



KARINA DE FÁTIMA MESQUITA SILVA

**UM RPG ELETRÔNICO COMO RECURSO PARA O ENSINO
DE NÚMEROS REAIS NO 9º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL EM UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA**

**LAVRAS – MG
2025**

KARINA DE FÁTIMA MESQUITA SILVA

**UM RPG ELETRÔNICO COMO RECURSO PARA O ENSINO DE NÚMEROS REAIS
NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EM UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

Profa. Dra. Graziane Sales Teodoro
Orientadora

Profa. Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa
Coorientadora

**LAVRAS – MG
2025**

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Silva, Karina de Fátima Mesquita

Um RPG eletrônico como recurso para o ensino de números reais no 9º ano do Ensino Fundamental em uma perspectiva histórica / Karina de Fátima Mesquita Silva. – 2025.

164 p. : il.

Dissertação(mestrado)–Universidade Federal de Lavras, 2025.

Orientadora: Profa. Dra. Graziane Sales Teodoro.

Coorientadora: Profa. Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa .

Bibliografia.

1. Números reais. 2. História da Matemática. 3. RPG eletrônico. 4. Sequência didática – Normas. I. Teodoro, Graziane Sales. II. Costa, Maria do Carmo Pacheco de Toledo.

KARINA DE FÁTIMA MESQUITA SILVA

**UM RPG ELETRÔNICO COMO RECURSO PARA O ENSINO DE NÚMEROS REAIS
NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EM UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA**

**AN ELECTRONIC RPG AS A RESOURCE FOR TEACHING REAL NUMBERS IN
THE 9TH GRADE OF ELEMENTARY SCHOOL FROM A HISTORICAL
PERSPECTIVE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFLA, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 30 de Setembro de 2025.

Prof. Dra. Graziane Sales Teodoro

UFLA

Prof. Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa

UFLA

Prof. Dr. Helvécio Geovani Fagnoli Filho

UFLA

Profa. Dra. Livia de Oliveira Vasconcelos

CEMEI Monsenhor Alcindo Siqueira

Profa. Dra. Graziane Sales Teodoro
Orientadora

Profa. Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa
Coorientadora

**LAVRAS – MG
2025**

Dedico este trabalho à minha família, pelo apoio incondicional e pela base que sempre me sustentou. Ao meu filho, fonte da minha maior força e alegria, cuja luz iluminou cada etapa deste caminho. E aos meus colegas professores, cuja dedicação e compromisso com a Educação são uma constante inspiração para minha jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, fonte de toda força e sabedoria, por me guiar e fortalecer em todos os desafios.

Ao meu filho, Paulo César, meu estímulo e minha motivação, por compreender minhas ausências e me retornar ternura em momentos de angústia.

Agradeço ao meu esposo, Thomaz, por toda a ajuda, pela paciência nos momentos desafiadores e pelo apoio constante. Seu amparo e companheirismo foram essenciais para que tudo isso se tornasse possível.

À Professora Dra. Graziane Sales Teodoro, minha orientadora, por inspirar confiança e estimular a busca constante pelo aprendizado. Seu respeito e conhecimento tornaram este percurso mais simples e motivador.

À Professora Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa, minha coorientadora, agradeço pela dedicação e pelas contribuições sempre pertinentes. Sua orientação cuidadosa possibilitou novos olhares sobre o trabalho e foi fundamental para o desenvolvimento deste estudo.

Sou profundamente grata a todos os professores do PROFMAT, que sempre reconheceram e valorizaram cada passo dado, por menor que fosse. Embora o percurso até aqui tenha apresentado muitos desafios, o apoio e o incentivo de cada um de vocês foram essenciais para que eu seguisse em frente com confiança e motivação.

Aos meus colegas de curso, registro minha gratidão pela amizade e pelo companheirismo que tornaram esta jornada mais leve e enriquecedora.

Agradeço à Universidade Federal de Lavras (UFLA) e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) por oferecerem uma formação de qualidade que ampliou minha capacidade crítica, criativa e reflexiva, preparando-me para atuar com compromisso e responsabilidade na área de Educação Matemática.

Deixo meu agradecimento especial aos estudantes e à equipe da Escola Estadual “Professor Fábregas” pela acolhida e engajamento na pesquisa. Sua participação foi fundamental para que este estudo se tornasse, além de um trabalho acadêmico, uma jornada de transformação e crescimento pessoal para mim.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma investigação sobre o ensino dos números reais no 9º ano do Ensino Fundamental a partir da integração entre a História da Matemática e o uso de um jogo eletrônico de RPG (*Role-Playing Game*). O estudo parte do reconhecimento de que os números reais ainda representam um importante desafio no processo de aprendizagem dos estudantes, especialmente quando introduzidos de forma exclusivamente formal. O objetivo central foi investigar as possíveis contribuições que a relação entre narrativa histórica e jogos digitais interativos pode oferecer à compreensão conceitual dos números reais, em particular no que se refere à distinção entre números racionais e irracionais. Para atingir esse propósito, foi realizada uma pesquisa de natureza qualitativa, envolvendo a elaboração de uma sequência didática baseada no jogo *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*, de autoria da pesquisadora, e desenvolvido para fins pedagógicos. A aplicação da sequência didática ocorreu em uma escola pública do sul de Minas Gerais, com coleta de dados por meio de questionários, observações e produções dos estudantes. A análise considerou categorias como compreensão conceitual, percepção da História da Matemática e avaliação do jogo como recurso pedagógico. Os resultados revelaram avanços na capacidade dos estudantes de classificar e distinguir números racionais e irracionais, superar equívocos conceituais recorrentes e relacionar os números reais a situações concretas. Observou-se também maior engajamento e motivação durante as atividades, favorecidos pela narrativa e pela interatividade do ambiente digital. Além disso, os estudantes reconheceram a História da Matemática como um elemento importante para entender a origem e a função dos conceitos numéricos, atribuindo mais sentido ao estudo do conteúdo. Ao mesmo tempo, a proposta se mostrou adaptável a outros conteúdos, constituindo uma alternativa viável e inovadora para o ensino da Matemática.

Palavras-chave: História da Matemática; jogos digitais interativos; sequência didática; números racionais; números irracionais.

ABSTRACT

This dissertation presents an investigation into the teaching of real numbers in the 9th grade of Elementary School through the integration of the History of Mathematics and the use of a RPG (Role-Playing Game). The study stems from the recognition that real numbers still represent an important challenge in the learning process of the students, especially when introduced in an exclusively formal manner. The main objective was to investigate the possible contributions that the relationship between historical narrative and interactive digital games can offer to the conceptual understanding of real numbers, particularly regarding the distinction between rational and irrational numbers. To achieve this purpose, a qualitative research study was conducted, involving the development of a teaching sequence based on the game titled *The Guardian of the History of Mathematics: The Legacy of Numbers*, authored by the researcher, and developed for pedagogical purposes. The teaching sequence was implemented in a public school in the south of Minas Gerais, with data collected through questionnaires, observations, and student productions. The analysis considered categories such as conceptual understanding, perception of the History of Mathematics, and evaluation of the game as a pedagogical resource. The results revealed progress in the ability of the students to classify and distinguish between rational and irrational numbers, overcome recurring conceptual misconceptions, and relate real numbers to concrete situations. Greater engagement and motivation during the activities were also observed, fostered by the narrative and interactivity of the digital environment. Furthermore, the students recognized the History of Mathematics as an important element for understanding the origin and function of numerical concepts, attributing more meaning to the study of the content. Simultaneously, the proposal proved to be adaptable to other content areas, constituting a viable and innovative alternative for teaching Mathematics.

Keywords: History of Mathematics; interactive digital games; teaching sequence; rational numbers; irrational numbers.

INDICADORES DE IMPACTO

A pesquisa desenvolvida gerou impactos sociais, culturais, educacionais e tecnológicos no contexto do ensino de Matemática na Educação Básica. A criação e aplicação do jogo eletrônico *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*, elaborado especialmente para este estudo, proporcionaram aos estudantes do 9º ano de uma escola pública do sul de Minas Gerais uma experiência de aprendizagem diferenciada, que integrou elementos da História da Matemática e da tecnologia digital. Participaram diretamente das atividades 28 estudantes, uma professora da rede estadual e a pesquisadora, com o acompanhamento e autorização da instituição. Os impactos sociais e educacionais puderam ser observados no aumento do interesse e da motivação dos estudantes em relação à Matemática, na ampliação da conexão entre o conhecimento escolar e sua aplicação histórica e cotidiana e na superação de dificuldades conceituais relacionadas aos números reais. O produto educacional desenvolvido tem potencial para ser usado em outras realidades escolares, podendo ser adaptado conforme o contexto, constituindo-se como um recurso tecnológico de apoio à prática docente e à formação continuada de professores. Culturalmente, o projeto valorizou o legado histórico da Matemática como uma construção humana e coletiva, aproximando os saberes escolares da realidade dos estudantes e incentivando uma visão mais crítica sobre a origem e a evolução do conhecimento científico. A proposta também reforçou a integração entre universidade e escola pública, promovendo o compartilhamento de práticas pedagógicas inovadoras e o uso da tecnologia na educação. Os impactos do estudo estão ligados principalmente à área da Educação e também se relacionam a aspectos culturais e tecnológicos. Eles estão alinhados com os objetivos da Organização das Nações Unidas (ONU) para o desenvolvimento sustentável, por contribuírem para uma educação de qualidade, com mais inovação e inclusão social.

IMPACT INDICATORS

The research carried out generated social, cultural, educational, and technological impacts within the context of Mathematics teaching in Basic Education. The creation and implementation of the electronic game *The Guardian of the History of Mathematics: The Legacy of Numbers*, developed specifically for this study, provided 9th-grade students from a public school in southern Minas Gerais with a distinctive learning experience that integrated elements of the History of Mathematics and digital technology. A total of 28 students and one state school teacher participated directly in the activities, under institutional supervision and authorization. The social and educational impacts were observed through the increased interest and motivation of students toward Mathematics, the strengthening of connections between school knowledge and its historical and everyday applications, and the overcoming of conceptual difficulties related to real numbers. The educational product developed has the potential to be used in other school contexts, being adaptable to different realities, and serves as a technological resource to support teaching practice and continuing teacher education. Culturally, the project valued the historical legacy of Mathematics as a human and collective construction, bringing school knowledge closer to students' realities and encouraging a more critical understanding of the origins and development of scientific knowledge. The proposal also strengthened the integration between the university and the public school, promoting the sharing of innovative pedagogical practices and the responsible use of technology in education. The impacts of the study are mainly linked to the field of Education and are also related to cultural and technological aspects. These impacts are aligned with the United Nations (UN) Sustainable Development Goals by contributing to quality education, greater innovation, and social inclusion.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 2.1 – Procedimentos metodológicos adotados na revisão de literatura. | 20 |
| Figura 3.1 – O osso de Ishango com entalhes. | 32 |
| Figura 3.2 – Sistema de numeração sexagesimal posicional. | 33 |
| Figura 3.3 – Simbologia do sistema de numeração egípcio. | 35 |
| Figura 3.4 – Simbologia do sistema de numeração romano. | 35 |
| Figura 3.5 – Soma utilizando os números romanos. | 36 |
| Figura 3.6 – Ábaco romano. | 36 |
| Figura 3.7 – Evolução dos símbolos que representam os algarismos de 0 a 9. | 37 |
| Figura 3.8 – Sistema chinês de numerais de vareta. | 39 |
| Figura 3.9 – Representação do número -10724 no sistema chinês de numeração em barras. | 41 |
| Figura 3.10 – Números inteiros na reta. | 42 |
| Figura 3.11 – Papiro de Rhind (Museu Britânico), documento que contém métodos desenvolvidos pelos egípcios para realizar operações com frações. | 44 |
| Figura 3.12 – Aproximação de $\sqrt{2}$ gravada na Tábua de Yale. | 49 |
| Figura 3.13 – Tabelas de cálculo de Napier de cerca de 1680. | 54 |
| Figura 3.14 – Representação do conjunto dos números reais por meio de diagrama. | 55 |
| Figura 3.15 – Corte de Dedekind para $\sqrt{2}$, em que a parte azul representa os racionais cujo quadrado é menor que 2 e a parte verde, os racionais cujo quadrado é maior que 2. | 57 |
| Figura 4.1 – Plataforma RPG Maker. | 66 |
| Figura 4.2 – Página do RPG Maker MV na plataforma Steam. | 67 |
| Figura 4.3 – Tela do jogo <i>O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números</i> | 68 |
| Figura 4.4 – Representação dos quatro mundos que compõem o jogo, relacionados aos conjuntos numéricos \mathbb{N} (naturais), \mathbb{Z} (inteiros), \mathbb{Q} (rationais) e \mathbb{I} (irracionais). | 69 |
| Figura 4.5 – Exemplos de NPCs desenvolvidos para o jogo. | 69 |
| Figura 4.6 – Exemplo de problema matemático e <i>feedback</i> no ambiente do jogo. | 71 |
| Figura 4.7 – Opções de avatar do personagem Arithy disponíveis para a escolha do jogador. | 76 |
| Figura 4.8 – Erase, o vilão que ameaça o conhecimento matemático. | 77 |
| Figura 4.9 – Chronos, o mentor temporal da jornada matemática. | 77 |
| Figura 4.10 – Uno, o protetor do mundo primitivo dos desafios de contagem. | 78 |
| Figura 4.11 – Integra, defensora do equilíbrio entre os números inteiros. | 79 |

| | |
|--|-----|
| Figura 4.12 – Quotient, defensor dos números racionais e da proporcionalidade. | 79 |
| Figura 4.13 – Radixya, a guardiã da essência dos números irracionais. | 80 |
| Figura 6.1 – Resposta registrada no Questionário 1: compreensão adequada dos conceitos de números racionais e irracionais. | 95 |
| Figura 6.2 – Resposta registrada no Questionário 1: compreensão parcial dos conceitos de números racionais e irracionais. | 95 |
| Figura 6.3 – Resposta com erro nas operações com decimais, mas acerto na distinção conceitual entre frações. | 96 |
| Figura 6.4 – Resposta com cálculos corretos, mas explicação conceitual vaga sobre frações exata e decimal periódica. | 96 |
| Figura 6.5 – Resposta com erros de cálculo e equívocos conceituais sobre frações exatas e periódicas. | 97 |
| Figura 6.6 – Exemplo de dificuldades na classificação de dízimas periódicas e não periódicas. | 98 |
| Figura 6.7 – Registro de classificações equivocadas: $-\sqrt{3}$ e $0,333\dots$ | 98 |
| Figura 6.8 – Representação com imprecisões dos valores de $\sqrt{2}$ e π na reta real. | 99 |
| Figura 6.9 – Atividade de posicionamento na reta real com destaque para o erro no valor de $-\pi$ | 99 |
| Figura 6.10 – Registro de definições e exemplos corretos de números racionais e irracionais. | 99 |
| Figura 6.11 – Registro de definições parcialmente corretas de números racionais e irracionais. | 100 |
| Figura 6.12 – Evidência de dificuldade em relacionar números irracionais a contextos extraescolares. | 102 |
| Figura 6.13 – Resolução de atividades com aproximações decimais para $\sqrt{2}$ e π | 104 |
| Figura 6.14 – Resolução de atividade indicando comparação direta entre π e $\sqrt{2}$ | 105 |
| Figura 6.15 – Percepção dos estudantes sobre a História da Matemática em outras disciplinas. | 105 |
| Figura 6.16 – Resposta de estudante que acredita no potencial dos jogos digitais para a aprendizagem de Matemática. | 109 |
| Figura 6.17 – Resposta de estudante que discorda do uso de jogos digitais como recurso para a aprendizagem de Matemática. | 109 |

| | |
|---|-----|
| Figura 6.18 – Resposta de estudante que reconhece que o jogo contribuiu para a compreensão dos conteúdos matemáticos. | 110 |
| Figura 6.19 – Resposta do único estudante que declarou não perceber contribuição do jogo para sua aprendizagem. | 111 |
| Figura 6.20 – Estudantes interagindo com o jogo educativo e explorando diferentes estratégias de aprendizagem. | 112 |
| Figura 6.21 – Registro de resposta de estudante mencionando o uso de cálculos e anotações durante o jogo. | 114 |
| Figura 6.22 – Resposta de estudante que afirmou ter seguido apenas as regras do jogo. . . | 114 |
| Figura 6.23 – Respostas de estudantes indicando mudança na percepção da Matemática após a experiência com o jogo. | 115 |

LISTA DE GRÁFICOS

| | |
|--|-----|
| Gráfico 2.1 – Quantitativo de trabalhos analisados por plataforma ou repositório. | 23 |
| Gráfico 6.1 – Dados sobre a evolução da compreensão conceitual segundo os Questionários 1 e 2. | 100 |
| Gráfico 6.2 – Percepção dos estudantes sobre a contribuição da História da Matemática para a aprendizagem (Questionários 1 e 2). | 107 |
| Gráfico 6.3 – Percepção sobre aprender Matemática com jogos (Questionários 1 e 2): “Você sentiu que o jogo ajudou na compreensão dos conceitos matemáticos?”.111 | |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 2.1 – Resultado das buscas em plataformas ou repositórios. | 21 |
| Tabela 2.2 – Correspondência entre os trabalhos e o tema desta pesquisa. | 22 |
| Tabela 5.1 – Categorias definidas para a análise dos dados. | 92 |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|--|------------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 15 |
| 2 | REVISÃO DE LITERATURA E A RELEVÂNCIA DESTE TRABALHO | 19 |
| 3 | O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA | 29 |
| 3.1 | O conjunto dos números naturais | 30 |
| 3.2 | O conjunto dos números inteiros | 38 |
| 3.3 | O conjunto dos números racionais | 42 |
| 3.4 | O conjunto dos números irracionais | 48 |
| 3.5 | O conjunto dos números reais | 54 |
| 4 | SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA | 60 |
| 4.1 | Fundamentos da proposta didática | 60 |
| 4.1.1 | Desenvolvimento do jogo educativo de RPG na plataforma RPG Maker | 65 |
| 4.1.2 | Roteiro para o jogo <i>O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números</i> | 73 |
| 4.2 | Desenvolvimento da sequência didática | 80 |
| 5 | METODOLOGIA | 86 |
| 5.1 | Tipo da pesquisa | 86 |
| 5.2 | Contexto e sujeitos da pesquisa | 87 |
| 5.3 | Procedimentos metodológicos | 88 |
| 5.4 | Análise dos dados | 90 |
| 5.4.1 | Categorias para análise dos dados | 91 |
| 6 | ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS | 94 |
| 6.1 | Compreensão conceitual | 94 |
| 6.2 | Significado e aplicações dos números reais | 101 |
| 6.3 | Percepção sobre a História da Matemática | 104 |
| 6.4 | Percepção do jogo como ferramenta pedagógica | 108 |
| 6.5 | Diálogos reflexivos e estratégias utilizadas durante o jogo | 113 |
| 7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 116 |
| | REFERÊNCIAS | 119 |
| | APENDICE A – QUESTIONÁRIO 1 | 123 |
| | APENDICE B – QUESTIONÁRIO 2 | 125 |

| | |
|---|------------|
| APENDICE C – SEQUÊNCIA DIDÁTICA | 127 |
| ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO | 159 |
| ANEXO B – TERMO DE ASSENTIMENTO | 163 |

1 INTRODUÇÃO

A Matemática, quando apresentada de forma muito abstrata e descontextualizada, acaba por se tornar uma disciplina distante da realidade dos estudantes. Como defende Freire (2021), é preciso que o ensino de conteúdos disciplinares se dê num contexto em que os educandos se sintam desafiados, que faça sentido para eles e no qual sua curiosidade e seu saber de experiência tenham lugar. A ideia de que a Matemática é difícil e fechada em si mesma acaba afastando-a dos estudantes, como se fosse um conhecimento só para alguns privilegiados, capaz de gerar sentimentos de incapacidade e desinteresse. Diante desse cenário, cabe ao professor ressignificar o ensino dessa disciplina. Neste trabalho, propomos essa transformação por meio do estudo dos números reais, demonstrando sua presença em medidas cotidianas, cálculos simples e até em fenômenos naturais. Dessa forma, a Matemática deixa de ser vista como algo distante do estudante para se tornar um conhecimento útil e acessível. A abordagem proposta, neste trabalho, pode ajudar a desfazer a ideia de que a Matemática é complicada e sem relação com a vida prática, revelando seu papel na organização e na compreensão do mundo ao nosso redor.

Os números reais, que abrangem o conjunto dos números naturais, dos inteiros, dos racionais e dos irracionais, constituem a base para a compreensão de diversos conceitos matemáticos avançados, incluindo a Álgebra e o Cálculo. No entanto, o ensino tradicional tende a priorizar a memorização de regras e fórmulas, descuidando de aspectos importantes para uma aprendizagem significativa, como a contextualização histórica e a aplicação prática desses conhecimentos no cotidiano dos estudantes.

Nesse cenário, uma das preocupações recorrentes nos meios acadêmicos tem sido refletir sobre como tornar a Matemática mais acessível aos estudantes, desenvolvendo competências e habilidades investigativas que favoreçam uma aprendizagem mais consolidada dos conceitos matemáticos. Como aponta Mendes (2022), esse esforço exige o aperfeiçoamento da prática pedagógica e tem mobilizado pesquisas em Educação Matemática voltadas à elaboração, testagem e avaliação de propostas didáticas que priorizam o caráter investigativo do conhecimento matemático. Entre essas propostas, destacam-se aquelas que incorporam elementos históricos como ferramenta para tornar mais claros os processos de construção conceitual da Matemática, aproximando o conteúdo escolar da lógica interna da disciplina e de sua função cultural.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para que os estudantes desenvolvam habilidades matemáticas nos anos finais do Ensino Fundamental,

é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática (BRASIL, 2018, p. 298).

A motivação para este trabalho surgiu de observações realizadas em diferentes contextos educacionais. Durante a graduação em Matemática, na Universidade Federal de Lavras, em disciplinas como Análise Matemática, foi possível constatar que muitos discentes apresentavam sérias dificuldades ao lidar com noções como densidade dos racionais e irracionais, infinitos distintos e a própria construção dos números reais. Essas dificuldades não só atrapalhavam o entendimento do que era estudado na graduação, como também mostravam que havia falhas na aprendizagem de conteúdos básicos de Matemática. Paralelamente, na Educação Básica, é comum que os estudantes manifestem resistência desde os primeiros contatos com números negativos, dificuldade que se intensifica com a introdução de frações e, posteriormente, com os números irracionais.

Experiências anteriores, em salas de aula dos anos finais do Ensino Fundamental, indicaram que a inserção de elementos históricos no ensino da Matemática pode despertar maior interesse e compreensão por parte dos estudantes. Ao apresentar aos estudantes de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental os contextos históricos que motivaram a criação e expansão dos conjuntos numéricos, desde os números naturais, surgidos da necessidade primária de contagem em civilizações antigas, até os números inteiros, desenvolvidos para representar situações como dívidas, por exemplo, observou-se uma significativa mudança na percepção dos estudantes. A abordagem que relacionava o surgimento dos números negativos a problemas concretos do cotidiano mercantil, em contraste com a limitação dos naturais, permitiu que aqueles estudantes percebessem a Matemática como uma ferramenta em constante evolução para resolver problemas reais.

Diante dessas observações, surgiram questionamentos sobre como tornar o ensino dos números reais mais acessível e significativo. Seria possível adotar metodologias que, além de abordar a formalidade matemática, incorporassem uma perspectiva histórica, mostrando a evolução dos conceitos ao longo do tempo? Ou ainda, como integrar recursos didáticos mais dinâmicos e interativos, capazes de despertar o interesse dos estudantes e facilitar a compreensão desses conteúdos? Essas indagações conduziram a elaboração deste trabalho, que busca

refletir sobre estratégias didáticas para o ensino dos números reais, visando superar os desafios tradicionalmente associados a esse tema.

Assim, o presente trabalho propõe uma abordagem diferenciada para a construção dos números reais pelos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Essa abordagem foi utilizada em uma escola pública no sul de Minas Gerais, integrando a História da Matemática e o uso de um jogo de RPG (*Role-Playing Game*, que pode ser traduzido como “Jogo de Interpretação de Papéis” ou “Jogo de Interpretação de Personagens”) eletrônico¹, desenvolvido pela autora desta pesquisa especialmente para fins pedagógicos. Ao explorar como os números foram criados ao longo do tempo e como esses conceitos se aplicam em situações práticas, espera-se facilitar a compreensão dos estudantes e tornar o aprendizado mais fácil e interessante. A plataforma RPG Maker² foi utilizada para o desenvolvimento do jogo, por sua interface acessível e por dispensar a necessidade de habilidades aprofundadas em programação. A licença para uso da plataforma foi adquirida em dezembro de 2024, juntamente com dois pacotes adicionais de recursos, utilizados para ampliar as possibilidades de criação e personalização do jogo. Com suas ferramentas intuitivas para criação de cenários, personagens e narrativas, a RPG Maker favoreceu a construção de um ambiente digital que integra história e conteúdo matemático e permitiu que o foco da construção do jogo se concentrasse no conteúdo educacional e na experiência do estudante.

A sequência didática elaborada articula a evolução histórica dos conceitos numéricos com atividades potencialmente lúdicas, promovendo um aprendizado mais significativo dos números reais. Essa proposta foi aplicada em uma turma de 9º ano, durante duas semanas, sem vínculo como docente regente da turma, mas com autorização institucional e colaboração da docente responsável. Nesse contexto, o trabalho buscou responder à seguinte questão: Quais foram as possíveis contribuições que a combinação da História da Matemática e o uso de um jogo de RPG eletrônico trouxeram para a compreensão dos números reais por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental?

¹ Trata-se de um gênero de jogo, no qual os jogadores interpretam e controlam personagens em um mundo fictício, adotando elementos dos RPGs tradicionais, como ambientações, mecânicas e terminologia. Semelhante ao RPG de mesa, ele inclui uma narrativa extensa, desenvolvimento de personagens e um sistema de regras específico.

² RPG Maker é um *software* de desenvolvimento de jogos distribuído comercialmente pela plataforma Steam (https://store.steampowered.com/app/363890/RPG_Maker_MV/). Essa plataforma Steam oferece mecanismos para atualizações automáticas e disponibilização de conteúdos adicionais para o *software*. O programa é amplamente utilizado por criadores independentes devido à sua acessibilidade e recursos intuitivos para produção de jogos em estilo RPG bidimensional.

Assim, no Capítulo 2, é apresentada uma revisão de literatura, discutindo algumas referências teóricas que fundamentam este estudo e destacando a relevância da pesquisa no contexto educacional. Na sequência, o Capítulo 3 aborda o conjunto dos números reais sob uma perspectiva histórica, trazendo elementos que permitem compreender a construção desse conhecimento ao longo do tempo. Entender essa evolução é importante para contextualizar o trabalho e embasar a proposta pedagógica apresentada no capítulo seguinte. O Capítulo 4 descreve a sequência didática elaborada, detalhando seus objetivos, organização e atividades. O Capítulo 5 apresenta a metodologia adotada para a implementação da sequência didática, evidenciando os procedimentos utilizados na coleta e investigação dos dados. Finalmente, o Capítulo 6 reúne a análise e a discussão dos resultados obtidos, permitindo avaliar as contribuições da proposta e seus impactos no ensino de números reais.

2 REVISÃO DE LITERATURA E A RELEVÂNCIA DESTE TRABALHO

A revisão de literatura teve como objetivo realizar um levantamento da produção acadêmica existente sobre a História da Matemática e RPG eletrônico como recursos para o ensino de números reais no Ensino Fundamental. Essa pesquisa foi desenvolvida em duas fases, em razão das mudanças recentes na organização curricular. Até a publicação da BNCC (2018), o ensino de números reais era previsto para o 8º ano do Ensino Fundamental, motivo pelo qual esse termo foi utilizado na primeira etapa do levantamento. Posteriormente, com a adequação dos planos de curso da Secretaria de Educação de Minas Gerais, que formalizaram a abordagem do conteúdo no 9º ano a partir de 2025, tornou-se necessário realizar novas buscas, agora direcionadas especificamente a essa etapa de ensino. Essa pesquisa foi necessária para justificar tanto a originalidade quanto a adequação do presente trabalho. Para tanto, foram utilizadas as bases do Repositório do PROFMAT¹, do Portal da CAPES² e do Google Acadêmico³.

O levantamento bibliográfico foi realizado seguindo etapas que permitiram selecionar e organizar os estudos mais relevantes para esta pesquisa. O processo envolveu a definição do tema e das palavras-chave, a escolha das bases de dados, a aplicação de critérios de busca e a leitura analítica dos trabalhos selecionados. Os materiais foram então categorizados conforme sua relação com a História da Matemática, o ensino dos números reais e o uso de jogos e tecnologias digitais na educação. A Figura 2.1 apresenta um resumo das etapas desse processo.

A metodologia empregada utilizou estratégias adaptadas às particularidades de cada plataforma. Na primeira etapa da revisão de literatura no Repositório do PROFMAT, as buscas foram feitas com termos simples, como “números reais”, “8º ano do Ensino Fundamental”, “História da Matemática” e “RPG”, resultando em um total de 126 trabalhos para serem analisados. Desses, dois foram descartados: um por estar duplicado, já que apareceu nos resultados de mais de um termo de busca, e outro por tratar de um assunto divergente (proporção áurea).

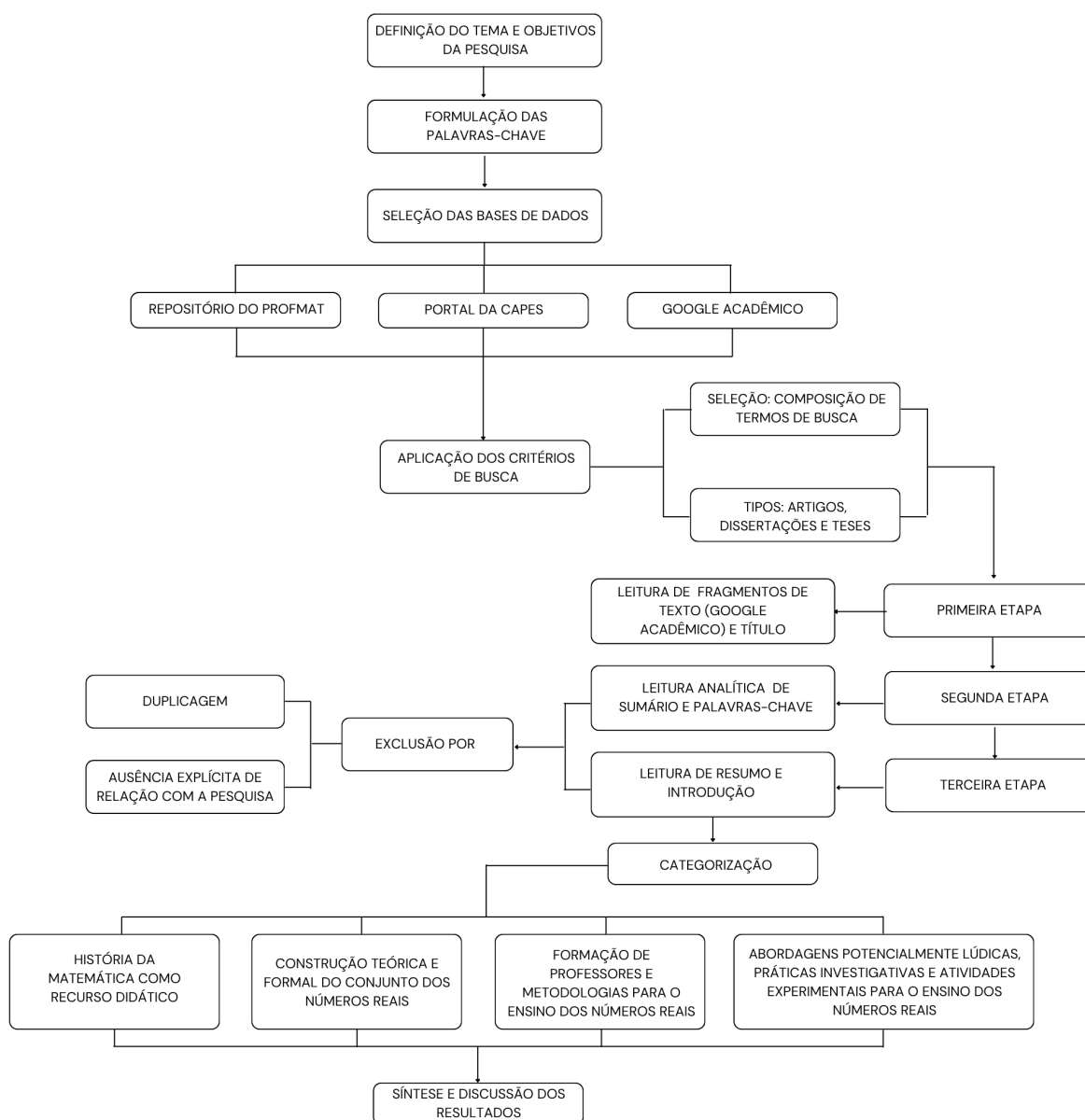
No Portal da CAPES, as buscas foram realizadas com termos compostos. A primeira combinação, entre os termos “números reais” e “História da Matemática”, resultou em 15 trabalhos, os quais foram selecionados para análise posterior. Em seguida, conduziu-se uma busca

¹ Acervo online que reúne as dissertações produzidas no Mestrado Profissional em Matemática na Rede Nacional. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 03 out. 2024

² Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) é uma biblioteca virtual que reúne e disponibiliza conteúdos científicos para instituições de ensino e pesquisa no Brasil. Disponível em: <https://www.periodicos.capes.gov.br/>. Acesso em: 13 out. 2024.

³ Ferramenta de pesquisa do Google que permite encontrar documentos científicos. Disponível em: <https://scholar.google.com.br/?hl=pt>. Acesso em: 10 out. 2024.

Figura 2.1 – Procedimentos metodológicos adotados na revisão de literatura.



Fonte: Da autora (2025).

mais específica com a expressão completa “história da matemática números reais RPG oitavo ano”, que, apesar de abrangente, não retornou resultados.

Já no Google Acadêmico, a busca foi realizada com uma combinação de termos mais complexa: “(História da Matemática OU história dos números) E (8º ano OU Ensino Fundamental) E (números reais OU conjunto dos reais) E (jogo educacional OU jogo de computador)”. A análise, nessa plataforma, foi conduzida inicialmente pela exploração dos títulos relacionados aos temas pesquisados. A seleção dos trabalhos foi feita com base nos títulos e nos fragmentos de texto disponibilizados pela ferramenta de busca, priorizando aqueles nos quais

dois ou mais termos representativos estivessem destacados, como a série em que o conteúdo é abordado, o próprio conteúdo (números reais), a contextualização pela História da Matemática e a metodologia de ensino associada ao uso de jogos eletrônicos e/ou RPG. O processo de leitura foi interrompido quando uma sequência de cinco páginas consecutivas deixou de apresentar resultados satisfatórios em relação aos termos da pesquisa. A partir desse procedimento, foram selecionados 40 trabalhos para exploração posterior.

As buscas iniciais nas três plataformas resultaram em 21741 retornos, dos quais 179 foram selecionados para a segunda etapa. A maior parte foi obtida no Google Acadêmico, que respondeu por mais de 21 mil resultados, enquanto o Repositório do PROFMAT e o Portal da CAPES apresentaram um volume menor, mas com maior proporção de trabalhos potencialmente relevantes para o nosso estudo, conforme apresentado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Resultado das buscas em plataformas ou repositórios.

| | PROFMAT | Google Acadêmico | Portal da CAPES | Total |
|----------------------------|----------------|-------------------------|------------------------|--------------|
| Resultados retornados | 126 | 21600 | 15 | 21741 |
| Resultados para a 2ª etapa | 124 | 40 | 15 | 179 |

Fonte: Da autora (2024).

A segunda etapa da revisão consistiu na leitura de sumários e palavras-chave para verificar a presença de conteúdos relacionados ao tema da pesquisa. Essa triagem inicial foi aplicada a todos os resultados do repositório do PROFMAT e do Portal da CAPES, além dos retornos do Google Acadêmico.

A classificação dos documentos, realizada na segunda etapa, considerou quatro categorias de relação com o tema. Trabalhos considerados sem relação apresentavam temas ou abordagens completamente distintos. Aqueles com pouca relação exploravam aspectos pontuais do tema, sem abordar todos os principais elementos desse trabalho, como os números reais integrados à História da Matemática ou ao uso de jogos educativos eletrônicos. Já os trabalhos com média relação tinham alguma proximidade teórica, mas divergiam em questões importantes como a metodologia de pesquisa ou abordavam apenas um dos subconjuntos dos números reais, por exemplo. Por fim, apenas poucos estudos foram classificados como de muita relação, por apresentarem um notável alinhamento com os objetivos desse trabalho (Tabela 2.2). A análise detalhada revelou que 130 itens não possuíam qualquer relação com o tema, 36 apresentavam pouca relação, 9 tinham média relação e apenas 4 foram considerados de muita relação.

Tabela 2.2 – Correspondência entre os trabalhos e o tema desta pesquisa.

| | PROFMAT | Google Acadêmico | Portal da CAPES | Total |
|---|----------------|-------------------------|------------------------|--------------|
| Itens selecionados por títulos e palavras-chave | 124 | 40 | 15 | 179 |
| Nenhuma relação | 99 | 21 | 10 | 130 |
| Pouca relação | 18 | 13 | 5 | 36 |
| Média relação | 4 | 5 | 0 | 9 |
| Muita relação | 3 | 1 | 0 | 4 |

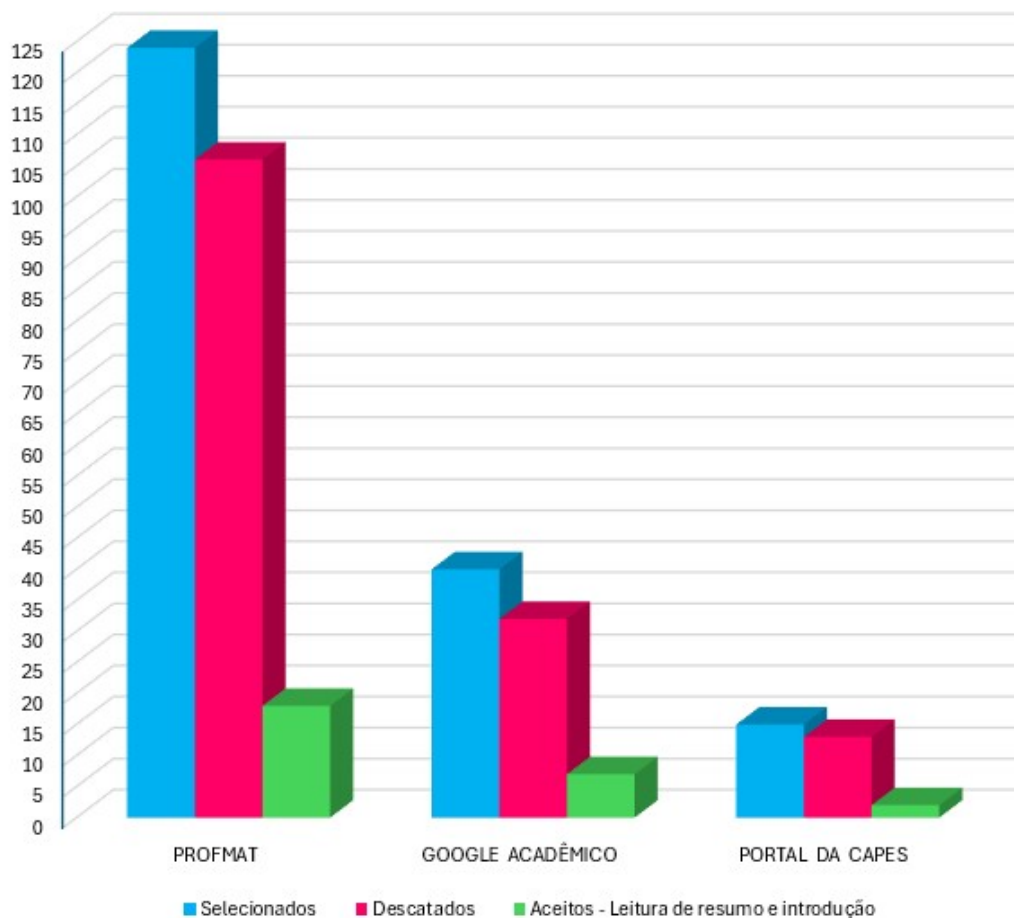
Fonte: Da autora (2024).

Após a identificação inicial do nível de relação dos trabalhos com o tema deste estudo, nenhuma, pouca, média ou muita relação, foi realizada uma nova triagem para definir quais trabalhos deveriam ser submetidos a uma leitura do resumo. Essa etapa foi importante para refinar o conjunto de documentos e orientar os passos seguintes da revisão de literatura. O critério utilizado para essa seleção baseou-se na quantidade de termos explícitos em comum com o tema da pesquisa, sendo eles: 8º ano do Ensino Fundamental, números reais, números irracionais, História da Matemática, jogos eletrônicos e jogos do tipo RPG. Os trabalhos que mencionaram pelo menos dois desses termos de forma direta no título, sumário ou palavras-chave foram classificados como “aceitos para leitura”. Os trabalhos com apenas dois desses termos foram considerados de pouca relação; com três termos, de média relação; e com quatro ou mais termos, de muita relação.

Na terceira etapa, mais detalhada, foram examinados a introdução e o resumo de cada trabalho. Do Repositório do PROFMAT, seguiram para essa etapa 18 documentos, distribuídos em 11 de pouca relação, 4 de média relação e 3 de muita relação. No Google Acadêmico, foram selecionados 7 trabalhos, sendo 1 de muita relação, 5 de média relação e 1 de pouca relação. Já no Portal da CAPES, 2 trabalhos de pouca relação foram incluídos na análise (Gráfico 2.1). A consideração de diferentes níveis de relação justificou-se pela necessidade de não restringir a revisão apenas aos estudos diretamente alinhados ao tema, mas também contemplar trabalhos que pudessem oferecer referenciais teóricos, metodológicos ou contextuais relevantes para a construção deste trabalho.

No segundo momento do levantamento, as buscas foram realizadas para contemplar a nova organização curricular que estabelece o ensino de números reais no 9º ano do Ensino Fundamental. Nessa etapa, constatou-se uma quantidade reduzida de pesquisas específicas sobre o tema nesse ano escolar, o que pode estar relacionado à recente transição do conteúdo do 8º para o 9º ano do Ensino Fundamental. Essa mudança, embora prevista desde a homologação da

Gráfico 2.1 – Quantitativo de trabalhos analisados por plataforma ou repositório.



Fonte: Da autora (2024).

BNCC em 2017, ainda se encontra em processo de consolidação nas práticas de ensino e nos materiais didáticos.

No Repositório do PROFMAT, foi pesquisado o termo “9º ano”, retornando 43 dissertações. Após análise preliminar, todas foram descartadas por não apresentarem relação com os conteúdos ou metodologias envolvidas nesta pesquisa. No Portal da CAPES, foram utilizados os termos “História da Matemática 9º ano” e “números reais 9º ano”, o que foi verificado em 26 documentos. Desses, 5 foram analisados considerando título, sumário e resumo. Nenhum deles apresentou relação suficiente com o tema para justificar uma leitura mais aprofundada.

Já no Google Acadêmico, a pesquisa foi realizada utilizando o termo “(história da matemática OU história dos números) E (9º ano OU nono ano OU ensino fundamental) E (números reais OU conjunto dos reais)”, o que gerou 2850 resultados. A triagem foi feita com a abertura de páginas enquanto os títulos mostravam alguma conexão com o tema e a busca foi encerrada após a análise de cinco páginas consecutivas sem resultados pertinentes. Nove documentos fo-

ram selecionados para análise preliminar, mas apenas um trabalho foi considerado relevante o suficiente para leitura do resumo e introdução.

Os 28 trabalhos analisados foram organizados em cinco categorias, a saber:

- a) História da Matemática como recurso didático;
- b) construção teórica e formal do conjunto dos números reais;
- c) formação de professores e metodologias para o ensino dos números reais;
- d) abordagens potencialmente lúdicas, práticas investigativas e atividades experimentais para o ensino dos números reais;
- e) origens e a evolução do conceito de número real.

A seguir, será apresentado um breve resumo de cada um dos trabalhos selecionados, destacando suas principais ideias e contribuições para o tema em questão.

A primeira categoria inclui trabalhos que propõem a História da Matemática como recurso didático no ensino de conceitos matemáticos na Educação Básica, especialmente o conjunto dos números reais. Os autores destacam a importância de contextualizar a aprendizagem a partir de uma perspectiva histórica, mas sem o uso de tecnologias ou jogos eletrônicos.

Os trabalhos de Gomes (2005), Lustosa (2021) e Reis (2022) destacam o uso da História da Matemática para ensinar números reais na Educação Básica. O foco dessas dissertações está na exploração histórica desde civilizações antigas até a formalização moderna, utilizando problemas históricos para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos.

Alves (2016) analisa como a História da Matemática pode ser utilizada como recurso pedagógico, incentivando práticas didáticas interativas para que os estudantes se tornem protagonistas no aprendizado. O autor elaborou propostas de atividades em formato de oficinas (sem aplicação prática) e aplicou um questionário para avaliar a percepção dos estudantes sobre a relevância da Matemática.

Na segunda categoria, foram agrupados trabalhos que se concentram na construção teórica e formal do conjunto dos números reais. Os autores deste grupo analisam as bases axiomáticas e metodológicas utilizadas para definir os números reais, especialmente por meio de cortes de Dedekind e sequências de Cauchy. Os trabalhos dessa categoria abordam a teoria matemática de maneira rigorosa e suas aplicações no contexto educacional, mas pouco evidenciam a História da Matemática e não incluem jogos eletrônicos em suas propostas.

Nos trabalhos de Colares (2021), Barreto (2020) e Pimentel (2018) são propostas abordagens formais para caracterizar e construir os números reais, abordando sua evolução até o conceito de cortes de Dedekind e suas aplicações no Ensino Médio. Enquanto Colares (2021) propõe demonstrações formais para a Educação Básica, Barreto (2020) aplica uma sequência didática no 1º ano do Ensino Médio (embora construa um embasamento histórico, não o utiliza em sua aplicação prática) e Pimentel (2018) não menciona a Educação Básica em seu trabalho. Estes trabalhos destacam as propriedades fundamentais, como completude e densidade, dos números reais.

Blanco (2017), Massad (2014) e Ramos (2014) também apresentam uma abordagem de base histórica para professores e estudantes da Educação Básica, explorando a axiomática de Peano e cortes de Dedekind. Entretanto, enquanto o primeiro complementa essas abordagens com a proposta de Conway e seus jogos combinatórios como representação numérica, os dois últimos acrescentam a construção dos números reais por suas representações decimais e a relação com a reta numérica.

Costa (2019) propõe a estruturação progressiva dos conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e irracionais) para estudantes e professores de Matemática do Ensino Médio. Para o autor, leis, propriedades e teoremas que definem cada conjunto, incluindo provas e projeções que unem a teoria matemática com as abstrações iniciais dos estudantes, são elementos fundamentais para a construção de uma base matemática sólida.

O surgimento dos números reais por meio da construção com base nos pares de sequências de Cauchy, abordando especialmente os conceitos de números irracionais e a relação entre eles e os números racionais, constitui o foco do trabalho de Oliveira (2013). Este autor sugere especificamente uma atividade para localizar números irracionais na reta numérica, embora não faça aplicação da mesma.

Santos (2015) desenvolve a construção geométrica dos números reais, caracterizando-os como números que expressam uma medida. Além disso, o autor evidencia as limitações dos números racionais em representar todas as medidas possíveis, motivando a criação de um conjunto numérico mais completo.

Dutra (2014) parte de uma breve contextualização histórica da Matemática e prossegue com uma apresentação formal dos números reais, abordando a axiomática de Peano, cortes de Dedekind e sequências de Cauchy. Ele conclui seu trabalho com sugestões de propostas didáticas que possam desafiar os estudantes da Educação Básica.

O trabalho de Souto (2021) aborda o ensino dos números reais no 9º ano do Ensino Fundamental, destacando limitações na abordagem tradicional, que privilegia a classificação em detrimento da compreensão conceitual. Fundamentado na teoria histórico-cultural, o autor propõe uma sequência didática que evidencia a compreensão das grandezas incomensuráveis, um conceito desafiador no ensino e na aprendizagem de Matemática, e realiza uma análise de sua proposta segundo essa teoria, embora não tenha realizado aplicação prática.

A terceira categoria agrupa os trabalhos que exploram a formação de professores e o desenvolvimento de metodologias para o ensino dos números reais. Nessa categoria, Alves (2014) e Oliveira (2018) discutem as possíveis falhas conceituais encontradas em livros didáticos a partir de uma revisão teórica e histórica sobre os números reais, incluindo a questão da incomensurabilidade. Enquanto Alves (2014) propõe um ensino axiomático dos números reais, Oliveira (2018) investiga o conhecimento e a forma como os professores ensinam esse conceito, destacando falhas recorrentes em livros didáticos – como a definição restrita à caracterização decimal – e defendendo que “os livros deveriam abordar diferentes áreas do conhecimento: o de número, o de medida e o de espaço”. Ambos os autores citam a melhoria do processo de formação, inicial e continuada, de professores de Matemática como um recurso para melhorar o ensino de números reais.

O trabalho de Weinfurter (2015) tem como objetivo ampliar o conhecimento dos professores sobre o conjunto dos números reais, com foco específico na classificação entre números racionais e irracionais. Sua abordagem teórica visa proporcionar uma nova perspectiva sobre a construção conceitual desses subconjuntos, a fim de corrigir equívocos comuns no entendimento por parte dos estudantes.

Por outro lado, Pommer (2012) explora a relação entre a História da Matemática e a construção formal do conjunto dos números reais, analisando o desenvolvimento histórico e conceitual que levou à definição rigorosa dos números reais, com uma análise aprofundada de como esse conteúdo é abordado em livros didáticos. O trabalho ainda destaca marcos históricos, como o surgimento das grandezas incomensuráveis, e abordagens teóricas, como os cortes de Dedekind, que resultaram na estruturação completa dos números reais.

Os trabalhos da categoria quatro tratam de abordagens com potencial lúdico, práticas investigativas e atividades experimentais para o ensino dos números reais. Os autores apostam na participação ativa dos estudantes, no uso de jogos e em atividades investigativas para facilitar a compreensão dos conceitos.

O artigo de Sousa (2020) sugere combinar a História da Matemática com as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC). Essa combinação visa criar práticas pedagógicas inovadoras a partir de produtos educacionais desenvolvidos sobre cinco dissertações diferentes, com possibilidades de aplicação na Educação Básica.

Matos e Barros (2016) apresentam atividades investigativas que auxiliam os estudantes do 1º ano do Ensino Médio a superar dificuldades com o conceito de números irracionais. As autoras defendem a validade da estratégia, baseando-se em dados obtidos por meio de avaliações aplicadas aos estudantes antes e após a aplicação da atividade.

Uma proposta semelhante foi descrita na dissertação de Nobre (2017). O autor propõe e aplica uma sequência didática para o 8º ano do Ensino Fundamental, baseada em práticas investigativas, mas não utiliza nenhum tipo de jogo em sua proposta. Para ele, estratégias de ensino para o 8º ano, que incentivem práticas investigativas e metodologias que promovam o protagonismo dos estudantes, podem contribuir com o aprendizado dos números irracionais.

Considerando o resultado de avaliações externas e antecipando possíveis dificuldades com conteúdos mais complexos, como funções e trigonometria, Silva (2015) apresenta sua proposta didática com atividades criativas e contextualizadas, utilizando jogos e aplicações para facilitar a aprendizagem dos estudantes. Apesar de propor atividades em formatos diversos, os jogos de computador requeriam a representação de números na reta real, as principais operações com números inteiros e a formação da sequência dos números naturais. O autor desenvolveu aulas com estudantes do Ensino Médio que envolviam jogos disponíveis na internet (como atividades de ordenar números) e dominós, e aplicou questionários antes e após as atividades para investigar a compreensão dos conceitos. No entanto, o foco principal da pesquisa permaneceu em um grupo de licenciandos.

Rocha (2018) introduz números irracionais por meio de tarefas colaborativas e investigativas, utilizando materiais manipulativos e contextos históricos. Como produto educacional, ela criou um curso de extensão para professores, com o objetivo de incentivar novas abordagens teóricas e práticas no ensino de números irracionais nos anos finais do Ensino Fundamental.

Serafim (2020) também discute o ensino dos números irracionais nos anos finais do Ensino Fundamental, abordando as dificuldades dos estudantes em compreender esse conceito e a forma como ele é apresentado nas escolas. Seu trabalho inclui uma contextualização histórica dos números irracionais, análise de abordagens em livros didáticos e os resultados de uma pesquisa com professores sobre suas práticas pedagógicas. Além disso, propõe atividades didáticas

com o uso de ferramentas como GeoGebra, calculadoras e jogos matemáticos, com o objetivo de envolver os estudantes de maneira ativa no processo de aprendizado.

Os dois trabalhos selecionados no Portal da CAPES compõem a quinta categoria e se dedicam a investigar as origens e a evolução do conceito de número real. Em contraste com pesquisas centradas em metodologias de ensino ou aplicações em sala de aula, os estudos de Silva e Ribeiro (2024) e de Lopes e Sá (2016) buscam compreender como a noção de número real se desenvolveu ao longo da História da Matemática, quais foram as principais questões e debates que a envolveram e como ela se relaciona com outros conceitos matemáticos mais profundos, como aqueles estudados em análise real.

Portanto, os trabalhos apresentados anteriormente confirmam que o tema dessa pesquisa é pouco explorado na literatura acadêmica, quando se trata da integração dos quatro pilares propostos: 9º ano do Ensino Fundamental, números reais, História da Matemática e jogos eletrônicos do tipo RPG. As pesquisas identificadas abordam frequentemente um ou dois desses elementos, mas raramente os integram de forma expressiva. Assim, nota-se que a pesquisa proposta é inovadora e responde a uma necessidade identificada na literatura, contribuindo para o avanço das práticas pedagógicas no Ensino Fundamental e para o uso criativo de tecnologias educacionais.

3 O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA

A ideia de número é mais antiga do que a história escrita, sendo desenvolvida como parte da necessidade de organizar e compreender o mundo ao redor. Os primeiros humanos já percebiam a quantidade de objetos em um grupo, comparando-os com outros. Essa noção intuitiva de número foi se desenvolvendo ao longo do tempo, dando origem aos sistemas numéricos que conhecemos hoje. Eves (2011, p. 25) explica que o “conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos [...] que a maneira como ocorreram é largamente conjectural”. Ele aponta que há evidências arqueológicas de que o ser humano já era capaz de contar há cerca de 50 mil anos, utilizando, por exemplo, o senso numérico que também é identificado em alguns animais.

Esse início primitivo da Matemática reflete o desenvolvimento das necessidades humanas e sua busca por soluções para problemas concretos, como contagem, medição e divisão. A Matemática se desenvolveu como resposta às demandas práticas da vida cotidiana, antes de se tornar uma ciência abstrata e, segundo Boyer (2012, p. 24), “o desenvolvimento do conceito de número foi um processo longo e gradual”. Essa progressão culminou na construção do conjunto dos números reais, que sintetiza os números naturais, inteiros, racionais e irracionais em um sistema integrado e consistente.

Cada avanço nos conjuntos numéricos foi impulsionado pelos “princípios de extensão e economia” (CARAÇA, 1951). Para o autor, o princípio da extensão reflete a especificidade do ser humano em generalizar e ampliar suas descobertas, explorando de forma sistemática todas as consequências que delas podem ser extraídas. Por outro lado, o princípio da economia traduz a preferência por caminhos mais curtos e simples, seja em atividades práticas ou em construções intelectuais sofisticadas.

O desenvolvimento dos números também pode ser entendido como resultado do enfrentamento de limitações práticas e conceituais que surgiram ao longo da história, à medida que o ser humano precisou resolver problemas cada vez mais complexos. Desde o uso dos números naturais, para contar objetos, até o surgimento dos números irracionais, para lidar com questões geométricas. Cada avanço marcou, não apenas a superação de barreiras, mas também a expansão do pensamento matemático. Assim, novos conjuntos foram concebidos para solucionar problemas que os anteriores não eram capazes de resolver, enquanto o princípio da economia garantia que as propriedades e operações fundamentais fossem preservadas, promovendo um sistema numérico funcional e preciso.

A evolução histórica dos conjuntos numéricos destaca a necessidade de estruturas matemáticas cada vez mais abrangentes para descrever e representar a realidade física e abstrata. Iniciando com os números naturais, empregados nas mais básicas operações de contagem, a Matemática evoluiu para acrescentar os números inteiros, essenciais para representar tanto as quantidades positivas quanto as negativas. A necessidade de expressar medidas precisas levou à criação dos números racionais, que incluem as frações e as divisões exatas. No entanto, a busca por uma representação completa das grandezas geométricas revelou a existência dos números irracionais, cuja representação decimal infinita e não periódica desafiou a compreensão intuitiva de número. Por fim, a unificação desses conjuntos no conjunto dos números reais criou um instrumento matemático capaz de modelar uma grande variedade de fenômenos naturais e sociais.

Nas próximas seções, será traçado um breve percurso histórico dos conjuntos dos números naturais, dos números inteiros, dos números racionais e dos números irracionais. Serão destacadas suas origens, limitações e o papel fundamental de cada um na formação do conjunto dos números reais.

3.1 O conjunto dos números naturais

A história dos números naturais revela uma jornada de crescente complexidade e abstração, ligada à evolução do pensamento matemático. Esses números, que hoje reconhecemos como elementos de um conjunto infinito, denotado por \mathbb{N} e escrevemos como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, representam a ideia intuitiva de contagem.

Cabe destacar que, neste trabalho, o zero não é considerado como número natural, em consonância com a cronologia dos registros históricos da Matemática. Contudo, há divergências na literatura: alguns autores incluem o zero no conjunto dos números naturais, enquanto outros defendem sua exclusão. Por exemplo, Lima (2006, p. 1) afirma que “Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro”, indicando que a contagem tradicionalmente começa a partir da unidade. Já Iezzi, Dolce e Machado (2022) destacam que os números podem ser organizados em conjuntos, sendo convencionalizado que o conjunto dos números naturais é representado por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$. A perspectiva adotada neste estudo segue a exclusão do zero como número natural, embora se reconheça a validade de outras interpretações.

O surgimento dos números naturais está estabelecido na observação e na necessidade prática. Cada cultura contribuiu de maneira única para esse desenvolvimento. A necessidade de contar objetos, medir distâncias e organizar o tempo impulsionou diferentes civilizações a desenvolverem sistemas numéricos próprios, adaptando-os às suas particularidades culturais e às demandas de seu contexto histórico. Nesse sentido, os números não surgiram de forma isolada, mas como uma resposta às exigências da vida em sociedade, especialmente no que diz respeito ao comércio, à agricultura e à administração de recursos. Além disso, a construção dos números naturais exigiu a criação de símbolos, permitindo que as pessoas registrassem, comunicassem e transmitissem informações quantitativas para outras gerações.

A ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens. A imagem do homem, criando numa maneira completa a ideia de número, para depois aplicar à prática da contagem, é cômoda mas falsa (CARAÇA, 1951, p. 4).

Em um passado remoto, nossos antepassados expressavam a sua concepção primitiva de número indicando as quantidades um, dois ou muitos, sendo o último termo representante de qualquer quantidade acima de dois (BOYER, 2012). Na Pré-história, há indícios de que a contagem era uma atividade comum para a sobrevivência. Caçadores precisavam estimar a quantidade de animais em um bando, agricultores necessitavam controlar a produção de alimentos e líderes de tribos precisavam contabilizar seus membros (ROQUE, 2012).

As primeiras civilizações desenvolveram sistemas elementares de contabilidade, utilizando objetos e marcas como forma de registrar e controlar seus bens. Essa prática consistia em estabelecer uma correspondência entre um item e um símbolo específico, como uma marcação em um osso ou um conjunto de pedras, permitindo assim acompanhar a quantidade e a natureza dos seus pertences. Tais registros, ainda rudimentares, representavam um importante avanço cognitivo, pois possibilitavam não apenas o controle de recursos, mas também o planejamento de atividades coletivas e o desenvolvimento de formas iniciais de organização social. Como exemplo desta prática, observa-se achados arqueológicos como o osso “encontrado em Ishango, na África, e datado entre vinte mil e dez mil anos a.E.C.” (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 1). Ele apresenta uma série de entalhes que sugerem a possibilidade de que nossos ancestrais já possuíam noções matemáticas há mais de vinte mil anos, conforme apresentado na Figura 3.1.

Figura 3.1 – O osso de Ishango com entalhes.



Fonte: G1 (2025)¹.

A invenção da escrita, ocorrida por volta de 3500 a.C., representou um marco fundamental na história da contagem ao possibilitar registros duradouros de quantidades. A partir de então, com o domínio da escrita, os sistemas de numeração se tornaram mais complexos e eficientes. A escrita cuneiforme², desenvolvida por volta de 2100 a.C. pelas civilizações mesopotâmicas, como os sumérios, primeiros povos a habitar a Mesopotâmia, e babilônios, desempenhou um papel significativo na construção do conceito de número natural. Por meio de registros em tabletas³ de argila, esse sistema numérico revelou uma complexidade relevante para o desenvolvimento da Matemática (EVES, 2011).

A Matemática dos sumérios representa um marco fundamental na história da humanidade. Esse sistema numérico, com suas particularidades e aplicações, moldou o pensamento matemático de civilizações posteriores e deixou um legado para a compreensão dos números. A base do sistema numérico sumério era sexagesimal (Figura 3.2), ou seja, era construído sobre múltiplos de 60 e era bastante versátil, pois esse sistema de numeração foi empregado tanto em cálculos astronômicos quanto em medidas de áreas e volumes (ROQUE, 2012). A posição de cada símbolo dentro de um número determinava seu valor, permitindo a representação de números grandes com uma quantidade relativamente pequena de símbolos, em comparação

¹ G1. **De ossos pré-históricos à computação em nuvem:** a longa história dos números primos. 2025. Disponível em: <https://g1.globo.com/ciencia/noticia/2025/06/03/de-ossos-pre-historicos-a-computacao-em-nuvem-a-longa-historia-dos-numeros-primos.ghtml>. Acesso em: 24 jun. 2025.

² A escrita cuneiforme recebe esse nome pelo formato dos seus símbolos, que se assemelham a cunhas ou pequenas formas triangulares. A palavra cuneiforme vem do latim *cuneus*, que significa cunha. Essa escrita foi feita com a ajuda de objetos com ponta em forma de cunha sobre argila mole, criando marcas nesse formato.

³ No presente texto, as expressões “tabletes” e “tabletas” são utilizadas alternadamente para designar o mesmo conceito. A diferença na grafia reflete a variação nos termos empregados pelos diferentes autores citados como referência nesta pesquisa.

com as formas anteriores de representar os números. A divisão do tempo em horas, minutos e segundos, baseada no número 60, é uma herança dessa antiga civilização, assim como a divisão do círculo em 360° , demonstrando a consistência de suas contribuições para toda a Matemática (EVES, 2011).

Figura 3.2 – Sistema de numeração sexagesimal posicional.

| | | | | | | | | | |
|------------|----|-----------|----|--------------|----|----------------|----|---------|----|
| I | 1 | II | 2 | III | 3 | IIII | 4 | V | 5 |
| IIII | 6 | VII | 7 | IIIIII | 8 | IIIIIIII | 9 | < | 10 |
| < I | 11 | < II | 12 | < III | 13 | < IIII | 14 | < V | 15 |
| < IIII | 16 | < VII | 17 | < IIIIII | 18 | < IIIIIIII | 19 | << | 20 |
| << I | 21 | << II | 22 | << III | 23 | << IIII | 24 | << V | 25 |
| << IIII | 26 | << VII | 27 | << IIIIII | 28 | << IIIIIIII | 29 | <<< | 30 |
| <<< I | 31 | <<< II | 32 | <<< III | 33 | <<< IIII | 34 | <<< V | 35 |
| <<< IIII | 36 | <<< VII | 37 | <<< IIIIII | 38 | <<< IIIIIIII | 39 | <<<< | 40 |
| <<<< I | 41 | <<<< II | 42 | <<<< III | 43 | <<<< IIII | 44 | <<<< V | 45 |
| <<<< IIII | 46 | <<<< VII | 47 | <<<< IIIIII | 48 | <<<< IIIIIIII | 49 | <<<<< | 50 |
| <<<<< I | 51 | <<<<< II | 52 | <<<<< III | 53 | <<<<< IIII | 54 | <<<<< V | 55 |
| <<<<< IIII | 56 | <<<<< VII | 57 | <<<<< IIIIII | 58 | <<<<< IIIIIIII | 59 | I | 60 |

Fonte: Roque (2012, p. 29).

Já em torno de 1700 a.C., os babilônios demonstravam um notável domínio da Matemática, como comprovam os tabletas com inscrições cuneiformes. Esses povos herdaram e aperfeiçoaram o sistema sumério, desenvolvendo-o ainda mais durante o período que se estende de 2000 a.C. até a queda da Babilônia em 539 a.C. (BOYER, 2012).

Esse sistema de numeração posicional ressentiu-se, até depois do ano 300 a.C., da falta de um símbolo para o zero que representasse as potências ausentes de 60, levando assim a possíveis mal-entendidos na expressão de um número dado. Finalmente introduziu-se um símbolo, consistindo em duas cunhas pequenas, inclinadas, mas esse símbolo só era usado para indicar uma potência ausente de 60 *dentro* de um número, nunca quando ela ocorresse no seu *final*. Esse símbolo era, portanto, apenas um *zero* parcial, pois um zero verdadeiro serve para indicar as potências ausentes da base tanto no meio como no final dos números, como é o caso de nossos 304 e 340 (EVES, 2011, p. 36).

Portanto, a diferença mais significativa no desenvolvimento dos números pelos povos sumérios e babilônios está na representação do zero. Os sumérios não possuíam um símbolo específico para o zero, enquanto os babilônios, em um período posterior, desenvolveram um

símbolo rudimentar para representar posições vazias. Contudo, o símbolo introduzido para representar o zero “aparentemente não terminou com toda a ambigüidade, pois parece ter sido usado só para posições intermediárias vazias. Não há tábuas preservadas, onde o sinal para o zero apareça em uma posição terminal” (BOYER, 2012, p. 41).

O procedimento mais trivial da correspondência biunívoca na relação um para um “consiste em atribuir um valor inteiro a cada dedo, na ordem de sucessão regular começando pela unidade” (IFRAH, 1997, p.92). A partir dessa ideia de correspondência, a contagem se tornou uma prática comum nas sociedades antigas, evoluindo de simples agrupamentos para sistemas de numeração mais complexos. Quando os dedos (das mãos e dos pés) passaram a não ser suficientes para representar determinadas quantidades, o homem as registrava com pequenos agrupamentos de cinco pedras, observada a familiaridade do agrupamento com sua própria anatomia. O sistema decimal, por exemplo, é baseado em agrupamentos de dez, provavelmente influenciado pelo uso dos dez dedos das mãos como uma forma prática de contar (BOYER, 2012). Ele é posicional, o que significa que o valor de um dígito depende de sua posição no número. Cada posição representa uma potência de dez (unidades, dezenas, centenas, ...), facilitando a representação e manipulação de grandes quantidades.








A Matemática egípcia, embora menos conhecida do que a babilônica, apresentava um sistema numérico bastante desenvolvido e adaptado às necessidades daquela sociedade. Os egípcios, assim como outras civilizações antigas, utilizavam os números naturais para diversas atividades do cotidiano, como a agricultura, a construção de grandes monumentos e a administração de recursos antes de 3000 a.C. A numeração egípcia apresentava uma estrutura baseada na repetição de símbolos hieroglíficos⁴ para representar quantidades. Uma das suas características mais distintas era a utilização de um sistema decimal de caráter aditivo (ROQUE, 2012). Os egípcios utilizavam símbolos específicos para representar as potências de 10 (Figura 3.3). Ao combinar esses símbolos de forma repetitiva, eles conseguiam representar qualquer número. A numeração egípcia era um sistema simples e intuitivo, mas ainda apresentava algumas limitações para cálculos complexos. A ausência do zero e a necessidade de repetir símbolos muitas vezes na representação de grandes quantidades eram as principais limitações do sistema egípcio.

Outra civilização, cuja história e cultura são marcantes em diversas áreas do conhecimento, incluindo a Matemática, é a romana. Ainda que o sistema de numeração desenvolvido

⁴ Hieróglifo: escrita pictórica do antigo Egito, também usada para designar a escrita dos astecas e de outros grupos indígenas americanos.

Fonte: <https://www.dicio.com.br/hieroglifo-2/>. Acesso: 18 de set. de 2024.

Figura 3.3 – Simbologia do sistema de numeração egípcio.

| Bastão | Calcanhar | Corda enrolada | Flor de lótus | Dedo indicador | Peixe ou ave | Pessoa |
|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 19).

pelos romanos não tenha sido tão sofisticado, foi de grande importância na Europa durante séculos, sendo usado em contextos específicos mesmo nos dias atuais. Esse sistema é aditivo-subtrativo e não posicional (ROQUE; CARVALHO, 2012). Isso quer dizer que os valores dos símbolos são somados para obter o número e um símbolo de menor valor colocado à esquerda de um símbolo de maior valor indica subtração (por exemplo, $IV = 4$, sabendo que $I=1$ e $V=5$). Além disso, o valor de um símbolo não depende de sua posição no número. O sistema de numeração romano, que utilizava sete letras do alfabeto latino para representar números (Figura 3.4), era o padrão na Roma Antiga e se espalhou por grande parte da Europa.

A escolha pelas letras I, V, X, L, C, D e M é objeto de muita especulação. Acredita-se que a letra I representa um dedo erguido de uma mão. O X seria a composição de dois V ou a representação de duas mãos ou dois dedos cruzados ou entrelaçados. Essas suposições vêm do fato de que a transição dos números falados para os numerais pode ter ocorrido através do uso dos números digitais (NETO, 2016, p. 36).

Figura 3.4 – Simbologia do sistema de numeração romano.

| | |
|----------|---|
| I | Unidade (Unus) – 1 |
| V | Cinco Unidades (Quinque) – 5 |
| X | Dez Unidades (Decem) – 10 |
| L | Cinquenta Unidades (Quinquaginta) – 50 |
| C | Cem Unidades (Centum) – 100 |
| D | Quinhentas Unidades (Quingenti) – 500 |
| M | Mil Unidades (Mille) – 1000 |

Fonte: NETO (2016, p. 35).

Para Ifrah (1997), os símbolos do sistema romano de numeração têm sua origem relacionada à prática do entalhe e precedem a existência de qualquer alfabeto. O autor ainda destaca que as operações com tais algarismos foram consideradas bastante confusas. Observe abaixo a Figura 3.5, representando essa ideia. Ao analisar a figura, é possível perceber como a simbologia romana, baseada em repetições e combinações de letras, tornava os cálculos longos e visualmente complexos. A ausência de um sistema posicional e de um símbolo para o

zero dificultava a realização de operações aritméticas, como somas e subtrações, que exigiam manipulações extensas de símbolos.

Figura 3.5 – Soma utilizando os números romanos.

$$\begin{array}{r}
 \text{DCCCLXIX} \\
 + \quad \text{MMMCDXLV} \\
 + \quad \text{MMCMXCIX} \\
 + \quad \text{MMMDCCLXXXVIII} \\
 \hline
 \text{MMMMMMMMMMCCI}
 \end{array}$$

Fonte: Da autora (2025).

Os romanos adotaram uma ferramenta portátil, chamada ábaco romano (Figura 3.6), para realizar cálculos. O ábaco romano consistia numa prancha com sulcos ou colunas verticais, onde eram colocadas pequenas esferas ou contas, chamadas de cálculos. Cada sulco correspondia a um valor posicional decimal, como unidades, dezenas, centenas e assim por diante. A organização e o movimento dessas contas permitiam representar e manipular números, facilitando a execução de operações aritméticas básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão.

Figura 3.6 – Ábaco romano.



Fonte: Viva o Linux⁵.

A criação de uma representação para o zero, aparentemente simples, revolucionou a forma como entendemos e utilizamos os números. Antes de sua introdução, os sistemas de numeração eram limitados em sua capacidade de representar números, realizar cálculos e desenvolver conceitos matemáticos mais avançados.

⁵ VIVA O LINUX. **Por que os romanos não fizeram computadores.** 2024. Disponível em: <https://www.vivaolinux.com.br/artigo/Por-que-os-romanos-nao-fizeram-computadores>. Acesso em: 09 dez. 2024.

Segundo Ibrah (1997), diversas civilizações antigas buscaram formas de representar a ausência de valor em seus sistemas de numeração, fornecendo indícios para o desenvolvimento do conceito de zero. Os babilônios, por exemplo, usavam um espaço em branco para indicar posições vazias em seu sistema sexagesimal, embora isso frequentemente levasse a ambiguidades interpretativas. Já os maias⁶, notavelmente mais avançados nesse aspecto, criaram um símbolo diferente para o zero em seu sistema vigesimal, utilizando-o principalmente em contextos astronômicos e calendários. Esses estudos evidenciaram o esforço dessas culturas em lidar com situações nas quais o zero era fundamental, mesmo sem consolidar todas as propriedades que ele adquiriu posteriormente na Matemática.

O sistema de numeração que usamos é posicional de base 10 e sua origem remonta a civilizações antigas como a indiana e a árabe, por isso recebe o nome de sistema indo-arábico. Nesse sistema, o valor de cada dígito depende de sua posição, sendo o zero essencial para indicar a ausência de valor em uma posição específica. Criado pelos hindus e difundido pelos árabes, o sistema indo-arábico evoluiu ao longo dos séculos, com exemplos mais antigos datando de 250 a.C., mas sem incluir o zero ou a notação posicional. A palavra zero tem origem no termo árabe *sifr*, derivado do hindu *sunya* (vazio). Paralelamente, o sistema científico chinês, de base 10, já utilizava a notação posicional, introduzindo o círculo como símbolo de zero durante a dinastia Sung (960-1126) (EVES, 2011).

A Figura 3.7 ilustra a evolução dos símbolos que representam os algarismos de 0 a 9, desde sua forma hindu até a versão moderna, evidenciando o processo de simplificação e padronização gráfica que permitiu a disseminação do sistema indo-arábico e seu uso universal. Ao permitir a criação de sistemas de numeração posicionais, o zero abriu caminho para uma infinidade de possibilidades e contribuiu para o avanço do conhecimento humano.

Figura 3.7 – Evolução dos símbolos que representam os algarismos de 0 a 9.

| | | | | | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hindu | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ |
| Arabic | • | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ |
| Medieval | o | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Modern | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Fonte: Adaptado de Sistema de Numeração Decimal⁷.

⁶ Os maias foram uma das civilizações mais avançadas da América pré-colombiana, que se destacaram pela arte, arquitetura, matemática e astronomia.

⁷ Pedagogia 1.5. **A prova de que o aluno não erra mais as contas em atividades matemática é entender bem o sistema de numeração decimal.** Disponível em: <https://pedagogia1ponto5.com/sistema-de-numeracao-decimal-snd/>. Acesso em: 27 jan. 2025.

3.2 O conjunto dos números inteiros

O conjunto dos números inteiros, denotado por \mathbb{Z} , pode ser descrito por seus elementos como $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, os quais são essenciais para representar situações práticas que possibilitam compreender e interagir com o mundo ao nosso redor. Os números inteiros não surgiram de maneira linear, mas como resposta a desafios específicos enfrentados por diferentes culturas e a problemas matemáticos ao longo do tempo, cada um contribuindo para o desenvolvimento, não apenas do próprio conjunto, mas de toda a Matemática. Embora historicamente a expansão do sistema numérico tenha ocorrido inicialmente com os números racionais (ROQUE; CARVALHO, 2012), neste trabalho, a apresentação dos números inteiros precede a dos racionais, pois organiza os conceitos de forma gradual e lógica, conforme a sequência recomendada pela BNCC.

Diferentes civilizações desempenharam papéis importantes na consolidação do conjunto dos números inteiros, que só foi formalizado muito tempo depois na Europa. Exemplos de problemas práticos que contribuíram para a criação de números inteiros incluem a necessidade de registrar subsídios no comércio, calcular variações de altitude e descrever características naturais como temperaturas negativas.

Na Grécia Antiga, os números inteiros foram associados à Filosofia e à Geometria. A escola pitagórica, liderada por Pitágoras, via os números como a essência de todas as coisas, explorando especialmente as propriedades dos números inteiros positivos. No entanto, a visão pitagórica, marcada por um aspecto místico e geométrico, limitava-se aos números inteiros positivos. A ideia de números negativos era considerada absurda, uma vez que não encontrava correspondência direta na realidade física. “Na Grécia, a palavra ‘número’ era usada só para os inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único, mas como uma razão ou relação entre inteiros [...]” (BOYER, 2012, p. 59).

Segundo Stewart (2016), os chineses desenvolveram um sistema de contagem com varetas que era bastante eficiente para a época. Esse sistema permitia representar números positivos e negativos, e era utilizado para realizar cálculos diversos. Usava-se hastes vermelhas para representar números positivos e hastes pretas para números negativos (Figura 3.8). Esse sistema visual evidenciava uma compreensão intuitiva da oposição entre ganhos e perdas, que mais tarde influenciaria outros sistemas matemáticos. “Para que um número seja representado de forma mais clara, símbolos horizontais e verticais são usados de modo alternado - por exemplo,

o número 752 usa um 7 vertical, depois um 5 horizontal, seguido de um 2 vertical” (WARSI *et al.*, 2020, p. 77).

Figura 3.8 – Sistema chinês de numerais de vareta.

| | | | | | | | | | | |
|------------|---|----|----|-----|------|-------|----|----|-----|------|
| Positivo | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Vertical | | | | | | | ┐ | ┐┐ | ┐┐┐ | ┐┐┐┐ |
| Horizontal | | — | == | === | ==== | ===== | └ | └└ | └└└ | └└└└ |
| Negativo | 0 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | -6 | -7 | -8 | -9 |
| Vertical | | | | | | | ┐ | ┐┐ | ┐┐┐ | ┐┐┐┐ |
| Horizontal | | — | == | === | ==== | ===== | └ | └└ | └└└ | └└└└ |

Fonte: Warsi *et al.* (2020, p. 77)

Boyer (2012) explica que os chineses utilizavam principalmente dois sistemas de numeração: um multiplicativo e outro posicional. No sistema multiplicativo, o valor de cada dígito era multiplicado pela potência de dez correspondente ao valor de sua posição, sendo os números escritos como uma sequência desses produtos. Já no sistema posicional, o valor de um dígito dependia da sua posição dentro do número, similar ao nosso sistema decimal atual.

Avanços significativos no desenvolvimento do conjunto dos números inteiros ocorreram na Índia.

Os matemáticos indianos também reconheciam números negativos e anotaram regras consistentes para operar aritmeticamente com elas. O manuscrito Bakshali, de cerca de 300 d.C., inclui cálculos com números negativos, que são distinguidos por um símbolo + onde hoje usaríamos -. (Os símbolos matemáticos têm mudado repetidamente com o tempo, às vezes de maneiras que agora julgamos confusas.) (STEWART, 2016, p. 151).

No século VII d.C., Brahmagupta, um dos grandes matemáticos hindus, formalizou as regras de operação com números negativos e o zero em sua obra *Brāhmasphuṭasiddhānta*. Assim como os chineses, ele entendia os números positivos como “fortunas” e os negativos como “dívidas”, ou seja, utilizava expressões financeiras para descrever termos matemáticos, o que facilitava sua aceitação em um contexto prático. Segundo Warsi *et al.* (2020, p. 78), Brahmagupta estabeleceu as regras para a multiplicação de números com sinais opostos da seguinte forma: “O produto de duas fortunas é uma fortuna. O produto de duas dívidas é uma fortuna. O produto de uma dívida e uma fortuna é uma dívida. O produto de uma fortuna e uma

dívida é uma dívida”. Ele definiu o zero como o resultado da subtração de um número por ele mesmo e estabeleceu regras claras para a adição e subtração envolvendo números positivos e negativos.

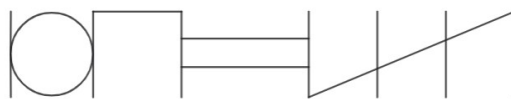
Ele começou definindo-o como o resultado de subtrair um número de si mesmo, por exemplo, $3 - 3 = 0$. Isso consagrou o zero como um número em si, oposto a uma simples notação figurativa ou como marcador de posição. Brahmagupta explorou então o efeito de calcular com zero. Ele mostrou que, se somasse zero a um número negativo, o resultado seria igual a esse número negativo. Do mesmo modo, somar zero a um número positivo produzia o mesmo número positivo. Brahmagupta expôs também que, ao subtrair zero de um número negativo ou de um número positivo, de novo os números ficavam inalterados. Depois, Brahmagupta descreveu o efeito de subtrair os números de zero. Ele calculou que um número positivo subtraído de zero se tornava um número negativo e que um número negativo subtraído de zero se tornava positivo.[...]Como o zero, os números negativos eram um conceito abstrato, em contraste com valores positivos como comprimentos e quantidades (WARSI *et al.*, 2020, p. 90-91).

Embora Brahmagupta tivesse registrado um trabalho sobre as operações de adição, subtração e multiplicação por zero, cuja relevância e validade permanecem inalteradas até os dias atuais, suas ideias sobre a divisão por zero eram imprecisas e, em alguns casos, até mesmo contraditórias. Ao afirmar que zero dividido por zero é igual a zero, o matemático indiano propôs uma solução que, ao ser aplicada em cálculos mais complexos, levava a resultados paradoxais. Da mesma forma, sua afirmação de que qualquer número dividido por zero resultaria em uma fração com denominador zero não fornecia uma explicação satisfatória para essa operação (BOYER, 2012). As tentativas de Brahmagupta, no entanto, foram importantes para o desenvolvimento da Matemática, pois ajudam a entender como os matemáticos antigos pensavam sobre números e operações.

De forma independente, entre os séculos XII e XIII, os matemáticos chineses Li Yeh e Ch'in Kiu-shao também contribuíram para o desenvolvimento de melhores notações para o conjunto dos números inteiros. O primeiro introduziu “uma notação para números negativos que consistia em fazer um traço diagonal no dígito da direita de um número escrito no sistema científico ou no sistema de barras chinês” (EVES, 2011, p. 246), enquanto o segundo utilizou uma circunferência para representar o zero. Observe na Figura 3.9 estas notações.

O conceito de números negativos enfrentou resistência inicial na Europa durante a Idade Média. Muitos matemáticos da época os consideravam entidades abstratas e sem aplicação prática, chegando a se referir a eles como “absurdos” ou “números falsos” (ROQUE; CARVALHO, 2012). Essa visão começou a mudar a partir do Renascimento, graças ao trabalho de estudio-

Figura 3.9 – Representação do número –10724 no sistema chinês de numeração em barras.



Fonte: Eves (2011, p. 246)

sos como Leonardo Pisano. Mais conhecido pelo nome Fibonacci, Leonardo nasceu em Pisa, um importante centro comercial, onde seu pai estava envolvido em negócios mercantis. Como muitas cidades comerciais italianas da época mantinham bases comerciais no Mediterrâneo, Leonardo teve a oportunidade de receber parte de sua educação no norte da África, onde seu pai trabalhava em funções alfandegárias. Essa experiência despertou no jovem um interesse pela aritmética, que o levou a realizar diversas viagens que possibilitaram um contato direto com os métodos matemáticos orientais e árabes, fundamentais para seu desenvolvimento intelectual. Em 1202, Fibonacci escreveu *Liber Abaci*, obra na qual resolveu diversos problemas de natureza comercial, como cálculos de lucros, conversões de moedas e proporções. (WARSI *et al.*, 2020).

O Liber Abaci teve grande importância na introdução do sistema de numeração indo-arábico no continente europeu. Fibonacci descreveu esse sistema, com seus nove símbolos e o zero, mostrando seu valor prático com aplicações à matemática comercial, conversões de pesos e medidas, cálculos de taxas de juros e de câmbio, dentre outras (MOL, 2013, p. 77-78).

Embora tenha desempenhado um papel importante na popularização do sistema numérico posicional e notação hindu-arábica na Europa, Fibonacci apenas reconheceu os números negativos como uma forma de indicar prejuízos, mas não se comprometeu em formalizá-los. De acordo com Warsi *et al.* (2020), o matemático também mantinha uma abordagem cautelosa em relação ao zero, tratando-o mais como um operador, semelhante aos símbolos de adição (+) e subtração (-), do que como um número propriamente dito.

Outro marco significativo na história dos números inteiros foi a obra de Gerolamo Cardano, um dos mais destacados estudiosos do século XVI. Cardano explorou conceitos avançados para a época, como raízes negativas de equações. Além disso, ele desenvolveu métodos, ainda que rudimentares, para aproximar raízes de equações de grau genérico, antecipando técnicas que seriam exploradas e aperfeiçoadas por outras gerações de matemáticos (EVES, 2011).

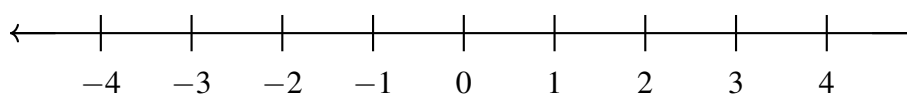
Por toda a Idade Média, os matemáticos europeus continuaram inseguros em relação a quantidades negativas como números. Foi assim em 1545, quando o polímata italiano Gerolamo Cardano publicou *Ars magna* [A grande arte], em que explicava como resolver equações lineares, quadráticas e cúbicas. Ele

não pôde excluir as soluções negativas e até usou um sinal, “m”, para denotar um número negativo. Apesar disso, não aceitava o valor de números negativos e chamou-os de “fictícios”. René Descartes (1596-1650) também admitia quantidades negativas como soluções de equações mas se referia a elas como “raízes falsas” em vez de números.

O inglês John Wallis (1616-1703) deu algum sentido aos números negativos ao estender a reta numérica abaixo de zero (WARSI *et al.*, 2020, p. 78-79).

A reta numérica (Figura 3.10) ilustra de forma clara a posição do zero, localizada imediatamente à esquerda do número 1. Ele representa o ponto de partida, a partir do qual a adição de 1 resulta no número seguinte, reforçando a noção de que o zero possui a mesma validade que qualquer outro número. A aceitação dos números negativos contribuiu ainda mais para consolidar essa ideia. Se números como 3 e -3 são reconhecidos e a soma entre dois números deve resultar em outro número do mesmo conjunto, então a descoberta $3 + (-3) = 0$ demonstra que o zero é um elemento essencial no conjunto dos inteiros. Esse entendimento foi decisivo para o desenvolvimento da Álgebra e da Aritmética (STEWART, 2016).

Figura 3.10 – Números inteiros na reta.



Fonte: Da autora (2025)

O desenvolvimento do conjunto dos números inteiros foi um processo multicultural e não linear, que envolveu contribuições de diferentes civilizações, desde os pitagóricos e chineses até os hindus, árabes e matemáticos europeus renascentistas. Cada avanço foi impulsionado por necessidades práticas, como o comércio e a resolução de equações, mas também causou resistências culturais e filosóficas que moldaram o ritmo dessa evolução. O resultado é um conjunto numérico fundamental para a Matemática moderna e para o avanço da ciência e da tecnologia.

3.3 O conjunto dos números racionais

O conjunto dos números racionais é definido como o conjunto de todos os números que podem ser expressos como a razão entre dois números inteiros, sendo o denominador diferente de zero. Stewart (2016) afirma que as frações representaram a primeira grande ampliação do sistema numérico a partir dos números naturais, permitindo representar quantidades não inteiras.

A segunda expansão, com os números negativos, possibilitou a representação de quantidades opostas e valores abaixo de zero.

De acordo com Neto (2016), o conjunto dos números racionais, denotado pelo símbolo \mathbb{Q} , apresenta desafios em relação à sua representação em comparação com os conjuntos numéricos \mathbb{N} e \mathbb{Z} . Enquanto estes últimos admitem representações explícitas através de sequências discretas e ordenáveis, a estrutura dos racionais exige uma abordagem distinta devido à densidade do conjunto, que significa que, entre quaisquer dois números racionais, sempre existe outro número racional, impossibilitando a disposição ordenada de seus elementos: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$, sendo \mathbb{Z}^* o conjunto dos números inteiros não nulos, ou seja, todos os inteiros exceto o zero.

O desenvolvimento e a aceitação dos números racionais foram motivados por necessidades práticas e cotidianas das primeiras civilizações. Para refletir sobre esse processo de desenvolvimento dos conjuntos numéricos,

Imagine-se de volta aos tempos em que “número” significava número inteiro. Nesse mundo, a divisão só faz sentido quando um número cabe exatamente dentro de outro; por exemplo, $\frac{12}{3} = 4$. Mas desse jeito não se obtém nada de novo. As frações tornam-se interessantes precisamente quando a divisão não é exata. Mais precisamente, quando o resultado não é um número inteiro. Porque então precisamos de um *novo tipo de número* (STEWART, 2016, p. 165).

No presente, compreendemos que “as necessidades da vida diária requerem, além da contagem de objetos individuais, a medição de várias quantidades, como comprimento, peso e tempo. Para satisfazer essas necessidades básicas referentes a medições necessita-se de frações,[...]” (EVES, 2011, p. 104). A divisão de recursos, como alimentos e terras, a medição de quantidades e a realização de transações comerciais exigiam a representação de partes de um todo, o que levou ao surgimento das frações. Por exemplo, dividir uma colheita entre membros de uma comunidade ou medir áreas para a agricultura eram situações concretas que demandavam o uso de números racionais. Esses números, que expressam proporções e quantidades mensuráveis, tornaram-se essenciais para resolver problemas do dia a dia, sendo naturalmente incorporados à Matemática prática.

Registros históricos demonstram que frações eram utilizadas desde as civilizações antigas. Os egípcios, por exemplo, desenvolveram um sistema de frações unitárias, como documentado no Papiro de Rhind (cerca de 1650 a.C.), que contém métodos para operar com frações em cálculos práticos (Figura 3.11). Os babilônios, por sua vez, possuíam um sistema posicional sexagesimal que incluía frações, facilitando medições astronômicas e cálculos matemáticos.

Segundo Roque (2012), a resolução do problema 25, apresentado no Papiro de Rhind, utiliza o método da falsa-posição, uma técnica antiga que parte de um “chute” inicial para chegar à solução correta. O problema consiste em encontrar uma quantidade que, somada à sua metade, resulta em 16. Inicialmente, admite-se que a quantidade seja 2, um valor arbitrário. Ao somar 2 com sua metade (1), obtém-se 3, um resultado distante do desejado (16). No entanto, esse “erro” é utilizado como base para corrigir o valor inicial. A ideia é descobrir por qual número 3 deve ser multiplicado para se obter 16, o que resulta em $\frac{16}{3}$. Em seguida, multiplica-se o “chute” inicial (2) por esse fator, chegando ao valor correto de $\frac{32}{3}$, que, ao ser somado à sua metade ($\frac{16}{3}$), resulta em 16.

O método da falsa-posição, portanto, consiste em partir de uma suposição inicial arbitrária, analisar o desvio entre o resultado obtido e o esperado e ajustar a solução com base nessa diferença. Esse procedimento demonstra como erros podem ser transformados em ferramentas para alcançar a resposta correta, destacando a importância do processo iterativo e da correção de aproximações na resolução de problemas matemáticos. Além disso, nota-se o uso prático e sofisticado dos números racionais na antiguidade, mostrando como frações e proporções já eram essenciais para resolver problemas cotidianos e matemáticos complexos naquela época.

Figura 3.11 – Papiro de Rhind (Museu Britânico), documento que contém métodos desenvolvidos pelos egípcios para realizar operações com frações.



Fonte: Mol (2013, p. 22).

Ao contrário dos egípcios, os gregos antigos restringiam o termo “número” aos inteiros. Frações eram concebidas como relações entre esses números inteiros, e não como números em si. Essa abordagem, apesar de ter limitado a abrangência da aritmética, motivou um estudo mais profundo das propriedades dos números e das relações entre eles. Curiosamente, muitas vezes

a Matemática grega, em suas origens, se aproximou mais da Matemática “moderna” de hoje do que da aritmética praticada pelas gerações que vieram depois. A ênfase na razão e na proporção, como evidenciado nas obras de Euclides, revela uma abordagem mais teórica da Matemática, em contraste com a ênfase prática de outras culturas (BOYER, 2012).

Diofanto de Alexandria, que viveu provavelmente no século III d.C., desenvolveu a aritmética algébrica e contribuiu de forma notável para a teoria dos números racionais ao estudar equações diofantinas. Sua obra *Arithmetica*, composta por treze livros (dos quais apenas seis sobreviveram), introduziu métodos genéricos e técnicas criativas elaboradas para resolver cada problema específico, envolvendo números racionais, explorando soluções tanto inteiras quanto fracionárias. “Diofanto só admitia respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com uma resposta apenas do problema” (EVES, 2011, p. 207). O matemático foi um dos primeiros a tratar frações de maneira mais sistemática, ampliando o entendimento sobre as propriedades dos números racionais e suas aplicações.

No século IX, o matemático árabe Al-Khwarizmi introduziu métodos algébricos para a resolução de equações e sistematizou a manipulação das frações, influenciando o desenvolvimento da Matemática na Europa. A aritmética árabe buscava propor e explicar métodos para solucionar cálculos diversos como a regra de três e a falsa posição.

A regra de três, que provavelmente se originou na China antiga, alcançou a Arábia através da Índia, onde Brahmagupta e Bhāskara a tratavam por essa mesma designação. Durante séculos a regra mereceu a mais alta consideração da parte dos mercadores. Ela era enunciada mecanicamente, sem nenhuma justificação, e seus vínculos com as proporções só foram reconhecidos no fim do século XIV. Eis como Brahmagupta enunciava a regra: Na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto. A título de esclarecimento, considere o seguinte problema dado por Bhāskara: Se dois palas e meio de açafão custam três sétimos de niska, quantos palas se comprarão com nove niskas? Neste caso $3/7$ e 9 , que têm a mesma denominação, são o Argumento e o Requisito e $5/2$ é o Fruto. A resposta, ou Produto, é dada por $(9)(5/2)/(3/7) = 52 \frac{1}{2}$. Hoje em dia simplesmente resolveríamos a proporção

$$x : 9 = (5/2) : (3/7).$$

(EVES, 2011, p. 263).

Fibonacci também teve uma contribuição marcante para o desenvolvimento do conjunto dos números racionais, embora sua abordagem, descrita no *Liber Abaci*, seja considerada de leitura complexa. Como observa Boyer (2012), o livro apresenta diversos problemas práticos envolvendo transações comerciais e cálculos de câmbio de moedas, utilizando um complicado

sistema de frações. Curiosamente, Fibonacci não adotou frações decimais, uma das grandes vantagens do sistema posicional indo-arábico que ele ajudou a introduzir na Europa, inovação que só ganharia destaque séculos depois. Em vez disso, utilizou métodos complexos, como a decomposição de frações comuns em somas de frações unitárias, e frequentemente invertia a ordem das partes inteiras e fracionárias, escrevendo, por exemplo, $\frac{1}{3}\frac{1}{2}11$ em vez de $11\frac{5}{6}$, o que correspondia à soma $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 11 = 11 + \frac{5}{6}$, tornando seus procedimentos ainda mais difíceis de interpretar pelos padrões atuais. Apesar dessas complexidades, o trabalho de Fibonacci foi fundamental para consolidar o uso dos números racionais na Matemática prática, estabelecendo as bases para estudos posteriores e abrindo caminho para avanços futuros na notação e no cálculo com frações.

Três nomes que se destacaram na formalização e no estudo dos números racionais no século XIX foram Leopold Kronecker, Richard Dedekind e Georg Cantor. Cada um deles trouxe contribuições únicas e complementares. Juntos, esses matemáticos não apenas solidificaram o entendimento dos números racionais, mas também embasaram o caminho para avanços significativos na formalização dos números irracionais e reais, na Teoria dos Números e na Análise Matemática.

Leopold Kronecker defendia uma abordagem construtiva para a Matemática, enfatizando a importância de construir os números racionais a partir dos números inteiros.

Como finitista, ele condenava o trabalho de Cantor, que considerava como teologia e não como matemática. Acreditando que toda a matemática deve se basear em métodos finitos desenvolvidos a partir dos números inteiros, era um pitagórico do século XIX. É sua a famosa frase: “Deus fez os números inteiros, todo o resto é criação do homem” (EVES, 2011, p. 616).

Georg Cantor, conhecido como o pai da teoria dos conjuntos, realizou diversas contribuições para o entendimento dos números racionais ao classificá-los como um conjunto denso e enumerável. Cantor demonstrou que, embora os racionais sejam infinitos, eles podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais, ou seja, são contáveis. Além disso, ele mostrou que, entre quaisquer dois números reais, sempre existe um número racional, caracterizando-os como densos na reta real. Essas descobertas foram essenciais para a compreensão da estrutura e da cardinalidade dos conjuntos numéricos, revolucionando a Matemática, pois mostrou que o conjunto dos racionais, embora infinito, tem o mesmo “tamanho” do conjunto dos números naturais, desafiando intuições anteriores sobre a concentração dos números.

Para provar a enumerabilidade dos racionais, Cantor desenvolveu um método que organizava as frações em uma tabela bidimensional e a percorria em diagonais, garantindo que

cada número racional fosse eventualmente contado sem repetições. Esse método demonstrou que, mesmo tendo infinitos racionais entre quaisquer dois números naturais, ainda é possível listá-los de forma ordenada. Sua abordagem abriu caminho para o desenvolvimento da teoria dos conjuntos e da cardinalidade, que permitiu classificar diferentes infinitos. Assim, Cantor definiu uma base formal para a análise da estrutura dos números racionais e para a estruturação do conjunto dos números reais.

Com o avanço trazido pela demonstração da enumerabilidade dos racionais, Cantor desenvolveu um método para transformar o infinito em um número real, contando conjuntos infinitos. De acordo com Stewart (2016), ao aplicar esse conceito ao conjunto de todos os números inteiros, ele definiu um número infinito conhecido como alef-zero ou alef-nulo (\aleph_0). Esse número é maior que qualquer número inteiro, o que o caracteriza como infinito. No entanto, é importante destacar que ele representa o menor dos infinitos, pois existem outros infinitos ainda maiores.

Richard Dedekind propôs uma definição rigorosa dos números racionais por meio de um conceito matemático, hoje estudado em análise real, que permite definir formalmente os números reais a partir dos números racionais, chamados cortes de Dedekind.

Um *corte* (C_1, C_2) é uma partição de \mathbb{Q} em dois subconjuntos C_1, C_2 , (ou seja $C_1 \cup C_2 = \mathbb{Q}$ e $C_1 \cap C_2 = \emptyset$) tal que todo elemento de C_1 é estritamente inferior a todo elemento de C_2 . Os cortes determinados por números racionais possuem a seguinte propriedade: ou bem existe um maior elemento em C_1 ou bem existe um menor elemento em C_2 . Existem cortes que não satisfazem essa propriedade (MOL, 2013, p. 132).

Essa abordagem permitiu uma formalização dos números reais, incluindo os racionais, ao definir cada número real como um “corte” no conjunto dos números racionais. Dedekind estabeleceu bases para uma compreensão mais aprofundada dos números racionais como parte integrante dos números reais, garantindo que suas propriedades pudessem ser analisadas de maneira lógica. Antes de sua abordagem, os números racionais eram usados intuitivamente, sem uma definição que garantisse sua completude. Dedekind demonstrou que, ainda que os racionais formem um conjunto denso na reta numérica, eles apresentam lacunas que impedem a continuidade. Seu conceito de cortes evidenciou que, para qualquer partição dos racionais que satisfaça certas propriedades, pode-se identificar a existência de um limite que nem sempre é um número racional, destacando a necessidade de uma ampliação do conjunto numérico.

3.4 O conjunto dos números irracionais

Os números irracionais possuem representações decimais que se estendem infinitamente, sem jamais exibir um padrão repetitivo ou periódico, característica que os distingue claramente dos demais conjuntos numéricos estudados anteriormente. As definições do conjunto dos números irracionais em livros didáticos da Educação Básica, representado pelo símbolo \mathbb{I} , costumam ser apresentadas pela descrição da representação decimal, diferenciando-o do conjunto \mathbb{Q} , ou em relação à representação geométrica, como pontos na reta numérica que não correspondem a números racionais. Então, os números irracionais preenchem os “espaços vazios” na reta numérica que os números racionais deixam, expandindo nossa compreensão sobre os números.

Os números irracionais têm sua história marcada por uma formalização bem recente. Apesar disso, os primeiros marcos da construção desse conjunto remetem à antiguidade, quando matemáticos começaram a perceber que certas razões entre segmentos de reta não podiam ser expressas como frações de números inteiros. O desenvolvimento desse conceito passou por diversas fases ao longo da história da Matemática, influenciando profundamente o entendimento dos números reais.

A Tábua de Yale (Figura 3.12), datada de aproximadamente 1800 a.C., representa um dos registros matemáticos mais antigos que envolvem um número irracional. Essa tábua de argila, com gravações em escrita cuneiforme feitas pelos escribas da Babilônia Antiga, contém um diagrama geométrico de um quadrado com sua diagonal e apresenta uma proximidade bastante razoável para $\sqrt{2}$, correta até a quinta casa decimal. Essa descoberta revela que os babilônios já possuíam métodos avançados para lidar com números irracionais, ainda que sem uma teoria formalizada. Utilizando seu sistema numérico sexagesimal, calcularam aproximações numéricas de raízes quadradas, demonstrando um conhecimento empírico sobre grandezas incomensuráveis, muito antes da formalização grega dos irracionais. O registro na Tábua de Yale, de acordo com Boyer (2012, p. 42), “pode ser adequadamente escrito como 1;24,51,10 onde se usa ponto e vírgula para separar a parte inteira da fracionária, e uma vírgula para separar posições sexagesimais”. Convertendo essa notação para o sistema decimal, o valor pode ser expresso como $1 + 24(60)^{-1} + 51(60)^{-2} + 10(60)^{-3}$, resultando em um valor em torno de 1,414222. Essa aproximação difere do valor de $\sqrt{2}$ em apenas aproximadamente 0,000008, evidenciando os importantes resultados alcançados pelos babilônios, conforme destaca o autor. O uso de frações sexagesimais permitiu cálculos detalhados e eficientes, um método cuja precisão não foi alcançada até o Renascimento.

Figura 3.12 – Aproximação de $\sqrt{2}$ gravada na Tábua de Yale.



Fonte: Terra.com.br, 2019⁸.

As primeiras passagens históricas mais conhecidas sobre os números irracionais são associadas à Grécia Antiga, mais especificamente com os pitagóricos, por volta do século V a.C. Os pitagóricos acreditavam que todas as grandezas podiam ser expressas como razões entre números inteiros. Com estudos focados em Aritmética, Música, Astronomia e Geometria, buscavam muitas vezes solucionar seus problemas tomando como base o conhecimento geométrico, sendo, talvez, o principal recurso desses matemáticos “a construção de soluções para problemas geométricos e a comparação de grandezas geométricas por meio de razões” (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 52). No entanto, essa crença foi abalada quando eles descobriram que existiam grandezas que não poderiam ser representadas como uma fração de números inteiros.

O transtorno teve sua origem com o número $\sqrt{2}$, o qual

pode ter sido obtido de duas formas distintas. De uma maneira geométrica, ao se calcular a diagonal do quadrado de lado 1. Ou ainda, de uma forma puramente aritmética, obtendo-se a média geométrica entre a unidade e duas vezes a unidade, ou seja, $1/x = x/2$. O número assim produzido e a unidade são incomensuráveis, ou seja, inexistem uma unidade básica a partir da qual ambos podem ser obtidos como múltiplos inteiros. Tal descoberta, talvez a mais importante descoberta matemática da época, entrou em choque com a visão mística que Pitágoras tinha dos números, a ponto de colocar em dúvida a adequação de sua concepção numérica do universo. Pela primeira vez na história a matemática viveu uma crise em seus fundamentos (MOL, 2013, p. 34).

⁸ TERRA. **O assassinato cometido para ocultar uma descoberta matemática ‘perigosa’**. 2019. Disponível em: <https://www.terra.com.br/byte/ciencia/o-assassinato-cometido-para-ocultar-uma-descoberta-matematica-perigosa,a99bf496e878b45fd99e2d3010b2e3c3ft06hw7j.html>. Acesso em: 18 fev. 2025.

Essa descoberta foi tão perturbadora para os pitagóricos que, segundo historiadores, tentaram mantê-la em segredo. A confirmação da existência de um número não racional pela diagonal do quadrado de lado 1 (ou seja, $\sqrt{2}$) é creditada ao matemático Hipaso de Metaponto, um membro da escola pitagórica. Segundo Eves (2011), Stewart (2016) e Warsi *et al.* (2020), Hipaso foi punido por revelar essa descoberta, sendo jogado ao mar. Embora não haja evidências históricas concretas desse evento, e até mesmo outras versões, a história ilustra o impacto profundo que a descoberta de números irracionais teve na Filosofia e na Matemática pitagórica.

Segundo Warsi *et al.* (2020), Hipaso, um dos fundadores da escola pitagórica, já estava familiarizado com o teorema que hoje leva o nome de Pitágoras. Ao aplicá-lo ao caso específico de um triângulo retângulo com catetos medindo 1 unidade, ele descobriu que a hipotenusa correspondente teria comprimento igual a $\sqrt{2}$. Existem diferentes versões sobre como essa descoberta foi feita, mas todas apontam para algum suporte geométrico.

Por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único número irracional conhecido. Mais tarde, segundo Platão, Teodoro de Cirene (c. 425 a.C.) mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais. Por volta de 370 a.C., o “escândalo” fora resolvido por Eudoxo, um brilhante discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas, através de uma nova definição de proporção. O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos Elementos de Euclides [...] (EVES, 2011, p. 107).

Embora as versões descritas anteriormente sejam as mais populares, Boyer (2012) destaca que a descoberta da incomensurabilidade de segmentos de reta é cercada por incertezas, mas acredita-se que tenha surgido a partir da aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles. Aristóteles mencionou uma demonstração baseada na distinção entre números pares e ímpares para provar que a diagonal de um quadrado não é comensurável com seu lado. Esse raciocínio indireto mostra que assumir que a razão entre esses segmentos é um número racional leva a uma contradição lógica. No entanto, a descoberta pode ter ocorrido por meio de outra abordagem, como a observação das diagonais de pentágonos regulares, que se repetem indefinidamente, sugerindo uma razão irracional entre o lado e a diagonal. Essa propriedade, possivelmente percebida por Hipaso, pode ter revelado a existência dos números irracionais, inicialmente com $\sqrt{5}$, antes mesmo da famosa prova envolvendo $\sqrt{2}$. Outros casos, como a relação entre a diagonal e a aresta do cubo ($\sqrt{3}$), reforçam a presença da incomensurabilidade na Geometria.

No século III a.C., em sua brilhante obra *Os Elementos*, Euclides formalizou muitos dos conceitos matemáticos conhecidos na época, incluindo a teoria dos números. No Livro X

de *Os Elementos*, Euclides aborda a noção de grandezas incomensuráveis, ou seja, segmentos cujos comprimentos não podem ser expressos como múltiplos inteiros de um comprimento comum. Na obra, esses segmentos são apresentados em formas como $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ e $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, sendo a e b grandezas comensuráveis. Euclides desenvolveu essa classificação de forma puramente geométrica. Por essa razão, ele considerava o Livro X como mais um livro de Geometria, integrando-o a *Os Elementos* para ser aplicado nos livros subsequentes. Essa abordagem reflete a visão grega de que a Matemática era essencialmente geométrica, mesmo quando lidava com grandezas que hoje entendemos como números irracionais (MOL, 2013).

Euclides também introduziu o método da *antifairese* no Livro VII, que pode ser visto como um precursor do algoritmo de frações contínuas⁹, usado posteriormente para aproximar números irracionais. De acordo com (ROQUE; CARVALHO, 2012), o método da *antifairese* foi utilizado por Euclides para encontrar a maior medida comum entre dois números, equivalente ao que hoje chamamos de algoritmo de Euclides para calcular o máximo divisor comum (MDC). Esse método consiste em subtrair repetidamente o menor número do maior, obtendo restos sucessivos, até que o resto seja zero ou até que se chegue a um resto que “meça” (divida) o anterior. Se o processo termina com um resto diferente de zero que divide o número precedente, esse resto é a maior medida comum entre os dois números. Caso contrário, se o processo chega à unidade, os números são considerados primos entre si. Euclides aplicou essa técnica de forma geométrica, tratando os números como segmentos de reta e construindo diferenças sucessivas entre eles. O método da *antifairese* não apenas permitia encontrar o MDC, mas também estabelecia a base para a teoria dos números e a compreensão de grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Durante a Idade Média, o conhecimento matemático grego foi preservado e expandido por estudiosos islâmicos. Matemáticos como Al-Khwarizmi e Omar Khayyam contribuíram para o estudo de equações e Geometria, embora o conceito de números irracionais não tenha sido significativamente avançado nesse período. No entanto, a tradução e a disseminação das obras gregas, incluindo *Os Elementos* de Euclides, para o árabe e posteriormente para o latim, foram fundamentais para o ressurgimento do interesse pelos números irracionais no Renascimento.

⁹ Frações contínuas são uma forma de representar números (racionais ou irracionais) como uma sequência de frações aninhadas, como $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$, na qual $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ são números inteiros. Elas são úteis para aproximar números e estudar suas propriedades (ROQUE, 2012).

Até este ponto, a abordagem dos números irracionais tem se limitado principalmente a $\sqrt{2}$ e a alguns outros radicais, seguindo uma tradição histórica das primeiras descobertas matemáticas sobre grandezas incomensuráveis. No entanto, essa perspectiva desperta uma reflexão sobre a seguinte questão: “Os números irracionais são todos da forma $\sqrt[n]{a}$?” (CARAÇA, 1951, p. 85). Essa indagação evidencia a necessidade de uma compreensão mais ampla dos irracionais.

Para evidenciar que o conjunto dos números irracionais contém elementos que não são radicais, pode-se mencionar o número irracional mais conhecido: π (pi). Boyer (2012) destaca que a história do número π esteve presente na Matemática do Egito Antigo, período em que os escribas desenvolveram métodos aproximados para calcular a área do círculo. No Papiro de Rhind, encontra-se um procedimento que assume que um círculo com 9 unidades de diâmetro tem a mesma área que um quadrado de 8 unidades de lado.

Conforme mencionado por Stewart (2016), ao longo da história, diferentes valores racionais foram utilizados como aproximações para π . Por volta de 900 a.C., no *Shatapatha Brahmana*, o astrônomo indiano Yajnavalkya estimou π como $\frac{25}{8}$ ($\approx 3,125$), contribuindo para o desenvolvimento do conhecimento matemático da época. No século III a.C., o matemático grego Arquimedes empregou um método geométrico rigoroso baseado em polígonos inscritos e circunscritos para estabelecer que π estava entre $\frac{223}{71}$ ($\approx 3,1408$) e $\frac{22}{7}$ ($\approx 3,1429$), um avanço notável em precisão. Já por volta de 250 d.C., o matemático chinês Liu Hui deixou sua contribuição ao mostrar que $\pi \approx \frac{3927}{1250}$. Essas descobertas demonstram a contínua busca por uma melhor compreensão de π ao longo das civilizações.

Além de π , outros números irracionais de grande aplicabilidade e destaque são ϕ , conhecido como a proporção áurea, e e , número de Euler. Ambos são amplamente utilizados em Matemática, Arte, Arquitetura e Ciências Naturais.

O número de ouro, representado pela letra grega ϕ (phi), tem suas origens na Grécia Antiga, estando associado à proporção áurea, que aparece em figuras geométricas como o pentágono regular e o retângulo áureo. Embora Pitágoras e seus seguidores já explorassem relações numéricas harmônicas, foi Euclides, no século III a.C., quem formalizou matematicamente essa razão ao estudar a divisão de um segmento em média e extrema razão (WARSI *et al.*, 2020).

Durante o Renascimento, artistas e matemáticos, como Leonardo da Vinci e Luca Pacioli, popularizaram a proporção áurea, atribuindo-lhe propriedades estéticas e naturais. “Em 1509, publicou sua *De divina proportione*, com ilustrações dos sólidos regulares desenhadas por

Leonardo da Vinci durante o tempo em que recebeu lições de matemática de Pacioli” (EVES, 2011, p. 298). Desde então, ϕ , cujo valor aproximado é 1,618034, tem sido estudado em diversas áreas, incluindo Biologia, Arquitetura e Teoria dos Números, destacando-se por suas relações com a sequência de Fibonacci. De acordo com Warsi *et al.* (2020), Fibonacci estudou a sequência descrita inicialmente por Pingala, um estudioso indiano, e que hoje leva seu nome: a sequência de Fibonacci. Nessa sequência, cada termo é a soma dos dois anteriores (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...). À medida que a sequência avança, a razão entre números sucessivos de Fibonacci se aproxima cada vez mais do número áureo ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$), uma propriedade que pode ser demonstrada a partir da expressão do termo geral da sequência de Fibonacci, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$, e por meio de uma equação quadrática relacionada a esse número, dada por $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

A constante matemática com infinitas casas decimais, conhecida como e (aproximadamente 2,718), teve suas origens no início do século XVII, durante o desenvolvimento dos logaritmos, criados para facilitar cálculos complexos. O matemático escocês John Napier foi um dos pioneiros ao elaborar tabelas de logaritmos com base próxima a 2,718 (Figura 3.13), que se mostraram particularmente úteis em cálculos envolvendo crescimento exponencial. Posteriormente, esses logaritmos foram chamados de “naturais” por descreverem fenômenos da natureza. No final do século XVII, o matemático suíço Jacob Bernoulli utilizou o valor aproximado de 2,718 para calcular juros compostos. Contudo, foi Leonhard Euler, aluno de Johann Bernoulli, quem batizou o número de e . Euler calculou e com precisão de 18 casas decimais¹⁰ e escreveu sua primeira obra sobre o tema, *Meditatio* (Meditação), em 1727, embora ela só tenha sido publicada em 1862. Ele aprofundou o estudo do e em sua obra *Introductio* (Introdução), publicada em 1748, consolidando o número como uma das constantes mais importantes da Matemática (WARSI *et al.*, 2020).

Embora os números irracionais, como $\sqrt{2}$ ou π , já fossem conhecidos e utilizados desde a Grécia Antiga, foi somente no século XIX que esses números receberam uma fundamentação matemática rigorosa. Antes disso, os números irracionais eram considerados como meras “extensões” dos números racionais, sem uma definição formal precisa.

Hoje, os números irracionais desempenham um papel fundamental em diversas áreas da Matemática e da ciência. Eles são essenciais no Cálculo, na Física, na Engenharia e até na Teo-

¹⁰ Provavelmente, Euler calculou os vinte primeiros termos da série conhecida como série de Taylor para a função exponencial. A fórmula para essa série é dada por: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$

Figura 3.13 – Tabelas de cálculo de Napier de cerca de 1680.



Fonte: John Napier (2022).

Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Napier

Acesso em: 18 fev. 2025.

ria da Computação. A existência de irracionais transcendent¹¹, como π , e e ϕ , mostrou que há números que vão além dos radicais, enriquecendo o entendimento das grandezas contínuas. A consolidação desse conhecimento preparou o caminho para a formalização dos números reais, um conjunto abrangente e essencial que unifica racionais e irracionais, fortalecendo-se como base para a Matemática moderna.

3.5 O conjunto dos números reais

O conjunto dos números reais, denotado por \mathbb{R} , é formado por todos os números que podem ser representados na reta numérica. Formalmente, o conjunto \mathbb{R} pode ser descrito como a união dos números racionais e irracionais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Em outras palavras, o conjunto dos números reais é composto por todos os valores que representam medidas de segmentos de reta, tanto positivos quanto negativos. Os números reais positivos são formados pela união dos números racionais e irracionais positivos, enquanto os números reais negativos correspondem às medidas de segmentos que possuem direção oposta, mas seguem a mesma estrutura.

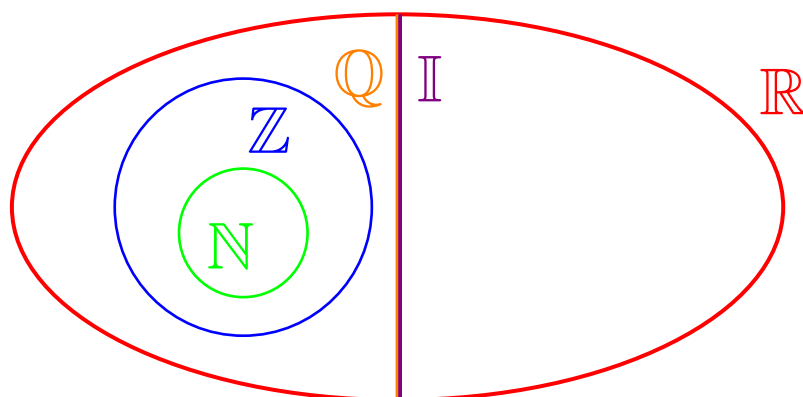
A definição apresentada estabelece os números reais positivos como aqueles que correspondem a medidas de segmentos na reta, unificando os números racionais e irracionais po-

¹¹ Números transcendentais são um tipo específico de número irracional que não podem ser raízes de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Em outras palavras, eles não são solução de equações do tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, nas quais os coeficientes a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 são números inteiros.

sitivos. Essa abordagem está diretamente relacionada à ideia de grandeza e mensuração, pois, na Geometria, qualquer segmento de reta pode ser associado a um número real positivo que expressa seu comprimento. Enquanto os números racionais representam medidas obtidas por frações de unidades, os irracionais preenchem as lacunas deixadas por essas frações, garantindo a continuidade da reta numérica. Dessa forma, a construção dos números reais permite uma descrição completa e precisa das medidas geométricas, tornando-se essencial para a Matemática e suas aplicações.

Os conjuntos numéricos apresentados estão organizados de forma hierárquica, refletindo a ampliação progressiva dos conceitos matemáticos. Os números naturais (\mathbb{N}) fazem parte dos inteiros (\mathbb{Z}), que por sua vez estão contidos nos racionais (\mathbb{Q}). Já os números irracionais (\mathbb{I}) são aqueles que não podem ser expressos como frações e, junto com os racionais, formam o conjunto dos números reais (\mathbb{R}) (Figura 3.14). Essa relação demonstra como cada conjunto estende o anterior, permitindo uma compreensão mais abrangente dos números e suas propriedades.

Figura 3.14 – Representação do conjunto dos números reais por meio de diagrama.



Fonte: Da autora (2025).

Com o Renascimento e a Revolução Científica, os números irracionais começaram a ser estudados de forma mais sistemática. Matemáticos como Simon Stevin defenderam a ideia de que os números irracionais deveriam ser tratados da mesma forma que os números racionais, introduzindo a noção de números reais como uma extensão dos números racionais. Stevin, além de contribuir para a teoria dos números, contribuiu de forma prática com a Matemática ao propor um sistema decimal para representar números reais, substituindo as frações por uma notação mais eficiente. Influenciado pela notação babilônica, que utilizava a base 60, ele adaptou o conceito para a base 10, criando uma representação na qual cada dígito após um símbolo específico correspondia a uma potência de 10 (décimos, centésimos, ...). Essa inovação foi gradualmente simplificada, eliminando símbolos extras, utilizados para a identificação posicional, e conso-

lidando o uso da vírgula ou ponto decimal. Essa padronização não apenas facilitou cálculos complexos, mas também fortaleceu a noção de números reais como um conjunto unificado, abrangendo tanto racionais quanto irracionais (STEWART, 2016).

Passando a uma questão mais teórica, na seção anterior foi discutida a incomensurabilidade de alguns segmentos. Com a estruturação dessas ideias, pode-se concluir que todo número racional pertence à reta numérica. Porém, nem todo ponto na reta corresponde a um número racional. Logo,

a correspondência *número racional* ↔ *ponto da recta* não é biunívoca, e nessa *carência* de biunivocidade fundamentamos toda a construção que nos levou ao campo real. É a altura de perguntarmos se a carência desapareceu, isto é, se a correspondência é biunívoca. Tudo foi feito para que assim seja. A correspondência é, de facto, biunívoca: a todo o número real corresponde um ponto da recta, a todo ponto da recta corresponde um número real (CARAÇA, 1951, p. 87-88).

No século XVII, René Descartes e Pierre de Fermat deram um passo importante ao desenvolver a Geometria Analítica, que permitiu a representação de números irracionais na reta numérica. Essa inovação ajudou a consolidar a ideia de que os números irracionais eram tão “reais” quanto os racionais, embora ainda não houvesse uma definição formal rigorosa para eles.

De forma totalmente independente e contemporânea a Fermat, Descartes também desenvolveu a Geometria Analítica, estabelecendo um sistema de coordenadas que permitiu representar geometricamente os números e operações algébricas.

Há duas versões da história da elaboração do sistema de coordenadas. Uma alega que Descartes teve a ideia ao ver uma mosca se movendo no teto de seu quarto. Ele percebeu que poderia plotar sua posição usando números para descrever onde estava em relação a duas paredes adjacentes. Outro relato narra que a ideia lhe veio em sonhos em 1619, quando servia como mercenário no sul da Alemanha. [...]

O sistema cartesiano mais simples é unidimensional; ele indica posições ao longo de uma reta (WARSI *et al.*, 2020, p. 146-147).

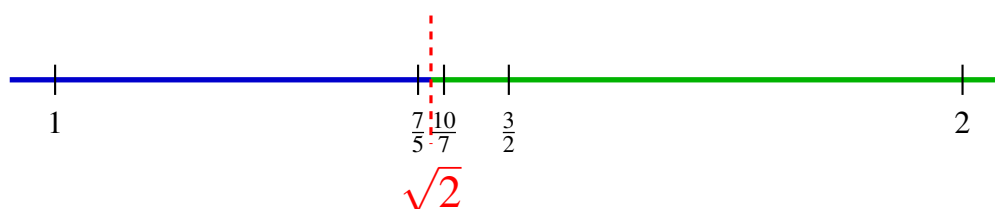
A Geometria Analítica serviu como uma ponte entre a Geometria e a Álgebra, mas ainda faltava uma fundamentação puramente aritmética para os números reais. A partir do trabalho do matemático francês Augustin-Louis Cauchy, houve uma mudança fundamental na abordagem matemática, com a exigência de que todas as propriedades fossem definidas explicitamente, sem depender de intuições visuais ou pressuposições implícitas. O conceito de rigor matemático evoluiu ao longo do tempo e no século XIX passou a ser definido por três princípios

fundamentais: a necessidade de definir explicitamente todos os conceitos, a exigência de provas rigorosas justificadas por resultados aceitos e a formulação de teoremas suficientemente abrangentes para sustentar toda a estrutura da análise. Cauchy foi um dos primeiros a aplicar esse novo rigor e seu trabalho *Cours d'analyse* consolidou essa abordagem. No entanto, ele ainda aceitava os números reais como dados intuitivos, sem questionar sua definição formal. Apenas posteriormente, com matemáticos como Dedekind e Cantor, surgiram tentativas de estabelecer uma construção rigorosa do conjunto dos números reais (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Boyer (2012) explica que foi Dedekind, no século XIX, quem trouxe uma solução elegante e rigorosa para esse problema. Dedekind percebeu que a continuidade de uma reta não poderia ser explicada apenas pela densidade dos números racionais (a propriedade de que entre dois números racionais sempre existe outro), pois os racionais, embora densos, não formam um contínuo. Ele propôs que a essência da continuidade está na maneira como uma reta é dividida em duas partes por um ponto. Em qualquer divisão dos pontos de uma reta em duas classes, onde todos os pontos de uma classe estão à esquerda de todos os pontos da outra, existe um único ponto que realiza essa divisão.

Boyer (2012) prossegue explicando como os corte de Dedekind possibilitaram demonstrar que o conjunto dos números racionais poderia ser estendido para formar um contínuo de números reais. Um corte de Dedekind divide os números racionais em duas classes, A e B , onde todos os números em A são menores que todos os números em B . Se a classe A não tem um maior elemento e a classe B não tem um menor elemento, o corte define um número irracional. Por exemplo, se colocarmos em A todos os números racionais cujos quadrados são menores que 2 e em B todos os números racionais cujos quadrados são maiores que 2, o corte define o número irracional $\sqrt{2}$ (Figura 3.15).

Figura 3.15 – Corte de Dedekind para $\sqrt{2}$, em que a parte azul representa os racionais cujo quadrado é menor que 2 e a parte verde, os racionais cujo quadrado é maior que 2.



Fonte: Da autora (2025).

Essa construção permitiu que os números reais fossem definidos de forma puramente aritmética, sem depender da Geometria. Dedekind mostrou que os teoremas fundamentais sobre

limites, que são essenciais para o cálculo, poderiam ser demonstrados rigorosamente usando essa abordagem. Assim, o corte de Dedekind substituiu a noção de grandeza geométrica como base da Análise Matemática.

Em seu texto, Stewart (2016) ressalta que no final do século XIX Georg Cantor mostrou que existem diferentes tamanhos de infinito, uma ideia que desafiava a intuição matemática da época. Ele mostrou que tanto os números inteiros quanto os números racionais são infinitos, ambos compartilhando o mesmo tamanho de infinito, conhecido como infinito contável (\aleph_0). No entanto, ao analisar o conjunto dos números reais, Cantor percebeu que sua cardinalidade era maior, criando o conceito de infinito incontável. Ele utilizou o argumento da diagonal para provar que, por mais que se tente listar todos os números reais, sempre é possível construir um número que não esteja na lista, demonstrando que os números reais não podem ser contados da mesma forma que os inteiros. Esse resultado estabeleceu que o infinito dos números reais, representado por c (o cardinal do contínuo), é estritamente maior que \aleph_0 .

No século XIX, os matemáticos começaram a questionar a definição dos números reais e a forma como os números racionais e irracionais se distribuem na reta numérica. Esse debate foi impulsionado pelo estudo da convergência de séries e pelo conceito de limite, que levou à necessidade de compreender como as sequências numéricas se comportam e quais tipos de números podem surgir desse processo. Antes desse período, acreditava-se intuitivamente que a reta continha todos os números reais, sem uma definição formal desse conjunto. Esse cenário começou a mudar com o trabalho de Georg Cantor, que, ao investigar séries trigonométricas, percebeu que a unicidade da representação de uma função poderia ser garantida mesmo quando a convergência falhava em certos pontos. Sua análise levou à necessidade de descrever os números reais de forma mais rigorosa, sem depender exclusivamente da intuição geométrica (ROQUE; CARVALHO, 2012).

No início do século XX, Bertrand Russel propôs uma simplificação da ideia de Dedekind, observando que apenas uma das duas classes (A ou B) é suficiente para definir um número real. Por exemplo, $\sqrt{2}$ pode ser definido simplesmente como o conjunto de todos os números racionais, cujos quadrados são inferiores a 2 bem como todos os números racionais negativos. Essa abordagem reforçou a ideia de que os números reais são construções intelectuais baseadas nos números racionais, e não algo imposto externamente (BOYER, 2012).

Karl Weierstrass contribuiu com a formalização dos números reais ao perceber que a Análise Matemática precisava de uma base rigorosa e bem definida. Antes dele, segundo Eves

(2011), conceitos como limites, continuidade e diferenciabilidade eram tratados de maneira intuitiva, sem uma fundamentação sólida. O próprio sistema dos números reais era aceito sem questionamentos formais, o que tornava a teoria dos limites dependente de propriedades implícitas dos números. Essa formalização do conceito de limite também foi fundamental para a definição dos números irracionais dentro do sistema dos números reais, permitindo uma transição de um entendimento intuitivo para uma base formal e lógica. Weierstrass identificou essa abertura e propôs um programa de rigor, conhecido como aritmetização da análise, cujo objetivo era construir toda a teoria da análise a partir de um conjunto de postulados bem definidos sobre os números reais.

Esses avanços possibilitaram uma compreensão mais profunda do conjunto \mathbb{R} , que, ao longo dos séculos, passou de um conceito intuitivo e informal para um fundamento essencial da Análise Matemática moderna. O rigor matemático que hoje caracteriza os números reais foi o produto do trabalho de vários matemáticos que, ao longo de séculos, construíram as bases para a Análise, o Cálculo e a Matemática contemporânea. Diante dessa importância histórica e estrutural, é essencial que a compreensão dos números reais seja enfatizada desde o Ensino Fundamental, pois é nesse período que os estudantes constroem suas primeiras noções sobre grandezas, medidas e operações numéricas. Um ensino bem fundamentado dos números reais não apenas facilita a transição para conceitos mais abstratos no Ensino Médio e no Ensino Superior, como também contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de resolver problemas de forma estruturada.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA

Este capítulo apresenta a sequência didática desenvolvida para investigar as potencialidades de um RPG eletrônico no ensino dos números reais. A sequência didática foi elaborada e aplicada aos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública no sul de Minas Gerais. O objetivo foi promover uma construção gradual, contextualizada e significativa dos conceitos relacionados ao conjunto dos números reais, com especial atenção à introdução dos números irracionais, frequentemente percebidos como abstratos e desafiadores por estudantes do Ensino Fundamental. O capítulo aborda os fundamentos teóricos que embasam desde o planejamento das aulas até o desenvolvimento do jogo educativo e sua implementação em sala de aula. O trabalho desenvolvido demonstra como a combinação entre História da Matemática, tecnologia e ludicidade pode favorecer a compreensão conceitual nas aulas de Matemática na Educação Básica.

4.1 Fundamentos da proposta didática

A proposta didática para esta pesquisa foi fundamentada na articulação entre os saberes matemáticos historicamente construídos, o uso da tecnologia digital como aliada do processo de ensino-aprendizagem e a valorização de práticas interativas que favorecem o envolvimento dos estudantes na construção do conhecimento.

A abordagem histórica foi adotada como fio condutor da sequência didática, visando tornar o conteúdo mais significativo e próximo da realidade dos estudantes. A introdução de cada conceito foi articulada a marcos importantes da História da Matemática, como o uso de frações unitárias no Egito e na Babilônia, a crise pitagórica diante da descoberta dos números irracionais e o avanço para a formalização dos números reais com o desenvolvimento científico. Esses episódios históricos foram utilizados não apenas como contextualização, mas como base para discussões que podem evidenciar como a Matemática se desenvolveu em resposta a necessidades práticas e conceituais da humanidade.

Miguel (1997) defende que a História da Matemática possui múltiplas potencialidades pedagógicas, listando argumentos que justificam sua integração ao ensino da disciplina. Segundo o autor, a história pode funcionar como fonte de motivação, auxiliar na definição de objetivos e métodos de ensino, bem como fornecer problemas interessantes e contextualizados. Além disso, permite desmistificar a Matemática, favorecendo a construção de um pensamento mais crítico, reflexivo e autônomo por parte dos estudantes. Também contribui para a forma-

lização de conceitos, articulação entre diferentes áreas da Matemática, promoção de valores e atitudes e desenvolvimento de uma consciência epistemológica. Apesar de reconhecer que alguns desses argumentos podem apresentar fragilidades, como o risco de uso superficial ou descontextualizado de episódios históricos, o autor reforça a ideia de que, se bem planejada e articulada ao conteúdo, a História da Matemática pode enriquecer significativamente o processo de ensino e aprendizagem, tornando-o mais significativo, humanizado e conectado à construção histórica do conhecimento matemático.

De acordo com Chaquiam (2017), diversas pesquisas apontam que a inserção da História da Matemática no ensino pode contribuir significativamente para a aprendizagem, ao permitir que os estudantes compreendam as origens culturais dos conceitos, percebam os desafios e esforços envolvidos em sua construção e reconheçam a Matemática como uma produção humana em constante transformação. Além disso, ao entrar em contato com diferentes contextos históricos, os estudantes podem comparar práticas matemáticas do passado e do presente, favorecendo uma visão mais crítica e significativa dos conteúdos escolares.

A utilização da História da Matemática, em conjunto com recursos tecnológicos no ensino, pode oferecer uma abordagem que valoriza tanto a evolução conceitual quanto a aplicabilidade contemporânea dos conhecimentos matemáticos. Ao relacionar os desafios históricos enfrentados por diferentes civilizações com as ferramentas digitais disponíveis atualmente, os estudantes são capazes de compreender a Matemática como uma ciência viva, em constante transformação. Essa articulação entre passado e presente não apenas enriquece a aprendizagem, mas também desenvolve nos estudantes uma visão crítica sobre como a Matemática se constrói e se aplica em diferentes contextos sociais e tecnológicos.

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (BRASIL, 2018, p. 298).

A BNCC propõe a utilização de recursos tecnológicos, jogos e atividades práticas como estratégias didáticas que tornam o aprendizado mais acessível e envolvente. Entretanto, o texto do documento alerta que “esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização” (BRASIL, 2018, p. 276). Dessa forma, a utilização de jogos e tecnologias no ensino de Matemática não deve

ser uma atividade descontextualizada, mas sim inserida em um projeto pedagógico intencional e orientado por objetivos educacionais claros.

Nesse sentido, a Competência Geral 5 da BNCC estabelece que o estudante deve ser capaz de “compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética [...] para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva” (BRASIL, 2018, p. 9). Assim, é esperado que o uso de tecnologias digitais e jogos ultrapasse o caráter de entretenimento, assumindo um papel formativo ao favorecer a autonomia intelectual e a construção crítica do conhecimento.

O uso de jogos como recurso educacional fundamenta-se em princípios pedagógicos que valorizam a aprendizagem ativa e contextualizada. Segundo Grandó (2004), a implementação de jogos educativos deve considerar três momentos essenciais: inicialmente, a exploração livre da interface, permitindo aos estudantes identificar elementos familiares e estabelecer conexões com seus conhecimentos prévios; em seguida, a assimilação gradual das regras e mecânicas, processo que pode ocorrer tanto por mediação docente quanto por descoberta autônoma; finalmente, o engajamento propriamente dito, quando os estudantes consolidam a compreensão das regras e começam a reconhecer, de maneira espontânea, os conceitos educacionais integrados à dinâmica do jogo. Essa abordagem favorece a motivação e a construção significativa de conhecimentos, ao articular elementos de interatividade, desafio e contextualização no processo de aprendizagem.

Desse modo, conforme proposto por Grandó (2004), a intervenção pedagógica em atividades com jogos deve incluir diálogos reflexivos que estimulem os estudantes a analisar criticamente suas estratégias e a estabelecer conexões explícitas entre suas ações no jogo e os conceitos curriculares correspondentes. Essas interações verbais visam promover a metacognição, incentivando os estudantes a justificar decisões (como a adequação de aproximações decimais) e a reconhecer representações matemáticas em contextos não convencionais (tais como a identificação de dízimas periódicas em frações). Complementarmente, o registro dessas experiências, por meio de questionários e atividades, representa uma ferramenta importante para consolidar a aprendizagem, permitindo que os estudantes expressem tanto a compreensão dos conceitos matemáticos quanto suas expectativas, sentimentos e impressões sobre o jogo, traduzindo situações concretas da atividade em linguagem matemática formal. Essa prática integra a vivência interativa à abstração conceitual, como ocorre na elaboração de procedimentos algorítmicos

(por exemplo, a soma de divisores próprios) para resolver desafios narrativos. A articulação entre mediação dialógica e registros estruturados reforça a dupla função pedagógica dos jogos: engajar por meio da ludicidade e fortalecer construções conceituais em bases cognitivas sólidas.

A fase final da utilização de jogos no processo de aprendizagem, conforme a estrutura proposta por Grando (2004), corresponde ao momento de “jogar com competência”, no qual os estudantes demonstram domínio, tanto dos conceitos matemáticos, quanto das estratégias lúdicas. Nesta etapa, o papel do educador se modifica significativamente, transitando de mediador ativo para observador facilitador, criando condições para que os estudantes assumam protagonismo na discussão e compartilhamento de suas descobertas. Esse estágio de autonomia está alinhado com a Competência Geral 9 da BNCC, que enfatiza o desenvolvimento de habilidades socioemocionais, como empatia, cooperação e trabalho em equipe. A dinâmica promove não apenas a consolidação de conhecimentos matemáticos, mas também fortalece capacidades essenciais, tais como comunicação matemática, escuta ativa, negociação de ideias e autonomia intelectual. A integração dessas dimensões, cognitiva e socioemocional, evidencia o potencial dos jogos educativos como ferramentas pedagógicas complexas, capazes de articular aprendizagem conceitual, desenvolvimento de habilidades e formação cidadã.

O uso de jogos no ensino de Matemática favorece a interação, o desafio e a autonomia do estudante, ao mesmo tempo em que permite a mediação ativa do professor. Grando (2004, p. 26) argumenta que o jogo, enquanto ferramenta pedagógica, pode ser um “facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação, e também produtivo ao aluno, que desenvolveria sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las (investigação matemática), com autonomia e cooperação”.

É necessário que o educador utilize jogos com propósito educativo e dentro de uma dinâmica didática que promova o movimento do conceito e o desenvolvimento do sujeito. Nesse sentido, Grando (2004) afirma que o jogo, quando bem conduzido, torna-se um espaço privilegiado para o desenvolvimento da criatividade e da capacidade de resolução de problemas. Ao inserir-se em uma situação desafiadora mediada pelo jogo, o estudante é levado a elaborar e testar estratégias, respeitar regras e reestruturá-las diante de novos estímulos. O envolvimento com o jogo estimula a exploração da estrutura matemática presente na atividade, favorecendo o desenvolvimento de formas de pensar e agir matematicamente. Essa experiência aproxima-se

do processo de resolução de problemas, em que o sujeito formula hipóteses, constrói caminhos e avalia soluções possíveis.

Entre os gêneros de jogos digitais, os RPGs se destacam por permitir que os participantes criem personagens e vivenciem histórias em que suas escolhas influenciam o desenrolar dos acontecimentos. Trata-se de um tipo de jogo que combina narrativa, estratégia e imaginação, promovendo o envolvimento do jogador com a história. No contexto da Educação Matemática, eles se destacam por permitir que os estudantes assumam papéis, tomem decisões e enfrentem desafios narrativos que necessitam da aplicação de conceitos matemáticos em situações-problema.

A construção de um universo ficcional que se mistura com a História da Matemática permite, por exemplo, que o uso de números reais esteja ligado à resolução de enigmas, manipulação de recursos ou superação de obstáculos. O conteúdo matemático é, assim, incorporado à narrativa e se torna significativo para o estudante.

Os mundos imaginários de um RPG podem ser variados, abrangendo cenários de fantasia medieval, ficção científica, realidades alternativas ou até épocas históricas. Cada elemento da história geralmente tem um propósito, desde o ambiente até os eventos e os nomes dos personagens, que costumam ser escolhidos para refletir traços, origens ou mistérios associados ao enredo. Objetos, locais e até diálogos simples podem tornar-se significativos ao longo do jogo, criando um maior envolvimento para os jogadores. Essa atenção aos detalhes estimula a criatividade, a capacidade de resolução de problemas e o senso de colaboração entre os estudantes, transformando o RPG em um recurso com potencial educacional.

A abordagem de resolução de problemas, segundo Moura (2008), pode ser analisada sob duas perspectivas principais. A primeira considera o uso de problemas como método de ensino, demonstrando aos estudantes o processo de construção do conhecimento matemático. A segunda enfatiza o desenvolvimento de competências que permitam aos estudantes não apenas resolver questões similares, mas também criar bases cognitivas para enfrentar desafios futuros. Ambas as abordagens representam campos relevantes de investigação pedagógica.

A integração entre a História da Matemática, os jogos eletrônicos e a resolução de problemas pode transformar o ensino dos números reais em um processo mais dinâmico, significativo e contextualizado. Essa abordagem favorece a aprendizagem de conteúdos matemáticos e o desenvolvimento do pensamento crítico, da capacidade de abstração e do protagonismo estu-

dantil. O conhecimento matemático, nesse contexto, torna-se parte da formação integral desses estudantes.

4.1.1 Desenvolvimento do jogo educativo de RPG na plataforma RPG Maker

Neste trabalho, foi desenvolvido um jogo de RPG eletrônico, intitulado *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*, que se baseia em um enredo ficcional, no qual o protagonista deve recuperar páginas perdidas de um livro sagrado da História da Matemática. Essas páginas foram arrancadas pelo vilão, que pretende apagar o conhecimento matemático do mundo, e foram espalhadas em diferentes épocas. Cada “mundo” explorado no jogo representa uma etapa da evolução dos números, desde os sistemas de contagem primitivos até a formalização do conjunto dos números reais. Essa construção simbólica busca reforçar o vínculo entre Matemática e cultura, ao mesmo tempo em que cria um ambiente pedagógico dinâmico e desafiador para o aprendizado.

Os cenários e personagens do jogo são inspirados em contextos históricos, como a Pré-história, a Idade Média e o Renascimento, e os desafios matemáticos são apresentados de forma integrada à narrativa, exigindo raciocínio lógico, interpretação e aplicação de conceitos. Os estudantes avançam na história conforme superam os obstáculos matemáticos, o que promove um sentimento de progressão e conquista. Ao utilizar elementos próprios do universo dos jogos digitais, como recompensas, missões e narrativa de aventura, o RPG contribui para o aumento do engajamento e para o envolvimento emocional dos estudantes com a Matemática.

A plataforma RPG Maker (Figura 4.1) foi utilizada para criar o jogo, pois é conhecida por ser acessível e flexível. A escolha desse *software* foi feita devido à sua facilidade de uso, especialmente por permitir que usuários com pouca ou nenhuma experiência em programação elaborem narrativas interativas com relativa facilidade. A RPG Maker dispõe de códigos reutilizáveis, o que significa que não é necessário criar novas mecânicas para o jogo. É possível usar funcionalidades já disponíveis na plataforma e adaptá-las à narrativa e aos objetivos do projeto. Isso torna a RPG Maker uma ferramenta adequada para o desenvolvimento de jogos educativos desenvolvidos para o ensino de conceitos matemáticos, como os números reais, de forma prática e acessível.

A RPG Maker é uma ferramenta desenvolvida pela empresa japonesa ASCII. A plataforma oferece um ambiente acessível para desenvolvimento de jogos, com uma interface

Figura 4.1 – Plataforma RPG Maker.



Fonte: RPG Maker Web, 2025.

Disponível em: <https://www.rpgmakerweb.com/>. Acesso em: 07 jan. 2025.

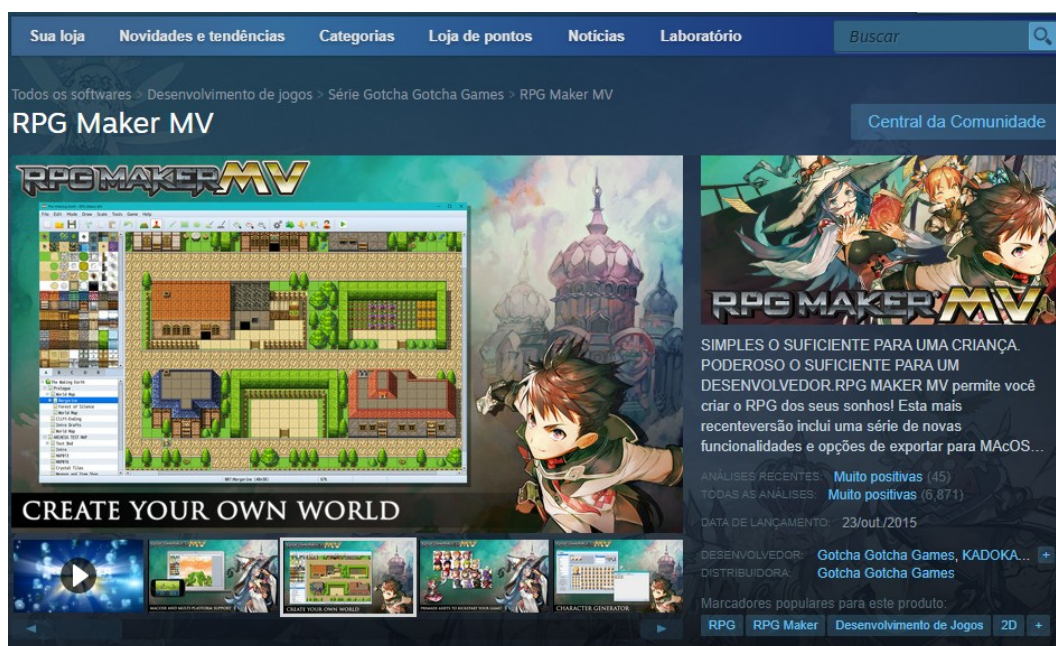
intuitiva que utiliza *tilesets*¹ para a construção de mapas, além de comandos de eventos pré-programados que facilitam a criação de narrativas e mecânicas interativas.

Dentre as versões disponíveis, a opção pelo RPG Maker MV² justificou-se por diferentes fatores. A versão MV oferece gráficos 2D em estilo *pixel art*, suficientes para os propósitos educacionais e amplo acervo de *tilesets* originais e pacotes adicionais que permitiram caracterizar adequadamente os cenários históricos. O software foi adquirido com recursos próprios da pesquisadora, o que assegurou autonomia para o desenvolvimento do jogo educativo utilizado neste estudo. Outro ponto positivo observado foi a disponibilidade de materiais de apoio e tutoriais em fóruns de comunidades voltadas para o assunto e em vídeos no YouTube. Isso facilitou a solução de desafios técnicos e agilizou o processo de desenvolvimento do recurso educacional. Na Figura 4.2, é possível observar a interface da página do *software* RPG Maker MV na plataforma Steam, na qual se destacam as informações gerais e alguns recursos.

¹ Conjuntos de pequenas imagens, geralmente quadradas, que servem como os blocos de construção para criar cenários em jogos. Cada peça é um *tile* e, ao juntar esses *tiles*, forma-se um cenário completo, como um chão, uma parede ou uma floresta. Essa técnica é muito usada em jogos 2D para criar mundos virtuais.

² RPG Maker MV é um *software* de desenvolvimento de jogos distribuído comercialmente pela plataforma Steam (https://store.steampowered.com/app/363890/RPG_Maker_MV/). A plataforma Steam oferece mecanismos para atualizações automáticas e disponibilização de conteúdos adicionais para o *software*. O programa é amplamente utilizado por criadores independentes devido à sua acessibilidade e recursos intuitivos para produção de jogos em estilo RPG bidimensional.

Figura 4.2 – Página do RPG Maker MV na plataforma Steam.



Fonte: STEAM. RPG Maker MV.

Disponível em: https://store.steampowered.com/app/363890/RPG_Maker_MV/. Acesso em: 07 jan. 2025.

Os jogos criados na plataforma RPG Maker mantêm o estilo visual característico dos clássicos do Super Nintendo, com seus gráficos 2D e visão de cima para baixo. Games clássicos com gráficos pixelizados podem ser visualmente simples, mas isso não limita a criação de mundos ricos e histórias envolventes. Essa ligação com os RPGs clássicos vai além dos gráficos, está na própria estrutura dos jogos. Na Figura 4.3 é possível observar uma das cenas do jogo educativo desenvolvido na plataforma RPG Maker MV, representando o interior da casa do protagonista, com as características gráficas mencionadas.

A construção do jogo iniciou-se com a elaboração de um roteiro pedagógico, baseado na sequência didática planejada para o ensino dos números reais no 9º ano do Ensino Fundamental. A estrutura narrativa e os desafios do jogo foram pensados para acompanhar a progressão dos conteúdos matemáticos abordados ao longo de oito aulas.

Foram definidos os seguintes elementos estruturais:

- a) divisão do jogo em mundos históricos, cada um associado a um período marcante no desenvolvimento dos conjuntos numéricos (como Pré-história, Idade Média, Renascimento e Futuro);
- b) distribuição dos conteúdos matemáticos por mundo, garantindo que os desafios do jogo estivessem de acordo com os conteúdos das aulas;

Figura 4.3 – Tela do jogo *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*.



Fonte: Da autora (2025).

- c) construção do enredo: o protagonista Arithy deve recuperar páginas perdidas do Livro da História da Matemática, enfrentando desafios em diferentes épocas para restaurar o conhecimento perdido.

A construção do jogo educacional no RPG Maker MV envolveu um trabalho de recriação de ambientes. Cada período histórico foi representado através de mapas customizados, com *tilesets* especialmente adaptados para recriar os contextos culturais, que caracterizavam digitalmente os períodos históricos abordados. Cenários como campos com animais, rios, mercados, cais e laboratório foram elaborados, incorporando elementos visuais que incluíam desde características arquitetônicas até vestuários de personagens e objetos típicos de cada período, garantindo assim uma ambientação histórica coerente (Figura 4.4).

Os personagens não jogáveis (NPCs) foram elaborados para representar figuras características de cada período histórico, incorporando desde suas ocupações típicas até detalhes como vestuário e vocabulário, condizentes com a época. Essa caracterização abrangendo caçadores pré-históricos, mercadores, astrônomos e outros não apenas tornou o jogo mais envolvente, como também ajudou a evidenciar como a Matemática surgiu das necessidades e costumes de cada época. Para a criação desses personagens, o RPG Maker MV oferece um sistema de personalização bastante amplo, que permite combinar diferentes características, como formato do

Figura 4.4 – Representação dos quatro mundos que compõem o jogo, relacionados aos conjuntos numéricos \mathbb{N} (naturais), \mathbb{Z} (inteiros), \mathbb{Q} (racionais) e \mathbb{I} (irracionais).



Fonte: Da autora (2025).

rosto, tipo de cabelo, olhos, nariz, boca, roupas, acessórios e outros elementos. A Figura 4.5 ilustra alguns dos NPCs presentes no jogo, evidenciando a variedade de combinações possíveis para compor personagens únicos e representativos dos diferentes contextos históricos.

Figura 4.5 – Exemplos de NPCs desenvolvidos para o jogo.



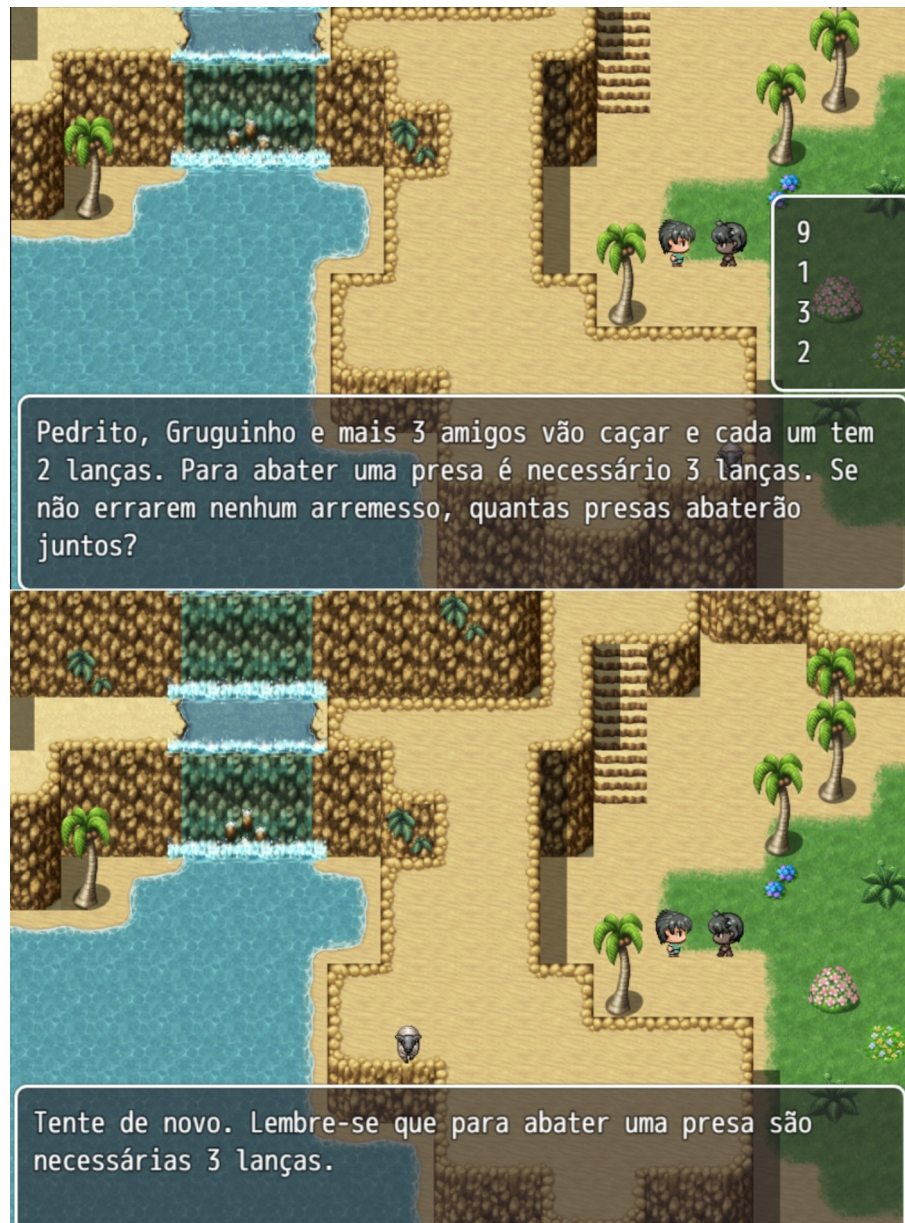
Fonte: Da autora (2025).

A interatividade do jogo foi implementada através de um sistema de eventos programáveis, que controlava todos os aspectos da experiência do jogador. Esse sistema permitia que diálogos se adaptassem ao progresso do estudante, introduzindo conceitos matemáticos de forma gradual e contextualizada. As missões seguiam uma estrutura sequencial, sendo desbloqueadas apenas após a conclusão das tarefas anteriores, estabelecendo uma sequência lógica de aprendizagem. Os desafios matemáticos foram planejados para exigir respostas corretas para o avanço na narrativa, com um sistema de *feedback* imediato que oferecia dicas contextualizadas ou novas orientações para o problema quando o jogador cometia erros.

O gerenciamento do progresso dos jogadores foi realizado através de um conjunto de variáveis acumuladoras e *switches*. Uma variável acumuladora é um tipo de variável numérica usada para guardar e somar valores ao longo do jogo. Por exemplo, ela pode registrar o número de itens coletados ou a quantidade de respostas corretas em perguntas do tipo *quiz*. Ela serve para acompanhar o progresso do jogador e ativar eventos com base nesses números, sendo útil para pontuações, contadores e desbloqueio de recompensas. Já uma variável *switch* é um recurso lógico utilizado para controlar o fluxo de eventos no jogo, funcionando como um interruptor que pode estar em dois estados: ligado (*ON*) ou desligado (*OFF*). Ela permite ativar ou desativar condições específicas, como desbloquear diálogos, acionar mudanças no ambiente ou registrar que determinada ação foi realizada pelo jogador.

A progressão no jogo foi idealizada para se adaptar ao desempenho de cada estudante. Os acertos acumulados permitiam a recuperação de “páginas do conhecimento”, itens que pertencem à narrativa e que foram projetados para reforçar tanto o desenvolvimento do enredo quanto a contextualização histórica. Alguns desafios exigiam que todos os problemas fossem resolvidos corretamente para liberar essas páginas, promovendo um nível mais elevado de dedicação e precisão. Em outros casos, acertar mais da metade das questões já era suficiente para conquistar a recompensa, oferecendo um equilíbrio entre desafio e acessibilidade. Em situações de insucesso, o jogador recebia novas oportunidades e tinha acesso a estratégias de reforço, como revisões guiadas e explicações complementares, garantindo que o processo de aprendizagem permanecesse ativo e motivador, mesmo diante das dificuldades. A Figura 4.6 ilustra um exemplo desse processo: no primeiro quadro, é apresentado um problema matemático contextualizado na fase dos números naturais; no segundo quadro, observa-se uma mensagem de retorno ao jogador após uma resposta incorreta, oferecendo uma orientação que o auxilia a refletir sobre as condições do problema e tentar novamente.

Figura 4.6 – Exemplo de problema matemático e *feedback* no ambiente do jogo.



Fonte: Da autora (2025).

O jogo combinou diferentes estilos de aprendizagem e resolução de problemas: desde questões teóricas sobre a natureza e propriedades dos conjuntos numéricos e seus elementos específicos, até curiosidades matemáticas sobre números primos, números perfeitos, quadrados perfeitos, números pares/ímpares e as formas como são representadas as dízimas periódicas. A compreensão da reta real e da ordenação dos números também foi incluída no jogo, estes conceitos são considerados essenciais para compreender a estrutura dos números reais.

Como parte do processo de validação, a aplicação piloto do jogo educativo foi realizada com cinco voluntários de diferentes áreas do conhecimento: uma professora de Linguagens,

uma professora de Ciências Humanas, dois professores de Matemática e um licenciando em Física. Essa fase de testes teve como principal objetivo avaliar pontos relevantes do jogo. Foram analisados a clareza da linguagem, a fluidez da narrativa, a coerência pedagógica e o funcionamento técnico. Também foi verificado se os problemas e desafios estavam adequados aos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Para isso, foram observados a progressão da dificuldade, a pertinência da contextualização histórica e o equilíbrio entre a complexidade matemática e o desenvolvimento cognitivo esperado para a faixa etária.

As observações e sugestões dos participantes levaram a ajustes significativos no material. Em primeiro lugar, os diálogos foram revisados para ficarem mais objetivos e próximos do vocabulário usado por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Ao mesmo tempo, foi mantida a precisão dos conteúdos históricos e matemáticos.

Uma das mudanças mais importantes aconteceu na última parte do jogo. Originalmente, essa etapa combinava a resolução de problemas envolvendo números reais com a classificação desses números em seus subconjuntos. No entanto, seguindo a recomendação de dois dos professores participantes, os problemas foram removidos dessa parte final. A justificativa foi que os estudantes já haviam enfrentado desafios similares nas etapas anteriores e a repetição poderia tornar o encerramento menos dinâmico e desestimulante. Assim, a última fase foi reformulada para focar exclusivamente na atividade de classificação numérica, funcionando como uma síntese dos conceitos trabalhados ao longo do jogo.

Esse processo de revisão colaborativa foi fundamental para melhorar o jogo, garantindo que ele tivesse um bom equilíbrio entre desafio, clareza, narrativa fluida e objetivos de aprendizagem. A diversidade de perspectivas dos avaliadores, abrangendo diferentes áreas do conhecimento e níveis de experiência docente, contribuiu para ajustar o material e torná-lo mais eficaz para o ensino.

Após as correções, o jogo foi convertido para um formato compatível com navegadores, dispensando a necessidade de instalação local. Para viabilizar seu acesso em diferentes contextos, optou-se por sua hospedagem temporária na plataforma gratuita Vercel³. Essa alternativa também possibilita que o jogo seja utilizado em momentos de revisão ou aprofundamento, fora do ambiente escolar, em outras aplicações pedagógicas.

³ Vercel é uma plataforma gratuita para hospedagem e compartilhamento de aplicações *web*, permitindo que projetos desenvolvidos em ambientes como o RPG Maker MV sejam acessados diretamente por navegadores. Disponível em: <https://vercel.com>.

A versão jogável de *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*, desenvolvida exclusivamente para esta pesquisa, pode ser acessada por meio do *link*: <<https://matematica-black.vercel.app/>>. O conteúdo disponível *online* reproduz integralmente a versão utilizada na sequência didática aplicada aos estudantes, incluindo os desafios matemáticos, os diálogos com os personagens e os quatro mundos temáticos que compõem a jornada. No entanto, o código-fonte do jogo não foi disponibilizado publicamente nesta etapa da pesquisa, permanecendo sob responsabilidade da autora.

4.1.2 Roteiro para o jogo *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*

O enredo principal do jogo *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números* gira em torno de Arithy, um estudante curioso que, ao acordar durante a madrugada devido a ruídos estranhos, presencia o roubo de um livro muito especial: o Livro da História da Matemática. Durante a fuga, o ladrão deixa escapar algumas páginas, que acabam se espalhando por diferentes mundos, cada um representando uma era histórica da evolução dos números. Para recuperar essas páginas, o protagonista precisa atravessar esses mundos e enfrentar desafios matemáticos contextualizados historicamente. A narrativa se inicia na casa do personagem principal, onde ele descobre que o livro desapareceu. Em sua busca, Arithy encontra uma sala mágica com portas misteriosas, cada uma conduzindo a um mundo baseado em uma etapa da construção dos conjuntos numéricos. Um guardião do tempo, chamado Chronos, surge e explica que a única forma de restaurar o livro é recuperando suas páginas por meio da superação dos desafios matemáticos em cada mundo.

A introdução do jogo apresenta uma narrativa que contextualiza o enredo e aproxima o jogador, que é o estudante, da proposta educativa da aventura. As imagens utilizadas nessa etapa foram geradas por ferramentas de inteligência artificial (Meta⁴ e Copilot⁵), o que permitiu uma estética visual envolvente e personalizada. Além disso, trechos da introdução utilizam linguagem informal, com o objetivo de estabelecer uma conexão mais próxima com o cotidiano dos estudantes, promovendo maior identificação com a jornada de Arithy.

O primeiro mundo representa a Pré-história e aborda o surgimento dos números naturais. O cenário é composto por paisagens primitivas, cavernas e elementos da vida cotidiana

⁴ Ferramenta Meta AI, desenvolvida pela Meta Platforms, com recurso de criação de imagens a partir de comandos em texto. Disponível em: <https://www.meta.ai/>.

⁵ Ferramenta Microsoft Copilot, desenvolvida pela Microsoft Corporation, com recurso de criação de imagens a partir de comandos em texto. Disponível em: <https://copilot.microsoft.com/>.

ancestral. Nessa fase, o jogador deve explorar o ambiente e encontrar três NPCs, cada um responsável por propor um bloco de desafios. O primeiro bloco trata de perguntas sobre formas de contagem e registros utilizados pelos povos antigos, com base na história dos números. O segundo bloco envolve a resolução de problemas simples, utilizando as quatro operações fundamentais com números naturais. O terceiro bloco propõe situações-problema mais complexas, que exigem raciocínio e reflexão, embora ainda restritas às operações com naturais. A cada bloco concluído, uma página do livro é recuperada. Ao final, Arithy encontra Uno, o guardião desse mundo, que o desafia a classificar números primos (definidos como números naturais maiores que um e divisíveis apenas por um e por si mesmo) e números perfeitos (aqueles cuja soma dos divisores próprios é igual ao próprio número). O jogador deve abrir baús espalhados pelo cenário, ler os números e classificá-los corretamente. Ao classificar pelo menos seis baús de forma correta, o portal se abre e Arithy retorna à sala de sua casa.

O segundo mundo trata dos números inteiros, com ambientação campestre e pastoril. A guardiã desse mundo é Integra, que solicita quatro itens para desbloquear o portal: ferradura, tecido, tempero e madeira. Para obtê-los, Arithy deve interagir com NPCs (o monge, Bargas, o mercador, o carpinteiro, Jasmine, o ferreiro e Eldrin). O monge propõe cinco desafios sobre ordenação dos números inteiros, inclusive na reta numérica, sendo necessário acertar ao menos três para receber uma página do livro. Bargas, outro NPC, apenas conduz o protagonista até o mercador, que propõe problemas simples com as quatro operações dentro do conjunto dos números inteiros e também entrega uma página do livro. O carpinteiro propõe o cálculo de uma raiz cúbica e entrega a madeira ao ser resolvido o desafio. Jasmine propõe três perguntas, relacionando números positivos, negativos e o zero a situações de equilíbrio, e entrega o tempero solicitado por Integra. O ferreiro faz perguntas sobre paridade e entrega a ferradura. Por fim, Eldrin desafia o jogador com uma pergunta sobre quadrados perfeitos e entrega o tecido. Ao reunir os quatro itens e entregá-los a Integra, Arithy recebe a última página deixada neste mundo e retorna à sala de sua casa.

A fase dos números racionais se passa em um cenário medieval, com castelos, mercados e oficinas. Nesta etapa, o jogador interage com NPCs que propõem desafios distintos: Francesco apresenta cinco perguntas teóricas sobre números racionais, cujas respostas corretas garantem uma página do livro; Giovanni desafia Arithy com três perguntas sobre escalas; e Beatrice, guardiã do porto, propõe problemas envolvendo operações com frações. Os três recompensam o jogador com uma página do livro por desempenho satisfatório. Já Lorenzo, outro NPC da

fase dos números racionais, propõe a coleta de cristais que representam dízimas periódicas. O jogador deve coletar ao menos cinco cristais corretos, com tolerância máxima de três incorretos, para receber o elixir que será entregue ao protetor deste mundo, Quotient, desbloqueando o portal para o próximo mundo.

No mundo dos números irracionais, o cenário assume uma estética futurista, com forte presença de elementos digitais, como circuitos eletrônicos, computadores, laboratórios e ambientes tecnológicos. Radixya, a guardiã, orienta Arithy a procurar o NPC Marco, que informa a necessidade de autorizações de outros personagens para reimprimir as páginas perdidas. Fidon, o filósofo, faz perguntas teóricas e históricas sobre os números irracionais; Elíades, o arquiteto, propõe problemas com valores exatos e aproximados; e Mira, uma artesã, solicita a resolução de dois problemas envolvendo o número áureo (ϕ), bastante presente nas artes. Após obter cada autorização, Marco reimprime três páginas do livro. Para acessar o portal, Radixya exige uma senha fornecida por Melodion, um músico, que desafia Arithy a ordenar corretamente os números irracionais $\sqrt{2}$, e , ϕ e π . Com isso, o portal é aberto e o protagonista retorna à sua casa.

Na etapa final do jogo, já de volta ao seu lar, Arithy conversa com Chronos e juntos iniciam o processo de restauração do livro. Entretanto, essa etapa só é concluída com a chegada dos guardiões dos mundos anteriores. Em uma sucessão de confrontos, Arithy deve classificar diversos números quanto ao conjunto numérico ao qual pertencem, demonstrando as relações de inclusão entre os subconjuntos do conjunto dos números reais ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$), em um cenário que representa sua própria casa, agora transformada simbolicamente no espaço de síntese do conhecimento. Com todos os guardiões reunidos, Arithy, Chronos e seus aliados enfrentam Erase, o vilão, derrotando-o e recuperando definitivamente o Livro da História da Matemática. Como reconhecimento por sua jornada e pelas páginas restauradas, Arithy é nomeado o novo guardião do mundo e do conjunto dos números reais.

Com base neste roteiro, o jogo *O Guardiã da História da Matemática: O Legado dos Números* combina desafios matemáticos com elementos históricos, criando uma experiência imersiva de aprendizado, na qual o personagem principal interage com a história dos números por meio de uma abordagem investigativa e educativa.

Em seguida, serão apresentados os principais personagens que compõem o universo do jogo. Cada um deles foi criado refletindo seus papéis na narrativa e seus vínculos com os desafios matemáticos do enredo. Além disso, o jogo conta com NPCs, que são controlados pelo

sistema e desempenham funções específicas, como fornecer informações, apresentar desafios ou enriquecer a ambientação, podendo ou não interagir com o jogador.

1. Protagonista

Nome: Arithy

Descrição: O nome vem do grego *arithmós*, que significa número. Personagem curioso e investigativo, que busca conhecimento matemático enquanto explora diferentes mundos para recuperar as páginas do Livro da História da Matemática. Estudante entusiasmado por descobertas matemáticas, embarca nesta aventura para reconstruir o conhecimento perdido.

Personalização: O jogador pode escolher a aparência do protagonista entre as três opções disponíveis, permitindo uma personalização mais abrangente e que melhor represente sua individualidade, facilitando a identificação com o personagem principal durante a jornada (Figura 4.7).

Figura 4.7 – Opções de avatar do personagem Arithy disponíveis para a escolha do jogador.



Fonte: Da autora (2025).

2. Ladrão do livro

Nome: Erase, o inimigo da história.

Descrição: Uma figura sombria e misteriosa, que rouba o Livro da História da Matemática e espalha suas páginas pelos mundos. Seu objetivo é manter a humanidade na escuridão da ignorância matemática. Seu nome reflete sua intenção de “escurecer” o conhecimento. O nome Erase, que em inglês significa apagar, para o antagonista de um jogo sobre a história da matemática carrega um significado. A ação de apagar está diretamente ligada à sua tentativa de roubar o livro de história, eliminando assim partes importantes do conhecimento matemático. Essa ação simboliza uma ameaça à compreensão e à memória dos conceitos matemáticos, tornando a jornada do protagonista para recuperar as páginas perdidas uma batalha contra a ignorância e a perda de conhecimento (Figura 4.8).

Figura 4.8 – Erase, o vilão que ameaça o conhecimento matemático.



Fonte: Da autora (2025).

3. Guardiã da sala mágica

Nome: Chronos, o mestre da eternidade.

Descrição: Um sábio que orienta Arithy na sua jornada pelos mundos numéricos. A associação com o deus grego do tempo traz a ideia de que o personagem representa a evolução da Matemática ao longo do tempo, guiando o jogador através de épocas distintas e descobertas. Além disso, a infinitude dos números reais, comparável à eternidade do tempo, reforça essa conexão. A possibilidade de controle do tempo adiciona uma camada de complexidade e aventura ao personagem, que pode atuar como um mestre da Matemática, um guardião do tempo ou um viajante temporal, oferecendo ao jogador uma experiência rica de exploração e aprendizado sobre a história e os conceitos da Matemática (Figura 4.9).

Figura 4.9 – Chronos, o mentor temporal da jornada matemática.



Fonte: Da autora (2025).

4. Chefe do mundo 1

Nome: Uno, o contador primitivo

Descrição: Um líder tribal que desafia Arithy a entender e resolver problemas com os primeiros métodos de contagem. A palavra *uno*, que significa um em italiano, simboliza o primeiro número natural que é a base de toda a Matemática. Como líder de uma tribo pré-histórica, Uno introduz o protagonista ao mundo dos números através de sua sabedoria ancestral e habilidades práticas. Sua presença conecta o jogador às raízes da Matemática, tornando a experiência de aprendizado mais envolvente e significativa (Figura 4.10).

Figura 4.10 – Uno, o protetor do mundo primitivo dos desafios de contagem.



Fonte: Da autora (2025).

5. Chefe do mundo 2

Nome: Integra, a mestra mercante.

Descrição: Integra é a guardiã dos números inteiros, que desafia Arithy a equilibrar contas e lidar com números inteiros. Integra representa o equilíbrio entre os números positivos e negativos, protegendo o conhecimento sobre os números inteiros e desafiando os jogadores com enigmas matemáticos. Sua conexão com a História da Matemática a torna uma personagem complexa e fascinante, capaz de ensinar e inspirar os jogadores a explorarem o mundo dos números. A personalidade sábia e justa de Integra a torna uma figura memorável e inspiradora (Figura 4.11).

6. Chefe do mundo 3

Nome: Quotient, o medidor universal

Descrição: Um mestre de medidas e frações, que desafia Arithy a entender as divisões e proporções do mundo racional. Seu nome destaca seu domínio sobre o cálculo com frações e seu papel como líder no mundo dos números racionais. *Quotient* (quociente em inglês) é o guar-

Figura 4.11 – Integra, defensora do equilíbrio entre os números inteiros.



Fonte: Da autora (2025).

dião ideal para o mundo dos números racionais, porque simboliza a essência matemática desses números: a divisão e a relação entre partes. Seu nome remete diretamente ao processo que dá origem aos números racionais, tornando-o uma figura de autoridade e compreensão profunda (Figura 4.12).

Figura 4.12 – Quotient, defensor dos números racionais e da proporcionalidade.



Fonte: Da autora (2025).

7. Chefe do mundo 4

Nome: Radixya, a herdeira de Hipaso de Metaponto

Descrição: Uma guardiã que detém o poder sobre as raízes, simbolizando os números irracionais, cuja natureza é baseada em raízes quadradas não exatas e com casas decimais infinitas e não periódicas. *Radix* é a palavra latina para raiz, que é um conceito matemático relacionado a operações de extração de raízes. Hipaso de Metaponto foi um matemático grego da antiga escola pitagórica que, de acordo com a história, teria sido o primeiro a descobrir que existem

números irracionais. Sua herdeira, Radixya, não é apenas uma guardiã passiva dos números irracionais, mas uma continuação da luta para reconhecer e honrar os aspectos mais complexos da Matemática (Figura 4.13).

Figura 4.13 – Radixya, a guardiã da essência dos números irracionais.



Fonte: Da autora (2025).

Mais do que simples elementos narrativos, os personagens funcionam como mediadores do conhecimento, promovendo uma imersão que combina aspectos históricos, conceituais e motivadores. Essa abordagem foi planejada para facilitar a aprendizagem dos conteúdos matemáticos e tornar a experiência mais significativa e motivadora para os estudantes, ao inseri-los em um contexto no qual a Matemática se apresenta como uma construção humana, histórica e em constante transformação. Ao final da jornada, espera-se que o jogador tenha construído e consolidado conhecimentos sobre os conjuntos numéricos e, também, desenvolvido uma nova perspectiva sobre a Matemática enquanto ciência viva, dinâmica e acessível.

4.2 Desenvolvimento da sequência didática

A sequência didática foi organizada em oito aulas, cada uma com duração de 50 minutos, distribuídas de forma a favorecer a construção progressiva e contextualizada do conhecimento. O planejamento (Apêndice C) contemplou uma revisão dos conjuntos numéricos já conhecidos pelos estudantes (naturais, inteiros e racionais) com o objetivo de ativar saberes prévios e criar um ponto de partida comum para todos. Em seguida, avançou-se para a exploração dos números irracionais, frequentemente percebidos como abstratos, e culminou na formalização do conjunto dos números reais. Todas as aulas foram estruturadas com base em objetivos claros, alinhados

às competências gerais e específicas previstas na BNCC, articulando fundamentos matemáticos, elementos históricos e atividades práticas.

A avaliação da aprendizagem dos estudantes, durante a aplicação da sequência didática, ocorreu de forma contínua e integrada ao desenvolvimento das aulas. Foram utilizadas quatro atividades com finalidades distintas: o Questionário 1 (Apêndice A), aplicado antes do início da sequência didática, e o Questionário 2 (Apêndice B), aplicado ao final de seu desenvolvimento. Ambos possibilitaram comparar as respostas dos estudantes e avaliar os impactos do jogo na aprendizagem dos conteúdos matemáticos abordados. Já as atividades aplicadas na terceira e na oitava aulas tiveram como foco investigar as impressões, sentimentos, expectativas e o interesse dos estudantes em relação ao jogo e à Matemática nele presente. Além disso, foram considerados como critérios avaliativos: a participação nas atividades, a capacidade de argumentação matemática durante os desafios propostos e a autonomia demonstrada.

Ao longo das oito aulas que compuseram a sequência didática, seis delas foram dedicadas ao desenvolvimento de atividades (Apêndice C) que permitiram a aplicação dos conteúdos revisados e aprendidos, buscando articular teoria e prática em diferentes situações. Dentre essas aulas, quatro tiveram foco direto na aplicação de conceitos matemáticos por meio de atividades contextualizadas e desafios relacionados ao jogo, enquanto duas foram destinadas à aplicação dos questionários já mencionados, voltados à investigação das percepções dos estudantes e à análise de sua aprendizagem.

A primeira aula teve início com uma breve apresentação da história dos números naturais, seguida da extensão para o conjunto dos números inteiros. Partiu-se do contexto histórico de surgimento desses conjuntos, evidenciando como a necessidade de contagem, a organização de objetos e a representação de ganhos e perdas impulsionou seu desenvolvimento. Durante a explicação, a reta numérica foi construída na lousa em conjunto com os estudantes, favorecendo a visualização da posição desses números. Em seguida, os estudantes realizaram atividades em duplas, que permitiram aplicar os conceitos em diferentes situações contextualizadas, como contagem de sacos de trigo em civilizações antigas, registros de dívidas na Idade Média, variações de pontos em jogos eletrônicos, movimentações bancárias, construções e escavações arqueológicas. A diversidade de situações buscou estimular a compreensão conceitual e aproximar a Matemática de diferentes contextos históricos e cotidianos.

Na segunda aula, o foco voltou-se para os números racionais. O encontro iniciou-se com uma breve contextualização histórica sobre o surgimento das frações em diferentes civi-

lizações, mostrando como as necessidades de divisão, comércio e medição impulsionaram o desenvolvimento desse conjunto numérico. Em seguida, foram exploradas e discutidas as diferentes formas de representação (frações, decimais e porcentagens) dos números racionais. As atividades propostas envolveram operações com números racionais e conversão entre frações, decimais e porcentagens. No entanto, a maioria dos estudantes conseguiu avançar apenas até a segunda atividade, que envolvia principalmente operações numéricas e transformação de frações em porcentagens.

Na terceira aula, os estudantes fizeram o primeiro contato com o jogo eletrônico *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*. Apresentado inicialmente como um recurso de revisão, o jogo permitia aos estudantes revisitar conteúdos já estudados, agora inseridos em uma narrativa envolvente e interativa. As regras e comandos do jogo foram explorados gradualmente, tanto com o apoio da professora quanto por meio da experimentação prática dos próprios estudantes. Com o tempo, eles passaram a reconhecer de forma espontânea os conceitos matemáticos embutidos nas ações do jogo, demonstrando familiaridade com os desafios propostos e desenvolvendo estratégias próprias para superá-los.

Na quarta aula, iniciou-se uma reflexão sobre a não linearidade da história dos números, destacando que diferentes matemáticos contribuíram para a construção dos conjuntos numéricos como os conhecemos hoje. Nesse contexto, foi apresentada a escola pitagórica, suas regras, crenças e a visão de que tudo no mundo poderia ser explicado por números, concebidos, naquele momento, apenas como naturais, inteiros e razões entre inteiros. Em seguida, foi introduzida a história de Hipaso de Metaponto e o estudo da diagonal do quadrado de lado uma unidade, utilizando o Teorema de Pitágoras para calcular sua medida como $\sqrt{2}$.

A quinta aula teve como objetivo a formalização do conjunto dos números irracionais. Inicialmente, foram retomados os principais conceitos discutidos na aula anterior, reforçando a diferença entre números racionais e irracionais. Para reforçar essa distinção, foram apresentados exemplos clássicos como π , $\sqrt{3}$ e e , destacando a característica de apresentarem representações decimais infinitas e não periódicas. A partir do interesse dos estudantes, discutiram-se aplicações práticas, como o uso de π em cálculos geométricos e de e em situações financeiras, ampliando a compreensão sobre a relevância desses números em diferentes contextos.

Na sequência, os estudantes foram organizados em duplas para desenvolver atividades que relacionavam conceitos teóricos e aplicabilidade. As atividades propostas envolviam a classificação de números como racionais ou irracionais, a representação aproximada de nú-

meros como $\sqrt{2}$, π , $\sqrt{9}$ e $-\pi$ na reta numérica e a resolução de questões que relacionavam irracionais a situações-problema, como a diagonal de um quadrado de lado uma unidade e o cálculo de montante em juros contínuos utilizando a constante e . Observou-se que a maioria dos estudantes conseguiu avançar nas duas primeiras atividades, demonstrando compreensão ao diferenciar números racionais e irracionais e representá-los na reta numérica. Contudo, houve maior dificuldade na questão 3(b), que envolvia o uso da fórmula de juros contínuos com a constante e . Muitos estudantes relataram não se sentirem seguros para realizar os cálculos, apontando a complexidade da tarefa como um obstáculo. Esse resultado evidenciou a necessidade de retomada e aprofundamento desse conteúdo em momentos posteriores, de modo a consolidar a compreensão sobre aplicações de números irracionais em contextos matemáticos mais abstratos.

Em momentos nos quais os conteúdos exigiam maior precisão, como na análise de representações decimais periódicas infinitas ou aproximações para números irracionais, foram utilizadas calculadoras como ferramenta de apoio. O uso desse recurso teve como finalidade não apenas facilitar os cálculos, mas também permitir que os estudantes se concentrassem na análise crítica e no significado matemático das soluções encontradas.

A introdução ao tema das aproximações e estimativas foi um ponto fundamental para a discussão sobre as limitações da representação decimal dos números irracionais. Os estudantes foram levados a refletir sobre como determinadas áreas do conhecimento, como a Engenharia, a Arquitetura ou a Física, lidam com essas limitações, adotando valores aproximados, padrões de arredondamento e margens de erro. Essa reflexão ampliou a compreensão dos números irracionais, ao mesmo tempo em que ressaltou sua relevância para além da sala de aula.

Durante a sexta e oitava aulas, o jogo foi retomado como ferramenta de consolidação e aplicação prática dos conhecimentos construídos. Nessas aulas, os estudantes enfrentaram desafios matemáticos alinhados aos objetivos da sequência didática, como cálculos com frações, comparação de números decimais, localização de irracionais na reta numérica e resolução de expressões com radicais.

Na sexta aula, os estudantes resolveram desafios envolvendo a identificação de dízimas periódicas, relações de proporcionalidade e cálculos aproximados com números irracionais. Durante o jogo, as jogadas foram discutidas de forma coletiva, estimulando os estudantes a justificar suas escolhas e a registrar suas estratégias. À medida que avançavam, os estudantes passaram a apresentar maior autonomia para propor soluções e analisar suas jogadas.

A estrutura do jogo favoreceu o envolvimento dos estudantes ao transformar problemas matemáticos em enigmas narrativos que exigiam raciocínio lógico e argumentação matemática. Em algumas fases, os personagens do jogo se deparavam com situações que exigiam aproximações numéricas e justificativas lógicas. Nessas ocasiões, a atuação docente ocorreu com questionamentos, promovendo discussões em pequenos grupos sobre cálculos e procedimentos utilizados e incentivando a reflexão sobre as decisões tomadas. Um exemplo disso ocorreu quando os estudantes precisaram justificar como identificar uma dízima periódica a partir de uma fração apresentada. Após essas interações, os estudantes registravam seus procedimentos, transformando as ações realizadas no jogo em linguagem matemática formal, como a escrita de frações equivalentes ou o uso de operações com divisores próprios para resolver desafios propostos pela narrativa.

A sétima aula iniciou-se com uma retomada teórica sobre os conjuntos numéricos, realizada de forma coletiva na lousa por meio da construção do diagrama de Venn dos números reais (Figura 3.14). Começamos pelos números naturais, discutindo a inclusão do zero e sua relevância como representação da ausência de quantidade. Em seguida, construímos o conjunto dos números inteiros, destacando a inclusão de \mathbb{N} em \mathbb{Z} .

Na sequência, os estudantes foram questionados sobre o conjunto dos números irracionais. Dois deles chegaram a sugerir que \mathbb{Q} estaria contido em \mathbb{I} , o que abriu espaço para retomar as definições e esclarecer a diferença entre eles. Reforçamos que os números racionais correspondem aos números que podem ser expressos em forma de fração, incluindo as dízimas periódicas, enquanto os números irracionais não admitem essa representação. A partir dessa discussão, os estudantes reconheceram que \mathbb{Q} e \mathbb{I} são conjuntos distintos e que, juntos, formam o conjunto dos números reais, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Passamos às atividades de resolução de problemas, que articulavam os conceitos discutidos com a aplicação de fórmulas clássicas envolvendo números reais. As atividades incluíram o cálculo da diagonal de um quadrado, do comprimento da circunferência e do lado de um quadrado cuja área é conhecida. Os estudantes foram desafiados a comparar medidas obtidas em figuras diferentes e a lidar com aproximações decimais de raízes quadradas. Observou-se que a maioria dos estudantes conseguiu resolver as duas primeiras atividades, demonstrando domínio na aplicação direta das fórmulas apresentadas. No entanto, na terceira atividade, que exigia um raciocínio inverso, partindo da área para determinar a medida do lado do quadrado, menos da metade da turma chegou à conclusão correta. Esse resultado sugere que a dificuldade em

mobilizar esse tipo de raciocínio, somada à limitação do tempo da aula, reforça a necessidade de retomada em encontros posteriores para consolidar a compreensão da relação entre a área e o lado do quadrado.

A oitava e última aula da sequência didática foi dedicada a uma retomada final do jogo, agora com a proposta para os estudantes atuarem com plena competência tanto nas mecânicas do jogo quanto nos conceitos matemáticos envolvidos. Com maior domínio das estratégias e mais segurança para debater suas decisões, os estudantes compartilharam descobertas e argumentações, estabelecendo conexões entre o enredo do jogo e os conhecimentos apropriados ao longo das aulas. Nessa etapa, o papel docente foi predominantemente de observação, promovendo espaços de autonomia e protagonismo estudantil.

Durante o jogo, os estudantes puderam trabalhar em equipe, explicando suas ideias e respeitando diferentes opiniões. O jogo se tornou uma experiência rica de aprendizagem, na qual os estudantes avançaram tanto no entendimento dos números reais quanto na capacidade de colaborar e conviver com os colegas. Essa abordagem demonstrou como atividades mediadas por jogos, quando bem estruturadas, podem criar espaços ricos de construção coletiva de conhecimento.

5 METODOLOGIA

A Educação é, por natureza, um campo complexo, no qual interagem múltiplos sujeitos, saberes, práticas e contextos. Pensar a Educação como objeto de investigação científica implica reconhecer que ela não se limita a um processo de transmissão de conhecimentos, mas envolve dimensões cognitivas, afetivas, sociais, culturais e tecnológicas. Como afirma Freire (2021), educar não é transferir conhecimento, mas criar condições para que os sujeitos se tornem autônomos, capazes de refletir, dialogar e transformar a própria realidade. Nesse cenário, surge a necessidade constante de analisar e investigar os processos que acontecem nas práticas pedagógicas, nos espaços escolares e nos ambientes de aprendizagem mediados por diferentes recursos, especialmente no mundo contemporâneo, marcado pela presença intensa das tecnologias digitais.

Quando o olhar se volta para a Educação Matemática, esses debates ficam mais específicos. Ensinar e aprender Matemática é, historicamente, um desafio, especialmente quando se trata de conteúdos mais abstratos, como os números reais. O ensino não deve se limitar a decorar fórmulas, mas ajudar os estudantes a construírem significados, criando relações entre a Matemática, sua história, a cultura e o uso de recursos, como jogos digitais. Esta pesquisa tem como objetivo entender como um jogo eletrônico, junto com a História da Matemática, pode auxiliar estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental a aprenderem sobre os números reais. Para isso, este capítulo apresenta os métodos e as escolhas que guiaram o desenvolvimento do trabalho.

5.1 Tipo da pesquisa

A presente pesquisa caracteriza-se como qualitativa, de natureza exploratória, cujo objetivo principal é investigar como o uso de um jogo eletrônico no formato de RPG, articulado à História da Matemática, pode contribuir para a aprendizagem dos números reais por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. A opção por uma abordagem qualitativa se justifica pelo fato de que este trabalho não busca quantificar resultados, mas sim analisar processos, percepções, experiências e significados atribuídos pelos participantes à utilização do recurso didático desenvolvido.

Essa abordagem foi fundamentada na perspectiva de Bogdan e Biklen (1994), que privilegia a compreensão dos fenômenos a partir das experiências e interpretações dos participantes,

ênfatisando os significados construídos, as dinâmicas interativas e os contextos específicos em que se desenvolvem.

Além disso, esta pesquisa se configura como exploratória, pois busca compreender as possíveis contribuições decorrentes da integração da História da Matemática com um jogo de RPG eletrônico no processo de aprendizagem dos números reais por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da rede estadual localizada no sul de Minas Gerais, um tema ainda pouco investigado.

5.2 Contexto e sujeitos da pesquisa

A investigação foi realizada em uma escola pública estadual localizada na cidade de Luminárias – MG, envolvendo uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental. A escolha desse contexto se deu tanto por razões práticas, como o vínculo profissional da pesquisadora com a instituição, quanto pela possibilidade de observar diretamente as práticas pedagógicas e os efeitos da intervenção proposta em um ambiente real de ensino-aprendizagem.

A escola atende estudantes em um contexto sociocultural diversificado. Conta com infraestrutura básica, incluindo laboratório de informática, projetor multimídia e acesso à internet, o que viabilizou a aplicação do jogo digital como parte da sequência didática. Participaram deste estudo 28 estudantes regularmente matriculados no 9º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 13 e 15 anos. A escolha dessa turma considerou a adequação pedagógica, uma vez que os estudantes estavam no momento curricular, no qual o conteúdo sobre números reais é formalmente trabalhado. Tal fato assegura a consonância entre os objetivos da pesquisa e o desenvolvimento acadêmico dos discentes.

É importante destacar que a pesquisadora não atuava como professora regente da turma. Sua participação ocorreu exclusivamente para fins de pesquisa, permanecendo com a turma durante as duas primeiras semanas de maio de 2025, para a aplicação da sequência didática, em acordo com a gestão escolar e a professora responsável pela disciplina.

O estudo foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UFLA, em conformidade com os protocolos éticos vigentes para investigações em Ciências Humanas e Sociais, conforme estabelece a Resolução nº 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde. Todos os participantes foram previamente informados quanto à natureza, aos objetivos e aos procedimentos do estudo. Em cumprimento aos princípios éticos que orientam pesquisas envolvendo seres humanos, adotou-se um sistema duplo de consentimento. Obteve-se o Termo de Consenti-

mento Livre e Esclarecido (TCLE), devidamente assinado pelos pais ou responsáveis legais, autorizando formalmente a participação dos estudantes (Anexo A). Além disso, cada estudante manifestou sua concordância voluntária por meio da assinatura de um Termo de Assentimento específico (Anexo B), documento este que foi previamente explicado em linguagem acessível e adequada ao seu nível de desenvolvimento cognitivo. A participação na pesquisa caracterizou-se por sua natureza completamente voluntária em todas as fases do estudo, preservando-se o direito de interrupção da colaboração a qualquer momento, sem que isso acarretasse qualquer tipo de prejuízo aos envolvidos.

O grupo apresentou diversidade razoável no desempenho escolar, na participação e nas preferências de aprendizagem. Havia estudantes com bom domínio dos conteúdos matemáticos e postura participativa, enquanto outros demonstraram dificuldades em operações básicas e menor envolvimento nas atividades. Também foram observados diferentes estilos de aprendizagem: alguns preferiram atividades práticas e jogos, enquanto outros se mostraram mais receptivos a explicações formais e exercícios tradicionais. Essa heterogeneidade permitiu avaliar os efeitos do jogo eletrônico, pois possibilitou observar como diferentes perfis de estudantes interagiram com a proposta e como o recurso respondeu às variadas necessidades e estratégias da turma. A diversidade encontrada permitiu uma análise mais ampla dos potenciais do jogo, não só como apoio ao ensino dos números reais, mas também como ferramenta potencial para favorecer a inclusão e promover a construção do conhecimento de forma mais equitativa.

As informações foram coletadas principalmente por meio de acompanhamento direto das atividades, realizado tanto durante o uso do jogo, que faz parte da sequência didática, quanto em outros momentos em sala de aula. Foram analisados o envolvimento dos estudantes nas tarefas, as estratégias adotadas para resolver os desafios matemáticos, as interações interpessoais e as manifestações verbais e não verbais. Esses registros, juntamente com anotações em diário de campo, constituíram a base para a avaliação qualitativa da intervenção, possibilitando analisar os efeitos do jogo na construção do conhecimento matemático sobre os números reais.

5.3 Procedimentos metodológicos

O desenvolvimento desta pesquisa seguiu um percurso estruturado em três etapas principais: elaboração do produto educacional, validação do jogo eletrônico e aplicação da sequência didática com a coleta de dados. A primeira etapa consistiu no desenvolvimento do produto educacional, que envolveu a criação de uma sequência didática fundamentada na História da

Matemática, associada ao desenvolvimento de um jogo eletrônico produzido na plataforma RPG Maker. Nessa fase, foram definidos os conteúdos matemáticos a serem abordados, elaborados os roteiros narrativos e os desafios matemáticos, além da programação dos eventos dentro do ambiente do jogo. Todo o material foi concebido com o objetivo de promover uma aprendizagem contextualizada e significativa sobre os números reais. Em seguida, foi realizada a fase de validação do jogo, com a participação de quatro professores da Educação Básica e um licenciando em Física.

A terceira etapa envolveu a aplicação da sequência didática e a coleta de dados, realizada ao longo de oito aulas de 50 minutos cada. As atividades integraram diferentes estratégias como explicações conceituais, resolução de situações-problema, uso de calculadora para operações com números irracionais e interação com o jogo digital, cujo acesso foi viabilizado por meio de uma versão *online*.

Para a coleta de dados, adotou-se uma abordagem qualitativa, utilizando a técnica “observação participante”, complementada pelo diário de campo, pelos registros das atividades realizadas pelos estudantes e por fotografias. De acordo com Gil (2008), a observação participante caracteriza-se pela participação real do pesquisador na dinâmica do grupo, assumindo, ainda que parcialmente, o papel de membro desse coletivo. Isso possibilita ao pesquisador acessar informações não apenas sobre comportamentos visíveis, mas também sobre significados, relações, estratégias e interações que só são perceptíveis a partir do interior do grupo. No entanto, ressalta-se que, apesar da aproximação com o grupo, a pesquisadora não fazia parte do corpo docente da turma. Sua atuação ocorreu de forma temporária e específica para a aplicação da sequência didática vinculada a esta pesquisa.

A observação participante foi realizada tanto durante a utilização do jogo, que integra a sequência didática, quanto nos demais momentos das aulas, permitindo acompanhar as estratégias adotadas pelos estudantes, seus modos de interação, seus níveis de engajamento e as manifestações verbais e não verbais que surgiram no decorrer das atividades. Tal como destacam Bogdan e Biklen (1994), a codificação dos dados provenientes desse tipo de observação pode se organizar em diferentes categorias, como acontecimentos relevantes, estratégias dos participantes, relações interpessoais, estrutura social da turma e processos metodológicos. Esse tipo de codificação contribui para transformar dados brutos em informações significativas e organizadas, fundamentais para a análise qualitativa.

O uso dos questionários, como técnica de investigação, teve por finalidade coletar informações tanto sobre o domínio dos conceitos matemáticos quanto sobre percepções, expectativas, dificuldades e experiências dos estudantes durante a sequência didática. Conforme descreve Gil (2008), trata-se de um instrumento que permite traduzir os objetivos da pesquisa em questões específicas, cujas respostas fornecem os dados necessários para compreender o fenômeno investigado.

Essa combinação de procedimentos e instrumentos buscou garantir uma análise abrangente dos efeitos da intervenção, contemplando tanto os aspectos cognitivos quanto os aspectos afetivos e sociais envolvidos no processo de ensino e aprendizagem dos números reais.

5.4 Análise dos dados

Os dados produzidos, de natureza predominantemente qualitativa, foram tratados por meio da análise de conteúdo, segundo os procedimentos metodológicos propostos por Bardin (2016). Tais dados consistem em pré-análise, que envolveu a organização e uma leitura de reconhecimento dos materiais; exploração do material, com a codificação e categorização das informações; e tratamento dos resultados e interpretação, permitindo construir inferências que respondessem às questões investigativas.

Inicialmente, realizou-se uma leitura flutuante dos questionários aplicados: o Questionário 1 e o Questionário 2 (aplicados, respectivamente, antes e após a conclusão da sequência didática), além das atividades discursivas realizadas durante as aulas 3 e 8. Trata-se de uma primeira análise exploratória dos documentos, na qual o pesquisador toma contato com os textos, observando impressões gerais e aspectos que chamam atenção, sem buscar ainda interpretações detalhadas ou categorização sistemática (BARDIN, 2016). A partir dessa etapa o material foi organizado e serviu de base para conduzir a análise voltada à questão central da pesquisa: A articulação entre a História da Matemática e o uso do jogo contribui para a aprendizagem dos números reais e seus subconjuntos?

Na etapa seguinte, procedeu-se à categorização dos dados. Para isso, as respostas foram agrupadas em categorias previamente definidas, facilitando o recorte e a agregação das informações relevantes para a investigação. Os dados categorizados foram analisados quantitativamente, por meio da frequência de ocorrência das categorias, e qualitativamente, com foco na interpretação dos significados das respostas dos participantes. Essa análise buscou relacionar os resultados com os objetivos da pesquisa e a questão investigativa.

5.4.1 Categorias para análise dos dados

Categorias temáticas foram construídas para a sistematização e análise detalhada dos conteúdos expressos pelos participantes. Essas categorias foram definidas com base nos objetivos da pesquisa e na estrutura dos questionários aplicados, contemplando tanto aspectos conceituais quanto percepções relativas ao uso do jogo e à inserção da História da Matemática no processo de aprendizagem.

As categorias definidas ajudaram a organizar e interpretar os dados, permitindo uma leitura fundamentada das respostas dos participantes. A combinação da análise quantitativa, por meio da frequência das categorias, e da análise qualitativa, a partir da interpretação dos discursos, permitiu avaliar e compreender os efeitos da proposta didática. Foi possível identificar tanto o nível de entendimento dos estudantes sobre os números reais e suas classificações, quanto a maneira como eles perceberam a contribuição da História da Matemática e do jogo digital para sua aprendizagem.

As análises foram organizadas em quatro categorias principais, criadas a partir das respostas e observações registradas durante a sequência didática: compreensão conceitual, significado e aplicação dos números reais, percepção sobre a História da Matemática e percepção do jogo como ferramenta pedagógica. Cada categoria foi analisada separadamente, considerando níveis de entendimento e exemplos representativos das produções dos estudantes. Além dessas categorias, também foi realizada uma breve análise dos diálogos reflexivos ocorridos durante as aulas e das estratégias de jogo adotadas pelos participantes, buscando compreender de que forma esses elementos contribuíram para o processo de aprendizagem. A Tabela 5.1 apresenta a estrutura dessas categorias e os critérios utilizados em cada uma delas.

Concluídas as etapas metodológicas, o capítulo seguinte apresenta a análise e a discussão dos resultados obtidos, a partir das categorias definidas. Este capítulo não apenas visa responder à questão central da pesquisa, mas também propõe uma reflexão crítica sobre: o potencial didático da integração entre História da Matemática e jogos digitais, os desafios práticos identificados durante a intervenção pedagógica e as implicações dos resultados obtidos para o ensino de números reais no Ensino Fundamental.

Tabela 5.1 – Categorias definidas para a análise dos dados.

| Categorias | Classificações e descrições |
|--|--|
| Compreensão conceitual | <p>Entendimento correto: compreensão adequada dos conceitos de números racionais, irracionais e reais.</p> <p>Compreensão parcial: definições incompletas ou confusas, mas com algum nível de compreensão.</p> <p>Entendimento incorreto: concepções equivocadas.</p> <p>Não sabe / Nenhuma resposta: desconhecimento declarado ou ausência de resposta.</p> |
| Significado e aplicação dos números reais | <p>Reconhece aplicações: citações corretas de situações cotidianas que envolvem números reais.</p> <p>Não reconhece aplicações: incapacidade de relacionar os números reais a contextos cotidianos.</p> |
| Percepção sobre a História da Matemática | <p>Contribui para a compreensão: conhecimento histórico facilita o entendimento.</p> <p>Não contribui: a história não influenciou o aprendizado.</p> <p>Indiferente ou não sabe: respostas vagas ou ausência de posicionamento.</p> |
| Percepção do jogo como ferramenta pedagógica | <p>Facilitou a aprendizagem: jogo auxiliou diretamente na compreensão dos conteúdos.</p> <p>Não facilitou: jogo não contribuiu para a aprendizagem.</p> <p>Indiferente ou restrito ao entretenimento: visto como divertido, mas sem clara associação ao aprendizado.</p> |
| Reflexão geral sobre a aprendizagem | <p>Relato claro: expressa explicitamente os conceitos e aprendizagens.</p> <p>Relato vago ou superficial: declarações genéricas, sem clareza.</p> <p>Não reconhece aprendizagem: declara não ter aprendido ou não se recorda do conteúdo.</p> |

Fonte: Da autora (2025).

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo apresenta a análise qualitativa e quantitativa dos dados coletados durante a aplicação da sequência didática desenvolvida para o ensino de números reais a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da rede estadual de ensino da cidade de Luminárias-MG. A análise seguiu a metodologia de Análise de Conteúdo de Bardin (2016) e está organizada em quatro categorias previamente definidas no capítulo metodológico:

- a) compreensão conceitual;
- b) significado e aplicação dos números irracionais;
- c) percepção sobre a História da Matemática;
- d) percepção do jogo como ferramenta pedagógica.

A análise baseou-se em diferentes instrumentos: quatro questionários aplicados em momentos distintos da sequência didática, registros de observação direta em sala de aula e falas espontâneas dos estudantes. Cada categoria será analisada a seguir, com suas respectivas evidências.

6.1 Compreensão conceitual

A avaliação da compreensão conceitual dos estudantes sobre os números racionais e irracionais foi realizada a partir da análise das respostas ao Questionário 1 (Apêndice A), aplicado antes da implementação da sequência didática, e ao Questionário 2 (Apêndice B), aplicado após sua conclusão. Os dados evidenciam avanços, mas também revelam que ainda há dificuldades no processo de ensino e aprendizagem desses conceitos.

No Questionário 1 (Apêndice A), respondido pelos vinte e oito estudantes participantes da pesquisa e aplicado antes da sequência didática, apenas cinco estudantes (17,86%) demonstraram compreensão clara e correta sobre o que são números racionais e irracionais, oferecendo definições adequadas e exemplos coerentes (Figura 6.1). Um outro grupo, formado por nove estudantes (32,14%), apresentou uma compreensão parcial. Esses estudantes souberam conceituar um dos conjuntos corretamente, mas demonstraram confusão ou imprecisão em relação ao outro (Figura 6.2). Já doze estudantes (42,86%) não demonstraram compreensão adequada dos conceitos, com respostas vagas ou incorretas. Um exemplo dessa situação é a definição dada por um estudante que afirma que “racionais são quando os números depois da vírgula tem

um fim, e irracionais é quando os números são infinitos”. Outros dois estudantes (7,14%) não responderam a essa pergunta.

Figura 6.1 – Resposta registrada no Questionário 1: compreensão adequada dos conceitos de números racionais e irracionais.

B O que você entende por números racionais e irracionais? Dê um exemplo de cada.

Racionais são números que podem ser escritos em forma de fração e Irracionais são números decimais infinitos e não periódicos. Exemplo: $\sqrt{10} = 3,1\dots$ (Irracionais)
 $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ (Racionais)

Fonte: Da autora (2025).

Figura 6.2 – Resposta registrada no Questionário 1: compreensão parcial dos conceitos de números racionais e irracionais.

B. O que você entende por números racionais e irracionais? Dê um exemplo de cada.

Os racionais são números que podem ser escritos na forma de fração, já os irracionais são dízimas periódicas.

Fonte: Da autora (2025).

Além dos questionários, as atividades escritas realizadas ao longo da sequência didática também forneceram dados importantes sobre a compreensão conceitual dos estudantes. Nos itens *a*) e *b*) da primeira questão da atividade da Aula 2 (Apêndice C), que envolvia a resolução de expressões com números decimais mediante o uso da calculadora, observou-se que, dos vinte e sete estudantes que a realizaram, dezenove (70,37%) acertaram todas as operações básicas, como soma, subtração, multiplicação e divisão. No entanto, alguns estudantes apresentaram dificuldades nos itens *c*) e *d*), especialmente na leitura dos resultados ou na inserção correta dos dados na calculadora: cinco estudantes (18,52%) erraram apenas um desses dois itens, enquanto três (11,11%) acertaram apenas um ou nenhum dos itens propostos.

Em relação à resposta discursiva, ainda na primeira questão da atividade da Aula 2, sobre a diferença entre fração exata e fração decimal periódica, dezesseis estudantes (59,26%) responderam corretamente, dos quais nove (33,33%) registraram exemplos adequados. Os outros onze estudantes (40,74%) ofereceram explicações incompletas, confusas ou deixaram a questão sem resposta. O exemplo da Figura 6.3 traz um erro no cálculo no item *d*), mas demonstra domínio conceitual ao distinguir corretamente frações exatas e periódicas. A resposta

apresentada na Figura 6.4 mostra que os cálculos estão corretos, porém revela uma explicação conceitual vaga. Já as respostas presentes na Figura 6.5 contêm tanto erros nos cálculos quanto equívocos na definição conceitual, apontando maiores dificuldades de compreensão sobre os números racionais.

Figura 6.3 – Resposta com erro nas operações com decimais, mas acerto na distinção conceitual entre frações.

1. Calcule as seguintes expressões utilizando a calculadora:

a) $\frac{3}{4} + 0,25$ $\frac{3}{4} = 0,75 + 0,25 = 1$

b) $\frac{5}{8} - 0,375$ $\frac{5}{8} = 0,625 - 0,25 = 0,25$

c) $0,5 \cdot \frac{7}{10}$ $\frac{7}{10} = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35$

d) $\frac{1}{3} + 0,4$ $\frac{1}{3} = 0,33333... - 0,4 = 0,133333...$

Responda:

Qual é a diferença entre uma fração exata e uma fração decimal periódica? Dê um exemplo de cada.

Uma fração exata é uma que o resultado tem fim
ex: $\frac{1}{10} = 0,1$

Uma fração decimal periódica não tem fim,
nesse caso para prever o resultado. ex: $\frac{1}{3} = 0,33333...$

Fonte: Da autora (2025).

Figura 6.4 – Resposta com cálculos corretos, mas explicação conceitual vaga sobre frações exata e decimal periódica.

1. Calcule as seguintes expressões utilizando a calculadora:

a) $\frac{3}{4} + 0,25$ 1

b) $\frac{5}{8} - 0,375$ 0,25

c) $0,5 \cdot \frac{7}{10}$ 0,35

d) $\frac{1}{3} + 0,4$ 0,833333

Responda:

Qual é a diferença entre uma fração exata e uma fração decimal periódica? Dê um exemplo de cada.

A fração exata tem um resultado exato, já a fração decimal periódica é infinita.

Fração exata: $\frac{1}{10}$ Fração decimal periódica: $\frac{1}{3}$

Fonte: Da autora (2025).

Os problemas relacionados à compreensão de números racionais e irracionais também se manifestaram em atividades de classificação realizadas na Aula 5 (Apêndice C), como se pode ver na Figura 6.6, nas quais os estudantes precisaram distinguir elementos desses conjuntos em diferentes representações. Essa variação de formatos mostrou que alguns conceitos

Figura 6.5 – Resposta com erros de cálculo e equívocos conceituais sobre frações exatas e periódicas.

1. Calcule as seguintes expressões utilizando a calculadora:

a) $\frac{3}{4} + 0,25$ 1 $3 \div 4 = 0,75 + 0,25 = 1$

b) $\frac{5}{8} - 0,375$ $5 \div 8 = 0,625 + 0,375 = 1$

c) $0,5 \cdot \frac{7}{10}$ $0,5 \cdot 7 = 3,5$

d) $\frac{1}{3} + 0,4$ $1 \div 3 = 0,33333... + 0,4 = 0,733333...$

Resposta:

Qual é a diferença entre uma fração exata e uma fração decimal periódica? Dê um exemplo de cada.

As frações exatas deram um numerador só, já as dízimas deram mais de um numerador com exatas, nas dízimas os números são infinitos.

Fonte: Da autora (2025).

foram assimilados durante a sequência didática, mas persistiam dificuldades na identificação dos critérios que definem a racionalidade ou irracionalidade dos números.

Os vinte e três estudantes presentes foram convidados a resolver exercícios envolvendo números reais. A primeira questão da atividade solicitava que eles classificassem uma lista de números como racionais (R) ou irracionais (I), permitindo avaliar a compreensão sobre os conceitos trabalhados até aquele momento. A análise das respostas revelou que 78,26% dos estudantes acertaram itens mais familiares como $0,75$; π e $\sqrt{16}$. No entanto, surgiram equívocos em casos como nas dízimas periódicas e não periódicas (Figura 6.6). Desses vinte e três estudantes, onze (47,83%) classificaram corretamente todas as dízimas apresentadas; sete (30,43%) consideraram incorretamente $0,333...$ como número irracional; três (13,04%) classificaram $12,3456...$ e/ou $-1,010110111...$ como racionais; e dois estudantes (8,7%) erraram todas as classificações envolvendo dízimas. Esses dados indicam que, apesar dos avanços conceituais observados, 52,17% dos estudantes ainda apresentou dificuldades específicas relacionadas ao reconhecimento da periodicidade como critério de classificação da racionalidade dos números. Muitos confundiram a ideia de infinitude com irracionalidade, revelando que a noção de repetição periódica nas representações decimais ainda não se consolidou plenamente. Dessa forma, ainda se observam desafios na compreensão dos critérios que distinguem números racionais e irracionais em representações decimais, apontando para a importância de retomar esse conceito em abordagens futuras.

Essas dificuldades de compreensão também se manifestaram durante a resolução de outras questões. Na atividade de posicionamento de números reais na reta numérica, proposta na Aula 5, observou-se que, embora todos os estudantes tenham posicionado corretamente raízes

Figura 6.6 – Exemplo de dificuldades na classificação de dízimas periódicas e não periódicas.

1. Classifique os números abaixo como Racionais ou Irracionais (Escreva "R" para racionais e "I" para irracionais ao lado de cada número).
- a) 0,75 R
- b) π I
- c) $-\sqrt{3}$ I
- d) -4 R
- e) 0,333... I
- f) $\sqrt{16}$ R
- g) 12,3456789... R
- h) -1,01011011101111... R
- i) $-\sqrt{144}$ R

Fonte: Da autora (2025).

Figura 6.7 – Registro de classificações equivocadas: $-\sqrt{3}$ e 0,333...

1. Classifique os números abaixo como Racionais ou Irracionais (Escreva "R" para racionais e "I" para irracionais ao lado de cada número).
- a) 0,75 R
- b) π I
- c) $-\sqrt{3}$ R
- d) -4 R
- e) 0,333... I
- f) $\sqrt{16}$ R
- g) 12,3456789... I
- h) -1,01011011101111... I
- i) $-\sqrt{144}$ R

Fonte: Da autora (2025).

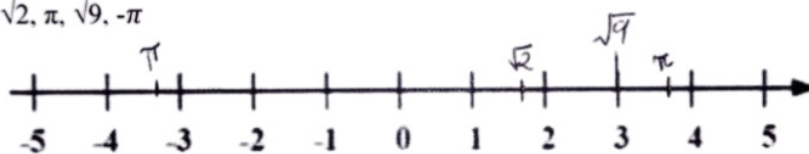
exatas, como $\sqrt{9}$, houve erros recorrentes na estimativa da localização de irracionais como π e $\sqrt{2}$ (Figura 6.8). Outro estudante, por exemplo, posicionou π de forma bastante distante de sua aproximação real e trocou os lados da reta ao representar $-\pi$, revelando problemas tanto na compreensão do valor aproximado quanto no sentido dos números negativos na reta real (Figura 6.9).

Após a aplicação da sequência didática, no Questionário 2 (Apêndice B), respondido por vinte e sete estudantes, observou-se um crescimento no número de estudantes que passaram a apresentar definições conceituais mais precisas e articuladas. Notou-se que doze estudantes (44,44%) conseguiram apresentar uma conceituação completa e correta, utilizando expressões como “Um número racional é um número que pode ser escrito na forma de fração. Ex.: $\frac{1}{2}$

Figura 6.8 – Representação com imprecisões dos valores de $\sqrt{2}$ e π na reta real.

2. Observe os números abaixo e represente-os aproximadamente na reta numérica. Marque a posição de cada um com uma seta e o número correspondente.

Números: $\sqrt{2}$, π , $\sqrt{9}$, $-\pi$

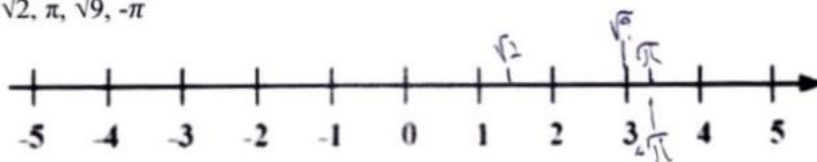


Fonte: Da autora (2025).

Figura 6.9 – Atividade de posicionamento na reta real com destaque para o erro no valor de $-\pi$.

2. Observe os números abaixo e represente-os aproximadamente na reta numérica. Marque a posição de cada um com uma seta e o número correspondente.

Números: $\sqrt{2}$, π , $\sqrt{9}$, $-\pi$



Fonte: Da autora (2025).

número irracional é formado por números decimais infinitos e não periódicos. Ex.: $\sqrt{2}$ ” (Figura 6.10). Cinco estudantes (18,5%) ainda apresentaram compreensão parcial, restringindo a definição de números irracionais a números infinitos, referindo-se às infinitas casas decimais ou dízimas, mas sem mencionar a periodicidade dessas casas decimais (Figura 6.11). Outros dez estudantes (37,04%) ainda não compreenderam corretamente os conceitos, o que evidencia que, embora a proposta tenha promovido avanços, não foi suficiente para atingir plenamente toda a turma. Um estudante optou por não responder.

Figura 6.10 – Registro de definições e exemplos corretos de números racionais e irracionais.

A. Você consegue explicar a diferença entre um número racional e um número

irracional? Dê um exemplo. Um número racional é um número que pode ser escrito na forma de fração. Ex: $\frac{1}{2}$
número irracional formado por números decimais infinitos e não periódicos. Ex. $\sqrt{2}$

Fonte: Da autora (2025).

Esse comparativo mostra que houve aumento no número de estudantes com compreensão correta (de cinco para doze) e redução do grupo com compreensão parcial (de nove para cinco), indicando que a sequência didática contribuiu para o avanço de parte significativa dos

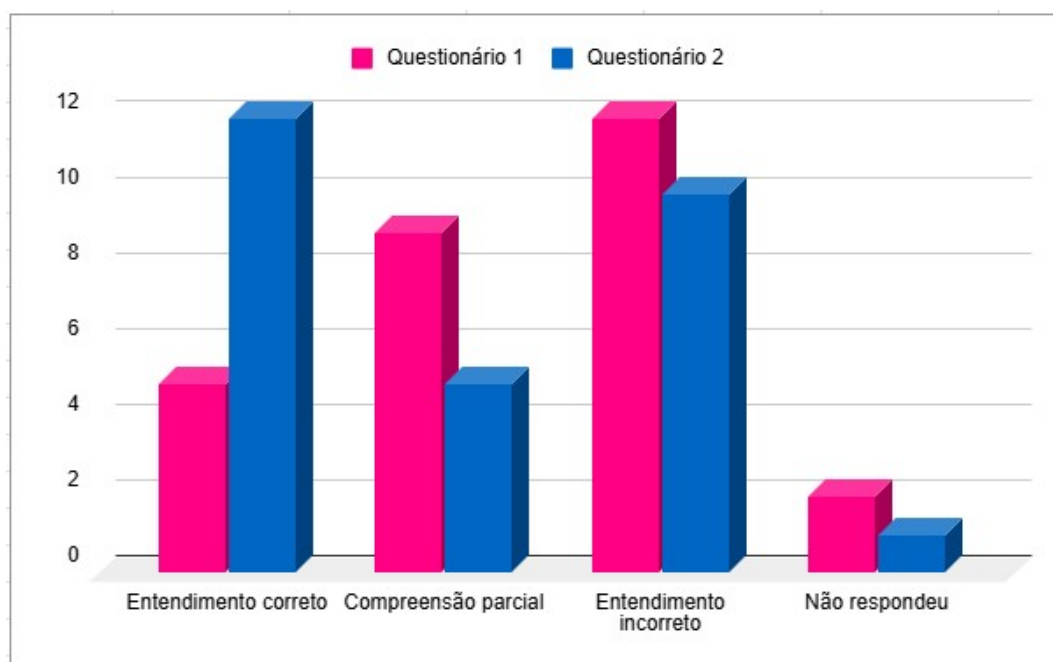
Figura 6.11 – Registro de definições parcialmente corretas de números racionais e irracionais.

A. Você consegue explicar a diferença entre um número racional e um número irracional? Dê um exemplo. Os números racionais são os números que podem ser escritos em forma de fração. Ex.: 2,25. Números irracionais são números infinitos.

Fonte: Da autora (2025).

estudantes (Gráfico 6.1). No entanto, a permanência de um número expressivo de estudantes com dificuldades evidencia a necessidade de reforço didático complementar, seja por meio de retomadas em sala de aula, pelo uso de recursos visuais adicionais ou estratégias de diferenciação pedagógica.

Gráfico 6.1 – Dados sobre a evolução da compreensão conceitual segundo os Questionários 1 e 2.



Fonte: Da autora (2025).

Os depoimentos dos estudantes e as soluções desenvolvidas para os desafios do RPG *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números* indicam que a compreensão dos números reais parece ter sido aprofundada ao longo da sequência didática. Os estudantes passaram a enxergar esses números não apenas como objetos escolares, mas como instrumentos de leitura e interpretação de situações concretas. Essa mudança de perspectiva está de acordo com as competências gerais de Matemática previstas na BNCC, em especial a que propõe compreen-

der e utilizar conceitos matemáticos para investigar e resolver problemas, elaborar argumentos e tomar decisões baseadas em dados (BRASIL, 2018).

Essas evidências reforçam que a compreensão conceitual dos números racionais e irracionais foi construída de forma gradual, em um processo mediado tanto pelas atividades tradicionais quanto pelos elementos introduzidos pelo jogo na sequência didática. Contudo, a consolidação dessas aprendizagens ainda depende de ações pedagógicas contínuas que favoreçam o reconhecimento e a aplicação dos conceitos em diferentes contextos.

6.2 Significado e aplicações dos números reais

A articulação entre a Matemática escolar e os contextos concretos da vida cotidiana é um desafio recorrente no Ensino Fundamental, especialmente no que diz respeito à compreensão dos números irracionais, cujas características como infinitude, não periodicidade e difícil representação gráfica tornam sua aplicação prática pouco intuitiva para os estudantes. A sequência didática busca superar essa deficiência, apresentando os números reais como instrumentos para resolver problemas concretos e não apenas como construções abstratas.

No Questionário 1, foi solicitado que os estudantes identificassem situações do cotidiano em que números irracionais fossem utilizados. Os dados indicam que dezesseis estudantes (57,14%) afirmaram que não conseguiam pensar em nenhuma aplicação concreta para esse tipo de número. Quatro estudantes (14,2%) associaram os números irracionais a situações de comércio ou finanças, mencionando especificamente divisão de despesas, cálculo de troco e contas de luz. Essa associação indica uma confusão conceitual, uma vez que tais contextos são tipicamente dominados por números racionais, como valores monetários exatos e porcentagens. A resposta de um estudante, ilustrada na Figura 6.12, sintetiza essa percepção descontextualizada: “Não, eu só vejo esses números na escola”. Outros seis estudantes (21,43%) relacionaram os números irracionais a operações escolares tidas como difíceis ou “mais complexas”, como divisões e uso de calculadora, reforçando a ideia de que muitos estudantes compreendem os números irracionais não por suas propriedades matemáticas, mas por seu grau de dificuldade ou aparência “diferente”. Apenas duas respostas foram inadequadas ou ausentes.

Na atividade da Aula 8 (Apêndice C), realizada imediatamente após o último contato com o jogo, a abordagem foi mais abrangente: a pergunta passou a investigar sobre os números reais em geral, não apenas os números irracionais, e sua aplicação na resolução de problemas

Figura 6.12 – Evidência de dificuldade em relacionar números irracionais a contextos extraescolares.

C. Você consegue pensar em algum problema ou situação do dia a dia em que os números irracionais podem aparecer? Não, eu só uso esses números na escola.

Fonte: Da autora (2025).

do dia a dia. Com essa mudança, a análise se expande, mas é preciso acompanhar os resultados com atenção.

Dos vinte e sete estudantes que responderam à atividade, treze (48,15%) relataram perceber aplicações dos números reais no cotidiano. Dentre esses, quatro reconheceram a aplicação, mas não citaram exemplos específicos. Outros dez estudantes (37,04%) afirmaram não perceber aplicações dos números reais na vida prática e os quatro restantes (14,81%) forneceram respostas incoerentes ou deixaram a questão em branco.

Entre as respostas que mencionaram aplicações práticas, cinco estudantes (18,52%) referiram-se diretamente a situações vivenciadas durante o jogo digital, como a divisão de alimentos, cálculos com temperaturas, contextos comerciais e contagem de objetos. Tais respostas sugerem que a narrativa e os desafios do jogo facilitaram a associação entre os conceitos matemáticos e os contextos simulados de aplicação.

Quanto às dificuldades que ainda persistem, nove estudantes (33,33%) não identificaram qualquer aplicação prática para os números reais, indicando que a abstração desses conceitos ainda representa um obstáculo na consolidação da aprendizagem. Observa-se, ainda, que esses resultados confirmam o que foi observado no Questionário 1, pois sugerem que os estudantes continuam relacionando aplicações principalmente aos números racionais, o que evidencia uma percepção mais imediata e concreta desse subconjunto dentro do conjunto dos números reais.

Outras seis respostas (22,2%) foram consideradas inadequadas ou ausentes. Esse resultado demonstra que, embora tenha havido algum progresso, a identificação de aplicações concretas dos números reais, sobretudo dos números irracionais, continua sendo um ponto de dificuldade para boa parte da turma. Exemplo disso é o fato de muitos estudantes não identificarem números irracionais mesmo ao utilizá-los em situações práticas, como empregar aproximações de π em cálculos de área. Essas atividades frequentemente mobilizam números irracionais, que acabam sendo utilizados de forma aproximada, sem que os estudantes reconheçam sua natureza específica.

Embora o desenvolvimento da sequência didática tenha promovido avanços, os estudantes ainda apresentam dificuldades em reconhecer a presença dos números irracionais em situações práticas. Essa limitação parece ter origem no modo como os números irracionais são usualmente abordados na escola: muitas vezes, o ensino privilegia o uso de aproximações decimais ou valores arredondados desses números em exercícios e problemas. Dessa forma, os estudantes têm contato com π ou $\sqrt{2}$ em cálculos, mas sem perceber claramente que se trata de exemplos de números irracionais. Diante disso, reforça-se a importância de trabalhar tais situações de modo intencional, nomeando os números irracionais quando surgem em problemas reais, para que os estudantes os percebam como objetos matemáticos ativos e não apenas como abstrações.

Em uma questão proposta na atividade da Aula 7 (Apêndice C), era solicitado que os estudantes calculassem a diagonal de um quadrado, cujo lado mede dois metros, e o comprimento da circunferência, cujo raio mede um metro, para então comparar os resultados. As soluções apresentadas pelos estudantes revelaram um padrão recorrente: a maioria optou por realizar os cálculos e expressar os resultados em forma decimal, utilizando valores aproximados para $\sqrt{2}$ e π , como ilustrado na Figura 6.13. Essa preferência pelo formato decimal pode estar relacionada à sugestão explícita presente no enunciado da atividade, que indicava o uso da aproximação $\pi \approx 3,14$. É possível que a orientação tenha contribuído para a adoção generalizada de representações numéricas aproximadas, em vez de formas simbólicas. Ainda assim, o registro de reticências em algumas respostas mostra que os estudantes reconheceram a infinitude das casas decimais características desses números irracionais. Apenas uma dupla apresentou uma abordagem distinta, ao realizar a comparação dos comprimentos solicitada no item c) sem recorrer aos valores aproximados (Figura 6.14), discutindo diretamente a relação entre os números irracionais envolvidos e concluindo que π é maior que $\sqrt{2}$, o que implica que a circunferência teria maior comprimento do que a diagonal do quadrado analisado.

Ainda que os estudantes apresentem dificuldades em reconhecer e aplicar os números irracionais em contextos concretos, a sequência didática contribuiu para ampliar modestamente essa compreensão. A incorporação de atividades contextualizadas, tanto no ambiente do jogo quanto em situações práticas, favoreceu a construção de significados e o reconhecimento de que os números reais, especialmente os números irracionais, não são apenas abstrações, mas ferramentas relevantes na resolução de problemas do mundo real.

Figura 6.13 – Resolução de atividades com aproximações decimais para $\sqrt{2}$ e π .

Use as fórmulas abaixo para responder às perguntas a seguir:

Diagonal de um quadrado: $d = l \cdot \sqrt{2}$, onde l é o lado do quadrado.

Comprimento da circunferência: $C = 2\pi r$, onde r é o raio do círculo.

1. Um quadrado tem lados de 2 metros, e um círculo tem raio de 1 metro.

a) Calcule o comprimento da diagonal do quadrado.

$$1,41 \cdot 2 = 2,82$$

b) Calcule o comprimento da circunferência do círculo ($\pi \approx 3,14$).

$$2 \cdot 3,14 \cdot 1 = 6,28$$

c) Compare os dois comprimentos e determine qual é maior.

A circunferência é maior

Fonte: Da autora (2025).

6.3 Percepção sobre a História da Matemática

A incorporação da História da Matemática na sequência didática foi planejada como estratégia para atribuir significado aos conteúdos, promover contextualização histórica e cultural e contribuir para a superação de uma percepção puramente técnica e descontextualizada do conhecimento matemático. Esse recurso foi mobilizado tanto nas exposições iniciais quanto nos desafios apresentados no ambiente do jogo, nos quais personagens e elementos narrativos representavam diferentes períodos da evolução da Matemática: da contagem na Pré-história ao surgimento dos números irracionais na Grécia.

Desde o início, a abordagem incluiu casos históricos marcantes: os registros numéricos em ossos, as medições de terras no Egito (com cordas e frações unitárias) e a descoberta da incomensurabilidade na Matemática grega. No jogo, essas passagens históricas foram reconstruídas de maneira interativa, com falas de personagens NPCs, objetos no cenário e desafios que articulavam enredo e conteúdo matemático.

Antes mesmo da sequência didática, muitos estudantes já haviam tido contato com aspectos da História da Matemática, ainda que se lembrassem disso apenas dentro de outras disciplinas. Como mostra a Figura 6.15, por exemplo, alguns estudantes mencionaram ter estudado, em Ciências, a relação fundamental entre massa e energia formulada por Einstein. Esse re-

Figura 6.14 – Resolução de atividade indicando comparação direta entre π e $\sqrt{2}$.

Use as fórmulas abaixo para responder às perguntas a seguir:

Diagonal de um quadrado: $d = l \cdot \sqrt{2}$, onde l é o lado do quadrado.

Comprimento da circunferência: $C = 2\pi r$, onde r é o raio do círculo.

1. Um quadrado tem lados de 2 metros, e um círculo tem raio de 1 metro.

a) Calcule o comprimento da diagonal do quadrado.

$$\sqrt{2} = 1,41421356 \quad 2 \cdot \sqrt{2} = 2,82842712$$

b) Calcular o comprimento da circunferência do círculo ($\pi \approx 3,14$).

$$\begin{array}{r} 3,14 \\ \times 2 \\ \hline 6,28 \end{array} \quad 2 \times 1 = 2$$

c) Compare os dois comprimentos e determine qual é maior.

o valor de π é maior

Fonte: Da autora (2025).

conhecimento é positivo, pois indica que os estudantes percebem a Matemática não de forma isolada, mas integrada a diferentes áreas do conhecimento, o que favorece a contextualização histórica que o jogo propõe.

Figura 6.15 – Percepção dos estudantes sobre a História da Matemática em outras disciplinas.

Sobre a História da Matemática

A. Você já estudou História da Matemática ou descobertas matemáticas em outras

aulas? Lembra de algum exemplo? Sim, não lembro
mas em ciências estamos
 vendo um cálculo de Albert Einstein
($E = m \cdot c^2$) que ele usou para criar uma
bomba atômica.

Fonte: Da autora (2025).

A avaliação da percepção dos estudantes sobre essa abordagem foi realizada por meio de perguntas nos Questionários 1 e 2. Essa análise comparativa permite observar a opinião dos estudantes e as mudanças de perspectiva quanto ao papel da História da Matemática na aprendizagem.

No Questionário 1, aplicado antes da sequência didática, quinze estudantes (53,57%) afirmaram que consideravam importante conhecer a história dos números para aprender Ma-

temática, enquanto oito estudantes (28,57%) disseram que não viam influência positiva dessa abordagem e três estudantes (10,71%) responderam que depende de outros fatores, como a forma usada pelo professor ao apresentar o conteúdo ou o tipo de atividade proposta. Dois estudantes (7,14%) não responderam essa pergunta. Esse resultado inicial revela uma visão dividida entre os estudantes e indica que uma parcela significativa ainda não havia tido experiências concretas com propostas didáticas historicamente contextualizadas.

Ao final da sequência didática, observou-se uma mudança positiva conforme análise dos dados coletados no Questionário 2: vinte estudantes (74,07%) afirmaram que a abordagem histórica contribuiu para a compreensão dos conteúdos matemáticos, com justificativas como “você entende como ele surgiu e o porque ele surgiu e a necessidade dele na matemática” ou “não mostrou os irracionais como algo tão vago e deu sentido a eles”. Três estudantes (11,11%) consideraram que contribuiu parcialmente e apenas 4 estudantes (14,81%) afirmaram que a História da Matemática não contribuiu para sua aprendizagem. Um estudante não respondeu.

A proposta do jogo conversa com as ideias de Miguel (1997), ao propor uma reflexão histórica que usa a evolução dos números para mostrar a Matemática de uma outra forma. Assim, a curiosidade e o engajamento foram estimulados em grande parte dos estudantes, que demonstraram interesse especial ao saber que a origem dos números estava ligada a problemas práticos e culturais vividos por povos antigos. Isso os ajudou a compreender a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos ao longo do tempo, reforçando a ideia de que a Matemática não surgiu pronta, mas foi construída historicamente.

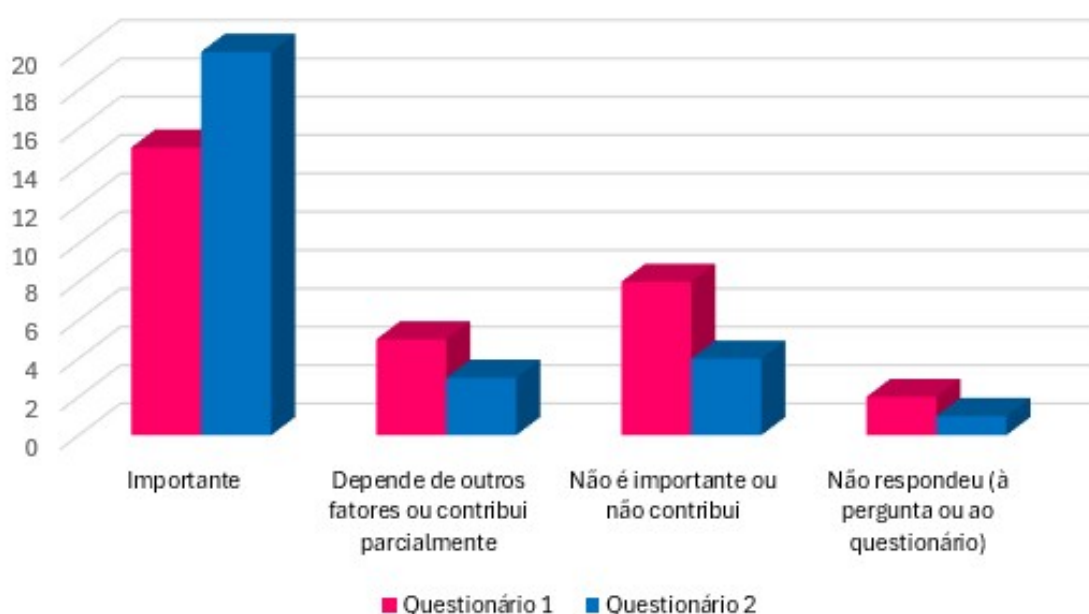
Essas percepções foram observadas também nos diálogos espontâneos registrados em sala de aula. Logo na primeira aula, ao questionar os estudantes sobre a motivação para criar uma forma de representar quantidades, a maioria dos estudantes relacionou corretamente sua criação à necessidade prática de contagem e registro. Ao discutir o surgimento do zero, os estudantes demonstraram boa compreensão histórica, mencionando que, inicialmente, ele não existia porque não havia a necessidade de registrar o “nada”. Durante a explicação sobre a transição do escambo para relações comerciais mais complexas, dois estudantes espontaneamente disseram: “Foi aí que precisou dos negativos, né professora?”, revelando compreensão não apenas do conceito, mas do contexto histórico de surgimento dos números inteiros.

As discussões em aula mostraram que os estudantes compreenderam a evolução dos conjuntos numéricos. Um estudante exemplificou: “Você disse que mais ou menos nessa época que criaram os inteiros, os homens também precisaram dividir alimentos, terras e outras coisas.

Aí quando não dava um número certo, eles usavam fração para dar o valor”. Outros citaram exemplos como moedas (centavos) e divisão de alimentos, ilustrando casos em que o desenvolvimento do conjunto dos números racionais se fez necessário. A conversa evoluiu naturalmente para situações cotidianas como medidas de recipientes e embalagens comerciais, demonstrando que os estudantes entenderam o conceito e souberam relacioná-lo a contextos reais.

Além de contextualizar o conhecimento, a História da Matemática conectou teoria e prática, mostrando como os conceitos surgiram de necessidades reais, o que ampliou sua compreensão pelos estudantes. Os dados reunidos apontam que mais de 70% da turma reconheceu explicitamente o valor pedagógico da abordagem histórica, o que reforça a validade da proposta didática adotada (Gráfico 6.2). Essa mudança de percepção alinha-se com a visão de D’Ambrosio (1993), para quem a Matemática deve ser compreendida como uma construção cultural, desenvolvida para responder a necessidades específicas de diferentes sociedades.

Gráfico 6.2 – Percepção dos estudantes sobre a contribuição da História da Matemática para a aprendizagem (Questionários 1 e 2).



Fonte: Da autora (2025).

A comparação entre os dois momentos avaliativos revela uma mudança significativa na percepção dos estudantes: de um cenário inicialmente fragmentado e cético, passa-se a uma postura de aceitação majoritária da História como componente essencial do processo de aprendizagem. Esse deslocamento não apenas valida o uso da contextualização histórica no ensino da Matemática, mas também indica que, quando bem articulada aos conteúdos e vivenciada de forma interativa, ela pode transformar o modo como os estudantes se envolvem com a disci-

plina. O que antes era percebido por muitos como algo secundário ou meramente ilustrativo, passou a ser compreendido como ferramenta para entender os porquês da Matemática e sua evolução como construção humana.

6.4 Percepção do jogo como ferramenta pedagógica

A proposta de integrar um jogo digital do tipo RPG à aprendizagem de Matemática teve como objetivo não apenas motivar os estudantes, mas sobretudo criar um ambiente de experimentação e construção de significados por meio de desafios contextualizados. A recepção da turma, conforme registrado nos questionários e nas observações em sala, indica que o jogo se configurou como uma ferramenta pedagógica eficaz, ainda que com limitações e possibilidades de aprimoramento.

Na Aula 3, antes do primeiro contato com o jogo, foi realizada uma breve apresentação sobre as principais características de jogos do tipo RPG. Nesse momento, foi destacada a importância da leitura cuidadosa, pois os desafios são diretamente ligados aos detalhes da narrativa. Esse diálogo possibilitou identificar que aproximadamente metade da turma já tinha familiaridade com jogos do gênero.

Logo após essa experiência inicial, os relatos emocionais registrados na atividade da Aula 3 já refletiam um impacto positivo: dos vinte e sete estudantes que responderam a atividade, doze (44,44%) se declararam curiosos, oito (29,63%) relataram motivação, cinco (18,52%) se sentiram alegres ou entretidos e apenas dois (7,41%) demonstraram frustração ou confusão. Esse dado, somado às observações feitas em sala, como o baixo número de dúvidas durante a adaptação às mecânicas do jogo, demonstra que o ambiente digital foi rapidamente assimilado pela maioria dos estudantes, mesmo entre aqueles que não estavam familiarizados com jogos do tipo RPG.

A análise do progresso dentro do jogo também apresenta dados interessantes: na Aula 3, apenas três estudantes conseguiram avançar para a fase dos números inteiros, o que indica que, embora o jogo tenha sido bem recebido, o nível de desafio inicial demandou um tempo maior de adaptação, tanto na leitura atenta quanto na elaboração de estratégias de resolução. Já na Aula 8, ao final da sequência didática (com um estudante ausente), treze estudantes (48,15%) concluíram o jogo, três (11,11%) chegaram à fase final, seis (22,22%) alcançaram a fase dos números irracionais, três (11,11%) chegaram à fase dos números racionais e dois (7,41%) permaneceram na fase dos inteiros.

No que se refere à opinião sobre a eficácia do jogo como ferramenta de aprendizagem, os questionários aplicados no início e ao final da sequência didática mostram resultados bastante consistentes. No Questionário 1, vinte e quatro estudantes (85,71%) afirmaram acreditar que é possível aprender Matemática com jogos (Figura 6.16) e três (10,71%) disseram que não concordam com essa forma de aprender (Figura 6.17). Houve um estudante (3,57%) que declarou que isso dependeria de outros fatores, afirmando que “depende do jogo e de como se joga”.

Figura 6.16 – Resposta de estudante que acredita no potencial dos jogos digitais para a aprendizagem de Matemática.

C. Você acredita que aprender Matemática por meio de jogos pode ser mais

interessante do que métodos tradicionais? Explique sua resposta. Sim. É um
meio de tornar o ensino mais descontruído e uma maneira
de despertar mais interesse nos alunos, já que a competitividade
os fazem com que eles aprendam mais sobre jogar.

Fonte: Da autora (2025).

Figura 6.17 – Resposta de estudante que discorda do uso de jogos digitais como recurso para a aprendizagem de Matemática.

C. Você acredita que aprender Matemática por meio de jogos pode ser mais

interessante do que métodos tradicionais? Explique sua resposta. _____

NÃO método tradicional mais é mais
fácil de aprender.

Fonte: Da autora (2025).

De acordo com as respostas registradas no Questionário 2, vinte e seis estudantes (92,86%) confirmaram a posição favorável ao uso do jogo como ferramenta de aprendizagem (Figura 6.18), apenas um (3,57%) declarou não perceber contribuição significativa (Figura 6.19), o mesmo que havia indicado depender de outros fatores anteriormente, e um (3,57%) não respondeu.

Essa consistência entre os dois momentos avaliativos reforça que, para a maioria da turma, o jogo foi reconhecido como um recurso legítimo e eficaz no processo de aprendizagem. A Gráfico 6.3 ilustra esse equilíbrio e evidencia a boa aceitação da proposta entre os estudantes.

Figura 6.18 – Resposta de estudante que reconhece que o jogo contribuiu para a compreensão dos conteúdos matemáticos.

Experiência com o jogo de RPG

- A. Como foi sua experiência jogando "O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números"? Foi boa, eu não cdoquei
Tanta fei pois geralmente professores apresentam
Jogos tipo quizz, então foi uma experiência
Muito boa
- B. Você sentiu que o jogo ajudou na compreensão dos conceitos matemáticos?
 Explique sua resposta. Sim, antes eu tinha bastante
difficuldade com os irracionais e me ajudou
a decorar algumas coisas e entender
para que seria

Fonte: Da autora (2025).

Esses resultados revelam que o uso do RPG consolidou o interesse dos estudantes e proporcionou um ambiente de aprendizagem ativo e prazeroso, como defende Grandó (2004), ao atribuir ao jogo um papel central no desenvolvimento de atitudes favoráveis à Matemática. Mais que diversão, o jogo estimulou o raciocínio e a revisão dos conceitos estudados.

Na atividade aplicada na Aula 8, os estudantes foram convidados a indicar quais elementos do jogo mais contribuíram para sua compreensão dos números reais. As respostas evidenciaram o papel central dos recursos explicativos: nove estudantes (32,14%) citaram diretamente as falas dos personagens, os textos de apoio e os exemplos incorporados nas fases como facilitadores da aprendizagem. Outros cinco (17,86%) destacaram os desafios matemáticos, ressaltando a possibilidade de errar e tentar novamente como aspecto positivo. Mais cinco estudantes (17,86%) apontaram fases específicas como pontos-chave, evidenciando que a ambientação e o contexto visual também tiveram impacto na compreensão. Além disso, houve uma menção ao uso de analogias (3,57%), uma referência à estrutura narrativa do RPG (3,57%), uma resposta que negou qualquer contribuição do jogo (3,57%) e quatro respostas nas quais os estudantes afirmaram não saber opinar (14,29%). Dois estudantes não responderam (7,14%).

As interações dos estudantes com os desafios do jogo demonstram que houve espaço para a construção de conhecimento com base na própria realidade de cada estudante, respeitando seus ritmos, estratégias e formas de pensar. Essa proposta educativa segue os princípios de Freire (2021), especialmente ao reconhecer que ensinar exige respeito à autonomia do edu-

Figura 6.19 – Resposta do único estudante que declarou não perceber contribuição do jogo para sua aprendizagem.

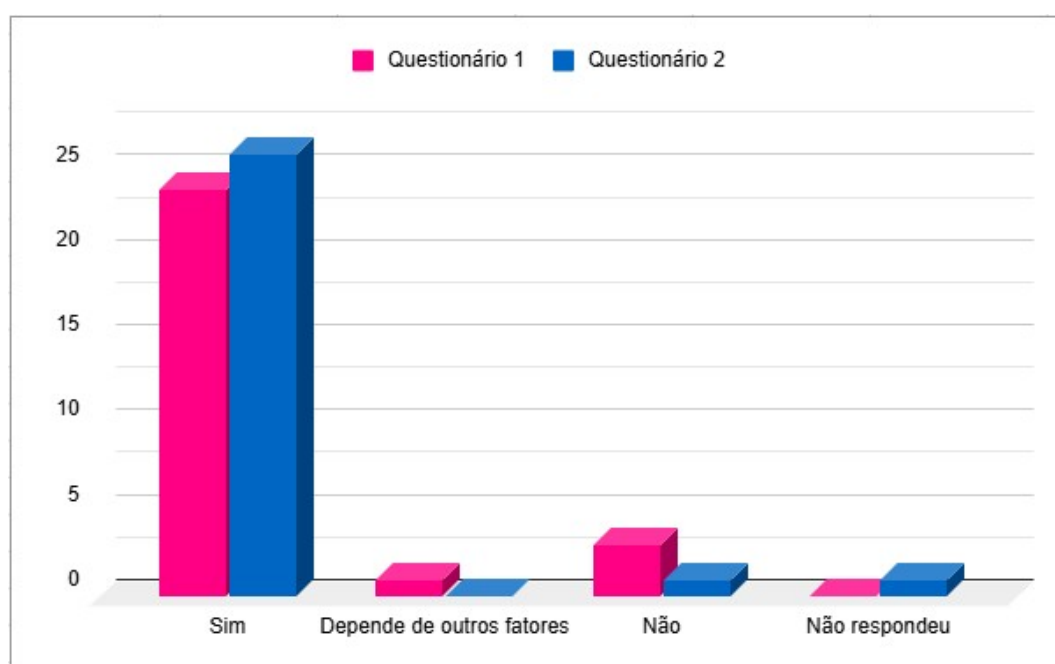
Experiência com o jogo de RPG

A. Como foi sua experiência jogando "O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números"? Foi legal mais podia ter
como derrotar com espadas
armas etc.

B. Você sentiu que o jogo ajudou na compreensão dos conceitos matemáticos?
 Explique sua resposta. mãe, não acho.

Fonte: Da autora (2025).

Gráfico 6.3 – Percepção sobre aprender Matemática com jogos (Questionários 1 e 2): “Você sentiu que o jogo ajudou na compreensão dos conceitos matemáticos?”.



Fonte: Da autora (2025).

cando, o que inclui considerar sua cultura, seu repertório e suas escolhas na resolução dos problemas. Além disso, a contextualização histórica da Matemática ainda estimulou a “leitura de mundo”, transformando o aprendizado em instrumento de compreensão e intervenção no mundo social.

Os relatos apontam que a experiência com o jogo estimulou outras aprendizagens além do conteúdo. A interação com seus recursos (textos, personagens e símbolos) encorajou os

estudantes a formularem entendimentos próprios da Matemática, pois o processo de aprender pode se dar por múltiplas vias: pela descoberta, pela colaboração, pela experimentação ou pela reflexão individual (Figura 6.20).

Figura 6.20 – Estudantes interagindo com o jogo educativo e explorando diferentes estratégias de aprendizagem.



Fonte: Da autora (2025).

Durante o desenvolvimento da sequência didática, os estudantes expressaram sugestões para o aprimoramento do jogo verbalmente e respondendo aos questionários, demonstrando engajamento com a proposta, além de um olhar crítico e participativo. Uma sugestão feita por um estudante foi a inclusão de dicas automáticas em momentos de erro, oferecendo orientações sem responder os desafios.

Também surgiram outras propostas mais diretamente relacionadas à mediação dos conteúdos. Uma estudante sugeriu a criação de uma “biblioteca do conhecimento” dentro do jogo, com informações acessíveis e interativas sobre os números reais. Também houve comentários sobre a necessidade de tornar as falas dos personagens mais curtas e simples, com exemplos mais diretos para facilitar a compreensão. Outra estudante propôs a inclusão de mais personagens para enriquecer a narrativa e diversificar os pontos de vista apresentados. Em uma sugestão seguindo as estruturas de RPGs clássicos, um estudante recomendou a introdução de elementos

típicos em RPGs de ação, como itens, status, batalhas contra criaturas, habilidades especiais e possibilidade de equipar armas, com o objetivo de tornar a experiência mais envolvente e aproximá-la dos jogos comerciais que fazem parte de seu repertório pessoal.

As opiniões sobre os aspectos positivos do jogo também demonstram a percepção de que a proposta foi além de um exercício tradicional. Um estudante fez a seguinte declaração: “gostei que é bem interessante e não só um tipo de quiz”, indicando que a estrutura narrativa e o caráter exploratório do jogo contribuíram para uma experiência diferenciada. Outro destacou que “as perguntas eram bem complexas, se não respondesse corretamente não passava, achei legal isso pois impossibilitava a pessoa de chutar questões”, um indicativo de que a dificuldade foi interpretada como um estímulo ao raciocínio e à persistência.

Os comentários dos estudantes (críticas e elogios) mostram que eles não só jogaram, mas refletiram sobre a experiência, avaliando tanto o conteúdo educativo quanto a história do jogo. Ouvir essas opiniões ajuda a confirmar o valor do jogo como ferramenta de ensino e evidencia a necessidade de mantê-lo em constante evolução, com a participação dos estudantes nesse processo.

6.5 Diálogos reflexivos e estratégias utilizadas durante o jogo

As respostas dos estudantes às questões abertas na atividade da Aula 3, aplicada após o primeiro contato com o jogo, revelam informações sobre as estratégias mobilizadas durante a interação com o jogo. Quando questionados sobre as estratégias utilizadas para superar os desafios matemáticos, a maioria mencionou o uso de cálculos mentais, registros no caderno, uso de calculadora ou consulta a anotações (Figura 6.21). Esses relatos mostram que, mesmo em um ambiente digital, os estudantes recorreram a procedimentos tradicionais de resolução, integrando múltiplas formas de representação do raciocínio matemático. Também se percebeu que alguns estudantes recorreram a estratégias próprias, como “chutar”, “seguir as regras do jogo” ou “usar os dedos”, o que evidencia sua autonomia, mas aponta para a importância de uma mediação pedagógica que os leve a refletir e explicar suas formas de raciocínio.

De modo geral, as respostas mostraram que os estudantes buscaram compreender os desafios do jogo por meio de cálculos e comparações numéricas, revelando uma postura ativa diante das situações-problema. Ao final da terceira aula, dedicada à exploração do jogo, alguns estudantes foram convidados a explicar oralmente como resolveram os problemas propostos, o que possibilitou observar diferentes formas de raciocínio e estratégias utilizadas. Ainda que

Figura 6.21 – Registro de resposta de estudante mencionando o uso de cálculos e anotações durante o jogo.

2. Estratégias e Descobertas

2.1. Que estratégias você utilizou para superar os desafios matemáticos do jogo?

fazendo continhas na calculadora
pelo memorio e pelo caderno

Fonte: Da autora (2025).

nem todos tenham detalhado suas ações, as falas sugerem momentos de reflexão, expressos em comentários como “pensei bastante” ou “fui dividindo e somando até chegar no resultado”. Tais manifestações aproximam-se do que Grandó (2004) denomina diálogos reflexivos, isto é, situações em que o estudante, ao justificar ou explicar suas ações, torna visíveis seus processos cognitivos e a construção de significados matemáticos.

Os dados coletados também demonstram que alguns participantes conseguiram resolver desafios mesmo sem apoio direto do conteúdo trabalhado em aula, utilizando as explicações contidas no próprio jogo ou a colaboração de colegas e da professora (Figura 6.22). Essas respostas apontam para a relevância do jogo como mediador da aprendizagem, uma vez que o ambiente do jogo estimulou a autonomia e o raciocínio dedutivo. Conforme defende Grandó (2004), a intervenção pedagógica em ambientes de jogos deve favorecer a reflexão sobre as estratégias utilizadas, estimulando a metacognição e a relação entre as ações do jogador e os conceitos matemáticos abordados.

Figura 6.22 – Resposta de estudante que afirmou ter seguido apenas as regras do jogo.

2. Estratégias e Descobertas

2.1. Que estratégias você utilizou para superar os desafios matemáticos do jogo?

nenhuma estrategia eu so fui seguindo as regras do jogo

Fonte: Da autora (2025).

Ao final da sexta aula, uma estudante relatou que, na primeira fase do jogo, correspondente aos números naturais, conseguiu realizar as operações “com facilidade, fazendo continhas nos dedos”. Na fase dos números racionais, dois estudantes afirmaram ter sentido “um pouco de dificuldade”, e um deles relatou ter recorrido à calculadora para concluir os desafios. Já a fase

dos números irracionais foi considerada a mais complexa: uma estudante disse que precisou fazer desenhos para compreender melhor o problema, enquanto outros dois admitiram que, em alguns casos, “chutaram” as respostas. Um estudante afirmou: “tentei imaginar aquela situação de verdade para eliminar as respostas impossíveis”, demonstrando um esforço de raciocínio lógico e a tentativa de associar as situações do jogo a experiências concretas.

A forma como os estudantes descreveram suas estratégias evidencia que o jogo favoreceu a experimentação, a formulação de hipóteses e a ressignificação dos conceitos matemáticos abordados. Esse processo foi ainda mais explicitado quando os estudantes relataram suas percepções sobre a própria Matemática, como se observa na Figura 6.23, na qual uma estudante descreve uma nova forma de enxergar a Matemática. Essas manifestações reforçam a importância da análise dos diálogos reflexivos para compreender as aprendizagens construídas nos jogos, conforme defende Grandó (2004).

Figura 6.23 – Respostas de estudantes indicando mudança na percepção da Matemática após a experiência com o jogo.

4. Relação com o Aprendizado

4.1. Você conseguiu perceber alguma relação entre o jogo e os conhecimentos matemáticos que já tinha? Se sim, explique.

Sim, ele juntava pessoas, objetos, cenários sobre o jogo e continhas básicas da matemática.

Fonte: Da autora (2025).

Assim, ainda que os registros orais tenham ocorrido de forma breve, observa-se que a atividade envolvendo o jogo de RPG, *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*, proporcionou espaços de expressão do pensamento matemático e de ressignificação do componente curricular, aproximando a Matemática de contextos mais significativos e despertando nos estudantes o desejo de participar ativamente do processo de aprendizagem.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo investigar as possíveis contribuições do uso combinado da História da Matemática e de um jogo de RPG eletrônico para a compreensão dos números reais por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da rede estadual no sul de Minas Gerais. A proposta nasceu da inquietação diante de práticas tradicionais de ensino, centradas na memorização de fórmulas e algoritmos, pouco relacionadas à vivência dos estudantes e frequentemente desmotivadoras. Nesse cenário, buscou-se construir uma sequência didática diferenciada, que integrasse elementos históricos, atividades interativas e recursos digitais, favorecendo uma aprendizagem que faça sentido para os estudantes.

A aplicação da sequência didática permitiu observar avanços importantes na compreensão conceitual dos números reais, especialmente no que diz respeito à classificação dos subconjuntos e à representação na reta numérica. Os estudantes também passaram a compreender melhor a importância do conteúdo, reconhecendo sua utilidade e sua presença em situações concretas. A inserção da História da Matemática promoveu uma aproximação entre o conhecimento formal e os contextos culturais e sociais que marcaram sua construção, enriquecendo o olhar dos estudantes sobre o conteúdo.

Destaca-se o caráter inovador desta pesquisa, que integrou a História da Matemática, elementos narrativos e recursos digitais em um jogo de RPG desenvolvido especialmente para fins educacionais. Essa combinação, ainda pouco explorada no contexto do Ensino Fundamental, representa uma proposta original para o ensino dos números reais, ao articular dimensões conceituais, históricas e tecnológicas em uma mesma sequência didática. Essa inovação reforça a contribuição deste trabalho tanto para o campo da Educação Matemática quanto para o desenvolvimento de práticas pedagógicas criativas e contextualizadas.

Além disso, a metodologia demonstrou potencial para elevar a motivação discente. O formato narrativo do jogo, os desafios integrados à trama e a liberdade para experimentar diferentes estratégias de resolução despertaram a curiosidade, o interesse e o envolvimento dos estudantes. Muitos se mostraram participativos e confiantes ao lidar com os conteúdos. A ludicidade, aliada à contextualização histórica, contribuiu para um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, no qual o erro foi acolhido como parte do processo e a colaboração entre pares se intensificou.

As respostas registradas nos questionários e atividades revelaram uma maior disposição em argumentar, testar hipóteses e justificar estratégias. Ao invés de buscar apenas o resultado

correto, os estudantes passaram a se engajar no processo de resolução, demonstrando compreensão mais ampla dos conceitos envolvidos. Essa atitude reflete uma aprendizagem mais significativa, voltada à construção de sentido e ao desenvolvimento do próprio conhecimento. Com isso, observou-se uma mudança na postura dos estudantes diante dos desafios matemáticos.

O processo de elaboração e aplicação da sequência didática também produziu reflexões relevantes sobre a prática docente. Ao desenvolver o jogo *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*, foi necessário articular conteúdos matemáticos, elementos narrativos e aspectos técnicos da plataforma digital, o que exigiu um bom planejamento e constante revisão pedagógica. Essa experiência reforça a importância da formação continuada dos professores e da valorização de propostas didáticas que integram diferentes linguagens, tecnologias e saberes interdisciplinares.

Ainda que os resultados tenham sido bastante positivos, a pesquisa apresentou algumas limitações. A aplicação da sequência didática foi realizada em uma única turma de 28 estudantes, o que restringe a generalização dos dados. Além disso, o número limitado de aulas e a impossibilidade de um acompanhamento posterior dificultaram uma análise mais ampla dos efeitos a longo prazo. Soma-se a isso o fato de que a pesquisadora não era a professora regente da turma, o que limitou o acompanhamento contínuo após o término da sequência didática. Também é importante considerar o tempo necessário para o desenvolvimento do jogo e o domínio da ferramenta RPG Maker, que, apesar de acessível, pode representar uma barreira para professores com pouca familiaridade com recursos digitais.

Mesmo diante desses desafios, os resultados indicam que a proposta é viável e relevante. Ela contribui com alternativas ao ensino tradicional, abrindo espaço para práticas mais investigativas, criativas e significativas. Ao unir História da Matemática, ficção e tecnologia, a sequência didática promoveu a construção de vínculos mais consistentes entre os estudantes e os conceitos matemáticos, ampliando possibilidades para a atuação docente no Ensino Fundamental.

Como desdobramentos futuros, recomenda-se a ampliação da proposta para outros conteúdos matemáticos, a produção de materiais de apoio ao professor e a oferta de formações voltadas ao uso pedagógico de jogos digitais. Também seria interessante que novos estudos fossem realizados em diferentes contextos escolares, acompanhando os efeitos da abordagem proposta ao longo do tempo.

Em síntese, esta dissertação reafirma o potencial das metodologias ativas e interdisciplinares para ressignificar o ensino de Matemática, aproximando-o das vivências dos estudantes e fortalecendo o papel do professor como mediador de experiências formativas contextualizadas. O trabalho buscou, acima de tudo, contribuir para que o ensino da Matemática seja mais acessível, instigante, significativo e, sobretudo, para que os estudantes possam se reconhecer como sujeitos capazes de compreender e transformar o mundo por meio do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- ALVES, F. L. T. **Conjunto dos números reais**: reflexões para construção de uma proposta para o ensino dos números reais. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1125&id2=36318>. Acesso em: 30 set. 2024.
- ALVES, R. J. C. **Novas perspectivas para o uso da História da Matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=89726&id1=3152>. Acesso em: 03 out. 2024.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BARRETO, F. A. B. L. **Números reais e Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171053509&id1=5816>. Acesso em: 30 set. 2024.
- BLANCO, R. M. **Vislumbrando uma “nova” abordagem para os números reais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — IFSP, São Paulo, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=150982032&id1=3575>. Acesso em: 30 set. 2024.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 29 nov. 2024.
- CARAÇA, B. d. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Rio de Janeiro: Livraria Clássica, 1951.
- CHAQUIAM, M. **Ensaio temáticos**: história e matemática em sala de aula. Belém, PA: SBEM, 2017.
- COLARES, G. B. **Conjunto dos números reais**: caracterização, construção e ensino. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171055075&id1=6393>. Acesso em: 30 set. 2024.
- COSTA, R. V. d. **Dos números naturais aos números reais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=150540013&id1=4609>. Acesso em: 30 set. 2024.
- D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**. 2. ed. São Paulo: Ática, 1993.
- DANTE, L. R.; VIANA, F. **Teláris essencial**: matemática 6º ano. São Paulo: Ática, 2022.

- DUTRA, W. d. S. **A construção dos números reais: noções fundamentais e sugestões ao ensino básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2014. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=960&id2=1556>. Acesso em: 30 set. 2024.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.
- FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários a prática educativa**. 69. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2021.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- GOMES, E. B. **A História da Matemática como metodologia de ensino da Matemática: perspectivas epistemológicas e evolução de conceitos**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2005. Disponível em: <<https://www.crephimat.com.br/docs/D/D-HEnM/2005%20-%20M%20-%20EMERSON%20BATISTA%20GOMES.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2024.
- GRANDO, R. C. **O jogo e a Matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade: 9º ano**. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2022.
- IFRAH, G. **História universal dos algarismos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.
- LIMA, E. L. **Análise Real: funções de uma variável**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 1.
- LOPES, A. C. M.; Sá, P. F. d. Números reais: aspectos históricos. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 09, p. 79–90, 2016. Disponível em: <<https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/56/46>>. Acesso em: 15 out. 2024.
- LUSTOSA, J. B. S. **Tópicos da História da Matemática e suas contribuições para o ensino básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2021. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171054233&id1=6186>. Acesso em: 03 out. 2024.
- MASSAD, R. C. **A construção dos números reais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1463&id2=1169>. Acesso em: 30 set. 2024.
- MATOS, L. P. d.; BARROS, R. A. Uma sequência de atividades investigativas utilizando uma abordagem histórica sobre os números irracionais. **XII ENEM**, 2016. Disponível em: <https://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/8129_3586_ID.pdf>. Acesso em: 10 out. 2024.
- MENDES, I. A. **Usos da História no Ensino de Matemática: reflexões teóricas e experiências**. 3. ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2022.
- MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Revista Zetetiké**, p. 73–105, 1997. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646848/13749>>. Acesso em: 04 fev. 2025.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MOURA, M. O. d. O jogo e a construção do conhecimento matemático. **Série Idéias**, p. 45–53, 2008. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf>. Acesso em: 30 jan. 2025.

NETO, J. E. **História da matemática**. [S.l.]: Editora e Distribuidora Educacional, 2016.

NOBRE, R. B. **Sobre possibilidades de ensino e aprendizagem dos números irracionais no 8º ano do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-08042018-120458/publico/Dissertacao_Ronaldo_Bezerra_Nobre_7754202_Versao_Corrigida_Final.pdf>. Acesso em: 10 out. 2024.

OLIVEIRA, J. P. **Números reais: uma outra abordagem**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=48358&id1=1202>. Acesso em: 30 set. 2024.

OLIVEIRA, M. E. F. d. **Concepções de professores de matemática sobre números reais e seu ensino**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=161030161&id1=4459>. Acesso em: 30 set. 2024.

PIMENTEL, T. T. **Construção dos números reais via cortes de Dedekind**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=150540048&id1=4169>. Acesso em: 30 set. 2024.

POMMER, W. M. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais**. 235 p. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-23082012-092642/publico/WAGNER_MARCELO_POMMER_rev.pdf>. Acesso em: 10 out. 2024.

RAMOS, A. M. **Números reais: conceitos e representações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2869&id2=54>. Acesso em: 30 set. 2024.

REIS, A. M. d. **Os números reais e a História da Matemática: possibilidades de abordagens na educação básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — IFSP, São Paulo, 2022. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171054435&id1=6834>. Acesso em: 30 set. 2024.

ROCHA, R. R. M. **Sensibilização para existência dos números irracionais**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2018. Disponível em: <<https://tede.ufrjr.br/jspui/bitstream/jspui/2612/2/2018%20-%20Rute%20Ribeiro%20Maireles%20Rocha.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2024.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma abordagem detalhada para estudantes e pesquisadores. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. d. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. [S.l.]: SBM, 2012.

SANTOS, S. d. C. **Uma construção geométrica dos números reais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=91604&id1=2384>. Acesso em: 30 set. 2024.

SERAFIM, A. F. **Os números irracionais e o processo ensino aprendizagem no Ensino Fundamental**: anos finais – um desafio ao professor. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: <<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/49926/49926.PDF>>. Acesso em: 10 out. 2024.

SILVA, F. O.; RIBEIRO, M. R. R. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. **Brazilian Electronic Journal of Mathematics**, v. 5, p. 78–93, 2024. Disponível em: <<https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/article/view/71830/39020>>. Acesso em: 13 out. 2024.

SILVA, M. F. M. d. **Construção e avaliação de competências e habilidades relativas aos números reais**: uma experiência no ensino médio e na formação inicial do professor de matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=86957&id1=2207>. Acesso em: 30 set. 2024.

SOUSA, G. C. d. Aliança entre hm, tdc e im: fundamentos e aplicações. **REMATEC**, p. 117–136, 2020. Disponível em: <<https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/127/126>>. Acesso em: 10 out. 2024.

SOUTO, L. A. **Contribuições da teoria do ensino desenvolvimental de Davydiv**: proposta de construção de plano de ensino para a formação do conceito de números reais. Tese (Tese (Doutorado)) — Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2021. Disponível em: <<https://tede2.pucgoias.edu.br/bitstream/tede/4720/2/Leonardo%20Ant%c3%b4nio%20Souto.pdf>>. Acesso em: 27 dez. 2024.

STEWART, I. **O fantástico mundo dos números**: a matemática do zero ao infinito. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

WARSI, K.; DANGERFIELD, J.; DAVIS, H.; FARNDON, J.; GRIFFTHS, J.; JACKSON, T.; PATEL, M.; POPE, S. **O livro da matemática**. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020.

WEINFURTER, D. A. **Os números reais e as expansões decimais**: fundamentação teórica. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3272&id2=94163>. Acesso em: 30 set. 2024.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO 1

| |
|---|
| Escola: _____ |
| Estudante: _____ |
| Data: ____/____/____ Turma:_____ Componente Curricular: <u>Matemática</u> |

Instruções:

1. Leia atentamente cada pergunta antes de responder.
2. Responda com suas próprias palavras, explicando seu julgamento sempre que possível.
3. Caso não saiba a resposta, tente expressar o que pensa sobre o assunto.
4. Não há respostas certas ou erradas – este questionário tem como objetivo compreender seus conhecimentos e percepções antes e depois da sequência didática.
5. Se precisar de mais espaço, utilize o verso da folha.

Questionário 1

Sobre os números reais

A. Você já ouviu falar sobre os números irracionais? Se sim, onde ou em que contexto?

B. O que você entende por números racionais e irracionais? Dê um exemplo de cada.

C. Você consegue pensar em algum problema ou situação do dia a dia em que os números irracionais podem aparecer?

Sobre a História da Matemática

A. Você já estudou História da Matemática ou descobertas matemáticas em outras aulas? Lembre de algum exemplo?

B. Se você pudesse aprender Matemática por meio de histórias e curiosidades, você acha que seria mais interessante? Por quê?

C. Você acha que conhecer a história dos números pode ajudar a entendê-los melhor? Explique sua opinião.

Jogos e aprendizado

A. Você gosta de jogar videogame ou jogos de computador? Se sim, quais são seus favoritos?

B. Você já jogou algum jogo que envolvesse desafios matemáticos? Como foi sua experiência?

C. Você acredita que aprender Matemática por meio de jogos pode ser mais interessante do que métodos tradicionais? Explique sua resposta.

Obrigada por sua participação!

Sua opinião nos ajuda a entender e melhorar o aprendizado.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO 2

| |
|---|
| Escola: _____ |
| Estudante: _____ |
| Data: ____/____/____ Turma:_____ Componente Curricular: <u>Matemática</u> |

Instruções:

1. Leia atentamente cada pergunta antes de responder.
2. Responda com suas próprias palavras, explicando seu julgamento sempre que possível.
3. Caso não saiba a resposta, tente expressar o que pensa sobre o assunto.
4. Não há respostas certas ou erradas – este questionário tem como objetivo compreender seus conhecimentos e percepções antes e depois da sequência didática.
5. Se precisar de mais espaço, utilize o verso da folha.

Questionário 2**Compreensão dos conceitos matemáticos**

A. Você consegue explicar a diferença entre um número racional e um número irracional? Dê um exemplo.

B. Como você explicaria o que são os números reais para um colega que não participou das aulas?

Relação com a História da Matemática

A. A história da descoberta dos números irracionais ajudou na compreensão do tema? Por quê?

B. Você acha que estudar a história dos números torna a Matemática mais interessante? Justifique sua resposta.

Experiência com o jogo de RPG

A. Como foi sua experiência jogando *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*?

B. Você sentiu que o jogo ajudou na compreensão dos conceitos matemáticos? Explique sua resposta.

Reflexão geral sobre a aprendizagem

A. O que você acha que aprendeu de mais importante com essa sequência didática?

B. Em relação às aulas desta sequência didática, o que você acha que poderia ser modificado para aprender melhor?

Obrigada por sua participação!

Sua opinião nos ajuda a entender e melhorar o aprendizado.

APÊNDICE C – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

INTRODUÇÃO

Esta sequência didática foi elaborada como parte do produto educacional desenvolvido nesta pesquisa. Seu objetivo é oferecer aos professores um recurso didático que integra História da Matemática e tecnologia, utilizando um jogo de RPG eletrônico como ferramenta de apoio ao ensino do conjunto dos números reais.

O material foi organizado em oito aulas de 50 minutos e buscou proporcionar aos estudantes uma aprendizagem significativa, com ênfase na compreensão dos números irracionais e na consolidação das propriedades dos números reais. As atividades foram elaboradas de forma a estimular o raciocínio lógico, a resolução de problemas, o pensamento crítico e a cooperação entre os estudantes.

Além disso, a proposta valoriza o papel do professor como mediador do conhecimento, oferecendo estratégias que podem ser aplicadas em diferentes contextos educacionais. Espera-se que este material contribua para enriquecer a prática docente e favoreça o desenvolvimento de competências e habilidades previstas na BNCC, tornando o aprendizado dos números reais mais acessível e significativo.

DADOS INICIAIS

ANO: 9º ano do Ensino Fundamental

OBJETIVO GERAL: Proporcionar aos estudantes uma aprendizagem significativa do conjunto dos números reais, com foco na compreensão dos números irracionais, após revisão dos números naturais, inteiros e racionais. A sequência didática busca consolidar os conceitos e propriedades dos números reais, contextualizando historicamente sua construção e explorando sua aplicação em problemas e situações práticas.

QUANTIDADE DE AULAS: 8 aulas de 50 minutos.

TEMA: A construção e compreensão do conjunto dos números reais: explorando a história, os conceitos e as aplicações dos números irracionais.

CONTEÚDOS:

- a) revisão dos números naturais, inteiros e racionais:
 - propriedades básicas e representação;
 - limitações e a necessidade de outros conjuntos numéricos;
- b) introdução aos números irracionais:
 - definição e características dos números irracionais;
 - representação na reta numérica;
- c) formalização do conjunto dos números reais:
 - contexto histórico da descoberta dos números irracionais;
 - relação entre números racionais e irracionais no conjunto dos números reais;
- d) propriedades e aplicações dos números reais:
 - densidade dos números reais;
 - operações relacionadas a números reais;
 - problemas aplicados que utilizam números irracionais e reais.

PRÉ-REQUISITOS:

- a) compreensão básica dos conjuntos numéricos naturais, inteiros e racionais: definições, representações e propriedades;
- b) habilidade com operações aritméticas fundamentais: adição, subtração, multiplicação, divisão, simplificação de frações e transformação fração-decimal e vice-versa.
- c) noções básicas de Geometria e medidas: reconhecimento de figuras geométricas simples e Teorema de Pitágoras;
- d) interpretação e representação na reta numérica: posicionamento de números naturais, inteiros e racionais na reta.

AULA 1

TEMAS E CONTEÚDOS:

- a) revisão do conjunto dos números naturais e dos números inteiros;
- b) contexto histórico em que os conjuntos foram desenvolvidos e formalizados;
- c) operações e suas propriedades;
- d) representação na reta;
- e) aplicação dos conceitos em problemas contextualizados.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

- a) revisar o conceito e as propriedades dos números naturais e inteiros;
- b) relacionar o surgimento desses conjuntos numéricos a necessidades históricas e práticas;
- c) identificar a ampliação do conjunto dos números naturais para os números inteiros com base em problemas cotidianos.

HABILIDADES DA BNCC:

- a) (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora;
- b) (EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração
- c) (EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Inicialmente o professor deve abordar o surgimento histórico dos números naturais, destacando sua origem nas necessidades básicas de contagem e organização, e a ampliação para os números inteiros, motivada por situações como dívidas e temperaturas negativas.

Em seguida, os estudantes são organizados em duplas para realizarem as atividades propostas. Essas atividades permitem consolidar os conteúdos revisados e promover o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico. Ao final, devem ser realizados momentos de socialização das soluções, esclarecimento de dúvidas e reflexões sobre a importância do conteúdo para os próximos estudos.

Atividade - Aula 1

NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS

| |
|--|
| Escola: _____ |
| Estudantes: _____ |
| _____ |
| Data: ____/____/____ Turma: _____ Componente Curricular: <u>Matemática</u> |

Após revisar os números naturais e inteiros, é hora de praticar! Resolva os problemas propostos, explorando as propriedades desses números. Registre todos os cálculos e explicações na folha.

1. A civilização egípcia utilizou números naturais para contar sacos de trigo. Suponha que, em um celeiro, haja inicialmente 25 sacos de trigo e sejam acrescentados mais 15. Quantos sacos há no total? Agora imagine que eles retiraram 10 sacos para enviar para outro vilarejo. Quantos restam no celeiro?

2. Durante a Idade Média, os comerciantes passaram a utilizar números negativos para representar dívidas em seus registros financeiros. Suponha que um comerciante possua um saldo inicial de 50 moedas e contraia uma dívida de 70 moedas.

a) Como essa situação pode ser representada numericamente utilizando números inteiros?

b) Se o comerciante pagar 10 moedas dessa dívida, qual será seu novo saldo? Mostre os cálculos realizados.

3. Um jogador de um jogo eletrônico possui 12 pontos de vida. Ele perde 7 pontos após uma batalha e ganha 5 pontos ao encontrar um item mágico. Quantos pontos de vida ele tem agora?

4. Uma equipe de operários está construindo uma pirâmide. No primeiro dia, eles colocam 50 blocos. No segundo dia, colocam o dobro do número de blocos do primeiro dia. No terceiro dia, devido a uma tempestade, eles precisam remover 30 blocos.

a) Quantos blocos restaram na construção ao final do terceiro dia?

b) Se no quarto dia a equipe adicionar mais 75 blocos, qual será o total acumulado?

5. Uma pessoa abriu uma conta bancária e depositou R\$ 500,00. No primeiro mês, ela fez um saque de R\$ 200,00. No segundo mês, depositou mais R\$ 300,00, mas teve que pagar uma dívida de R\$ 400,00 e esse valor foi retirado da conta bancária.

a) Qual é o saldo atual dessa pessoa na conta bancária? Apresente seus cálculos.

b) Qual é o menor saldo que ela teve durante esses dois meses? Justifique sua resposta.

6. Uma equipe de arqueólogos está escavando um sítio histórico. Eles começaram a escavação no nível 0 (superfície). Após um dia de trabalho, eles atingiram o nível -3 metros. No dia seguinte, avançaram mais 4 metros para baixo, mas depois precisaram subir 2 metros para fortalecer as estruturas.

a) Qual é o nível em que a escavação se encontra ao final do segundo dia?

b) Se a equipe continuar descendo 3 metros por dia, em qual dia atingirão o nível -15 metros?

Justifique sua resposta.

AULA 2

TEMAS E CONTEÚDOS:

- a) revisão do conjunto dos números racionais;
- b) origem e evolução histórica dos números racionais;
- c) representações dos números racionais;
- d) posicionamento dos números racionais na reta numérica.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

- a) compreender historicamente o desenvolvimento dos números racionais;
- b) reconhecer diferentes representações dos números racionais, como frações, decimais e percentuais;
- c) realizar conversões entre as diferentes representações de números racionais;
- d) posicionar os números racionais corretamente na reta numérica.

HABILIDADES DA BNCC:

- a) (EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros;
- b) (EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica;
- c) (EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias;
- d) (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR:

A aula deve iniciar com uma introdução histórica sobre o conjunto dos números racionais, destacando sua origem e evolução ao longo do tempo, de forma a contextualizar sua

importância e despertar o interesse dos estudantes para o tema. Em seguida, proponha uma reflexão sobre o surgimento das frações nas antigas civilizações.

Em seguida, retome com os estudantes as diferentes formas de representação dos números racionais, ressaltando a equivalência entre elas. Trabalhe também a reta numérica, orientando a localização de diferentes números racionais e destacando sua distribuição em relação aos inteiros.

Na sequência, organize os estudantes em duplas para resolver as atividades propostas, de modo a fortalecer os conteúdos revisados e estimular a troca de ideias durante a resolução. Concluídas as tarefas, promova a socialização das estratégias utilizadas, com espaço para esclarecimento de dúvidas e para destacar a importância dos conceitos trabalhados no avanço dos estudos.

Atividade - Aula 2
NÚMEROS RACIONAIS

| |
|--|
| Escola: _____ |
| Estudantes: _____ |
| _____ |
| Data: ____/____/____ Turma: _____ Componente Curricular: <u>Matemática</u> |

Após revisar os números racionais, é hora de praticar! Resolva os problemas propostos, explorando as propriedades desses números. Registre todos os cálculos e explicações na folha. Utilize uma calculadora para realizar as operações e responda a cada questão de forma completa.

1. Calcule as seguintes expressões utilizando a calculadora:

a) $\frac{3}{4} + 0,25$

b) $\frac{5}{8} - 0,375$

c) $0,5 \times \frac{7}{10}$

d) $\frac{1}{3} \div 0,4$

Responda:

Qual é a diferença entre uma fração exata e uma fração decimal periódica? Dê um exemplo de cada. _____

2. Calcule os percentuais correspondentes às frações:

a) $\frac{3}{4}$ em porcentagem. _____

b) $\frac{5}{8}$ em porcentagem. _____

c) 0,25 em porcentagem. _____

AULA 3

TEMAS E CONTEÚDOS:

- a) revisão dos números naturais, inteiros e racionais.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

- a) revisar e fixar os conceitos de números naturais, inteiros e racionais;
- b) compreender e explorar propriedades desses conjuntos numéricos;
- c) estimular o raciocínio lógico e a resolução de problemas.

HABILIDADES DA BNCC:

- a) (EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações;
- b) (EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Inicie a aula com uma breve revisão dos conjuntos numéricos já estudados (naturais, inteiros e racionais), preparando os estudantes para a introdução do jogo. Apresente o material, explicando seus objetivos e regras de forma clara, garantindo que todos compreendam como jogar.

Organize a turma para que os estudantes joguem livremente, favorecendo a interação com o material e a internalização das regras. Durante essa etapa, circule pela sala para esclarecer dúvidas, observar o envolvimento dos estudantes e estimular a participação. Ressalte que, neste momento, não é necessário explicitar ou aplicar estratégias matemáticas, pois o objetivo principal é a familiarização com as mecânicas do jogo em um ambiente descontraído e de experimentação. Os primeiros desafios apresentados devem envolver números naturais, inteiros e racionais, promovendo uma revisão implícita dos conteúdos já trabalhados.

Ao final da aula, oriente os estudantes a responder individualmente a uma atividade impressa, composta por questões discursivas. Nela, serão convidados a relatar sua experiência inicial com o jogo, descrevendo as estratégias utilizadas, os desafios enfrentados, os sentimentos envolvidos e as reflexões que a atividade despertou. Esse registro permitirá valorizar as

percepções pessoais sem a necessidade de aprofundar conceitos formais neste momento. Encerre informando que, nas próximas aulas, serão abordados os números irracionais, preparando o grupo para uma compreensão mais ampla dos números reais.

Atividade - Aula 3
NÚMEROS RACIONAIS - JOGO

| |
|---|
| Escola: _____ |
| Estudante: _____ |
| Data: ____/____/____ Turma:_____ Componente Curricular: <u>Matemática</u> |

Você jogou *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*, antes de estudarmos em detalhes os números irracionais e o conjunto dos números reais. Agora, queremos saber suas experiências e reflexões sobre essa atividade. Responda as perguntas a seguir com sinceridade e detalhe, pois suas respostas são importantes para entendermos como o jogo pode contribuir para o aprendizado e o envolvimento inicial.

1. Experiência Inicial no Jogo

1.1. Como foi sua experiência inicial jogando o RPG? Houve algo que chamou sua atenção ou despertou sua curiosidade? _____

1.2. Descreva como você se sentiu ao enfrentar os desafios apresentados no jogo (por exemplo, confuso, curioso, motivado, frustrado). Explique o motivo.

1.3. Você achou os desafios matemáticos no jogo simples, médios ou difíceis? Por quê?

2. Estratégias e Descobertas

2.1. Que estratégias você utilizou para superar os desafios matemáticos do jogo?

2.2. Durante o jogo, você conseguiu resolver algum desafio mesmo sem ter aprendido o conteúdo na aula? Como fez isso?

2.3. Alguma parte do jogo fez você pensar de forma diferente sobre a Matemática? Se sim, descreva o que foi e por quê.

3. Reflexões e Sentimentos

3.1. Jogar sem conhecer completamente o conteúdo foi uma experiência diferente? O que você sentiu ou aprendeu com essa abordagem?

3.2. Você acha que o jogo despertou seu interesse em aprender mais sobre números e matemática? Explique.

3.3. Como você se sente ao explorar o jogo? Houve momentos de colaboração ou troca de ideias com os colegas? Descreva.

4. Relação com o Aprendizado

4.1. Você conseguiu perceber alguma relação entre o jogo e os conhecimentos matemáticos que já tinha? Se sim, explique.

4.2. Que partes do jogo, na sua opinião, podem ajudar a entender conteúdos matemáticos de forma mais clara ou interessante?

5. Avaliação Geral do “Jogo pelo Jogo”

5.1. Dê uma nota de 1 a 5 para os seguintes aspectos do jogo (1 = ruim, 5 = excelente):

- Enredo do jogo: _____
- Desafios propostos: _____
- Motivação e interesse: _____

5.2. Se você pudesse mudar algo no jogo, o que seria?

6. Comentários Finais

Gostaria de deixar alguma impressão, sentimento ou ideia sobre sua experiência inicial com o jogo?

Agradecemos sua colaboração! Suas respostas nos ajudam a entender como o jogo pode contribuir para o aprendizado e o engajamento matemático.

AULA 4

TEMAS E CONTEÚDOS:

- a) a irracionalidade de $\sqrt{2}$: da filosofia pitagórica ao surgimento dos números irracionais;
- b) impacto da descoberta dos números irracionais na Matemática antiga;
- c) compreensão do conceito de números irracionais como uma ampliação do conjunto numérico;
- d) discussão sobre as limitações dos números racionais para descrever a realidade e a necessidade de incluir os irracionais.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

- a) compreender a diferença entre números racionais e irracionais;
- b) desenvolver o pensamento crítico ao analisar as limitações dos números racionais e reconhecer a necessidade dos números irracionais para descrever certos fenômenos matemáticos;
- c) promover a reflexão sobre como a Matemática evolui ao incorporar novos conceitos para resolver problemas e descrever o mundo.

HABILIDADES DA BNCC:

- a) (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade);
- b) (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Inicie a aula com uma introdução histórica sobre a Escola Pitagórica, destacando sua crença de que os números racionais eram suficientes para explicar o universo. Ressalte a importância atribuída pelos pitagóricos à ordem e perfeição dos números racionais, contextualizando

a visão da época e preparando os estudantes para o contraste com a futura descoberta dos irracionais. Estimule-os a refletir sobre como a Matemática, ao longo da história, se relaciona tanto com questões filosóficas quanto práticas.

Na etapa seguinte, conduza uma abordagem geométrica apresentando o problema do comprimento da diagonal do quadrado com lados de comprimento igual a uma unidade. Utilize o Teorema de Pitágoras para mostrar que o comprimento da diagonal é dada por $d = \sqrt{2}$. Em seguida, proponha a hipótese de que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros e primos entre si. A análise das paridades de p e q demonstra a impossibilidade da hipótese de que $\sqrt{2}$ seja racional.

Conclua a aula com uma discussão coletiva sobre a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos. Apresente a descoberta de que $\sqrt{2}$ não é racional como um marco histórico que levou à criação do conjunto dos números irracionais. Estimule os estudantes a refletirem sobre como a Matemática se transforma para responder a problemas que os conceitos anteriores não conseguiam explicar, reforçando sua característica de ciência em constante expansão.

OBSERVAÇÃO: Esta aula é expositiva e não tem atividade a ser resolvida pelos estudantes.

AULA 5

TEMAS E CONTEÚDOS:

- a) formalização do conjunto dos números irracionais.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

- a) compreender o conceito de números irracionais e distingui-los dos números racionais;
- b) identificar números irracionais em situações cotidianas e diferentes áreas do conhecimento, como Geometria e Matemática Financeira;
- c) formalizar o conjunto dos números irracionais e relacioná-lo com outros subconjuntos dos números reais.

HABILIDADES DA BNCC:

- a) (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade);
- b) (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica;
- c) (EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Inicie a aula com uma revisão dos conceitos de números racionais, reforçando que podem ser expressos como frações e possuem representação decimal finita ou periódica. Retome a demonstração feita na aula anterior sobre a irracionalidade de $\sqrt{2}$, destacando que não pode ser escrito como fração. Utilize esse ponto como introdução à necessidade de um novo conjunto numérico: os números irracionais.

Na etapa seguinte, formalize o conjunto dos números irracionais, explicando que possuem representação decimal infinita e não periódica. Apresente exemplos conhecidos, como π , e e alguns radicais, destacando suas principais características. Mostre como os irracionais se

distribuem na reta numérica, intercalados com os racionais e discuta aplicações práticas, como o uso de π na Geometria e de e em Matemática Financeira.

Organize os estudantes em duplas para realizar uma atividade prática em que os estudantes resolvem exercícios de identificação e aplicação de números irracionais. Finalize com uma reflexão coletiva sobre a importância dos números irracionais na Matemática e nas Ciências, e proponha uma tarefa de pesquisa para explorar suas aplicações em outras áreas.

3. Responda às perguntas a seguir:

a) A diagonal de um quadrado de lado 1 é igual a $\sqrt{2}$. Por que a medida da diagonal não é um número racional? _____

b) A fórmula para calcular o montante em juros contínuos é $M = p \times e^{rt}$, sendo:

p o valor inicial,

r a taxa de juros anual,

t o tempo (em anos) e

e aproximadamente 2,718.

Um investimento inicial de R\$1.000,00 cresce a uma taxa de juros contínuos de 5% ao ano por 2 anos. Calcular o valor final (M) do investimento ao final do prazo.

Dica: Use a fórmula $M = 1000 \times e^{0,05 \times 2}$.

Usar $e^{0,1} \approx 1,105$.

AULA 6

TEMAS E CONTEÚDOS:

- a) exploração do conjunto dos números reais.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

- a) utilizar o jogo como ambiente de aprendizagem para explorar o conceito de números reais e suas aplicações;
- b) resolver desafios matemáticos contextualizados no enredo do jogo, envolvendo números racionais e irracionais;
- c) desenvolver autonomia, pensamento crítico e estratégias próprias para a resolução de problemas;
- d) trabalhar a cooperação e o respeito às regras, promovendo engajamento e protagonismo dos estudantes.

HABILIDADES DA BNCC:

- a) (EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais;
- b) (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica;
- c) (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários;
- d) (EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações;
- e) (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Inicialmente, organize os estudantes na sala de informática e oriente-os a registrar em seus cadernos cálculos e estratégias desenvolvidos para solucionar os desafios do jogo. Utilize os primeiros minutos para garantir o acesso de todos ao jogo e apresentar, de forma breve e clara, as orientações iniciais, reforçando regras e objetivos gerais. Essa etapa deve ser objetiva, para que a maior parte do tempo seja dedicada à exploração dos desafios no ambiente virtual.

Em seguida, conduza a interação dos estudantes com o jogo, orientando-os a explorar os cenários e resolver os problemas matemáticos integrados à narrativa. Os desafios envolvem números racionais e irracionais, estimulando raciocínio lógico, estimativas e classificações numéricas. Atue como mediador, observando as estratégias utilizadas, identificando dificuldades, esclarecendo dúvidas pontuais e incentivando a cooperação entre os participantes. Realize intervenções apenas quando necessário, de modo a preservar a autonomia dos estudantes.

Nos minutos finais, promova um momento de socialização. Convide alguns estudantes a apresentarem as estratégias utilizadas, discutirem soluções para desafios específicos e refletirem sobre as escolhas feitas durante o jogo. Encaminhe a conversa para a valorização de diferentes formas de raciocínio e para a retomada dos conceitos matemáticos explorados, preparando o grupo para as próximas etapas da sequência didática.

OBSERVAÇÃO: Esta aula é dedicada exclusivamente à exploração do jogo, não havendo atividades escritas a serem respondidas pelos estudantes.

AULA 7

TEMAS E CONTEÚDOS:

- a) resolução de problemas com números reais, subconjuntos e grandezas incomensuráveis.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

- a) identificar e classificar números reais em seus subconjuntos: naturais, inteiros, racionais e irracionais;
- b) resolver problemas relacionados a números reais no contexto de grandezas incomensuráveis, como π e $\sqrt{2}$;
- c) relacionar a aplicação dos números reais a situações práticas, promovendo o pensamento crítico e a resolução de problemas.

HABILIDADES DA BNCC:

- a) (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica;
- b) (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários;
- c) (EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Conduza a aula como um momento de resolução de problemas envolvendo números reais, com o objetivo de desenvolver o raciocínio lógico dos estudantes. Inicie retomando os conceitos de números racionais e irracionais, destacando que, com a formalização do conjunto dos números reais, é possível compreender grandezas matemáticas complexas, como $\sqrt{2}$ e π .

Em seguida, organize os estudantes em duplas para a resolução da atividade impressa, composta por problemas envolvendo números reais. Essa etapa permite que os estudantes apliquem os conceitos revisados. Oriente-os a trabalhar de forma colaborativa, discutindo estratégias de resolução e confrontando diferentes formas de raciocínio.

Conclua a aula com um momento de socialização, em que os estudantes compartilhem suas interpretações e estratégias, promovendo a troca de ideias e o esclarecimento de dúvidas. Destaque a importância do conjunto dos números reais para a compreensão do mundo físico e abstrato, ressaltando sua aplicação prática em áreas como Geometria e Física.

Atividade - Aula 7

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - NÚMEROS REAIS

| |
|---|
| Escola: _____ |
| Estudantes: _____ |
| _____ |
| Data: ____/____/____ Turma:_____ Componente Curricular: <u>Matemática</u> |

Use as fórmulas abaixo para responder às perguntas a seguir:

Diagonal de um quadrado: $d = l \times \sqrt{2}$, sendo l o lado do quadrado.

Comprimento da circunferência: $C = 2\pi r$, onde r é o raio do círculo.

1. Um quadrado tem lados de 2 metros, e um círculo tem raio de 1 metro.

a) Calcule o comprimento da diagonal do quadrado.

b) Calcular o comprimento da circunferência do círculo ($\pi \approx 3,14$).

c) Compare os dois comprimentos e determine qual é maior.

2. Um quadrado tem lado de $\sqrt{3}$ metros, e um círculo tem raio de $\sqrt{2}$ metros.

a) Calcule o comprimento da diagonal do quadrado.

b) Calcular o comprimento da circunferência do círculo ($\pi \approx 3,14$).

c) Compare os dois valores e determine qual é maior, aproximando os resultados.

3. A área de um quadrado é calculada por $A = l^2$, onde l é a medida do lado do quadrado. Um arquiteto deseja calcular o lado de um quadrado com área de $50m^2$.

a) Determine o comprimento do lado do quadrado.

b) Se for uma área 4 vezes maior, qual será o novo lado do quadrado?

AULA 8

TEMAS E CONTEÚDOS:

- a) explorando os números reais e suas relações por meio da História da Matemática.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

- a) revisar e fixar os conceitos de números reais e seus subconjuntos;
- b) compreender e explorar propriedades desses conjuntos numéricos;
- c) estimular o raciocínio lógico e a resolução de problemas.

HABILIDADES DA BNCC:

- a) (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica;
- b) (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários;
- c) (EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR:

Leve os estudantes à sala de informática para a jogarem o RPG eletrônico, elaborado para aprofundar a compreensão do conjunto dos números reais.

Retome brevemente os conceitos de números racionais, irracionais e reais, destacando sua relevância para a resolução de problemas concretos e para a compreensão do mundo. Em seguida, oriente os estudantes a acessarem o jogo *O Guardião da História da Matemática: O Legado dos Números*. Cada estudante deve explorar os mundos que representam diferentes momentos históricos ligados ao desenvolvimento dos conjuntos numéricos estudados. Durante o jogo, enfrentarão desafios que envolvem cálculos com raízes, potências fracionárias, soma de frações, reconhecimento de subconjuntos e curiosidades matemáticas, avançando na narrativa ao solucionar as etapas propostas.

Ao longo da atividade, incentive os estudantes a registrar em seus cadernos cálculos e estratégias, incluindo aprendizagens, dificuldades e pontos positivos. Esse registro promove a

autoavaliação, o pensamento crítico e fornece informações para o professor avaliar como os conceitos foram compreendidos e aplicados. Finalize a aula promovendo uma breve socialização, reforçando a importância dos números reais e destacando a relação entre os desafios do RPG e a prática matemática.

Atividade - Aula 8
NÚMEROS REAIS - JOGO

| |
|---|
| Escola: _____ |
| Estudante: _____ |
| Data: ____/____/____ Turma:_____ Componente Curricular: <u>Matemática</u> |

Tarefa de registro durante o jogo: *O Guardião da História da Matemática: o Legado dos Números*

Instruções:

Durante sua experiência com o jogo, você deverá registrar nesta folha os desafios enfrentados e os aprendizados. Esse registro será essencial para que possamos analisar como o jogo influencia o aprendizado matemático e para melhorar ainda mais a ferramenta. Responda com sinceridade e detalhe suas respostas.

1 . Impressões sobre o Jogo

1.1. O que você mais gostou no jogo? Explique o motivo.

1.2. Houve alguma parte do jogo que você achou difícil ou confuso? Qual foi e por quê?

1.3. Que elementos do jogo ajudaram você a entender melhor os números reais (racionais, irracionais, ou suas aplicações)?

2. Aprendizado com o Jogo

2.1. Escolha um desafio matemático do jogo que você achou mais interessante e explique como resolveu.

2.2. Alguma curiosidade ou conceito matemático do jogo chamou sua atenção? Explique.

2.3. Você acha que o jogo contribuiu para sua compreensão dos números reais e suas operações? Justifique sua resposta.

3. Reflexão Crítica

3.1. O jogo está relacionado às aulas anteriores? Explique como as atividades do jogo reforçam os conteúdos que você já estudou.

3.2. O que você mudaria no jogo para torná-lo mais interessante ou mais fácil de aprender?

4. Conexões com o Mundo Real

4.1. Durante o jogo, você percebeu como os números reais podem ser usados para resolver problemas do dia a dia? Em caso afirmativo, dê um exemplo.

4.2. Na sua opinião, como essa forma de aprender (usando um jogo) é diferente de uma aula tradicional? Qual delas você acha mais eficaz? Justifique.

5. Avaliação Geral do Jogo

Dê uma nota de 1 a 5 para os seguintes aspectos do jogo (1 = ruim, 5 = excelente):

- História do jogo: _____
- Clareza dos desafios: _____
- Dificuldade dos problemas matemáticos: _____
- Relacionamento com o conteúdo estudado: _____
- Motivação para aprender: _____

6. Comentários Finais:

Gostaria de compartilhar mais alguma impressão ou ideia sobre o jogo e sua experiência de aprendizagem?

Agradecemos sua participação!

Suas respostas são muito importantes para nossa pesquisa.

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA COM SERES
HUMANOS-COEP****Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE**

Prezado(a) Senhor(a), você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa de forma totalmente voluntária da Universidade Federal de Lavras. Antes de concordar, é importante que você compreenda as informações e instruções contidas neste documento. Será garantida, durante todas as fases da pesquisa: sigilo; privacidade; e acesso aos resultados.

I - Título do trabalho experimental: Um RPG eletrônico como recurso para o ensino de números reais no 9º ano do Ensino Fundamental em uma perspectiva histórica.

Pesquisador(es) responsável(is): Karina de Fátima Mesquita Silva.

Cargo/Função:: Aluna do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - UFLA.

Instituição/Departamento: Departamento de Matemática e Matemática Aplicada.

Telefone para contato: (35) 9 9928 9582.

Local da coleta de dados: Escola Estadual “Professor Fábregas”.

II - OBJETIVOS

O objetivo desta pesquisa é desenvolver e aplicar uma sequência didática que utiliza a História da Matemática e um jogo eletrônico do tipo RPG como ferramentas pedagógicas para facilitar o aprendizado dos números reais por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. A pesquisa busca promover uma compreensão mais clara e contextualizada dos conceitos matemáticos, explorando sua evolução histórica e incentivando o engajamento dos estudantes por meio de atividades lúdicas e interativas. Além disso, pretende-se avaliar como essas metodologias podem contribuir para o interesse e o desempenho dos estudantes na disciplina de Matemática.

III - JUSTIFICATIVA

A pesquisa justifica-se pela necessidade de explorar novas metodologias que contribuam para tornar o ensino de Matemática mais acessível, significativo e envolvente, especialmente em relação aos números reais, um conceito frequentemente considerado abstrato e desafiador pelos

estudantes. A combinação da História da Matemática com o uso de um jogo eletrônico do tipo RPG oferece uma abordagem pedagógica que integra o aprendizado matemático com elementos lúdicos e contextualizados, favorecendo a motivação e o interesse dos estudantes. Além disso, a proposta está alinhada às diretrizes educacionais atuais, que incentivam o uso de tecnologias e estratégias interativas para o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais. Por fim, o estudo busca não apenas melhorar o desempenho acadêmico dos estudantes, mas também contribuir para práticas pedagógicas adaptáveis no ensino de Matemática.

A coleta de dados se dará exclusivamente por meio de fotografias das atividades realizadas, sem a utilização de recursos audiovisuais. A confidencialidade dos participantes será rigorosamente preservada. Os dados obtidos serão armazenados sob sigilo pelo pesquisador por um período de cinco anos, em conformidade com as diretrizes da Universidade Federal de Lavras.

IV - PROCEDIMENTOS DO EXPERIMENTO

AMOSTRA

A pesquisa será realizada com os estudantes regularmente matriculados no 9º ano do Ensino Fundamental, turno vespertino, da Escola Estadual “Professor Fábregas” de Luminárias – MG.

EXAMES

As atividades da pesquisa serão realizadas durante as aulas de Matemática de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual “Professor Fábregas” em Luminárias – MG. A sequência didática será desenvolvida em três etapas principais. Na primeira etapa, os estudantes participarão de três aulas de revisão sobre números naturais, inteiros e racionais, reforçando conceitos já conhecidos. Na segunda etapa, os estudantes terão três aulas dedicadas à apresentação e aplicação dos conceitos de números irracionais e reais, com contextualizações históricas e exemplos práticos de seu uso no cotidiano. Nessas duas etapas, as atividades serão realizadas de forma individual ou em duplas, com momentos para socialização dos resultados, incentivando a troca de ideias e a colaboração entre os estudantes.

Na terceira etapa, os estudantes participarão de duas aulas destinadas exclusivamente ao uso do jogo eletrônico, que será realizado individualmente na sala de informática. A primeira dessas aulas será voltada para familiarizar os estudantes com as mecânicas do jogo, enquanto a última aula será a culminância da sequência didática, permitindo que os estudantes apliquem, de maneira autônoma e confiante, os conceitos aprendidos ao longo das etapas anteriores. Todas as atividades serão conduzidas em um ambiente acolhedor e colaborativo, sem comparações ou

avaliações formais, respeitando o ritmo de cada estudantes. Caso algum estudante decida não continuar com a pesquisa, essa decisão será respeitada sem qualquer prejuízo.

V - RISCOS ESPERADOS

Existe a possibilidade de que os estudantes vivenciem alguma situação de desconforto em consequência de dificuldades para solucionar os exercícios propostos ou não se identificar com as contribuições dos colegas durante atividades realizadas, o que pode gerar sensação de incômodo ou distanciamento. Ressalta-se que não há qualquer risco de natureza física ou intelectual associado à pesquisa. A pesquisa é avaliada como de risco MÍNIMO, tanto em termos imediatos quanto a longo prazo. Em nenhum momento serão realizadas comparações entre os estudantes com relação às suas respostas ou opiniões, garantindo a preservação do anonimato sempre que necessário. A professora pesquisadora estará presente em todas as atividades para orientar e mediar as interações, oferecendo suporte individual ou coletivo conforme a necessidade. O objetivo é garantir um ambiente seguro e acolhedor, onde cada estudante se sinta à vontade para expressar suas ideias e participar plenamente das atividades.

VI - BENEFÍCIOS

Os benefícios desta pesquisa incluem oferecer aos estudantes uma abordagem interativa e lúdica para aprender números reais, utilizando um jogo eletrônico que torna o aprendizado mais acessível e interessante. A combinação da História da Matemática com atividades práticas contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico, criatividade e resolução de problemas, além de promover maior interação entre os colegas em um ambiente colaborativo. Também espera-se que os estudantes desenvolvam competências digitais e sociais, enquanto o estudo proporciona à área educacional um material pedagógico replicável, que poderá beneficiar o ensino de Matemática em outros contextos escolares.

VII - CRITÉRIOS PARA SUSPENDER OU ENCERRAR A PESQUISA

A pesquisa poderá ser interrompida por decisão do pesquisador responsável, da supervisão pedagógica ou da direção da Escola Estadual “Professor Fábregas” de Luminárias - MG, ou após o término do desenvolvimento das atividades da sequência didática.

VIII - CONSENTIMENTO PÓS-INFORMAÇÃO

Eu _____, responsável pelo me-

nor _____, certifico que, tendo lido as informações acima e suficientemente esclarecido (a) de todos os itens, estou plenamente de acordo com a realização do experimento. Assim, eu autorizo a execução do trabalho de pesquisa exposto acima.

Luminárias, _____ de _____ de 20_____.

Nome (legível) / RG

Assinatura

ATENÇÃO! Por sua participação, você: não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira; será ressarcido de despesas que eventualmente ocorrerem; será indenizado em caso de eventuais danos decorrentes da pesquisa; e terá o direito de desistir a qualquer momento, retirando o consentimento sem nenhuma penalidade e sem perder quaisquer benefícios. Em caso de dúvida quanto aos seus direitos, escreva para o Comitê de Ética em Pesquisa em seres humanos da UFLA. Endereço – Campus Universitário da UFLA, Pró-reitoria de pesquisa, COEP, caixa postal 3037. Telefone: 3829-5182.

Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada com o pesquisador responsável e a outra será fornecida a você.

No caso de qualquer emergência entrar em contato com a pesquisadora responsável no Departamento de Matemática e Matemática Aplicada. Telefones de contato: (35) 9 9928 9582.

Campus Universitário, Caixa Postal 3037

37200-000 Lavras-MG – Brasil

E-mail: coep@nintec.ufla.br

Fone: 35 3829 5182

CNPJ: 22.078.679/0001-74

Sítio: http://www.prp.ufla.br/site/?page_id=440

ANEXO B – TERMO DE ASSENTIMENTO**UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA COM SERES
HUMANOS-COEP****TERMO DE ASSENTIMENTO****I - IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO**

Título do trabalho experimental: Um RPG eletrônico como recurso para o ensino de números reais no 9º ano do Ensino Fundamental em uma perspectiva histórica. Pesquisador(es) responsável(is): Karina de Fátima Mesquita Silva. Telefone para contato: (35) 9 9928 9582.

II - PROCEDIMENTOS DO EXPERIMENTO

O experimento será realizado durante as aulas de Matemática de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual “Professor Fábregas” em Luminárias – MG, seguindo uma sequência didática em três etapas principais. Na primeira etapa, os estudantes terão três aulas de revisão sobre números naturais, inteiros e racionais, consolidando conceitos já conhecidos. Na segunda etapa, participarão de três aulas sobre números irracionais e reais, contextualizando-os historicamente e destacando sua relevância no cotidiano. Essas duas etapas visam preparar os estudantes para a aplicação prática dos conceitos no jogo eletrônico desenvolvido para o experimento.

Na terceira etapa, os estudantes participarão de duas aulas dedicadas ao uso do jogo eletrônico, que explora os números reais de maneira lúdica. A primeira aula será voltada para familiarização com o jogo e suas mecânicas, enquanto a última será a culminância da sequência didática, permitindo que os estudantes apliquem, de forma autônoma e confiante, os conceitos aprendidos. Todas as atividades serão realizadas em um ambiente acolhedor e colaborativo, sem comparações ou avaliações formais, garantindo que os estudantes participem no seu ritmo e se sintam à vontade para explorar os conteúdos. Caso algum estudante opte por não continuar, sua decisão será respeitada, sem qualquer prejuízo.

III - PARTICIPAÇÃO VOLUNTÁRIA

A sua participação em qualquer tipo de pesquisa é voluntária. Em caso de dúvida quanto aos seus direitos, escreva ou ligue para o Comitê de Ética em Pesquisa em seres humanos da UFLA.

Endereço – Campus Universitário da UFLA, Pró-reitoria de pesquisa, COEP, caixa postal 3037.
Telefone: 3829-5182.

Eu _____, declaro que li e entendi todos os procedimentos que serão realizados neste trabalho. Declaro também que, fui informado que posso desistir a qualquer momento. Assim, após consentimento dos meus pais ou responsáveis, aceito participar como voluntário do projeto de pesquisa descrito acima.

Luminárias, _____, de _____ de 20_____.

NOME(legível) _____ RG _____

ASSINATURA _____

Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada com o pesquisador responsável e a outra será fornecida a você. *No caso de qualquer emergência entrar em contato com o pesquisador responsável no Departamento de Matemática e Matemática Aplicada. Telefones de contato: (35) 9 9928 9582.*

Campus Universitário, Caixa Postal 3037

37200-000 Lavras-MG – Brasil

E-mail: coep@nintec.ufla.br

Fone: 35 3829 5182

CNPJ: 22.078.679/0001-74

Sítio: http://www.prp.ufla.br/site/?page_id=440