdot sen\theta' + y \cdot cos\theta'.$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot cos\theta' - y \cdot sen\theta' \\ x \cdot sen\theta' + y \cdot cos\theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta' & -\,sen\theta' \\ sen\theta' & +\,cos\theta' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Tomando $\theta' = \frac{\pi}{2}$, temos que:

$$\begin{bmatrix} cos\frac{\pi}{2} & -\,sen\frac{\pi}{2} \\ sen\frac{\pi}{2} & cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = i.$$

Definição 14: Seja $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\right\}$. Definimos a função $\varphi: \mathbb{C} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ por:

$$\varphi(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Proposição 11: a função $\varphi: \mathbb{C} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, definida acima, é:

i. bijetora;
ii. $\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
iii. $\varphi(z_1 \cdot z_2) = \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
iv. $\varphi(1) = I$.

Demonstração:

i. Dada a matriz $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, seja $z = a + bi$. Por definição, $\varphi(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Logo, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi(z) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e, portanto, φ é sobrejetora. Por outro lado, dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ tais que $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, isto é, $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$, então, pela igualdade de matrizes, temos $a = c$ e $b = d$. Assim, $z_1 = z_2$ e φ é injetora.

ii. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$:

$$\begin{aligned} \varphi(z_1 + z_2) &= \varphi\big((a + c) + (b + d)i\big) \\ &= \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \varphi(z_1) + \varphi(z_2). \end{aligned}$$

iii. Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$:

$$\begin{aligned} \varphi(z_1 \cdot z_2) &= \varphi\big((ac - bd) + (ad + bc)i\big) \\ &= \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \\ &\varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2). \end{aligned}$$

iv. $\varphi(1) = \varphi(1 + 0i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.

Proposição 12: se φ é a função definida anteriormente, então $\varphi(z^{-1}) = (\varphi(z))^{-1}, \forall z \neq 0$.

Demonstração: como $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$, temos:

$$\begin{aligned}\varphi(z^{-1}) &= \varphi\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)\\ &= \varphi\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right)\\ &= \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\varphi(z) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}; \varphi(z)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\varphi(z^{-1}) = (\varphi(z))^{-1}.$$

Como φ é uma aplicação bijetora que conserva as operações de soma e produto, concluímos que as matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ se comportam exatamente da mesma forma que os números complexos se comportam em relação à soma e ao produto. Assim, para um número complexo $z = a + bi$, podemos associar a matriz

$$Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a \cdot I + b \cdot i.$$

A representação matricial dos números complexos, então, será o conjunto

$$\{a \cdot I + b \cdot i; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Destaca-se que

$$a \cdot I + 0 \cdot i = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a \cdot I$$

é denominada de parte real do número complexo.

Além disso,

$$0 \cdot I + b \cdot i = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = b \cdot i$$

é a parte imaginária do número complexo, denominado de imaginário puro.

Definição 15: as operações de soma e produto no conjunto $\mathbb{C} = \{a \cdot I + b \cdot i; a, b \in \mathbb{R}\}$ são dadas por:

i. dados $Z_1 = a \cdot I + b \cdot i$ e $Z_2 = c \cdot I + d \cdot i$ pertencentes a $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (a \cdot I + b \cdot i) + (c \cdot I + d \cdot i) \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix} \\ &= (a + c) \cdot I + (b + d) \cdot i. \end{aligned}$$

ii. dados $Z_1 = a \cdot I + b \cdot i$ e $Z_2 = c \cdot I + d \cdot i$ pertencentes a $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= (a \cdot I + b \cdot i) \cdot (c \cdot I + d \cdot i) \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix} \\ &= (ac - bd) \cdot I + (ad + bc) \cdot i. \end{aligned}$$

Proposição 13: o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos satisfaz as seguintes propriedades, para todo $a \cdot I + b \cdot i$, $c \cdot I + d \cdot i$, $e \cdot I + f \cdot i \in \mathbb{C}$:

i. $\big((aI + bi) + (cI + di)\big) + (eI + fi) = (aI + bi) + \big((cI + di) + (eI + fi)\big)$;

ii. $(aI + bi) + (cI + di) = (cI + di) + (aI + bi)$;

iii. o elemento neutro da soma é o complexo $0I + 0i$ tal que

$$(aI + bi) + (0I + 0i) = aI + bi;$$

iv. para todo elemento $aI + bi \in \mathbb{C}$, o inverso aditivo é o complexo matricial $-aI - bi$ tal que

$$(aI + bi) + (-aI - bi) = 0I + 0i;$$

v. $[(aI + bi) \cdot (cI + di)] \cdot (eI + fi) = (aI + bi) \cdot [(cI + di) \cdot (eI + fi)]$;

vi. $(aI + bi) \cdot (cI + di) = (cI + di) \cdot (aI + bi)$;

vii. $(aI + bi) \cdot [(cI + di) + (eI + fi)] = (aI + bi) \cdot (cI + di) + (aI + bi) \cdot (eI + fi)$ e $[(aI + bi) + (cI + di)] \cdot (eI + fi)] = (aI + bi) \cdot (eI + fi) + (cI + di) \cdot (eI + fi)$;

viii. existe $1I + 0i$ tal que $(aI + bi) \cdot (1I + 0i) = aI + bi$, para todo $aI + bi \in \mathbb{C}$;

ix. para todo $aI + bi \in \mathbb{C}$ não nulo, o inverso multiplicativo é o complexo matricial

$$(aI + bi)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ tal que}$$

$$(aI + bi) \cdot (aI + bi)^{-1} = 1I + 0i.$$

Demonstração: dados $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}, Z_3 = \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}$, temos que:

i. $[(aI + bi) + (cI + di)] + (eI + fi)$

$$= \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (a + c) + e & -[(b + d) + f] \\ (b + d) + f & (a + c) + e \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}\right).$$

ii. $(aI + bi) + (cI + di) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c + a & -(d + b) \\ d + b & c + a \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} d & -c \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$
$$= (cI + di) + (aI + bi).$$

iii. $0I + 0i = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

De fato,

$$(aI + bi) + (0I + 0i)$$
$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a + 0 & b + 0 \\ b + 0 & a + 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$
$$= aI + bi.$$

iv.

$$-(aI + bi) = -aI - bi$$
$$= -a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - b \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}.$$

De fato:

$$(aI + bi) + [-(aI + bi)]$$
$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a - a & -b + b \\ b - b & a - a \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= 0I + 0i.$$

v. $$[(aI+bi)\cdot(cI+di)]\cdot(eI+fi) = \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (ac-bd)e-(ad+bc)f & -[(ac-bd)f+(ad+bc)e] \\ (ac-bd)f+(ad+bc)e & (ac-bd)e-(ad+bc)f \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ace-bde-adf-bcf & -acf+bdf-ade-bce \\ acf-bdf+ade+bce & ace-bde-adf-bcf \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ace-adf-bcf-bde & -acf-ade-bce+bdf \\ acf+ade+bce-bdf & ace-adf-bcf-bde \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a(ce-df)-b(cf+de) & -[a(cf+de)+b(ce-df)] \\ a(cf+de)+b(ce-df) & a(ce-df)-b(cf+de) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ce-df & -(cf+de) \\ cf+de & ce-df \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}\right)$$
$$= (aI+bi)\cdot[(cI+di)\cdot(eI+fi)].$$

vi. $$(aI+bi)\cdot(cI+di) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ca-db & -(cb+da) \\ cb+da & ca-db \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$
$$= (cI+di)\cdot(aI+bi).$$

vii. $$(aI+bi)\cdot[(cI+di)+(eI+fi)] = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c+e & -(d+f) \\ d+f & c+e \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ac+ae-bd-bf & -ad-af-bc-be \\ bc+be+ad+af & -bd-bf+ac+ae \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ac-bd+ae-bf & -ad-bc-af-be \\ ad+bc+af+be & ac-bd+ae-bf \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ae-bf & -(af+be) \\ af+be & ae-bf \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}$$
$$= (aI+bi)\cdot(cI+di)+(aI+bi)\cdot(eI+fi);$$

$$
\begin{aligned}
[(aI+bi)+(cI+di)]\cdot(eI+fi) &= \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ae+ce-bf-df & -af-cf-be-de \\ be+de+af+cf & -bf-df+ae+ce \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ac-bf+ce-df & -af-be-cf-de \\ af+be+cf+de & ae-bf+ce-df \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ae-bf & -(af+be) \\ af+be & ae-bf \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ce-df & -(cf+de) \\ cf+de & ce-df \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} \\
&= (aI+bi)\cdot(eI+fi)+(cI+di)\cdot(eI+fi).
\end{aligned}
$$

viii. $1I+0i=1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+0\cdot\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

é o elemento neutro, pois

$$
\begin{aligned}
(aI)+(1I+0i) &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a\cdot 1-b\cdot 0 & a\cdot 0-b\cdot 1 \\ b\cdot 1+a\cdot 0 & b\cdot 0+a\cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
&= aI+bi.
\end{aligned}
$$

ix. $(aI+bi)^{-1}=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$

pois

$$
(aI+bi)\cdot(aI+bi)^{-1}=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \dfrac{a^2}{a^2+b^2}+\dfrac{b^2}{a^2+b^2} & \dfrac{ab}{a^2+b^2}-\dfrac{ab}{a^2+b^2} \\ \dfrac{ba}{a^2+b^2}-\dfrac{ab}{a^2+b^2} & \dfrac{b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=1I+0i.
$$

Definição 16: da teoria dos números complexos temos que

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot {z_2}^{-1}; z_2 \neq 0.$$

Aplicando a função φ, temos:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi(z_1 \cdot {z_2}^{-1})$$
$$= \varphi(z_1) \cdot \varphi({z_2}^{-1})$$
$$= \varphi(z_1) \cdot (\varphi(z_2)^{-1}).$$

Dessa maneira, definimos a divisão de um complexo Z_1 por um complexo Z_2, onde $Z_1, Z_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); Z_2 \neq 0$:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 \cdot {Z_2}^{-1}.$$

Como

$$Z_2^{-1} = \frac{1}{\det(Z_2)} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\det(Z_2)} \cdot Z_2^t,$$

concluímos que

$$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 \cdot \frac{1}{\det(Z_2)} \cdot Z_2^t$$
$$= \frac{Z_1 \cdot Z_2^t}{\det(Z_2)}.$$

Definição 17: dado o complexo $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, definimos o seu conjugado por $\bar{Z} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, pois

$$\varphi(\bar{z}) = \varphi(a - bi)$$
$$= \varphi(a + (-b)i)$$
$$= \begin{bmatrix} a & -(-b) \\ -b & a \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar que $\bar{Z} = Z^t$ e, assim,

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1 \cdot \overline{Z_2}}{\det(Z_2)}.$$

Teorema 5: dado um complexo Z, temos:

i. $Z + \bar{Z} = 2 \cdot Re(Z)$;
ii. $Z - \bar{Z} = 2 \cdot Im(Z)$;
iii. $Z = \bar{Z} \Leftrightarrow Z = Re(Z)$;

Demonstração: para $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$:

i. $Z + \bar{Z} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = 2 \cdot Re(Z).$

ii. $Z - \bar{Z} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2b \\ 2b & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot Im(Z).$

iii. $Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \Leftrightarrow -b = b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow Z = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = Re(Z).$

Teorema 6: dados dois complexos Z_1 e Z_2, temos:

i. $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$;
ii. $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$.

Demonstração: sejam $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$:

i. $Z_1 + Z_2 = \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \overline{Z_1 + Z_2} = \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}.$$

ii. $Z_1 \cdot Z_2 = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \overline{Z_1 \cdot Z_2} = \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}.$$

Definição 18: dado o complexo $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, definimos a norma de Z como sendo o número real não negativo

$$\|Z\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Teorema 7: dado o complexo Z, valem as seguintes afirmações:

i. $\|Z\| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$.
ii. $Z = \|\bar{Z}\|$.
iii. $\|Re(Z)\| \leq \|Z\|$.
iv. $\|Im(Z)\| \leq \|Z\|$.
v. $\|Z\|^2 = \|Z \cdot \bar{Z}\|$.

Demonstração: seja $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. O item (i) já foi demonstrado anteriormente.

ii. $\|Z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \|\bar{Z}\|$.

iii. $Re(Z) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow \|Re(Z)\| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$.

Por outro lado,

$$a^2 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |a| \leq \|Z\|$$
$$\Rightarrow \|Re(Z)\| \leq \|Z\|.$$

iv. $Im(Z) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|Im(z)\| = \sqrt{0^2 + b^2} = |b|$.

Analogamente ao item anterior, concluímos que $\|Im(Z)\| \leq \|Z\|$.

v. $\|Z\| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \|Z\|^2 = a^2 + b^2$.

Então:

$$Z \cdot \bar{Z} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \|Z \cdot \bar{Z}\| = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 0^2}$$
$$= a^2 + b^2$$
$$= \|Z\|^2.$$

Note que, apesar de algumas propriedades de norma válidas nos complexos usuais também serem válidas para a norma matricial, outras propriedades destoam disso, já que, na forma matricial, não podemos comparar uma matriz $Re(Z) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ com um número $\|Re(Z)\|$.

Lema 1: dados os números complexos $Z_1, Z_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, vale a seguinte desigualdade:

$$|ac + bd| \leq \|Z_1\| \cdot \|Z_2\|.$$

Demonstração: seja $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$, note que:

$$0 \leq (ad - bc)^2$$
$$\Rightarrow 0 \leq a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2$$
$$\Rightarrow 2adbc \leq a^2d^2 + b^2c^2.$$

Somando $a^2c^2 + b^2d^2$ nos dois lados da última desigualdade:

$$a^2c^2 + 2adbc + b^2d^2 \leq a^2d^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$
$$\Rightarrow (ac + bd)^2 \leq a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)$$
$$\Rightarrow (ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$
$$\Rightarrow |ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \|Z_1\| \cdot \|Z_2\|.$$

Teorema 8: se Z_1, Z_2 são números complexos, então:

i. $\|Z_1 \cdot Z_2\| = \|Z_1\| \cdot \|Z_2\|$;
ii. $\|Z_1 + Z_2\| \leq \|Z_1\| + \|Z_2\|$;
iii. $\|Z_1 - Z_2\| \geq |\|Z_1\| - \|Z_2\||$.

Demonstração: sejam $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$:

i. $Z_1 \cdot Z_2 = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \|Z_1 \cdot Z_2\| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$$
$$= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2}$$
$$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$$
$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$
$$\Rightarrow \|Z_1 \cdot Z_2\| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \|Z_1\| \cdot \|Z_2\|.$$

ii. Sabemos que

$$Z_1 + Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix}.$$

Então:

$$\|Z_1 + Z_2\| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$$
$$\Rightarrow \|Z_1 + Z_2\|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2$$
$$= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2$$
$$= \|Z_1\|^2 + \|Z_2\|^2 + 2(ac + bd)$$
$$\leq \|Z_1\|^2 + \|Z_2\|^2 + 2|ac + bd|.$$

Do lema 1 segue-se que:

$$\|Z_1 + Z_2\|^2 \leq \|Z_1\|^2 + \|Z_2\|^2 + 2\|Z_1\| \cdot \|Z_2\|$$
$$= (\|Z_1\| + \|Z_2\|)^2.$$

Ou seja,

$$\|Z_1 + Z_2\| \leq \|Z_1\| + \|Z_2\|.$$

iii. Sabemos que

$$Z_1 - Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & -(b-d) \\ b-d & a-c \end{bmatrix}.$$

Então:

$$\begin{aligned} &\|Z_1 - Z_2\| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \\ &\Rightarrow \|Z_1 - Z_2\|^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 \\ &= a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 \\ &= \|Z_1\|^2 + \|Z_2\|^2 - 2(ac+bd) \\ &\leq \|Z_1\|^2 + \|Z_2\|^2 + 2|ac - bd|. \end{aligned}$$

Do lema 1 segue-se que:

$$\begin{aligned} &\|Z_1 - Z_2\|^2 \geq \|Z_1\|^2 + \|Z_2\|^2 - 2\|Z_1\| \cdot \|Z_2\| \\ &(\|Z_1\| - \|Z_2\|)^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|Z_1 - Z_2\| \geq \|Z_1\| - \|Z_2\|.$$

Nota-se que na forma matricial valem as propriedades

$$\|Z_1 - Z_2\| \leq \|Z_1 + Z_2\| \text{ e } \|Z_1 + Z_2\| \geq |\|Z_1\| - \|Z_2\||.$$

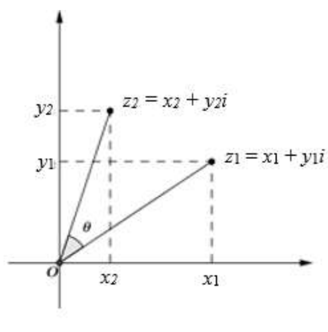
Além disso, como $\det(Z) = \|Z\|^2$ e $Z^t = \bar{Z}$; conclui-se que:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1 \cdot \overline{Z_2}}{\|Z_2\|^2}.$$

3.1. FORMA TRIGONOMÉTRICA MATRICIAL

Definição 19: Sejam $Z_1 = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix}$ dois complexos não nulos. Definimos o ângulo θ entre Z_1 e Z_2 pela expressão:

$$\theta = \arccos \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$



Representação geométrica de θ no plano complexo. Fonte: Autor

Tomando-se $Z = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ e $Z_0 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, temos que o ângulo entre Z e Z_0 é dado por

$$cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$x = r \cdot cos\theta.$$

De $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e da relação fundamental da trigonometria, obtemos:

$$y = r \cdot sen\theta.$$

Assim:

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} r \cdot cos\theta & -r \cdot sen\theta \\ r \cdot sen\theta & r \cdot cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \cdot cos\theta & 0 \\ 0 & r \cdot cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r \cdot sen\theta \\ r \cdot sen\theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= r \cdot cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + r \cdot sen\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= r \cdot cos\theta \cdot I + r \cdot sen\theta \cdot I. \end{aligned}$$

Note que a forma trigonométrica matricial é análoga à forma trigonométrica (ou polar) algébrica, onde $z = r \cdot cos\theta + i \cdot rsen\theta$. Além disso, para r = 1 temos o número complexo matricial

$$\begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

que é uma matriz de rotação. Logo, para rotacionar um ponto (a;b) em relação à origem, de θ graus no sentido anti-horário, multiplica-se a matriz de rotação pelo complexo matricial

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Dessa forma:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot cos\theta - b \cdot sen\theta & a \cdot sen\theta + b \cdot cos\theta \\ -(a \cdot sen\theta + b \cdot cos\theta) & a \cdot cos\theta - b \cdot sen\theta \end{bmatrix}$$

o que é, portanto, equivalente ao par ordenado

$$(a \cdot cos\theta - b \cdot sen\theta, a \cdot sen\theta + b \cdot cos\theta).$$

Seja agora $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a unidade imaginária. As potências de i são:

$$\begin{aligned}
&i^0 = I \\
&i^1 = i \\
&i^2 = -I \\
&i^3 = i^2 \cdot i = -I \cdot i = -i \\
&i^4 = i^2 \cdot i^2 = -I \cdot (-I) = I \\
&i^5 = i^4 \cdot i = I \cdot i = i \\
&i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -I \\
&i^7 = i^6 \cdot i = -I \cdot i = -i
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente, formando o mesmo ciclo observado nos números complexos usuais.

3.2. FÓRMULA DE EULER NA FORMA MATRICIAL

A equação de Euler é dada por:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ podemos interpretá-la como sendo

$$e^{\pi \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = -I.$$

Proposição 14: dado $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, então:

$$\|Z^m\| = \|Z\|^m, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: provando por indução que a expressão anterior vale para $m \in \mathbb{N}$ qualquer. Para $n = 0$,

$$\begin{aligned}
\|Z^0\| &= \|I\|^m \\
&= \|I\| \\
&= 1 \\
&= \|Z\|^0.
\end{aligned}$$

Suponha que a propriedade seja válida para um certo $n = k$, ou seja, que

$$\|Z^k\| = \|Z\|^k.$$

Agora, provaremos que a igualdade vale para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
\|Z^{k+1}\| &= \|Z^k \cdot Z\| \\
&= \|Z^k\| \cdot \|Z\|.
\end{aligned}$$

Da hipótese de indução:

$$\begin{aligned}\|Z^{k+1}\| &= \|Z^k\| \cdot \|Z\| \\ &= \|Z\|^{k+1}.\end{aligned}$$

que era o que desejava-se provar.

Definição 20: seja o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Denotamos a matriz exponencial de uma matriz $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ por

$$e^Z = I + Z + \frac{1}{2!} \cdot Z^2 + \frac{1}{3!} \cdot Z^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot Z^j.$$

Segue-se daí que $e^0 = I$.

A exponencial acima está bem definida, pois observe-se que:

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \cdot Z^j \right\| &\leq \sum_{j=0}^{n} \left\| \frac{1}{j!} \cdot Z^j \right\| \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \cdot \|Z^j\|.\end{aligned}$$

Pela proposição anterior:

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \cdot Z^j \right\| \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \cdot \|Z\|^j.$$

Fazendo-se $n \to \infty$:

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot Z^j \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot \|Z\|^j$$

e como a série de Taylor da função exponencial é dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \cdots$$

então

$$1 + \|Z\| + \frac{1}{2!} \cdot \|Z\|^2 + \frac{1}{3!} \cdot \|Z\|^3 + \cdots = e^{\|Z\|} \in \mathbb{R}.$$

Garante-se, assim, que a matriz exponencial de uma matriz Z está bem definida.

Lema 2: as potências de θi serão dadas por:

i. $\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2n} = (-1)^n \cdot \begin{bmatrix} \theta^{2n} & 0 \\ 0 & \theta^{2n} \end{bmatrix}$, para potência par;

ii. $\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2n+1} = (-1)^n \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta^{2n+1} \\ \theta^{2n+1} & 0 \end{bmatrix}$, para potência ímpar.

Demonstração: fazendo por indução, teremos:

i. Potências pares: para $n = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{bmatrix}.$$

Supondo que a igualdade se mantenha válida para $n = k$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2k} = (-1)^k \cdot \begin{bmatrix} \theta^{2k} & 0 \\ 0 & \theta^{2k} \end{bmatrix},$$

vamos mostrar que ela também é válida para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2(k+1)} &= \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2k} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2} \\ &= (-1)^k \cdot \begin{bmatrix} \theta^{2k} & 0 \\ 0 & \theta^{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^k(-1) \begin{bmatrix} \theta^{2k} & 0 \\ 0 & \theta^{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta^2 & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{k+1} \begin{bmatrix} \theta^{2(k+1)} & 0 \\ 0 & \theta^{2(k+1)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Isso encerra a demonstração para as potências pares.

ii. Potências ímpares: para $n = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{3} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -\theta^3 \\ \theta^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supondo válida para $n = k$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta^{2k+1} \\ \theta^{2k+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Devemos mostrar que para $n = k + 1$ a igualdade segue válida:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2(k+1)+1} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{(2k+1)+2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2k+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2}$$

$$= (-1)^k \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta^{2k+1} \\ \theta^{2k+1} & 0 \end{bmatrix} \cdot (-1) \begin{bmatrix} \theta^2 & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{bmatrix}$$
$$= (-1)^k(-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta^{2k+1} \\ \theta^{2k+1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta^2 & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{bmatrix}$$
$$= (-1)^{k+1} \begin{bmatrix} 0 & -\theta^{2(k+1)+1} \\ \theta^{2(k+1)+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Isso completa a demonstração para potências ímpares.

Teorema 9: Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Então,

$$e^{\theta i} = cos\theta \cdot I + sen\theta \cdot i.$$

Demonstração: lembramos que as séries de Taylor das funções seno e cosseno são dadas por

$$cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\theta^{2j};$$

$$sen\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\theta^{2j+1}.$$

Agora:

$$e^{\theta i} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^j.$$

Pelo lema anterior, temos:

$$e^{\theta i} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(-1)^j \begin{bmatrix} \theta^{2j} & \theta^{2j+1} \\ \theta^{2j+1} & \theta^{2j} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\theta^{2j} & \displaystyle -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\theta^{2j+1} \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\theta^{2j+1} & \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\theta^{2j} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} e^{\theta i} &= \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \\ &= cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + sen\theta \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= cos\theta \cdot I + sen\theta \cdot i. \end{aligned}$$

A forma matricial da equação de Euler é análoga à fórmula de Euler

$$e^{\theta i} = cos\theta \cdot I + i \cdot sen\theta.$$

Para o caso particular em que $\theta = \pi$, temos:

$$\begin{aligned} e^{\pi i} &= cos\pi \cdot I + sen\pi \cdot i \\ &= -I. \end{aligned}$$

Observe que esta é a versão matricial da relação de Euler, que é dada por

$$e^{\pi i} = -1.$$

4. SEQUÊNCIA DE ENSINO E PRODUTO EDUCACIONAL

Neste capítulo, apresentamos uma sequência de ensino, de forma simplificada, para aplicação dos assuntos expostos nos capítulos anteriores para um curso de aprofundamento na terceira série do Ensino Médio, após o qual oferecemos um produto educacional que utiliza o *software* Geogebra com parâmetros que podem ser editados pelo(a) leitor(a) da forma que achar mais conveniente. A utilização do Geogebra permite uma visualização facilitada dos conceitos vistos.

4.1. SEQUÊNCIA DE ENSINO – NÚMEROS COMPLEXOS E MATRIZES

Público-alvo: 3º ano do Ensino Médio

Carga horária: 7 aulas (50 minutos cada)

Objetivo Geral

Compreender os números complexos como extensão dos números reais, suas representações algébrica e geométrica, propriedades, forma trigonométrica, Fórmula de Euler e estabelecer conexões com a teoria de matrizes.

Aula 1 – Motivação e Construção dos Números Complexos

Objetivos: ao final desta aula, o(a) estudante deverá compreender o surgimento dos números complexos; definir número complexo como par ordenado; entender a unidade imaginária.

Desenvolvimento (30 minutos): a origem dos números complexos está ligada a um problema muito concreto, que é resolver equações algébricas que não tenham solução dentro dos números reais. Os números complexos começaram então a aparecer no contexto da resolução de equações cúbicas durante o Renascimento italiano: matemáticos como Gerolamo Cardano, em sua obra *Ars Magna* (1545), encontraram expressões envolvendo a raiz quadrada de números negativos ao tentar resolver certos tipos de equações — mesmo quando a solução final era real.

Um exemplo clássico é a equação:

$$x^3 = 15x + 4$$

Ao aplicar os métodos da época, surgiam termos como $\sqrt{-121}$, algo considerado “impossível” na época.Inicialmente, essas quantidades eram vistas com desconfiança e chamadas de “números imaginários”. O matemático Rafael Bombelli foi um dos primeiros a tratar essas expressões de forma sistemática, no século XVI, mostrando como operar com elas de maneira consistente.

Nos séculos seguintes, outros matemáticos contribuíram para dar rigor e significado aos números complexos:

- René Descartes (século XVII) cunhou o termo “imaginário”.
- Leonhard Euler (século XVIII) introduziu a notação $\sqrt{-1}$ e a famosa fórmula: $$e^{i\theta} = cos\theta + i \cdot sen\theta$$
- Carl Friedrich Gauss (século XIX) consolidou o uso dos números complexos e mostrou que eles eram essenciais para a álgebra, especialmente com o Teorema Fundamental da Álgebra.

A interpretação geométrica veio com o plano complexo (ou plano de Argand-Gauss), onde um número complexo é representado como um ponto no plano. Essa visão ajudou muito na aceitação e compreensão desses números.

A partir disso, deve-se definir em sala $i^2 = -1$ e $i = (0;1)$; e as operações de adição $(a;b) + (c,d)$ e produto $(a;b)\cdot(c;d)$.

Atividades (20 minutos): calcular (2;3) + (1;-4) e (1;2) · (3;4); determinar i^3, i^4, i^7.

Avaliação: ao promover uma aula dialogada na qual a sala participe na construção dos conceitos, o alunado será avaliado pela participação nas discussões e na resolução individual escrita das atividades e outras que o(a) professor(a) possa criar em relação a tais conceitos.

Aula 2 – Forma Algébrica e Propriedades

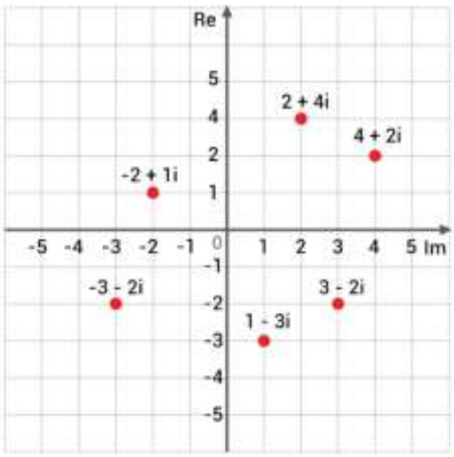
Objetivos: ao final desta aula, o(a) estudante deverá escrever complexos na forma $a + bi$; identificar parte real e imaginária; trabalhar propriedades algébricas.

Desenvolvimento (30 minutos): Conversão de $(a;b)$ para $a + bi$; ´propriedades de associatividade e comutatividade; elemento neutro e elemento inverso; definição de conjugado.

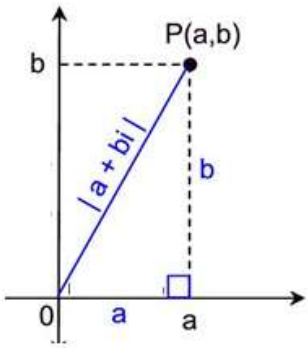
Atividades (20 minutos): para que o alunado possa trocar ideias sobre o que foi visto nesta aula, coloca-los em dupla para calcular o conjugado de alguns números complexos e mostrar o resultado do produto de um número complexo pelo seu conjugado.

Avaliação: entrega por parte dos(as) estudantes um resumo escrito da teoria vista e a resolução dos exercícios propostos pelo(a) professor(a).

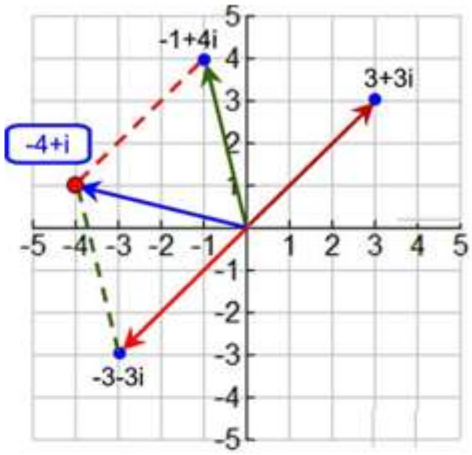
Aula 3 – Plano de Argand-Gauss e Módulo



Fonte: *Geogebra*



Fonte: *Geogebra*



Plano de Argand-Gauss e módulo. Fonte: *Geogebra*

Objetivos: ao final desta aula, o(a) estudante deverá representar complexos geometricamente; definir módulo; relacionar módulo à distância entre a representação de um número complexo no plano (chamada de afixo) e a origem do sistema de coordenadas cartesianas.

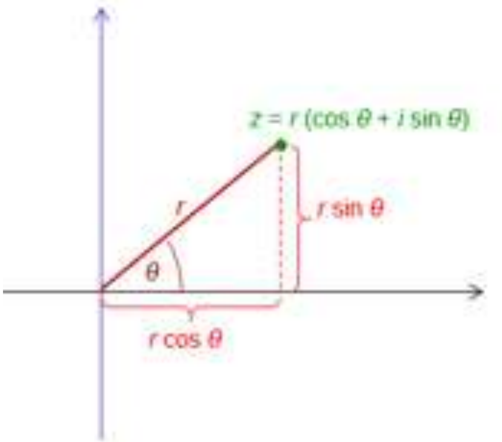
Desenvolvimento (30 minutos): definição do plano complexo; eixo real e eixo imaginário; fórmula do módulo de um número complexo; interpretação geométrica (utilizar as imagens exibidas anteriormente).

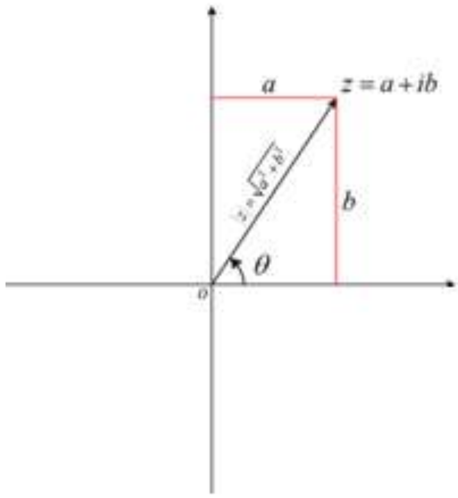
Atividades (20 minutos): individualmente, representar em caderno quadriculado o plano de Argand-Gauss e alguns números complexos localizados nele; calcular o módulo de alguns complexos pela fórmula e medindo com a régua no plano de Argand-Gauss; verificar para alguns complexos z_1 e z_2 a desigualdade triangular

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Avaliação: levar em consideração a qualidade e a precisão do trabalho geométrico, além da participação e comprometimento na realização da atividade.

Aula 4 – Forma Trigonométrica





Forma trigonométrica. Fonte: *Geogebra*

Objetivos: ao final desta aula, o(a) estudante deverá determinar argumento; converter forma algébrica para trigonométrica.

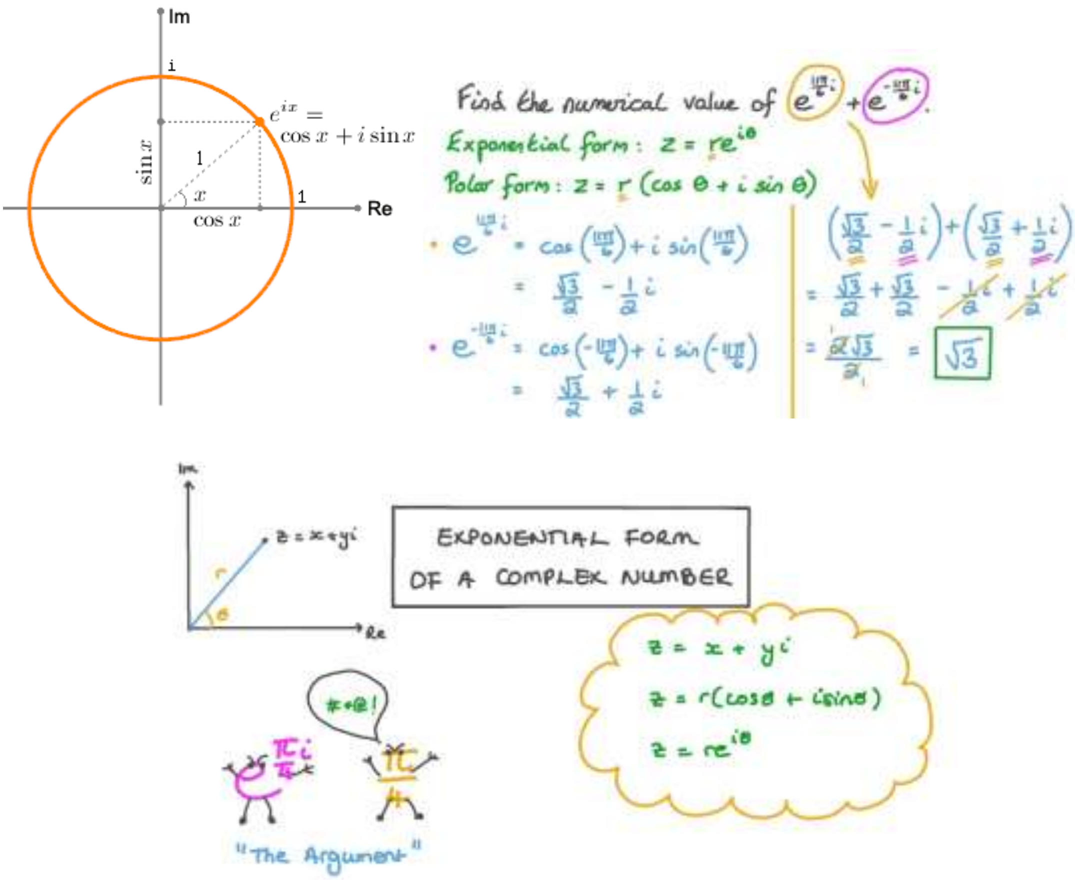
Desenvolvimento (25 minutos): mostrar as fórmulas para a parte real e a parte imaginária de um complexo, além de apresentar a forma trigonométrica:

$$cos\theta = \frac{a}{r}; sen\theta = \frac{b}{r}$$
$$\Rightarrow a = r \cdot cos\theta; b = r \cdot sen\theta$$
$$\Rightarrow z = (r \cdot cos\theta) + (r \cdot sen\theta) \cdot i.$$

Atividades (25 minutos): individualmente, converter 1 + i e $\sqrt{3}$ + i para a forma trigonométrica.

Avaliação: apresentação escrita dos resultados. Pontuar a correção de cada passagem dos raciocínios, a critério do(a) professor(a).

Aula 5 – Fórmula de Euler



Fórmula de Euler. Fonte: acervo do Google

Objetivos: ao final desta aula, o(a) estudante deverá compreender a fórmula de Euler, entendendo-a como uma relação elegante entre números complexos e geometria; a partir disso, interpretar exponencial complexa.

Desenvolvimento (30 minutos): para a definição de exponencial com expoente que seja imaginário puro na forma e^{xi} baseamo-nos nas séries de Taylor:

$$senx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Dessa forma:

$$e^{xi} = 1 + \frac{xi}{1!} + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \frac{(xi)^4}{4!} + \cdots$$
$$\Rightarrow e^{xi} = 1 + \frac{xi}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3 i}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\Rightarrow e^{xi} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \cdot i$$
$$\Rightarrow e^{xi} = cosx + (senx) \cdot i; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Atividades (20 minutos): em duplas, por considerarmos o tema desta aula mais complexo, pedir para que os(as) alunos(as) calculem, cada um em seu caderno, o valor de $e^{i\pi}$, cujo resultado é -1, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, cujo resultado é i.

Avaliação: corrigir cada passagem, pontuando principalmente a exatidão nos cálculos de cosseno e seno dos ângulos envolvidos.

Aula 6 – Introdução às Matrizes

Objetivos: ao final desta aula, o(a) estudante deverá definir uma matriz $m \times n$; trabalhar tipos de matrizes; realizar operações básicas.

Desenvolvimento (20 minutos): rever os conceitos de matriz, matriz identidade, soma e multiplicação de matrizes e não comutatividade para o produto de matrizes.

Atividades (30 minutos): solicitar a entrega dos registros da teoria vista nesta aula e o cálculo de AB e BA para duas matrizes dadas, verificando se há ou não comutatividade multiplicativa.

Aula 7 – Relação entre Complexos e Matrizes

Objetivos: ao final desta aula, o(a) estudante deverá associar um número complexo a uma matriz; interpretar multiplicação de complexos como composição de transformações lineares.

Desenvolvimento (30 minutos): mostrar que multiplicar por i corresponde à uma rotação de 90° (ver as páginas 42 e 43 desta dissertação).

Atividades (20 minutos): individualmente, representar $2 + 3i$ como matriz; multiplicar duas matrizes associadas a complexos dados; comparar com produto complexo.

Avaliação: pontuar a correção de cada resposta alcançada.

Avaliação final da sequência de ensino: elaborar um mapa conceitual relacionando: complexos → plano de Argand-Gauss → módulo → forma polar → fórmula de Euler → Matrizes. A correção seguirá os critérios determinados pelo(a) professor(a).

Estratégias Metodológicas: resolução de problemas; representações geométricas; trabalho colaborativo; uso de GeoGebra (opcional).

Instrumentos de Avaliação: participação; lista de exercícios; atividades individuais ou em duplas; avaliação escrita.

4.2. PRODUTO EDUCACIONAL – EXPLORANDO NÚMEROS COMPLEXOS E MATRIZES NA PRÁTICA

https://www.geogebra.org/classic/gtnhg4sp

1. Descrição Geral

Oferecemos aqui um produto educacional interdisciplinar voltado para estudantes da terceira série do Ensino Médio. A proposta integra números complexos e matrizes por meio de aplicações visuais e tecnológicas, conectando conceitos abstratos a situações reais como:

a) transformações geométricas no plano;

b) computação gráfica;

c) física (rotações e ondas);

d) engenharia e tecnologia.

2. Objetivos de Aprendizagem

Ao final desta proposta, o estudante deverá ser capaz de:

a) representar números complexos na forma algébrica e polar;

b) interpretar números complexos como vetores no plano;

c) relacionar multiplicação de complexos com rotações e dilatações;

d) representar transformações lineares por matrizes;

e) comparar rotações via números complexos e via matrizes;

f) aplicar matrizes e complexos na modelagem de problemas reais.

3. Estrutura do Produto

Módulo 1 – Números Complexos no Plano

a) Forma algébrica: $z = a + bi$.

b) Plano de Argand-Gauss.

c) Módulo e argumento.

d) Forma trigonométrica.

e) Multiplicação como rotação.

f) Atividade prática: simular no software *Geogebra* a multiplicação de um número complexo por i e observar a rotação de 90°.

Módulo 2 – Matrizes e Transformações Lineares

a) Matrizes 2×2.

b) Produto de matrizes.

c) Matriz de rotação: $\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$.

d) Atividade prática: aplicar no *Geogebra* uma matriz de rotação a um vetor e comparar com a multiplicação por $e^{i\theta}$.

Módulo 3 – Conexão Fundamental

a) Mostrar que multiplicar um número complexo por $r \cdot e^{i\theta}$ é equivalente a aplicar a matriz $\begin{bmatrix} r \cdot cos\theta & -r \cdot sen\theta \\ r \cdot sen\theta & r \cdot cos\theta \end{bmatrix}$.

b) Conclusão conceitual: todo número complexo pode ser representado por uma matriz 2×2 especial.

4. Produto Prático Final

Projeto: “Simulador de Transformações no Plano”

Os alunos desenvolvem (em grupo) um simulador simples no *Geogebra*. O simulador deve permitir:

a) inserir um número complexo;

b) inserir uma matriz 2×2.

c) visualizar o vetor original, a transformação por número complexo, a transformação por matriz e comparar os resultados.

5. Situação-Problema Integradora

Caso Aplicado: Computação Gráfica

Em jogos digitais e animações:

a) rotações são feitas com matrizes;

b) também podem ser feitas com números complexos;

c) os alunos devem responder: qual método é mais eficiente computacionalmente e em quais contextos cada um é mais vantajoso.

6. Avaliação

Critérios:

a) domínio conceitual;

b) correta aplicação matemática;

c) clareza na explicação da equivalência;

d) qualidade da simulação;

e) relatório final reflexivo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao abordarmos a relação entre números complexos e as matrizes desejamos considerar a manutenção da apresentação do conjunto $\mathbb{C}$ no Ensino Médio, tendo em vista seu caráter algébrico, como também explicitar uma aplicação do conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que poderá ser vista em cursos de aprofundamento ou em cursos de graduação. Assim, convidamos o professorado a propor atividades que envolvam estes conjuntos não apenas nas aulas regulares como também em itinerários formativos e trilhas de produção científica, mostrando às nossas alunas e nossos alunos a validade da conexão entre eles.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDREESCU, A.; ANDRICA, D. *Complex numbers from A to Z*. Boston: Birkhauser, 2016.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. *Álgebra linear com aplicações.* 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

AVILA, G. *Variáveis complexas e aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 271 p.

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera L.; WETZLER, Henry G. *Álgebra linear.* 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Álgebra linear.* 3. ed. São Paulo: Makron Books, 2005.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um curso de álgebra linear*(2ªed.). São Paulo: Editora da universidade de São Paulo, 2013.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2013.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. d. S. *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LANG, S. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2003.

LIMA, E. L. *Curso de análise* (Vol.2). Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIPSCHUTS, S.; LIPSON, M. L. *Álgebra linear* (4ª edição). Porto Alegre: Bookman, 2011. 432 p.

MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação e Cultura-Secretaria de Educação Básica, 2000.

NASCIMENTO, F. A. *Funções trigonométricas complexas: uma abordagem voltada para o ensino médio*. Boa Vista: Biblioteca Central da UFRR, 2015.

VASSALLO NETO, Rafael. **O ensino de números complexos**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática*. Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-15..

SILVA, S. M. *Números complexos: uma abordagem matricial*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Roraima. Boa Vista: 2017.

SOARES, M. G. *Cálculo em uma variável complexa* (2ª edição). Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

STRANG, Gilbert. *Introduction to linear algebra.* 5th ed. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 2016.

APÊNDICE A: ESPAÇOS VETORIAIS DAS MATRIZES

Neste apêndice, apresentamos a representação dos números complexos através de matrizes como um espaço vetorial dotado das operações e de uma norma, permitindo que tal representação possa se conectar com outros assuntos matemáticos que também são espaços vetoriais. A algebrização decorrente deste fato autoriza a estudar diferentes teorias da Matemática de uma forma unificada.

Definição 21: um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ se em seus elementos estiverem definidas as seguintes operações:

i. Adição: a cada par $u, v \in V$ corresponde um elemento $u + v \in V$, chamado de soma de u e v, tal que:
   a. $u + v = v + u, \forall u, v \in V;$
   b. $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V;$
   c. Exista em V um elemento, denominado elemento nulo e denotado por 0, tal que $0 + v = v + 0 = v, \forall v \in V;$
   d. A cada elemento $, v \in V$ exista um elemento em V, denotado por $-v$, tal que $v + (-v) = 0$.
ii. Produto de um vetor por escalar: a cada par $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, corresponde um elemento $\alpha \cdot v \in V$, denominado produto por escalar de α por v de modo que:
   a. $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $, \forall v \in V;$
   b. $1 \cdot v = v, \forall v \in V.$

Além disso, valem:

i. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V;$
ii. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V.$

O conjunto $M_2(\mathbb{R})$ da matrizes quadradas de ordem 2, munido das operações de soma e produto por escalar usuais, é um espaço vetorial. O elemento neutro do espaço vetorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Definição 22: seja V um espaço vetorial, e seja W um subconjunto de V. Dizemos que W é um subespaço vetorial de V se W satisfaz as seguintes condições:

i. se v e w são elementos de W, a soma $v + w$ também é um elemento de W.
ii. se v é um elemento de W e α é um número real, então $\alpha \cdot v$ é um elemento de W.
iii. o elemento neutro de V também é um elemento de W.

Se W é um subespaço, então ele é também um espaço vetorial.

Podemos provar que o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, pois o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ é um subconjunto de $M_2(\mathbb{R})$; além disso, no conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vale as condições citadas anteriormente, já que, para $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$ pertencentes a $M_2(\mathbb{R})$ e α um número real:

i. $A + B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} \in \mathbb{R};$

ii. $\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a & -\alpha \cdot b \\ \alpha \cdot b & \alpha \cdot a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});$

iii. Para $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} A + O &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+0 & -(b+0) \\ b+0 & a+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

Logo, o elemento neutro do conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ é o mesmo do conjunto $M_2(\mathbb{R})$. Sendo assim, o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$.

Definição 23: seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{R}$. Um produto interno sobre V é uma função $<,>: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i. $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >, \forall u, v, w \in V;$
ii. $< \lambda u, v > = \lambda < u, v >, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V;$
iii. $< u, v > = < v, u >, \forall u, v \in V;$
iv. $< u, u > \ > 0, \forall \neq 0.$

Definição 24: seja o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$. Dada as matrizes A e B em $M_2(\mathbb{R})$, definimos o produto interno entre as matrizes *A* e *B* pela expressão:

$$< A, B > = \frac{1}{2} \cdot tr(B^t \cdot A).$$

Precisamos provar que esta expressão satisfaz as condições para ser um produto interno. Para isso, dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ e o número real α, temos:

i. $$< A + B, C > = \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right\rangle$$
$$= \left\langle \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right\rangle$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} i(a+e)+k(c+g) & i(b+f)+k(d+h) \\ j(a+e)+l(c+g) & j(b+f)+l(d+h) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} [i(a+e)+k(c+g)+j(b+f)+l(d+h)].$$

Por outro lado:

i. $$< A, C > + < B, C > = \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right\rangle$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} ai+ck & bi+dk \\ aj+cl & bj+dl \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} ei+gk & fi+hk \\ ej+gl & fj+hl \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} [(ai+ck)+(bj)+dl)] + \frac{1}{2} [(ei+gk)+(fj)+hl)]$$
$$= \frac{1}{2} [i(a+e)+k(c+g)+j(b+f)+l(d+h)].$$

Isso conclui a demonstração de (i).

ii. $$< \alpha \cdot A, B > = \left\langle \alpha \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle$$
$$= \left\langle \begin{bmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} \alpha \cdot a \cdot e + \alpha \cdot c \cdot g & \alpha \cdot b \cdot e + \alpha \cdot d \cdot g \\ \alpha \cdot a \cdot f + \alpha \cdot c \cdot h & \alpha \cdot b \cdot f + \alpha \cdot d \cdot h \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr \left\{ \alpha \cdot \begin{bmatrix} ae+cg & be+dg \\ af+ch & bf+dh \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot tr(B^t \cdot A)$$
$$= \alpha \cdot < A, B >.$$

iii. Temos que:

$$< A, B > = \frac{1}{2} \cdot tr(B^t \cdot A)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr \left(\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} ae + cg & be + dg \\ af + cg & bf + dh \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}(ae + bf + cg + dh).$$

Por outro lado:

$$< B, A > = \frac{1}{2} \cdot tr(A^t \cdot B)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} ae + cg & af + ch \\ be + dg & bf + dh \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}(ae + bf + cg + dh).$$

Assim, $< A, B > = < B, A >$.

iv. Se $A \neq O$ então pelo menos um elemento $a_{ij} \in A$ é não nulo. Suponha que apenas um elemento seja não-nulo e seja $a_{11} = a$ esse elemento. Assim, $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (caso haja mais elementos não nulos e em outras posições, a demonstração se dará da mesma forma). Assim:

$$< A, A > = \frac{1}{2} \cdot tr(A^t \cdot A)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot tr \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} a^2 > 0.$$

Isso completa a demonstração de (iv) e, com isso, como todas as propriedades de produto interno estão cumpridas, concluímos que a expressão

$$< A, B > = \frac{1}{2} \cdot tr(B^t \cdot A).$$

é de fato um produto interno.

NORMA

Definição 25: seja v um elemento do espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, munido de um produto interno. Chamamos de norma de v ao número real dado por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Seja V um espaço vetorial com produto interno; segue imediatamente das definições que

i. $\|v\| \geq 0, \forall v \in V$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$
ii. $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V.$

Podemos provar que a expressão

$$\|Z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

é uma norma no espaço dos complexos matriciais. Para isso, seja a matriz $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} < Z, Z > &= \frac{1}{2} \cdot tr(Z^t \cdot Z) \\ &= \frac{1}{2} \cdot tr\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot tr\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (a^2 + b^2) = \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|Z\| = < Z, Z > = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

APÊNDICE B: EXERCÍCIOS

1. Dados os complexos $Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, Z_3 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $Z_1 + Z_2 + Z_3$

b) $Z_2 - Z_3$

c) $Z_1 \cdot Z_2$

d) $(Z_1 + Z_2) \cdot Z_3$

e)) $(Z_1 + Z_2) + Z_3$

2. Represente na forma algébrica $Z = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Calcule $Z \cdot \bar{Z}$ para $Z = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ e $Z = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Determine os números complexos Z e $\bar{Z}$ tais que $Z - \bar{Z} = 4$ e $Z \cdot \bar{Z} = 45$.

5. Determine a divisão de $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Determine a norma de $Z = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ e $Z = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$.

8. Escreva na forma trigonométrica matricial $Z = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

9. Se $Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, determine $\|Z_1\| + \|Z_2\|$.

10. Calcule $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^7$.

11. Encontre a forma matricial de $Z = -4 + 2i$.

APÊNDICE C: QUESTÕES DE VESTIBULAR – INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA (IME)

1. Seja i tal que $i^2 = -1$. O valor do número real α que satisfaz à equação

$$cis\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2cis\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -i & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} & \alpha \\ i^5 & \sqrt{3} & -\frac{i}{2} \end{vmatrix}$$

é:

a) 3 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{16}$

Resolução (alternativa E)

$$cis\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2cis\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -i & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} & \alpha \\ i^5 & \sqrt{3} & -\frac{i}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \cdot sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \cdot \left(cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i \cdot sen\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -i & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} & \alpha \\ i^5 & \sqrt{3} & -\frac{i}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{3i}{2} + 4\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2} = -\frac{3i}{2} + 4\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

2. Seja i tal que $i^2 = -1$. Seja A dado pela equação:

$$A = \sum_{n=1}^{1000} \left[(i)^{2n-2} \cdot ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(-1)^{n-1}} \right]$$

O valor de e^{-A} é:

a) 250 b) 500 c) 501 d) 1000 e) 1001

Resolução (alternativa C)

$$A = \sum_{n=1}^{1000} \left[(i)^{2n-2} \cdot ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(-1)^{n-1}} \right].$$

Simplificando o termo geral *E* da expressão com o auxílio das propriedades de potência e dos logaritmos, tem-se:

$$E = (i)^{2n-2} \cdot ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(-1)^{n-1}} = (i^2)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$= (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln(n+1) - \ln(n+2).$$

Assim:

$$A = \sum_{n=1}^{1000} (\ln\,(n+1) - \ln\,(n+2)) = \ln(2) - \ln(3) + \ln(3) - \ln(4) + \cdots$$
$$= \ln\,(1001) - \ln\,(1002)$$
$$\Rightarrow A = \ln(2) - \ln(1002) = ln\left(\tfrac{2}{1002}\right)$$
$$\Rightarrow -A = -ln\left(\frac{2}{1002}\right) = ln\left(\frac{2}{1002}\right)^{-1} = \ln\,(501)$$
$$\Rightarrow e^{-A} = e^{ln(501)} = 501.$$

3. Seja i tal que $i^2 = -1$. Determine a área do triângulo no plano complexo cujos vértices são as raízes da equação

$$\left(Z - \frac{3i}{2}\right)^3 = -27i.$$

Resolução: seja $z = \frac{3i}{2} - w$. Assim, a equação do enunciado se torna

$$(w)^3 = -27i = 27 \cdot \left(cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot sen\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$\Rightarrow w_k = 3 \cdot \left(cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \cdot cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), k = 0,1,2.$$

Com isso:

$$w_0 = 3i, w_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, w_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Dessa forma:

$$z_0 = \frac{9i}{2}, z_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a área pedida é a de um triângulo cujos vértices são $\left(0;\frac{9}{2}\right), \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right), \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, e esta área é igual a $\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

4. Considere os conjuntos de números complexos:

$$A = \{x + iy: x, y \in \mathbb{R} \wedge |x| + |y| \leq r\}$$

$$B = \{x + iy: x, y \in \mathbb{R} \wedge max\{|x - a|, |y - b|\} \leq c\},$$

onde r, a, b e c são números reais positivos e $max\{x_1, x_2\}$ é o maior valor entre os reais x_1e x_2. O menor valor de r, em função de a, b e c, para que se tenha $B \subset A$ é

a) $a + b + c$

b) $(a + b)\sqrt{2} + c$

2$(a + b)$ + c

d) $a + b + 2c$

e) 2$(a + b + c)$

Resolução (alternativa D)

O conjunto A é representado por um quadrado de centro em (0;0) e vértices nos pontos (r; 0), (-r;0), (0;r), (0;-r). Já o conjunto B é representado por um quadrado com centro em (a; b) e lados paralelos aos eixos coordenados com medida igual a $2c$. Dessa forma, a reta $x + y = r$ deve conter o ponto ($a + c$; $b + c$), o que nos leva a concluir que $r = a + b + 2c$.

APÊNDICE D: QUESTÕES DE VESTIBULAR – INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA (ITA)

1. Seja $z \in \mathbb{C}$. Se a representação dos números 4, $z + 2$ e z^2 no plano complexo são vértices de um triângulo equilátero, então o comprimento do seu lado é igual a:

a) 3 b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{11}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\sqrt{13}$

Resolução (alternativa E)

Como a distância entre os afixos de z_1 e z_0 é dado por $|z_1 - z_0|$, então:

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| \Rightarrow |z - 2| = |z^2 - 4| \Rightarrow |z - 2| = |z + 2||z - 2|.$$

Como $z \neq 2$, pois caso contrário $z_1 = z_2 = z_3$, então $|z + 2| = 1$.

Por outro lado:

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| \Rightarrow |z - 2| = |z^2 - z - 2| \Rightarrow |z - 2| = |z + 1||z - 2|$$
$$\Rightarrow |z + 1| = 1.$$

Se $z = x + yi$:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 1 \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Assim, o lado do triângulo será dado por:

$$|z_2 - z_1| = |z - 2| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - 2\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{13}.$$

2. Seja $z \in \mathbb{C}$ e denote por $\Im(z)$ a parte imaginária de z. Determine todos os possíveis $z \in \mathbb{C}$ com $\Im(z) \neq 0$ tais que temos simultaneamente $\Im(z^3) = 0$ e $\Im((1 + z)^3) = 0$.

Resolução: seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$, onde $y = \Im(z)$. Sabemos que:

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$
$$z^3 = (x + yi)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i.$$

Assim:

$$\Im(z^3) = 0 \Rightarrow 3x^2y - y^3 = 0.$$

Como $y \neq 0$:

$$3x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x\sqrt{3}.$$

Além disso:

$$\Im((1+z)^3)=0 \Rightarrow \Im(z^3+3z^2+3z+1)=0 \Rightarrow \Im(z^3)+3\Im(z^2)+3\Im(z)=0,$$

pois $\Im(z_1+z_2)=\Im(z_1)+\Im(z_2)$. Dessa forma, sabendo que $\Im(z^3)=0$:

$$6xy+3y=0, y\neq 0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Com isso, concluímos que

$$y=\pm x\sqrt{3} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$