



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT



PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA
FINANCEIRA: UMA ABORDAGEM CONTEMPORÂNEA ALINHADA À
BNCC

por

Josivan Barbalho da Silva



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT



PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA
FINANCEIRA: UMA ABORDAGEM CONTEMPORÂNEA ALINHADA À
BNCC¹

por

Josivan Barbalho da Silva

Sob orientação do

Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional – PROFMAT/CCEN/UFPB, como
requisito parcial para a obtenção do título de
Mestre em Matemática.

Fevereiro/2025
João Pessoa – PB

¹ O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586p Silva, Josivan Barbalho da.

Planilhas eletrônicas no Ensino de Matemática financeira : uma abordagem contemporânea alinhada à BNCC / Josivan Barbalho da Silva. - João Pessoa, 2025.
105 f. : il.

Orientação: José Laudelino de Menezes Neto.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática financeira - Ensino. 2. Planilhas eletrônicas - Ferramenta pedagógica. 3. Base Nacional Comum Curricular - BNCC. 4. Formação cidadã. I. Menezes Neto, José Laudelino de. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51:336(043)

PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA
FINANCEIRA: UMA ABORDAGEM CONTEMPORÂNEA ALINHADA À
BNCC

por

Josivan Barbalho da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto – UFPB

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto – UFPB

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho – UFMA

Prof^a. Dr^a. Graciana Ferreira Dias – UFPB

Fevereiro/2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL**

Fone/Ramal: (83) 3216-7563 <http://www.ufpb.br/pos/profmat>



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE
MESTRADO PROFISSIONAL REALIZADA NO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA
NATUREZA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA
PARAÍBA

No dia treze de fevereiro de dois mil e vinte e cinco (13/02/2025), às 16:00 horas, por meio da plataforma virtual *Google Meet*, através do link: <https://meet.google.com/hgt-jkdn-rxa>, em conformidade com o parágrafo único do Art. 83 da Resolução CONSEPE nº 54/2024, em sessão pública, teve início a defesa de trabalho de conclusão de curso intitulado “*Planilhas Eletrônicas no Ensino de Matemática Financeira: Uma Abordagem Contemporânea Alinhada à BNCC*”, do aluno **JOSIVAN BARBALHO DA SILVA**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação do professor José Laudelino de Menezes Neto. A Banca Examinadora, aprovada pelo Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, foi composta pelos professores José Laudelino de Menezes Neto (presidente), Carlos Bocker Neto (membro interno), AdeCarlos Costa Carvalho (membro externo/UFMA) e Graciana Ferreira Dias (membro externo/DCX-UFPB). O professor José Laudelino de Menezes Neto, em virtude da sua condição de presidente, iniciou os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo do seu trabalho de conclusão. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar, tendo concedido a menção: **APROVADO**. Face à aprovação, declarou o presidente achar-se o avaliado legalmente habilitado a receber o Grau de **Mestre** em Matemática, cabendo à Universidade Federal da Paraíba, providências como, de direito, a expedição do Diploma a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 13 de fevereiro de 2025.

Banca Examinadora

José Laudelino de Menezes Neto

Carlos Bocker Neto

AdeCarlos Costa Carvalho

Graciana Ferreira Dias

Documento assinado digitalmente
JOSE LAUDELINO DE MENEZES NETO
Data: 13/02/2025 17:45:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente
CARLOS BOCKER NETO
Data: 13/02/2025 18:13:35-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente
ADECARLOS COSTA CARVALHO
Data: 13/02/2025 18:49:40-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente
GRACIANA FERREIRA DIAS
Data: 14/02/2025 09:07:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dedico este trabalho aos meus bons pais, Josinal e Leni, cujo incentivo, carinho e apoio foram fundamentais a cada passo da minha trajetória.

AGRADECIMENTOS

A **Deus**, que me concedeu o dom da inteligência e da perseverança;

A **minha família**, em especial meus pais, Josinal e Leni, minha avó Naci, e minha esposa Joelma, que sempre estiveram ao meu lado, e foram meu porto seguro durante este percurso;

Ao **meu orientador**, pela sua parceria e compromisso, por apoiar as minhas ideias, por estar sempre presente e por exigir sempre o melhor de mim;

A **todos os professores** que fizeram parte da minha trajetória ao longo do PROFMAT;

Aos **parceiros de mestrado** Pedro, Marconi, Joanne, Yago, Thereza e Marcos, que me acompanharam mais de perto e mostraram o verdadeiro significado de união. Obrigado pelas trocas de experiências, pelo convívio, pelas alegrias, incertezas e desafios, enfim, por todos esses momentos vividos juntos e partilhados;

E a todos os amigos e colegas que de algum modo participaram desta conquista.

*“O coração do homem traça o seu caminho, mas
o Senhor lhe dirige os passos.”*

Provérbios, 16:9.

RESUMO

A matemática financeira ocupa uma posição de destaque na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), reconhecida como fundamental para o exercício pleno da cidadania e para a formação integral dos estudantes. Contudo, apesar de sua importância e da homologação do documento desde 2018, desafios persistem: baixos índices de proficiência em matemática, altos níveis de endividamento familiar e a vulnerabilidade da população a fraudes financeiras. Esses problemas evidenciam a necessidade de uma abordagem mais eficaz e conectada à realidade nas escolas. Esta dissertação tem como objetivo apresentar uma proposta pedagógica para o ensino de matemática financeira que alia rigor conceitual a aplicações práticas e cotidianas, buscando alinhar-se às competências e habilidades da BNCC para os ensinos fundamental e médio. Temas como porcentagem, juros simples e compostos, variação percentual, inflação e planejamento financeiro são explorados, destacando-se o uso de planilhas eletrônicas como ferramenta pedagógica. Além de facilitar cálculos e visualizações, as planilhas promovem o pensamento computacional e a familiarização com tecnologias, essenciais na sociedade contemporânea. O trabalho visa não apenas desenvolver habilidades técnicas, mas também estimular o pensamento crítico e a tomada de decisões conscientes. Ao propor atividades que conectam conceitos matemáticos ao cotidiano, busca-se apoiar educadores na construção de um ensino mais significativo, capaz de preparar os estudantes para os desafios socioeconômicos e tecnológicos. Como desdobramento futuro, planeja-se aplicar essas propostas em aulas práticas e formalizar os resultados em estudos científicos, contribuindo para o avanço das práticas educacionais.

Palavras-chave: Matemática financeira. BNCC. Planilhas eletrônicas. Formação cidadã.

ABSTRACT

Financial mathematics holds a prominent position in the National Common Curricular Base (BNCC), recognized as fundamental for the full exercise of citizenship and the comprehensive education of students. However, despite its importance and the approval of the document since 2018, challenges persist: low proficiency rates in mathematics, high levels of household debt, and the population's vulnerability to financial fraud. These problems highlight the need for a more effective and reality-connected approach in schools. This dissertation aims to present a pedagogical proposal for teaching financial mathematics that combines conceptual rigor with practical and everyday applications, aiming to align with the competencies and skills outlined in the BNCC for elementary and high school education. Topics such as percentages, simple and compound interest, percentage variation, inflation, and financial planning are explored, emphasizing the use of spreadsheets as a pedagogical tool. In addition to facilitating calculations and visualizations, spreadsheets promote computational thinking and familiarity with technologies, which are essential in contemporary society. The work seeks not only to develop technical skills but also to encourage critical thinking and conscious decision-making. By proposing activities that connect mathematical concepts to everyday life, it aims to support educators in creating more meaningful teaching practices, capable of preparing students for socio-economic and technological challenges. As a future development, there are plans to apply these proposals in practical classes and formalize the results in scientific studies, contributing to the advancement of educational practices.

Keywords: Financial mathematics. BNCC. Spreadsheets. Citizenship education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Comandos da aba Formatar da Planilha Google.....	25
Figura 2 – Disposição inicial das informações. Sugestão de atividade 3.....	26
Figura 3 – Cálculo da “quantia não comprometida com despesas”. Sugestão de atividade 3.....	26
Figura 4 – Cálculo das porcentagens relativas de cada item. Sugestão de atividade 3.....	27
Figura 5 – Duplicar a página 1. Sugestão de atividade 3a.....	29
Figura 6 – Cálculo da quantia não comprometida com despesas na sugestão de atividade 3a.....	29
Figura 7 – Ajuste do valor da categoria “Lazer”. Sugestão de atividade 3a.....	30
Figura 8 – Valor cortado da categoria “Lazer”. Sugestão de atividade 3a.....	31
Figura 9 – Porcentagem relativa ao corte realizado em “Lazer”. Sugestão de atividade 3a..	31
Figura 10 – Orçamento de Roberto com o salário atualizado.....	32
Figura 11 – Variação percentual por item. Sugestão de atividade 6.....	36
Figura 12 – Variação percentual entre os somatórios dos itens. Sugestão de atividade 6.....	37
Figura 13 – Disposição inicial das informações. Sugestão de atividade 9.....	40
Figura 14 – Cálculo do valor final do investimento. Sugestão de atividade 9.....	41
Figura 15 – Cálculo do valor final do investimento. Sugestão de atividade 9.....	42
Figura 16 – Comando para aumentar o número de casas decimais	42
Figura 17 – Disposição inicial das informações da simulação.....	49
Figura 18 – Aplicação da fórmula de juros simples e cálculo do montante.....	50
Figura 19 – Gráfico do montante em função do tempo, no regime de juros simples.....	51
Figura 20 – Disposição inicial das informações: Sugestão de atividade 14.....	55
Figura 21 – Cálculos e gráfico dos montantes gerados. Sugestão de atividade 14.....	56
Figura 22 – Gráfico de rentabilidade da HyperGain Ventures. Sugestão de atividade 15.....	59
Figura 23 – Disposição inicial das informações. Sugestão de atividade 16.....	62
Figura 24 – Tabela e gráfico dos montantes em relação ao tempo. Sugestão de atividade 16.....	63
Figura 25 – Disposição inicial das informações. Sugestão de atividade 19.....	70
Figura 26 – Cálculo do montante ao final do primeiro período analisado. Sugestão de atividade 19.....	71
Figura 27 – Aplicação das fórmulas utilizadas nos demais períodos. Sugestão de atividade 19.....	72
Figura 28 – Rentabilidade percentual anual. Sugestão de atividade 19.....	72
Figura 29 – Aplicação da tabela criada na sugestão de atividade 19 para o contexto da sugestão de atividade 20.....	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Habilidades relacionadas à matemática financeira no Ensino Fundamental...	14
Tabela 2 – Habilidades relacionadas à matemática financeira no Ensino Médio.....	16
Tabela 3 – Lista de gastos de Roberto	23
Tabela 4 - Lista de itens e seus respectivos preços em março e abril de 2024. Sugestão de atividade 6.....	35
Tabela 5 - Descrição das rentabilidades mensais dos fundos A, B, C e D nos últimos seis meses. Sugestão de atividade 9.....	39
Tabela 6 – Cálculo do montante em função do tempo.....	48
Tabela 7 – Percentuais de remuneração da caderneta de poupança em relação à data base. Sugestão de atividade 19.....	69
Tabela 8 – Percentuais de remuneração da caderneta de poupança em relação à data base. Sugestão de atividade 20.....	73

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Apresentação do Tema.....	12
1.2	Objetivos da Pesquisa	17
2	PORCENTAGEM.....	18
2.1	Porcentagem no contexto educacional	18
2.2	Propriedade Fundamental das Proporções.....	19
2.2.1	Porcentagem de uma Quantia	19
2.2.2	Porcentagem relativa de um valor em relação a outro.....	20
2.3	Variação Percentual	33
2.4	Acréscimos sucessivos, Descontos sucessivos e Taxas equivalentes	37
3	JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS.....	43
3.1	Capital, Juros, Taxa de juros e Montante	43
3.2	Juro Simples.....	43
3.2.1	Juros Simples x Função Afim	47
3.3	Juros Compostos	52
3.3.1	Juros Compostos x Função Exponencial.....	57
4	INVESTIMENTOS, RENTABILIDADE E INFLAÇÃO	64
4.1	Inflação	64
4.2	Poupança.....	65
4.3	Relação entre Rentabilidade e Inflação	74
	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	78
	REFERÊNCIAS	79
	ANEXO: PRODUTO EDUCACIONAL	83

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do Tema

Não existe dúvidas quanto à importância da matemática para o indivíduo e para a sociedade. Os avanços tecnológicos que presenciamos, muito se deve ao conhecimento matemático que vem sendo acumulado ao longo de gerações. Porém, notamos que a educação matemática, em especial o Brasil, não apresenta avanço de maneira proporcional com relação a sua totalidade.

No Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), obter o nível 2 de proficiência em matemática significa que

no mínimo, esses estudantes podem interpretar e reconhecer, sem instruções diretas, como uma situação simples pode ser representada matematicamente (por exemplo, comparar a distância total de duas rotas alternativas ou converter preços em uma moeda diferente) (Brasil, 2023, p.10).

Ainda segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP (Brasil, 2023), 73% dos estudantes avaliados no Brasil ficaram abaixo desse nível. Observa-se que há um grande desafio a se enfrentar em relação ao desenvolvimento das competências e habilidades dos estudantes em relação à matemática. Nesse sentido, o papel do professor vai além de ter consigo apenas um conhecimento matemático satisfatório.

Os valores educativos da matemática existem em estado de latência, no plano virtual dos livros, teses, softwares, programas, parâmetros e em outros filamentos da transposição didática. O desafio pedagógico consiste em converter esta virtualidade para os eventos da atualidade, vivenciados pelo aluno e pelo professor, tal como ocorre na solução de um problema, na compreensão de um teorema ou na aplicação de uma fórmula. (Pais, 2018, p. 13)

Nesse sentido, para que o desenvolvimento matemático do estudante seja atingido em parâmetros suficientes, se faz necessário ao professor se valer de métodos para abordar os conteúdos de forma estruturada, explorando o máximo do potencial dos recursos utilizados na abordagem pedagógica, objetivando buscar uma conexão com a realidade do estudante.

Considerando essa visão de aprendizagem mais ampla e de uma didática estruturada nos conhecimentos exigidos na atualidade, foi homologada em 2018 a versão completa da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018). A BNCC estabelece diretrizes e normativas comuns para os currículos das escolas da educação básica, desde a educação infantil

até o ensino médio, dessa forma, “explicita as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver e expressa, portanto, a igualdade educacional sobre a qual as singularidades devem ser consideradas e atendidas” (Brasil, 2018, p.15).

Um dos objetivos principais da BNCC é, através das orientações descritas, contemplar as dez competências gerais ao longo dessa trajetória escolar do estudante.

Competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018, p. 8)

Em conformidade a essa linha de raciocínio, ao nos debruçarmos na elaboração de uma proposta de dissertação, levamos em consideração um tema que contribuísse na aprendizagem a respeito de conceitos básicos da matemática, porém, ao mesmo tempo, o tema a ser trabalhado deveria se mostrar carregado de importância e significado em relação ao exercício da cidadania dos estudantes envolvidos, agregando esses dois aspectos com o mínimo de arestas.

Dessa forma, observamos que, ao abordar temáticas relacionadas a matemática financeira, poderíamos envolver através delas, conceitos importantes como frações, razão, proporção, resolução de equações, porcentagem, aumentos, descontos, taxas equivalentes, juros simples, juros compostos, função afim, função exponencial e interpretação textual, resolução de problemas, entre outros.

Vemos também a importância desse tema para a sociedade uma vez que são exibidos em sites e noticiários brasileiros, como no UOL² e Serasa³, os altos índices de famílias endividadas e em inadimplência, assim como também, o sucesso e alto alcance das casas de apostas, cassinos online e golpes de pirâmide⁴, que fragilizam ainda mais a situação econômica de cidadãos que já possuem grande parte de sua renda comprometida com necessidades básicas. Um estudante consciente sobre os aspectos que são abordados na matemática financeira, tem o poder de tomar decisões econômicas assertivas, minimizando prejuízos, evitando gastos

² O título do artigo jornalístico traz “Endividamento das famílias sobe pelo terceiro mês seguido e chega a 78,8%”. Acessível pelo link <https://economia.uol.com.br/noticias/estadao-conteudo/2024/06/10/endividamento-das-familias-sobe-a-788-em-maio-e-inadimplencia-estabiliza-em-286-diz-cnc.htm?cmpid=copiaecola>.

³ O título do artigo jornalístico traz “Nova alta da inadimplência reforça a importância de combater o endividamento, mostra o mapa da Serasa”. Acessível pelo link <https://www.serasa.com.br/imprensa/nova-alta-da-inadimplencia-reforca-a-importancia-de-combater-o-endividamento-mostra-o-mapa-da-serasa/>.

⁴ O título do artigo jornalístico traz “Braiscompany: PF prende casal que ganhou R\$ 370 milhões com pirâmide”. Acessível pelo link <https://www.metropoles.com/distrito-federal/na-mira/braiscompany-pf-prende-casal-que-ganhou-r-370-milhoes-com-piramide>.

desnecessários e potencializando rentabilidades no caso de investimentos, podendo assim melhorar a sua qualidade de vida e a de seus familiares.

Sendo assim, buscamos integrar essa intencionalidade à luz da Base Nacional Comum Curricular, baseando-nos nas orientações, e abrangendo competências e habilidades que façam referência ao tema proposto.

Em um primeiro momento, tomamos como parâmetro majoritariamente a competência geral da educação básica de número 2.

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (Brasil, 2018, p. 9)

Nos temas tratados, buscamos priorizar o caráter investigativo, propondo situações plausíveis de acontecerem no cotidiano, visando instigar o interesse e a análise crítica do estudante. Propomos soluções para tais situações, porém, que em sua maioria não são únicas, podendo ficar a cargo do estudante explorar novos caminhos para chegar ao objetivo.

Ao observarmos na BNCC as orientações voltadas para a matemática do ensino fundamental, podemos observar na unidade temática Números algumas habilidades integradas com o conceito de educação financeira.

Tabela 1: Habilidades relacionadas à matemática financeira no Ensino Fundamental.

Código	Habilidade
(EF06MA13)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 301)
(EF07MA02)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 307)
(EF08MA04)	Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 313)
(EF09MA05)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira. (BRASIL, 2018, p. 317)

Fonte: Brasil, 2018.

No primeiro capítulo, introduzimos o conceito de porcentagem com uma abordagem voltada para a explicitação das conexões com conceitos básicos da Matemática, como números racionais, frações e propriedade fundamental das proporções. Mostramos como a propriedade fundamental das proporções é a base para a resolução de problemas envolvendo porcentagem, mesmo sem realizar diretamente uma “regra de três”, como por exemplo, no cálculo da porcentagem de uma quantia, ou na porcentagem relativa de um valor em relação a outro.

Aproveitando o raciocínio construído no primeiro momento, explicitamos o conceito de variação percentual, acréscimos e descontos, e por fim, estendendo o entendimento para definir taxas equivalentes, sempre buscando tratar os temas com rigor e abordando aplicações verossímeis ao estudante.

Além disso, vale salientar que

a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos (Brasil, 2018, p. 528)

Procuramos introduzir ao longo do trabalho, a planilha eletrônica como ferramenta para resolução de problemas matemáticos. Entendemos que o desenvolvimento do pensamento computacional é uma competência essencial na contemporaneidade, devendo ser desde o ensino fundamental, como diz a BNCC.

Existe no banco de dissertações do PROFMAT, trabalhos de estudantes egressos que abordam a utilização de planilhas eletrônicas, como no caso de Santos (2017) que trata as planilhas eletrônicas como ferramenta para uma abordagem alternativa em diversos temas do ensino médio, como funções, sequências, geometria, contagem etc., e Hobold (2016) que as utiliza na resolução de problemas voltados para matemática financeira.

Através da leitura e reflexão de trabalhos similares, como os citados aqui, pudemos observar que em certas situações-problema, a planilha eletrônica desempenha uma função que vai além de ser apenas uma calculadora, pois nela o estudante pode estruturar múltiplas informações em tabelas, utilizando-se das linhas e colunas da planilha, se familiarizar mesmo que introdutoriamente com a lógica necessária e tipo de linguagem utilizada em programação ao aplicar as fórmulas matemáticas, e compreender as vantagens que a automação pode proporcionar ao trabalhar com um grande volume de dados. Buscamos, dessa forma, estruturar um método próprio de empregar essa ferramenta em nossa proposta.

Com relação às orientações da BNCC para o ensino médio voltadas, para a abordagem da matemática financeira, observamos que o documento preconiza a aprendizagem mais

direcionada para a integralização e aplicação dos conhecimentos matemáticos à vivência em sociedade, assim como entendimento geral de situações econômicas que podemos ver nas habilidades de matemática para o ensino médio a seguir.

Tabela 2: Habilidades relacionadas à matemática financeira no Ensino Fundamental.

Código	Habilidade
(EM13MAT101)	Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 533)
(EM13MAT104)	Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. (BRASIL, 2018, p. 533)
(EM13MAT203)	Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. (BRASIL, 2018, p. 534)
(EM13MAT303)	Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. (BRASIL, 2018, p. 536)

Fonte: Brasil, 2018.

Observamos trabalhos voltados para temas citados nessas habilidades na base de dados do PROFMAT, mesmo sem citá-las explicitamente, como no caso de Filho (2018), que trouxe propostas de atividades voltadas para matemática financeira, com ênfase em situações-problema próximos a conjunturas reais, e na apresentação e discussão ampla sobre temas como inflação, a Selic que é a taxa básica de juros, planejamento financeiro e investimentos.

No capítulo 2, procuramos dar nossa visão para a realização do trabalho com essas habilidades, abordando a porcentagem em um contexto mais geral de economia, considerando

e definindo características da inflação, assim como seus impactos na sociedade. Também tratamos a porcentagem sob o contexto da caderneta de poupança, sendo esta apresentada como uma forma de investimento e de minimização os efeitos negativos da inflação. Conceitos de rentabilidade nominal e rentabilidade real também foram abordados, objetivando um melhor entendimento quantitativo sobre o impacto da inflação na rentabilidade dos investimentos e sobre quanto e quando “ganhamos” de fato na realização de aplicações financeiras. Nesse processo, realizamos uma busca de dados em fontes oficiais de inflação e rentabilidade da poupança, e reafirmamos o uso da planilha eletrônica como ferramenta pedagógica importante na realização dos cálculos, principalmente ao tratar com um grande volume de dados.

Pudemos também abordar os conceitos de juros simples e juros compostos, mostrando um caminho firmado pelas informações já consolidadas anteriormente e na contextualização das principais características desse tipo de juros até chegar nas fórmulas aplicadas comumente no ensino médio. Também nos apoiamos na planilha eletrônica para poder trabalhar com situações pontuais que demonstrassem o comportamento dos juros, tendo em vista que um tem um crescimento linear e outro tem um crescimento exponencial, pois com a visualização dos dados organizados em tabelas, e o recurso de geração de gráficos presente na planilha eletrônica, além do poder de gerar várias simulações em um período pequeno de tempo apenas alterando alguns parâmetros nas fórmulas aplicadas, torna essa ferramenta um recurso com alto potencial pedagógico e didático.

1.2 Objetivos da Pesquisa

O presente trabalho tem como objetivo geral:

- Apresentar propostas de atividades relacionadas ao ensino de matemática financeira, visando alinhar os problemas abordados às habilidades da BNCC que envolvem esse conteúdo no ensino fundamental e no ensino médio, apresentando conceitos importantes e explicitando a relação desses conteúdos com possíveis situações do dia a dia do estudante;

De forma específica, objetivamos:

- Explorar e discutir situações que abrangem conteúdos matemáticos relacionados a: cálculos de porcentagem com métodos alternativos à regra de três, como porcentagem de uma quantia e porcentagem relativa de um valor em relação a outro; variação percentual; acréscimos sucessivos, descontos sucessivos e taxas equivalentes; juros simples e juros compostos; rentabilidade da caderneta de poupança; rentabilidade nominal e real;

- Dar ênfase nas potencialidades da utilização da planilha eletrônica como instrumento educacional no ensino da matemática financeira;
- Discutir os conceitos matemáticos mais básicos que estão inseridos no contexto da matemática financeira, e, além da parte de aplicação de técnicas e cálculos, explicitar os conceitos mais amplos da economia, como juros, inflação e rentabilidade.

2 PORCENTAGEM

2.1 Porcentagem no contexto educacional

O conjunto dos números racionais, que indicamos por $\mathbb{Q}$, é aquele formado pelos números que podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros, com $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Essa forma como o número racional é representado usualmente é denominada de fração, onde o termo a é chamado de numerador e o termo b de denominador, e o símbolo entre os termos representa o quociente entre eles.

Em particular, quando tratamos de uma fração de numerador n e de denominador 100 podemos representar esse número por $n\%$.

Para exemplificar a relação de equivalência, tomaremos a porcentagem 6%:

$$6\% = \frac{6}{100} = \frac{3}{50} = 0,06$$

Vemos que, dessa forma, esse conceito que é constantemente aplicado em diversos contextos de matemática financeira e situações reais do dia a dia, está relacionado diretamente com conceitos mais primários da Matemática, como Números Racionais, frações, entre outros. E observando por outro lado, vemos que é possível, dessa forma, explorar essas conexões para tornar viável o ensino desses conceitos básicos dentro de contextos de matemática financeira, favorecendo o desenvolvimento do letramento matemático.

Letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar, e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. (Brasil, 2013, p.1)

Essa forma de abordagem parece ser bastante frutífera, pois existe uma ampla gama de situações a serem apresentadas, situações essas que podem facilmente conectar-se à realidade do estudante, uma vez que compras, vendas, descontos, financiamentos, parcelamentos, acréscimos advindo de juros, entre outros, são conceitos comuns na vida de qualquer cidadão, favorecendo a sensação de pertencimento com o que está sendo estudado e o envolvimento na busca de soluções para os problemas propostos, e “na resolução de problemas, os estudantes

vão exercitar as suas mais diversas capacidades intelectuais como também mobilizar estratégias das mais diversas naturezas para encontrar a resposta” (Romanatto, 2012, p.5)

Dessa forma, além de explorar as potencialidades e importância do entendimento de porcentagem e de conceitos da matemática financeira, buscamos engajar junto a esse estudo uma variedade de situações e contextos que venham a explicitar a relação com outros objetos de conhecimento da matemática.

2.2 Propriedade Fundamental das Proporções

Os cálculos básicos em situações problema utilizando o conceito de porcentagem se baseiam todos na Propriedade Fundamental das Proporções, que diz que,

$$\text{Seja } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ com } b, d \neq 0. \text{ Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então } a \cdot d = b \cdot c.$$

Aos termos a, d da expressão, damos o nome de extremos da proporção, e aos termos b, c damos o nome de meios da proporção, e para simplificar o enunciado da propriedade, costuma-se dizer que em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Essa propriedade também é a base para a “Regra de três”.

2.2.1 Porcentagem de uma Quantia

A propriedade é válida nesse caso, pois ao tomarmos um valor base como sendo 100% de si mesmo, as reduções e acréscimos nessas duas grandezas (valor base e porcentagem) ocorrem de maneira proporcional.

Como exemplo base para utilizarmos essa propriedade, vamos calcular qual a quantia Q que equivale a $x\%$ de um valor base y . Primeiramente, vamos organizar as grandezas em duas razões equivalentes entre valor por porcentagem, sendo que, como foi dito anteriormente, o valor base y equivale a 100% de si mesmo.

$$\frac{y \text{ (valor)}}{100\% \text{ (porcentagem)}} = \frac{Q \text{ (valor)}}{x\% \text{ (porcentagem)}}$$

$$\frac{y}{\frac{100}{100}} = \frac{Q}{\frac{x}{100}}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções temos,

$$\frac{100Q}{100} = \frac{x \cdot y}{100}$$

Agora, realizando a divisão no primeiro membro, ficaremos com

$$Q = \frac{x \cdot y}{100} = y \cdot \frac{x}{100} = y \cdot x\%$$

Sendo assim, pelo que notamos, tendo uma quantia ou um valor de uma grandeza como base, podemos obter quanto vale uma certa porcentagem dessa quantia ao multiplicarmos o valor base pela forma decimal ou pela forma fracionária da porcentagem em questão.

Sugestão de atividade 1: *Tomando uma alíquota de 6% em relação ao preço de venda, quanto de imposto é pago pelo cliente em um produto que custou para ele a quantia de R\$ 810,00?*

Comentários sobre a resolução: Percebemos o desenvolvimento da habilidade (EF06MA13) nessa atividade (veja tabela 1). Para resolver, identificamos o valor base da questão e multiplicamos ele pela porcentagem desejada, lembrando de usar a forma de fração da referida porcentagem.

$$810 \cdot 6\% = 810 \cdot \frac{6}{100} = \frac{4860}{100} = R\$ 48,60$$

Podemos ver a utilização da propriedade da multiplicação com frações, onde diz que $\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$, com $q \neq 0$. Para utilizar essa propriedade, o estudante também deve ter ciência que 810, que é um número inteiro, também pode ser escrito na forma de fração de denominador 1, utilizando a ideia de fração como quociente entre numerador e denominador, resultando na multiplicação $\frac{810}{1} \cdot \frac{6}{100}$.

2.2.2 Porcentagem relativa de um valor em relação a outro

Também é comum encontrarmos problemas em que seria importante o entendimento da porcentagem relativa entre dois valores, como nos exemplos abaixo.

Sugestão de atividade 2: *Após fazer algumas compras em uma farmácia, Manoella percebeu*

que na nota fiscal de sua compra estava declarado que, do total de R\$ 285,00 que foi pago, R\$ 57,00 foi referente à incidência de ICMS. Qual foi a alíquota aplicada nesse cálculo?

Comentários sobre a resolução: Percebemos nessa atividade o trabalho com a habilidade (EF06MA13) (veja tabela 1). Nesse caso, temos um valor base, que equivale a 100% dele mesmo, e temos outras quantias que queremos comparar com o valor base para sabermos qual a porcentagem relativa dessas quantias. Vamos chamar essa porcentagem relativa que buscamos de x , o valor base de y (tendo ciência que y equivale a 100% dele mesmo) e a quantia que estamos comparando com o valor base, de Q . Dessa forma, organizando as grandezas em duas razões equivalentes entre valor por porcentagem teremos,

$$\frac{y \text{ (valor)}}{100\%(\text{porcentagem})} = \frac{Q \text{ (valor)}}{x\% (\text{porcentagem})}$$

$$\frac{y}{\frac{100}{100}} = \frac{Q}{\frac{x}{100}}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções temos,

$$\frac{100Q}{100} = \frac{x \cdot y}{100}$$

Realizando a divisão no primeiro membro, e multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{y}$ ficaremos com,

$$Q = \frac{x \cdot y}{100} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{Q}{y} = \frac{x}{100}$$

$$x\% = \frac{Q}{y}$$

Dessa forma, para encontrar a porcentagem relativa $x\%$ de uma quantia Q em relação a um valor base y , basta fazer $x\% = \frac{Q}{y}$. Note que também podemos visualizar essa situação como a utilização da ideia de “parte pelo todo”, usada em frações.

Agora, voltando ao problema, utilizando os conceitos abordados.

Primeiramente o estudante deve conhecer a definição de alíquota, que se trata de um percentual usado para calcular o valor final de um imposto que deve ser pago por uma pessoa física ou jurídica⁵. Em seguida identificar o valor base que é 285, e a quantia que foi decorrente desse valor base que é 57. Por fim, aplicar os valores no cálculo que foi comentado acima.

⁵ Definição retirada do site <https://www.serasa.com.br/blog/aliquota/>.

$$\text{Alíquota} = \frac{57}{285} = 0,2 = 20\%$$

Outra situação que conseguimos imaginar é que o estudante tente fazer essa resolução utilizando o raciocínio de “porcentagem de uma quantia” visto anteriormente, e com isso, haveria a necessidade de empregar mais alguns conceitos matemáticos. Primeiramente, é importante o raciocínio algébrico, pois vimos que, tendo um valor base e uma porcentagem, obtemos o valor referente a essa porcentagem fazendo *valor base $\times$ porcentagem*, porém nós já temos esse valor e não temos a porcentagem, dessa forma, teríamos a seguinte equação,

$$285 \cdot \frac{x}{100} = 57.$$

Uma equação de 1º grau, também conhecida como equação linear, é uma equação algébrica em que as incógnitas estão elevadas apenas à primeira potência. Nesse caso, temos em mãos uma equação de 1º grau com uma incógnita, e resolvê-la envolve fazer algumas manipulações para isolar a incógnita em um dos membros da equação, de forma a sempre preservar a igualdade.

Geralmente é possível observar os estudantes resolvendo esses tipos de equação fazendo uso do método da transposição, isto é, transpor termos de um lado para o outro da igualdade, porém esse método vem acompanhado de muitos erros quando eles não conhecem os fundamentos que validam esse método.

Como exemplo, na equação $z + 5 = 3$, podemos utilizar o método da transposição para verificar rapidamente que $z = 3 - 5$ e portanto, $z = -2$. Porém esse método é baseado na criação de uma equação equivalente, onde manipulamos a equação original, aplicando uma mesma operação arbitrária, em ambos os membros da equação, preservando a igualdade. Nesse caso

$$z + 5 = 3$$

$$\Leftrightarrow z + 5 - \mathbf{5} = 3 - \mathbf{5}$$

(somamos -5 em ambos os membros)

$$\Leftrightarrow z = 3 - 5$$

$$\Leftrightarrow z = -2$$

Voltando à questão inicial,

$$285 \cdot \frac{x}{100} = 57$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{285}} \cdot 285 \cdot \frac{x}{100} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{285}} \cdot 57$$

(multiplicamos $1/285$ em ambos os membros)

$$\Leftrightarrow \frac{x}{100} = \frac{1}{285} \cdot 57$$

$$\Leftrightarrow 100 \cdot \frac{x}{100} = 100 \cdot \frac{1}{285} \cdot 57$$

(multiplicamos 100 em ambos os membros)

$$\Leftrightarrow x = 100 \cdot \frac{1}{285} \cdot 57$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5700}{285} = 20$$

Sugestão de atividade 3: Roberto recebe líquido de salário a quantia de R\$ 2824,00 (dois salários mínimos na presente data). Durante o mês, ele realiza alguns gastos descritos na tabela abaixo.

Tabela 3: Lista de gastos de Roberto

<i>Item</i>	<i>Valor gasto</i>
<i>Aluguel</i>	<i>R\$ 600,00</i>
<i>Contas recorrentes (água, luz, internet)</i>	<i>R\$ 275,00</i>
<i>Alimentação</i>	<i>R\$ 1050,00</i>
<i>Educação</i>	<i>R\$ 250,00</i>
<i>Lazer</i>	<i>R\$ 550,00</i>

Fonte: feito pelo autor.

Quantos por cento o gasto com cada uma dessas categorias representa em relação ao salário recebido?

Iremos a partir desse momento, além de explicitar os conceitos matemáticos envolvidos na porcentagem, apontar para a aplicabilidade, praticidade e eficiência das planilhas eletrônicas para a organização e realização dos cálculos.

Uma Planilha eletrônica é um tipo de programa de computador que utiliza tabelas para realização de cálculos ou apresentação de dados. Cada tabela é formada por uma grade composta de linhas e colunas. Planilhas eletrônicas são utilizadas por comerciantes, programadores ou simples usuários de computador. Os softwares atuais possuem uma quantidade de funções tão variáveis, que até mesmo estatísticos utilizam planilhas eletrônicas como ferramenta de trabalho (Silva, 2013, p. 4).

Para fins desse trabalho utilizamos o “Planilhas Google” por ser um programa gratuito, com interface simples, de fácil acesso, onde os arquivos podem ser salvos em nuvem e permitem edição simultânea por mais de uma pessoa, abrindo a possibilidade para o professor fazer um trabalho cooperativo com os estudantes.

Através dessa sugestão de atividade, assim como em seus subitens, poderemos trabalhar com as habilidades (EF06MA13), (EF07MA02), (EF08MA04) e (EM13MAT203) (veja tabelas 1 e 2).

Comentários sobre a resolução: Obteremos a porcentagem relativa do valor de cada item em relação ao salário (valor base) fazendo,

- Aluguel: $\frac{600}{2824} \cong 0,2125 = 21,25\%$
- Contas recorrentes: $\frac{275}{2824} \cong 0,0974 = 9,74\%$
- Alimentação: $\frac{1050}{2824} \cong 0,3718 = 37,18\%$
- Educação: $\frac{250}{2824} \cong 0,0885 = 8,85\%$
- Lazer: $\frac{550}{2824} \cong 0,1948 = 19,48\%$

Com esse mesmo contexto, ainda podemos apontar mais algumas situações relevantes. Como podemos observar, haverá uma quantia livre, não comprometida com gastos, chamada de L :

$$L = 2824 - 600 - 275 - 1050 - 250 - 550 = 99$$

Essa quantia também terá uma representação em termos percentuais em relação ao total do salário recebido:

$$L = \frac{99}{2824} \cong 0,0351 = 3,51\%$$

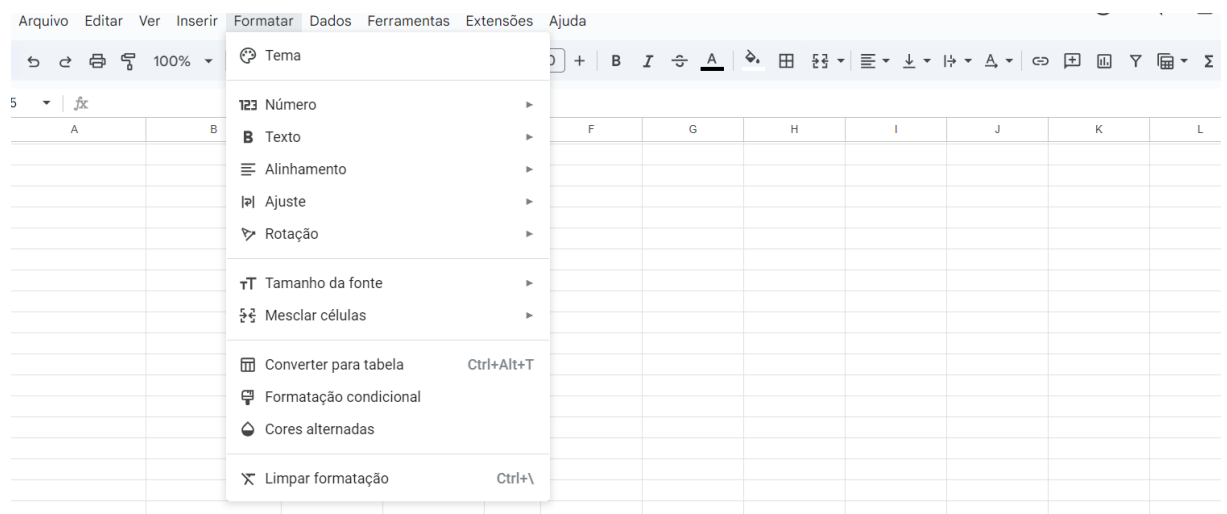
Todos os cálculos que realizamos manualmente, podem ser organizados e executados de forma sistemática e rápida por meio de uma planilha eletrônica.

No primeiro momento vamos dispor as informações nas células de forma clara, concisa e de forma que os valores que pretendemos trabalhar fiquem alinhados. Nesse problema e nos problemas posteriores, faremos o passo a passo da construção do ambiente de cálculos na planilha eletrônica sempre que necessário, tomando como referência, a estrutura descritiva adotada por Hobold (2016).

- Na célula A1, digitamos *ORÇAMENTO – ROBERTO*;
- Seleccionamos o intervalo de células de A1 até E1, em seguida clicamos em Formatar → Mesclar células → Mesclar todas;
- Na célula A2, digitamos *Receitas*;
- Na célula A3, digitamos *Despesas*;
- Mesclamos o intervalo de células de A3 até A7;
- Na célula A8, digitamos *Quantia não comprometida com despesas*;

- Na célula B2, digitamos *Salário Líquido*;
- Na célula B3, digitamos *Aluguel*;
- Na célula B4, digitamos *Contas Recorrentes*;
- Na célula B5, digitamos *Alimentação*;
- Na célula B6, digitamos *Educação*;
- Na célula B7, digitamos *Lazer*;
- Na célula E2, digitamos *Porcentagem em Relação à receita total*;
- Mesclamos o intervalo de células de E2 até E8;
- Seleccionamos a célula E2, acessamos *Formatar* → *Rotação* → *Girar para baixo*;
- Seleccionamos a célula E2, acessamos *Formatar* → *Ajuste* → *Ajustar*. Dessa forma o texto ficará ajustado dentro dos limites da célula;
- Nas células C2 até C7 serão inseridos os valores referentes aos itens descritos nas células B2, B3, B4, B5, B6, B7 respectivamente, seguindo os dados do enunciado da Sugestão de atividade 3 e da tabela;
- As células C8, D2, D3, D4, D5, D6, D7 e D8 servirão como campo de entrada das sintaxes das fórmulas;
- Seleccionamos o intervalo de células de D2 até D8, e em seguida clicamos em *Formatar* → *Número* → *Porcentagem*. Dessa forma, os valores gerados nessas células aparecerão na forma usual de porcentagem.

Figura 1: Comandos da aba *Formatar* da Planilha Google.



Fonte: Feito pelo autor

Figura 2: Disposição inicial das informações. Sugestão de atividade 3.

	A	B	C	D	E
1	ORÇAMENTO - ROBERTO				
2	Receitas	Salário Líquido	2824		Porcentagem em Relação à receita total
3		Aluguel	600		
4		Contas Recorrentes	275		
5		Alimentação	1050		
6		Educação	250		
7	Despesas	Lazer	550		
8	Quantia não comprometida com despesas				

Fonte: Feito pelo autor

No segundo momento, iremos inserir as sintaxes para a realização dos cálculos.

- Na célula C8, digitamos `=C2-SOMA(C3:C7)` e a tecla *enter*. A célula retornará o resultado da subtração entre as receitas (C2) e as despesas (soma do intervalo entre C3 e C7, sendo que para representar um intervalo entre células, utilizamos o símbolo “:”)

Figura 3: Cálculo da “quantia não comprometida com despesas”. Sugestão de atividade 3.

C8 ∇ fx `=C2-SOMA(C3:C7)`

	A	B	C	D	E
1	ORÇAMENTO - ROBERTO				
2	Receitas	Salário Líquido	2824		Porcentagem em Relação à receita total
3		Aluguel	600		
4		Contas Recorrentes	275		
5		Alimentação	1050		
6		Educação	250		
7	Despesas	Lazer	550		
8	Quantia não comprometida com despesas		99		

Fonte: Feito pelo autor

- Na célula D3, digitamos a fórmula `=DIVIDE(C3;$C$2)` e a tecla *enter*.
- Seleccionamos a célula D3, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos C;
- Seleccionamos as células D2, D4, D5, D6, D7 e D8, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos V.

Nesse momento, o objetivo foi calcular as porcentagens relativas de cada item em

relação à receita total. Existem vários itens para serem calculados, porém, na planilha eletrônica podemos estipular uma fórmula manualmente para um item e reproduzi-la para outros itens simplesmente copiando e colando. Tivemos que dividir 600 (Aluguel) por 2824 (receita total), e para isso, utilizamos a fórmula “Divide(;)” onde o primeiro espaço dentro do parênteses deve ser a célula do dividendo e o segundo espaço deve ser do divisor. A priori, a fórmula deveria ficar “=DIVIDE(C3;C2)”, porém, ao reproduzir essa fórmula para a célula seguinte, as referências da fórmula também são alteradas para as células seguintes às que foram descritas (por exemplo, ao copiar a fórmula para D4, ela se alteraria automaticamente para “=DIVIDE(C4;C3)”), sendo que queremos que o denominador seja o mesmo em todos os casos. Para isso, aplicamos o comando “\$” antes da referência à coluna e à linha do denominador, para mantê-la fixa ao copiarmos a fórmula para outras células. Por isso, foi inserido “=DIVIDE(C3;\$C\$2)”, copiada a fórmula e colada nas outras respectivas células de destino.

Figura 4: Cálculo das porcentagens relativas de cada item. Sugestão de atividade 3.

D3 fx =DIVIDE(C3;\$C\$2)

	A	B	C	D	E
1	ORÇAMENTO - ROBERTO				
2	Receitas	Salário Líquido	2824	100,00%	Porcentagem em Relação à receita total
3		Aluguel	600	21,25%	
4		Contas Recorrentes	275	9,74%	
5		Alimentação	1050	37,18%	
6		Educação	250	8,85%	
7		Lazer	550	19,48%	
8	Quantia não comprometida com despesas		99	3,51%	

Fonte: Feito pelo autor

Sugestão de atividade 3.a: Seguindo o enunciado da Sugestão de atividade 3, se Roberto decidir que a quantia livre (L) deve ser de 15% do seu salário, para que ele possa assim, investir esse valor. Quantos por cento dos gastos com a categoria Lazer deve ser cortada para atingir esse objetivo, e qual o novo valor que será destinado para Lazer?

Comentários sobre a resolução: Primeiramente devemos saber quanto é 15% de R\$ 2824,00. Para isso, seguiremos os passos da sugestão de atividade 1.

$$L = 2824 \cdot \frac{15}{100} = \frac{42360}{100} = R\$ 423,60$$

Na situação inicial, apenas R\$ 99,00 estava desvinculado de gastos. Para atingir a meta

ainda devemos somar um valor adicional que calcularemos agora.

$$\begin{aligned} L &= 99 + x \Rightarrow 423,60 = 99 + x \\ \Leftrightarrow -99 + 423,60 &= -99 + 99 + x \\ (\text{somamos } -99 \text{ em ambos os membros}) \\ \Leftrightarrow -99 + 423,60 &= x \\ \Leftrightarrow x &= 324,60 \end{aligned}$$

Pelo problema, essa quantia deve ser descontada da categoria Lazer. Vamos calcular quanto essa quantia representa em relação ao valor inicial destinado para essa categoria. Podemos notar que, para essa situação, 550 torna-se o valor base.

$$\frac{324,60}{550} \cong 0,5902 = 59,02\% \text{ (**corte realizado na categoria Lazer**)}$$

Com esse corte, o novo valor destinado a Lazer será de

$$Lazer = 550 - 324,60 = R\$ 225,40$$

Na planilha, seguiremos o passo a passo descrito abaixo.

- Localizamos no canto inferior esquerdo o nome da planilha (o nome gerado automaticamente pela planilha google é “página 1”), colocamos o cursor do *mouse* em cima nesse nome, clicamos com o botão direito do *mouse* para abrir o menu de opções, e em seguida clicamos em *duplicar*. Isso fará ser criada mais uma página, com os mesmos dados iniciais da primeira, para que nela possamos fazer as mudanças da situação **3a**;

Figura 5: Duplicar a página 1. Sugestão de atividade 3a.

	A	B	C	D	E	F	G
1	ORÇAMENTO - ROBERTO						
2	Receitas	Salário Líquido	2824	100,00%	Porcentagem em Relação à receita total		
3		Aluguel	600	21,25%			
4		Contas Recorrentes	275	9,74%			
5		Alimentação	1050	37,18%			
6		Educação	250	8,85%			
7	Despesas	Lazer	550	19,48%			
8	Quantia não comprometida com despesas		99	3,51%			
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							

Fonte: feito pelo autor.

- Na célula D8, digitamos 15. É a porcentagem arbitrária exigida pelo problema para ser atribuída a quantia livre de despesas;
- Na célula C8, digitamos $=C2*D8$. Como já foi discutido, para calcularmos a porcentagem de uma quantia, basta multiplicar o valor base pela porcentagem relativa desejada.

. Figura 6: Cálculo da quantia não comprometida com despesas na sugestão de atividade 3a.

C8		$=C2*D8$			
	A	B	C	D	E
1	ORÇAMENTO - ROBERTO				
2	Receitas	Salário Líquido	2824	100,00%	Porcentagem em Relação à receita total
3		Aluguel	600	21,25%	
4		Contas Recorrentes	275	9,74%	
5		Alimentação	1050	37,18%	
6		Educação	250	8,85%	
7	Despesas	Lazer	550	19,48%	
8	Quantia não comprometida com despesas		423,6	15,00%	

Fonte: Feito pelo autor

No segundo momento, devemos ajustar o novo valor para a categoria “Lazer”.

- Na célula C7, digitamos a fórmula $=C2-SOMA(C3:C6;C8)$. Com essa fórmula, tomaremos a receita total e subtrairemos o valor de todas as outras categorias, restando apenas o valor da categoria Lazer. Vale ressaltar que $C3:C6;C8$ representa a seleção do intervalo de células, de C3 até C6, mais a célula C8 de forma avulsa.

Dessa forma, já respondemos um dos questionamentos desse problema, que é sobre a nova quantia destinada para a categoria Lazer.

Figura 7: Ajuste do valor da categoria “Lazer”. Sugestão de atividade 3a.

C7 fx =C2-SOMA(C3:C6;C8)

	A	B	C	D	E
1	ORÇAMENTO - ROBERTO				
2	Receitas	Salário Líquido	2824	100,00%	Porcentagem em Relação à receita total
3		Aluguel	600	21,25%	
4		Contas Recorrentes	275	9,74%	
5		Alimentação	1050	37,18%	
6		Educação	250	8,85%	
7	Despesas	Lazer	225,4	7,98%	
8	Quantia não comprometida com despesas		423,6	15,00%	

Fonte: Feito pelo autor.

No terceiro momento, devemos calcular a porcentagem do corte sofrido na categoria Lazer.

- Na célula A10, digitamos *Valor cortado do “Lazer” e remanejado para “Quantia não comprometida com despesas”*;
- Mesclamos as células A10 e B10;
- Ajustamos o texto para que o mesmo seja mostrado dentro dos limites da célula, conforme foi feito na sugestão de atividade 3;
- Na célula C10, digitamos $=(Página1!C7)-C7$. Trata-se de uma simples subtração, porém, as referências estão em páginas diferentes. Essa fórmula retornará a diferença entre as células C7 da página 1 e da página atual.

Figura 8: Valor retirado da categoria “Lazer”. Sugestão de atividade 3a.

C10 fx = ('Página1'!C7) - C7

	A	B	C	D	E
1	ORÇAMENTO - ROBERTO				
2	Receitas	Salário Líquido	2824	100,00%	Porcentagem em Relação à receita total
3		Aluguel	600	21,25%	
4		Contas Recorrentes	275	9,74%	
5		Alimentação	1050	37,18%	
6		Educação	250	8,85%	
7	Despesas	Lazer	225,4	7,98%	
8	Quantia não comprometida com despesas		423,6	15,00%	
9					
10	Valor cortado do "Lazer" e remanejado para "Quantia não comprometida com despesas"		324,6		

Fonte: Feito pelo autor

No quarto momento, devemos dividir o valor do corte na categoria “Lazer” pelo valor inicial destinado a essa categoria, para obtermos a porcentagem relativa ao corte. Novamente, temos uma referência que está na página 1.

- Na célula A12, digitamos *Porcentagem relativa ao corte realizado em "Lazer"*;
- Mesclamos as células A12 e B12;
- Ajustamos o texto na célula;
- Na célula C12, digitamos $=DIVIDE(C10; 'Página1'!C7)$;
- Com a célula C12 selecionada, clicamos no comando *formatar como porcentagem*.

Figura 9: Porcentagem relativa ao corte realizado em “Lazer”. Sugestão de atividade 3a.

C12 fx =DIVIDE(C10; 'Página1'!C7)

	A	B	C	D	E
1	ORÇAMENTO - ROBERTO				
2	Receitas	Salário Líquido	2824	100,00%	Porcentagem em Relação à receita total
3		Aluguel	600	21,25%	
4		Contas Recorrentes	275	9,74%	
5		Alimentação	1050	37,18%	
6		Educação	250	8,85%	
7	Despesas	Lazer	225,4	7,98%	
8	Quantia não comprometida com despesas		423,6	15,00%	
9					
10	Valor cortado do "Lazer" e remanejado para "Quantia não comprometida com despesas"		324,6		
11					
12	Porcentagem relativa ao corte realizado em "Lazer"		59,02%		

Fonte: Feito pelo autor.

Sugestão de atividade 3.b: Mantendo-se os valores nominais de gastos da situação inicial, conforme o enunciado da Sugestão de atividade 3, qual o valor de salário Roberto deveria receber para que a quantia livre L seja de 15%?

Comentários sobre a resolução: Devemos somar todos os gastos, e assim considerar que, com o novo salário, esses gastos devem representar 85%, restando assim, 15% da quantia livre L . Podemos fazer isso pois, nesse contexto, os gastos e a quantia livre são complementares em relação a quantia total do salário.

Denotamos por G o total de gastos:

$$G = 600 + 275 + 1050 + 250 + 550 = R\$ 2725,00$$

Considerando agora o novo salário como S fazemos

$$S \cdot \frac{85}{100} = 2725$$

$$\Leftrightarrow 100 \cdot S \cdot \frac{85}{100} = 100 \cdot 2725$$

(multiplicamos 100 em ambos os membros)

$$\Leftrightarrow S \cdot 85 = 272500$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{85} \cdot S \cdot 85 = \frac{1}{85} \cdot 272500$$

(multiplicamos $1/85$ em ambos os membros)

$$\Leftrightarrow S = \frac{272500}{85}$$

$$\Leftrightarrow S \cong R\$ 3205,88$$

O salário deve ser de R\$ 3205,88 para que a quantia livre seja de 15% e ainda mantenha o valor de R\$ 550,00 para lazer. Na planilha elaborada na sugestão de atividade 3, mudando o salário de R\$ 2824 para R\$ 3205,88, obtemos exatamente 15% de quantia livre.

Figura 10: Orçamento de Roberto com o salário atualizado

	A	B	C	D	E
1	ORÇAMENTO - ROBERTO				
2	Receitas	Salário Líquido	3205,88	100,00%	Porcentagem em Relação à receita total
3		Aluguel	600	18,72%	
4		Contas Recorrentes	275	8,58%	
5		Alimentação	1050	32,75%	
6		Educação	250	7,80%	
7		Lazer	550	17,16%	
8	Despesas				
	Quantia não comprometida com despesas		480,88	15,00%	

Fonte: Feito pelo autor.

2.3 Variação Percentual

Considere que uma quantia Q_0 sofreu uma variação ao longo de um tempo, e após esse referido período, a quantia Q_0 se tornou uma quantia Q_1 . A variação sofrida é igual a $Q_1 - Q_0$. De acordo com o item 2.2.2, para determinar a porcentagem relativa dessa variação em relação a quantia inicial, que definimos como V , devemos fazer,

$$V = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$$

Utilizando as propriedades das frações, podemos converter esse termo em uma soma de frações de mesmo denominador,

$$V = \frac{Q_1}{Q_0} - \frac{Q_0}{Q_0}$$

Dessa forma,

$$V = \frac{Q_1}{Q_0} - 1$$

Note que, se $\frac{Q_1}{Q_0} > 1 \Rightarrow Q_1 > Q_0$, então a variação percentual é positiva (ou seja $V > 0$). Por outro lado, se $\frac{Q_1}{Q_0} < 1 \Rightarrow Q_1 < Q_0$, então a variação percentual é negativa (ou seja $V < 0$).

Através das sugestões de atividade dessa seção, poderemos movimentar as habilidades (EM13MAT203), (EF07MA02) (veja tabelas 1 e 2).

Sugestão de atividade 4: *O preço médio da gasolina no ano de 2010 era de R\$ 2,578. Dez anos depois, em 2020, o valor médio observado foi de R\$ 4,462. Qual a variação percentual sofrida?*⁶

Comentários sobre a resolução: Temos que $Q_1 = 4,462$ e $Q_0 = 2,578$. Assim,

$$V = \frac{4,462}{2,578} - 1$$

$$V \cong 1,7308 - 1$$

$$V \cong 0,7308 = \mathbf{73,08\%}$$

Obtemos uma variação percentual positiva de $V = 73,08\%$, pois $Q_1 > Q_0$.

⁶ Valores utilizados tendo como fonte o site <https://investnews.com.br/economia/em-20-anos-quantidade-de-gasolina-que-salario-minimo-pode-comprar-aumenta-57>.

Sugestão de atividade 5: A pontuação do índice Bovespa no fechamento de 2010 constava em 69304,81. No fechamento de 2015, essa pontuação era de 43349,96. Qual a variação percentual nesse período?⁷

Comentários sobre a resolução: Temos que $Q_1 = 43.349,96$ e $Q_0 = 69.304,81$. Dessa forma,

$$V = \frac{43349,96}{69304,81} - 1$$

$$V \cong 0,6255 - 1$$

$$V \cong -0,3745 = -\mathbf{37,45\%}$$

Obtemos uma variação percentual negativa de $V = -37,45\%$, pois $Q_1 < Q_0$.

Nesse caso, também é possível explorar a potencialidade da planilha eletrônica de cálculo também nesse caso. Em particular, recomendamos o uso da planilha eletrônica nos casos de uma grande quantidade de cálculo de variação percentual para vários itens.

Sugestão de atividade 6: Uma família realiza uma compra de uma cesta de produtos de forma mensal, e deseja tomar nota da ocorrência da variação de preços. Considerando a tabela abaixo com a lista de itens, e os respectivos preços para o mês de março e abril (preços hipotéticos), determine a variação percentual de cada item, e da cesta de forma geral.

⁷ Valores utilizados tendo como fonte o site https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-ibovespa-estatisticas-historicas.htm.

Tabela 4: Lista de itens e seus respectivos preços em março e abril de 2024. Sugestão de atividade 6.

Itens	Preço (março 2024)	Preço (abril 2024)
Carne (kg)	R\$ 28,00	R\$ 32,00
Leite em pó (200g)	R\$ 6,20	R\$ 7,50
Feijão (kg)	R\$ 7,30	R\$ 9,40
Arroz (kg)	R\$ 7,50	R\$ 8,30
Farinha (kg)	R\$ 6,00	R\$ 6,15
Batata (kg)	R\$ 6,00	R\$ 7,00
Tomate (kg)	R\$ 6,50	R\$ 7,20
Pão (kg)	R\$ 13,20	R\$ 14,50
Café em pó (250g)	R\$ 8,30	R\$ 8,90
Banana (12 unid.)	R\$ 6,00	R\$ 5,50
Açúcar (kg)	R\$ 4,10	R\$ 3,80
Óleo (L)	R\$ 6,50	R\$ 5,70
Manteiga (500g)	R\$ 6,10	R\$ 6,90

Fonte: feito pelo autor.

Comentários sobre a resolução: O objetivo inicial é reproduzir os dados da tabela no ambiente da planilha eletrônica, e preparar os campos que receberão as informações para a realização dos cálculos.

- No intervalo de células entre A1 e C14, reproduzir as informações da tabela dada na situação problema. No intervalo de células entre B2 e C14, digitar apenas o valor, sem o símbolo monetário “R\$”;
- Selecionar o intervalo de células entre B2 e C14, e clicar em *Formatar* → *Número* → *Moeda*. Na figura 1 podemos observar a localização da aba *Formatar* e as suas respectivas opções. Esse comando irá inserir o símbolo monetário, sem provocar nenhum tipo de erro na execução da sintaxe programada por parte da planilha;
- Na célula D1, digitar *Variação percentual*;
- Selecionar o intervalo de células D2 até D14, e clicar no comando *formatar como porcentagem*;

- Na célula D2, digitamos $= (C2/B2) - 1$ e clicamos *enter*. O símbolo / é uma alternativa ao comando $=DIVIDE(;)$ para a realização de divisões. Da mesma forma, o primeiro argumento inserido nesse comando é o dividendo, e o segundo, o divisor;
- Seleccionamos a célula D2, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos C;
- Seleccionamos o intervalo de as células D3 até D14, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos V.

Dessa forma, realizamos os cálculos da variação percentual por item, de forma individual.

Figura 11: Variação percentual por item. Sugestão de atividade 6.

D2 fx = (C2/B2) - 1

	A	B	C	D
1	Itens	Preço (Março 2024)	Preço (Abril 2024)	Variação Percentual
2	Carne (kg)	R\$ 28,00	R\$ 32,00	14,29%
3	Leite em pó (200g)	R\$ 6,20	R\$ 7,50	20,97%
4	Feijão (kg)	R\$ 7,30	R\$ 9,40	28,77%
5	Arroz (kg)	R\$ 7,50	R\$ 8,30	10,67%
6	Farinha (kg)	R\$ 6,00	R\$ 6,15	2,50%
7	Batata (kg)	R\$ 6,00	R\$ 7,00	16,67%
8	Tomate (kg)	R\$ 6,50	R\$ 7,20	10,77%
9	Pão (kg)	R\$ 13,20	R\$ 14,50	9,85%
10	Café em pó (250g)	R\$ 8,30	R\$ 8,90	7,23%
11	Banana (12 unid)	R\$ 6,00	R\$ 5,50	-8,33%
12	Açúcar (kg)	R\$ 4,10	R\$ 3,80	-7,32%
13	Óleo (L)	R\$ 6,50	R\$ 5,70	-12,31%
14	Manteiga (500g)	R\$ 6,10	R\$ 6,90	13,11%

Fonte: feito pelo autor

O próximo passo é realizar o cálculo da variação percentual com os valores totais da cesta de itens.

Para determinar a variação percentual da cesta como um todo, é necessário primeiramente calcular o somatório de todos os itens, por mês. O somatório de abril será o Q_1 , e pode ser calculado através da fórmula $=SOMA(C2:C14)$. Já o somatório de março será o Q_0 e pode ser calculado através da fórmula $=SOMA(B2:B14)$. Assim,

- Na célula D15, digitamos *Variação percentual da cesta*. Ajustamos para que o texto fique nos limites da célula, se necessário;
- Na célula D16, digitamos $= (SOMA(C2:C14)/SOMA(B2:B14)) - 1$ e clicamos *enter*.

Figura 12: Variação percentual entre os somatórios dos itens. Sugestão de atividade 6.

D16 $\text{fx} = (\text{SOMA}(\text{C2:C14}) / \text{SOMA}(\text{B2:B14})) - 1$

	A	B	C	D
1	Itens	Preço (Março 2024)	Preço (Abril 2024)	Variação Percentual
2	Carne (kg)	R\$ 28,00	R\$ 32,00	14,29%
3	Leite em pó (200g)	R\$ 6,20	R\$ 7,50	20,97%
4	Feijão (kg)	R\$ 7,30	R\$ 9,40	28,77%
5	Arroz (kg)	R\$ 7,50	R\$ 8,30	10,67%
6	Farinha (kg)	R\$ 6,00	R\$ 6,15	2,50%
7	Batata (kg)	R\$ 6,00	R\$ 7,00	16,67%
8	Tomate (kg)	R\$ 6,50	R\$ 7,20	10,77%
9	Pão (kg)	R\$ 13,20	R\$ 14,50	9,85%
10	Café em pó (250g)	R\$ 8,30	R\$ 8,90	7,23%
11	Banana (12 unid)	R\$ 6,00	R\$ 5,50	-8,33%
12	Açúcar (kg)	R\$ 4,10	R\$ 3,80	-7,32%
13	Óleo (L)	R\$ 6,50	R\$ 5,70	-12,31%
14	Manteiga (500g)	R\$ 6,10	R\$ 6,90	13,11%
15				Variação percentual da cesta
16				9,98%

Fonte: Feito pelo autor.

Dessa forma, voltando ao problema da questão, podemos observar a variação individual do item A2 em D2, do item A3 em D3, e assim sucessivamente, até a variação do item A14 em D14. Em relação a variação percentual da cesta, obtemos 9,98%.

2.4 Acréscimos sucessivos, Descontos sucessivos e Taxas equivalentes

Considere $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ as quantias das grandezas nos momentos $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$. Já vimos que, a variação V_1 entre duas grandezas Q_1 e Q_0 é dada por $V_1 = \frac{Q_1}{Q_0} - 1$ e, utilizando algumas propriedades e fazendo algumas manipulações, isso implica que

$$V_1 = \frac{Q_1}{Q_0} - 1 \Rightarrow Q_1 = Q_0(V_1 + 1)$$

Para calcular uma segunda variação V_2 , entre Q_1 e Q_2 temos,

$$V_2 = \frac{Q_2}{Q_1} - 1 \Rightarrow Q_2 = Q_1(V_2 + 1) = Q_0(V_1 + 1)(V_2 + 1)$$

Para calcular uma terceira variação V_3 , entre Q_2 e Q_3 temos,

$$V_3 = \frac{Q_3}{Q_2} - 1 \Rightarrow Q_3 = Q_2(V_3 + 1) = Q_0(V_1 + 1)(V_2 + 1)(V_3 + 1)$$

Note que, expandindo esse raciocínio, para determinados V_n , Q_n e Q_{n-1} teremos,

$$Q_n = Q_0 \cdot (V_1 + 1) \cdot (V_2 + 1) \cdot \dots \cdot (V_n + 1)$$

Para calcular a variação acumulada V entre o período t_0 e t_n podemos fazer

$$V = \frac{Q_n}{Q_0} - 1$$

Substituindo Q_n temos,

$$V = \frac{Q_0 \cdot (V_1 + 1) \cdot (V_2 + 1) \cdot \dots \cdot (V_n + 1)}{Q_0} - 1$$

$$V = (V_1 + 1) \cdot (V_2 + 1) \cdot \dots \cdot (V_n + 1) - 1$$

Observe que a variação acumulada também pode ser considerada como a **taxa equivalente** a todas as demais variações.

Como um caso particular importante, vale notar também que, para $V_1 = V_2 = \dots = V_n = i$, teremos

$$V = (i + 1) \cdot (i + 1) \cdot \dots \cdot (i + 1) - 1$$

$$\Leftrightarrow V + 1 = (i + 1)^n$$

Nessa seção, trabalharemos as habilidades (EF08MA04), (EF09MA05) e (EM13MAT203) através das sugestões de atividade propostas (veja tabelas 1 e 2).

Sugestão de atividade 7: Um funcionário que recebe um salário de R\$ 2000,00 recebe alguns aumentos durante o ano: em abril, 5% por capacitação; em junho, 3% por tempo de serviço; em novembro, 12% por produtividade. Ao final do ano, qual será o novo valor do salário do funcionário? Qual a variação percentual acumulada?

Comentários sobre a resolução: Seja $Q_0 = 2000$, $V_1 = 5\% = 0,05$, $V_2 = 3\% = 0,03$ e $V_3 = 12\% = 0,12$.

- Salário

$$Q_n = 2000 \cdot (0,05 + 1) \cdot (0,03 + 1) \cdot (0,12 + 1) = 2422,56$$

- Variação percentual acumulada

$$V = (0,05 + 1) \cdot (0,03 + 1) \cdot (0,12 + 1) - 1$$

$$V = 1,21128 - 1 = 0,21128 = 21,128\%$$

O novo salário do funcionário terá um valor de R\$ 2422,56, representando uma variação percentual acumulada positiva de 21,128%.

Sugestão de atividade 8: Um veículo de determinada empresa que foi comprado por R\$ 85500,00 teve seu valor depreciado ao longo do tempo. No primeiro ano, 25% de depreciação; no segundo ano, 15%; no terceiro ano 10%. Qual o valor do veículo atualmente? Qual a variação percentual acumulada?

Comentários sobre a resolução: Seja $Q_0 = 85500$, $V_1 = -25\% = -0,25$, $V_2 = -15\% = -0,15$ e $V_3 = -10\% = -0,1$ (depreciações são variações negativas).

- Valor do veículo

$$Q_n = 85500 \cdot (-0,25 + 1) \cdot (-0,15 + 1) \cdot (-0,1 + 1)$$

$$Q_n = 85500 \cdot (0,75) \cdot (0,85) \cdot (0,9) = 49.055,625$$

- Variação percentual acumulada

$$V = (-0,25 + 1) \cdot (-0,15 + 1) \cdot (-0,1 + 1) - 1$$

$$V = 0,57375 - 1 = -0,42625 = -42,625\%$$

O veículo se encontra agora com um valor de R\$ 49.055,625, e sua depreciação representou uma variação percentual acumulada negativa de $-42,625\%$.

Sugestão de atividade 9: *Rebeka observou a rentabilidade de quatro fundos (A, B, C, D) durante 6 meses, e descreveu os dados obtidos na tabela abaixo:*

Tabela 5: Descrição das rentabilidades mensais dos fundos A, B, C e D nos últimos seis meses. Sugestão de atividade 9.

	1º mês	2º mês	3º mês	4º mês	5º mês	6º mês
Fundo A	1%	1%	1%	1%	1%	1%
Fundo B	1,5%	0,6%	0,8%	1,1%	2,1%	-0,1%
Fundo C	1%	0,3%	1,4%	0,4%	1,5%	1,4%
Fundo D	3%	-2%	0,5%	2%	-1%	3,5%

Fonte: feito pelo autor.

Ela pretende investir R\$ 15000,00. Considerando que o comportamento da rentabilidade dos fundos se repita para os próximos seis meses. Qual a opção mais vantajosa? Qual o valor do investimento de Rebeka após os seis meses? Qual foi o percentual de rentabilidade total do investimento?

Comentários sobre a resolução: como nessa situação precisamos tratar uma quantidade considerável de informações, é mais um caso indicado para trabalharmos com a planilha

eletrônica. Primeiramente, vamos reproduzir as informações que foram dadas na planilha e preparar as células que receberão os cálculos que iremos realizar.

- No intervalo de células de A1 até G5, transcrever as informações dadas no problema (veja figura 13);
- Na célula H1, digitar *Valor final do investimento*;
- Na célula I1, digitar rentabilidade percentual;
- Selecionar o intervalo de células de I2 até I5, e clicar no comando *formatar como porcentagem*;
- Na célula A7, digitar *Valor investido*;
- Na célula B7, digitar 15000. Trata-se do valor arbitrário, dado pelo problema.

Figura 13: Disposição inicial das informações. Sugestão de atividade 9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1º mês	2º mês	3º mês	4º mês	5º mês	6º mês	Valor final do investimento	Rentabilidade percentual
2	Fundo A	1%	1%	1%	1%	1%	1%		
3	Fundo B	1,5%	0,6%	0,8%	1,1%	2,1%	-0,1%		
4	Fundo C	1%	0,3%	1,4%	0,4%	1,5%	1,4%		
5	Fundo D	3%	-2%	0,5%	2%	-1%	3,5%		
6									
7	Valor investido	15000							

Fonte: Feito pelo autor.

O próximo passo será calcular o valor final do investimento, que faremos de acordo com a fórmula de aumentos sucessivos.

- Na célula H2, digitar $=B\$7*(1+B2)*(1+C2)*(1+D2)*(1+E2)*(1+F2)*(1+G2)$. O motivo do uso do símbolo \$ foi descrito nos comentários sobre a resolução da sugestão de atividade 3;
- Selecionamos a célula H2, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos C;
- Selecionamos o intervalo de as células H3 até H5, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos V.

Figura 14: Cálculo do valor final do investimento. Sugestão de atividade 9.

H2 fx $=\$B\$7*(1+B2)*(1+C2)*(1+D2)*(1+E2)*(1+F2)*(1+G2)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1º mês	2º mês	3º mês	4º mês	5º mês	6º mês	Valor final do investimento	Rentabilidade percentual
2	Fundo A	1%	1%	1%	1%	1%	1%	15922,80	
3	Fundo B	1,5%	0,6%	0,8%	1,1%	2,1%	-0,1%	15920,55	
4	Fundo C	1%	0,3%	1,4%	0,4%	1,5%	1,4%	15921,69	
5	Fundo D	3%	-2%	0,5%	2%	-1%	3,5%	15903,63	
6									
7	Valor investido	15000							

Fonte: Feito pelo autor.

Com isso, já podemos visualizar que a opção mais vantajosa é o fundo A, e que o valor final do investimento nesse fundo é de R\$ 15922,80.

Ainda nesse problema, é interessante chamar a atenção dos estudantes para o fato de que, mesmo a soma das rentabilidades mensais serem todas iguais a 6%, como podemos ver nas somas abaixo, cálculos dos aumentos sucessivos não retornam resultados iguais. Ou seja, o cálculo apenas da soma simples não seria conclusivo para essa tomada de decisão.

- $\text{Fundo A} = 1\% + 1\% + 1\% + 1\% + 1\% + 1\% = 6\%$
- $\text{Fundo B} = 1,5\% + 0,6\% + 0,8\% + 1,1\% + 2,1\% + (-0,1\%) = 6\%$
- $\text{Fundo C} = 1\% + 0,3\% + 1,4\% + 0,4\% + 1,5\% + 1,4\% = 6\%$
- $\text{Fundo D} = 3\% + (-2\%) + 0,5\% + 2\% + (-1\%) + 3,5\% = 6\%$

Por fim, devemos responder a última pergunta do problema, que trata da rentabilidade percentual final desses investimentos. Faremos de acordo com a fórmula de variação acumulada, visto nessa seção.

- Na célula I2, digitar $=(1+B2)*(1+C2)*(1+D2)*(1+E2)*(1+F2)*(1+G2)-1$;
- Seleccionamos a célula I2, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos C;
- Seleccionamos o intervalo de as células I3 até I5, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos V.

Figura 15: Cálculo do valor final do investimento. Sugestão de atividade 9.

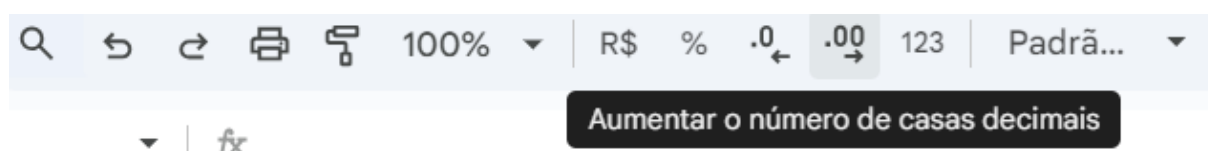
I2 $\text{fx} = (1+B2)*(1+C2)*(1+D2)*(1+E2)*(1+F2)*(1+G2)-1$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1º mês	2º mês	3º mês	4º mês	5º mês	6º mês	Valor final do investimento	Rentabilidade percentual
2	Fundo A	1%	1%	1%	1%	1%	1%	15922,80	6,152%
3	Fundo B	1,5%	0,6%	0,8%	1,1%	2,1%	-0,1%	15920,55	6,137%
4	Fundo C	1%	0,3%	1,4%	0,4%	1,5%	1,4%	15921,69	6,145%
5	Fundo D	3%	-2%	0,5%	2%	-1%	3,5%	15903,63	6,024%
6									
7	Valor investido	15000							

Fonte: Feito pelo autor.

Vale salientar que, se as células I2 até I5 retornarem apenas a parte inteira da porcentagem, não seria possível visualizar a melhor opção, pois todas retornariam 6%. Por isso, para um maior nível de precisão, é necessário configurar esse intervalo de células para exibir ao menos três casas após a vírgula, através do comando mostrado na figura 16.

Figura 16: Comando para aumentar o número de casas decimais



Fonte: Feito pelo autor.

Através dos cálculos realizados na planilha eletrônica, observamos que, de acordo com os critérios estabelecidos por Rebecka, o fundo A representa a melhor opção, retornando um montante de R\$ 15922,80 após seis meses, o que representa uma rentabilidade percentual de aproximadamente 6,152%.

3 JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS

3.1 Capital, Juros, Taxa de juros e Montante

Temos ciência que, na matemática financeira, lidamos com algumas situações específicas, como contratação de financiamentos, tomada de empréstimos, realização de investimentos, amortização de dívidas, entre outros, sempre envolvendo valores monetários. Todos os cálculos realizados nesses casos baseiam-se de alguma forma nos conceitos iniciais de porcentagem, dessa forma, salientamos que não se trata de uma “matemática diferente”, porém, convencionou-se utilizar alguns termos específicos nessas ocasiões. Nas palavras de Souza (2013, p. 72),

Capital (c): quantia em dinheiro investida ou emprestada.

Juro (j): rendimento, acréscimo ou ‘aluguel’ pago pelo investimento ou empréstimo de certa quantia.

Taxa de juro (i): porcentagem que se recebe de rendimento em um investimento ou que se paga pelo empréstimo de certa quantia.

Tempo (t): período em que se investe ou empresta certa quantia, podendo ser dado em dias, meses, anos, etc.

Montante (M): soma do capital com o juro, podendo ser indicado por $M = c + j$.

Como foi dito, juro é gerado pela monetização de um capital que foi empregado por um determinado período, de acordo com uma determinada taxa percentual aplicada. Porém, vale ressaltar que essa monetização pode ser feita de duas formas: regime de juro simples ou regime de juro composto.

Nesse capítulo, iremos abordar sugestões de atividades que possam trabalhar com as habilidades (EF08MA04), (EM13MAT101), (EM13MAT203) e (EM13MAT303) (veja tabelas 1 e 2).

3.2 Juro Simples

A característica principal do juro simples é que, o juro gerado ao fim de cada período é constante, sendo o resultado do produto entre o capital e a taxa de juros, independente do período tomado. Dessa forma, considerando um capital c aplicado a uma taxa de juros i , durante t períodos, temos:

$$t \text{ períodos} \begin{cases} j_1 = c \cdot i \\ j_2 = c \cdot i \\ j_3 = c \cdot i \\ \dots \\ j_t = c \cdot i \end{cases}$$

Ao realizar o somatório dos juros dos t períodos, como têm valores constantes, podemos notar que:

$$j = c \cdot i \cdot t$$

Podemos agora determinar o montante, uma vez que temos definido o cálculo dos juros, já que o montante trata-se do valor final que foi aplicado, ou seja, o resultado do capital aplicado mais os juros gerados no determinado período.

$$M = c + j$$

$$M = c + c \cdot i \cdot t$$

$$M = c \cdot (1 + i \cdot t)$$

Sugestão de atividade 10: João aplicou R\$ 2.000,00 em um investimento que oferece uma taxa de juros simples de 5% ao mês (a.m.). Após 8 meses, qual será o valor dos juros acumulados e o valor total que João receberá ao final desse período?

Comentários sobre a resolução: realizar o levantamento dos dados preliminarmente é importante, principalmente se tratando de estudantes iniciando o conteúdo.

Queremos calcular o montante M . Além disso, temos:

- $c = 2000$
- $i = 5\% \text{ a.m.}$
- $t = 8 \text{ meses}$

Na resolução desse tipo de problemas, é comum ser utilizado a taxa de juros em sua forma decimal ($5\% = 0,05$) para agilizar as operações que são necessárias realizar.

$$M = 2000 \cdot (1 + 0,05 \cdot 8)$$

$$M = 2000 \cdot (1 + 0,4)$$

$$M = 2000 \cdot (1,4)$$

$$M = 2800 \text{ reais}$$

O montante gerado nessa situação foi de R\$ 2800,00.

Vale destacar que, em todas as situações, é necessário manter a coesão entre as unidades de medida. Por exemplo, em uma taxa de juros que foi contratada considerando-a “ao mês”, será efetivada tendo como referência esse respectivo período de tempo (k meses). Quando não

existir essa coesão em determinada situação, é necessário realizar as devidas conversões.

Sugestão de atividade 11: *Gabriel realizou um empréstimo de R\$ 6400,00, combinando com seu credor uma taxa em regime de juros simples de 18% ao ano. Qual será o montante desembolsado por Gabriel levando em conta que o empréstimo durou 30 meses?*

Podemos notar facilmente que há uma relação de proporcionalidade entre a quantidade de meses e a quantidade de ano ($\frac{1(ano)}{12(meses)} = \frac{2(anos)}{24(meses)} = \frac{0,5(anos)}{6(meses)} = \dots$). Sendo assim, para realizar essa conversão podemos fazer da seguinte forma:

$$\frac{1(ano)}{12(meses)} = \frac{x(anos)}{30(meses)}$$

Aplicamos a propriedade fundamental das proporções, como visto na seção 2.2,

$$12x = 30$$

Multiplicamos ambos os membros por $\frac{1}{12}$,

$$12x \cdot \left(\frac{1}{12}\right) = 30 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)$$

$$\frac{12}{12}x = \frac{30}{12}$$

$$x = 2,5 \text{ anos}$$

Um outro caminho para a resolução seria realizar a conversão da taxa de juros para uma taxa ao mês, porém a forma de realizar essa conversão não é tão trivial quanto pelo primeiro caminho.

Considere as seguintes definições iniciais:

- i_1 = taxa de juros para um período base “1”
- i_n = taxa de juros equivalente para n períodos base
- n = número de períodos base.

Para calcular o montante gerado por uma taxa i_1 em regime de juros simples, aplicada a um capital C durante n períodos fazemos

$$M = C \cdot (1 + i_1 \cdot n)$$

Por outro lado, esse mesmo montante é gerado por uma taxa i_n (que é a taxa de juros equivalente para n períodos base) aplicada ao mesmo capital C . Dessa forma,

$$M = C \cdot (1 + i_n)$$

Agora, igualando as equações teremos

$$C \cdot (1 + i_1 \cdot n) = C \cdot (1 + i_n)$$

Multiplicamos $\frac{1}{C}$ em ambos os membros,

$$C \cdot (1 + i_1 \cdot n) \cdot \left(\frac{1}{C}\right) = C \cdot (1 + i_n) \cdot \left(\frac{1}{C}\right)$$

$$1 + i_1 \cdot n = 1 + i_n$$

Somamos -1 em ambos os membros,

$$1 - 1 + i_1 \cdot n = 1 - 1 + i_n$$

$$i_1 \cdot n = i_n$$

Observamos que, no regime de juros simples, a taxa de juros acumulada para n períodos i_n é simplesmente o produto da taxa de juros de um único período i_1 pelo número de períodos n .

Comentários sobre a resolução: Voltando à situação problema, percebemos que temos a opção de escolher duas formas de resolução, dependendo da conversão de unidades que realizaremos.

Método I: Convertendo o tempo para Anos.

Na conversão que foi feita anteriormente, vimos que 30 meses equivalem a 2,5 anos. Dessa forma,

- Queremos descobrir o montante M ;
- $c = 6400$;
- $i = 18\% \text{ a.a.}$;
- $t = 2,5 \text{ anos.}$

Aplicamos a fórmula,

$$M = 6400 \cdot (1 + 0,18 \cdot 2,5)$$

$$M = 6400 \cdot (1 + 0,45)$$

$$M = 6400 \cdot (1,45)$$

$$M = 6400 \cdot (1 + 0,015 \cdot 30)$$

$$\mathbf{M = 9.280 \text{ reais}}$$

Método II. Convertendo a taxa de juros para uma taxa Ao Mês.

Considerando como unidade base o período de 1 mês, como a taxa de juros foi dada ao ano, teremos,

$$i_1 \cdot 12 = i_{12}$$

$$i_1 \cdot 12 = 0,18$$

Multiplicando ambos os membros por $\left(\frac{1}{12}\right)$

$$i_1 \cdot 12 \cdot \left(\frac{1}{12}\right) = 0,18 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)$$

$$i_1 = \frac{0,18}{12} = 0,015 = 1,5\% \text{ ao mês}$$

Ao retomarmos os dados da questão, observamos que

- Queremos descobrir o montante M ;
- $c = 6400$;
- $i = 1,5\% \text{ a.m.}$;
- $t = 30 \text{ meses}$.

‘Agora basta aplicar os dados na fórmula, e realizar os devidos cálculos.

$$M = 6400 \cdot (1 + 0,015 \cdot 30)$$

$$M = 6400 \cdot (1 + 0,45)$$

$$M = 6400 \cdot (1,45)$$

$$\mathbf{M = 9.280 \text{ reais}}$$

Dessa forma, o valor desembolsado por Gabriel ao fim do empréstimo foi de R\$ 9280,00.

3.2.1 Juros Simples x Função Afim

Uma função, segundo Iezzi e Murakami (2013, p. 81), é definida da seguinte forma, “dados dois conjuntos A e B , não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.”

Por sua vez, a função afim f é definida como sendo uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, onde cada elemento x se relaciona com um único elemento $y = f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Essa função também é conhecida como função polinomial de primeiro grau, pois o maior expoente da variável x é 1.

Conhecendo-se x_1 e x_2 que se associam a $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ respectivamente, podemos determinar o valor de a e b na função $f(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} f(x_1) = ax_1 + b \\ f(x_2) = ax_2 + b \end{cases}$$

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - ax_1 - b$$

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Conhecendo o valor de a e tomando uma das equações, teremos

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

$$b = f(x_1) - ax_1$$

Ou, de forma análoga,

$$b = f(x_2) - ax_2$$

Agora tomemos a simulação de um capital de R\$ 500,00 aplicado a uma taxa anual de 10% sob regime de juros simples durante determinados períodos de tempo:

Tabela 6: Cálculo do montante em função do tempo.

Tempo (t)	$C \cdot (1 + i \cdot t)$	Montante (M)
0	$500 \cdot (1 + 0,1 \cdot 0)$	500
1	$500 \cdot (1 + 0,1 \cdot 1)$	550
2	$500 \cdot (1 + 0,1 \cdot 2)$	600
3	$500 \cdot (1 + 0,1 \cdot 3)$	650
4	$500 \cdot (1 + 0,1 \cdot 4)$	700
T	$500 \cdot (1 + 0,1 \cdot t)$	$50t + 500$

Fonte: feito pelo autor.

Note que, podemos traçar um paralelo entre a fórmula de juros simples e a forma geral da função afim. Na primeira temos o tempo t como variável independente, ao invés de x . Também podemos apontar o montante M como variável dependente, ao invés de $f(x)$. Porém vale destacar que, considerando a fórmula do juro simples como sendo a função $m(t)$, o seu domínio está contido em $\mathbb{R}^+$, uma vez que não se admite tempo negativo.

Tomando essa ressalva, podemos descrever o comportamento do caso particular exemplificado através da função

$$m(t) = 50t + 500, \text{ onde } a = 50, b = 500.$$

De forma geral, considerando o capital C , e a taxa de juros i constantes, temos,

$$m(t) = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$m(t) = C \cdot i \cdot t + C, \text{ onde } a = C \cdot i, b = C$$

Com a associação de juros simples com função afim, então o professor pode motivar o estudo de função afim em sala de aula a partir da aplicação prática com juros simples, utilizando este ou outros exemplos.

Ainda sobre o exemplo dado, podemos realizar simulações para um grande número de valores de t , e esboçar graficamente os resultados por meio da planilha eletrônica. Primeiramente organizamos na tabela as informações dadas:

- Na célula A1, digitamos *Capital*;
- Na célula A2, digitamos *Taxa de Juros*;
- Na célula B1, digitamos 500;
- Na célula B2, digitamos 10%;
- Na célula A4, digitamos *Períodos de tempo*;
- Na célula B4, digitamos *Montante*;
- Na célula A5, digitamos 0;
- Na célula A6, digitamos =A5+1;
- Seleccionamos a célula A6, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos C;
- Seleccionamos o intervalo de as células A7 até A15, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos V.

Figura 17: Disposição inicial das informações da simulação.

	A	B
1	Capital	500
2	Taxa de Juros	10%
3		
4	Períodos de tempo	Montante
5	0	
6	1	
7	2	
8	3	
9	4	
10	5	
11	6	
12	7	
13	8	
14	9	
15	10	

Fonte: feito pelo autor.

Em seguida, inserimos aplicar a fórmula dos juros simples para a realização dos

cálculos.

- Na célula B5, digitar $=B\$1*(1+B\$2*A5)$. Dessa forma, ao copiarmos e colarmos a fórmula para as células B6 até B15, o período de tempo considerado na fórmula irá tomar o valor das células subsequentes da coluna, enquanto os valores do capital e taxa de juros se manterão fixos. Esse procedimento já foi comentado em momentos anteriores;
- Seleccionamos a célula B5, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos C;
- Seleccionamos o intervalo de as células B6 até B15, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos V.

Figura 18: Aplicação da fórmula de juros simples e cálculo do montante.

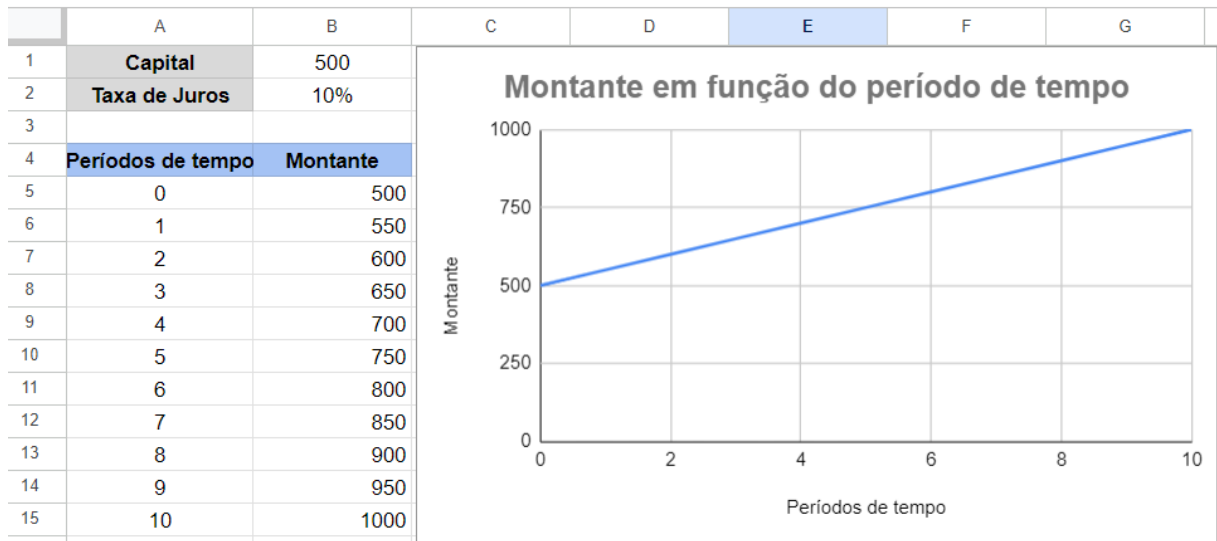
B5 fx $=B\$1*(1+B\$2*A5)$

	A	B
1	Capital	500
2	Taxa de Juros	10%
3		
4	Períodos de tempo	Montante
5	0	500
6	1	550
7	2	600
8	3	650
9	4	700
10	5	750
11	6	800
12	7	850
13	8	900
14	9	950
15	10	1000

Fonte: Feito pelo autor.

Agora, para representar graficamente os valores da tabela, seleccionamos as células A4 até B5, clicamos no menu “inserir” e em seguida “gráfico”. Alteramos o título do gráfico arbitrariamente para Montante em função do período de tempo.

Figura 19: Gráfico do montante em função do tempo, no regime de juros simples.



Fonte: feito pelo autor.

Uma vez que compreendemos a caracterização dos juros simples através de uma função afim, e consequentemente sua variação de crescimento e decrescimento linear, é possível explorar algumas situações com um maior nível de complexidade.

Sugestão de atividade 12: Em um investimento realizado em regime de juros simples, notou-se que o montante gerado após 1 ano foi de R\$ 2950,00, e após 5 anos foi de R\$ 4750,00.

- i. Com essas informações, é possível determinar o capital investido e a taxa de juros contratada?
- ii. Qual será o montante gerado após 10 anos de investimento?

Comentários sobre a resolução: A situação envolvendo juros simples pode ser definida por uma função afim $m(t)$ que determina o montante em função do tempo na forma $m(t) = at + b$. Sabendo disso, podemos interpretar as informações dadas como

$$m(1) = 2950 \text{ e } m(5) = 4750$$

Dessa forma, podemos determinar a ao fazer

$$a = \frac{4750 - 2950}{5 - 1} = \frac{1800}{4} = 450$$

Conhecendo o valor de a e tomando um dos pontos da função, determinamos o valor de b

$$m(1) = 2950$$

$$2950 = (450) \cdot (1) + b$$

$$2950 = 450 + b$$

$$b = 2950 - 450$$

$$\mathbf{b = 2500}$$

Logo, $m(t) = 450t + 2500$.

- i. Vimos que $m(t) = C \cdot i \cdot t + C$, onde $a = C \cdot i$, $b = C$. Dessa forma,

$$b = C \Leftrightarrow \mathbf{C = 2500}$$

Atribuímos os valores de a e C em $a = C \cdot i$

$$450 = 2500 \cdot i$$

$$\Leftrightarrow i = \frac{450}{2500} = 0,18$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{i = 18\% (ao\ ano)}$$

- ii. Como já sabemos a função que determina essa situação, basta atribuir o valor de t que o problema exige.

$$m(t) = 450t + 2500$$

$$\Leftrightarrow m(10) = 450 \cdot 10 + 2500$$

$$\Leftrightarrow m(10) = 4500 + 2500$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{m(10) = 7000}$$

3.3 Juros Compostos

No regime de juros compostos, temos a característica de que, ao fim de cada período, os juros gerados são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do período subsequente. Esse regime de juros é o mais adotado no sistema financeiro atual (bancos, instituições financeiras etc.).

Considerando um capital c aplicado a uma taxa de juros i , iremos calcular o montante para cada período, observando as características já citadas do juro composto.

$$1^{\text{o}}\text{período} \rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i)$$

$$2^{\text{o}}\text{período} \rightarrow M_2 = M_1 \cdot (1 + i)$$

$$M_2 = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$$

$$M_2 = C \cdot (1 + i)^2$$

$$3^{\text{o}}\text{período} \rightarrow M_3 = M_2 \cdot (1 + i)$$

$$M_3 = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$$

$$M_3 = C \cdot (1 + i)^3$$

$$\vdots$$

$$t - \text{ésimo período} \rightarrow M_t = C \cdot (1 + i)^t$$

É possível notar que, o cálculo do montante para o regime de juros compostos é um caso particular do cálculo de aumentos sucessivos, comentado no item 2.4, já que a cada período temos uma taxa percentual de aumento fixa igual a i .

Sugestão de atividade 13: *Maria investiu R\$ 30.000,00 em um fundo de investimentos que rende 4% ao mês, com capitalização de juros compostos. Qual será o montante acumulado no final do período de 3 meses?*

Comentários sobre a resolução: Queremos calcular o montante M . Para isso, temos os dados

- $c = 30000$
- $i = 4\% \text{ a.m.}$
- $t = 3 \text{ meses}$

Aplicamos a fórmula, atribuindo os valores no lugar dos seus respectivos termos.

$$M = 30000 \cdot (1 + 0,04)^3$$

$$\Leftrightarrow M = 30000 \cdot (1,04)^3$$

$$\Leftrightarrow M = 30000 \cdot 1,124864$$

$$\Leftrightarrow M = \mathbf{33.745,92 \text{ reais}}$$

Da mesma forma que nos juros simples, podemos nos deparar com problemas em que há um descasamento entre as unidades de medida de taxa de juros e tempo, fazendo-se necessário realizar uma conversão para manter a coesão do resultado. Porém, devido as características dos juros compostos, a conversão da unidade de taxa de juros não se dá de forma simplesmente linear.

Sejam:

i_1 = taxa de juros para um período base “1”.

i_n = taxa de juros equivalente para n períodos base.

n = número de períodos base.

Para calcular o montante gerado por uma taxa i_1 em regime de juros compostos, aplicada a um capital C durante n períodos fazemos

$$M = C \cdot (1 + i_1)^n$$

Paralelamente, esse mesmo montante é gerado por uma taxa i_n (taxa de juros equivalente

para n períodos base) aplicada ao mesmo capital C . Dessa forma,

$$M = C \cdot (1 + i_n)$$

Igualando as equações, teremos

$$C \cdot (1 + i_1)^n = C \cdot (1 + i_n)$$

Multiplicamos $\frac{1}{C}$ em ambos os membros,

$$C \cdot (1 + i_1)^n = C \cdot (1 + i_n) \cdot \left(\frac{1}{C}\right)$$

$$(1 + i_1)^n = (1 + i_n)$$

Dessa forma, essa conversão é realizada aplicando-se um cálculo análogo à fórmula de taxas equivalentes, já mencionada nesse trabalho na seção 2.1.4.

Sugestão de Atividade 14: *As amigas Elizangela e Adriana possuem conta em um mesmo banco e possuem, cada uma, R\$ 8000,00 para investir. Elizângela escolheu o investimento que paga de forma fixa 1% ao mês, enquanto Adriana escolheu o que promete pagar 12,3% ao ano, também de forma fixa, e ambos em regime de juros compostos. Qual das duas fez o melhor investimento?*

Comentários sobre a resolução: Considerando como unidade base o período de 1 mês, vamos tomar a taxa mensal dada i_1 e calcular a taxa anual equivalente, referente a 12 períodos base i_{12} . Como alternativa, poderíamos também tomar a taxa anual e chegar em uma taxa equivalente mensal.

$$(1 + 0,01)^{12} = (1 + i_{12})$$

$$(1,01)^{12} = (1 + i_{12})$$

Calculamos a potência e somamos -1 em ambos os membros da igualdade.

$$1 - 1 + i_{12} \cong 1,126825 - 1$$

$$i_{12} \cong 1,126825 - 1$$

$$i_{12} \cong 0,126825 = 12,6825\%$$

Logo, o investimento de Elizangela foi mais vantajoso, pois possui uma taxa de juros maior, considerando o período de um ano, sendo 12,6825% contra 12,3% do investimento de Adriana.

Podemos deixar a visualização dessa diferença mais lúdica a um estudante do ensino médio, mostrando um panorama gráfico da evolução desses investimentos ao longo dos anos, que pode ser facilmente construída através da manipulação desses dados em uma planilha eletrônica.

Primeiramente organizamos as informações na tabela, de acordo com a imagem abaixo (foi escolhido um período de 15 anos, de forma arbitrária).

- Na célula A1, digitar *Capital*;
- Na célula A2, digitar *Taxa de Juros (Adriana)*;
- Na célula A3, digitar *Taxa de Juros (Elizangela)*;
- Na célula B1, digitar 8000;
- Na célula B2, digitar 12,3%;
- Na célula B3, digitar 12,6825%;
- Na célula A5, digitar *Períodos de tempo*;
- Na célula B5, digitar *Adriana*;
- Na célula C5, digitar *Elizângela*;
- Na célula A6, digitar 0;
- Na célula A7, digitar =A6+1;
- Seleccionamos a célula A7, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos C;
- Seleccionamos o intervalo de as células A8 até A21, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos V.

Figura 20: Disposição inicial das informações: Sugestão de atividade 14.

	A	B	C
1	Capital	8000	
2	Taxa de Juros (Adriana)	12,3%	
3	Taxa de Juros (Elizangela)	12,6825%	
4			
5	Períodos de tempo	Adriana	Elizângela
6	0		
7	1		
8	2		
9	3		
10	4		
11	5		
12	6		
13	7		
14	8		
15	9		
16	10		
17	11		
18	12		
19	13		
20	14		
21	15		

Fonte: feito pelo autor.

Em seguida, aplicamos a fórmula dos juros compostos em B6 referente às informações

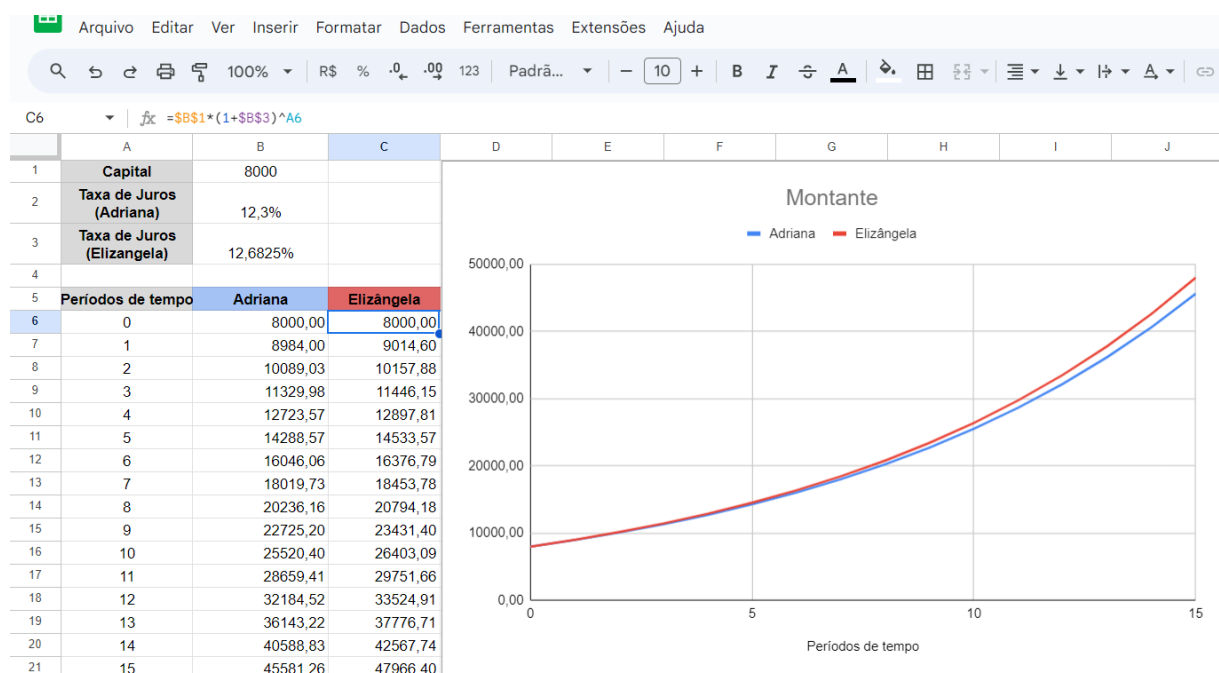
dadas de Adriana e em C6 referente às informações dadas de Elizângela. Logo após copiamos as fórmulas nas respectivas colunas para gerar os cálculos referentes aos outros períodos de tempo.

- Na célula B6, digitar $=B\$1*(1+B\$2)^{A6}$. Teremos a fórmula dos juros compostos com os dados referentes à Adriana;
- Na célula C6, digitar $=B\$1*(1+B\$3)^{A6}$. Teremos a fórmula dos juros compostos com os dados referentes à Elizângela;
- Seleccionamos as células B6 e C6, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos C;
- Seleccionamos o intervalo de as células B7 até C21, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos V.

Todos os montantes gerados tomarão como base o capital de 8000 e os períodos de 0 a 15, alterando-se apenas a taxa de juros.

Para finalizar, seleccionamos o intervalo de células de A5 a C21, clicamos no menu “inserir” e em seguida em “gráfico”, para gerar o gráfico da situação apresentada. O título do gráfico foi alterado de forma arbitrária para *Montante*.

Figura 21: Cálculos e gráfico dos montantes gerados. Sugestão de atividade 14.



Fonte: feito pelo autor.

3.3.1 Juros Compostos x Função Exponencial

Segundo Dante (2005, p. 111), “dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base a a uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ ”.

Por sua vez, considerando a função $M(t)$ como sendo o valor sob regime de juros compostos do montante em função do tempo t , com C (capital) e i (taxa de juros) constantes, temos,

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t$$

- $t \in \mathbb{R}_+$, pois não admite-se tempo negativo, tendo assim um domínio mais restrito.
- Para $i > 0$, $(1 + i) > 0$ e $(1 + i) \neq 1$, logo, sob os parâmetros da definição de função exponencial, $a = (1 + i)$.
- C é uma constante multiplicativa. Desde que $C > 0$, então a constante multiplicativa C não altera a natureza de crescimento ou decrescimento da função exponencial a^x , que fica sendo ditada apenas pela base a . Ou seja, para $a > 1$ e $C > 0$, $C \cdot (a^x)$ é crescente, e para $0 < a < 1$ e $C > 0$, $C \cdot (a^x)$ é decrescente. Para fazer sentido em um contexto em que o objetivo é o cálculo de um montante, admitimos que $C > 0$.

Dessa forma, podemos concluir que a fórmula que determina o valor do montante, em regime de juros compostos, pode ser definida como uma função exponencial do tipo $f(x) = b \cdot a^x$, tal que

- $x = t$ e $f(x) = M(t)$;
- $a = (1 + i)$;
- $b = C$.

Sejam $f(x) = b \cdot a^x$, com $a, b \neq 0$, e $F(x) = B \cdot A^x$, com $A, B \neq 0$, duas funções exponenciais tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$

$$f(x_1) = F(x_1)$$

$$b \cdot a^{x_1} = B \cdot A^{x_1}$$

$$\frac{b}{B} = \frac{A^{x_1}}{a^{x_1}}$$

$$f(x_2) = F(x_2)$$

$$b \cdot a^{x_2} = B \cdot A^{x_2}$$

$$\frac{b}{B} = \frac{A^{x_2}}{a^{x_2}}$$

$$\frac{b}{B} = \frac{A^{x_1}}{a^{x_1}} \text{ e } \frac{b}{B} = \frac{A^{x_2}}{a^{x_2}} \Rightarrow \frac{A^{x_1}}{a^{x_1}} = \frac{A^{x_2}}{a^{x_2}} \\ \Rightarrow \left(\frac{A}{a}\right)^{x_1} = \left(\frac{A}{a}\right)^{x_2}$$

Como $x_1 \neq x_2$, e a função exponencial é injetiva, isso implica que

$$\frac{A}{a} = 1 \Rightarrow A = a$$

Como $A = a$, então temos que

$$\frac{b}{B} = \frac{A^{x_2}}{a^{x_2}} = 1 \Rightarrow b = B$$

Dessa forma, percebemos que, assim como na função afim, uma função da forma exponencial fica determinada quando se conhecem dois de seus valores.

Sejam $f(x) = b \cdot a^x$, com $b > 0$, e $x_1 \neq x_2$, por ser exponencial $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são não nulos.

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x_2) = b \cdot a^{x_2} \\ f(x_1) = b \cdot a^{x_1} \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} \\ \Rightarrow \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = \frac{f(x_2)}{f(x_1)} \\ \Rightarrow a^{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)}{f(x_1)} \end{aligned}$$

Aplicamos o expoente $\frac{1}{x_2-x_1}$ em ambos os membros da igualdade.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a^{x_2-x_1})^{\frac{1}{x_2-x_1}} &= \left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}} \\ \Rightarrow a &= \left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}} \end{aligned}$$

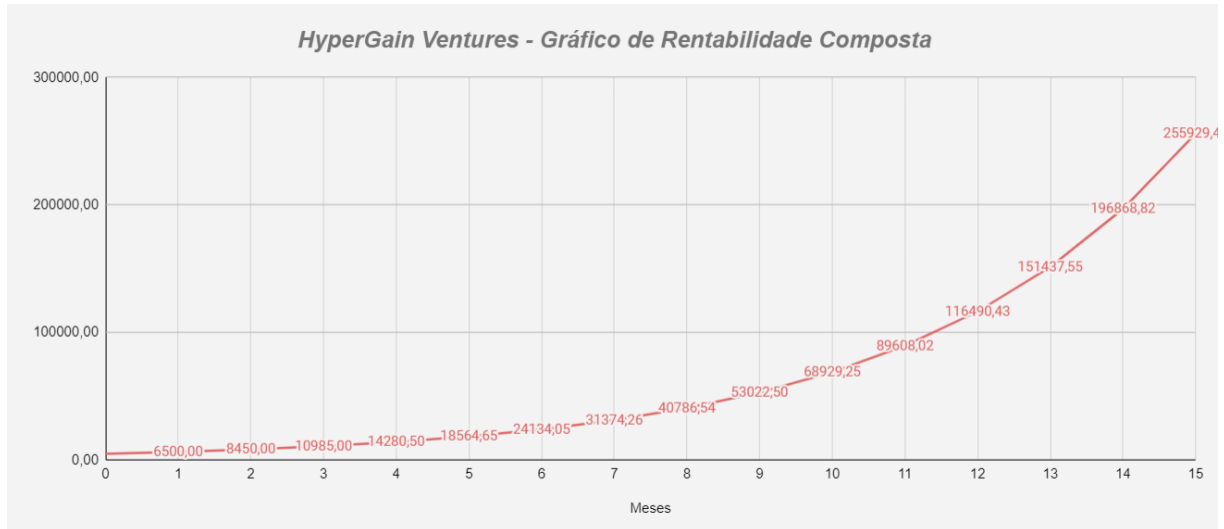
Conhecendo-se a , aplicamos seu valor em uma das equações para obtermos b .

$$\begin{aligned} f(x_1) &= b \cdot a^{x_1} \\ \Rightarrow b &= \frac{f(x_1)}{a^{x_1}} \end{aligned}$$

Sugestão de Atividade 15: Pedro viu na internet o anúncio de um novo investimento da empresa “HyperGain Ventures” que promete ser revolucionário em termos de rentabilidade, porém no anúncio, havia apenas um gráfico de rentabilidade (de acordo com a imagem

abaixo), informando que o regime de rentabilidade era de juros compostos e que o período estava em meses.

Figura 22: Gráfico de rentabilidade da HyperGain Ventures. Sugestão de atividade 15.



Fonte: feito pelo autor.

O professor de Pedro havia informado que um investimento com rentabilidade acima de 4% ao mês já seria considerado de alto risco e que seria mais sensato não investir, portanto Pedro realizaria esse investimento dependendo dessa condicionante.

i. Qual a taxa de juros e capital utilizados nessa simulação de rentabilidade?

ii. Pedro realizou o investimento?

Comentários sobre a resolução:

i. Como foi dado que a rentabilidade é definida no regime de juros compostos, sabemos que o comportamento dessa situação irá se assemelhar com o comportamento de uma função exponencial. Tomando agora dois pontos dessa função, (1, 6500) e (2, 8450) (poderiam ser quaisquer pontos da função tomados dois a dois).

$$a = \left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)} \right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}$$

$$a = \left(\frac{8450}{6500} \right)^{\frac{1}{2-1}} = (1,3)^1 = 1,3$$

Tomamos um ponto da função e o valor de a para chegarmos em um valor para b .

$$b = \frac{f(x_1)}{a^{x_1}}$$

$$b = \frac{6500}{1,3^1}$$

$$b = \frac{6500}{1,3} = 5000$$

Sabemos que, ao retomarmos os termos da fórmula dos juros compostos, temos

$$a = (1 + i)$$

$$\Rightarrow 1,3 = 1 + i$$

$$\Rightarrow i = 1,3 - 1$$

$$\Rightarrow i = 0,3 = 30\%.$$

$$b = C$$

$$C = 5000$$

ii. Como a taxa de juros aplicada nesse investimento foi de 30% ao mês, estava acima dos parâmetros adotados por Pedro, logo, ele não realizou o investimento.

Sugestão de atividade 16: Um investidor em posse de um capital de R\$ 50000,00, decide aplicá-lo em um investimento e se depara com duas opções:

- Banco Santo André: “Investimento com valores iguais ou superiores a 50 mil reais, aplicamos uma taxa de juro simples de 8% ao ano”
- Banco Ijaú: “Investimento com valores iguais ou superiores a 50 mil reais, aplicamos uma taxa de juro composto de 6,2% ao ano”

A primeiro momento, o investidor realizará esse investimento por um período de 3 anos.

i. Qual das duas opções é a mais vantajosa?

ii. Qual a opção seria mais vantajosa se o capital fosse aplicado durante um período de 6 anos?

E de 12 anos? E de 24 anos?

Comentários sobre a resolução: Esse problema tem uma minúcia interessante para que o estudante possa refletir, pois a taxa de juros do Banco Santo André é maior, o que faz com que um estudante a primeiro momento responda só com base nesse dado. O problema também pode se tornar bastante efetivo para mostrar intuitivamente as diferenças nas características entre os juros simples e juros compostos. Dessa forma, damos como sugestão que essa atividade seja aplicada como introdução do tema “juros”, e que os juros nesse período sejam calculados ano a ano, para que o estudante possa visualizar que o montante ao fim do primeiro período torna-se o capital a ser considerado no segundo período, e assim por diante, quando falamos de juros compostos, o que faz com que as parcelas de juros sejam crescentes nesse regime de juros, enquanto as parcelas de juros no regime de juros simples são sempre fixas. E a partir da

visualização dessas características pelo estudante, vemos um bom momento para a modelagem das fórmulas.

i. Considerando que o estudante já teve contato com as fórmulas de juros simples e compostos, iremos calcular o montante nas duas situações.

Banco Santo André	Banco Ijaú
$M = 50000 \cdot (1 + 0,08 \cdot 3)$	$M = 50000 \cdot (1 + 0,062)^3$
$M = 50000 \cdot (1 + 0,24)$	$M = 50000 \cdot (1,062)^3$
$M = 50000 \cdot (1,24)$	$M = 50000 \cdot 1,197770328$
$M = 62000$	$M = 59888,5164$

No período de três anos é mais vantajoso o investimento no banco Santo André.

ii. É possível responder esse subitem aplicando a fórmula para esses valores pontuais de tempo. Porém, faremos a resolução de forma que fique visível para o estudante o comportamento dos diferentes regimes de juros ao longo do tempo, explorando as potencialidades pedagógicas da planilha eletrônica.

Iremos organizar uma tabela para dar os resultados dos montantes dos 24 períodos.

- Na célula B1, digitar *Capital investido*;
- Na célula B2, digitar *Taxa de Juros*;
- Na célula C1, digitar 50000;
- Na célula C2, digitar 8%;
- Na célula D2, digitar 6,2%;
- Na célula C3, digitar *Banco Santo André*;
- Na célula D3, digitar *Banco Ijaú*;
- Na célula B4, digitar 1;
- Na célula B5, digitar $=B4+1$;
- Selecionar a célula B5, copiar e colar no intervalo de células de B6 até B27;
- Selecionar as células de A4 até A27 e clicar no comando *Mesclar células*. Nessa célula mesclada, digitar *Período*.

Figura 23: Disposição inicial das informações. Sugestão de atividade 16.

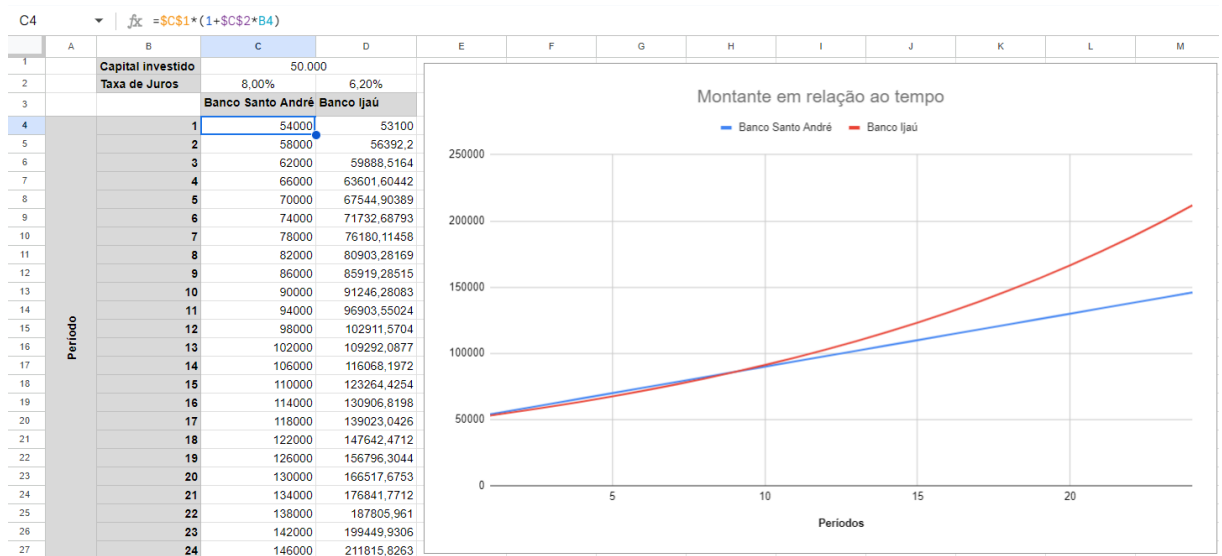
	A	B	C	D
1		Capital investido	50.000	
2		Taxa de Juros	8,00%	6,20%
3			Banco Santo André	Banco Ijaú
4	Período	1		
5		2		
6		3		
7		4		
8		5		
9		6		
10		7		
11		8		
12		9		
13		10		
14		11		
15		12		
16		13		
17		14		
18		15		
19		16		
20		17		
21		18		
22		19		
23		20		
24		21		
25		22		
26		23		
27		24		

Fonte: feito pelo autor.

Na próxima etapa, iremos inserir as fórmulas para gerar os montantes desses períodos, e gerar um gráfico de linhas referentes a esses resultados.

- Na célula C4, digitar $=C\$1*(1+C\$2*B4)$;
- Selecionar a célula C4, copiar e colar no intervalo de células de C5 até C27;
- Na célula D4, digitar $=C\$1*(1+D\$2)^{B4}$;
- Selecionar a célula D4, copiar e colar no intervalo de células de D5 até D27;
- Selecionar o intervalo de células de B3 até D27, e clicar em *Inserir* → *Gráfico*. Após inserido o gráfico, o título da parte superior, e a legenda da parte inferior foram editados.

Figura 24: Tabela e gráfico dos montantes em relação ao tempo. Sugestão de atividade 16.



Fonte: feito pelo autor.

Dessa forma, podemos observar que, apesar da taxa de juros do Banco Santo André ser maior, essa opção de investimento é mais vantajosa até o período de 9 anos. Devido o comportamento exponencial do montante no regime de juros compostos, haverá um ponto em que esse montante irá ultrapassar o montante em regime de juros simples, e não voltará a ser menor a partir desse ponto.

4 INVESTIMENTOS, RENTABILIDADE E INFLAÇÃO

4.1 Inflação

Temos ciência que o conceito de inflação é de grande relevância tanto no âmbito econômico e político, quanto no âmbito social. Mesmo que o cidadão médio não compreenda as minúcias desse conceito ou ao menos compreenda a sua existência, a inflação ainda se fará presente e impactará diversos aspectos da sociedade, pois a inflação implica diretamente na perda de poder de compra e no empobrecimento da população, pois uma mesma quantidade de moeda passará a adquirir menos bens após um período em que houve a incidência da inflação. O próprio governo reconhece a relevância desse fator, quando atribui metas de inflação máxima anual, e implementa medidas para conter esse índice⁸.

Nesse sentido, é de fundamental importância que o ensino da matemática, sobretudo a matemática financeira, contemple nuances desse conceito que sejam suficientes para a plena compreensão do estudante.

Segundo Ogliari (2008, p.19), “A Matemática voltada às ciências sociais abre um leque de significados e competências que levam os estudantes a compreender melhor a sua realidade e interagir criticamente nesse meio”. No ensino de matemática, além de buscarmos o aprendizado e a excelência do estudante em relação à cognição para juntar as peças de um problema matemático e ao conhecimento de técnicas de resolução, também se faz necessário a busca por inserir o estudante em situações que sejam facilmente relacionáveis com sua vida cotidiana, seu meio social e econômico, dando assim sentido e significado relevante ao seu objeto de estudo.

Sobre o tema inflação, ela pode ser sucintamente descrita como “a elevação contínua do nível de preços, isto é, uma taxa contínua de crescimento dos preços num período determinado” (Moran; Witte, 1993, p. 120), sendo que essa elevação pode se dar por um conjunto complexo de fatores, dentre os quais, a existência de um excesso de moeda em relação aos bens e serviços disponíveis; a ocorrência de uma elevação salarial, expansão dos custos de matéria prima e elevação dos lucros; o efeito das expectativas inflacionárias futuras (Moran; Witte, 1993), entre outros.

⁸ O Banco Central do Brasil apresenta mais detalhes no texto *Metas para a inflação*, disponível pelo link <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/metainflacao>.

No Brasil, o cálculo da inflação adotado como oficial é o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), e têm como objetivo medir a inflação de um conjunto de produtos e serviços comercializados no varejo, referentes ao consumo pessoal das famílias, cujo rendimento varia entre 1 e 40 salários mínimos, qualquer que seja a fonte de rendimentos, sendo que essa faixa de renda foi escolhida para abranger ao menos 90% das famílias pertencentes às áreas urbanas de cobertura do Sistema Nacional de Índices de Preços ao Consumidor - SNIPC.

No cálculo do IPCA é realizada uma ponderação por grupo de itens de consumo (como exemplo, os pesos dos grupos “alimento e bebidas” e “educação” são diferentes) e por região pesquisada (como exemplo, as amostras das capitais “São Paulo” e “São Luís” são diferentes). Dessa forma, um cálculo hipotético de uma inflação que leve em consideração os hábitos de consumo de cada indivíduo também tende a ser diferente dos números indicados no cálculo do IPCA.

4.2 Poupança

Tendo em vista a relação direta da inflação com a perda de poder de compra da moeda no decorrer do tempo, somos levados a pensar sobre formas ou instrumentos que levem o cidadão a contornar ou minimizar tais efeitos nocivos em sua renda e patrimônio, em outras palavras, nos deparamos com a necessidade de ter uma boa educação financeira. Para Ferreira (2017, p.3), educação financeira “se trata de conhecimentos e competências que te ajudam fazer escolhas inteligentes relacionadas a dinheiro, transações financeiras e consumo o que te fazem adquirir certo bem-estar e tranquilidade na vida”.

A busca pela obtenção desses conhecimentos e competências vai muito além de alguma mera exposição de técnicas de resolução de cálculos de porcentagem. O estudante precisa ser submetido a contextos presentes em sua realidade, a possibilidades de escolha, a testes e experimentações, e a ferramentas que possam vir a ser úteis. Um desses âmbitos a serem apresentados ao estudante seriam algumas possibilidades de investimentos e rentabilização de seu capital.

Nesse sentido, como ponto de partida temos a caderneta de poupança, que é uma das formas mais populares de rentabilizar recursos financeiros, tendo sua origem no Brasil datada da época do Império. Possui alguns pontos de praticidade importantes, como possibilidade de

integração com a conta corrente, possibilidade de depósito de pequenos valores e possibilidade de resgate imediato. Do ponto de vista fiscal, para pessoas físicas, possui isenção de imposto de renda (IR) e de imposto sobre operações financeiras (IOF). Em relação ao risco, em caso de falência da instituição financeira, o Fundo Garantidor de Crédito (FGC) assegura a garantia de até R\$ 250.000,00 dos depósitos realizados por pessoa física, de acordo com a legislação vigente. Sobre a rentabilidade, as regras são regidas pelo art. 12 da Lei nº 8.177, de 1 de março de 1991, que diz que em cada período de rendimento, os depósitos de poupança serão remunerados:

I - como remuneração básica, por taxa correspondente à acumulação das TRD, no período transcorrido entre o dia do último crédito de rendimento, inclusive, e o dia do crédito de rendimento, exclusive;

II - como remuneração adicional, por juros de:

- a) 0,5% (cinco décimos por cento) ao mês, enquanto a meta da taxa Selic ao ano, definida pelo Banco Central do Brasil, for superior a 8,5% (oito inteiros e cinco décimos por cento); ou
- b) 70% (setenta por cento) da meta da taxa Selic ao ano, definida pelo Banco Central do Brasil, mensalizada, vigente na data de início do período de rendimento, nos demais casos. (Redação dada pela Lei nº 12.703, de 2012)

Segundo o Artigo 2º dessa mesma lei, TDR corresponde à distribuição pro rata diário da TR (taxa referencial) fixada para o mês corrente.

Podemos assim, conhecendo os critérios adotados para a rentabilidade e através dos conceitos já abordados, simular um investimento na caderneta de poupança e explorar algumas situações. As situações e sugestões de atividade a seguir buscam movimentar as habilidades (EF09MA05), (EM13MAT101), (EM13MAT104) e (66MAT203) (veja tabelas 1 e 2).

Sugestão de atividade 17: *Calcule o montante e a rentabilidade percentual de uma aplicação de R\$ 1000,00 na caderneta de poupança no dia 1 de abril de 2024 e resgate no dia 1 de maio de 2024, considerando os dados abaixo:*

- Taxa referencial (TR) acumulada no mês de abril/2024 = 0.1023%
- Taxa SELIC no mês de abril/2024 = 10,75% ao ano (a.a.)

Comentários sobre a resolução: Para estar de acordo com a lei que define a remuneração da poupança, devemos dividir essa resolução em duas etapas. No primeiro momento, devemos calcular a remuneração básica, que é definida pela porcentagem da Taxa referencial (TR). No segundo momento, devemos usar o montante gerado no primeiro momento, e usá-lo como valor base para o cálculo da remuneração adicional, que nessa situação, está definida como 0,5% ao

mês, de acordo com a lei.

Primeiro momento - Remuneração Básica:

$$\text{Remuneração Básica} = 1000 \cdot 0,001023 = 1,023$$

A remuneração básica foi de R\$ 1,023. Devemos somar essa remuneração ao capital aplicado inicialmente, para formar o valor base para o cálculo da remuneração adicional.

$$\text{Valor Base} = 1000 + 1,023 = 1001,023$$

Segundo momento - Remuneração Adicional:

$$\text{Remuneração Adicional} = 1001,023 \cdot 0,005 = 5,005115$$

A remuneração adicional foi de R\$ 5,005115. Para calcular o montante gerado, devemos somar o capital aplicado inicialmente, a remuneração básica e a remuneração adicional.

$$\text{Montante} = 1000 + 1,023 + 5,005115 = 1.006,028115$$

Para calcular a rentabilidade percentual, calculamos a variação percentual entre o montante e o capital aplicado, de acordo com o item 2.3.

$$\text{Rentabilidade percentual} = \frac{1006,028115}{1000} - 1 = 0,006028115 \cong 0,603\%$$

Assim, o montante gerado no período foi de R\$ 1.006,028115, representando uma rentabilidade percentual de aproximadamente 0,603%.

Sugestão de atividade 18: Calcule o montante e a rentabilidade percentual de uma aplicação de R\$ 1000,00 na caderneta de poupança no dia 1 de setembro de 2020 e resgate no dia 1 de outubro de 2020, considerando os dados abaixo:

- Taxa referencial (TR) acumulada no mês de setembro/2024 = 0%
- Taxa SELIC no mês de abril/2020 = 2% ao ano (a.a.)

Comentários sobre a resolução: Essa situação explora o caso em que a taxa Selic encontra-se abaixo de 8,5% ao ano, o que faz com que a remuneração adicional se limite a 70% dessa taxa Selic, de forma mensalizada.

Para realizar essa mensalização, tomaremos como referência ao percentual de rentabilidade anual e encontraremos uma taxa equivalente mensal, utilizando a fórmula de taxas equivalentes já abordada nesse trabalho na seção 2.4, e considerando $v_1 = v_2 = \dots = v_{12} = i$. Aqui também nos deparamos com a resolução de uma equação, onde mostraremos o passo a passo através do método de equações equivalentes.

$$(V + 1) = (1 + i)^n$$

$$(0,02 + 1) = (1 + i)^{12}$$

$$(1,02) = (1 + i)^{12}$$

$$\sqrt[12]{(1,02)} = \sqrt[12]{(1+i)^{12}}$$

(aplicamos a raiz de índice 12 em ambos os membros)

$$\sqrt[12]{1,02} = 1 + i$$

$$\sqrt[12]{1,02} - 1 = 1 + i - 1$$

(Somamos -1 em ambos os membros)

$$i = \sqrt[12]{1,02} - 1$$

$$i \cong 1,001652 - 1$$

$$i \cong 0,001652$$

$$i \cong 0,1652\%$$

Com esse cálculo preliminar realizado, seguiremos o mesmo procedimento da sugestão de atividade 17.

Primeiro momento - Remuneração Básica:

A remuneração básica é R\$ 0, já que a TR do mês de referência é 0%.

Primeiro momento - Remuneração Básica: (consideramos 70% da Meta Selic Mensalizada)

$$\text{Valor Base} = 1000$$

$$\text{Remuneração Adicional} = 1000 \cdot \frac{70}{100} \cdot 0,001652 = 1,1564$$

$$\text{Montante} = 1000 + 1,1564 = 1.001,1564$$

$$\text{Rentabilidade percentual} = \frac{1001,1564}{1000} - 1 = 0,0011564 \cong 0,116\%$$

Dessa forma, o montante gerado no período foi de R\$ 1.001,1564, representando uma rentabilidade percentual de aproximadamente 0,116%.

Como podemos observar, o cálculo da rentabilidade da poupança não se trata de algo trivial, pois exige que consideremos diversos fatores presentes na letra da lei. A necessidade de realizar esse cálculo para um número de períodos considerável pode vir a ser uma tarefa árdua, se forem feitos todos manualmente. Porém, esse é um dos casos em que a utilização das planilhas eletrônicas de cálculo melhor se aplica.

Iremos tomar duas situações que explorem as possibilidades da meta da taxa Selic estar maior ou menor que o ponto de inflexão existente nas regras da rentabilidade da poupança durante o período de 12 meses. Tomaremos os dados fornecidos pelo Banco Central do Brasil para a remuneração Básica (TR) e remuneração adicional, primeiramente tomando como referência a data de aplicação da situação inicial e depois considerando reinvestimento do montante gerado no primeiro dia de cada mês.

Sugestão de atividade 19: Calcule o montante e a rentabilidade percentual de uma aplicação de R\$ 500,00 realizado em 01 de janeiro de 2022 e resgate em 01 de janeiro de 2023. Considere os percentuais de remuneração descritos na tabela abaixo.

Tabela 7: Percentuais de remuneração da caderneta de poupança em relação à data base.

Sugestão de atividade 19.

Data Base	TR (%)	Remuneração Adicional (%)
01/01/2022	0,0605	0,5000
01/02/2022	0,0000	0,5000
01/03/2022	0,0971	0,5000
01/04/2022	0,0555	0,5000
01/05/2022	0,1663	0,5000
01/06/2022	0,1484	0,5000
01/07/2022	0,1631	0,5000
01/08/2022	0,2409	0,5000
01/09/2022	0,1805	0,5000
01/10/2022	0,1494	0,5000
01/11/2022	0,1507	0,5000
01/12/2022	0,2072	0,5000

Fonte: Banco Central do Brasil⁹.

Comentários sobre a Resolução: Esse período tem a característica de que a meta Selic esteve sempre acima de 8,5% ao ano, fazendo com que a remuneração adicional fosse fixa em 0,5% ao mês.

Agora organizaremos os dados em uma planilha eletrônica de forma a otimizar os procedimentos de cálculo.

- Na célula A1, digitar *Data de aplicação*;
- No intervalo de células de A2 a A13, transcrever as datas base presentes na tabela 7;
- Na célula B1, digitar *Valor aplicado*;
- Na célula B2, digitar 500;
- Na célula C1, digitar *(I) Remuneração Básica (TR)*;

⁹ Valores consultados através do site

<https://www3.bcb.gov.br/sgspub/consultarvalores/consultarValoresSeries.do?method=consultarValores>.

- No intervalo de células de C2 até C13, transcrever as porcentagens da TR presentes na tabela 7;
- Na célula D1, digitar *Juros (I)*. Nessa coluna, calcularemos apenas os juros referentes a porcentagem da remuneração básica;
- Na célula E1, digitar *(II) Remuneração Adicional*.
- No intervalo de células de E2 até E13, transcrever as porcentagens da remuneração adicional presentes na tabela 7;
- Na célula F1, digitar *Juros (II)*. Nessa coluna, calcularemos apenas os juros referentes a porcentagem da remuneração adicional;
- Na célula G1, digitar *Montante ao fim do Período*.

Optamos nesse caso por aumentar o número de casas decimais dos resultados dos cálculos. Para isso, selecionamos os intervalos B2 até B13, D2 até D13, e F2 até G13, clicamos no comando *Formatar como moeda*, e em seguida em *Aumentar o número de casas decimais*, ambos presentes no canto superior esquerdo da planilha, até que o número mostrado nesses intervalos ficasse com quatro casas decimais.

Figura 25: Disposição inicial das informações. Sugestão de atividade 19.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Data de aplicação	Valor aplicado	(I) Remuneração Básica (TR)	Juros (I)	(II) Remuneração Adicional	Juros (II)	Montante ao fim do Período
2	01/01/2022	R\$ 500,0000	0,0605%		0,5000%		
3	01/02/2022		0,0000%		0,5000%		
4	01/03/2022		0,0971%		0,5000%		
5	01/04/2022		0,0555%		0,5000%		
6	01/05/2022		0,1663%		0,5000%		
7	01/06/2022		0,1484%		0,5000%		
8	01/07/2022		0,1631%		0,5000%		
9	01/08/2022		0,2409%		0,5000%		
10	01/09/2022		0,1805%		0,5000%		
11	01/10/2022		0,1494%		0,5000%		
12	01/11/2022		0,1507%		0,5000%		
13	01/12/2022		0,2072%		0,5000%		

Fonte: Feito pelo autor

No próximo passo, iremos inserir as fórmulas para realização dos cálculos.

- Na célula D2, digitar $=B2*C2$;
- Na célula F2, digitar $=SOMA(B2;D2)*E2$;
- Na célula G2, digitar $=SOMA(B2;D2;F2)$. O montante ao final do primeiro período analisado foi calculado somando na célula G2 o valor aplicado inicialmente com as duas parcelas de juros (I) e (II).

Figura 26: Cálculo do montante ao final do primeiro período analisado. Sugestão de atividade 19.

G2 fx =SOMA(B2;D2;F2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Data de aplicação	Valor aplicado	(I) Remuneração Básica (TR)	Juros (I)	(II) Remuneração Adicional	Juros (II)	Montante ao fim do Período
2	01/01/2022	R\$ 500,0000	0,0605%	R\$ 0,3025	0,5000%	R\$ 2,5015	R\$ 502,8040
3	01/02/2022		0,0000%		0,5000%		
4	01/03/2022		0,0971%		0,5000%		
5	01/04/2022		0,0555%		0,5000%		
6	01/05/2022		0,1663%		0,5000%		
7	01/06/2022		0,1484%		0,5000%		
8	01/07/2022		0,1631%		0,5000%		
9	01/08/2022		0,2409%		0,5000%		
10	01/09/2022		0,1805%		0,5000%		
11	01/10/2022		0,1494%		0,5000%		
12	01/11/2022		0,1507%		0,5000%		
13	01/12/2022		0,2072%		0,5000%		

Fonte: Feito pelo autor

Em seguida, faremos o processo de automatização dos cálculos para as demais células.

- Na célula B3, digitar =G2. Esse argumento irá repetir automaticamente o montante gerado no primeiro período como o valor aplicado no segundo período.
- Copiar a célula B3, e colar no intervalo de células de B4 até B13, conforme procedimento já comentado em problemas anteriores;
- Copiar a célula D2, e colar no intervalo de células D3 até D13;
- Copiar a célula F2, e colar no intervalo de células F3 até F13;
- Copiar a célula F2, e colar no intervalo de células F3 até F13;

Dessa forma, os cálculos serão realizados já levando em consideração os dados da respectiva linha do período que está sendo analisado.

Figura 27: Aplicação das fórmulas utilizadas nos demais períodos. Sugestão de atividade 19.

B3 $\text{fx} = G2$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Data de aplicação	Valor aplicado	(I) Remuneração Básica (TR)	Juros (I)	(II) Remuneração Adicional	Juros (II)	Montante ao fim do Período
2	01/01/2022	R\$ 500,0000	0,0605%	R\$ 0,3025	0,5000%	R\$ 2,5015	R\$ 502,8040
3	01/02/2022	R\$ 502,8040	0,0000%	R\$ 0,0000	0,5000%	R\$ 2,5140	R\$ 505,3180
4	01/03/2022	R\$ 505,3180	0,0971%	R\$ 0,4907	0,5000%	R\$ 2,5290	R\$ 508,3377
5	01/04/2022	R\$ 508,3377	0,0555%	R\$ 0,2821	0,5000%	R\$ 2,5431	R\$ 511,1630
6	01/05/2022	R\$ 511,1630	0,1663%	R\$ 0,8501	0,5000%	R\$ 2,5601	R\$ 514,5731
7	01/06/2022	R\$ 514,5731	0,1484%	R\$ 0,7636	0,5000%	R\$ 2,5767	R\$ 517,9134
8	01/07/2022	R\$ 517,9134	0,1631%	R\$ 0,8447	0,5000%	R\$ 2,5938	R\$ 521,3519
9	01/08/2022	R\$ 521,3519	0,2409%	R\$ 1,2559	0,5000%	R\$ 2,6130	R\$ 525,2209
10	01/09/2022	R\$ 525,2209	0,1805%	R\$ 0,9480	0,5000%	R\$ 2,6308	R\$ 528,7998
11	01/10/2022	R\$ 528,7998	0,1494%	R\$ 0,7900	0,5000%	R\$ 2,6479	R\$ 532,2377
12	01/11/2022	R\$ 532,2377	0,1507%	R\$ 0,8021	0,5000%	R\$ 2,6652	R\$ 535,7050
13	01/12/2022	R\$ 535,7050	0,2072%	R\$ 1,1100	0,5000%	R\$ 2,6841	R\$ 539,4991

Fonte: Feito pelo autor.

Tendo a informação do montante ao final dos doze meses, podemos calcular a rentabilidade percentual anual.

- Na célula A15, digitar *Rentabilidade percentual anual*;
- Na célula B15, clicar no comando *Formatar como porcentagem*, e em seguida digitar $=DIVIDE(G13;B2)-1$.

Figura 28: Rentabilidade percentual anual. Sugestão de atividade 19.

B15 $\text{fx} = DIVIDE(G13;B2) - 1$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Data de aplicação	Valor aplicado	(I) Remuneração Básica (TR)	Juros (I)	(II) Remuneração Adicional	Juros (II)	Montante ao fim do Período
2	01/01/2022	R\$ 500,0000	0,0605%	R\$ 0,3025	0,5000%	R\$ 2,5015	R\$ 502,8040
3	01/02/2022	R\$ 502,8040	0,0000%	R\$ 0,0000	0,5000%	R\$ 2,5140	R\$ 505,3180
4	01/03/2022	R\$ 505,3180	0,0971%	R\$ 0,4907	0,5000%	R\$ 2,5290	R\$ 508,3377
5	01/04/2022	R\$ 508,3377	0,0555%	R\$ 0,2821	0,5000%	R\$ 2,5431	R\$ 511,1630
6	01/05/2022	R\$ 511,1630	0,1663%	R\$ 0,8501	0,5000%	R\$ 2,5601	R\$ 514,5731
7	01/06/2022	R\$ 514,5731	0,1484%	R\$ 0,7636	0,5000%	R\$ 2,5767	R\$ 517,9134
8	01/07/2022	R\$ 517,9134	0,1631%	R\$ 0,8447	0,5000%	R\$ 2,5938	R\$ 521,3519
9	01/08/2022	R\$ 521,3519	0,2409%	R\$ 1,2559	0,5000%	R\$ 2,6130	R\$ 525,2209
10	01/09/2022	R\$ 525,2209	0,1805%	R\$ 0,9480	0,5000%	R\$ 2,6308	R\$ 528,7998
11	01/10/2022	R\$ 528,7998	0,1494%	R\$ 0,7900	0,5000%	R\$ 2,6479	R\$ 532,2377
12	01/11/2022	R\$ 532,2377	0,1507%	R\$ 0,8021	0,5000%	R\$ 2,6652	R\$ 535,7050
13	01/12/2022	R\$ 535,7050	0,2072%	R\$ 1,1100	0,5000%	R\$ 2,6841	R\$ 539,4991
14							
15	Rentabilidade percentual anual	7,8998%					

Fonte: Feito pelo autor.

O montante gerado no período foi de R\$ 539,4991, representando uma rentabilidade percentual de aproximadamente 7,8998%.

Vale salientar que, para calcular a rentabilidade percentual anual, bastaria calcularmos todos os aumentos sucessivos que ocorrem. Por exemplo, incide primeiro no capital, a porcentagem da remuneração básica do primeiro período, depois a porcentagem da remuneração adicional do primeiro período, depois a porcentagem da remuneração básica do segundo período, e assim sucessivamente até a última porcentagem da remuneração adicional. Porém, da forma que foi delineada a resolução, conseguimos ver detalhadamente a rentabilidade após cada período, e os juros gerados em cada etapa, o que consideramos que tem potencial de ser um agregamento didático, quando a proposta estiver sendo aplicada com os estudantes.

Sugestão de atividade 20: *Calcule o montante e a rentabilidade percentual de uma aplicação de R\$ 800,00 realizado em 01 de janeiro de 2020 e resgate em 01 de janeiro de 2021. Considere os percentuais de remuneração descritos na tabela abaixo.*

Tabela 8: Percentuais de remuneração da caderneta de poupança em relação à data base.

Sugestão de atividade 20.

Data Base	TR (%)	Remuneração Adicional (%)
01/01/2020	0,0000	0,2588
01/02/2020	0,0000	0,2588
01/03/2020	0,0000	0,2446
01/04/2020	0,0000	0,2162
01/05/2020	0,0000	0,2162
01/06/2020	0,0000	0,1733
01/07/2020	0,0000	0,1303
01/08/2020	0,0000	0,1303
01/09/2020	0,0000	0,1159
01/10/2020	0,0000	0,1159
01/11/2020	0,0000	0,1159
01/12/2020	0,0000	0,1159

Fonte: Banco Central do Brasil¹⁰.

Nesse contexto histórico, a meta Selic estava abaixo de 8,5% ao ano, tornando a

¹⁰ Valores consultados através do site

<https://www3.bcb.gov.br/sgspub/consultarvalores/consultarValoresSeries.do?method=consultarValores>.

porcentagem da remuneração adicional dependente dessa meta Selic.

Será necessário apenas alterar as premissas relacionadas a porcentagem e a valor aplicado. A organização da tabela, as fórmulas e os argumentos utilizados podem ser aproveitados para qualquer situação similar.

Figura 29: Aplicação da tabela criada na sugestão de atividade 19 para o contexto da sugestão de atividade 20.

B15 fx =DIVIDE(G13;B2) -1

	A	B	C	D	E	F	G
1	Data de aplicação	Valor aplicado	(I) Remuneração Básica (TR)	Juros (I)	(II) Remuneração Adicional	Juros (II)	Montante ao fim do Período
2	01/01/2022	R\$ 800,0000	0,0000%	R\$ 0,0000	0,2588%	R\$ 2,0704	R\$ 802,0704
3	01/02/2022	R\$ 802,0704	0,0000%	R\$ 0,0000	0,2588%	R\$ 2,0758	R\$ 804,1462
4	01/03/2022	R\$ 804,1462	0,0000%	R\$ 0,0000	0,2446%	R\$ 1,9669	R\$ 806,1131
5	01/04/2022	R\$ 806,1131	0,0000%	R\$ 0,0000	0,2162%	R\$ 1,7428	R\$ 807,8559
6	01/05/2022	R\$ 807,8559	0,0000%	R\$ 0,0000	0,2162%	R\$ 1,7466	R\$ 809,6025
7	01/06/2022	R\$ 809,6025	0,0000%	R\$ 0,0000	0,1733%	R\$ 1,4030	R\$ 811,0055
8	01/07/2022	R\$ 811,0055	0,0000%	R\$ 0,0000	0,1303%	R\$ 1,0567	R\$ 812,0623
9	01/08/2022	R\$ 812,0623	0,0000%	R\$ 0,0000	0,1303%	R\$ 1,0581	R\$ 813,1204
10	01/09/2022	R\$ 813,1204	0,0000%	R\$ 0,0000	0,1159%	R\$ 0,9424	R\$ 814,0628
11	01/10/2022	R\$ 814,0628	0,0000%	R\$ 0,0000	0,1159%	R\$ 0,9435	R\$ 815,0063
12	01/11/2022	R\$ 815,0063	0,0000%	R\$ 0,0000	0,1159%	R\$ 0,9446	R\$ 815,9509
13	01/12/2022	R\$ 815,9509	0,0000%	R\$ 0,0000	0,1159%	R\$ 0,9457	R\$ 816,8966
14							
15	Remuneração efetiva anual	2,1121%					

Fonte: Feito pelo autor.

Assim, o montante gerado foi de R\$ 816,8966, representando uma rentabilidade percentual aproximada de 2,1121%.

4.3 Relação entre Rentabilidade e Inflação

A primeiro momento, podemos conjecturar o caso de um estudante que, ao analisarmos opções de investimentos, deduz a ideia de que o melhor investimento é sempre aquele que retorna uma porcentagem maior em relação ao capital investido. Porém, devemos salientar que tais valores e porcentagens mencionados tratam-se de um retorno bruto, denominado de rentabilidade nominal, e ao observarmos os investimentos com a perspectiva de preservação do poder de compra do capital, essa informação por si só não é o suficiente.

Vemos a importância de salientar esse ponto de vista para que o estudante tenha em mãos a ciência de todas as premissas básicas envolvidas, uma vez que a sua tomada de decisão

sobre fazer ou não um investimento e sob quais condições esse investimento será realizado afetará drasticamente em seu contexto pessoal, podendo ser o ponto de inflexão entre a realização ou não de um objetivo ou um projeto planejado para sua vida. Dessa forma, acreditamos que por ênfase nessa importância é essencial para despertar o empenho e o senso crítico do estudante.

Por exemplo, em uma situação econômica em que incide inflação nos preços dos bens e serviços, o capital que está sendo remunerado por um investimento arbitrário, também está sendo corroído por esta inflação. Um exemplo que ajudaria a ilustrar essa situação é que, se um indivíduo que possui R\$ 100,00 e pensando em comprar um bem que custa R\$ 101,00, investe em uma aplicação que retorna um rendimento nominal de 10% ao ano, porém se dá conta que a inflação que incidiu sobre o bem nesse ano também foi de 10%, teríamos a situação em que, ao final do período, o indivíduo possui R\$ 110,00 e o bem agora custa R\$ 111,10.

Por isso, devemos ter uma forma de mensurar a efetividade de um investimento em que seja levado em consideração também a inflação do período.

Seja R_r = Taxa de Rentabilidade real, R_n = Taxa de Rentabilidade nominal, I = Taxa de inflação e P = Investimento.

Primeiramente, vamos considerar um investimento inicial P , aplicado a uma taxa R_n por um determinado período. Temos que,

$$P_{\text{rentabilidade nominal}} = P + P \cdot R_n$$

$$P_{\text{rentabilidade nominal}} = P \cdot (1 + R_n)$$

Para encontrarmos o valor final do investimento em termos reais, descontamos a taxa de inflação do valor final em termos nominais, ou seja, dividimos por $1 + I$,

$$P_{\text{rentabilidade real}} = \frac{P_{\text{rentabilidade nominal}}}{1 + I}$$

$$P_{\text{rentabilidade real}} = \frac{P \cdot (1 + R_n)}{1 + I}$$

Por outro lado, sendo dada a Taxa de rentabilidade real R_r , podemos calcular o valor final do investimento em termos reais fazendo,

$$P_{\text{rentabilidade real}} = P \cdot (1 + R_r)$$

Agora, isolando R_r na equação, teremos,

$$\frac{P_{\text{rentabilidade real}}}{P} = (1 + R_r)$$

$$R_r = \frac{P_{\text{rentabilidade real}}}{P} - 1$$

Substituindo $P_{\text{rentabilidade real}}$ nessa equação, teremos,

$$R_r = \frac{\frac{P \cdot (1 + R_n)}{1 + I}}{P} - 1$$

$$R_r = \frac{P \cdot (1 + R_n)}{1 + I} \cdot \frac{1}{P} - 1$$

$$R_r = \frac{1 + R_n}{1 + I} - 1$$

Agora, iremos aplicar essa fórmula para determinar a rentabilidade real, sendo dada a rentabilidade nominal da poupança já trabalhada em situações anteriores.

Rentabilidade real – Sugestão de atividade 19:

Ano: 2022

Remuneração nominal anual da poupança: 7,8998%

Inflação anual: 5,79%

(Fonte: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/36051-inflacao-sobe-0-62-em-dezembro-e-fecha-2022-com-alta-de-5-79>)

$$R_r = \frac{1 + 0,078998}{1 + 0,0579} - 1$$

$$R_r = \frac{1,078998}{1,0579} - 1$$

$$R_r = \frac{1,078998}{1,0579} - 1$$

$$R_r \cong 1,019943 - 1$$

$$R_r \cong 0,019943 = \mathbf{1,9943\%}$$

A aplicação financeira teve uma rentabilidade real positiva de 1,9943% ao ano.

Rentabilidade real – Sugestão de atividade 20:

Ano: 2020

Remuneração nominal anual da poupança: 2,1121%

Inflação anual: 4,52%

(Fonte: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/29871-inflacao-acelera-em-dezembro-e-chega-a-4-52-em-2020-a-maior-alta-desde-2016>)

$$R_r = \frac{1 + 0,021121}{1 + 0,0452} - 1$$

$$R_r = \frac{1,021121}{1,0452} - 1$$

$$R_r = \frac{1,021121}{1,0452} - 1$$

$$R_r \cong 0,976962 - 1$$

$$R_r \cong 0,976962 - 1$$

$$R_r \cong -0,023038 = -2,3038\%$$

A aplicação financeira teve uma rentabilidade real negativa de 2,3038% ao ano.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Notamos que a Base Nacional Comum Curricular é o pilar central da política educacional adotada no Brasil, que atualiza a visão das principais orientações e diretrizes curriculares através de uma escrita de fácil compreensão, objetivando uma educação que leve ao exercício pleno da cidadania. Nesse importante documento, pudemos constatar o espaço em destaque que ocupa a matemática financeira e a utilização de novas tecnologias na educação. Porém, apesar da evidência dada no currículo para esse ramo da matemática, e desse documento estar homologado em sua versão completa desde 2018, podemos ainda nos dias de hoje observar resultados negativos em testes de proficiência, e notícias negativas em relação a endividamento familiar, inadimplências, e golpes financeiros que prejudicam muitas pessoas, e que poderiam ser evitados com um mínimo de educação financeira.

Esses desafios trazem a percepção ao educador de que algo mais pode ser feito, e que uma maior ênfase precisa ser dada nos pontos de atenção que se mostraram protuberantes ao longo do tempo desde a intenção inicial da BNCC. Foi com esse objetivo que buscamos o tema desse trabalho, pois vemos a necessidade de abordar a matemática financeira de forma mais enfática nos ambientes escolares, não só mostrando técnicas de cálculo isoladas, mas buscando trazer o tema à realidade do estudante e agregando os conceitos de forma a buscar um ensino mais integral e uma formação geral básica para esse ramo da matemática.

Ao comentar os conceitos e sugerir atividades com o intuito de conectar o ensino da matemática financeira com o cotidiano, buscamos contribuir com a formação de professores que venham a tomar esse trabalho como orientação, não tomando como uma fórmula, mas como um norte de uma forma de abordar esse tema, estando em consonância com a BNCC. Acreditamos também que o contato do jovem com planilhas eletrônicas, e a exploração de suas funções e potencialidades já no período escolar é importante, pois irá fornecê-lo familiaridade e os primeiros passos com tecnologias e com a lógica básica que está presente e é necessária nesse tipo de ambiente, e nos ambientes computacionais e de programação.

Em relação a trabalhos futuros, objetivamos aplicar o conhecimento produzido nesse trabalho em aulas com turmas do ensino médio, e posteriormente, formalizar através do método científico, o estudo e pesquisa de algumas dessas seções visando publicações de resultados em congressos e revistas especializadas.

REFERÊNCIAS

B3. **Índice Ibovespa – estatísticas históricas**. Disponível em:

https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-ibovespa-estatisticas-historicas.htm. Acesso em: 11 nov. 2024.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Consultar valores séries temporais**. Banco Central do Brasil, 2024. Disponível em:

<https://www3.bcb.gov.br/sgspub/consultarvalores/consultarValoresSeries.do?method=consultarValores>. Acesso em: 11 nov. 2024

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Metas para a inflação**. 2024. Disponível em:

<https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/metainflacao>. Acesso em: 17 dez. 2024.

BBC. Braiscompany: como cidade na Paraíba pode ter caído em golpe de milhões com criptomoedas. *UOL Tilt*, 11 fev. 2023. Disponível em:

<https://www.uol.com.br/tilt/noticias/bbc/2023/02/11/braiscompany-como-cidade-na-paraiba-pode-ter-caido-em-golpe-de-milhoes-com-criptomoedas.htm>. Acesso em: 13 out. 2024.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 22 ago. 2024.

BRASIL. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Matriz de avaliação de Matemática: PISA 2012**. Brasília: INEP, 2013. Disponível em:

https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliao_matematica.pdf. Acesso em: 11 nov. 2024.

BRASIL. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **PISA 2022: resultados Brasil**. Brasília: INEP, 2022.

Disponível em:

https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2022/pisa_2022_brazil_prt.pdf. Acesso em: 11 nov. 2024.

BRASIL. Lei nº 8.177, de 1 de março de 1991. Dispõe sobre as medidas de política econômica, especialmente sobre as operações do sistema financeiro nacional e dá outras providências. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, 4 mar. 1991.

ESTADÃO CONTEÚDO. Endividamento das famílias sobe a 78,8% em maio e inadimplência estabiliza em 28,6%, diz CNC. **UOL Economia**, 10 jun. 2024. Disponível em: <https://economia.uol.com.br/noticias/estadao-conteudo/2024/06/10/endividamento-das-familias-sobe-a-788-em-maio-e-inadimplencia-estabiliza-em-286-diz-cnc.htm>. Acesso em: 13 out. 2024.

FERREIRA, Juliana Cezario. **A importância da educação financeira pessoal para a qualidade de vida**. *Caderno de Administração: Revista do Departamento de Administração da FEA*, São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v. 1, 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/caadm/article/view/33268>. Acesso em: 11 nov. 2024.

FILHO, Miguel Luis Folchetti. **Uma proposta de atividades de educação financeira no ensino médio**. 2018. 168f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, São Paulo, 2018. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=4027&id2=160980156. Acesso em: 13 out. 2024.

HOBOLD, Janete. **Resolução de problemas de matemática financeira com planilhas eletrônicas**. 2016. 48f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Amazonas, UFAM, 2016. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=3306&id2=81228. Acesso em: 13 out. 2024.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David Mauro. **Fundamentos de matemática elementar, 11: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MORAN, Carlos A. Azabache; WITTE, Gilson. **A conceitualização da inflação e uma análise dos planos econômicos brasileiros de 1970-1990**. Teoria e Evidência Econômica, Passo Fundo, ano 1, n. 1, p. 119-141, mar. 1993. Disponível em: <https://seer.upf.br/index.php/rtee/article/view/4208/271>. Acesso em: 11 nov. 2024.

OGLIARI, Lucas Nunes. **A matemática no cotidiano e na sociedade: perspectivas do aluno do ensino médio**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <https://tede2.pucrs.br/tede2/handle/tede/3308>. Acesso em: 11 nov. 2024.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. 152 p.

PINHEIRO, Mirelle; CARONE, Carlos. **Braiscompany: PF prende casal que ganhou R\$ 370 milhões com pirâmide**. Metrôpoles, Brasília, 1 mar. 2024. Disponível em: <https://www.metropoles.com/distrito-federal/na-mira/braiscompany-pf-prende-casal-que-ganhou-r-370-milhoes-com-piramide>. Acesso em: 17 dez. 2024.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Resolução de problemas nas aulas de Matemática**. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p.299-311, mai. 2012. Disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_mauro.pdf. Acesso em: 13 out. 2024.

SANTOS, Daniel Francisco dos. **Uso de planilhas eletrônicas como ferramentas de apoio ao ensino de matemática**. 2017. 60f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, Florestal, MG, 2017. Disponível em: https://sca.profmt-sbm.org.br/profmt_tcc.php?id1=3733&id2=150940305. Acesso em: 13 out. 2024.

SERASA. **Alíquota: o que é, como funciona e quais os tipos existentes**. Serasa Blog, 2023.

Disponível em: <https://www.serasa.com.br/blog/aliquota/>. Acesso em: 13 out. 2024.

SERASA. **Nova alta da inadimplência reforça a importância de combater o endividamento, mostra o Mapa da Serasa.** *Serasa*, [s.d.]. Disponível em: <https://www.serasa.com.br/imprensa/nova-alta-da-inadimplencia-reforca-a-importancia-de-combater-o-endividamento-mostra-o-mapa-da-serasa/>. Acesso em: 13 out. 2024.

SILVA, Maicon Herverton Lino Ferreira da. **Planilha Eletrônica**. Pernambuco: Secretaria de Educação, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar: matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013. v. 2.

TREVIZAN, Karina. **Em 20 anos, quantidade de gasolina que salário mínimo pode comprar aumenta 57%**. Investnews, 15 de março de 2021. Disponível em: <https://investnews.com.br/economia/em-20-anos-quantidade-de-gasolina-que-salario-minimo-pode-comprar-aumenta-57/>. Acesso em: 11 nov. 2024.

ANEXO: PRODUTO EDUCACIONAL



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT



PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O TRABALHO COM
JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA,
UTILIZANDO PLANILHAS ELETRÔNICAS COMO RECURSO DIDÁTICO

por

Josivan Barbalho da Silva

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT



PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O TRABALHO COM
JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA,
UTILIZANDO PLANILHAS ELETRÔNICAS COMO RECURSO DIDÁTICO

por

Josivan Barbalho da Silva

Sob orientação do

Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto

Recurso Educacional decorrente da Dissertação do
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional – PROFMAT/CCEN/UFPB, como
requisito parcial para a obtenção do título de
Mestre em Matemática.

Fevereiro/2025
João Pessoa – PB

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	87
2	ATIVIDADE 1.....	88
3	ATIVIDADE 2.....	94
4	ATIVIDADE 3.....	99
	REFERÊNCIAS.....	103

1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular estabelece diretrizes e normativas comuns para os currículos das escolas da educação básica, desde a educação infantil até o ensino médio, dessa forma, “explicita as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver e expressa, portanto, a igualdade educacional sobre a qual as singularidades devem ser consideradas e atendidas” (BRASIL, 2018, p.15).

Uma das vertentes que possuem destaque no ensino de matemática na educação básica, preconizado pela BNCC é a utilização de tecnologias como recurso pedagógico.

a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos (Brasil, 2018, p. 528).

A presente sequência didática foi produzida com base na Dissertação de mestrado profissional em Matemática – PROFMAT do autor Josivan Barbalho da Silva, que teve a orientação do Professor Doutor José Laudelino de Menezes Neto, na qual apresentamos atividades que integram conteúdos de matemática financeira com o uso de planilhas eletrônicas como recurso didático. Para Zabala (1998, p. 18 apud Costa; Gonçalves, 2022, p. 366), sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelo professor como pelos alunos”. O objetivo é oferecer aos professores estratégias dinâmicas e interativas para agregar aos conceitos matemáticos, através da utilização de planilhas eletrônicas, explorando seu potencial pedagógico e buscando facilitar a compreensão dos conceitos da matemática financeira.

As propostas incluem a resolução de problemas práticos e o uso de situações do cotidiano, permitindo aos estudantes uma aprendizagem mais contextualizada e com significado. Segundo Ravagnani e Marques (2017, p. 38 apud Barros, 2021, p. 13),

[...] a utilização da resolução de problemas é justificada enquanto meio de transformação de conhecimentos matemáticos abstratos em conhecimentos que dialoga com as práticas sociais e que fomenta o desenvolvimento cognitivo do indivíduo.

Além disso, a metodologia de resolução de problemas alinhada ao uso das planilhas eletrônicas pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades analíticas, auxiliando na interpretação de dados e na tomada de decisões financeiras de forma mais eficiente.

2 ATIVIDADE 1

Tema: Porcentagem e Juros

Indicação do Ano: 2ª série do Ensino Médio

Duração Estimada: 2 aulas (1 hora e 40 minutos).

OBJETIVOS:

Para o professor:

- Expor aos estudantes os conceitos de Juros;
- Trabalhar o cálculo de porcentagem em situações contextualizadas envolvendo opções de investimento e tomada de decisão do investidor;
- Determinar, junto aos estudantes, as fórmulas que regem o cálculo dos Juros Simples e Juros compostos através de inferências de conceitos e procedimentos de cálculo da porcentagem já conhecidos previamente;
- Analisar o comportamento dos valores de Juros Simples e Juros compostos ao longo do tempo, utilizando como recurso uma planilha eletrônica de cálculo;
- Resolver situações problema.

CONTEÚDOS:

- Porcentagem: cálculo da porcentagem de um valor; aumentos sucessivos;
- Juros Simples e Juros Compostos: conceitos, fórmula, cálculo dos juros e montante.

ESTRATÉGIAS DE ENSINO:

No primeiro momento, o professor deverá explicar sobre os significados dos termos importantes utilizados na matemática financeira, como capital, montante, juro, taxa de juros e tempo.

Capital (c): quantia em dinheiro investida ou emprestada.

Juro (j): rendimento, acréscimo ou ‘aluguel’ pago pelo investimento ou empréstimo de certa quantia.

Taxa de juro (i): porcentagem que se recebe de rendimento em um investimento ou que se paga pelo empréstimo de certa quantia.

Tempo (t): período em que se investe ou empresta certa quantia, podendo ser dado em dias, meses, anos, etc.

Montante (M): soma do capital com o juro, podendo ser indicado por $M = c + j$. (Souza, 2013, p. 72).

Em particular, é importante deixar claro o conceito de juro, como sendo a remuneração de um capital empregado, sendo estabelecidos um uma determinada taxa que incidirá sobre esse capital e o período de tempo em que vigorará esses termos.

Também é importante explicitar as características e diferenças entre o juro simples e o juro composto.

Será dada uma situação problema para o estudante analisar e responder.

Um investidor em posse de um capital de R\$ 50000,00, decide aplicá-lo em um investimento e se depara com duas opções:

1) Banco Santo André: “Investimento com valores iguais ou superiores a 50 mil reais, aplicamos uma taxa de juro simples de 0,51% ao mês”

2) Banco Ijaú: “Investimento com valores iguais ou superiores a 50 mil reais, aplicamos uma taxa de juro composto de 0,50% ao mês”

A primeiro momento, o investidor realizará esse investimento por um período de 6 meses. Qual das duas opções é a mais vantajosa?

Para auxiliar na melhor compreensão dos conceitos de juros simples e compostos, o professor disponibilizará aos estudantes uma tabela semipreenchida, com a intenção de reforçar as características e diferenças dos juros simples e juros compostos, como o capital, que nos juros simples permanece sempre o mesmo a cada período, enquanto nos juros compostos, o capital de um período é somado com os juros desse período para assim formar o capital que será tomado como referência no período posterior. Os estudantes preencherão as informações que faltam nas tabelas abaixo, que são referentes a cada uma das opções de investimento, realizando cálculos básicos de porcentagem, conhecimento que deve ser pre-requisito para essa atividade:

Tabela 1: Rentabilidade do Banco Santo André

Banco Santo André 0,51% a.m. (Juros Simples)			
	Capital (c)	Juros (j)	Montante (c + j)
1º Mês	50000	255	50255
2º Mês	50000		50510
3º Mês			
4º Mês		255	
5º Mês			
6º Mês			
Total			51530

Fonte: Feito pelo autor

Na tabela 1, iniciamos o primeiro período com o capital de 50000, e devemos calcular 0,51% desse capital para determinar os juros gerados, onde o método de cálculo pode ficar a critério do estudante. Como sugestão, Podemos fazer

$$50000 \cdot 0,0051 = 255$$

Como os juros gerados são de 255 reais, o montante ao final do primeiro período é de 50255. O capital a ser considerado para o cálculo dos juros no segundo período também é de 50000, já que tratamos nesse caso de juros simples. Da mesma forma, os juros gerados nesse período serão de 255, o que faz com que o montante ao fim do Segundo período seja de

$$50255 + 255 = 50510$$

O restante da tabela será preenchido de forma análoga.

Tabela 2: Rentabilidade do Banco Ijaú

Banco Ijaú 0,50% a.m. (Juros Compostos)			
	Capital (c)	Juros (j)	Montante (c + j)
1º Mês	50000	250	50250
2º Mês	50250		
3º Mês			
4º Mês		253,77	
5º Mês			
6º Mês			
Total			

Fonte: Feito pelo autor.

Na Tabela 2, começamos o primeiro período com um capital de 50000 e precisamos calcular 0,5% desse valor para determinar os juros gerados, ficando a escolha do método de cálculo a critério do estudante. Como sugestão, podemos realizar o cálculo

$$50000 \cdot 0,005 = 250$$

Os juros gerados são de 250, o que faz com que o montante ao final do primeiro período seja de 50250. O regime de juros dessa situação, por se tratar de juros compostos, faz com que o montante do primeiro período seja considerado como base de cálculo para determinar os juros do segundo período. Dessa forma, o cálculo a ser feito a seguir é determinar 0,5% de 50250

$$50250 \cdot 0,005 = 251,25$$

Com isso, o montante ao fim do segundo período é de

$$50250 + 251,25 = 50501,25$$

Seguindo o padrão do regime de juros compostos, o montante ao final do segundo período será usado como base de cálculo para os juros do terceiro período. O restante da tabela pode ser preenchido de forma análoga, sendo que os juros do quarto mês foi dado na tabela, para que o estudante possa ver se está indo no caminho certo e para que perceba que deve arredondar os valores para duas casas decimais para facilitar os cálculos.

A partir dos dados da tabela, dos conceitos e procedimentos de cálculo da porcentagem, com a participação dos estudantes, de forma dialogada, poderão ser feitas as inferências necessárias para chegar na fórmula do juro simples e do juro composto.

Caso 1: Note que, para determinar o valor do juro, multiplicamos o valor do investimento pela taxa de juro e pelo tempo de aplicação, ou seja:

$$j = c \cdot i \cdot t$$

Para calcular o montante, como vimos, fazemos

$$M = c + j$$

Como " $j = c \cdot i \cdot t$ ", temos que, a fórmula dos juros simples é

$$M = c + c \cdot i \cdot t$$

$$\mathbf{M = c \cdot (1 + i \cdot t)}$$

Caso 2: Nos juros compostos, o valor do capital é utilizado para calcular o montante do primeiro período. Depois disso, o montante obtido é utilizado como sendo a base de cálculo (capital) do período posterior. Dessa forma, temos

$$1^{\text{º}}\text{período} \rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i)$$

$$2^{\text{º}}\text{período} \rightarrow M_2 = M_1 \cdot (1 + i)$$

$$M_2 = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$$

$$M_2 = C \cdot (1 + i)^2$$

$$3^{\text{º}} \text{período} \rightarrow M_3 = M_2 \cdot (1 + i)$$

$$M_3 = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$$

$$M_3 = C \cdot (1 + i)^3$$

⋮

$$t - \text{ésimo período (fórmula dos juros compostos)} \rightarrow M_t = C \cdot (1 + i)^t$$

Os estudantes podem refazer o problema, agora utilizando as fórmulas, para se familiarizarem e validarem os resultados da tabela.

Banco Santo André

Tempo: 6 meses

Taxa de Juros: 0,51% ao mês (Juros simples)

Capital: 50000

Queremos encontrar o montante.

$$M = 50000 \cdot (1 + 0,0051 \cdot 6)$$

$$M = 50000 \cdot (1 + 0,0306)$$

$$M = 50000 \cdot (1,0306)$$

$$M = 51530$$

Banco Ijaú

Tempo: 6 meses

Taxa de Juros: 0,50% ao mês (Juros compostos)

Capital: 50000

Queremos encontrar o montante.

$$M = 50000 \cdot (1 + 0,005)^6$$

$$M = 50000 \cdot (1,005)^6$$

$$M \cong 50000 \cdot (1,030378)$$

$$M = 51518,90$$

Os estudantes nesse momento deverão constatar que, nessa situação específica, o investimento no Banco Santo André, que aplicava um regime de juros simples, é a melhor opção de investimento.

Após essa constatação, o professor poderá discutir mais algumas situações com os estudantes em relação a essa situação problema, como:

a) Qual seria a opção mais vantajosa se o capital fosse maior que 50000? E se fosse menor?

Resposta: Se o capital aplicado for sempre o mesmo nas duas opções de investimento, a melhor opção continuará a mesma. Pode ser facilmente comprovado aplicando-se a fórmula e mudando o valor do capital.

b) Qual seria a opção mais vantajosa se ambas as opções de investimento tivessem a mesma taxa de juros, mas mantendo o regime de juros atual?

Resposta: Pela característica de cumulatividade dos juros compostos, onde a base de cálculo para os juros vai aumentando ao decorrer dos períodos, o investimento no Banco Ijaú seria a melhor opção tomando-se essa hipótese.

c) Mantendo as mesmas premissas iniciais e comparando os montantes ao fim de cada período, o que aconteceria ao realizarmos esse investimento em um período maior de tempo?

Resposta: Da mesma forma, Pela característica de cumulatividade dos juros compostos, onde a base de cálculo para os juros vai aumentando ao decorrer dos períodos, para um tempo suficientemente grande, o investimento no Banco Ijaú tende a ser a melhor opção. Esse problema também pode ser facilmente testado pelos estudantes aplicando-se as formulas.

AVALIAÇÃO

- Será realizada ao longo da aula de forma contínua, observando a participação e o desenvolvimento de cada estudante.

3 ATIVIDADE 2

Tema: Juros Simples e Juros Compostos

Indicação do Ano: 2ª série do Ensino Médio

Duração Estimada: 3 aulas (2 horas e 30 minutos).

OBJETIVOS:

Para o Professor:

- Propor e orientar em situações problema, utilizando como recurso uma planilha eletrônica de cálculo;

Para o Estudante:

- Aplicar fórmulas matemáticas de juros simples e juros compostos em uma planilha eletrônica, utilizando recursos como funções e tabelas para organizar e automatizar os cálculos.
- Analisar o comportamento dos valores de Juros Simples e Juros compostos ao longo do tempo através dos dados produzidos na tabela e do gráfico gerado pela planilha eletrônica.

CONTEÚDOS:

- Juros Simples e Juros Compostos: conceitos, fórmula, cálculo dos juros e montante;
- Noções de função afim e exponencial.

ESTRATÉGIAS DE ENSINO:

No primeiro momento, os estudantes serão apresentados a mais um questionamento, que será respondido com a utilização da planilha eletrônica.

“Qual a opção mais vantajosa para 12 meses? E para 18 meses? E para 24 meses?”

Para essa parte da sequência, os estudantes deverão ser direcionados para um ambiente que possua o acesso a computadores, e em específico, acesso a um software de planilha eletrônica, sendo como sugestão, o Planilhas Google.

O professor deverá mostrar aos estudantes os comandos básicos necessários para desenvolver essa sequência, de acordo com a tabela 3.

Tabela 3: Comandos básicos da planilha eletrônica a serem utilizados na sequência didática.

Operações Básicas	
$+$ Ou =Soma(valor1;valor2;...)	Soma
$-$ Ou =Minus(valor1;valor2)	Subtração
$*$ Ou =Mult(valor1;valor2;...)	Multiplicação
$/$ Ou =Divide(dividendo;divisor)	Divisão
$\wedge$ Ou =Potência(base;expoente)	Potência
Outros Comandos	
\$	É inserido antes da letra que identifica a coluna e/ou antes do número que indica a linha, para que a referência seja absoluta. (Uma referência que não é absoluta irá mudar ao copiarmos a fórmula para outra célula)
:	Representa a seleção de um intervalo de células. (A1:C5 por exemplo, representa a seleção de todas as células de A1 até C5)
;	Representa células selecionadas avulsamente (A1;C5 por exemplo, representa a seleção de apenas duas células, A1 e C5)

Fonte: Feito pelo autor

Fica a critério do professor reservar certo tempo para que os estudantes pratiquem esses comandos, e se será de forma livre ou orientada.

Nesse momento, o professor irá orientar os estudantes para que sejam organizadas as informações do problema para que sejam gerados os cálculos.

Iremos organizar uma tabela para dar os resultados dos montantes dos 24 períodos.

- Na célula B1, digitar *Capital investido*;
- Na célula B2, digitar *Taxa de Juros*;
- Na célula C1, digitar 50000;
- Na célula C2, digitar 0,51%;
- Na célula D2, digitar 0,5%;
- Na célula C3, digitar *Banco Santo André*;
- Na célula D3, digitar *Banco Ijaú*;
- Na célula B4, digitar 1;
- Na célula B5, digitar $=B4+1$;
- Selecionar a célula B5, copiar e colar no intervalo de células de B6 até B27;
- Selecionar as células de A4 até A27 e clicar no comando Mesclar células. Nessa célula mesclada, digitar *Período*.

Figura 1: Disposição preliminar das informações. Atividade 2.

	A	B	C	D
1		Capital investido	50.000	
2		Taxa de Juros	0,51%	0,50%
3			Banco Santo André	Banco Ijaú
4	Período	1		
5		2		
6		3		
7		4		
8		5		
9		6		
10		7		
11		8		
12		9		
13		10		
14		11		
15		12		
16		13		
17		14		
18		15		
19		16		
20		17		
21		18		
22		19		
23		20		
24		21		
25		22		
26		23		
27		24		

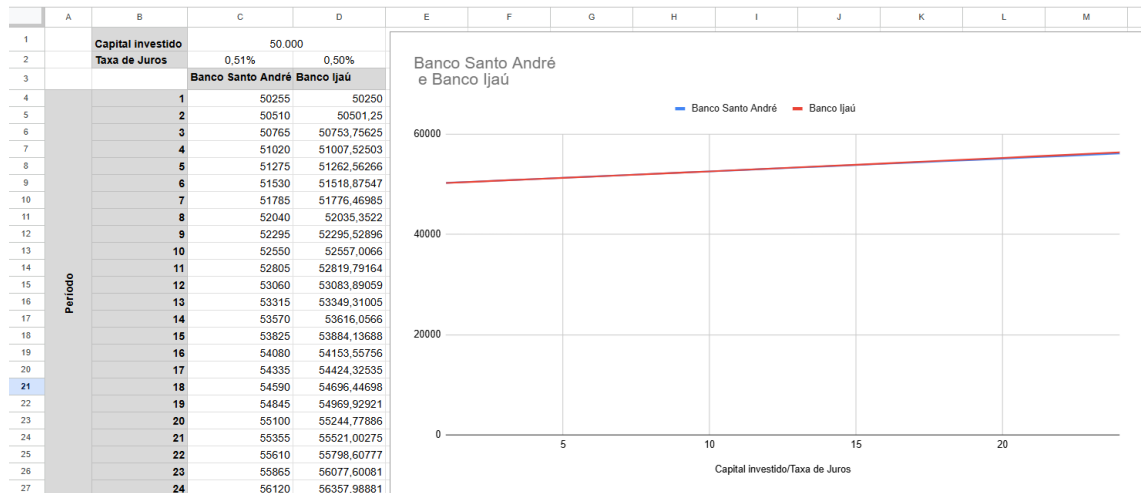
Fonte: Feito pelo autor.

Na próxima etapa, iremos inserir as fórmulas para gerar os montantes desses períodos, e gerar um gráfico de linhas referentes a esses resultados. Os estudantes já terão em mãos as fórmulas dos juros simples e compostos, vistas na atividade 1. Porém ainda será um desafio compreender a linguagem usada na planilha eletrônica para que essas fórmulas sejam transcritas corretamente. Dessa forma, é importante que seja discutida com os estudantes qual seria a maneira correta de transcrever essas fórmulas, tendo como base a tabela informativa inicial que foi dada no início da atividade 2. O ideal é que os estudantes consigam chegar à resposta, através de seus próprios métodos e observações. Porém, caso contrário, o professor deve intervir para fazer as devidas correções e esclarecer a relação das fórmulas vistas na atividade 1 e as sintaxes utilizadas na planilha eletrônica.

- Na célula C4, digitar $=\$C\$1*(1+\$C\$2*B4)$, referente à fórmula e aos dados da opção de investimento em juros simples;
- Selecionar a célula C4, copiar e colar no intervalo de células de C5 até C27;
- Na célula D4, digitar $=\$C\$1*(1+\$D\$2)^B4$ referente à fórmula e aos dados da opção de investimento em juros compostos;
- Selecionar a célula D4, copiar e colar no intervalo de células de D5 até D27;

- Selecionar o intervalo de células de B3 até D27, e clicar em Inserir → Gráfico.

Figura 2: Disposição dos dados da planilha eletrônica após a resolução da atividade 2.



Fonte: Feito pelo autor.

Após a inserção das devidas premissas e argumentos na planilha eletrônica para todos os períodos determinados, o estudante poderá observar tanto na tabela, quanto no gráfico a diferença de montante que foi gerado, e através da interpretação dessas informações ele poderá definir qual a opção mais vantajosa para cada período, 12 meses, 18 meses e 24 meses, conforme a problemática inicial.

AVALIAÇÃO

- Será realizada ao longo da aula de forma contínua, observando a participação e o desenvolvimento de cada estudante.

4 ATIVIDADE 3

Tema: Taxas Equivalentes, Juros Simples e Juros Compostos

Indicação do Ano: 2ª série do Ensino Médio

Duração Estimada: 2 aulas (1 hora e 40 minutos).

OBJETIVOS:

Para o professor:

- Propor e auxiliar em situações problema, utilizando como recurso uma planilha eletrônica de cálculo;
- Determinar, junto aos estudantes, a fórmula para taxas equivalentes através de inferências de conceitos e procedimentos de cálculo da porcentagem já conhecidos previamente;

Para o Estudante:

- Aplicar fórmulas matemáticas de taxas equivalentes, juros simples e juros compostos em uma planilha eletrônica, utilizando recursos como funções e tabelas para organizar e automatizar os cálculos.
- Analisar o comportamento dos valores de Juros Simples e Juros compostos ao longo do tempo através dos dados produzidos na tabela e do gráfico gerado pela planilha eletrônica;

CONTEÚDOS:

- Juros Simples e Juros Compostos: conversão de unidades de taxa de juros, cálculo do montante;
- Taxas equivalentes;
- Noções de função afim e exponencial.

ESTRATÉGIAS DE ENSINO:

Nesse momento, tendo como pré-requisitos o conhecimento sobre cálculos básicos de porcentagem, e a fórmula dos juros compostos, o professor irá apresentar uma outra situação problema.

As amigas Elizângela e Adriana possuem conta em um mesmo banco e possuem, cada uma, R\$ 8000,00 para investir. Elizângela escolheu o investimento que paga de forma fixa 1% ao mês sobre o valor investido, enquanto Adriana escolheu o que promete pagar 12% ao ano sobre o valor investido, também de forma fixa, e ambos em regime de juros compostos.

i) Qual das duas fez o melhor investimento?

ii) Justifique o item i) mostrando qual a taxa de juros anual equivalente a taxa de 1% ao mês do investimento escolhido por Elizângela. É possível padronizar uma conversão de unidades de taxa de juros através de uma fórmula?

iii) Represente graficamente, com o auxílio de uma planilha eletrônica, o montante gerado pelo investimento de Adriana e Elizângela durante um período de tempo de 15 anos.

No item i), os estudantes podem ficar livres para escolher um método de obter a resposta, como por exemplo, aplicar a fórmula dos juros compostos uma vez para Elizângela considerando um período de 12 meses e uma vez para Adriana considerando um período de 1 ano. Eles devem concluir que o investimento de Elizângela é o mais vantajoso. Nesse momento o professor também pode questionar qual seria a resposta se a situação fosse em um regime de juros simples.

No item ii), o objetivo é que os estudantes utilizem o conceito de aumentos sucessivos para chegar em uma taxa anual equivalente. Caso os estudantes não possuam esse pré-requisito, cabe a intervenção do professor no sentido de preencher essa lacuna.

Considere $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ as quantias das grandezas nos momentos $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$. A variação V_1 entre duas grandezas Q_1 e Q_0 é dada por $V_1 = \frac{Q_1}{Q_0} - 1$ e, utilizando algumas propriedades e fazendo algumas manipulações, isso implica que

$$V_1 = \frac{Q_1}{Q_0} - 1 \Rightarrow Q_1 = Q_0(V_1 + 1)$$

Para calcular uma segunda variação V_2 , entre Q_1 e Q_2 temos,

$$V_2 = \frac{Q_2}{Q_1} - 1 \Rightarrow Q_2 = Q_1(V_2 + 1) = Q_0(V_1 + 1)(V_2 + 1)$$

Para calcular uma terceira variação V_3 , entre Q_2 e Q_3 temos,

$$V_3 = \frac{Q_3}{Q_2} - 1 \Rightarrow Q_3 = Q_2(V_3 + 1) = Q_0(V_1 + 1)(V_2 + 1)(V_3 + 1)$$

Note que, expandindo esse raciocínio, para determinados V_n, Q_n e Q_{n-1} teremos,

$$Q_n = Q_0 \cdot (V_1 + 1) \cdot (V_2 + 1) \cdot \dots \cdot (V_n + 1)$$

Para calcular a variação acumulada V entre o período t_0 e t_n podemos fazer

$$V = \frac{Q_n}{Q_0} - 1$$

Substituindo Q_n temos,

$$V = \frac{Q_0 \cdot (V_1 + 1) \cdot (V_2 + 1) \cdot \dots \cdot (V_n + 1)}{Q_0} - 1$$

$$V = (V_1 + 1) \cdot (V_2 + 1) \cdot \dots \cdot (V_n + 1) - 1$$

Observe que a variação acumulada também pode ser considerada como a **taxa equivalente** a todas as demais variações.

No caso em particular da situação do problema do item ii), vale notar que as variações serão sempre iguais. Logo, para $V_1 = V_2 = \dots = V_n = i$, teremos

$$V = (i + 1) \cdot (i + 1) \cdot \dots \cdot (i + 1) - 1$$

$$\Leftrightarrow V + 1 = (i + 1)^n$$

Como queremos a variação acumulada de 1% ao mês durante 12 períodos, obtemos

$$V + 1 = (0,01 + 1)^{12}$$

$$V + 1 \cong 1,126825$$

$$V \cong 1,126825 - 1 = 0,126825 = 12,6825\%$$

Para o item iii) já tendo acesso ao software de planilha eletrônica, damos as orientações para organizamos as informações em uma tabela.

- Na célula A1, digitar *Capital*;
- Na célula A2, digitar *Taxa de Juros (Adriana)*;
- Na célula A3, digitar *Taxa de Juros (Elizangela)*;
- Na célula B1, digitar 8000;
- Na célula B2, digitar 12%;
- Na célula B3, digitar 12,6825%;
- Na célula A5, digitar *Períodos de tempo*;
- Na célula B5, digitar *Adriana*;
- Na célula C5, digitar *Elizângela*;
- Na célula A6, digitar 0;
- Na célula A7, digitar =A6+1;
- Seleccionamos a célula A7, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos C;
- Seleccionamos o intervalo de as células A8 até A21, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos V.

Figura 3: Disposição preliminar das informações da atividade 3, item iii.

	A	B	C
1	Capital	8000	
2	Taxa de Juros (Adriana)	12,0%	
3	Taxa de Juros (Elizangela)	12,6825%	
4			
5	Períodos de tempo	Adriana	Elizangela
6	0		
7	1		
8	2		
9	3		
10	4		
11	5		
12	6		
13	7		
14	8		
15	9		
16	10		
17	11		
18	12		
19	13		
20	14		
21	15		

Fonte: Feito pelo autor.

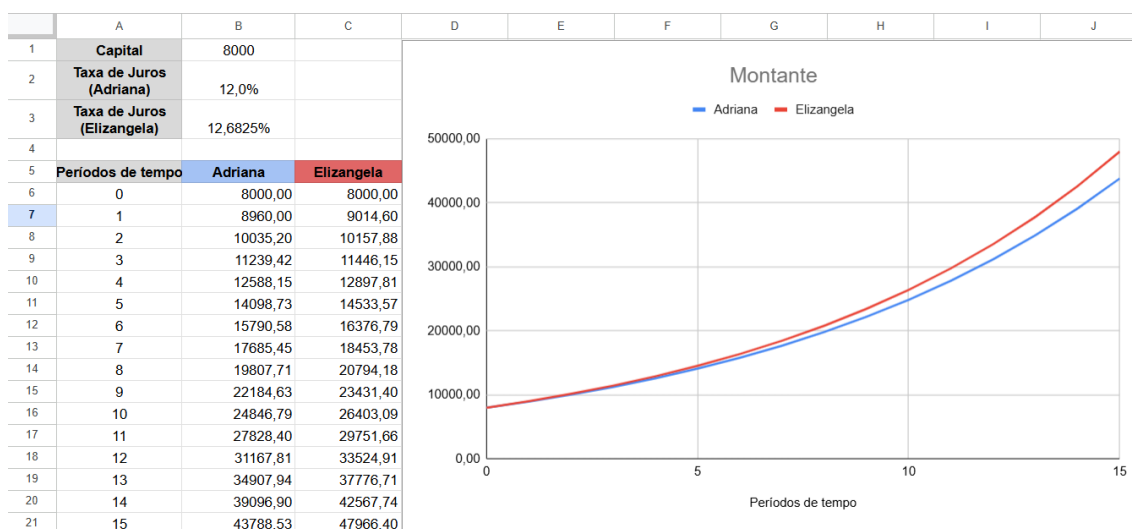
Em seguida, devemos aplicar a fórmula dos juros compostos em B6 referente às informações dadas de Adriana e em C6 referente às informações dadas de Elizangela. Logo após, devemos copiar as fórmulas nas respectivas colunas para gerar os cálculos referentes aos outros períodos de tempo. Esse procedimento deve ser feito pelos estudantes de forma independente, apenas com a supervisão do professor, uma vez que eles já possuem conhecimento prévio, proveniente da atividade 2.

- Na célula B6, digitar $=B\$1*(1+B\$2)^{A6}$;
- Na célula C6, digitar $=B\$1*(1+B\$3)^{A6}$;
- Seleccionamos as células B6 e C6, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos C;
- Seleccionamos o intervalo de as células B7 até C21, mantemos a tecla *Ctrl* pressionada e em seguida clicamos V.

Todos os montantes gerados tomarão como base o capital de 8000 e os períodos de 0 a 15, alterando-se apenas a taxa de juros.

Para finalizar, seleccionamos o intervalo de células de A5 a C21, clicamos no menu “inserir” e em seguida em “gráfico”, para gerar o gráfico da situação apresentada.

Figura 4: Disposição dos dados da planilha eletrônica após a resolução da atividade 3.



Fonte: Feito pelo autor.

AVALIAÇÃO

- Será realizada ao longo da aula de forma contínua, observando a participação e o desenvolvimento de cada estudante.

REFERÊNCIAS

BARROS, Claudemir Galdino de; GERVÁZIO, Suemilton Nunes. A importância da metodologia de resolução de problemas nas aulas de Matemática e o que presumem professores da rede municipal de Alhandra/PB sobre o tema. **Revista Educação Pública**, v. 21, nº 39, 26 de outubro de 2021. Disponível em:

<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/39/a-importancia-da-metodologia-de-resolucao-de-problemas-nas-aulas-de-matematica-e-o-que-presumem-professores-da-rede-municipal-de-alhandrapb-sobre-o-tema>. Acesso em: 2 mar. 2025.

COSTA, Dailson Evangelista; GONÇALVES, Tadeu Oliver. Compreensões, abordagens, conceitos e definições de sequência didática na área de educação matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 36, n. 72, p. 358-388, abr. 2022. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/TBtxkXdxLr5JnHCrcyWfSWL/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 2 mar. 2025.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO. Excel Total: básico e avançado. ESCOLA DE SERVIÇO PÚBLICO DO ESPÍRITO SANTO – ESESP, [S.l.: s.n.]. Disponível em: <https://esesp.es.gov.br/Media/esesp/Apostilas/APOSTILA%20COMPLETA%20-%20EXCEL%20TOTAL.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2025.

SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo olhar: matemática*. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013. v. 2.