

Compartilhando práticas com os pacotes gráficos \LaTeX ‘animate’, ‘tikz’, ‘tkz-base’ e ‘tkz-euclide’ no processo de ensino/aprendizagem de trigonometria

Flank D. M. Bezerra¹ 

Marconi F. Lima 

Resumo

Apresentamos provas sem palavras animadas das leis dos cossenos, senos e tangentes usando os pacotes gráficos \LaTeX . Também disponibilizamos todos os conjuntos de elementos \LaTeX capazes gerar as animações.

Palavras-chave: Animações; LaTeX; leis dos cossenos; lei dos senos; lei das tangentes

Abstract

We present proof without words of the law of cosines, law of sines, and law of tangents using \LaTeX graphic packages. We also provide all the \LaTeX element sets sufficient to generate the animations.

Keywords: Animate; LaTeX; law of cosines; law of sines; law of tangents

1. Introdução

Este trabalho foi inspirado na dissertação de mestrado do segundo autor, sob a orientação do primeiro autor, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) da Universidade Federal da Paraíba, sobre o processo de ensino/aprendizagem de trigonometria e o uso de recursos computacionais, explorado na disciplina MA36 - Recursos Computacionais no Ensino de Matemática da matriz curricular do Profmat.

A trigonometria está contemplada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). No Ensino Fundamental (9º ano), ela aparece dentro do contexto da ‘Geometria’, e no Ensino Médio, dentro de ‘Geometrias e medidas’. A BNCC inclui a trigonometria em habilidades como a de demonstrar relações métricas no triângulo retângulo, identificar as características das funções seno e cosseno, e resolver problemas envolvendo fenômenos periódicos. Inclusive a BNCC enfatiza a utilização de tecnologias digitais para explorar as funções trigonométricas e a comparação entre diferentes representações (ciclo trigonométrico e plano cartesiano), veja mais detalhes em [2].

Destacamos também que a BNCC trás o Pensamento Computacional, veja [6], como uma habilidades no Ensino Médio. Nesta direção, exercitamos o uso do \LaTeX como linguagem de programação para produção de animações relacionadas às leis dos cossenos, senos e tangentes.

¹Parcialmente apoiado pelo CNPq/Finance Code # 303039/2021-3

Um dos principais objetivos deste trabalho é promover uma melhor compreensão das leis dos cossenos, senos e tangentes através de ilustrações vetoriais e animações produzidas com os pacotes gráficos \LaTeX ‘animate’, ‘tikz’, ‘tkz-base’ e ‘tkz-euclide’.

Como o primeiro autor já destacou em outra oportunidade, trabalhos que dissertam sobre o tema do presente artigo são atuais e têm sido cada vez mais executados e reproduzidos. ,

Tem sido cada vez maior o número de plataformas de streaming e redes sociais com páginas, contas e/ou canais dedicados ao compartilhamento de figuras e animações de conceitos, definições e resultados relacionados com Matemática. Estas páginas, contas e canais possuem relativamente um alto número assinantes e/ou seguidores, e isso pode exemplificar o quanto as pessoas têm se mostrado interessadas nestas práticas. (Bezerra [1], 2024, p. 1)

Para uma edição adequada das animações presentes neste texto recomendamos que o leitor insira no prêmulo do arquivo TEX os seguintes pacotes: ‘animate’, ‘tikz’, ‘tkz-base’, e ‘tkz-euclide’. Abaixo, veja Tabela 1 ([1] e [3, Tabela 1]), listamos a combinação adequada entre leitores de texto PDF e sistemas operacionais, a fim de termos um funcionamento adequado das animações presentes neste texto.

Leitor/Sistemas	Linux	MacOS	Windows
Adobe Acrobat Reader		ok	ok
KDE Okular	ok		ok
Foxit PDF Reader		ok	ok

Tabela 1: ok: reproduz a animação

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma. A Seção 2 é dedicada à lei dos cossenos, a Seção 3 é dedicada à lei dos senos, e a Seção 4 é dedicada à lei das tangentes.

2. Lei dos cossenos

A lei dos cossenos é uma espécie de generalização do Teorema de Pitágoras, uma prova da lei dos cossenos pode ser encontrada em [5].

Teorema 1. *Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, com ângulos internos medindo \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , conforme a Figura 1 abaixo, então*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}, \quad e \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}.$$

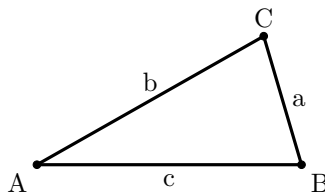


Figura 1: Triângulo ABC

A seguir disponibilizamos os elementos \LaTeX necessários para a produção da animação da Figura 2.

<https://github.com/flankbezerra-hue/modelopmo2020v2-1->

Figura 2: Animação sobre a lei dos cossenos

Figura 3: A lei dos senos

3. Lei dos senos

A lei dos senos afirma que, em qualquer triângulo, a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto a esse lado é constante, uma prova da Lei dos senos pode ser encontrada em [5].

Teorema 2. *Se r é o raio da circunferência λ circunscrita a um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, e ângulos internos medindo \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , conforme a Figura 1, então*

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2r. \quad (1)$$

A seguir disponibilizamos os elementos \LaTeX necessários para a produção da animação da Figura 3.

<https://github.com/flankbezerra-hue/modelopmo2020v2-1->

4. Lei das tangentes

A lei das tangentes pode ser usada para calcular os ângulos de um triângulo no qual dois lados a e b e o ângulo fechado θ são conhecidos, uma prova pode ser encontrada em [4].

Teorema 3. *Se ABC é um triângulo, nem isósceles, nem retângulo, de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, com ângulos internos medindo \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , conforme a Figura 1, então valem as relações seguintes:*

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}, \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{C}}{2}\right)}, \quad e \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\left(\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}\right)}.$$

Figura 4: Aspecto visual da lei das tangentes

A seguir disponibilizamos os elementos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ necessários para a produção da animação da Figura 4.

<https://github.com/flankbezerra-hue/modelopmo2020v2-1->

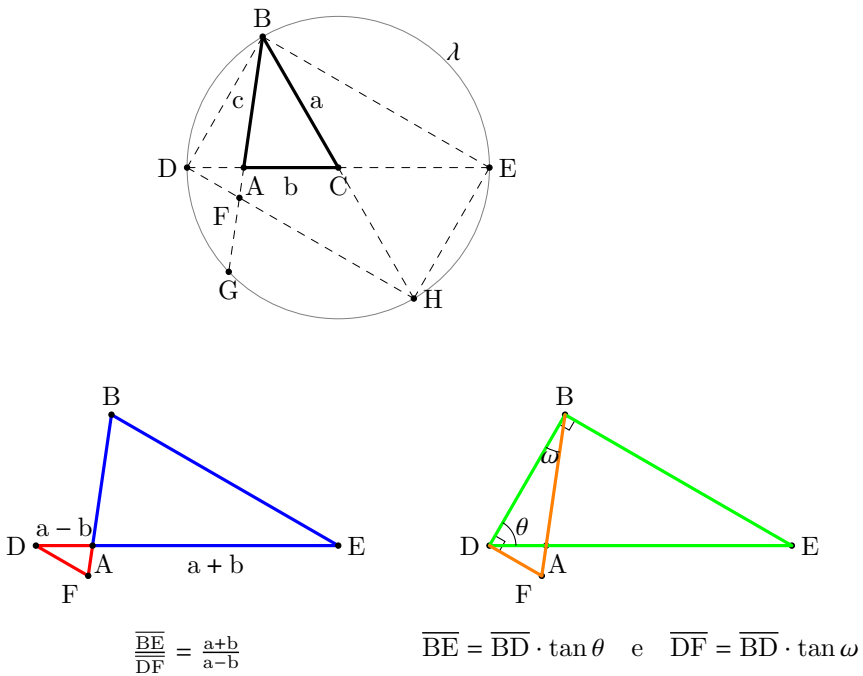


Figura 5: Aspecto visual da lei das tangentes com $\theta = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$ e $\omega = \frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2}$

A seguir disponibilizamos os elementos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ necessários para a produção da animação da Figura 5.

<https://github.com/flankbezerra-hue/modelopmo2020v2-1->

Agradecimentos

Os autores agradecem ao referee anônimo pela sugestão do uso de plataformas online para hospedar, gerenciar e compartilhar projetos de código-fonte.

Referências

- [1] F. D. M. Bezerra, *Compartilhando práticas com os pacotes gráficos LaTeX 'Animate' e 'TikZ' na educação matemática elementar*. PMO **12** (2), 2024. <https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1218>
- [2] Brasil, M. d. E. *Base Nacional Comum Curricular*. 2025. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 04 de maio de 2025.
- [3] Costa, C. F. *O uso do \LaTeX na construção e animações de figuras geométricas como auxílio no ensino de geometria*, Dissertação do PROFMAT/UFCA, 2022. Disponível [aqui](#).
- [4] R. M. Mathews, The proofs of the law of tangents, *School Science and Mathematics*, (1915), 798–801. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1949-8594.1915.tb16374.x>
- [5] J. Stewart, *Cálculo*, Tradução da 7ª edição norte-americada, Volume 1, Trilha, Cenage Learning, 2016.
- [6] Wing, J. *Computational thinking*. *Communications of the ACM*, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.

Flank D. M. Bezerra
Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 58051-900, João Pessoa - PB, Brasil
<flank@mat.ufpb.br>

Marconi F. Lima
Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Umbelina Garcez, 58280-000, rua Dom Vital S/N,
Centro, Mamanguape - PB, Brasil
<coni232323@gmail.com>

Recebido: 26/05/2025
Publicado: 03/10/2025