



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

HUDSON GONÇALVES SANTOS

DIVINO OU CRIADO PELO HOMEM? NÚMEROS IRRACIONAIS NO ENSINO

VITÓRIA DA CONQUISTA - BAHIA

2025

HUDSON GONÇALVES SANTOS

DIVINO OU CRIADO PELO HOMEM? NÚMEROS IRRACIONAIS NO ENSINO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flaulles Boone Bergamaschi

VITÓRIA DA CONQUISTA - BAHIA

2025

Hudson Gonçalves Santos

Divino ou criado pelo homem? Números irracionais no ensino

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Flaulles Boone Bergamaschi – UESB

Prof. Dr. Gonçalo Renildo Lima Cerqueira – UESB

Prof^ª. Dr^ª Antônia Jocivânia Pinheiro – UFERSA

Vitória da Conquista – Ba

Aprovada em 27 de novembro de 2025



Documento assinado eletronicamente por **Antônia Jocivania Pinheiro, Usuário Externo**, em 27/11/2025, às 11:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do [Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014](#).



Documento assinado eletronicamente por **Flaulles Boone Bergamaschi, Professor Titular**, em 28/11/2025, às 12:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do [Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gonçalo Renildo Lima Cerqueira, Professor Ensino Superior**, em 29/11/2025, às 18:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 13º, Incisos I e II, do [Decreto nº 15.805, de 30 de dezembro de 2014](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://seibahia.ba.gov.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **00128287699** e o código CRC **50D7B838**.

S235d

Santos, Hudson Gonçalves.

Divino ou criado pelo homem? Números irracionais no ensino /
Hudson Gonçalves Santos, 2025.

62f. ; il. color.

Orientador (a): Dr. Flaulles Boone Bergamaschi.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia,
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória
da Conquista - BA, 2025.

Inclui referências F. 50 – 51

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Números irracionais. 3. História da
matemática. 4. Razão Áurea. 5. Número de Ouro. I. Bergamaschi, Flaulles Boone.
II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA. III. T.

CDD: 510.7

Dedico este trabalho a Deus e a minha família por toda força, tornando esse sonho possível.

AGRADECIMENTOS

Ao longo da produção desse trabalho de mestrado, muitos foram os desafios que surgiram, superados graças ao grande apoio de algumas pessoas e à confiança depositada em Deus. Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder sabedoria ao longo desses mais de dois anos de vida acadêmica, permitindo que eu cumprisse meus compromissos de forma honrada e responsável. Agradeço, carinhosamente, aos meus pais, Jairo de Souza Santos e Nair de Jesus Gonçalves, pelo amor incondicional, pela dedicação, pelos ensinamentos e pelo apoio em todos os momentos de minha vida.

Agradeço também à gestão da instituição e ao coordenador do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Fernando do Santos Silva, pelo apoio durante a caminhada para conclusão do curso. Agradeço profundamente ao meu orientador, Prof. Dr. Flaulles Boone Bergamaschi, por sua orientação atenciosa, paciência e incentivo, acreditando que esse trabalho era possível de ser realizado. Agradeço a todos os Professores que eu tive durante esse Mestrado, tendo todos contribuído para minha formação. Agradeço a todos os meus colegas de Mestrado, em especial a Bruno Lisboa, Daniel Costa, Elvis Gonçalves, e Vanderley Silva pela amizade e companheirismo, que foram de extrema importância para que conseguíssemos concluir o curso. Por fim, expresso meu apreço ao amigo e irmão Erivan Santos Marinho, pela parceria incondicional tanto dentro quanto fora da UESB. Por isso, expresso minha eterna gratidão pela conclusão deste trabalho de mestrado, que reflete uma jornada árdua de estudos e pesquisa.

RESUMO

Este trabalho investiga a importância da história da Matemática como recurso pedagógico para o ensino de números irracionais e da razão áurea no ensino fundamental e médio. A partir de uma abordagem histórico-conceitual, são explorados o surgimento dos números irracionais, a mística e a descoberta que envolve o número de ouro (ϕ) suas aplicações ao longo da história e sua relação com a sequência de Fibonacci. A pesquisa também inclui a análise de livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio com focos nesses conteúdos, tendo como resultado o desenvolvimento de uma sequência didática aplicável a turmas do 9º ano do ensino fundamental e 1º ano do Ensino Médio. Espera-se que os resultados apontem que o uso de contextos históricos pode tornar o ensino de Matemática mais significativo, despertando o interesse dos alunos por temas que tradicionalmente geram dificuldades de aprendizagem, além de sensibilizar autores de livros didáticos para inclusão mais consciente desse tema.

Palavras-chave: Números irracionais, Razão Áurea, Número de Ouro, História da Matemática.

ABSTRACT

This study investigates the importance of the history of Mathematics as a pedagogical resource for teaching irrational numbers and the golden ratio in middle and high school. Based on a historical-conceptual approach, it explores the emergence of irrational numbers, the mystique and discovery surrounding the golden number (ϕ), its applications throughout history, and its relationship with the Fibonacci sequence. The research also includes an analysis of 9th-grade middle-school and 1st-year high-school textbooks that address these topics, resulting in the development of a didactic sequence applicable to 9th-grade middle-school and 1st-year high-school classes. The expected results indicate that the use of historical contexts can make Mathematics teaching more meaningful, fostering students' interest in topics that traditionally present learning difficulties, as well as encouraging textbook authors to more consciously incorporate this theme.

Keywords: Irrational numbers; Golden ratio; Golden number; History of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Quadrado de lado “1” cuja diagonal é $\sqrt{2}$	15
Figura 2 – Segmento “a + b” dividido na razão extrema e média	16
Figura 3 – Retângulo áureo com proporção ϕ	17
Figura 4 – Um triângulo áureo onde a razão a/b é a razão áurea ϕ . $\theta = 36^\circ$	18
Figura 5 – Pentagrama.....	18
Figura 6 – Representação da reprodução dos coelhos.....	20
Figura 7 – Retângulo áureo formado pela sequência de Fibonacci	21
Figura 8 – Espiral áurea no retângulo áureo formado pela sequência de Fibonacci.....	21
Figura 9 – Representação da razão áurea na fachada do Partenon	22
Figura 10 – Representação das dimensões da grande Pirâmide	23
Figura 11 – As duas versões de A Virgem dos Rochedos, de Leonardo da Vinci	25
Figura 12 – Mona Lisa com retângulo da proporção áurea	25
Figura 13 – Espiral de flósculos em girassol.....	26
Figura 14 – Espirais na pinha.	27
Figura 15 – Voo do Falcão formando uma espiral áurea	28
Figura 16 – Concha do náutilo com espiral áurea sobreposta.	28
Figura 17 – Imagem da Via Láctea com destaque para sua forma em espiral.....	29
Figura 18 – Páginas 12 e 13 mostrando a linha do tempo e introdução ao número π	31
Figura 19 – Início da Unidade 1 com obras associadas à razão áurea	33
Figura 20 – Página com o texto Número de ouro: será que está presente?.....	34
Figura 21 – Problema inicial do capítulo para cálculo dos lados dos terrenos.....	36
Figura 22 – Página inicial do conteúdo de números irracionais	38
Figura 23 – Método da exaustão de Arquimedes.....	40
Figura 24 – Cálculo da diagonal do quadrado de lado 1 e exemplos de irracionais	41
Figura 25 – Cálculo da área de um quadrado de área 2 cm^2	45

Figura 26 – Cálculo da aproximação da 2 usando a calculadora.....	45
---	----

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	12
2.	DOS NÚMEROS IRRACIONAIS A RAZÃO ÁUREA.....	14
	A DESCOBERTA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS	15
	QUANDO O NÚMERO DE OURO APARECEU PELA PRIMEIRA VEZ	16
	NÚMERO ÁUREO E FIGURAS GEOMÉTRICAS	17
	RAZÃO ÁUREA E OS NÚMEROS DE FIBONACCI.....	19
	RAZÃO ÁUREA NA ARQUITETURA E CONSTRUÇÕES	22
	RAZÃO ÁUREA NA ARTE	24
	RAZÃO ÁUREA NA NATUREZA	26
3.	COMO ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS ABORDAM OS NÚMEROS IRRACIONAIS E A RAZÃO ÁUREA	30
4.	UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA: NÚMEROS IRRACIONAIS E A RAZÃO ÁUREA	44
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
6.	REFERÊNCIAS	50
7.	APÊNDICE	52
	APÊNDICE A – SLIDE UTILIZADO NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	52
	APÊNDICE B – ATIVIDADE IMPRESSA UTILIZADA NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	60
	APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL.....	62

INTRODUÇÃO

Na minha trajetória como professor de Matemática, observo que o ensino de Matemática, especialmente no Ensino Médio, muitas vezes é percebido pelos alunos como algo distante de suas realidades e desprovido de significado. Essa percepção acontece, na minha opinião, além de outros motivos, por conta da ausência de contextualização histórica e cultural dos conceitos trabalhados em sala de aula. Tal prática pedagógica distancia-se das diretrizes propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que enfatiza a importância de promover uma aprendizagem significativa por meio da valorização da construção histórica do conhecimento, do desenvolvimento do pensamento crítico e da articulação entre diferentes saberes (BRASIL, 2018).

Nesse contexto, a História da Matemática apresenta-se como uma estratégia didática importante, capaz de tornar os conteúdos mais acessíveis, interessantes e conectados à trajetória da humanidade. Ao resgatar os contextos culturais, filosóficos e científicos nos quais os conceitos matemáticos foram desenvolvidos, o professor pode promover reflexões mais amplas sobre a ciência e seu papel social. Essa escolha didática para o ensino de Matemática está em consonância com a Competência Específica de Matemática nº 1 da BNCC para o Ensino Fundamental, a qual estabelece que os estudantes devem:

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, **em diferentes momentos históricos**, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 267, grifo nosso).

Além da BNCC, outros documentos educacionais também destacam a importância pedagógica do ensino da História da Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), por exemplo, destacam a importância de uma abordagem matemática que vá além da mera mecanização, incentivando a compreensão conceitual e histórica dos temas abordados (BRASIL, 2000). O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), por sua vez, adota como critério de avaliação a capacidade dos materiais didáticos de promover

contextualizações históricas e culturais, contribuindo para uma formação mais crítica e significativa dos estudantes (BRASIL, 2021).

Com base nesse referencial teórico, este trabalho propõe investigar como a abordagem histórica pode contribuir para o ensino dos números irracionais e da razão áurea, conectando o surgimento desses conceitos a diferentes contextos socioculturais e científicos. Para isso, realiza-se uma revisão bibliográfica, uma análise de livros didáticos do Ensino Fundamental (9º ano) e Ensino Médio (1º ano), bem como, de forma complementar, o desenvolvimento de uma sequência didática aplicável tanto a turmas de 9º ano quanto do 1º ano do ensino médio. O objetivo é avaliar o impacto dessa abordagem na compreensão e no interesse dos alunos por conteúdos tradicionalmente considerados abstratos ou de difícil assimilação.

Muito além de sua representação numérica, a razão áurea, que é conhecida desde a Antiguidade como “número de ouro”, desperta fascínio por sua presença em diferentes manifestações da natureza, da arte e da arquitetura. Sua recorrência em obras como o Parthenon, em composições renascentistas e até mesmo na estrutura de organismos vivos, suscita um interesse que transcende os limites da Matemática. Assim, para compreender esse número tão emblemático, é necessário entender sua origem e seu lugar no conjunto dos números irracionais. É nesse contexto que se inicia o estudo a seguir.

DOS NÚMEROS IRRACIONAIS A RAZÃO ÁUREA

O objetivo deste capítulo é apresentar o contexto da descoberta do conjunto dos Números Irracionais do ponto de vista histórico, dando uma base para entendermos como o número de ouro (razão áurea), que é um número irracional, influenciou os estudos dos matemáticos ao longo da história nos mais diversos contextos. Antes disso, será apresentada uma breve explicação dos demais conjuntos numéricos que antecedem esse conceito.

Os conjuntos numéricos são classificados de acordo com suas propriedades. Segundo Dante (2013), essa organização é fundamental para compreender o desenvolvimento da Matemática e sua aplicação em diversas áreas do conhecimento. Nessa perspectiva, temos o primeiro conjunto, denominado conjunto dos números naturais, que é formado pelos números positivos e inteiros, utilizados, de forma geral, para a contagem de objetos. Esse conjunto é representado por \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

O conjunto dos números inteiros é formado pelos números naturais, seus simétricos negativos e, também, o zero. Segundo Villarreal (2006), os números inteiros permitem representar situações do cotidiano que envolvem valores negativos, como aquelas relacionadas a débitos e créditos. Eles são representados pela letra \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conforme Dante (2013), os números racionais são aqueles que podem ser expressos na forma de fração entre dois números inteiros, com denominador diferente de zero:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

São alguns exemplos de números racionais $\frac{1}{2}$, $\frac{-4}{3}$, $\frac{11}{4}$, $4 = \frac{4}{1}$, $-19 = \frac{-19}{1}$. Logo, está claro que, dentro do conjunto dos números racionais, estão contidos os números inteiros e, dentro destes os números naturais. Dizemos que o conjunto dos números naturais está contido

no conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Os números reais compreendem tanto os racionais quanto os irracionais, formando o conjunto numérico mais utilizado no cotidiano e no ensino de Matemática.

Os números irracionais são aqueles que não podem ser expressos na forma de fração. Sua representação decimal é infinita e não periódica. Maldonado e Carneiro (2015) destacam que exemplos clássicos desse conjunto incluem números como π , φ e $\sqrt{2}$, que aparecem frequentemente em fórmulas matemáticas, físicas e geométricas. Esse conjunto é representado por \mathbb{I} .

O conjunto dos números reais é representado pela letra \mathbb{R} e é formado pela união dos números racionais e irracionais, o que pode ser expresso por: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

A DESCOBERTA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

A Escola Pitagórica, fundada por Pitágoras de Samos no século VI a.C., desenvolveu a crença de que todos os fenômenos do mundo poderiam ser expressos por meio de números racionais. Os seguidores da Escola Itálica defendiam a ideia de que “tudo é número”. Essa crença dos pitagóricos foi abalada pela descoberta de um conjunto de números que não podem ser escritos na forma de fração: o conjunto dos números irracionais. Essa descoberta foi de grande importância para o desenvolvimento da Matemática, já que mostrou que os números conhecidos até então eram insuficientes para representar certas medidas.

O primeiro exemplo de número irracional foi $\sqrt{2}$, obtido a partir do cálculo da diagonal de um quadrado de lado 1. Ao calcular essa diagonal utilizando o Teorema de Pitágoras, tem-se: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ como mostra a figura a seguir.

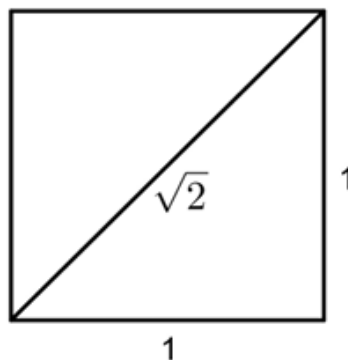


Figura 1 – Quadrado de lado “1” cuja diagonal é $\sqrt{2}$
Fonte: do autor

Atribui-se a descoberta dos números irracionais a Hipaso de Metaponto, um dos membros da Escola Pitagórica. Reza a tradição que, ao revelar essa descoberta (possivelmente em segredo), ele teria sido punido ou até banido pelos pitagóricos, pois a existência de números “incomensuráveis” colocava em risco a harmonia matemática idealizada por eles, ao evidenciar uma limitação do sistema numérico para representar determinadas medidas. (Eves, 2004).

Segundo D’Ambrosio (1996), essa descoberta não apenas abalou os fundamentos filosóficos dos pitagóricos, mas também abriu caminho para o desenvolvimento da Matemática como uma ciência mais independente das crenças filosófico-religiosas.

QUANDO O NÚMERO DE OURO APARECEU PELA PRIMEIRA VEZ

O número de ouro, também conhecido como razão áurea ou proporção áurea, é um número irracional que é representado pela letra grega φ (phi). É um número que encantou matemáticos e artistas ao longo dos anos, por conta de sua presença na natureza e nos objetos está associada a ideia de beleza.

A origem do número de ouro remonta à Antiguidade. De acordo com Livio (2002), o primeiro registro conhecido dessa razão aparece no tratado *Os Elementos*, de Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C. No Livro VI, Proposição 30, Euclides descreve a “divisão de um segmento em média e extrema razão”, como mostra a Figura 2, que é precisamente a definição da proporção áurea, embora ele não tenha usado esse nome nem identificado o número como irracional.

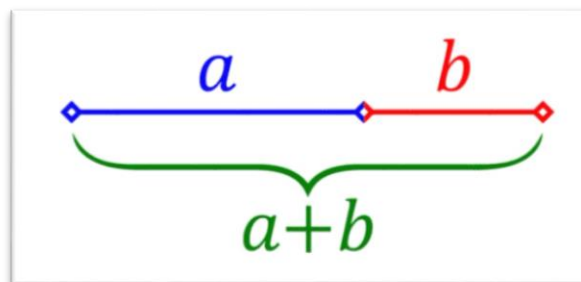


Figura 2 – Segmento “a + b” dividido na razão extrema e média
Fonte: <https://www.geogebra.org/m/AKr2xtAu>

Matematicamente de maneira moderna, essa definição da razão áurea pode ser expressa por:

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$$

A designação da letra ϕ para representar essa razão só surgiu muito mais tarde, no século XX, proposta pelo matemático Mark Barr, em homenagem ao escultor grego Fídias, que supostamente teria utilizado a proporção áurea em suas obras (Boyer, 2008).

Segundo D'Ambrosio (1996, p. 9), o fascínio humano pela proporção áurea decorre de sua presença simultânea em fenômenos naturais e criações humanas, tornando-a um ponto de interseção entre ciência e arte.

Dessa forma, perceber-se que a razão áurea transcende o campo estritamente matemático, assumindo um papel de conexão entre diferentes áreas do conhecimento. Sua presença tanto em produções humanas quanto em elementos da natureza reforça a ideia de que a Matemática não se limita a números e fórmulas abstratas, mas se manifesta de maneira concreta no mundo que nos cerca. Essa característica contribui para que o número de ouro continue despertando interesse e curiosidade, tornando-se um tema relevante tanto para o ensino quanto para a reflexão sobre a beleza e a harmonia presentes na realidade.

NÚMERO ÁUREO E FIGURAS GEOMÉTRICAS

A razão áurea também pode ser vista e aplicada na Geometria, indo além de sua definição como número irracional e manifestando-se em formas presentes no nosso dia a dia.

Um exemplo bastante famoso da aplicação do número de ouro na Geometria ocorre na proporção entre os lados de um retângulo, conhecido como retângulo áureo. Quando a razão entre a medida dos lados de um retângulo é um valor próximo ao valor de ϕ , dizemos que esse retângulo é um retângulo áureo como mostra a Figura 3. Essa proporção pode ser vista em obras de artes e em projetos famosos de arquitetura. Segundo Livio (2002), o retângulo áureo já era utilizado na arquitetura grega antiga, e suas propriedades foram posteriormente associadas ao conceito de beleza e harmonia na arte e design.

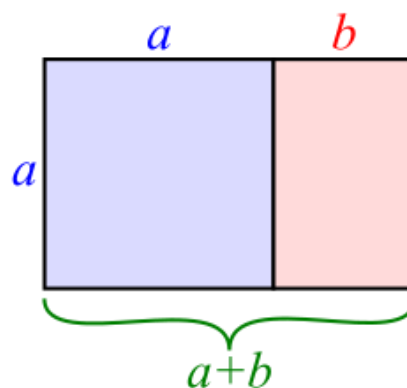


Figura 3 – Retângulo áureo com proporção ϕ
 Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_rectangle

Podemos observar também a presença do número de ouro no triângulo isósceles em que a razão entre um dos lados iguais e a base é igual a ϕ como mostra a Figura 4. Esse triângulo é conhecido como triângulo áureo ou triângulo de ouro, e pode ser identificado em pentágonos regulares, conseqüentemente, em estrelas de cinco pontas como mostra a Figura 5. De acordo com Boyer (2008), foi justamente ao estudar o pentagrama que os pitagóricos tiveram contato com a razão áurea, embora sem o formalismo algébrico moderno. A simetria e as divisões internas do pentágono ilustram de forma natural a proporção ϕ .

Essa relação evidencia como a razão áurea está intrinsecamente ligada às formas geométricas, conferindo ao pentágono e ao triângulo áureo um caráter de perfeição e harmonia. Não por acaso, essas figuras passaram a adquirir também significados simbólicos em diferentes culturas ao longo da história.

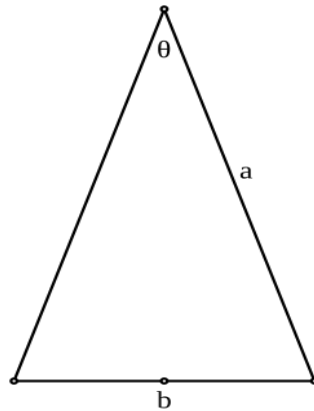


Figura 4 – Um triângulo áureo onde a razão a/b é a razão áurea ϕ . $\theta = 36^\circ$.
 Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_triangle_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_triangle_(mathematics))

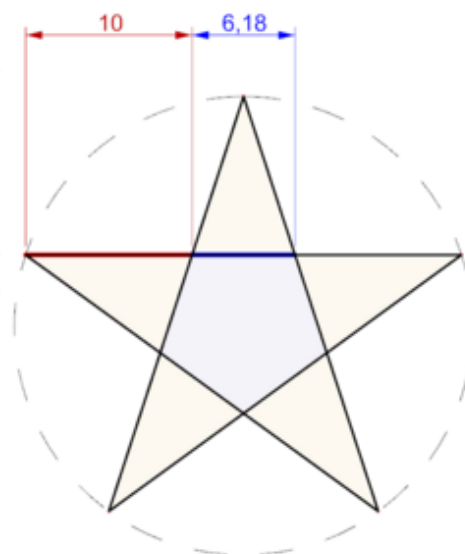


Figura 5 – Pentagrama
 Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea

RAZÃO ÁUREA E OS NÚMEROS DE FIBONACCI

Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, foi um matemático do século XIII cuja obra teve papel fundamental na introdução do sistema de numeração indo-arábico na Europa. Nascido por volta de 1170, ele era chamado de Fibonacci, uma forma reduzida da expressão latina *filius Bonacci*, que significa “filho de Bonacci”. Em seu livro *Liber Abaci*, publicado em 1202, ele apresentou as vantagens do novo sistema numérico em comparação com o sistema romano, dedicando vários capítulos a explicar como usá-lo em cálculos práticos e comerciais. Esse trabalho teve grande impacto na matemática europeia da época (Livio, 2006), ao apresentar um novo sistema, o qual usamos até hoje, composto pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, além do 0. A forte influência dos estudos de Fibonacci mostra o porquê ele é considerado um dos grandes Matemáticos de sua época.

A relação de Fibonacci com o número de ouro tem origem em um problema apresentado no *Liber Abaci*, que trata da reprodução de coelhos, e é possivelmente uma adaptação de um problema do Papiro de Rhind. O enunciado diz o seguinte: dado um par de coelhos colocado em um espaço fechado, e considerando que a cada mês, cada par fértil gera um novo par, sendo que os coelhos se tornam férteis a partir do segundo mês de vida, quantos pares existirão ao final de um ano? A solução desse problema originou a sequência que hoje leva seu nome, a sequência de Fibonacci, e que revela uma surpreendente ligação com a razão áurea, um número que aparece em diversos padrões da natureza, da arte e da arquitetura (LIVIO, 2006).

A solução desse problema pode ser observada na Figura 6 e ocorre da seguinte forma: no primeiro mês, há apenas 1 par de coelhos; no segundo mês, ainda há somente 1 par, pois eles ainda não se reproduzem; no terceiro mês, o par original se torna fértil e gera um novo par, totalizando 2 pares; no quarto mês, o par original gera mais um par, e o par nascido no terceiro mês ainda não é fértil, então agora temos 3 pares; no quinto mês, o par original novamente gera 1 novo par, o par que nasceu no terceiro mês agora se torna fértil e também gera 1 novo par. O par que nasceu no quarto mês ainda não se reproduz. Assim, neste mês, temos 5 pares de coelhos. Seguindo esse mesmo raciocínio a sequência que mostra a quantidade de pares de coelhos a cada mês é dada da seguinte forma:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

Podemos observar que, a partir do terceiro termo da sequência, todos os termos são obtidos da soma dos dois termos anteriores. A sequência numérica que seguem esse padrão é conhecida como sequência de Fibonacci.

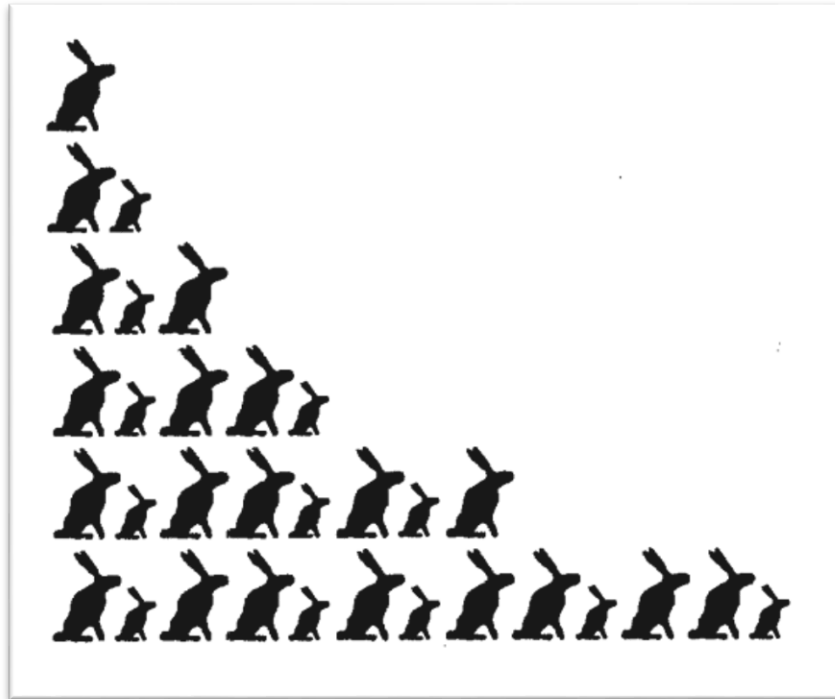


Figura 6 – Representação da reprodução dos coelhos
Fonte: LIVIO, 2006, p. 116.

A sequência de Fibonacci possui uma relação direta com a razão áurea. Essa relação fica evidente quando calculamos a razão entre um termo da sequência e seu antecessor. À medida que os termos aumentam, o resultado dessa divisão se aproxima cada vez mais da razão áurea.

$$5 \div 3 \approx 1,666$$

$$8 \div 5 = 1,6$$

$$13 \div 8 = 1,625$$

$$21 \div 13 \approx 1,615$$

$$34 \div 21 \approx 1,619$$

$$5 \div 34 \approx 1,6176$$

À medida que avançamos na sequência de Fibonacci, a razão entre dois termos consecutivos se aproxima cada vez mais da razão áurea ($\varphi \approx 1,618\dots$).

A partir da composição de vários quadrados em que as medidas de seus lados correspondem aos números da sequência de Fibonacci, é possível observar uma sucessão de retângulos áureos como mostra a Figura 7 e, conseqüentemente, a formação da chamada espiral áurea. A espiral áurea é uma curva logarítmica que pode ser desenhada dentro da sequência de

retângulos áureos como mostra a Figura 8. Cada quarto de circunferência se inscreve em um quadrado que, ao ser retirado do retângulo, deixa um novo retângulo com as mesmas proporções.

Livio (2006) menciona que essa forma espiral aparece não só em composições geométricas, mas também em padrões naturais, como conchas, galáxias e furacões, sendo um exemplo do encontro entre Matemática, natureza e estética.

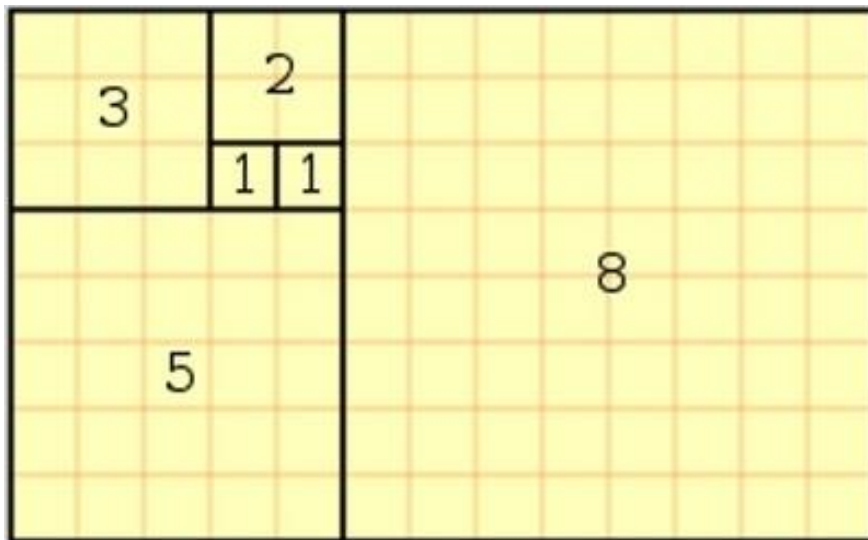


Figura 7 – Retângulo áureo formado pela sequência de Fibonacci

Fonte: www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=681&evento=4.

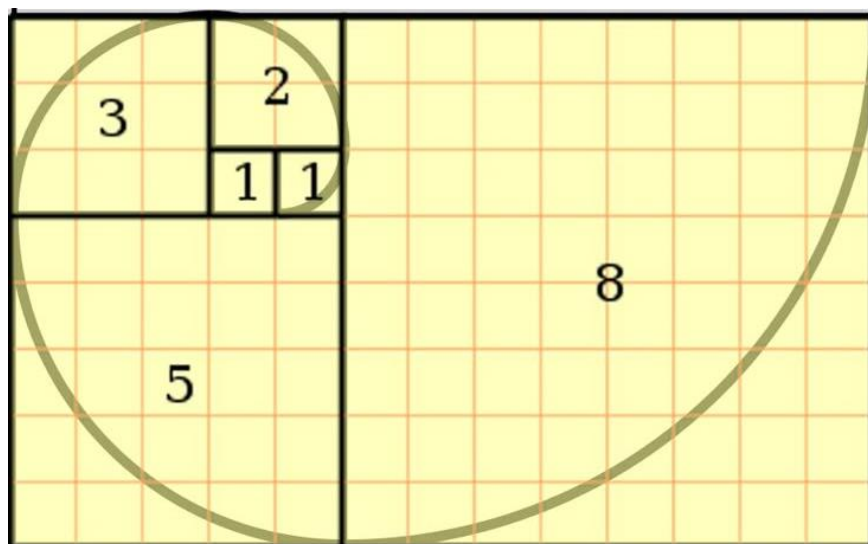


Figura 8 – Espiral áurea no retângulo áureo formado pela sequência de Fibonacci

Fonte: www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/galeria/detalhe.php?foto=681&evento=4.

Diversas obras de arte, construções arquitetônicas, elementos presentes na natureza, entre outros exemplos, apresentam formas que agradam ao olhar humano mais do que outras.

Essa sensação de harmonia visual muitas vezes, está relacionada ao uso de proporções específicas, entre as quais a razão áurea se destaca. Desde a Antiguidade, especialmente entre os gregos, essa proporção foi aplicada com a intenção de expressar beleza, equilíbrio e perfeição. A seguir, serão apresentados exemplos do uso da razão áurea em diferentes contextos, destacando a busca histórica e estética pelo ideal de beleza. Surge, então, a pergunta: seria a razão áurea uma representação Matemática da beleza?

RAZÃO ÁUREA NA ARQUITETURA E NAS CONSTRUÇÕES

Desde as civilizações antigas, há registros da presença da razão áurea em diversas construções arquitetônicas. Um dos exemplos mais significativos é o Partenon, localizado em Atenas, na Grécia, construído entre 447 e 433 a.C. De acordo com Huntley (1985), quando o frontão triangular do edifício ainda estava preservado, suas proporções podiam ser ajustadas com precisão a um retângulo áureo, evidenciando o valor estético e simbólico dessa razão em construções clássicas.

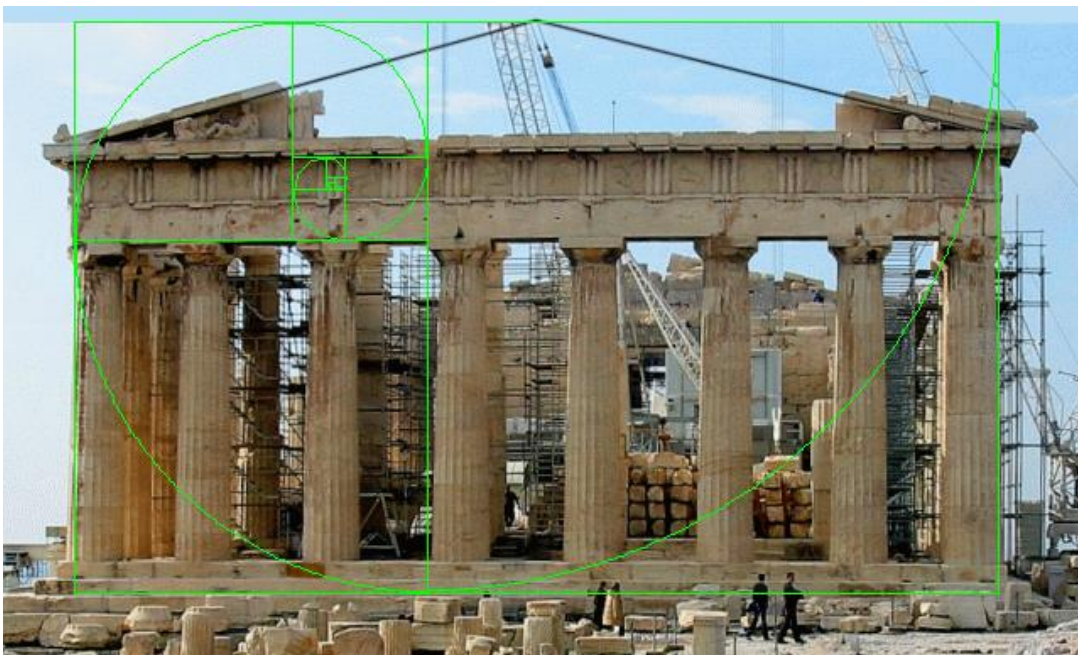


Figura 9 – Representação da razão áurea na fachada do Partenon
Fonte: <https://www.goldennumber.net/parthenon-phi-golden-ratio/>

Outra relação emblemática entre o número de ouro e a arquitetura pode ser encontrada na construção das pirâmides do Antigo Egito. Estudos sobre a geometria da Grande Pirâmide de Quéops sugerem a possível presença da razão áurea em sua estrutura. Segundo Livio (2006), o escritor francês Midhat J. Gazalé relatou que o historiador Heródoto teria aprendido com sacerdotes egípcios que o quadrado da altura da pirâmide seria igual à área de uma de suas faces

triangulares. Com base nesse relato, Livio explica que, caso essa relação geométrica seja verdadeira, a razão entre a altura inclinada da face lateral (s) e a metade da base (a) da pirâmide corresponde exatamente ao valor da razão áurea. Utilizando dados reais da construção, como a média dos lados da base (aproximadamente 755,79 pés) e a altura da pirâmide (481,4 pés). Calcula-se que a altura inclinada da face triangular é de cerca de 612,01 pés. A razão s/a , como mostra no esquema da Figura 10, nesse caso, resulta em aproximadamente 1,62, valor extremamente próximo da razão áurea ($\varphi \approx 1,618\dots$), com uma diferença inferior a 0,1% (LIVIO, 2006, p. 72-73).

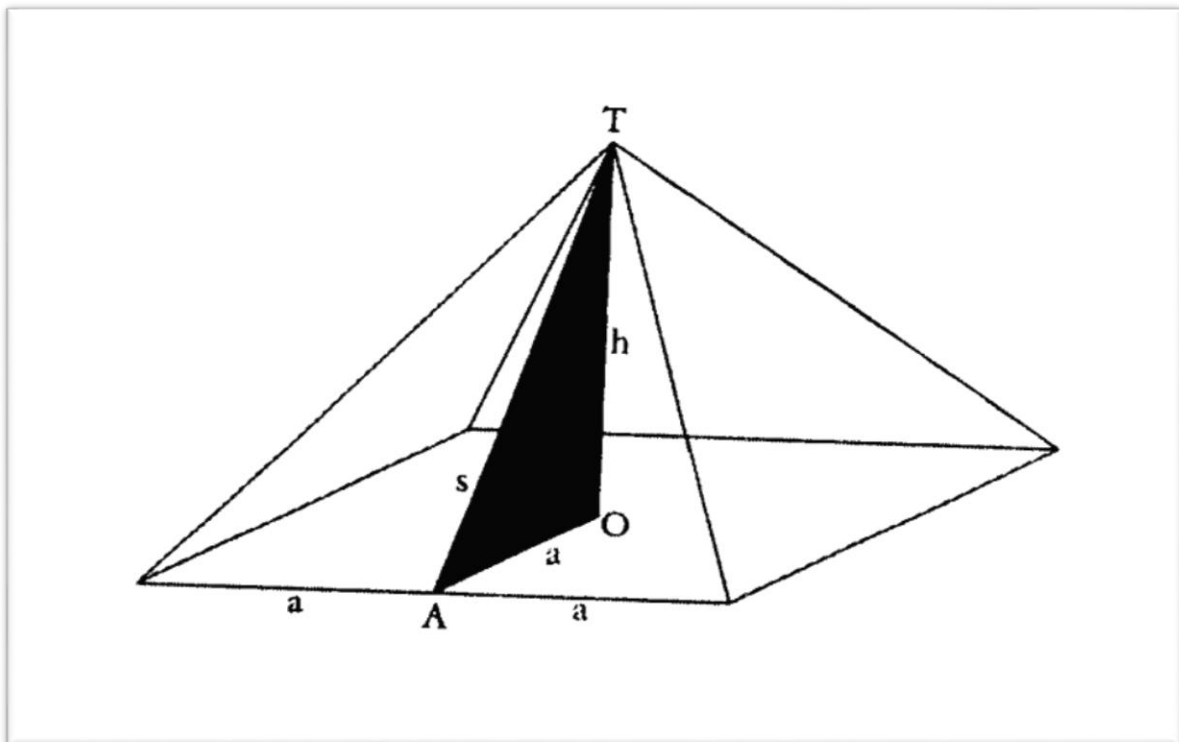


Figura 10 – Representação das dimensões da grande Pirâmide
Fonte: LIVIO, 2006, p. 72.

Durante o Renascimento, a razão áurea passou a ganhar destaque em outras áreas além da Matemática. A partir desse período, o número de ouro começou a ser explorado também nas explicações sobre fenômenos naturais e nas artes, representando a ideia de beleza, proporção e harmonia. Apesar sejam frequentes as alegações de que monumentos da Antiguidade, como a Grande Pirâmide e o Partenon, tenham sido projetados com base na razão áurea, análises mais rigorosas indicam que muitas dessas afirmações não podem ser confirmadas com precisão histórica ou científica (LIVIO, 2006, p. 183).

RAZÃO ÁUREA NA ARTE

Durante o Renascimento, o matemático Luca Pacioli escreveu a obra *Divina Proportione* (1509), na qual apresentou um estudo detalhado da razão áurea, referindo-se a ela como “a proporção divina”. Em seu tratado, Pacioli não apenas destacou as propriedades geométricas dessa proporção, como também estabeleceu relação com elementos religiosos, como a Santíssima Trindade e a ideia de perfeição associada a Deus. Seu objetivo era revelar aos artistas e estudiosos o “segredo” por trás das formas mais belas e harmônicas, considerando a razão áurea como uma chave para a beleza nas artes e na natureza. A obra contou ainda com a colaboração de Leonardo da Vinci, por quem Pacioli nutria grande admiração, que ilustrou os sólidos geométricos presentes no livro (LIVIO, 2006, p. 154-156).

Muitas obras, como as *Madonas* de Giotto, Cimabue e Duccio, são frequentemente associadas ao retângulo áureo, embora estudos técnicos revelem que suas proporções variam e, na maioria dos casos, não coincidem exatamente com a razão áurea. Segundo Charles Bouleau, em sua obra *A geometria secreta do pintor* (1963), o tratado *A Proporção Divina*, de Pacioli, não teria inaugurado uma nova era na arte, mas sim marcado o encerramento de uma longa tradição. Para ele, o livro teria apenas sistematizado um conhecimento transmitido oralmente por séculos, durante os quais a razão áurea já era considerada uma expressão da beleza ideal. Nessa perspectiva, é possível que artistas como Cimabue, Duccio e Giotto tenham utilizado esse padrão estético devido a essa influência, considerando também que as três *Madonas* foram pintadas mais de dois séculos antes da publicação da obra de Pacioli (LIVIO, 2006, p. 186).

A relação entre Leonardo e a razão áurea torna-se ainda mais interessante quando analisamos suas obras mais famosas. Diversas pinturas do mestre renascentista, como *A Virgem dos Rochedos* e *Mona Lisa*, são frequentemente analisadas sob a ótica da proporção áurea. Embora ainda haja debates sobre a intencionalidade de Leonardo ao aplicar essa razão em suas composições, muitos estudiosos apontam indícios de que ele usou o retângulo áureo para estruturar elementos visuais de suas pinturas, reforçando a harmonia e o equilíbrio das formas. Dessa forma, Leonardo se destaca como um dos primeiros artistas a aplicar, de maneira sistemática, conceitos matemáticos na construção da beleza visual.

A Virgem dos Rochedos possui duas versões: uma no Louvre, em Paris e outra na National Gallery, em Londres (Figura 11); em ambas, é possível visualizar uma sequência de retângulos áureos. Segundo Livio (2006, p. 187), a razão entre a altura e a largura da pintura

que se acredita ter sido executada primeiro é cerca de 1,64 e a da outra, de 1,58, ambas razoavelmente próximas de ϕ .



Figura 11 – As duas versões de A Virgem dos Rochedos, de Leonardo da Vinci
 Fonte: <https://seguidopassoshistoria.blogspot.com/> Imagem adaptada pelo autor.

Conforme mostra a Figura 12, o retângulo áureo pode ser encaixado no rosto da Mona Lisa de algumas formas, embora sejam necessárias algumas ressalvas quanto à exatidão com que esses retângulos de fato se encaixam na pintura.

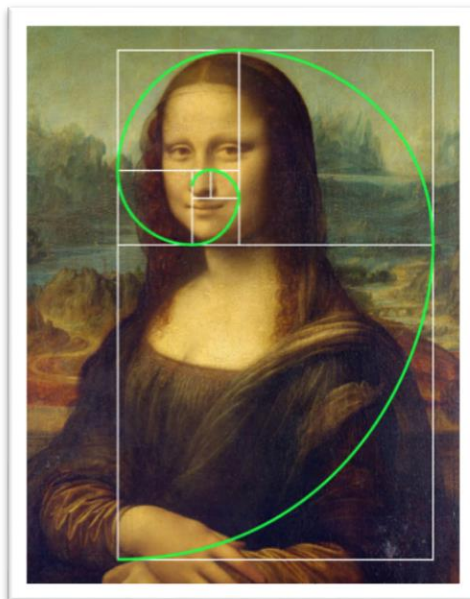


Figura 12 – Mona Lisa com retângulo da proporção áurea
 Fonte: <https://aledesigner.com.br/os-mitos-da-proporcao-aurea/>

Dessa forma, ainda que permaneçam controvérsias acerca da real intencionalidade de Leonardo ao utilizar a proporção áurea, não há como negar que sua obra suscita reflexões profundas sobre a relação entre arte e Matemática. A análise de composições como *A Virgem dos Rochedos* e a *Mona Lisa* evidencia como a presença da razão áurea contribui para reforçar a percepção de equilíbrio, simetria e harmonia estética, aspectos que tornam as criações de Leonardo da Vinci referências na história da arte.

RAZÃO ÁUREA NA NATUREZA

A razão áurea pode ser notada um pouco além da arquitetura e da arte, sendo associada a padrões recorrentes na natureza, despertando questionamentos sobre a existência de uma ordem matemática no mundo natural. Na natureza, percebemos a presença da razão áurea através da sequência de Fibonacci e principalmente por meio da espiral áurea.

Os girassóis chamam a atenção pelo curioso arranjo de suas pequenas flores (conhecidas como flósculos), que se distribuem formando espirais em duas direções: no sentido horário e no sentido anti-horário. Esse padrão permite a ocupação mais eficiente do espaço, permitindo que cada flósculo receba luz e cresça adequadamente. A quantidade de espirais varia de acordo com o tamanho da flor. Por exemplo, é comum encontrar girassóis com 34 espirais em um sentido e 55 no outro. Outros apresentam 55 e 89, 89 e 144, ou até 144 e 233 espirais. Esse mesmo fenômeno ocorre em uma espécie de pinha, como mostra a Figura 13, com 8 espirais no sentido anti-horário e 13 no sentido horário. Todos esses números fazem parte da sequência de Fibonacci, o que evidencia como a razão áurea aparece naturalmente em algumas plantas.



Figura 13 – Espiral de flósculos em girassol

Fonte: <https://netinhoprofessor.blogspot.com/2011/04/numero-de-ouro.html>

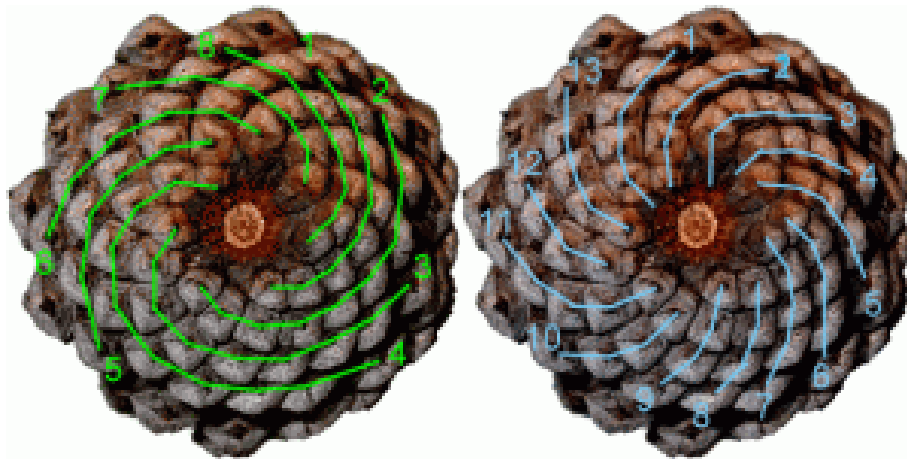


Figura 14 – Espirais na pinha.

Fonte: <https://www.goldennumber.net/spirals/>

Temos alguns exemplos na natureza de formas próximas à espiral áurea; mesmo que não matematicamente exata, a presença dessa forma é bastante interessante. O voo do *falcão-peregrino* como mostra a Figura 15, pode também ser estudado considerando a razão áurea, tendo em vista a espiral que representa seu voo. Essa forma de voar não é à toa, pois existe uma explicação prática para a ave voar dessa forma. O biólogo Vance A. Tucker, citado por Livio (2006), investigou por que os falcões-peregrinos, mesmo sendo capazes de atingir velocidades impressionantes em voo, preferem seguir trajetórias espiraladas em vez de uma linha reta ao atacar suas presas. A explicação está relacionada à posição lateral dos olhos dessas aves, que exige que elas inclinem a cabeça para manter o foco visual, o que reduz sua velocidade. Em testes realizados em túnel de vento, Tucker observou que, ao seguir uma espiral logarítmica, os falcões conseguem manter a cabeça alinhada e o alvo no campo de visão. Essa trajetória explora a propriedade equiangular da espiral, permitindo que maximizem sua velocidade sem perder a presa de vista (LIVIO, 2006, p. 141).

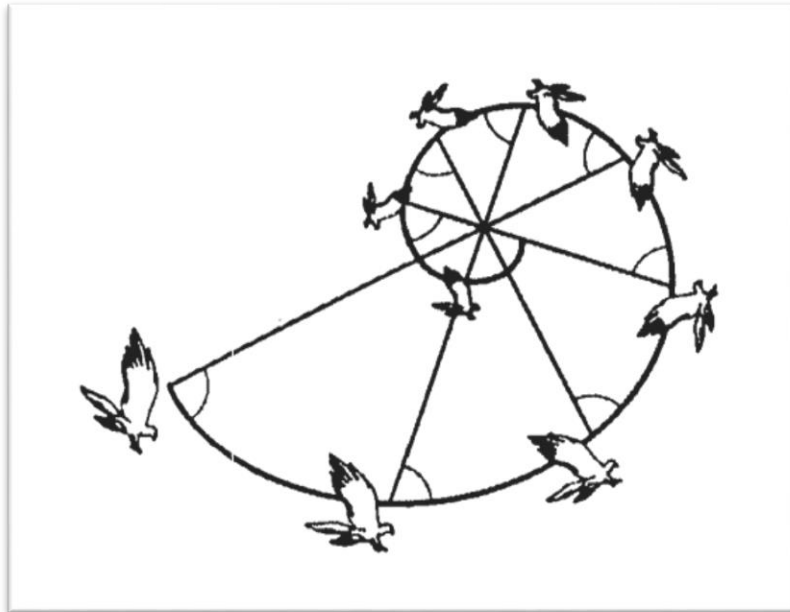


Figura 15 – Voo do Falcão formando uma espiral áurea
 Fonte: LIVIO, 2006, p. 141.

Outro exemplo em que vemos a espiral na natureza é observado quando analisamos a concha de moluscos, como o Náutilo na Figura 16. De acordo com o crescimento do animal, a concha cresce de forma proporcional, mantendo o mesmo formato, que lembra a espiral áurea.

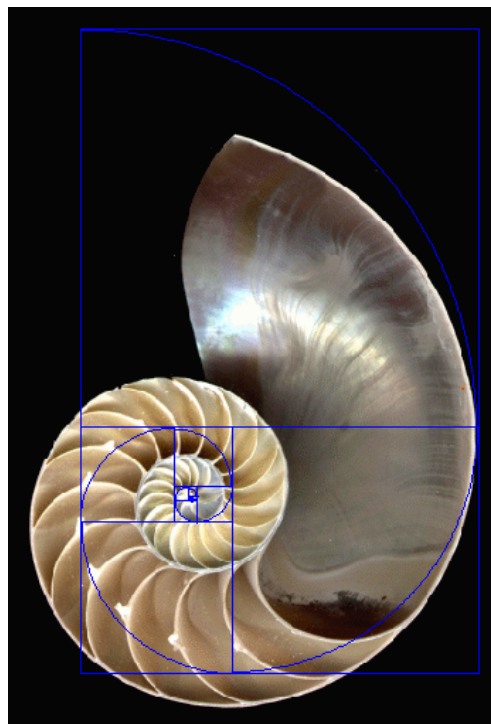


Figura 16 – Concha do náutilo com espiral áurea sobreposta.
 Fonte: <https://www.goldennumber.net/spirals/>

Embora também não haja uma correspondência exata, ainda assim podemos apreciar a semelhança entre a espiral áurea e o formato de galáxias espirais. Isso nos mostra como a Matemática pode auxiliar a descrever as formas da natureza que são visualmente mais agradáveis e harmônicas. Mario Livio (2006, p. 141-142) observa que a mesma forma espiral presente em seres microscópicos, como as foraminíferas, e em plantas como o girassol, também se manifesta no voo de aves e na formação das galáxias espirais – sistemas de estrelas que, segundo ele, já haviam sido previstos teoricamente por Immanuel Kant, muito antes de serem confirmados por observações astronômicas.



Figura 17 – Imagem da Via Láctea com destaque para sua forma em espiral.
Fonte: <https://olhardigital.com.br/2021/09/13/ciencia-e-espaco/via-lactea-espiral/>

Assim, ao observarmos desde o arranjo das sementes de um girassol até a grandiosidade das galáxias, percebemos que a razão áurea, os números e as formas associadas a ela, vão além da arte e da arquitetura, podendo ser associadas ao próprio funcionamento da natureza. Mesmo quando não há uma correspondência matemática perfeita, a recorrência dessas formas sugere uma busca constante da natureza por equilíbrio, harmonia e eficiência. Essa presença simbólica da razão áurea reforça a ideia de que a Matemática não apenas descreve fenômenos, mas também nos ajuda a compreender a beleza e a ordem do mundo que nos cerca.

COMO ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS ABORDAM OS NÚMEROS IRRACIONAIS E A RAZÃO ÁUREA

Este capítulo tem como objetivo analisar a maneira como os números irracionais e a razão áurea são abordados em diferentes livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio. A escolha dos materiais leva em consideração sua adoção em escolas públicas e seu alinhamento com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A análise busca observar de que forma o livro trabalha os conceitos, incluindo a parte histórica e a contextualização dos conteúdos.

Os livros selecionados para a análise são:

- A Conquista da Matemática – 9º ano do Ensino Fundamental, de José Ruy Giovanni Júnior, publicado pela FTD, aprovado no PNLD 2024.
- Matemática e Realidade – 9º ano do Ensino Fundamental, de Antônio Machado, Gelson Iezzi e Osvaldo Dolce, publicado pela Editora Saraiva (Grupo Somos), aprovado no PNLD 2024.
- Teláris Essencial – Matemática – 9º ano do Ensino Fundamental, de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, publicado pela Editora Ática (Grupo Somos), aprovado no PNLD 2024.
- Matemática – Ensino Médio: Conjuntos e Função Afim, de Joamir Souza, publicado pela FTD (Multiversos), aprovado no PNLD 2021.
- Matemática e Suas Tecnologias – Ensino Médio: Funções, de Eduardo Chavante e Diego Prestes, publicado pela Quadrante (SM Educação), aprovado no PNLD 2021.

A partir dessa seleção, buscou-se verificar se os livros contextualizam o surgimento dos números irracionais de forma histórica, se apresentam a razão áurea e outros números irracionais importantes. A análise também considera se há propostas de atividades que estimulem a reflexão histórica, filosófica, estética, e cultural em relação à Matemática.

1. *A Conquista da Matemática – 9º ano* (José Ruy Giovanni Júnior – FTD – PNLD 2024)

O livro apresenta uma abordagem inicial bastante interessante ao introduzir o Capítulo 1 sobre números reais, potências e radicais. Nas páginas 12 e 13, o conteúdo é iniciado com uma linha do tempo que destaca a forma como o número π foi estudado ao longo dos séculos por diversos matemáticos, desde a antiguidade até os dias atuais, como mostra a Figura 17. Esse recurso não apenas contextualiza historicamente o conceito, mas também oferece ao professor um rico material para promover discussões em sala de aula sobre a construção do conhecimento matemático ao longo da história. A partir dessa introdução, o livro propõe questionamentos que incentivam os alunos a refletirem sobre o que já sabem sobre o número π , suas propriedades e aplicações, estabelecendo assim uma ponte entre o conhecimento prévio e os novos conteúdos.

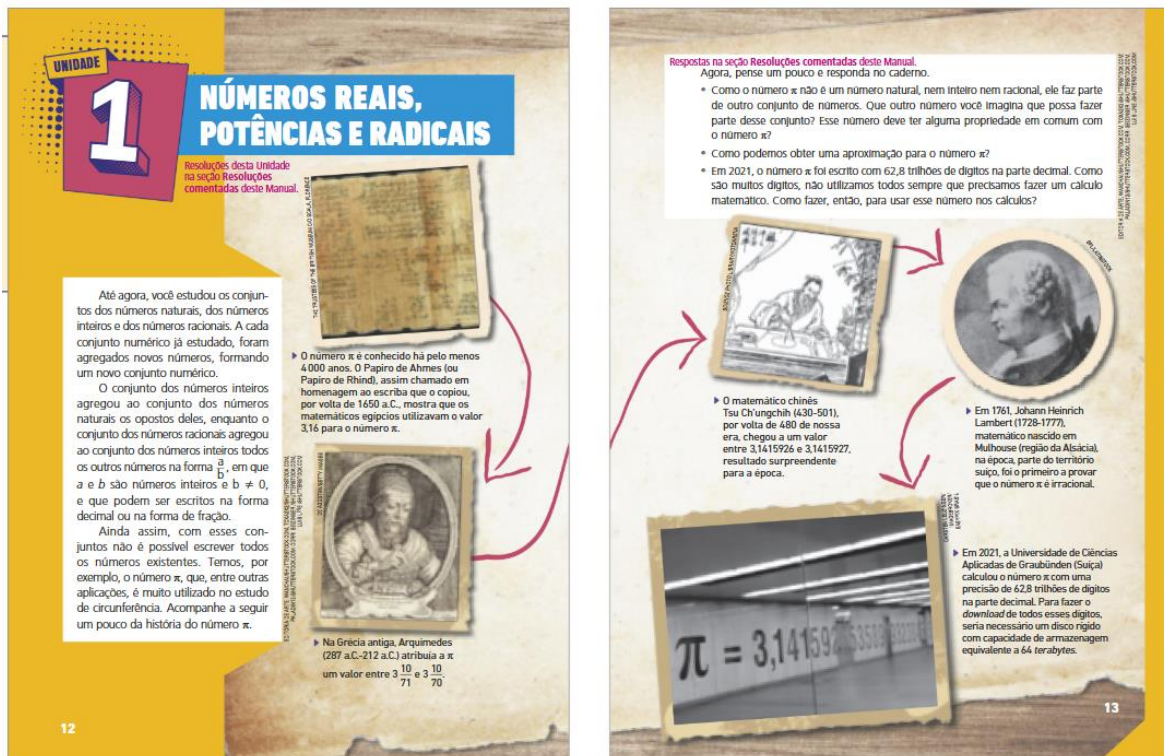


Figura 18 – Páginas 12 e 13 mostrando a linha do tempo e introdução ao número π .
Fonte: *A conquista da matemática: 9º ano – Ensino Fundamental*.

Ao apresentar a evolução histórica do conceito de π , o livro não apenas desperta o interesse dos alunos pelo conteúdo, mas também os convida a compreender a Matemática como parte de um processo coletivo e contínuo do desenvolvimento humano, rompendo com a visão de que os conceitos matemáticos surgiram de forma pronta em um momento único da história.

Tal abordagem favorece uma aprendizagem mais significativa e crítica, conforme orienta a própria BNCC.

É importante destacar que, nesse momento inicial, o livro ainda não apresenta uma explicitação formal sobre o conjunto dos números irracionais, mas traz um pequeno texto resumindo as características dos outros conjuntos numéricos que foram estudados nas séries anteriores, deixando claro que existem números como o π que não se encaixam em nenhum desses conjuntos. Dessa forma, essa construção gradual, partindo do que o aluno sabe, favorece uma compreensão mais orgânica do conteúdo, respeitando a progressão da aprendizagem.

O primeiro tópico do capítulo, intitulado *A geometria e a descoberta do número irracional*, propõe um problema exploratório em que o aluno deve descobrir a medida do lado “ x ” de um triângulo retângulo isósceles, cujos catetos medem uma unidade. A proposta é resolvida utilizando uma propriedade geométrica apresentada anteriormente, sem recorrer diretamente ao Teorema de Pitágoras que será estudado em outro capítulo do livro. O resultado da atividade leva à conclusão de que $x = \sqrt{2}$, introduzindo o aluno de forma natural à ideia de número irracional.

A partir dessa descoberta, o livro apresenta um método geométrico bastante visual para localizar $\sqrt{2}$ na reta real utilizando compasso, reforçando a ideia de que, embora se trate de um número diferente daqueles estudados até então (por ser uma raiz não exata com infinitas casas decimais), ele pertence ao conjunto dos números reais. Em seguida, o material propõe um método de aproximação numérica da raiz quadrada de 2, por meio de tentativas sucessivas, até a terceira casa decimal, abordagem que faz parte do segundo momento da sequência didática apresentada nesse trabalho. Dessa forma, o aluno é gradualmente levado a compreender o número irracional como aquele que possui representação decimal infinita e não periódica.

Apesar de não apresentar uma abordagem histórica mais detalhada sobre a descoberta dos números irracionais ou sobre a razão áurea, o livro propõe como atividade uma pesquisa sobre Pitágoras, os pitagóricos e o estudo dos números irracionais ao longo da história. Essa proposta inclui, inclusive, a citação de um trecho do livro de Howard Eves, o que pode servir como ponto de partida para o desenvolvimento de trabalhos investigativos pelos alunos, promovendo o debate em sala de aula e complementando os aspectos históricos que não são aprofundados diretamente no texto didático.

Por fim, o capítulo se encerra com uma seção específica dedicada ao número irracional π , definido como a razão entre a medida da circunferência e a de seu diâmetro. São apresentados

exemplos de sua aplicação e um trecho de artigo que discute a história e os usos do número, reforçando a relevância desse conceito na Matemática e sua conexão com diferentes momentos históricos.

2. *Matemática e Realidade – 9º ano* (Antônio Machado, Gelson Iezzi e Osvaldo Dolce – Editora Saraiva – PNLD 2024)

A Unidade 1 do livro, intitulada *Números reais*, está dividida em dois capítulos: o primeiro é *Números reais* e o segundo é *Potências e raízes*. Logo no início da unidade, como pode ser observado na Figura 18, o material apresenta imagens de obras artísticas e arquitetônicas: a *Mona Lisa*, a *Última Ceia*, a fachada da *Unité d’Habitation* e o *Partenon*, apontando que, segundo alguns estudiosos, essas criações podem conter proporções associadas à razão áurea. Essa contextualização pode servir de apoio inicial para o professor trabalhar com uma abordagem interdisciplinar, estimulando discussões em sala de aula que integram Arte, História e Matemática.

UNIDADE

Números e operações com raízes

Apresentamos 2 obras de arte:

As imagens não estão representadas em proporção.

A última ceia, de Salvador Dalí, 1955 (óleo sobre tela de 167 cm x 268 cm).

Mona Lisa, de Leonardo da Vinci, 1503 (óleo sobre madeira de diâmetro de 77 cm x 53 cm).

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- reconhecer que existem segmentos de reta cujas medidas não são expressas por número racional;
- reconhecer que um número irracional é um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica;
- resolver problemas com números reais;
- reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas.

Apresentamos 2 construções arquitetônicas:

Fachada da Unité d'habitation, do arquiteto e artista Le Corbusier, um renomado edifício modernista em Marselha (França). Foto de 2019.

Partenon, templo construído no século V a.C. em Atenas (Grécia). Foto de 2020.

Alguns estudiosos afirmam que cada obra mostrada nas fotografias mantém uma relação entre as medidas das dimensões, conhecida como **razão áurea**.

CAPÍTULOS

- Números reais
- Potências e raízes

Figura 19 – Início da Unidade 1 com obras associadas à razão áurea
Fonte: *Matemática e Realidade: 9º ano do Ensino Fundamental*.

Na página seguinte da obra, como é mostrado na Figura 19, é apresentado o texto *Número de ouro: será que está presente?* Que aprofunda o tema da razão áurea de forma clara e historicamente fundamentada. O texto apresenta sua origem na obra *Os Elementos*, de Euclides, e descreve como ela passou a ser conhecida como “proporção áurea” séculos depois. A demonstração matemática da razão áurea é apresentada com o auxílio de um retângulo que está dividido nessa proporção chegando ao valor $\varphi \approx 1,618$ que representa a razão procurada. O texto também discute se há realmente ou não a presença dessa proporção em obras da Antiguidade, como o Partenon, e nas pinturas de Leonardo da Vinci, mencionando o livro *De Divina Proportione*. Por outro lado, o material reconhece o uso intencional da razão áurea em obras modernas, como as de Salvador Dalí e Le Corbusier, com destaque para o sistema Modulor, aplicado na construção do edifício *Unité d’Habitation*, em Marselha.

Número de ouro: será que está presente?

A razão áurea (ou número de ouro) é uma descoberta matemática que foi motivada pela observação de proporções existentes em muitos elementos da natureza, inclusive no corpo humano. Além disso, ela pode estar presente em criações humanas, como obras de arte e arquitetônicas.

A primeira menção ao que entendemos por razão áurea foi feita por Euclides (325 a.C. - 265 a.C.). No livro VI da obra *Os Elementos*, essa razão foi definida como a divisão em média e extrema a razão. A denominação “razão áurea” veio séculos depois.

Podemos comprovar que existe razão áurea nas obras apresentadas nas fotografias anteriores? Primeiro, vamos aprender como a razão áurea pode ser obtida.

Considere o retângulo ADFE. Ele é formado pela junção de um quadrado (à esquerda) com um retângulo (à direita) e foi construído de tal modo que $\frac{AE}{AD} = \frac{EF}{EB}$. Partindo dessa proporção, temos: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ ou $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, que é chamada **proporção áurea**. Após alguns cálculos, encontramos um valor para a razão $\frac{a}{b}$ que podemos chamar de φ (letra grega fi) e, assim, reescrever a proporção como $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$. Multiplicando a equação por φ , chegamos à equação do 2º grau $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, que apresenta 2 soluções, sendo que a positiva é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, chamada de **razão áurea** ou **número de ouro**, aproximadamente igual a 1,618.

George Markowsky escreveu um artigo intitulado “Equivocos sobre a proporção áurea”, em que trata da presença ou não da razão áurea na natureza. Sobre construções antigas como o Partenon, na Grécia, Markowsky defende que não existem evidências de que os gregos tenham utilizado conscientemente o retângulo áureo no planejamento dessa e de outras edificações ou em obras de arte da Antiguidade.

Até hoje não se sabe se Da Vinci utilizou ou não a razão áurea quando criou suas pinturas. Como ele fez as ilustrações do livro *De Divina Proportione* (1509), em que o autor Luca Pacioli (1447-1517) apresenta um estudo sobre a proporção áurea, algumas pessoas deduziram que ele havia adotado essa proporção em suas pinturas, como a *Mona Lisa*, mas não se pode afirmar que isso tenha acontecido.

Já em obras modernas, como as do pintor Salvador Dalí (1904-1989) e as do arquiteto Le Corbusier (1887-1965), não há dúvidas de que houve o emprego da razão áurea. Por exemplo, na obra *A última ceia* ou *O sacramento da última ceia*, em uma tela com formato do retângulo de ouro, Dalí inseriu alguns elementos geométricos, como o dodecaedro regular, sólido geométrico cujas faces são limitadas por pentágonos e que está relacionado à proporção áurea.

O arquiteto Le Corbusier baseou-se na proporção áurea para desenvolver um sistema proporcional inteiro, a que deu o nome “Modulor”. Com o Modulor, seria possível fornecer um sistema padronizado que automaticamente conferiria proporções harmoniosas a tudo, desde maçanetas até arranha-céus. Le Corbusier afirma ter utilizado esse sistema na construção do prédio *Unité d’habitation*, na cidade de Marselha, na França.

Além disso, existem figuras e sólidos geométricos que apresentam a proporção áurea, e é sempre bom verificar se, de fato, há uma relação entre o que é apresentado e a realidade. Como vimos, nem todas as indicações de ocorrência da proporção áurea podem ser comprovadas.

Fontes dos dados: VENTURA, Felipe. Os mitos e verdades sobre a proporção áurea. *Gizmodo Brasil*, [s. l.], 23 abr. 2015. Disponível em: <https://gizmodo.uol.com.br/mitos-proporcao-aurae/>. LIVIO, Mario. The golden ratio and aesthetics. + plus magazine, [s. l.], 14 nov. 2022. Disponível em: <https://plus.maths.org/content/golden-ratio-and-aesthetics>; MARKOWSKY, George. Misconceptions about the Golden Ratio. *The College Mathematics Journal*, v. 23, n. 1, p. 2-19, 1992. Disponível em: <https://www.goldennumber.net/wp-content/uploads/George-Markowsky-Golden-Ratio-Misconceptions-MAA.pdf>. Acesso em: 8 abr. 2022.

Você já conhecia o conceito de razão áurea? Como se pode verificar se as obras de arte e construções têm essa relação?

Respostas pessoais.



Figura 20 – Página com o texto *Número de ouro: será que está presente?*
Fonte: *Matemática e Realidade: 9º ano do Ensino Fundamental*.

Esse texto é uma excelente oportunidade para o professor trabalhar não só os conceitos matemáticos, mas também a leitura crítica, a análise de fontes históricas e a construção de mapas mentais, linhas do tempo ou outras formas de organização do conhecimento. A seção ainda apresenta duas questões iniciais que provocam reflexão: *Você já conhecia o conceito de razão áurea?* e *Como se pode verificar se as obras de arte e construções têm essa relação?*.

Na sequência, inicia-se o capítulo *Números reais*, que apresenta exemplos de todos os subconjuntos numéricos, incluindo uma breve introdução aos irracionais. Desse modo, utiliza como exemplos $\sqrt{2}$, π , e a constante de Euler, $e \approx 2,718$, indicando que esses números podem ser localizados na reta real, mesmo não podendo ser expressos como números racionais (inteiros ou frações). O livro apresenta a demonstração geométrica do cálculo da diagonal de um quadrado de lado 1 e de um retângulo de lados 2 e 1, chegando, respectivamente, aos valores $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$. O livro sugere ao aluno que com o auxílio das figuras com essas dimensões e usando um compasso é possível identificar esses valores na reta numérica.

O tópico específico *Números irracionais* retoma a definição de número racional como sendo aquele que pode ser escrito como fração entre dois inteiros com denominador diferente de zero, o que não é possível com $\sqrt{2}$. Em seguida, é apresentado o método de tentativas para encontrar uma aproximação com algumas casas decimais de $\sqrt{2}$, demonstrando que sua representação decimal é infinita e não periódica. Outros exemplos de irracionais são destacados, como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e o próprio π , frequentemente aproximado por 3,14. O capítulo conclui essa parte com a definição formal de número irracional como aquele que representa um ponto da reta numérica que não corresponde a um número racional, sendo que a representação decimal de um número irracional é infinita e não periódica. Por fim define também o número real como todo número que é racional ou irracional.

Por fim, o livro propõe atividades que trabalham todos os conjuntos numéricos de forma integrada, permitindo que o estudante relacione as características de cada conjunto numérico estudado até então.

3. *Teláris Essencial – Matemática – 9º ano do Ensino Fundamental* (Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, – Ática (Grupo Somos) – PNLD 2024).

Antes de iniciar o Capítulo 1, que aborda o conjunto dos números reais e, em especial, os números irracionais, o livro apresenta uma seção chamada “Ponto de Partida”, que retoma alguns conteúdos das séries anteriores. Essa retomada propõe questões relacionadas à fração

geratriz de uma dízima periódica, associação de números racionais à reta numérica, resolução de expressões com potências e raízes, porcentagem e uso de expressões algébricas, entre outros. Essa seção inicial tem como objetivo ativar os conhecimentos prévios dos alunos, preparando-os para o aprofundamento que virá na sequência.

Já no início do capítulo, duas imagens são apresentadas para se analisar dois casos (como mostra na Figura 20): uma plantação de eucaliptos com 10.000 m² e outra de soja com 8.500 m², ambas em terrenos quadrados. O lado do terreno de eucaliptos pode ser facilmente identificado como 100 metros, enquanto o do terreno de soja exige o cálculo da raiz quadrada de 8.500, número que não possui raiz exata, sendo, portanto, a medida do lado do terreno de soja um exemplo de número irracional. Assim, o livro contextualizada a introdução ao número irracional, instigando o aluno a perceber a diferença entre os dois casos.

Ilustração: Livro de Matemática do 9º ano

Foto: J. J. / Imagem de banco de imagens / Acervo de imagens

Foto: J. J. / Imagem de banco de imagens / Acervo de imagens

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO.

Na fazenda de Pedro e Giovana, podemos concluir que a medida de comprimento do lado do terreno com a plantação de eucaliptos é 100 m, já que $100^2 = 10\,000$ e que o terreno tem o formato quadrado.

Contudo, não parece tão fácil determinar a medida de comprimento do lado do terreno com plantação de soja, que também tem o formato quadrado. Qual número elevado ao quadrado resulta em 8500? Neste capítulo, vamos aprender que esse é um **número irracional** e vamos aprender maneiras de trabalhar com ele.

4. a) $0,75 \left(3 + 4 = 0,75 \text{ ou } \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0,75 \right)$

b) $-2,6 \left(-8 + 3 = -2,666... = -2,6 \right)$

Para começar NÃO ESCREVA NO LIVRO.

- 1 Quanto mede o comprimento do lado de uma horta quadrada com medida de área de 81 m²?
9 m (81 = 9 × 9)
- 2 Como você indicaria a medida de comprimento do lado de uma praça quadrada com medida de área de 70 m²? $\sqrt{70}$ m
- 3 Qual é a característica comum a todos os números racionais? Todos podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero.
- 4 Como ficam os números racionais a seguir, representados na forma decimal?

a) $\frac{3}{4}$	b) $-\frac{1}{2} = -0,5$	c) $2\frac{3}{5}$	d) $-\frac{8}{3}$
------------------	--------------------------	-------------------	-------------------

$2,6 \left(2\frac{3}{5} = \frac{13}{5} = 13 \div 5 = 2,6 \right)$

17

Figura 21 – Problema inicial do capítulo para cálculo dos lados dos terrenos
Fonte: *Teláris Essencial – Matemática – 9º ano do Ensino Fundamental*.

O capítulo segue com uma breve revisão do conjunto dos números racionais, destacando suas características e definindo formalmente que todo número racional pode ser escrito como uma fração entre inteiros com denominador diferente de zero. Em seguida, são propostas diversas atividades envolvendo basicamente frações e números decimais, reforçando mais ainda o conceito de números racionais.

Na sequência, o livro apresenta o conjunto dos números irracionais, definindo-os diretamente como números cuja representação decimal é infinita e não periódica. O número π é introduzido na seção “Você sabia?”, na qual sua definição é apresentada de forma associada à razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro, sendo seguida de uma atividade com questões para identificar se um número é racional ou irracional e para o cálculo do comprimento da circunferência a partir de seu raio.

No tópico “Mais números irracionais”, são apresentados exemplos de raízes exatas e não exatas de números racionais, incluindo frações e decimais, sendo, portanto, as raízes não exatas os números irracionais. É introduzido o método de tentativa para a obtenção da aproximação decimal de $\sqrt{2}$. Logo após, novamente na seção “Você sabia?”, há uma breve contextualização histórica sobre a raiz de 2, citando os babilônios que já haviam estimado seu valor e os pitagóricos, que enfrentaram um verdadeiro abalo filosófico ao reconhecer que $\sqrt{2}$ não poderia ser expresso como um número racional. O livro destaca esse momento como um divisor de águas na história do pensamento matemático, e sugere que os alunos realizem uma pesquisa complementar sobre a descoberta dos números irracionais, o que pode enriquecer a abordagem em sala de aula e promover o desenvolvimento da capacidade investigativa.

O capítulo encerra a parte de números irracionais com uma série de atividades que envolvem classificação de raízes como exatas ou não, a comparação entre números racionais e irracionais, a conversão para forma decimal e, em alguns casos, com o uso da calculadora. Por fim, apresenta o tópico “Números Reais”, que integra os conjuntos numéricos estudados e consolida a ideia de que o conjunto dos números reais é formado pela união dos racionais e irracionais.


4. *Matemática – Ensino Médio: Conjuntos e Função Afim* (Joamir Souza – FTD – PNLD 2021)

A Unidade 1 do livro é dedicada ao estudo dos conjuntos, iniciando com a noção de conjuntos e operações entre eles, e depois avançando para o trabalho com todos os conjuntos

numéricos já estudados no Ensino Fundamental, agora com foco em aplicações mais complexas, mais adequadas ao Ensino Médio.

No que se refere aos números irracionais, como pode ser observado na Figura 21, o livro inicia sua abordagem com o contexto histórico de sua descoberta, atribuindo-a aos integrantes da Escola Pitagórica, destacando a análise feita por esses estudiosos sobre a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário, que resulta em $\sqrt{2}$, um número que não pode ser expresso na forma racional. O livro relembra o Teorema de Pitágoras e apresenta um pequeno tópico intitulado “Matemática na História”, no qual é contada a história de Pitágoras e a descoberta de seu teorema.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA CULTURA FTD
 REPRODUÇÃO PROIBIDA

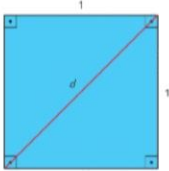


Conjunto dos números irracionais (II)

Vimos que há indícios de que o desenvolvimento da ideia de número racional teve início a partir de situações práticas, envolvendo medições. Ao longo da história da humanidade, acreditou-se, em muitos períodos, que os números racionais eram suficientes para expressar diferentes situações observadas na natureza ou desenvolvidas pelo ser humano.

Apesar de essa crença ter prevalecido em alguns momentos, sabemos que, por meio da história, há cerca de 2 500 anos um grupo de estudiosos na Grécia antiga descobriu a existência de outro tipo de número, o que, na época, causou uma crise nos fundamentos da Matemática até então desenvolvidos.

Os responsáveis por essa descoberta foram os integrantes da chamada Escola Pitagórica. Eles estudaram uma situação que não podia ser expressa por um número racional, no caso, o valor da medida da diagonal de um quadrado de lado unitário. Para determinar essa medida, eles utilizaram o teorema de Pitágoras.



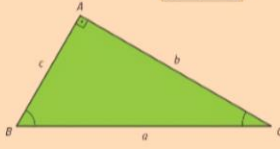
$$d^2 = 1^2 + 1^2$$


$$d^2 = 1 + 1$$

$$d^2 = 2$$

Dica

Lembre-se: de acordo com o teorema de Pitágoras, em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$a^2 = b^2 + c^2$




Matemática na História

Pitágoras (c. 585 a.C.-c. 500 a.C.) nasceu na ilha de Samos, na Grécia. Em Crotona, na Itália, ele fundou a Escola Pitagórica, um centro de estudos de Filosofia, Matemática e Ciências naturais. Uma das descobertas mais famosas creditadas a Pitágoras é o chamado teorema de Pitágoras, que corresponde a uma relação entre os lados de um triângulo retângulo: o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

» Busto de Pitágoras de Samos.

Fonte dos dados: EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 94-96.

Figura 22 – Página inicial do conteúdo de números irracionais
 Fonte: *Matemática – Ensino Médio: Conjuntos e Função Afim*

A seguir, é apresentado o método de tentativas para encontrar uma aproximação decimal da $\sqrt{2}$, propondo ao estudante, com o auxílio da calculadora, que encontre uma aproximação com quatro casas decimais. Essa atividade tem o objetivo de evidenciar aos alunos que a representação decimal do número é infinita e não periódica. Além disso, é apresentada uma demonstração matemática formal que prova que $\sqrt{2}$ não pode ser representado como uma fração irredutível e, portanto, não é um número racional.

O livro também propõe um método geométrico para localizar $\sqrt{2}$ na reta real utilizando régua e compasso. A construção parte de um triângulo retângulo isósceles com catetos unitários, reforçando visualmente a presença dos irracionais na reta numérica. Após esse desenvolvimento, a obra apresenta uma definição formal: números que não podem ser expressos como frações entre dois inteiros com denominador diferente de zero formam o conjunto dos números irracionais, cuja representação decimal é infinita e não periódica. Como exemplo, o livro traz o valor decimal de $\sqrt{2}$ com 15 casas decimais.

Na sequência, a obra dedica um tópico ao número irracional π (pi), apresentando sua definição como razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. São mostradas 20 casas decimais de π , e, em seguida, é proposta uma atividade prática na qual os alunos devem desenhar circunferências com diferentes diâmetros, medir os comprimentos com régua e barbante, e calcular a razão entre o comprimento e o diâmetro, estimando aproximações de π . A proposta visa fazer com que os alunos percebam que, embora os valores variem ligeiramente, todos se aproximam de 3,14, valor comumente usado para π .

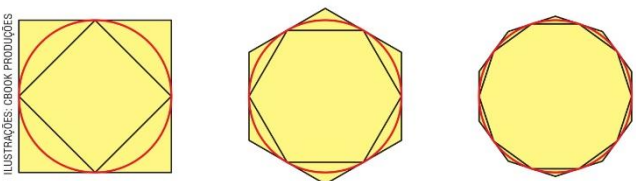
Por fim, no encerramento da abordagem sobre os irracionais, o material didático retoma a seção “Matemática na História”, apresentando o método de Arquimedes (Figura 22). O texto destaca que Arquimedes foi o primeiro matemático a perceber que π era um número irracional. O método utilizado por ele, conhecido como método da exaustão, consiste em inscrever e circunscrever polígonos regulares a uma circunferência; quanto maior o número de lados desses polígonos, mais próximo seu perímetro estará do comprimento da circunferência. Essa abordagem pode ajudar os estudantes a compreender como os conceitos matemáticos foram sendo desenvolvidos ao longo do tempo, valorizando o processo histórico da construção do saber matemático.

Matemática na História

[...]
Arquimedes foi o primeiro a perceber que π era irracional, e que seu valor não era $\frac{22}{7}$.

[...]
Arquimedes decidiu usar polígonos [...] para se aproximar dos círculos. Desenhou um polígono fora do círculo e um dentro dele, e depois calculou qual era a razão entre o perímetro (circunferência) e o diâmetro para ambos os polígonos. Como a forma exterior era maior e a interior menor, ele sabia que o verdadeiro valor de π situava-se entre as duas razões.

BENTLEY, P. **O livro dos números**: uma história ilustrada da matemática. Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Zahar, 2009. p. 141-142.



» Quadrado, hexágono e decágono inscritos e circunscritos a uma circunferência.

O método utilizado por Arquimedes para estimar o valor de π é conhecido atualmente como **método da exaustão**, em que polígonos regulares são inscritos e circunscritos a uma circunferência. Quanto maior a quantidade de lados dos polígonos, mais próximos são os perímetros deles e da circunferência.

Figura 23 – Método da exaustão de Arquimedes
Fonte: *Matemática – Ensino Médio: Conjuntos e Função Afim*

Na sequência da unidade, é trabalhado o conjunto dos números reais. Por fim, o livro propõe uma atividade com questões que exploram todos os conjuntos numéricos de forma integrada, com o objetivo de relacionar as características de cada conjunto numérico estudado na unidade.

5. *Matemática e Suas Tecnologias – Ensino Médio: Funções* (Eduardo Chavante e Diego Prestes – Quadrante – PNL D 2021)

Essa obra segue uma proposta semelhante ao livro anterior, abordando no Capítulo 1, intitulado *Conjuntos*, as noções iniciais sobre conjuntos, operações com conjuntos e, por fim, a apresentação dos conjuntos numéricos. O livro revisa brevemente os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, destacando suas características e aplicações práticas do cotidiano, e encerra com o conjunto dos números reais, onde se inserem os números irracionais.

A introdução ao tópico dos números reais é feita por meio de um pequeno contexto histórico. O texto destaca que a necessidade de considerar outros tipos de números surgiu na época do matemático e filósofo grego Pitágoras. Acredita-se que os seguidores da escola pitagórica perceberam que a medida da diagonal de um quadrado não podia ser expressa por um número racional. Esse problema está relacionado à noção de comensurabilidade entre dois segmentos de reta e, tradicionalmente, é associado à aplicação do Teorema de Pitágoras ao comparar a diagonal de um quadrado com seu lado.

Como ilustrado na Figura 23, é mostrado o cálculo da diagonal d de um quadrado de lado 1, chegando à expressão $d = \sqrt{2}$. Em seguida, o livro apresenta o método de tentativas para obter um valor aproximado para essa raiz, destacando que sua representação decimal é infinita e não periódica. Essa observação permite concluir que $\sqrt{2}$ não é um número racional. A definição de número irracional é então apresentada como sendo todo número que não pode ser expresso como fração entre dois inteiros com denominador diferente de zero. O livro conclui esse trecho afirmando que, ao unir o conjunto dos números racionais ao dos irracionais, forma-se o conjunto dos números reais.

Considere o quadrado representado ao lado, cujo comprimento do lado mede uma unidade.

Pelo teorema de Pitágoras, temos: $d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$

Logo, a medida d corresponde ao número positivo que, elevado ao quadrado, resulta em 2, ou seja, $d = \sqrt{2}$.

Observe como podemos obter um valor aproximado para d .

<p>• $\frac{1}{1} \leq \frac{d^2}{2} \leq \frac{2^2}{4}$; logo, $1 \leq d \leq 2$.</p> <p>• $\frac{1,4^2}{1,96} \leq \frac{d^2}{2} \leq \frac{1,5^2}{2,25}$; logo, $1,4 \leq d \leq 1,5$.</p>	<p>• $\frac{1,41^2}{1,9881} \leq \frac{d^2}{2} \leq \frac{1,42^2}{2,0164}$; logo, $1,41 \leq d \leq 1,42$.</p> <p>• $\frac{1,414^2}{1,999396} \leq \frac{d^2}{2} \leq \frac{1,415^2}{2,002225}$; logo, $1,414 \leq d \leq 1,415$.</p>
---	---

Continuando esse procedimento, obtemos um limitante racional inferior e um limitante racional superior para o possível valor de d , de modo que a diferença entre eles se torne cada vez menor. Esse procedimento continua indefinidamente, pois d não será igual a um dos limitantes, inferior ou superior, em nenhuma etapa.

No entanto, pode-se demonstrar que $\sqrt{2}$ não é racional. O número d possui uma representação decimal infinita e não periódica, pois, caso contrário, corresponderia a um número racional.

Os números que não são racionais, ou seja, que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, correspondem a **números irracionais**. Ao unir o conjunto dos números racionais ao dos números irracionais, obtemos o **conjunto dos números reais**, denotado por \mathbb{R} .

O conjunto de todos os números irracionais é o complementar de \mathbb{Q} , considerando \mathbb{R} conjunto universo. Assim, denotaremos esse conjunto por \mathbb{Q}^c .

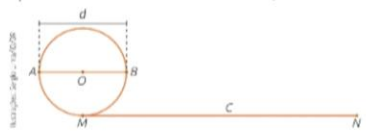
Exemplos

A O número $\sqrt{2}$ é irracional, ou seja, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$. De modo geral, pode-se demonstrar que, para qualquer $p \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, o número $\sqrt[n]{p}$ só pode ser natural ou irracional, ou seja, toda raiz n -ésima não exata de um número natural é irracional. Assim, também são irracionais:

• $\sqrt{3} \approx 1,73$ • $\sqrt[3]{10} \approx 2,15$ • $\sqrt[4]{2} \approx 1,19$ • $\sqrt[5]{12} \approx 2,29$

B Na expressão decimal 0,101001000100001..., o primeiro dígito 1 é seguido de um dígito 0, o segundo dígito 1 é seguido de dois dígitos 0 e assim por diante, com o n -ésimo dígito 1 seguido de n dígitos 0. Como o número de zeros sempre aumenta, a representação decimal não é periódica; logo, esta expressão decimal corresponde a um número irracional.

C Pode-se demonstrar que o número π , definido como a razão das medidas do comprimento C pelo diâmetro d de uma circunferência, é um número irracional. Se \overline{AB} é um diâmetro da circunferência e a medida do comprimento de \overline{MN} é igual a medida do comprimento dessa mesma circunferência, então \overline{AB} e \overline{MN} são segmentos incomensuráveis.



$$\pi = \frac{C}{d} = 3,141592653589$$

24 capítulo 1 Conjuntos NÃO escreva no livro.

Figura 24 – Cálculo da diagonal do quadrado de lado 1 e exemplos de irracionais
 Fonte: *Matemática e Suas Tecnologias – Ensino Médio: Funções*

A sequência do conteúdo traz exemplos de números irracionais, como raízes não exatas, números decimais não periódicos e o número π , definido como a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. No entanto, não são exploradas aplicações práticas, nem há aprofundamento histórico sobre o π ou os demais irracionais.

A obra apresenta a reta real, destacando que todos os números reais, inclusive os irracionais, podem ser localizados nela. No entanto, essa representação não é acompanhada de recursos geométricos, como construções com régua e compasso. A unidade é concluída com o estudo dos intervalos numéricos com a apresentação de alguns exercícios resolvidos, seguidos por atividades que trabalham de forma integrada todos os conjuntos numéricos estudados, com o objetivo de reforçar as características de cada um.

Ao comparar as cinco obras analisadas, nota-se que cada uma apresenta características específicas para o ensino dos números irracionais, variando no nível de aprofundamento conceitual, histórico e interdisciplinar. "*A Conquista da Matemática – 9º ano*" (FTD) destaca-se pela introdução gradual, contextualizada e rica dos números irracionais, com abordagem visual, uso de régua e compasso, além da proposta de pesquisa sobre Pitágoras, mas sem aprofundamento significativo sobre a razão áurea. "*Matemática e Realidade – 9º ano*" (Saraiva) apresenta a abordagem mais completa e interdisciplinar, integrando Arte, História e Matemática ao explorar com profundidade a razão áurea e obras como o Partenon e os trabalhos de Da Vinci, além de introduzir bem os irracionais com exemplos variados e recursos geométricos. "*Teláris Essencial – Matemática – 9º ano*" (Ática) também valoriza a contextualização, utilizando situações do cotidiano (como o cálculo de áreas de terrenos) para introduzir os números irracionais, e propõe pesquisas históricas, embora apresente o conteúdo de forma mais direta e com menor aprofundamento.

No Ensino Médio, "*Matemática – Conjuntos e Função Afim*" (FTD) apresenta um excelente equilíbrio entre rigor matemático e contexto histórico, com demonstração formal da irracionalidade de $\sqrt{2}$, construção geométrica na reta e atividade prática de aproximação de π , sendo o único a tratar do método da exaustão de Arquimedes. Já "*Matemática e Suas Tecnologias – Funções*" (SM Educação), embora apresente os irracionais corretamente, o faz de forma mais breve e sem atividades investigativas ou exploração visual, além de não apresentar aplicações do π nem mencionar a razão áurea. Considerando os critérios da dissertação, como contextualização histórica, abordagem interdisciplinar e estímulo à investigação, o livro "*Matemática e Realidade – 9º ano*" mostra-se o mais completo e adequado,

sobretudo pela maneira como articula Matemática, cultura e história, alinhando-se aos pressupostos da BNCC para uma aprendizagem significativa e crítica.

Apesar dos avanços na abordagem dos números irracionais e da presença pontual da razão áurea em algumas obras, observa-se que a maioria dos livros didáticos ainda trata esses conteúdos de forma fragmentada ou superficial, limitando-se muitas vezes a definições e exemplos numéricos, sem explorar de maneira mais aprofundada os contextos históricos, as conexões interdisciplinares ou as possibilidades de investigação prática. Diante disso, a proposta da sequência didática, apresentada no próximo capítulo, tem como objetivo complementar essas lacunas, oferecendo uma abordagem que usa a História da Matemática e investigação, visando tornar a aprendizagem dos números irracionais, especialmente da razão áurea, mais significativa, contextualizada e coerente com os princípios da BNCC.

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA: NÚMEROS IRRACIONAIS E A RAZÃO ÁUREA

A sequência didática desenvolvida foi elaborada com o intuito de ser aplicada tanto em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental quanto em turmas do Ensino Médio, embora não tenha sido implementada neste trabalho. A proposta tem o objetivo de promover a compreensão dos números irracionais e da razão áurea a partir de uma abordagem que integra aspectos históricos, matemáticos e estéticos. Para desenvolver a sequência didática, são utilizados uma apresentação com 15 slides, uma atividade impressa com duas páginas que seria entregue aos alunos, e um questionário final de uma página que avaliaria a sequência didática. O material completo encontra-se, respectivamente, nos Apêndices A, B e C deste trabalho. Com duração de duas horas-aula, o objetivo geral da sequência é compreender a história da razão áurea a partir da descoberta dos números irracionais, e entender por que ela é considerada um número importante para a Matemática. Entre os objetivos específicos estão: entender o conceito de número irracional a partir de exemplos práticos e históricos; associar a razão áurea com a sequência de Fibonacci; reconhecer a presença da razão áurea em diferentes contextos, como na natureza, na arte e na arquitetura; e relacionar a estética com a Matemática por meio da percepção da beleza baseada na proporção áurea.

No primeiro momento, os alunos seriam convidados a resolver um problema introdutório envolvendo a raiz quadrada de 2, comparando um quadrado de área de 9 cm^2 , cujo lado é 3 cm , com um quadrado de área de 2 cm^2 , cujo lado corresponde a $\sqrt{2} \text{ cm}$, como mostra a Figura 25. Os quadrados seriam desenhados no quadro. Considerando as possíveis lacunas de aprendizagem, caso fosse necessário, poderia ser realizada uma breve revisão do conceito da área de um quadrado, reforçando a relação entre a área e a medida do lado, para garantir a compreensão dos alunos sobre os outros conceitos que seriam abordados na sequência. Espera-se, inicialmente, que os alunos compreendam de forma intuitiva que o lado do quadrado de área 2 cm^2 é um número decimal, ou seja, não inteiro, mesmo que ainda não consigam determinar

quais algarismos aparecem após a vírgula. Essa atividade serviria como introdução ao conceito de números irracionais.

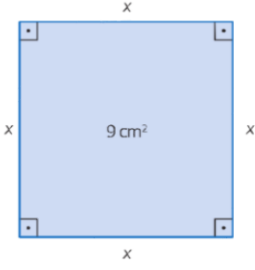
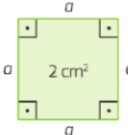
<p>Se uma região quadrada tem área de 9 cm^2, cada um de seus lados mede 3 cm. Veja:</p>  $x^2 = 9$ $x = \sqrt{9}$ $x = 3$	<p>E, se a área de uma região quadrada é de 2 cm^2, qual é a medida de comprimento, em centímetros, de cada lado?</p>  $a^2 = 2$ $a = \sqrt{2}$ $a = ?$
---	--

Figura 25 – Cálculo da área de um quadrado de área 2 cm^2

Fonte: Do Autor

No segundo momento, os alunos utilizariam calculadoras para obter aproximações da raiz quadrada de 2, sempre aumentando o número de casas decimais, observando que o resultado apresenta uma sequência infinita e não periódica de casas decimais, característica fundamental dos números irracionais, processo que é mostrado na Figura 26.

Vamos obter a representação decimal do número $\sqrt{2}$ fazendo aproximações sucessivas:

$\sqrt{2} = ?$	$1^2 = 1$ (menor do que 2) $2^2 = 4$ (maior do que 2)	$\sqrt{2}$ está entre 1 e 2
$\sqrt{2} = ?$	$(1,4)^2 = 1,96$ (menor do que 2) $(1,5)^2 = 2,25$ (maior do que 2)	$\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5
$\sqrt{2} = ?$	$(1,41)^2 = 1,9881$ (menor do que 2) $(1,42)^2 = 2,0164$ (maior do que 2)	$\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42
$\sqrt{2} = ?$	$(1,414)^2 = 1,999396$ (menor do que 2) $(1,415)^2 = 2,002225$ (maior do que 2)	$\sqrt{2}$ está entre 1,414 e 1,415!

Figura 26 – Cálculo da aproximação da $\sqrt{2}$ usando a calculadora

Fonte: Do Autor

Em seguida, seria apresentado um slide com outros exemplos de números irracionais que são raízes quadradas não exatas, como $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ e $\sqrt{30}$, reforçando a ideia de que esses números não possuem raízes exatas. O contexto histórico da descoberta dos números irracionais seria discutido, destacando as contribuições dos babilônios e dos pitagóricos, além da narrativa de Hipaso de Metaponto, que, segundo a história, foi punido por revelar a existência dos números irracionais. Em outro slide, seriam apresentados três números irracionais importantes da Matemática: o número π (pi), o número e (Euler) e o número ϕ (phi), com algumas de suas casas decimais, comentando brevemente suas origens e importância.

No terceiro momento, propõe-se aos alunos a resolução do famoso problema dos coelhos que dá origem à sequência de Fibonacci: dado um par de coelhos colocado em um espaço fechado, e considerando que, a cada mês, cada par fértil gera um novo par, sendo que os coelhos se tornam férteis a partir do segundo mês de vida, quantos pares existiriam ao final de um ano? Logo depois, projeta-se um slide com a solução do problema, apresentando a sequência de Fibonacci e contextualizando sua origem e relevância. Os alunos seriam convidados a dividir números consecutivos da sequência para observar que o quociente entre um número da sequência e seu antecessor se aproxima de um valor constante, aproximadamente 1,618, o valor correspondente à razão áurea (ϕ). Espera-se que os alunos percebam que o número obtido corresponde ao número ϕ apresentado anteriormente. Nesse momento, introduz-se o número de ouro, destacando que ele recebe esse nome, entre outros motivos, por aparecer em padrões da natureza.

No quarto momento, cada aluno receberia uma folha com dez imagens, das quais cinco apresentariam a proporção áurea. Os alunos deveriam escolher, entre cada par de imagens, aquelas que eles consideravam mais belas, promovendo uma reflexão intuitiva sobre a relação entre matemática e beleza, sem saber previamente quais imagens continham a proporção áurea. Essa atividade foi inspirada no método de comparações por pares, conforme descrito por Mario Livio (2006, p. 207), ao relatar um estudo conduzido pelo psicólogo britânico Chris McManus. Nesse estudo, McManus utilizou a técnica de comparação de retângulos dois a dois para avaliar se aqueles com proporções áureas eram percebidos como mais agradáveis esteticamente. Essa abordagem metodológica é considerada mais confiável do que classificações diretas, pois há evidências de que os julgamentos estéticos são, na maioria das vezes, feitos por meio de comparações entre pares sucessivos.

No quinto momento, seriam apresentados slides que mostrariam o retângulo áureo, formado por quadrados cujos lados correspondem aos números da sequência de Fibonacci, e a espiral áurea, construída dentro desse retângulo. Essa apresentação visual permitiria que os alunos compreendessem como a sequência de Fibonacci, o número de ouro e as formas geométricas estão relacionadas.

No sexto momento, seria contada a história do número áureo, enfatizando o por que matemáticos o considerarem divino ou especial. Em seguida, seria discutido se a maior parte das imagens escolhidas pelos alunos no momento anterior realmente possuía a proporção áurea. Para enriquecer essa análise, seriam utilizados slides que ilustram precisamente onde a razão áurea aparece nas imagens avaliadas, incentivando uma reflexão crítica sobre a relação entre Matemática, estética e percepção humana da beleza.

A sequência seria concluída com uma conversa, na qual os alunos poderiam expressar suas impressões e reflexões sobre o conteúdo abordado. O diálogo giraria em torno da questão: “A beleza pode ser medida matematicamente?”, permitindo que os alunos analisassem criticamente a ideia da razão áurea como um padrão universal de beleza. Esse momento teria como objetivo consolidar os conhecimentos e estimular o pensamento crítico e filosófico sobre o papel da Matemática na compreensão e representação do mundo. Além disso, seria aplicado um questionário final, elaborado com o intuito de avaliar a compreensão dos conceitos trabalhados e a percepção dos alunos sobre a relevância do tema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como professor de Matemática o que me motivou a produzir esse trabalho foi a preocupação de ensinar Matemática de uma forma mais significativa e interessante para os meus alunos, indo além das fórmulas e cálculos. Para isso escolhi tentar abordar e estudar a proporção áurea, que talvez seja um assunto pouco explorado no ensino básico, mas que pode ser trabalhado dentro de vários conteúdos da Matemática. O estudo do “número de ouro” ou do “número áureo”, como também é conhecido a proporção áurea, é o foco desse trabalho, que também tem como base a abordagem dos números irracionais. Dentro das tendências em educação Matemática a que eu considere mais apropriada para ter como base para o meu estudo e produção desse trabalho foi a história da Matemática, já que os estudos desenvolvidos sobre o número de ouro por vários matemáticos ao longo da história influenciaram o estudo de outros assuntos dentro da Matemática e o contexto histórico ajuda a entender todo esse processo e o porquê da importância desse número. A descoberta da existência dos números irracionais teve um grande impacto no desenvolvimento da Matemática já que se acreditava na existência apenas dos conjuntos de números até então conhecidos e não se imaginava existir números que não poderiam ser escritos na forma de fração.

No processo de análise dos livros didáticos selecionados, foi possível perceber que cada obra traz diferentes abordagens sobre os números irracionais e, em alguns casos, sobre a razão áurea. Observou-se que alguns livros priorizam o aspecto formal e algébrico, destacando definições, propriedades e demonstrações, enquanto outros procuram inserir contextos históricos e aplicações em situações reais. Essa diversidade de perspectivas evidenciou a importância de uma abordagem equilibrada, em que a formalização matemática seja acompanhada de referências históricas e de aplicações práticas. Nesse sentido, a inserção da história da Matemática mostrou-se não apenas um recurso didático, mas também uma ponte entre a abstração e a realidade dos alunos, justificando sua escolha como base deste trabalho.

Como consequência desse estudo, desenvolvi uma sequência didática, na qual apresento o conceito e o contexto histórico da descoberta dos números irracionais, e sua importância,

destacando o número de ouro, mostrando como ele intrigou os matemáticos ao longo dos tempos e por que é considerado um número tão especial. Visando uma possível aplicação da sequência didática, espera-se que os alunos demonstrem interesse e curiosidade diante da abordagem histórica e das conexões entre a Matemática e fenômenos da natureza. Entretanto, é provável que surjam desafios, como a necessidade de adaptar a linguagem e os exemplos para tornar os conteúdos mais acessíveis. Em trabalhos futuros, algumas estratégias poderão ser ajustadas a fim de facilitar ainda mais a compreensão dos alunos.

Apesar do título do trabalho ser: *Divino ou criado pelo homem? Dos números irracionais a razão áurea no ensino*, ele não tem o objetivo de responder qual das duas perspectivas é a correta para se considerar a razão áurea, mas sim mostrar através de uma abordagem histórica como o homem tem a necessidade de usar a ciência, nesse caso a Matemática, para descrever ou explicar os fenômenos naturais que nos cercam. É muito confortável descrever a natureza através de simetrias, razões e medidas unificadas. Isso nos dá uma sensação de controle, e faz parecer que o mundo à nossa volta pode ser melhor compreendido. Em contrapartida, por exemplo, se você quer medir e analisar uma estrutura complexa como o corpo humano ou grandes obras da arquitetura, terá rapidamente na mão uma grande abundância de medidas para trabalhar. Se você tiver paciência suficiente para fazer malabarismos com esses números, certamente obterá muitos valores que coincidem com importantes números das ciências. Como você não está limitado por nenhuma regra, é muito fácil encontrar medidas e proporções que se encaixem com algo que você procura, como a razão áurea. Discutir essas ideias com os alunos foi um dos objetivos desse trabalho.

Como proposta de continuidade ou aprofundamento deste trabalho, sugiro o estudo de outros números irracionais relevantes, como o π (π) e o e de Euler, também sob uma perspectiva histórica. Além disso, é possível abordar, historicamente, os triângulos e a trigonometria, analisando sua evolução desde a antiguidade, sua relação com a geometria clássica e sua aplicação em diversas civilizações, como as do Egito e da Grécia. Essas temáticas ampliam a compreensão dos alunos sobre a construção do conhecimento matemático e revelam como diferentes culturas contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. Assim, reforça-se o papel da História da Matemática como uma estratégia pedagógica importante.

REFERÊNCIAS

ALE DESIGNER. Os mitos da proporção áurea. Publicado em 19 jan. [s.d.]. Disponível em: <https://aledesigner.com.br/os-mitos-da-proporcao-aurea/>. Acesso em: 11 jul. 2025.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 15 jul. 2025.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio – Matemática*. Brasília, DF: Ministério da Educação; Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

BRASIL. *Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD 2021: Guia do Livro Didático – Matemática*. Brasília, DF: Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/fnde/pt-br/aceso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/livro/pnld>. Acesso em: 15 jul. 2025.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. *Matemática e suas tecnologias – Ensino Médio: Funções*. São Paulo: Quadrante (SM Educação), 2020. (Obra aprovada no PNLD 2021).

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação matemática: da teoria à prática*. 16. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. *Teláris Essencial: Matemática – 9º ano do Ensino Fundamental*. PNLD 2024. São Paulo: Ática / Scipione, 2023.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2004.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. *A conquista da matemática: 9º ano – Ensino Fundamental*. São Paulo: FTD, 2023. (Obra aprovada no PNLD 2024).

GOLDEN NUMBER. Parthenon and the Golden Ratio. *GoldenNumber.net*, [s.l.], [s.d.]. Disponível em: <https://www.goldennumber.net/parthenon-phi-golden-ratio/>. Acesso em: 11 jul. 2025.

HUNTLEY, H. E. A Divina Proporção– Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática. Trad. de Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

LIVIO, Mario. *A razão áurea: a história de Phi, um número surpreendente*. Tradução de Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MACHADO, Antônio; IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. *Matemática e Realidade: 9º ano do Ensino Fundamental*. PNLD 2024. São Paulo: Saraiva Educação, 2022.

MALDONADO, Luiz Márcio Imenes; CARNEIRO, Marcelo Lellis. *Matemática – Ensino Médio: volume único*. São Paulo: Moderna, 2015.

NETINHO PROFESSOR. Número de ouro. Publicado em abr. 2011. Disponível em: <https://netinhoprofessor.blogspot.com/2011/04/numero-de-ouro.html>. Acesso em: 12 jul. 2025.

SEGUINDO PASSOS HISTÓRIA. Io, Leonardo. Publicado em: 11 abr. 2010. Disponível em: <https://seguindopassoshistoria.blogspot.com/2010/04/io-leonardo.html> Acesso em: 11 jul. 2025.

SOUZA, Joamir. *Matemática – Ensino Médio: Conjuntos e função afim*. São Paulo: FTD Educação (Coleção Multiversos), 2020. (Obra aprovada no PNLD 2021).

THE NAUTILUS SHELL SPIRAL AS A GOLDEN SPIRAL. *GoldenNumber.net*, [s.d.]. Disponível em: <https://www.goldennumber.net/spirals/>. Acesso em: 13 jul. 2025.

VILLARREAL, Francisco. *Elementos de matemática: aritmética, álgebra e geometria*. São Paulo: Scipione, 2006.

WIKIPEDIA. Golden rectangle. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_rectangle. Acesso em: 27 jun. 2025.

APÊNDICE

APÊNDICE A – SLIDE UTILIZADO NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA



NÚMEROS IRRACIONAIS E A RAZÃO ÁUREA: A BELEZA PODE SER MEDIDA MATEMATICAMENTE? PROFESSOR: HUDSON GONÇALVES SANTOS



Você sabia?

Os babilônios já haviam calculado o valor de $\sqrt{2}$ como 1,4142129 (com erro a partir da sexta casa) e nem se preocuparam se $\sqrt{2}$ era um número racional ou não. Já para os pitagóricos (discipulos do matemático e filósofo grego Pitágoras; 582 a.C.-497 a.C.), a descoberta de que $\sqrt{2}$ não era racional, mas um número dado por uma cadeia infinita de casas decimais sem nenhum padrão ($\sqrt{2} = 1,414213562\dots$) causou uma grande crise de natureza filosófica e religiosa, pois, até então, para eles, “tudo era número”, subentendendo número como número racional.

Assim como $\sqrt{2}$,
todas as outras raízes quadradas
não exatas de números naturais são
exemplos de números irracionais.
 $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{30}, \sqrt{95}, \sqrt{120}$
e outras são números
irracionais.



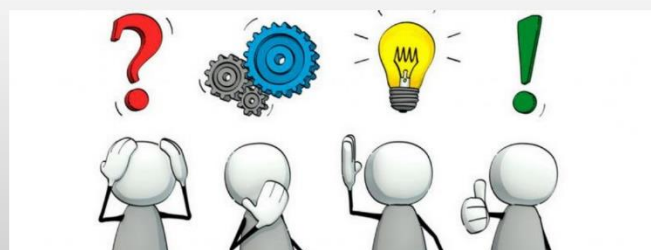
NÚMEROS IRRACIONAIS IMPORTANTES DA MATEMÁTICA

$$e = 2,718281828459\dots$$

$$\pi = 3,141592656589\dots$$

$$\varphi = 1,618033988749\dots$$

Dado um par de coelhos colocado em um espaço fechado, e considerando que a cada mês cada par fértil gera um novo par, sendo que os coelhos se tornam férteis a partir do segundo mês de vida, quantos pares existirão ao final de um ano?

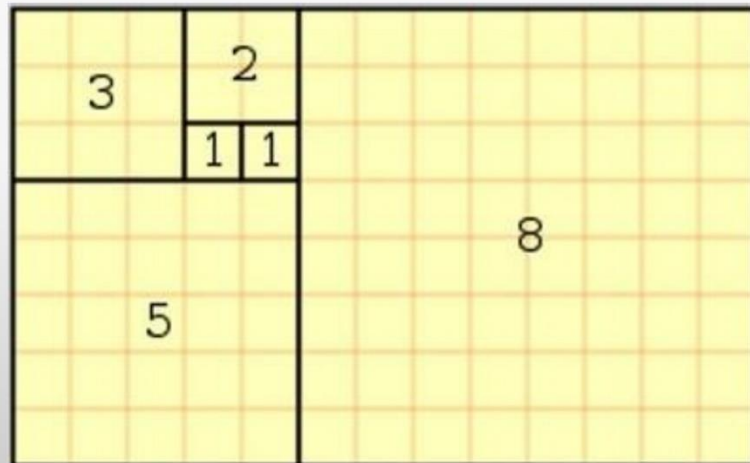




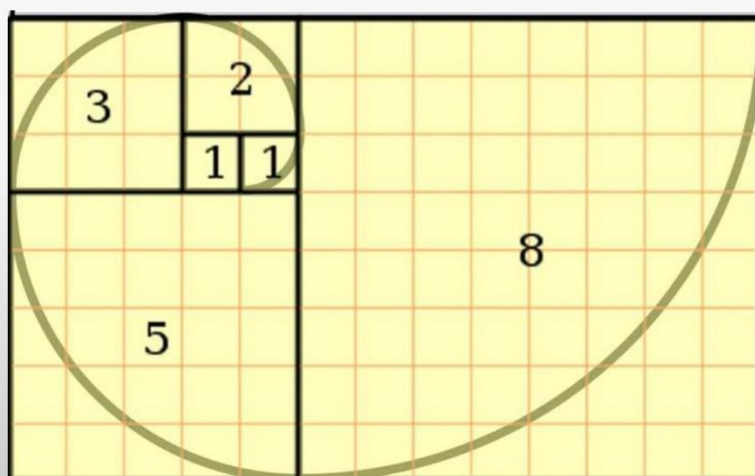
SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

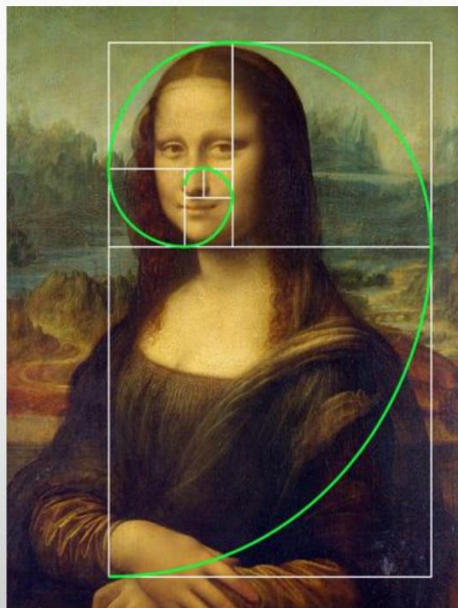
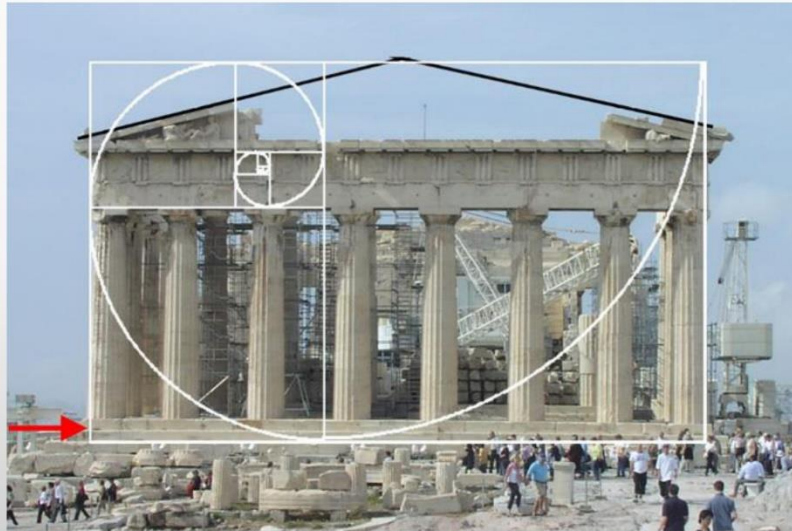
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ...

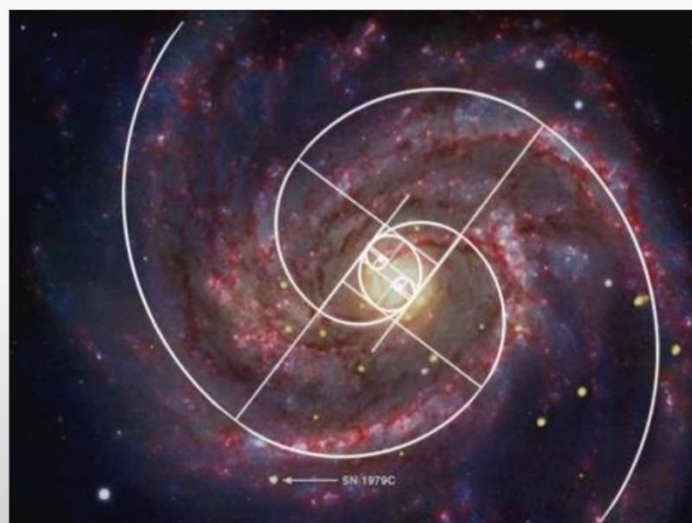
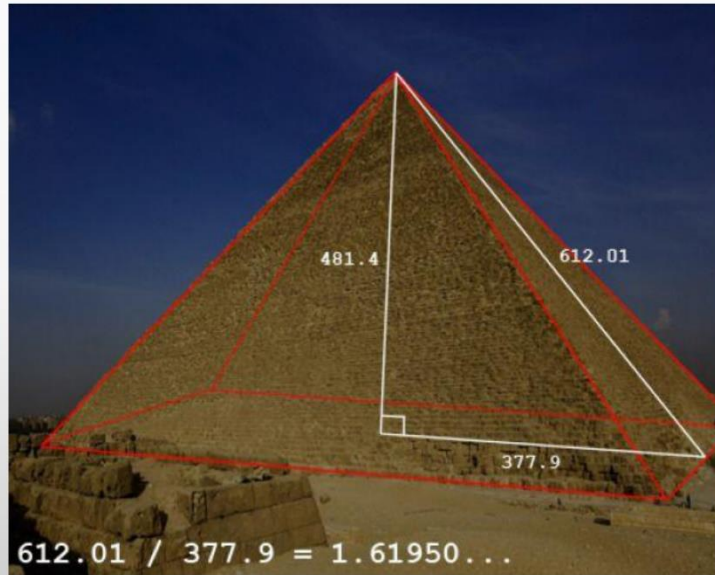
RETÂNGULO DE OURO

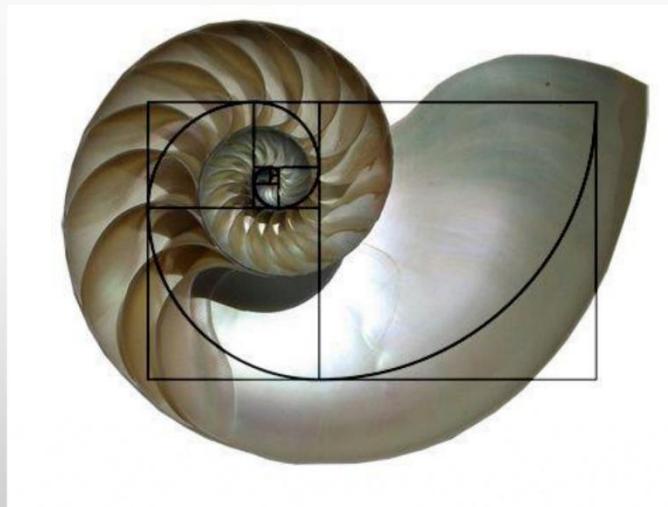


ESPIRAL DE OURO









A BELEZA PODE SER MEDIDA MATEMATICAMENTE?

APÊNDICE B – ATIVIDADE IMPRESSA UTILIZADA NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA



Escola: _____
 Turma: _____ Modalidade: _____ Turno: _____
 Disciplina: _____ Professor (a): _____
 Estudante: _____ Data: ____/____/2025



Entre as imagens escolha a mais “bela”.



Coliseu de Roma



Partenon(Atenas)



Monalisa(Leonardo daVinci)



Moça com Brinco de Pérola(Johannes Vermeer)



Stonehenge(Salisbury, Inglaterra)



Pirâmide de Gizé (Egito)



Via Láctea (Formada por bilhões de estrelas)



Planeta Terra visto do espaço



Náutilo(Espécie de molusco)



Espécie de Peixe

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL**Questionário de Avaliação da Sequência Didática**

1. Um número irracional é:
 - a) Um número inteiro.
 - b) Um número que possui infinitas casas decimais não periódicas.
 - c) Um número que pode ser escrito como fração.
 - d) Um número natural maior que zero.
2. A raiz quadrada de 2 ($\sqrt{2}$) é um exemplo de número irracional porque:
 - a) Não possui raiz quadrada exata.
 - b) É um número negativo.
 - c) É múltiplo de 2.
 - d) Pode ser escrito como uma fração simples.
3. A sequência de Fibonacci é formada pela seguinte regra:
 - a) Cada termo é o dobro do anterior.
 - b) Cada termo é a soma dos dois anteriores.
 - c) Cada termo é sempre par.
 - d) Cada termo é igual ao quadrado do anterior.
4. A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci tende a se aproximar de:
 - a) 2
 - b) 3,14
 - c) 1,618
 - d) 10
5. A proporção áurea (ϕ) pode ser encontrada em:
 - a) Apenas em cálculos matemáticos abstratos.
 - b) Somente em construções arquitetônicas.
 - c) Na natureza, na arte, na arquitetura e em outras áreas.
 - d) Apenas em obras da Grécia Antiga.
6. O que mais chamou sua atenção na sequência de aulas sobre os números irracionais e a razão áurea?
7. Você acha que a beleza pode ser medida matematicamente? Justifique sua resposta.
8. Em sua opinião, qual a importância de estudar a relação entre Matemática, natureza e arte?