UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JOSÉ ANANIAS MARTINS JÚNIOR

ESTRATÉGIAS PARA A RECUPERAÇÃO DE SABERES DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA DO ENSINO FUNDAMENTAL COM FOCO NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO NO ESTADO DE RORAIMA

Boa Vista - RR
2025

JOSÉ ANANIAS MARTINS JÚNIOR

ESTRATÉGIAS PARA A RECUPERAÇÃO DE SABERES DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA DO ENSINO FUNDAMENTAL COM FOCO NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO NO ESTADO DE RORAIMA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveria.

Boa Vista - RR
2025

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

M386e Martins Júnior, José Ananias.
Estratégias para a recuperação de saberes de aritmética e álgebra do ensino fundamental com foco na aprendizagem da matemática no ensino médio no Estado de Roraima / José Ananias Martins Júnior. – Boa Vista, 2025.
148 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira.

Dissertação (mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Roraima. Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1 - Operações algébricas. 2 - Aritmética básica. 3 - Propostas didáticas. 4 - Resoluções de problemas. I - Título. II - Oliveira, Joselito de (orientador).

CDU - 511.12:512.64(811.4)

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária/Documentalista
Marcilene Feio Lima - CRB-11/507-AM

JOSÉ ANANIAS MARTINS JÚNIOR

ESTRATÉGIAS PARA A RECUPERAÇÃO DE SABERES DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA DO ENSINO FUNDAMENTAL COM FOCO NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO NO ESTADO DE RORAIMA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 24 de julho de 2025 e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Joselito de Oliveira

Prof. Dr. Joselito de Oliveira
Orientador - UFRR

Prof. Dr. Rossiter Ambrósio dos Santos
Membro Externo - UERR

Luciano F. Silva

Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva
Membro Interno - UFRR

Boa Vista - RR
2025

À minha doce mãe, Rodália Maria de Fátima, por sempre ter me ensinado com ações que o amor é a única verdade nesta vida.

AGRADECIMETOS

A Deus, por ser o provedor de todo o conhecimento que fora organizado nesta dissertação e que me possibilitou ser o canal a manifestar estas ideias no mundo físico.

Este trabalho apenas pode ser concretizado graças aos incentivos da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM por manter viva em nossa nação o espírito educador que é a base para qualquer povo que sonha e atua por um amanhã melhor.

Agradeço também à Universidade Federal de Roraima - UFRR por implementar esse curso e, dentro de suas possibilidades, fornecer todo o suporte para que seus alunos possam se desenvolver intelectualmente.

Aos professores do PROFMAT - UFRR, por compartilharem seus conhecimentos e pelas palavras de incentivo.

É preciso insistir que tudo quanto fazemos em aula, por menor que seja, incide em maior ou menor grau na formação de nossos alunos.

(Antoni Zabala)

RESUMO

O ensino de Matemática no Ensino Médio representa uma etapa fundamental para o aprofundamento e a consolidação das habilidades desenvolvidas ao longo da Educação Básica. Além de sua relevância intrínseca, a Matemática desempenha um papel central no apoio a diversas áreas do conhecimento científico e às práticas sociais contemporâneas. Para que a aprendizagem ocorra de forma eficaz e significativa, é indispensável que os estudantes possuam um domínio mínimo dos conhecimentos matemáticos elementares, os quais funcionam como base para a assimilação de novos conteúdos. Partindo dessa perspectiva, e com base na análise de indicadores educacionais nacionais e locais — com foco específico no contexto do estado de Roraima — este estudo tem como objetivo principal oferecer ao professor de Matemática do Ensino Médio um material estruturado que auxilie na identificação e no fortalecimento dos conhecimentos prévios dos alunos. O material foi elaborado em consonância com as diretrizes do Documento Curricular de Roraima (DCRR) para o componente curricular de Matemática. A fundamentação teórica da pesquisa considerou aspectos interdisciplinares, incluindo os efeitos da dinâmica neural na aquisição do conhecimento matemático, a importância do reforço contínuo de saberes já adquiridos, o papel do pensamento crítico na construção do raciocínio matemático e a relevância da organização sequencial na resolução de problemas. Além disso, foram analisadas as competências e habilidades relacionadas aos conteúdos aritméticos e algébricos previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental, bem como materiais disponibilizados pelo Portal da Matemática, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Como produto desta investigação, foi desenvolvido um conjunto de propostas didáticas com o objetivo de servir como material de apoio para professores do Ensino Médio, a ser utilizado previamente à introdução dos conteúdos curriculares, sempre que se identificar a necessidade de retomada de conceitos fundamentais. Trata-se de um material aberto e adaptável, que pode ser ajustado conforme as especificidades de cada turma e o contexto escolar. Os temas abordados nas propostas didáticas incluem: o conceito de igualdade, operações com frações, operações algébricas básicas, estratégias de cálculo mental, porcentagens e dízimas periódicas.

Palavras-chaves: Operações Algébricas; Aritmética Básica; Propostas Didáticas; Resoluções de problemas.

ABSTRACT

The teaching of Mathematics in high school constitutes a critical stage for the deepening and consolidation of skills developed throughout basic education. In addition to its intrinsic importance, Mathematics plays a central role in supporting various domains of scientific knowledge and in addressing contemporary social challenges. For learning to be effective and meaningful at this level, it is essential that students demonstrate at least a foundational understanding of basic mathematical concepts, which serve as the structural basis for acquiring more advanced content. From this perspective, and based on the analysis of national and local educational indicators—with a particular focus on the state of Roraima—this study aims to provide high school Mathematics teachers with a structured pedagogical resource designed to assist in identifying and reinforcing students' prior knowledge. The material was developed in alignment with the guidelines established in the Documento Curricular de Roraima (DCRR) for the Mathematics curriculum at the high school level. The theoretical framework of the research integrates interdisciplinary elements, including cognitive and neuroscientific insights into the role of neural dynamics in mathematical learning, the ongoing reinforcement of previously acquired knowledge, the importance of critical thinking in the construction of mathematical reasoning, and the relevance of sequential organization in problem-solving processes. Furthermore, the study considered arithmetic and algebraic content outlined in the Base Nacional Comum Curricular (BNCC) for elementary education, as well as teaching resources made available by the Portal da Matemática of the Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). As the main outcome of this research, a set of didactic proposals was developed to support Mathematics teachers in the preparatory stages of instruction, to be used prior to the introduction of new curricular content when a need to revisit foundational concepts is identified. The material is designed to be open and adaptable, allowing for adjustments according to the specific needs of each classroom context. The topics covered in the didactic proposals include: the concept of equality, operations with fractions, basic algebraic manipulations, mental calculation strategies, percentages, and recurring decimals.

Keywords: Algebraic Operations; Basic Arithmetic; Didactic Sequences; Problem solving.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O processo de abstração matemática, mais especificamente o início da formalização dessa abstração é, por vezes, um "divisor de águas" na aceitação e interesse pela Matemática por parte do aluno. Para o professor do ensino básico, em especial o dos anos finais do ensino fundamental e o do ensino médio, é comum ouvir falas do tipo: "eu gostava mais da Matemática quando ela era apenas somar e subtrair" ou "para que eu vou utilizar isso na minha vida?"

A Matemática é uma área com enormes possibilidades de aplicações práticas, ainda que os interesses e motivações humanas sejam bastante discutíveis. No livro **O poder do pensamento matemático: A ciência de como não estar errado** (Ellenberg, p.11-16, 2015), em sua introdução, o autor descreve uma situação na qual o governo americano forma um grupo de pesquisa estatística que, em dado momento, precisou analisar como melhorar a blindagem de seus aviões de caça através da análise estatística dos aviões que retornavam à base militar e em quais partes eles eram mais atingidos. A solução citada para resolver este problema envolve utilizar os valores matemáticos obtidos das balas por pé quadrado observados nos aviões resgatados (1 pé corresponde mais ou menos a 30,50 cm) e a compreensão militar que explica o porque outros aviões foram abatidos, e consequentemente não retornaram.

No clássico conto de histórias árabes, **O homem que calculava**, do professor e escritor brasileiro Júlio César de Mello e Souza (mais conhecido como Malba Tahan), temos diversas narrativas que nos fazem ter algum encanto pela forma engenhosa e simples como a Matemática pode ser utilizada para resolver situação práticas. Tome como exemplo a situação descrita no capítulo III (Tahan, p.19, 1998), onde é narrada como fora feita a divisão de 35 camelos que deveriam ser repartidos por três irmãos, sendo que ao mais velho cabia a metade dos camelos (pouco menos que 18 camelos), ao irmão do meio cabia a terça parte (pouco menos que 12 camelos), e ao mais moço caberia a nona parte (poucos menos que 4 camelos). Um outro exemplo de popularização da Matemática está presente no capítulo VII (Tahan, p.35), no qual o Homem que Calculava faz menção ao problema dos quatro quatros, no qual é possível escrever todos os números inteiros de 0 a 100 utilizando quatro números quatro e operações matemáticas, além da explicação apresentada para justificar o porque da soma das prestações pagas em uma dívida não serem iguais à soma do saldo devedor.

Pelos exemplos acima citados, vemos que a Matemática pode ser percebida tão próxima do nosso cotidiano quanto queiramos. Desta forma, e voltando aos questionamentos iniciais, é natural pensarmos nas causas que levam o professor de Matemática a ouvir aquelas perguntas exemplificadas no início desta introdução e que parecem evidenciar um distanciamento do aluno do conhecimento matemático e de formas diversas para aplicá-lo às mais diversas situações.

CONTEXTOS NACIONAL E ESTADUAL

Uma das provas mais importantes que o Brasil realiza, à nível internacional, é a prova do PISA (sigla do inglês que significa Programa Internacional de Avaliação de Estudantes). O PISA é aplicado de 3 em 3 anos a jovens de 15 anos, idade na qual é esperado que os alunos tenham completado a etapa escolar básica (equivalente ao nosso Ensino Fundamental) e nela é avaliado o desempenho dos alunos em matemática, leitura e ciências. Considerando os resultados obtidos na última edição do exame, 2022, na qual participaram 81 países, os alunos brasileiros alcançaram a posição 65 dentre os países avaliados. Além disso, constatou-se que 75% dos nossos estudantes não alcançaram o nível básico em Matemática, o que significa não saber resolver problemas matemáticos simples como realizar a conversão de moedas, por exemplo, dizer quantos reais equivalem a 2 dólares sabendo que 1 dólar = R$ 4,93, segundo uma matéria publicada no site da organização Futura (Almeida, 2024).

O elevado percentual de alunos que não alcançaram o nível básico em Matemática evidencia um grave problema no letramento destes alunos para a leitura e compreensão matemática em contextos práticos e, provavelmente, em contextos teórico-abstratos.

Além disso, no próprio site do Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), depois da aplicação do PISA de 2018, no ano seguinte, o órgão cita que os alunos brasileiros apresentaram resultados médios estagnados desde 2009 nas três áreas avaliadas (Língua Portuguesa, Matemática e Ciências) e um desempenho significativamente inferior se comparado à média demais países da OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico), ou seja, ficamos praticamente uma década sem progredir no desenvolvimento matemático de nossos alunos (Inep, 2019).

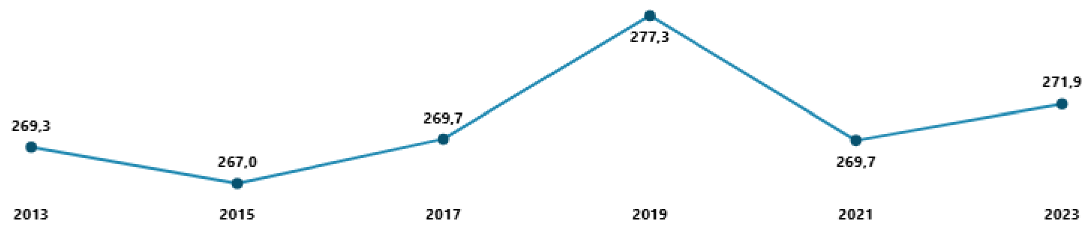
Tabela 1: Desempenho do Brasil no PISA 2018 em comparação com a média dos demais países da OCDE.

	Brasil	Média da OCDE
Leitura	413 (57º lugar)	487
Matemática	384 (entre 70º e 72º)	489
Ciências	404 (entre 65º e 67º)	489

Fonte: Inep (2019).

Já na questão estadual, os indicadores de Roraima também apresentam números não preocupantes. Na prova do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), cujos resultados variam entre 0 e 500 pontos (Inep, 2020), vemos que desde 2011 os resultados médios dos estudantes no Estado é de 257,9 pontos, o que os colocaria num nível intermediário de desempenho.

Figura 1: Proficiência média dos estudantes - 3ª/4ª série do Ensino Médio Tradicional - Matemática em Roraima



Fonte: Inep (2024).

Analisando os valores percentuais para distribuição dos estudantes e complementando a nossa analise da figura anterior, podemos notar pela **Tabela 2** que nas seis edições observadas os valores percentuais de alunos que atingiram um nível de proficiência em Matemática acima ou igual a 6 foram: 2,46% em 2013; 4,39% em 2015; 4,34% em 2017; 5,13% em 2019; 3,36% em 2021 e 3,3% em 2023. Sendo assim, concluímos que pouquíssimos alunos têm uma compreensão adequada de Matemática.

Tabela 2: Distribuição percentual dos estudantes por níveis da escala de proficiência - 3ª/4ª série do Ensino Médio Tradicional - Matemática em Roraima

Ano	NÍVEL 0	NÍVEL 1	NÍVEL 2	NÍVEL 3	NÍVEL 4	NÍVEL 5	NÍVEL 6	NÍVEL 7	NÍVEL 8	NÍVEL 9	NÍVEL 10
2013	28,13	20,99	18,69	14,25	9,70	5,78	1,76	0,38	0,27	0,05	0,00
2015	22,29	26,91	20,20	14,07	7,55	4,59	2,08	1,23	0,43	0,48	0,17
2017	29,04	20,74	18,63	14,49	7,56	5,20	2,57	1,22	0,49	0,06	0,00
2019	26,71	16,97	18,25	15,90	10,69	6,34	2,80	1,19	0,97	0,17	0,00
2021	27,39	18,14	18,73	16,83	9,86	5,69	1,85	1,21	0,24	0,06	0,00
2023	28,04	21,99	20,27	14,49	7,80	4,11	1,72	0,82	0,71	0,05	0,00

Fonte: Inep (2024).

Além disso, em todos os anos observados, mais de 45% dos estudantes têm ficado nos níveis 0 e 1, o que demonstra que grande parte de nossos estudantes não estão tendo um desempenho matemático adequado ao concluir a fase do Ensino Médio.

MOTIVAÇÕES QUE JUSTIFICAM O TRABALHO

Considerando os dados mencionados na **Tabela 2**, os quais contemplam também o percentual dos estudantes de Roraima, nos levam a inferir que o aluno está finalizando o Ensino Médio no referido Estado sem conseguir se desenvolver em níveis adequados para a resolução de situações em Matemática. Além disso, diante das experiências vivenciadas com os alunos do Ensino Médio, em especial os estudantes da 1ª série, da Escola Estadual Monteiro Lobato e suas dificuldades em compreender e/ou desenvolver-se em conceitos abstratos da matemática, este trabalho de conclusão de curso surge das necessidades, observadas na prática de sala de aula, de se enfrentar as lacunas conceituais e habilidades matemáticas não consolidadas por estudantes do Ensino Médio trazem no Ensino Fundamental. Tais defasagens comprometem não apenas o desempenho acadêmico, mas a própria relação dos alunos com a Matemática.

Como o trabalho é voltado para alunos do Ensino Médio e, tomando por base as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a perspectiva de atuação nesta proposta de ensino encontra amparo na competência geral 2; nas competências específicas de matemática do ensino fundamental, 1 e 3; e nas específicas de matemática do ensino médio, 3 e 5.

- **Competência geral 2 - C2**: exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BNCC, p.9).
- **Competência específica 1 - CEMEF1** (do ensino fundamental): reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BNCC, p.267).
- **Competência específica 3 - CEMEF3** (do ensino fundamental): compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções (BNCC, p.267).
- **Competência específica 3 - CEMEM3** (do ensino médio): utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BNCC, p.531).
- **Competência específica 5 - CEMEM5** (do ensino médio): investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BNCC, p.531).

PROBLEMA DE PESQUISA

Neste sentido, destacamos que o problema que norteará este trabalho é: Como melhorar o desempenho dos alunos do Ensino Médio em Matemática, considerando as lacunas formativas provenientes do Ensino Fundamental.

OBJETIVOS

Para resolver o problema mencionado anteriormente, o plano de metas delimitado tem como objetivos:

GERAL: Como melhorar o desempenho dos alunos do Ensino Médio em Matemática.

ESPECÍFICOS:

a) Realizar a confecção de propostas didáticas com conteúdos aritméticos e algébricos do Ensino Fundamental;

b) Popularizar a Álgebra e a aritmética básica;

c) Desenvolver os conhecimentos prévios de forma crítica para a aquisição de novos saberes matemáticos;

d) Facilitar a resolução ordenada de exercícios;

e) Motivar o interesse do professor por entender o funcionamento cerebral e como se dá a aquisição de conhecimento.

METODOLOGIA

Para desenvolver as competências descritas escolheu-se fazer uso, como metodologia diversificada, de propostas didáticas que foram inspiradas em sequências didáticas - um conjunto organizado de materiais de ensino destinados a permitir a aprendizagem de um determinado conteúdo. De acordo com LOPES (2018), as sequências didáticas são compostas de atividades planejadas, etapa por etapa, a fim de que o aluno atinja uma aprendizagem específica. Assim, o resultado do estudo será apresentado nesta dissertação, e também será confeccionado um produto com algumas propostas didáticas, podendo os professores do Ensino Básico utilizá-las em sala de aula para explicar algum procedimento algébrico ou aritmético, e também como ferramenta para fixação de algum conteúdo através de exercícios.

Neste sentido, esta dissertação foi desenvolvida dentro da seguinte linha de pesquisa: "Divulgação e Popularização da Matemática da Educação Básica", de conformidade com as diretrizes nacionais do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT, 2024). Sendo utilizados materiais teóricos de apoio para um melhor entendimento dos conceitos e propriedades matemáticas, além de literaturas que tragam motivação e sentido ao aluno.

CONTEÚDOS DOS DEMAIS CAPÍTULOS

Para atingirmos os objetivos, este trabalho tem a seguinte estrutura, a qual descreveremos em seguida:

O Capítulo 2 apresentará a teoria que servirá de suporte teórico para o trabalho, onde abordaremos sobre o conceito de hemisférios cerebrais e como estes estudos impactaram a forma como percebemos o funcionamento do cérebro humano, na sequência seremos apresentados aos estudos do neurocientista Stanislas Dehaene, que tem pesquisado como ocorre o processo de aquisição cognitiva e como podemos ter um maior proveito das **estruturas e caminhos neurais para potencializar o nosso aprendizado matemático**. Para a dar suporte à prática pedagógica fundamentos esta dissertação nos estudos Ausubel sobre educação e a **Teoria da Aprendizagem Significativa** e os trabalhos derivados desta teoria realizados por Marco Antônio Moreira com a **Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica**. A parte prática da proposta que possibilitará ao aluno ter uma **compreensão global do problema e dos métodos necessários**

à sua resolução foi sustentada nos estudos do matemático e educador George Polya. E, por último, finalizaremos este capítulo com a fundamentação que guiou a confecção e organização das propostas didáticas para a área de Matemática que foi objeto de estudo e pesquisa do professor da Universidade do Estado do Pará Natanael Freitas Cabral.

O **Capítulo 3** apresentará tabelas com os conteúdos do Ensino Médio, suas unidades temáticas e as indicações das respectivas propostas didáticas de conhecimentos prévios que fornecerão o suporte necessário para fazer a recuperação do aprendizado, caso se observe esta necessidade pelo professor.

No **Capítulo 4** serão apresentadas as propostas didáticas de conhecimentos algébricos e aritméticos do Ensino Fundamental II que o professor do Ensino Médio poderá utilizar com os seus alunos afim de realizar a recuperação do aprendizado nestes conteúdos. Cada subseção envolverá um assunto específico onde escolheu-se uma abordagem mais interativa entre o professor e os alunos. Buscamos com cada uma das sequências fornecer um guia que o professor utilizará, contudo a condução dependerá das particulares tanto do professor, do que ele considera ser relevante para seus alunos naquele momento de seu desenvolvimento escolar, quanto dependerá dos alunos e do que cada um se permitirá aprender e desenvolver durante as aulas de Matemática.

Na sequência, apresenta-se nas considerações finais as contribuições e as pesquisas futuras a serem desenvolvidas. Em seguida encontra-se as referências bibliográficas utilizadas para sua fundamentação teórica e elaboração. Por fim, incluem-se os Apêndices, que reúnem as avaliações e os materiais de apoio utilizados nas propostas didáticas.

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O capítulo se inicia explorando a intrincada relação entre neurociência, psicologia da aprendizagem e didática da matemática, buscando lançar luz sobre os processos cognitivos que sustentam a aquisição do conhecimento matemático. Através de uma lente interdisciplinar, investigaremos como os hemisférios cerebrais, com ênfase nos estudos pioneiros de Stanislas Dehaene, influenciam a capacidade de raciocínio lógico-matemático (Hasard, 2024).

Em seguida, mergulharemos na teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel segundo Costa Júnior *et al.* (2023), com as valiosas contribuições de Marco Antônio Moreira (Moreira, 2011), para compreender como a construção de significados e a ancoragem de novos conhecimentos em estruturas cognitivas preexistentes podem otimizar o aprendizado da matemática.

A resolução de problemas, um pilar central da matemática, será analisada com base nas quatro etapas propostas por George Polya (compreensão do problema, concepção e execução problema, e retrospecto), desvendando as estratégias e heurísticas que capacitam os aprendizes a enfrentar desafios matemáticos com confiança e autonomia (Polya, 2006).

Por fim, exploraremos o potencial das sequências didáticas como ferramentas pedagógicas que, ao estruturar o ensino em etapas progressivas e interconectadas, promovem a construção gradual do conhecimento matemático e o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas. Ao entrelaçar essas diferentes perspectivas, este capítulo busca fornecer um panorama abrangente e enriquecedor sobre os caminhos que conduzem à aprendizagem significativa e eficaz da matemática.

2.1 HEMISFÉRIOS CEREBRAIS

Segundo o neurocirurgião Leonardo Faria, em seu artigo para o portal "Meu cérebro" (Faria, 2024), o cérebro humano é dividido em dois hemisférios, o esquerdo e o direito. Inicialmente acreditava-se que as funções desempenhadas por cada um deles estava relacionada a processos distintos dentro do cérebro humano. No caso, que o hemisfério esquerdo estivesse ligado aos processos analíticos, lógicos, matemáticos e de pensamento sequencial enquanto que o hemisfério direito estivesse ligado aos processos criativos, intuitivos, emotivos e de pensamento holístico. Porém, com base nos últimos avanços em neurociência, chegou-se à conclusão de que os hemisférios cerebrais não atuam de forma dominante ao desempenhar alguma função. Conforme se lê em García e Lillo (2023):

> O culpado pode ter sido, ainda que não intencionalmente, o médico francês Paul Broca. Ele assegurou que "falamos com o hemisfério esquerdo", em referência às regiões cerebrais com mais influência sobre a função da linguagem, que se encontram naquele lado do cérebro [...]
> Quando um cantor memoriza a letra e a melodia de uma canção, por exemplo, as funções relativas à verbalização da letra encontram-se no seu lado esquerdo, mas ele irá usar o hemisfério direito para expressar a musicalidade da canção. Ou seja, é um trabalho de equipe.

2.1.1 Interconexão e complementaridade:

- Os hemisférios são interligados de diversas formas, a mais importante delas é através do corpo caloso, que é um feixe de fibras nervosas que permite a comunicação entre eles. Essa comunicação é essencial para tarefas complexas que exigem a integração de habilidades lógicas e criativas (Faria, 2024).

- A maioria das atividades cerebrais envolve a colaboração de ambos os hemisférios, embora um possa ser dominante em determinadas tarefas, como é o que ocorre com a linguagem e o hemisfério esquerdo, em algumas pessoas (Garcia; Lillo, 2023).

- O cérebro tem a capacidade de se adaptar e reorganizar, o que significa que as funções dos hemisférios podem se sobrepor e se compensar em caso de lesão ou necessidade. Essa plasticidade permite que as pessoas desenvolvam habilidades em diferentes áreas, independentemente da dominância de um hemisfério (Faria, 2024).

2.1.2 Stanislas Dehaene

Stanislas Dehaene, um renomado neurocientista cognitivo, contribuiu significativamente para a compreensão de como o cérebro processa números e aprende matemática.

Dehaene nasceu em 12 de maio de 1965 em Roubaix, na França. Iniciou sua formação profissional em matemática, obtendo seu diploma de mestrado em Matemática Aplicada e Ciência da Computação na Universidade de Paris VI. Posteriormente completou seu doutorado em Psicologia Experimental, em 1989. Depois de obter seu título, ele se uniu ao Instituto Nacional de Investigação em Saúde Médica da França (Institute national de la santé et de la recherche médicale, INSERM, em francês) como investigador no Laboratório de Ciências Cognitivas e Psicolinguística (Hasard, 2024).

Suas pesquisas oferecem insights valiosos sobre o papel da repetição no aprendizado, com nuances importantes:

- Dehaene reconhece que a repetição, especialmente a repetição espaçada (que consiste em uma série de períodos de estudos, alternado-os com testes e espaçados por intervalos cada vez mais longos), é crucial para consolidar a memória de longo prazo. Essa técnica auxilia na memorização de fatos matemáticos básicos, como tabuada e fórmulas (Dehaene, p.176).

- No entanto, ele alerta que a repetição mecânica, desprovida de compreensão, pode resultar em memorização superficial, sem a capacidade de aplicar o conhecimento em problemas complexos (Dehaene, p.164).

- A prática repetida de procedimentos, como a resolução de equações algébricas, leva à automatização. Isso libera recursos cognitivos para tarefas mais desafiadoras (Dehaene, p.182).

- Contudo, Dehaene enfatiza que a automatização deve ser precedida por uma sólida compreensão conceitual (Dehaene, p.183).

Em "É assim que aprendemos: Por que o cérebro funciona melhor do que qualquer máquina (ainda...)" (Dehaene, 2022), Dehaene explora os quatro pilares da aprendizagem eficaz, que podem ser aplicados em diversas áreas do conhecimento, incluindo a matemática. Nele o autor discute como atenção, o engajamento ativo, o feedback e a consolidação da memória influenciam o aprendizado, fornecendo percepções preciosas para educadores.

1. A **atenção** é essencial para selecionar as informações relevantes e filtrar as distrações. O cérebro precisa estar focado no que é importante para que a aprendizagem ocorra. Isso envolve mecanismos que permitem ao cérebro selecionar, amplificar e aprofundar o processamento de informações.

2. No **engajamento ativo**, vemos que a aprendizagem é mais eficaz quando o aluno está ativamente envolvido no processo, em vez de ser um receptor passivo de informações. Isso envolve a participação ativa, a experimentação, a formulação de hipóteses e a busca por soluções. O cérebro aprende muito melhor quando está ativamente engajado, buscando respostas e formulando hipóteses.

3. O **feedback de erro** é crucial para a aprendizagem. Os erros fornecem informações valiosas sobre o que precisa ser corrigido e aprimorado. O cérebro aprende com os erros, ajustando suas representações e estratégias.

4. A **consolidação** da memória é essencial para que o aprendizado se torne duradouro. Isso envolve a repetição espaçada, a revisão e a prática, que fortalecem as conexões neurais e transferem as informações da memória de curto prazo para a memória de longo prazo. É importante que o conhecimento seja consolidado, para que o cérebro possa acessá-lo futuramente.

2.2 APRENDIZAGEM SIGNIFICATICA

Para sustentar a ideia do aprendizado que vai além da memorização mecânica, utilizou-se como referência o livro "Aprendizagem significativa" (Moreira, 2011), de Marco Antônio Moreira, que está centrado na teoria de David Ausubel, grande psicólogo da educação americana.

David Paul Ausubel é um teórico americano da educação cuja família é de origem judaica e pobre. Ele nasceu em 1918, em Nova Iorque, e é o terceiro de cinco filhos. Em sua infância, Ausubel foi perseguido por membros da *Ku Klux Klan* sob a justificativa de que os europeus de classe baixa eram responsáveis pelo aumento da criminalidade nos EUA. Durante seu período escolar, ele relata que a escola reprimia e castigava os judeus com métodos abusivos. Todas estas experiências traumáticas e frustrantes o instigaram a investigar os processos de ensino e de aprendizagem e a propor o que seria a Teoria da Aprendizagem Significativa (Puhl; Müller, 2020).

Ausubel formou-se bacharel em psicologia pela *University of Pennsylvania*, em 1939; concluiu, no ano seguinte, mestrado na área de psicologia experimental na *Columbia University*; e em 1943 graduou-se em medicina pela *Middlesex University*, quando foi à

Alemanha prestar serviços de tratamentos médicos às pessoas deslocadas depois da Segunda Guerra Mundial. Ele trabalhou em diversas universidades como a *Long Island University*, a *University of Illinois*, o *Ontario Institute for Studies in Education*, a *University of Toronto* e a *City University of New York*, onde também foi diretor do Programa em Psicologia Internacional, entre outras. Em 1973 aposenta-se da vida acadêmica para dedicar-se por tempo integral à sua prática psiquiátrica. Após 1980, publicou diversos livros abordando a psicologia do desenvolvimento e da educação. Também publicou cerca de 150 artigos em periódicos psicológicos e psiquiátricos (Puhl; Müller, 2020).

Seu trabalho mais notável na área da aprendizagem, a Teoria da Aprendizagem Significativa, é centrado na ideia de que a aprendizagem significativa ocorre quando a pessoa consegue estabelecer conexões significativas entre novas informações e o conhecimento existente, que ela possui. Este aprendizado requer que o indivíduo compreenda e faça uso das novas informações de forma significativa, ou seja, a pessoa deve ser capaz de fazer sentido da informação e aplicá-la a seu conhecimento existente (Costa Júnior *et al.*, 2023).

> A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel é baseada na ideia de que a estrutura cognitiva existente de um indivíduo (organização, estabilidade e clareza do conhecimento em um determinado assunto) é o fator principal e básico que influencia o aprendizado e a retenção de novos materiais significativos. Ele descreve a importância de relacionar novas ideias à base de conhecimento existente de um aluno antes que o novo material seja apresentado (Costa Júnior *et al.*, 2023).

A teoria desenvolvida por Ausubel influenciou várias pesquisas e trabalhos na área de educação e sobre a forma como se ensina, nas mais diferentes áreas do conhecimentos humano. Uma das pessoas que se inspirou nos estudos de Ausubel foi o professor, pesquisador e autor Marco Antônio Moreira.

Marco Antônio Moreira nasceu no Rio Grande do Sul onde licenciou-se em Física pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) em 1965, concluiu o mestrado também em Física na mesma instituição (em 1972) e tornou-se Ph.D. em Ensino de Ciências pela *Cornell University* (em 1977), nos Estados Unidos. Moreira foi professor do Instituto de Física da UFRGS de 1967 até sua aposentadoria, em 2012. Além de ter trabalhado em outras instituições e de ter sido pesquisador CNPq, Moreira criou a Associação Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, participou da Comissão de Educação da União Internacional de Física Pura e Aplicada, fundou na CAPES a Área de Ensino de Ciências e Matemática, entre outras tantas colaborações não só em Ciências mas também no desenvolvimento da Teoria da Aprendizagem Significativa Crítica, derivada da Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel (De Paulo, 2018).

Em "Aprendizagem Significativa", Moreira (Moreira, 2011) explora como a estrutura cognitiva do aprendiz, ou seja, o conjunto de conceitos e proposições já existentes em sua mente, influencia a aquisição de novos conhecimentos. Para que a aprendizagem seja significativa, é necessário que o material a ser aprendido seja potencialmente significativo, ou seja, que faça sentido para o aluno e esteja relacionado com seus conhecimentos prévios.

O livro destaca a importância de identificar e ativar os conhecimentos prévios dos alunos antes de apresentar novos conteúdos. Isso pode ser feito por meio de perguntas, discussões, atividades exploratórias ou outros recursos que permitam aos alunos conectar o novo material com o que já sabem. O autor também aborda a diferença entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica. Na aprendizagem mecânica, as informações são armazenadas de forma arbitrária, sem conexão com a estrutura cognitiva do aluno. Esse tipo de aprendizagem tende a ser esquecido rapidamente e não contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e da capacidade de resolver problemas.

Além disso, a contribuição de Moreira à aprendizagem significativa reside no fato de que em suas pesquisas ele conclui (Moreira, p.177) que ela por si só não é suficiente, é necessário que ela seja também crítica. Em um mundo em constante mudança, não cabe mais aos indivíduos apenas absorver conhecimentos, mesmo que de maneira significativa, sem um olhar questionador a respeito destes mesmos conhecimentos. Considerando que vivemos em uma época onde o conhecimento humano está sendo construído em grande escala e que esta construção muda rapidamente, a aprendizagem significativa crítica permite lidar com o volume e as incertezas inerentes ao conhecimento, além de capacitá-lo a lidas com as incertezas e mudanças da vida contemporânea.

> A questão da incerteza do conhecimento não significa relativismo, indiferença, mas sim de que não tem sentido ensinar dogmaticamente. O conhecimento humano evolui. Os melhores modelos que temos hoje darão origem a outros mais ricos, mais elaborados, enfim, melhores ainda. É preciso, então, aprendê-los de uma perspectiva crítica, não dogmática (Moreira, p.175).

Para uma dissertação de mestrado focada na confecção de sequências didáticas que ajudem alunos do ensino médio a ler e interpretar problemas matemáticos, o trabalho de Moreira oferece um embasamento teórico sólido. Ao enfatizar a importância dos conhecimentos prévios sob uma perspectiva crítica, os professores podem ajudar os alunos a construir um aprendizado mais significativo e duradouro, que os capacite a enfrentar desafios matemáticos com confiança e autonomia.

> É através da aprendizagem significativa crítica que o aluno poderá fazer parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, não ser subjugado por ela, por seus ritos, mitos e ideologias. É através dessa aprendizagem que ele poderá lidar construtivamente com a mudança sem deixar se dominar por ela, manejar a informação, sem se sentir impotente sobre a sua grande disponibilidade e velocidade de fluxo, usufruir e desenvolver a tecnologia sem se tornar tecnófilo. Por meio dela, poderá trabalhar com a incerteza, a relatividade, a não-causalidade, a probabilidade, a não-dicotomização das diferenças, com a ideia de que o conhecimento é construção (ou invenção) nossa, que apenas representamos o mundo e nunca o captamos diretamente (Marco, p.175).

2.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Para colaborar na organização necessária à resolução de problemas utilizou-se como base a obra "A Arte de Resolver Problemas" (Polya, 2006), de George Polya. Esta obra oferece um guia abrangente para a resolução de problemas.

Polya nasceu na Hungria, em 1887, onde frequentou a Universidade de Budapeste com a intenção de estudar Direito. Após um semestre desistiu da disciplina e se dedicou à Língua e à Literatura e, em seguida, à Filosofia. Nesta última, um professor o aconselhou a estudar algo de Física e de Matemática para ajuda-lo na compreensão da disciplina de Filosofia. Isto acabou chamando sua atenção pois ele encontrou na Matemática um campo fértil e por desbravar, onde ele poderia aplicar seus conhecimentos físicos e filosóficos. Além de uma produção com mais de 250 artigos, Polya escreveu o livro "How to Solve It", que foi traduzido para 15 idiomas e vendeu milhões de cópias. Ele trabalhou na Universidade Stanford entre os anos de 1940 e 1953, quando se aposentou, porém continuou a fornecer contribuições inovadoras para a matemática até os 90 anos, sendo um dos mais extraordinários matemáticos de sua geração (Dembart, 1985).

Em 1985, ano de sua morte, o jornal americano Los Angeles Times escreveu (Dembart, 1985):

> George Polya, um dos matemáticos mais notáveis do século XX, que fez contribuições fundamentais para uma ampla gama de tópicos e para a teoria da resolução de problemas, [...]
> Além disso, após a aposentadoria, Polya dedicou-se à educação matemática, sendo pioneiro na abordagem de resolução de problemas para o ensino de matemática. Em 1963, a Mathematical Assn. of America concedeu-lhe o prêmio por serviços prestados "por sua influência construtiva na educação matemática no sentido mais amplo".

Em "A Arte de Resolver Problemas", Polya apresenta um método de quatro etapas que visa desenvolver o pensamento crítico e a capacidade de resolver problemas em estudantes de todos os níveis. O livro enfatiza que a resolução de problemas é uma habilidade que pode ser aprendida e aprimorada por meio da prática e da reflexão. Polya argumenta que, ao seguir um processo estruturado, os alunos podem desenvolver a confiança e a capacidade de abordar problemas complexos de forma eficaz.

2.3.1 As quatro etapas da resolução de problemas de Polya

- Compreensão do problema: esta etapa envolve a leitura cuidadosa do problema, a identificação das informações relevantes e a definição do que está sendo solicitado. É incentivado aos alunos fazerem perguntas como: "Qual é a incógnita?", "Quais são os dados?" e "Quais são as condições?" (Polya, p.5).

- Concepção de um plano: aqui os alunos desenvolvem uma estratégia para resolver o problema. Isso pode envolver a identificação de padrões, a utilização de analogias, a divisão do problema em partes menores ou a criação de um diagrama (Polya, p.7).

- Execução do plano: esta etapa envolve a implementação da estratégia desenvolvida na etapa anterior. Polya enfatiza a importância de verificar cada passo e de ser preciso nos cálculos (Polya, p.10).

- Retrospecto: esta etapa envolve a revisão da solução para verificar se ela está correta e se há outras maneiras de resolver o problema. Polya incentiva os alunos a refletir sobre o processo de resolução de problemas e a identificar o que funcionou bem e o que poderia ser melhorado (Polya, p.12).

Como noticiado na publicação do Los Angeles Times (1985) a respeito de uma citação feita pela Mathematical Assn. of America: "A resolução de problemas *à la Polya* serve não apenas para desenvolver a habilidade matemática, mas também ensina o raciocínio construtivo em geral".

2.4 PROPOSTAS DIDÁTICAS

O suporte para a construção das propostas didáticas no contexto do ensino de matemática - inspiradas em sequências didáticas - foi encontradas no livro "Sequências Didáticas: Estrutura e Elaboração", de Natanael Freitas Cabral. Embora diversos teóricos tenham, em determinados momentos, proposto suas próprias concepções sobre o que caracteriza uma sequência didática, neste trabalho adotamos a perspectiva do pedagogo e educador espanhol Antoni Zabala.

Zabala (1998) considera que as **sequências didáticas** são "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos"(Zabala, p.18). Ele ainda cita a importância da sistematização da prática educativa, identificando todas as variáveis metodológicas que influenciam nas etapas de execução das sequências didáticas, ou unidades de intervenção pedagógica, como o livro também se refere, fazendo uma análise de cada uma em separado, contudo, levando em conta que a avaliação global é o que permitirá atestar a eficácia desta unidade de intervenção ou não.

Um outro educador matemático que vem contribuindo com os estudos a respeito de sequências didáticas na área de Matemática é o professor Natanael Freitas Cabral, que é licenciado em Matemática, bacharel em Teologia e mestre em Educação em Ciências e Matemática, todos os títulos obtidos na Universidade Federal do Pará (UFPA). Além disso, é doutor em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Atualmente, atua na Universidade do Estado do Pará (UEPA), onde coordena o Laboratório de Educação Matemática (LABEM/UEPA) e lidera o Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ). Possui experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática.

Cabral (2017) concebeu em suas adaptações para o ensino-aprendizagem de Matemática no ensino básico seis categorias estruturantes para materializar o texto de uma sequência didática, são eles: **Intervenção Inicial (I_i)**, **Intervenção Reflexiva (I_r)**, **Intervenção Exploratória (I_e)**, **Intervenção Formalizante (I_f)**, **Intervenção Avaliativa Restrita (IA_r)** e **Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a)** (Cabral, p.40).

- A **Intervenção Inicial (I_i)** serve para que o professor incentive no aluno o saber empírico-intuitivo a respeito das regularidades funcionais de um conceito. A (I_i) tem como objetivo central instigar os estudantes à percepção de determinados elementos fundamentais do pensamento matemático que, quando articulados a outras compreensões derivadas dessa percepção inicial, podem desempenhar um papel significativo na reconstrução conceitual almejada. (Cabral, p.41).

- A **Intervenção Reflexiva (I_r)** se manifesta através de um questionamento a respeito de um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução. Nesta etapa o aluno é orientado a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências (Cabral, p.41).

- A **Intervenção Exploratória (I_e)** busca aprofundar o olhar do aluno a cerca das respostas obtidas a partir das (I_r). "Os alunos são convidados para fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações"(Cabral, p.41).

Conforme Cabral (2017, p.42) menciona, as regularidades observadas nos dois tipos de intervenções anteriores, ainda que de forma empírica, nesta etapa do conhecimento matemático, a nível de ensino básico, são aceitas pelas alunos como "verdades". Ainda que não contemplem todo o rigor matemático exigido nos cursos de graduação, onde se trabalha com níveis mais elevados de rigor matemático, este tipo de perspectiva é o suficiente para convencer o aluno de um fato.

As interações combinadas das **Intervenções Reflexivas e Exploratórias** configuram o que o autor chama de **intervenções estruturantes pré-formais**, que não são estimuladas em contextos dominados pela dinâmica expositiva. A partir destas **intervenções estruturantes** o professor pode se apropriar destas verdades sugeridas pelos alunos para enunciar a **Intervenção formalizante** (Cabral, p.42).

- A **Intervenção Formalizante** (I_f) é a formalização matemática das "redescobertas"feitas pelos alunos. Suas percepções serão consolidadas com uma linguagem mais abstrata a fim de satisfazer as exigências do saber disciplinar formal próprio da Matemática (Cabral, p.42).
- A **Intervenção Avaliativa Restrita** (IA_r) é composta por um conjunto de primeiros parâmetros que ajudarão o professor a aferir a aprendizagem do conceito objeto de reconstrução. As atenções devem ser voltadas para as implicações conceituais do objeto reconstruído, juntamente com a justificativa de procedimentos adotados. Isto significa Entender o objeto matemático em estudo e entender como são justificados e operados os algoritmos decorrentes. (Cabral, p.43).
- A **Intervenção Avaliativa Aplicativa** (IA_a) tem por objetivo resolver os problemas de aplicação. Nesta etapa exige-se um nível mais elevado de avaliação do processo de apreensão conceitual, que leva o aluno a mobilizar as noções conceituais associadas aos algoritmos em situações que envolvam resolução de problemas aplicados, sejam eles em contextos reais e/ou abstratos, obviamente, considerando o seu nível de ensino (Cabral, p.43).

2.5 INTEGRAÇÃO ENTRE TEORIA COGNITIVA E ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Ao integrar diferentes abordagens anteriormente expostas — desde os estudos neurocognitivos de Dehaene, passando pelas teorias da aprendizagem de Ausubel e Moreira, até a resolução de problemas proposta por Polya e a inspiração na estruturação em sequência didática de Cabral — esta pesquisa propõe um olhar ampliado sobre o ensino e a aprendizagem matemática, especificamente da Álgebra e das operações básicas. Compreender os mecanismos internos do cérebro, respeitar os conhecimentos prévios dos alunos, fomentar o pensamento crítico e utilizar problemas reais como ponto de partida para o ensino são caminhos que se complementam. Juntos, oferecem uma base sólida para propostas didáticas que visam uma aprendizagem matemática mais profunda, crítica e duradoura.

Embora esta pesquisa não tenha adotado um modelo fixo de proposta didática, a organização pedagógica, em sequências didáticas, sugerida por Natanael Freitas Cabral serviu como inspiração para a produção das propostas didáticas desenvolvidas. A intenção não foi estruturar intervenções padronizadas ou rígidas, mas sim construir propostas mais abertas e flexíveis, que respeitassem a realidade dos alunos, seus ritmos de aprendizagem e a dinâmica própria das aulas.

Cabral propõe uma estrutura baseada em situações que provocam a aprendizagem e valorizam o conhecimento prévio dos estudantes, o que se alinha aos princípios da aprendizagem significativa. Assim, a pesquisa buscou incorporar essa inspiração de forma crítica e criativa, privilegiando a construção de propostas didáticas que promovessem o engajamento, o raciocínio autônomo e o diálogo constante entre teoria e prática.

Capítulo 3

CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO

Afim de ajudar o professor do Ensino Médio a localizar as propostas didáticas de conhecimentos prévios que lhe servirão de suporte, abaixo relacionamos os conteúdos trabalhados em cada série do Ensino Médio na rede estadual de Roraima, separados por bimestre, com os possíveis conhecimentos algébricos e/ou aritméticos que os alunos necessitarão.

Na primeira coluna estão relacionadas as **Habilidades** a serem desenvolvidas com o estudo de conteúdos (objetos do conhecimento). Estes códigos são os mesmos utilizados na BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Já na segunda coluna temos os **Objetos do conhecimento** que são os conteúdos propriamente ditos que os alunos trabalharão ao longo do bimestre.

Com base na BNCC e na organização seguida pela Secretaria de Estado de Educação e Desporto de Roraima (SEED-RR), diferentes habilidades e objetos do conhecimento podem ser trabalhados em séries diferentes a depender do enfoque que for dado ao assunto. Por exemplo: no 1º bimestre da 1ª série os alunos desenvolverão a habilidade **EM13MAT104**, esta mesma será retomada no 1º bimestre agora da 2ª série; algumas habilidades serão desenvolvidas ao longo de todo o Ensino Médio, como é o caso da habilidade **EM13MAT315**, que é trabalhada no 4º bimestre da 1ª série, no 2º bimestre da 2ª série e no 1º bimestre da 3ª série.

Já a coluna **Propostas didáticas** fornece os números da(s) proposta(s) didática(s) de conhecimentos prévios, aritméticos e/ou algébricos, que o professor poderá consultar para obter maiores detalhes de como fazer a recomposição da aprendizagem para que o aluno consiga um melhor desempenho no conteúdo específico do Ensino Médio. Aqui listamos o que, na visão do autor, são os conhecimentos prévios mínimos que se exige do aluno, nada impede o professor de desenvolver o objeto de conhecimento de tal forma que o aluno necessite de outros conhecimentos prévios. Por exemplo, para a habilidade **EM13MAT103** que é vista no 1º bimestre da 1ª série, indicamos que as propostas didáticas a se trabalhar referem-se às **frações (4.2)** e às **técnicas de cálculo (4.4)**, contudo o professor pode querer inserir dízimas periódicas no desenvolvimento de algum objeto de conhecimento. Neste caso ele poderá utilizar uma sequência didática de conhecimentos prévios que não fora sugerida pela tabela. Com relação a habilidade **EM13MAT105**, proposta para ser desenvolvida no 4º bimestre da 1ª série e no 2º bimestre da 2ª série, a nível de Ensino Médio, necessita apenas de conhecimentos prévios geométricos do Ensino Fundamental, o que não é o foco deste trabalho, e consequentemente, a ausência de proposta didática.

Na sequência, apresentaremos as referidas tabelas, separadas por série do Ensino Médio e por bimestre.

Tabela 3: Relação do conteúdos da **1ª série (1º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Continua)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.	-Razão, proporção, porcentagem. -Critérios de arredondamento para a representação e compreensão de dados de natureza socioeconômicas.	4.1; 4.2; 4.4; 4.5
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica, etc.).	-Razões e produtos entre diferentes grandezas (velocidade, densidade de um corpo, densidade demográfica, potência elétrica, bytes por segundo, etc.). -Conversão entre unidades compostas.	4.2; 4.4
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.	-Notação científica. -Algarismos significativos e duvidosos. -Técnicas de arredondamento. -Estimativa e comparação de valores em notação científica e em arredondamentos. -Noção de erro em medições.	4.6

Tabela 4: Relação do conteúdos da **1ª série (1º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Conclusão)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medidas de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.	-Sistema Internacional de medidas: principais unidades e conversões. -Bases de sistemas de contagem (base decimal, base binária, base sexagesimal, etc.). -Grandezas e unidades de medidas (unidades tradicionais e as relacionadas a contextos específicos como, por exemplo, agrárias e indígenas). -Grandezas e unidades de medidas de informática (principais unidades de armazenamento de dados na informática (bit, byte, kilobyte, megabyte, gigabyte, terabyte, etc) e transferência de dados (Mbps, Kbps, Gbps, etc)). -Transformações entre diferentes unidades de medida.	4.2; 4.4
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	-Análise de dados de uma tabela com duas variáveis, cujos valores representam uma função polinomial de 1º grau. -Representação gráfica de dados. -Lei de formação das funções.	4.4

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Tabela 5: Relação do conteúdos da **1ª série (2º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Continua)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.	-Representação gráfica dos pontos no planos cartesiano a fim de identificar, quando for o caso, a reta de regressão linear. -Identificação de relação entre variáveis (crescimento/decrescimento). -Equação da reta: coeficiente angular.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	-Funções: análise e interpretação de gráficos e de expressões algébricas. -Sistema e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas. -Variação de grandezas, como velocidade, concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações e índices econômicos.	4.1; 4.3; 4.4
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	-Proporcionalidade na variação entre grandezas. -Funções polinomiais do 1º e 2 graus.	4.1; 4.3; 4.4

Tabela 6: Relação do conteúdos da **1ª série (2º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Conclusão)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguido os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.	-Funções afins, lineares e constantes. -Proporcionalidade na variação de funções. -Construção e análise de gráficos de funções polinomiais do 1º grau.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguido os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.	-Funções polinomiais do 2º grau. -Construção e análise de gráficos de funções polinomiais do 2º grau. -Estudo do comportamento da função quadrática (intervalos de crescimento/decrescimento, ponto de máximo/mínimo e variação da função).	4.1; 4.2; 4.3; 4.4
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.	-Análise de dados de uma tabela com duas variáveis, cujos valores representam uma função polinomial de 2º grau. -Representação gráfica dos dados. -Lei de formação das funções. -Concavidade da parábola.	4.1; 4.3; 4.4

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Tabela 7: Relação do conteúdos da **1ª série (3º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Continua)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies planas, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.	-Pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas. -Estudo dos zeros da função. -Coordenadas do vértice da parábola.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás, etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	-Análise gráfica e algébrica de funções definidas por mais de uma sentença (por partes): domínio, crescimento e decrescimento, imagem e contradomínio. -Conversão entre as representações gráfica e algébrica.	4.3
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.	-Conceitos estatísticos: população e amostragem. -Gráficos utilizados pela estatística: elementos de um gráfico. -Confiabilidade de fontes de dados. -Correção no traçado de gráficos estatísticos. -Medidas de tendência central e de dispersão. -Leitura de tabelas e gráficos, inclusive, de situações que possam induzir a erros de interpretação.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.5

Tabela 8: Relação do conteúdos da **1ª série (3º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Conclusão)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.	-Representação gráfica da variação de áreas de regiões poligonais e respectivos perímetros desses polígonos regulares, com classificação das funções envolvidas.	4.1; 4.3; 4.4
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes, etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	-Cálculo de área de diferentes superfícies planas (por decomposição, composição ou aproximação). -Expressões algébricas.	4.3; 4.4

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Tabela 9: Relação do conteúdos da **1ª série (4º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Continua)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.	Sistema métrico decimal e unidades não convencionais. -Resolução de problemas com funções, fórmulas e expressões algébricas em medições e cálculos de: perímetro; área; volume; capacidade e massa.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruências e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	-Relações métricas no triângulos retângulo (leis dos senos e dos cossenos). -Congruência de triângulos (por transformações geométricas - isometria). -Semelhança de triângulos (por transformações geométricas - homotetia).	4.1; 4.3; 4.4
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).	-Geometria das transformações. -Isometria (reflexão, translação e rotação). -Homotetia (ampliação e redução). -Noções de geometria dos fractais.	–

Tabela 10: Relação do conteúdos da **1ª série (4º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Conclusão)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	-Sistemas de equações lineares. -Representação gráfica de funções lineares.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (Deve-se compreender que essa habilidade não está ligada a um único objeto de conhecimento, e nem apenas a essa unidade temática).	-Identificar e reunir as informações necessárias e elaborar uma sequência de etapas a serem seguidas na resolução de problemas práticos. -Noções elementares de matemática computacional: sequências, laços de repetição, variável e condicionais. -Introdução à linguagem de programação por meio de fluxogramas.	4.3; 4.4
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. (Deve-se compreender que essa habilidade não está ligada a um único objeto de conhecimento, e nem apenas a essa unidade temática.).	-Algoritmos e sua representação por fluxogramas. -Não serão apresentados objetos de conhecimento específicos, pois, essa habilidades pode ser desenvolvida por meio de diversos objetos de conhecimentos uma vez que a mesma é de caráter metodológico.	4.3; 4.4

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Tabela 11: Relação do conteúdos da **2ª série (1º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Continua)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.	-Razão, proporção, porcentagem. -Critérios de arredondamento para a representação e compreensão de dados de natureza socioeconômicas.	4.1; 4.2; 4.4; 4.5
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	-Funções: análise e interpretação de gráficos e de expressões algébricas. -Sistemas e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas. -Variação de grandezas, como velocidade, concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações e índices econômicos.	4.3; 4.4
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.	-Conceitos estatísticos: população e amostragem. -Gráficos utilizados pela estatística: elementos de um gráfico. -Confiabilidade de fontes de dados. -Correção no traçado de gráficos estatísticos. -Medidas de tendência central e de dispersão. -Leitura de tabelas e gráficos, inclusive, de situações que possam induzir a erros de interpretação.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.5

Tabela 12: Relação do conteúdos da **2ª série (1º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Conclusão)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	-Relações métricas no triângulo retângulo (leis dos senos e dos cossenos). -Congruência de triângulos (por transformações geométricas - isometria). -Semelhança de triângulos (por transformações geométricas - homotetia).	4.1; 4.2; 4.4
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (Deve-se compreender que essa habilidade não está ligada a um único objeto de conhecimento, e nem apenas a essa unidade temática).	-Identificar e reunir as informações necessárias e elaborar uma sequência de etapas a serem seguidas na resolução de problemas práticos. -Noções elementares de matemática computacional: sequências, laços de repetição, variável e condicionais. -Introdução à linguagem de programação por meio de fluxogramas.	4.3

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Tabela 13: Relação do conteúdos da **2ª série (2º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Continua)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).	-Geometria das transformações. -Isometria (reflexão, translação e rotação). -Homotetia (ampliação e redução). -Noções de geometria dos fractais.	–
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. (Deve-se compreender que essa habilidade não está ligada a um único objeto de conhecimento, e nem apenas a essa unidade temática).	-Algoritmos e sua representação por fluxogramas. -Não serão apresentados objetos de conhecimento específicos, pois, essa habilidade por ser desenvolvida por meio de diversos objetos de conhecimentos uma vez que a mesma é de caráter metodológico.	4.3
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.	-Funções exponenciais: potenciação envolvendo os diversos tipos de expoentes, propriedades gerais, gráficos, equações e inequações exponenciais, no contexto da matemática financeira.	4.1; 4.3; 4.4

Tabela 14: Relação do conteúdos da **2ª série (2º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Conclusão)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	-Logaritmo: definição de logaritmo, propriedades, mudança de base. -Funções logarítmicas: definição, gráfico, equações e inequações. -Relação entre a variação exponencial e a logarítmica.	4.1; 4.3; 4.4
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento e decrescimento) de cada função.	- Estudo e análise de gráficos e tabelas que representam funções exponenciais e logarítmicas: Domínio; Imagem; Contradomínio; Crescimento ou decrescimento.	4.1; 4.3; 4.4
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.	-Principais razões trigonométricas no triângulo retângulo. -Trigonometria no ciclo trigonométrico. -Unidades de medidas de ângulos (radianos). -Funções seno e cosseno e suas representações gráficas.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Tabela 15: Relação do conteúdos da **2ª série (3º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Continua)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.	-Cálculos de porcentagens. -Conceitos de matemática financeira: juros simples e compostos, taxas equivalente, nominais e efetivas. -Valor presente e valor futuro, por meio de sistemas de amortização e noções de fluxo de caixa. -Funções exponenciais e logarítmicas.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.5
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.	-Juros simples e compostos. -Estudo de padrões, associando os juros simples com crescimento linear e os juros compostos com o exponencial.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.5
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (P.A.) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	-Análise dos termos de uma P.A., a fim de identificar um padrão e associá-lo a uma função polinomial do 1º grau, tendo o conjunto $\mathbb{N}$ como domínio.	4.1; 4.3; 4.4

Tabela 16: Relação do conteúdos da **2ª série (3º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Conclusão)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (P.G.) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	-Análise dos termos de uma P.G. a fim de identificar um padrão e associá-lo a uma função exponencial, tendo o conjunto $\mathbb{N}$ como domínio.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.	-Planejamento e execução de pesquisa amostral. -Medidas de tendência central: média, mediana e moda. -Produção de gráficos de pesquisa para elaborar de relatório (histograma e polígonos de frequência).	4.4; 4.5

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Tabela 17: Relação do conteúdos da **2ª série (4º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Continua)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.	-Amostragem. -Tratamento e representação de dados em tabelas e gráficos de frequência.	4.4; 4.5
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).	-Introdução da estatística descritiva. -Medidas de tendência central: média, moda e mediana. -Medidas de dispersão: amplitude, variância e desvio padrão.	4.1; 4.3; 4.4
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.	-Estudo de polígonos regulares e suas características: como ângulos internos e externos, com aplicação na composição de ladrilhamento em superfícies planas. -Linguagem algébrica: fórmulas e habilidades de generalização.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4

Tabela 18: Relação do conteúdos da **2ª série (4º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Conclusão)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT509) Resolver e elaborar que envolvem o cálculo de áreas totais e de volume de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	-Conceitos, elementos e classificação dos sólidos geométricos (prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera). -Área total e volume dos sólidos geométricos.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o Princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.	-Cálculo do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, inclusive com o Princípio de Cavalieri.	4.2; 4.4

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Tabela 19: Relação do conteúdos da **3ª série (1º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Continua)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.	-Sistema Internacional de medidas: principais unidade e conversões. -Bases de sistemas de contagem (base decimal, base binária, base sexagesimal, etc.). -Grandezas e unidades de medidas (unidades tradicionais e as relacionadas a contextos específicos como, por exemplo, agrárias e indígenas). -Grandezas e unidades de medidas de informática (principais unidades de armazenamento de dados na Informática (bit, byte, kilobyte, megabyte, gigabyte, terabyte, etc.) e transferência de dados (Mbps, Kbps, Gbps, etc.).) -Transformações entre diferentes unidade de medida.	4.2; 4.4; 4.6
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	-Sistemas de equações lineares. -Representação gráfica de funções lineares.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4

Tabela 20: Relação do conteúdos da **3ª série (1º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Conclusão)

Habilidades	Objetos do conhecimento	Propostas didáticas
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (Deve-se compreender que essa habilidade não está ligada a um único objeto de conhecimento, e nem apenas a essa unidade temática).	-Identificar e reunir as informações necessárias e elaborar uma sequência de etapas a serem seguidas na resolução de problemas práticos. -Noções elementares de matemática computacional: sequências, laços de repetição, variável e condicionais. -Introdução à linguagem de programação por meio de fluxogramas.	4.3
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. (Deve-se compreender que essa habilidade não está ligada a um único objeto de conhecimento, e nem apenas a essa unidade temática).	-Algoritmos e sua representação por fluxogramas. -Não serão apresentados objetos de conhecimento específicos, pois, essa habilidade pode ser desenvolvida por meio de diversos objetos de conhecimentos uma vez que a mesma é de caráter metodológico.	4.3

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Tabela 21: Relação do conteúdos da **3ª série (2º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Continua)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.	-Principais razões trigonométricas no triângulos retângulo. -Trigonometria no ciclo trigonométrico. -Unidades de medidas de ângulos (radianos). -Funções seno e cosseno e suas representações gráficas.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.	-Planejamento e execução de pesquisa amostral. -Medidas de tendência central: média, mediana e moda. -Medidas de dispersão: amplitude, variância e desvio padrão. -Produção de gráficos de pesquisa para elaboração de relatórios (histograma e polígonos de frequência).	4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.5
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.	-Amostragem. -Tratamento e representação de dados em tabelas e gráficos de frequência.	4.4; 4.5

Tabela 22: Relação do conteúdos da **3ª série (2º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios. (Conclusão)

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).	-Introdução da estatística descritiva. -Medidas de tendência central: média, moda e mediana. -Medidas de dispersão: amplitude, variância e desvio padrão.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.6
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de área totais e de volume de prismas, pirâmides e corpos redondos em situação reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	-Conceitos, elementos e classificação dos sólidos geométricos (prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera). -Área total e volume dos sólidos geométricos.	4.2; 4.4

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Tabela 23: Relação do conteúdos da **3ª série (3º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios.

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.	-O estudo de ângulos e áreas na projeção cartográfica, como, por exemplo, cilíndrica, cônica, plana ou senoidal. -Inscrição e circunscrição de sólidos geométricos.	4.4
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.	-Esquemas para contagem de dados: diagrama de árvore, listas, desenho, etc. -Princípio aditivo e multiplicativo. -Noções de combinatória: agrupamentos ordenáveis (arranjos) e não ordenáveis (combinações).	4.3; 4.4;
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.	-Noções básicas de probabilidade: espaço amostral de em experimento aleatório e eventos de um espaço amostral. -Contagem de possibilidades. -Cálculo de probabilidades simples.	4.2; 4.4; 4.5; 4.6
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.	-Cálculo de probabilidades: Espaço amostral discreto; Espaço amostral contínuo; Eventos equiprováveis e não equiprováveis. -Possibilidades e cálculo de probabilidade.	4.2; 4.4; 4.5; 4.6

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Tabela 24: Relação do conteúdos da **3ª série (4º bimestre)** e seus respectivos objetos de conhecimento e propostas didáticas de conhecimentos prévios.

Habilidades	**Objetos do conhecimento**	**Propostas didáticas**
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro, etc.).	-Porcentagem: cálculo de taxas, índices e coeficientes. -Análise combinatória. -Probabilidade simples e condicional. -Eventos sucessivos, mutuamente exclusivos e não mutuamente exclusivos. -Estatística: distribuições estatísticas, distribuição normal e medidas de posição (mediana, quartis, decis e percentis). -Riscos probabilísticos para identificação de causas e efeitos.	4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.5; 4.6
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.	-Eventos dependentes e independentes. -Probabilidade de eventos relativos a experimentos aleatórios sucessivos (Probabilidade da união de eventos; probabilidade condicional; probabilidade da intersecção de eventos).	4.2; 4.4; 4.5
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.	-Interpretação e comparação de dados estatísticos, utilizando diferentes tipos de diagramas e gráficos, com a identificação do gráfico mais adequado para o conjunto de dados analisado.	4.5

Fonte: adaptado de SEED-RR (2021).

Capítulo 4

PROPOSTAS DIDÁTICAS

Nesse capítulo iremos desenvolver as propostas didáticas que serão trabalhadas como suporte para os conteúdos do Ensino Médio.

4.1 O SINAL DE IGUAL (=)

- **Conteúdos a serem trabalhados:** Adição e multiplicação de números, e suas respectivas operações inversas; resolução de expressões numéricas e de expressões algébricas; resolução de equação de 1º grau.
- **Série:** Ensino Médio.
- **Tema da proposta didática:** Utilizando a igualdade na resolução de problemas que possuam valores desconhecidos.
- **Objetivos da proposta didática:**
  - Identificar contextos nos quais o conceito de igualdade são aplicados;
  - Fornecer diferentes abordagens numéricas e algébricas que facilitem o entendimento da permanência da igualdade;
  - Motivar a resolução organizada e estruturada de expressões numéricas e algébricas.
- **Unidade temática:** Álgebra.
- **Objeto de conhecimento:** Propriedades da igualdade.
- **Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:**
  - EF06MA14 - Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas;
  - EM07MA18 - Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

- **Tempo de execução da proposta didática:** 3 aulas + 1 aula de avaliação (**APÊNDICE A**).
- **Materiais necessários:** caderno, caneta, lápis e borracha (para o aluno).

SINOPSE: A primeira aula da proposta didática se iniciará questionando os alunos sobre qual é o entendimento que eles têm do conceito de *igualdade* em Matemática. À partir de suas respostas buscará selecionar aquelas respostas que mais estiverem alinhadas com os objetivos descritos acima. Em seguida, avançaremos nosso olhar sobre a Álgebra explicando aos alunos as regras básicas da resolução de equação de 1º grau e mostrando o porque procedemos da forma com que muitos deles aprenderam a memorizar. Na segunda aula, falaremos também sobre a importância de se resolver uma equação de forma estruturada e, ao final, na terceira aula, utilizaremos os conhecimentos algébricos dos alunos para modelar problemas e resolver equações de 1º grau, onde eles deverão utilizar as quatro etapas da resolução de problemas a fim de determinar o que se pede.

4.1.1 Aula 1 - Elemento neutro da adição e elemento neutro da multiplicação

Primeiramente, apresente aos alunos a tarefa dizendo que vocês retomarão o conceito de igualdade na resolução de equações e de expressões numéricas. Provavelmente eles poderão achar fácil já que utilizaram a igualdade até o atual nível escolar, contudo, a tarefa do professor é motivar neles um novo olhar sobre este elemento tão comum mas ao mesmo tempo tão desconhecido e cujas particularidades passam desapercebidas ou não são mencionadas em uma primeira explicação.

Ativação dos conhecimentos prévios: Antes de se aprofundar nos tópicos matemáticos, pergunte aos alunos o que eles entendem pelo conceito de igualdade. Se eles não souberem dar uma definição, então peça-os que deem exemplos de quando este conceito pode ser utilizado. A partir daí, anote no quadro as sugestões mais interessantes e que possam ser utilizadas para os propósitos matemáticos que deseja-se desenvolver nos alunos. Caso eles não consigam fornecer nenhum exemplo, forneça um primeiro exemplo cotidiano onde a igualdade pode ser usada.

Neste ponto é fundamental que você professor forneça exemplos que se conectem com a realidade do seu aluno e com os quais ele possa facilmente fazer as associações necessárias para depois se aprofundar na compreensão deste conceito.

SUGESTÃO: Você pode comentar que ao realizar uma compra estamos utilizando a igualdade, uma vez que para o vendedor, o dinheiro que fornecemos pode ser substituído pelo produto que é do nosso interesse. Enfatize também que neste caso estamos equiparando coisas de naturezas distintas, dinheiro e produto. O que também acontece na matemática já que números e valores algébricos possuem diferenças estruturais entre si.

Alinhando expectativas: Dando prosseguimento, é importante esclarecermos com os alunos duas técnicas "misteriosas" que eles aprendem que funcionam no ensino fundamental, ao resolver equações de primeiro grau, mas que nem sempre conseguem explicar o porquê. Por que o sinal muda quando a gente adiciona ou subtrai? E por que o número que acompanha a letra "vai para o outro lado" dividindo?

É interessante que você, professor, comente que na Álgebra que os alunos utilizam na escola, duas operações são as principais e mais importantes: a ADIÇÃO e a MULTIPLICAÇÃO. E que em se tratando de números (reais), as outras operações básicas são o inverso dessas duas principais. Além disso:

- Para cada tipo de operação há um número que não irá alterar o resultado destas. Pergunte aos alunos se eles sabem qual é o número que adicionado a qualquer outro não altera o valor. E em seguida faça o mesmo para a multiplicação.

  Espera-se que eles digam que no caso da adição o valor que não altera é o 0 (zero) e no caso da multiplicação o valor que não se altera é o 1. A saber, estes são chamados de **elemento neutro**, de suas respectivas operações.

- Para a ADIÇÃO, no conjunto dos números reais, todo número possui um único valor que adicionado a este resulta em 0 (zero), elemento neutro aditivo. Escreva alguns exemplos no quadro de números positivos e negativos, e peça aos alunos que forneçam os seus respectivos opostos.

- Para a MULTIPLICAÇÃO, no conjunto dos números reais não nulos, todo número possui um único inverso multiplicativo, ou seja, um número que, ao ser multiplicado por ele, resulta na unidade (1), que é o elemento neutro dessa operação. Antes de pedir exemplos a eles, é interessante relembrar sobre a multiplicação de fração por número inteiro. Escreva alguns exemplos no quadro de números positivos e negativos, inteiros ou fracionários, e peça aos alunos que forneçam os seus respectivos inversos.

4.1.2 Aula 2 - Estruturação da resolução de uma equação de 1º grau

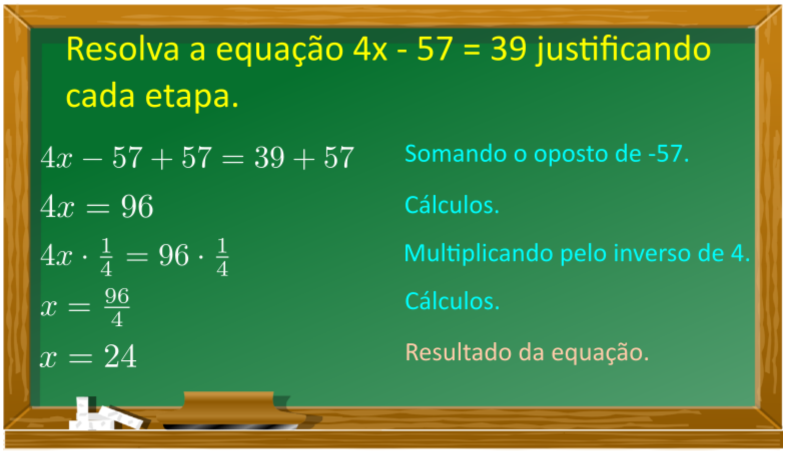
Para começar esta segunda aula da proposta didática, retome o mesmo assunto da aula anterior. É interessante escolher alguns alunos ao acaso e pedir a eles que digam qual o oposto e o inverso de números escolhidos pelo professor. Eles também podem ser motivados por recompensas, seja pontos ou algum brinde que o professor consiga disponibilizar.

Em seguida, escreva uma equação de 1º grau no quadro e reforce que o objetivo não é apenas fornecer a resposta, mas sim argumentar sobre os passos matemáticos que estão sendo executados e reforçar esta informação em seus cérebros. Abaixo temos um exemplo que pode ilustrar melhor a proposta.

Como este é um assunto que eles já estudaram, é interessante reforçar que o intuito é fazer com que eles, além de revisar o método de resolução, se acostumem a organizar seus cálculos para ajudá-los a perceber algum erro e também para ajudar o professor na correção de alguma atividade que tenha uma equação de 1º grau para ser resolvida.

Escreva no quadro vários tipos de equações para que eles possam resolver utilizando diferentes tipos de números que não sejam apenas os naturais, ou que a resposta não seja apenas um valor inteiro. Aqui é importante que você crie suas próprias equações com base nos conhecimentos numéricos que seus alunos possuem. Reforce que mesmo que não

Figura 2: Resolução estruturada de uma equação.



Fonte: adaptado de Pixabay (2014).

se tenha números inteiros na sua equação, o procedimento é sempre o mesmo.

4.1.3 Aula 3 - Resolução de problemas utilizando equações de 1º grau

Lembre-se que estes conceitos não são comumente vistos pelos alunos fora da escola, pelo menos não com o mesmo rigor matemático exigido. Neste sentido, a sua tarefa é fazer com que ele se familiarize com o que está sendo trabalhado em sala de aula. É importante que durante alguns dias você seja repetitivo na utilização dos conceitos trabalhados. Isso o ajudará a guardar mais rapidamente as etapas e, em algum momento, ele já terá enraizado tanto estas ideias que elas não serão mais uma novidade para ele.

Na aula seguinte, escolha um aluno ao acaso e peça a ele que escolha alguém para dizer qual o oposto e o inverso de números escolhidos por este primeiro aluno. Siga com essa brincadeira com mais alguns alunos e veja como eles interagem entre si. Formulando e respondendo as perguntas dos colegas.

Depois, escreva algumas equações no quadro e resolva com eles reforçando as etapas trabalhadas na aula anterior. Aqui você pode escolher um único aluno para resolver toda a equação ou ir selecionando um aluno para responder o que deve ser feito em cada etapa.

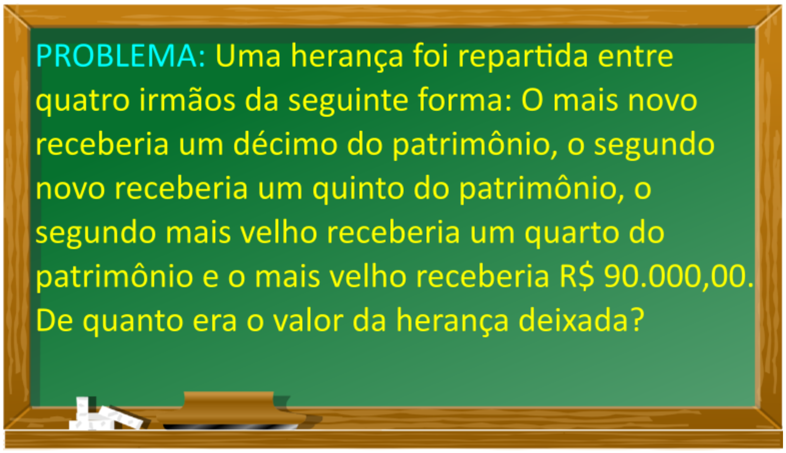
Aplicando os conhecimentos anteriores: Agora iremos utilizar a linguagem algébrica e os temas revisados sobre equação de 1º grau para resolver problemas que podem ser expressos utilizando a forma $ax + b = c$. Utilize o problema abaixo como exemplo para motivar os alunos a recorrer aos conhecimentos algébricos para determinar a resolução.

Utilizando as quatro etapas de Polya:

1. **Compreensão** - Peça a eles que imaginem o que está acontecendo na situação e, posteriormente, digam qual é o objetivo central da questão. Espera-se que eles percebam que o objetivo é determinar o valor da herança. Além disso, confira com os alunos as demais informações fornecidas para ver se eles compreenderam como que esta incógnita é abordada ao longo do enunciado da questão.

   Atribua uma letra para representar o valor da herança, por exemplo, **h**.

Figura 3: O problema da herança dos quatro irmãos.



Fonte: adaptado de Pixabay (2014).

2. **Concepção de um plano** - Pelo enunciado observa-se que as partes recebidas pelos irmãos foram $\frac{\mathbf{h}}{10}, \frac{\mathbf{h}}{5}, \frac{\mathbf{h}}{4}$ e R$ 90.000,00, e que toda a herança foi repartida entre os irmãos, neste caso, instigue-os a perceber que ao adicionar os valores recebidos por cada irmão teremos o total **h**, que é o nosso interesse.

3. **Execução de um plano** - Com base na concepção descrita anteriormente, podemos escrever a seguinte equação:

$$\frac{\mathbf{h}}{10} + \frac{\mathbf{h}}{5} + \frac{\mathbf{h}}{4} + 90.000 = \mathbf{h}.$$

   Perceba que ao refazermos a leitura do problema, vemos que ela traduz satisfatoriamente a situação descrita. E resolvendo-a, encontramos que o valor da herança é R$ 200.000,00.

4. **Retrospecto** - Mais do que resolver equações, é importante o aluno se questionar se este valor encontrado é condizente com a situação. Peça a eles que façam esta conferência determinando o valor recebido por cada irmão e adicionando eles para ver se obtém R$ 200.000 novamente. Além disso, pergunte em qual das etapas eles tiveram mais dificuldade, se foi na leitura (compreensão), se foi na identificação da incógnita do problema, se foi na escrita da equação, ou qualquer outra dúvida que eles tenham manisfestado.

   Através destes *feedbacks* é possível compreender melhor quais pontos da resolução deste tipo de problema precisam ser melhor reforçados. Aconselha-se passar mais um exemplo para resolver com os alunos e verificar se mais dúvidas são sanadas. Este outro exemplo resolvido ajuda eles a validarem suas conclusões sobre o exercício anterior, antes de se aventurarem a resolver os problemas sozinhos.

Para finalizar, peça aos alunos para que resolvam alguns exercícios sobre o tema estudado e que apliquem os tópicos que foram vistos nesta proposta didática.

SUGESTÃO: É interessante realizar uma pequena avaliação da eficácia no aprendizado do aluno. Como a resolução de equações é algo que está constantemente presente na vida do aluno, aconselha-se que após alguns dias ele faça uma avaliação ou pequeno teste para conferir se os conhecimentos estudados foram assimilados e o quanto deles permaneceram. Avaliações logo após a explicação podem dar uma falsa sensação de aprendizado pois o conhecimento ainda está "fresco"na mente do aluno. Lembre-se que queremos que ele adquira uma habilidade que será utilizada por um longo período de tempo, até o final do ensino básico, e não apenas resolva problemas de um tópico pontual que raramente será visto novamente.

4.1.4 Exercícios de fixação

1. Determine, de forma organizada e estruturada, a solução de cada equação abaixo.

   (a) $-4x + 45 = -91$
   (b) $23x + 200 = -145$
   (c) $-167 - 30x = -17$
   (d) $-89 = 11x + 186$
   (e) $202 = 280 + 26x$
   (f) $-x - 26 = -25$
   (g) $-9x - 12 = 123$
   (h) $37x + 158 = -27$

2. A metade de um número adicionado de 5 unidades é igual a 69. Qual é este número?

3. A terça parte do peso de um objeto diminuído de 700 g é igual a 400 g. Qual é o peso deste objeto?

4. Determine, de forma estruturada e organizada, a solução de cada equação abaixo.

   (a) $-9x + 6,77 = -45,43$
   (b) $-56,8 + x = -16,805$
   (c) $-2,3x - 17 = -27,373$
   (d) $7,98 + 3,12x = 2,988$

5. O quíntuplo de um número somado com 17 é igual -38. Determine o valor deste número.

6. O dobro do peso de um objeto, em quilogramas, diminuído de 1,5 kg é igual a 7,31 kg. Qual é o peso deste objeto?

4.1.5 Respostas

1. (a) 34
   (b) 15
   (c) -5
   (d) -25
   (e) -3
   (f) -1
   (g) 15
   (h) -5

2. 128

3. 3 300g

4. (a) 5,8
   (b) 39,995
   (c) 4,51
   (d) $-1,6$

5. -11

6. 4,405 kg

4.2 FRAÇÕES TAMBÉM SÃO NÚMEROS

- **Conteúdos a serem trabalhados:** Introdução ao conceito de fração; frações próprias, impróprias, aparentes e equivalentes; Operações com frações; Resolução de expressões numéricas.
- **Série:** Ensino Médio.
- **Tema da proposta didática:** Compreendendo as frações para resolver expressões numéricas e algébricas diversas.
- **Objetivos da proposta didática:**
  - Identificar contextos nos quais o conceito de fração é aplicado;
  - Fornecer diferentes abordagens a fim de que o aluno normalize a existência das frações como números;
  - Motivar a manipulação de frações equivalentes e a resolução de operações algébricas envolvendo frações;
- **Unidade temática:** Álgebra.
- **Objeto de conhecimento:** Manipulação de frações.
- **Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:**
  - EF06MA07 - Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes;
  - EF07MA11 - Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
- **Tempo de execução da proposta didática:** 5 aulas + 2 aulas de avaliação (**APÊNDICE B**).
- **Materiais necessários:** caderno, caneta, lápis e borracha.

SINOPSE: Esta proposta didática se inicia revisitando conceitos elementares no estudos da frações, o que são e os tipos existentes. Para melhor fixação estamos utilizando muitas representações geométricas para exemplos os conceitos e ao final da primeira aula teremos realizado comparações, ordenações e operações (adição e subtração) com frações de mesmo denominador. Na segunda aula retomaremos os conceitos vistos na aula anterior porém para as frações de denominadores diferentes, aqui buscamos deixar sempre evidente para o professor, e consequentemente para o aluno, que estaremos recorrendo ao conceito de fração equivalente para terminar de realizar a operação, ou seja, recaindo em um problema já analisado e compreendido por ele anteriormente. Na terceira aula veremos as operações de multiplicação e divisão, além de exercitar a simplificação do produto de frações. Já a quarta e última aula está centrada em trabalhar com a potenciação de frações e a resolução de expressões numéricas, que requer pleno domínio de todos os tópicos anteriormente mencionados.

4.2.1 Aula 1 - Introdução às frações e operações com frações de mesmo denominador

Por nem sempre os alunos terem contato com outros tipos de números para além dos naturais e, quem sabe na melhor das hipóteses, dos números inteiros, é importante que eles tenham o hábito de naturalizar e normalizar a existência, a utilização prática e a manipulação de frações. Uma forma de iniciar esta aula pode ser através daquelas brincadeiras de adivinhar números através de etapas onde operações são executadas e, ao final, uma pessoa descobre o número imaginado por outra. Se fizermos esta brincadeira e pedirmos a eles que escrevam o número em um folha e guardem consigo, ao final, provavelmente veremos que todos ou a maioria pensou em números inteiros e para confirmar esta tese, abaixo fornecemos uma destas brincadeiras como exemplo. O resultado será o mesmo independentemente do tipo de número que se escolha.

Exemplo 4.2.1. *Sugestão:*

i) Peça para a pessoa pensar em um número;

ii) peça para multiplicar esse número por 2;

iii) peça para somar 10 ao resultado;

iv) peça para dividir o resultado por 2;

v) peça para subtrair o número original do novo resultado.

O resultado final sempre será 5.

Peça a todos os alunos que mostrem o número pensado. E verifique quantos pensaram em outros tipos de números que não fossem um número natural. Utilize este (possível) fato para aprofundar com seus alunos a discussão.

Ativação dos conhecimentos prévios: Para aproximá-los do que será estudado, pergunte o que eles entendem quando veem uma fração, se eles recordam-se como são realizadas as operações com frações, ou em quais contextos cotidianos eles já utilizaram frações. Certamente, informações de todo tipo surgirão, cabendo ao professor reforçar as corretas e mencionar em qual ponto as demais estão incorretas. Uma opção é dizer que nas próximas aulas vocês revisarão os procedimentos e conceitos envolvendo as respostas incorretas que eles forneceram.

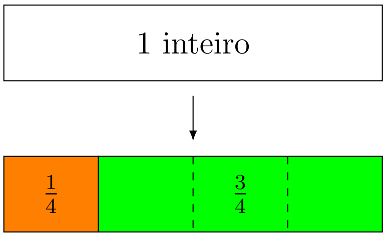
Para expandir o conhecimento do aluno, reforce que não necessariamente os números inteiros contemplam todo o tipo de medição humana. Se tomarmos uma unidade de medida como referência para medir todas as demais, por exemplo, a caneta - e aqui o professor pode usar uma caneta que tenha a sua disposição para ilustrar - veremos que é mais provável não conseguirmos medirmos os demais objetos usando unidades inteiros de "caneta", sendo necessário fazer uso de uma aproximação.

Observação 4.2.1. *Vale ressaltar que, apesar deste argumento também poder ser usado para motivar a existência de números irracionais, o objetivo aqui é apenas que o aluno considere a existência de outros tipos de números para além dos naturais e dos inteiros. Obviamente a definição de fração e de número racional será depurada conforme o aluno se familiarizar com as frações e progredir no seu domínio delas.*

Para contextos em que estamos trabalhando com frações menores ou iguais a 1 inteiro, a explicação de que o **denominador** indica em quantas partes iguais algo (o inteiro) foi dividido e que o **numerador** indica quantas destas partes nos interessa, pode facilmente ser aplicada e entendida pelo alunos. É bom que se utilize desenhos para captar melhor este tipo de entendimento.

Exemplo 4.2.2 (Fração própria)**.** *Na figura abaixo, uma barra inteira foi dividida em 4 partes iguais. A fração que representa a parte em verde é* $\frac{3}{4}$*, neste caso, nos interessam 3 destas 4 partes.*

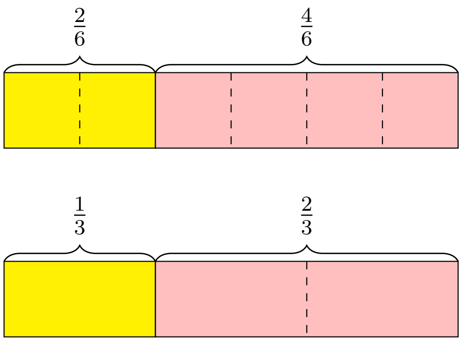
Figura 4: Representação geométrica de uma fração própria.



Fonte: Autor.

Ao estudar as frações é comum nos depararmos com situações como a seguinte: na figura abaixo temos duas barras iguais, uma está dividida em 3 partes iguais e a outra em 6 partes iguais.

Figura 5: Representação geométrica de uma fração equivalente.



Fonte: Autor.

Visualmente podemos notar que as regiões de mesma cor representam a mesma quantidade, apesar de que suas respectivas frações são diferentes. Neste caso, dizemos, por exemplo, que as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$ são **equivalentes**.

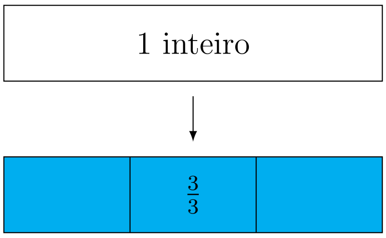
A fração $\frac{2}{3}$ é chamada de **irredutível**, pois não é possível encontrar um número (exceto o 1) que seja divisor do numerador e do denominador simultaneamente. Já a fração $\frac{4}{6}$ não é irredutível, pois é possível dividir tanto o 4 quanto o 6 por 2, simplificar a fração. Em geral trabalhamos em Matemática com a fração simplificada, isso facilita os cálculos.

Observação 4.2.2. *Chame a atenção dos alunos durante a explicação para o fato de que a fração irredutível é importante pois a partir dela conseguimos encontrar qualquer fração equivalente que desejarmos. Bastando para isto multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número.*

Uma fração equivalente a $\frac{2}{3}$ cujo numerador é 30 é $\frac{30}{45}$ pois se multiplicarmos 2 e 3 por 15 obteremos, respectivamente, 30 e 45.

Exemplo 4.2.3 (Fração aparente)**.** *Na figura abaixo, uma barra inteira foi dividida em 3 partes iguais. A fração que representa a parte em azul é* $\frac{3}{3}$*, ou seja, neste caso nos interessam todas as três partes.*

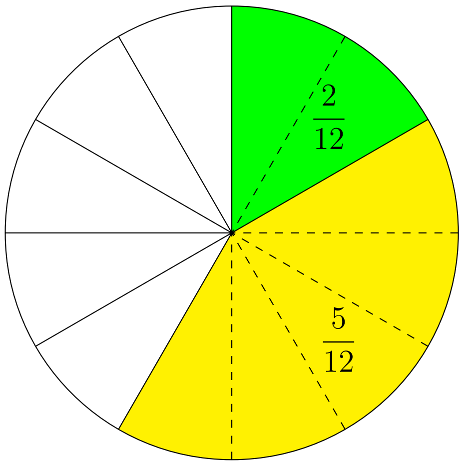
Figura 6: Representação geométrica de uma fração aparente.



Fonte: Autor.

Exemplo 4.2.4 (Adição de frações)**.** *Considere a seguinte situação: Um círculo que foi dividido em 12 partes iguais, algumas partes foram coloridas de verde e outras de amarelo. Pergunte aos alunos o que eles fariam para determinar o total de partes coloridas.*

Figura 7: Círculo dividido em 12 partes iguais.



Fonte: Autor.

Para determinar a fração que representa o total de partes coloridas basta que, intuitivamente, adicionemos as partes em verde às partes em amarelo, mantendo o mesmo denominador. Logo,

$$\frac{2}{12} + \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

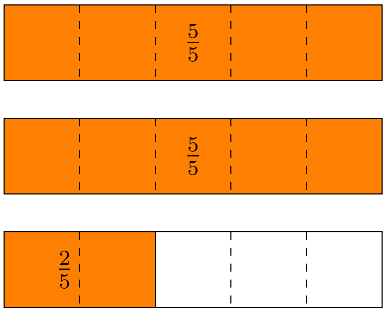
A explicação acima apenas é válida quando as frações possuem o **mesmo denominador**. O procedimento para realizar a subtração de frações de mesmo denominador é o mesmo, já que adição e subtração são operações reversíveis.

Para frações cujos denominadores são diferentes, precisaremos recorrer às frações equivalentes para igualar os denominadores das frações que estão sendo adicionadas. Mais adiante na proposta didática abordaremos esta situação.

De uma forma mais geral, podemos expandir o entendimento de fração para um número inteiro qualquer que está sendo dividido em uma dada quantidade de partes iguais. Neste sentido, tanto o numerador quanto o denominador continuam seguindo a interpretação anteriormente fornecida.

Exemplo 4.2.5 (Fração imprópria)**.** *Na figura abaixo temos 3 barras inteiras e cada uma foi dividida em 5 partes iguais, totalizando 15 partes menores.*

Figura 8: Representação geométrica de uma fração imprópria.

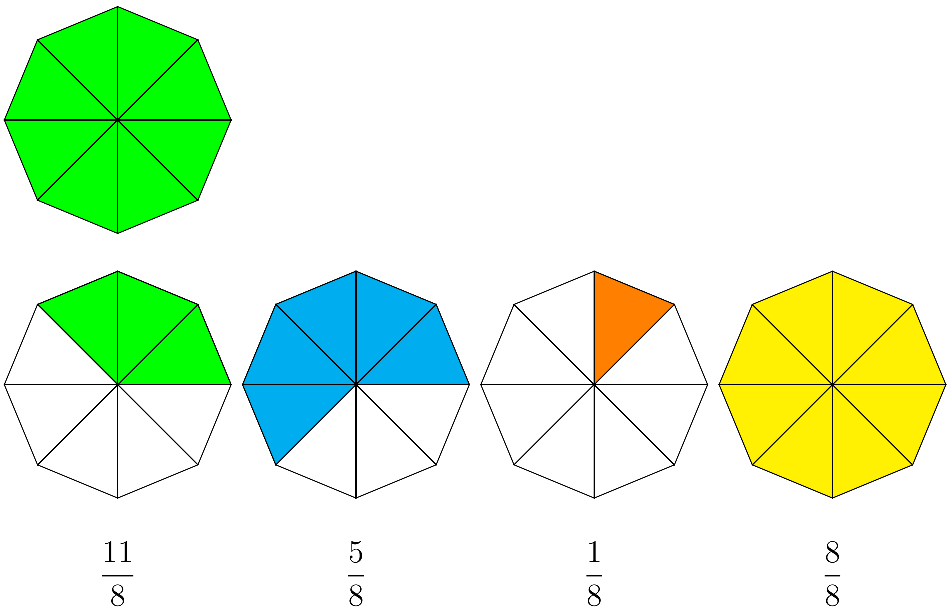


Fonte: Autor.

A fração que representa a parte em laranja pode ser obtida realizando a seguinte adição: $\frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{2}{5}$*. Pelo que foi visto anteriormente, o resultado é* $\frac{12}{5}$*. Logo, das 15 partes totais, nos interessam 12 destas partes.*

E para finalizar, podemos comparar e ordenar frações de mesmo denominador. Observe as frações $\frac{11}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{8}{8}$.

Figura 9: Representação geométrica das frações $\frac{11}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{8}{8}$.



Fonte: Autor.

Note que visualmente conseguimos compará-las vendo quais possuem as maiores regiões coloridas. Como todas possuem o mesmo denominador, basta que analisemos seus numeradores. Logo,

$$\frac{1}{8} < \frac{5}{8} < \frac{8}{8} < \frac{11}{8},$$

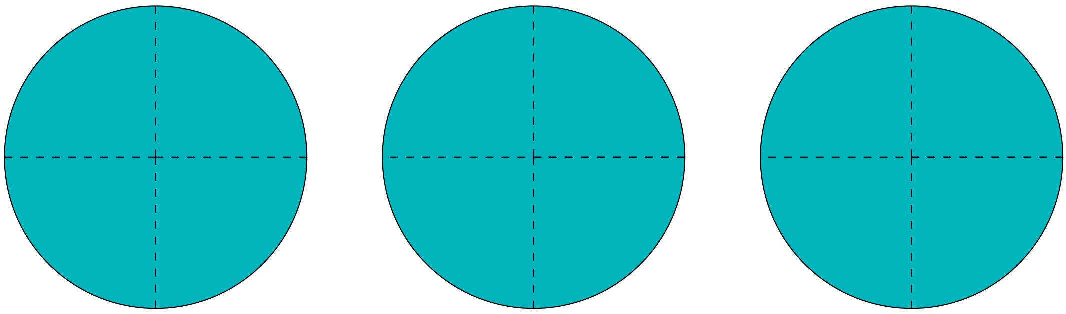
pois $1 < 5 < 8 < 11$.

Observação 4.2.3. *Como $\frac{8}{8} = 1$, note que as duas primeiras frações são menores que 1 inteiro e que a maior delas é maior que 1 inteiro.*

Estendendo também o conceito de fração aparente, agora que vimos sobre as frações impróprias, podemos dizer que em toda fração aparente é possível realizar a divisão exata do numerador pelo denominador, já que o numerador sempre será um múltiplo do denominador, ou seja, a quantidade das partes coloridas que nos interessa é sempre múltipla da quantidade de partes iguais em que o inteiro foi dividido.

Exemplo 4.2.6. *Abaixo temos a representação geométrica de uma fração aparente.*

Figura 10: Representação geométrica da fração $\frac{12}{4}$.



Fonte: Autor.

Note que, ao dividir 12 por 4 obtemos 3, que é a mesma quantidade de círculos inteiros representados acima.

Para fixar melhor os assuntos relembrados nesta aula peça aos alunos para realizarem os **Exercícios de fixação** nº 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

4.2.2 Aula 2 - Frações equivalentes, proporções e operações com frações de denominadores diferentes

Dentre os vários assuntos abordados na aula anterior um deles será destaque nesta segunda aula da proposta didática, as **frações equivalentes**. Anteriormente vimos que se tivermos uma fração irredutível podemos encontrar qualquer outra fração equivalente desde que multipliquemos o numerador e o denominador da fração irredutível por um mesmo número natural, maior que 1. Contudo, nem sempre estamos realizando os cálculos com a fração irredutível. Neste caso, há um resultado nos estudos com proporções que será muito útil para nós.

Proposição 4.2.1 (Propriedade Fundamental das Proporções)**.** *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Se as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ forem iguais, então $a \cdot d = b \cdot c$.*

Se reescrevermos as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ respectivamente como $a : b$ e $c : d$, teremos que $a : b = c : d$. E notando que temos dois valores nos **extremos** desta igualdade, a e d, e dois valores próximo ao **meio** dela, então é comum dizer: *O produto dos meios é igual ao produto dos extremos.*

Uma consequência direta desta proposição é que se em duas razões tivermos que a "multiplicação cruzada"de seus valores não for igual, então as duas razões não são iguais. No contexto de frações, isso significa dizer que elas não são equivalentes.

Exemplo 4.2.7. *Dentre as frações listadas a seguir:*

$$\frac{6}{9} \quad \frac{10}{11} \quad \frac{6}{4} \quad \frac{2}{3},$$

quais são equivalente a $\frac{4}{6}$*?*

Ao resolver com os alunos este exemplo o professor pode mencionar que há pelo menos duas estratégias possíveis para determinar as equivalências entre as frações:

- Como $\frac{4}{6}$ não é irredutível, basta simplificá-la e depois verificar quais das frações da lista foi obtida multiplicando-se numerador e denominador por um mesmo número natural (maior que zero).

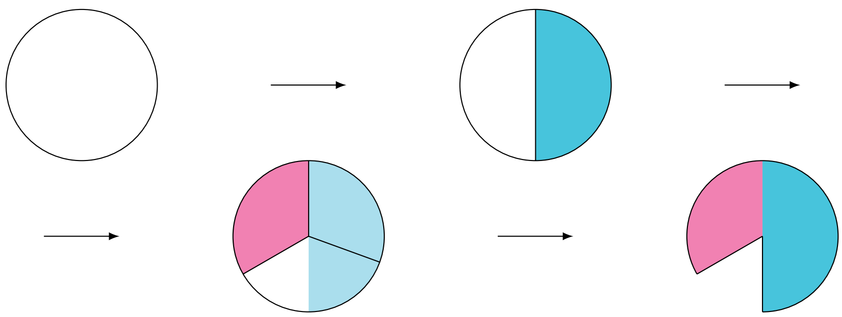
- Outra forma é utilizar a Propriedade Fundamental das Proporções que foi vista anteriormente.

É importante que o aluno perceba a existência de múltiplos caminhos de resolução para que ele possa decidir qual é mais acessível à seu atual nível de compreensão dos conteúdos. Dependendo também de como o professor utilizará as frações nos demais conteúdos ao longo do ano letivo, uma forma de resolução pode ser mais interessante do que a outra.

Antes de iniciar o próximo assunto, sugerimos que os alunos façam o **Exercício de fixação** nº 7, sobre frações equivalentes, antes de iniciarmos o próximo tópico desta aula.

Exemplo 4.2.8 (Adição de frações de denominadores diferentes)**.** *Considere a seguinte situação: Um círculo que foi dividido em 2 partes iguais e coloriu-se uma destas partes de azul. Depois este mesmo círculo foi dividido em 3 partes iguais e coloriu-se uma destas partes que ainda não estava colorida de rosa. Determine a fração que representa o total de partes coloridas.*

Figura 11: Etapas no colorimento de um círculo.



Fonte: Autor.

Perceba que para resolver esta situação é necessário encontrar dividir o círculo em uma certa quantidade de partes iguais de tal forma que seja possível representar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, pois são elas que representam as partes que foram coloridas no círculo. Em outras palavras, devemos determinar frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ e a $\frac{1}{3}$ que possuam o mesmo denominador pois aí recairíamos em uma situação como a que foi vista na aula anterior desta proposta didática, onde fez-se uma adição de frações de mesmo denominador.

Note que precisamos encontrar um número que seja múltiplo de 2 e de 3 simultaneamente. Para facilitar os cálculos utilizaremos o $\mathbf{mmc(2,\ 3)}$, que neste caso é 6 pois ele é o menor valor com esta característica de ser múltiplo simultâneo.

Reescrevendo as frações acima temos

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 2} = \frac{3}{6} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}.$$

Portanto, a fração que representa o total de partes coloridas é $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$.

Observação 4.2.4. *O procedimento de recorrer ao mínimo múltiplo comum dos denominadores para transformar as frações em frações equivalentes de mesmo denominador é válido **apenas** para a operação de adição e para a subtração.*

A comparação de frações que possuem denominadores diferentes é facilmente determinada quando trabalhamos com frações equivalentes de mesmo denominador, como acabamos de observar. Agora, peça aos alunos para realizarem os **Exercícios de fixação** nº 8, 9 e 10.

SUGESTÃO: Caso seja do interesse do professor, disponibilizamos no **Apêndice H** uma malha quadriculada no tamanho 17 x 20 que pode ser utilizada com aqueles alunos que tiverem maior dificuldade para familiarizar-se com os processos aritméticos acima mencionados. A malha é um ótimo auxílio uma vez que eles poderão visualizar as representações geométricas das operações e, desta forma, consolidar a transposição do conhecimento geométrico para o aritmético-algébrico, que é o nosso foco com as aulas desta proposta didática.

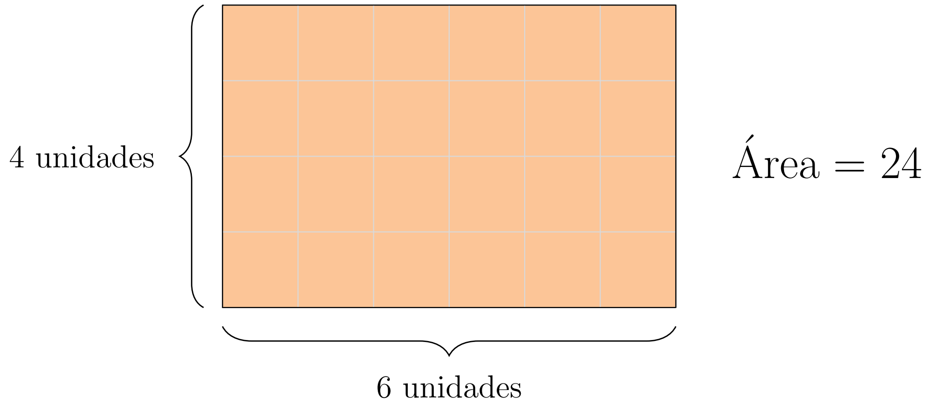
4.2.3 Aula 3 - Multiplicação, divisão e propriedades operatórias

Iniciaremos esta terceira aula da proposta didática avançando em nossos conteúdos sobre frações. Deixaremos a revisão dos assuntos da aula anterior para serem trabalhados durante os exercícios de fixação desta terceira aula.

Nas aulas anteriores abordamos o método de realização da adição e da subtração em dois momentos distintos pois precisamos considerar o valor dos denominadores destas frações, caso eles sejam iguais procederemos de um jeito e caso sejam diferentes realizaremos uma etapa intermediária. Não é incomum encontrar alunos que achem que esta mesma abordagem precisa ser admitida quando estamos realizando a multiplicação e a divisão com frações.

Para motivar o espírito investigativo nos alunos, recorremos à uma ideia análoga e que eles certamente irão concordar. Considere que estamos associando o valor da área de um retângulo ao produto entre dois números inteiros. Se o retângulo possui base B e altura H, então sua área é o produto $B \times H$. Geometricamente temos

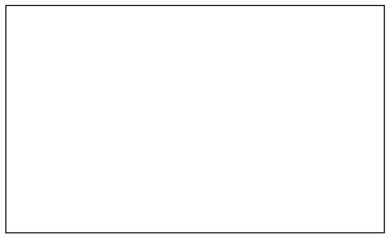
Figura 12: Representação da área de um retângulo 6 por 4.



Fonte: Autor.

Seguindo este mesmo método de execução podemos refletir a respeito do que significaria a multiplicação $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$. Considere a seguinte barra retangular como 1 unidade inteira.

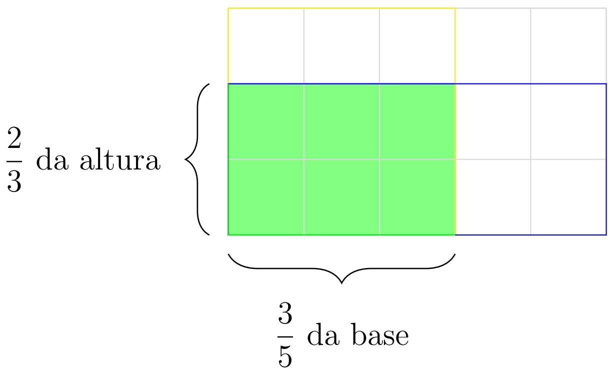
Figura 13: Retângulo que representa 1 unidade.



Fonte: Autor.

Então o produto pode ser representado geometricamente pela área de um retângulo cuja base mede $\frac{3}{5}$ da base do retângulo da **Figura 13** e a altura mede $\frac{2}{3}$ da altura do retângulo da **Figura 13**.

Figura 14: Representação geométrica da multiplicação entre frações.



Fonte: Autor.

Note que a área obtida foi $\dfrac{6}{15}$ (interseção entre os retângulos de borda amarela e azul) é o resultado da multiplicação direta entre os respectivos numeradores e os respectivos denominadores, ou seja,

$$\frac{6}{15} = \frac{2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}.$$

Além disso, simplificando a fração temos que $\dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.

Antes de comentar sobre a divisão, é interessante introduzir com os alunos a noção de fração inversa. E antes deste tópico, peça-os para resolver o **Exercício de fixação** n$^{\underline{o}}$ 11. Ele contém uma estratégia que utilizaremos abaixo quando formos falar de fração inversa.

Na sequência, pergunte aos alunos qual é o número que número que quando multiplicado por qualquer outro não altera o produto. Por exemplo, "5 multiplicado por qual número dá 5?"E faça mais uns três exemplos orais com eles antes de enunciar que: **Todo número multiplicado por 1 é igual a ele mesmo (o número em questão)**.

Diante disso, o objetivo agora é tentar descobrir por qual fração devemos multiplicar para obter o elemento neutro da multiplicação.

Exemplo 4.2.9. *Como sugestão, escreva, de forma espaçada, para efetuar cálculos, as seguintes frações no quadro (não as apague):*

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{10}{3} \quad \frac{5}{8}.$$

Pergunte a eles por qual fração devemos multiplicar cada uma delas para obter 1 como resultado. Lembrando que a escolha do 1 é porque ele é o elemento neutro da multiplicação.

Caso as respostas com as frações inversas sejam mencionadas por parte da maioria dos alunos, isso significa que eles tem uma boa base matemática. Desta forma o conceito pode ser relembrado diretamente. Contudo, é bem provável que as respostas desejadas não apareçam. Neste caso, comente que este número pelo qual cada fração foi multiplicada é chamado de **inverso multiplicativo**, ou popularmente, **o inverso**. Perceba que este inverso é a fração que apresenta o numerador e o denominador nas posições invertidas. Para o exemplo acima as frações inversas são, na mesma ordem:

$$\frac{3}{2} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{8}{5}.$$

Seguindo um raciocínio análogo ao que acontece na subtração $16 - 25$, que pode ser reescrita como $16 + (-25)$, isto é, estamos somando 16 com o oposto de 25, e lembrando que a divisão é a operação inversa da multiplicação, podemos então enunciar o método de realização da divisão de frações: "conserva-se a primeira e multiplica-se pelo inverso (multiplicativo) da segunda". Por exemplo,

$$\frac{4}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4 \times 3}{5 \times 7} = \frac{12}{35}.$$

Tendo relembrado este processo, peça aos alunos para realizarem o **Exercício de fixação** n$^{\underline{o}}$ 12.

Observação 4.2.5. *Ao aplicar esta sequência de argumentos, o professor provavelmente irá se deparar com algum comentário dizendo que "demos muita volta para chegar nisso", o que em uma visão imediatista não está errada. Contudo, o nosso foco deve ser sempre fazer com que o aluno utilize o máximo possível de conhecimentos matemáticos e de forma simultânea. Em outras palavras, apesar de ser importante conseguir utilizar o método, é tão importante ou até mais, saber e entender os fundamentos que estão envolvidos. Obviamente, considerando o nível de capacidade de assimilação esperado para a etapa de ensino na qual o aluno se encontra.*

4.2.4 Aula 4 - Potência de base fracionária e resolução de expressões numéricas

As operações vistas na última aula serão relembradas juntamente com a resolução do problema final desta proposta didática. Antes disso, comentaremos sobre a potência de base fracionária.

No caso da operação de potência o conceito básico é o mesmo que eles já aprenderam com as potências cujas bases são números inteiros. O expoente indicará a quantidade de vezes em que a base aparecerá como fator na multiplicação. Aqui vale a pena retomar com os alunos alguns exemplos de potências cuja base é um valor inteiro. Primeiro estaremos retomando a lembrança deles a respeito da operação e em segundo lugar, estaremos reativando a memória a respeito de como realizar a multiplicação de frações.

Você pode finalizar esta introduzindo resumindo para eles que no caso da potência onde a base é uma fração **basta elevarmos tanto o numerador quanto o denominador** a este expoente.

Observação 4.2.6. *Outra coisa que é importante ser frisada com os alunos é a importância de se utilizar parênteses para indicar a potência. Por exemplo, enquanto*

$$\frac{2^3}{5} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5} = \frac{8}{5}$$

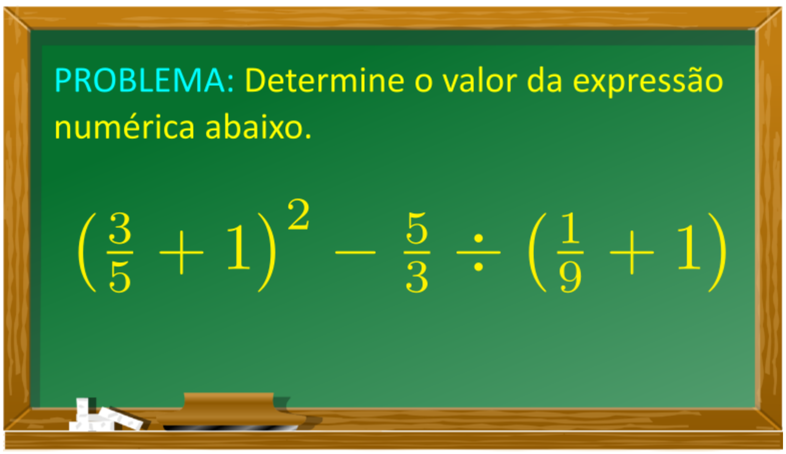
pois o expoente está apenas no 2, já

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = \frac{8}{125}.$$

E neste último caso, o expoente 3 está em toda a fração.

Posto isso, podemos agora realizar a resolução de expressões numéricas com frações. E apesar de não parecer mas em essência as regras operatórias são as mesmas das expressões numéricas com números naturais ou inteiros.

Aplicando os conhecimentos anteriores: Faremos agora a resolução de uma expressão numérica que contém diversas operações, além de números inteiros e frações. Este tipo de exercício é interessante por recorrer a diferentes conceitos e estratégias durante a sua resolução. Enfatize com seus alunos os detalhes operatórios envolvidos nas passagens e lembre-se de sempre realizar perguntas sobre o que eles sugerem fazer. Lembre-se que a interação é sempre o melhor termômetro para percebermos o quanto da matéria nossos alunos estão conseguindo assimilar.



Utilizando as quatro etapas de Polya:

1. **Compreensão** - Apesar de ser simples a compreensão o que se deve obter ao resolver uma expressão numérica, pergunte aos alunos quais operações eles estão identificando e se eles recordam-se da ordem de execução das operações. Esta lembrança inicial é fundamental para que o aluno saiba exatamente por onde deve começar a sua resolução. Perceba que há parênteses na expressão numérica, a presença deles também é importante de ser observada pelo aluno.

2. **Concepção de um plano** - Com base nos conhecimentos de resolução de expressões numéricas, devemos começar a resolver as operações que estão dentro dos parênteses. E como dentro de ambos os parênteses temos adições de frações precisamos lembrar de igualar os denominadores antes. Após isso, neste caso específico, resolveremos a potência, depois a divisão, para então realizarmos a subtração.

3. **Execução de um plano** - A partir das observações feitas na etapa anterior temos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{5}+1\right)^2-\frac{5}{3}\div\left(\frac{1}{9}+1\right) &= \left(\frac{8}{5}\right)^2-\frac{5}{3}\div\left(\frac{10}{9}\right)\\
&= \frac{64}{25}-\frac{5}{3}\times\frac{9}{10}\\
&= \frac{64}{25}-\frac{3}{2}\\
&= \frac{53}{50}
\end{aligned}$$

4. **Retrospecto** - Diferentemente de outros tipos de problemas onde a resposta final pode ser confrontada com os dados iniciais, ao resolver uma expressão numérica a forma que os alunos podem usar para conferir se a resposta encontrada está correta ou não é voltar desde o início de revisar cada operação realizada se perguntando se ela seria resolvida naquele exato momento e se os procedimentos foram realizados em conformidade com a teoria vista nas aulas anteriores.

   Para o professor, uma forma de conferir se o seu aluno conseguiu acompanhar minimamente a resolução é ir realizando perguntas durante todas as etapas para fortalecer a conexão e a atenção com a turma. É sempre bom lembrar-se que os alunos nem sempre permanecem atentos durante todo o processo de resolução. Aquelas perguntinhas do tipo "qual operação a gente realizará aqui agora?" ou "o que faremos para encontrar a soma dessa fração com esse número inteiro?" são importantíssimas e por mais simples que pareçam, para alguém que não tem tanto contato e experiência, são o reforço positivo que motivará muito a continuar prestando atenção pois sentiu-se parte da resolução do problema ao entender alguma etapa anterior à resposta final.

Finalizada esta etapa, coloque os alunos para praticar estes últimos tópicos de frações resolvendo os **Exercícios de fixação** nº 13 e 14.

SUGESTÃO: Uma alternativa para contornar a necessidade de conferência da resolução da expressão numérica na etapa do **Retrospecto** é propor que os alunos resolvam algumas expressões individualmente e, ao final, troquem os cadernos entre si para que um colega faça a correção. Essa dinâmica, além de oferecer uma forma de validação da resposta encontrada, permite que os alunos percebam diferentes maneiras de registrar o raciocínio matemático. Isso pode evidenciar, por exemplo, que mesmo quando dois colegas chegam ao mesmo resultado, os caminhos e justificativas percorridos podem variar — promovendo assim a valorização do processo de resolução e não apenas da resposta final. Dessa forma, o próprio grupo assume o papel de avaliador, o que contribui para o desenvolvimento da autonomia e do pensamento crítico dos estudantes.

4.2.5 Exercícios de fixação

1. Obtenha uma fração equivalente a $\frac{3}{5}$ cujo:

   (a) numerador seja 24;
   (b) denominador seja 30;
   (c) denominador seja 60;
   (d) numerador seja 48;
   (e) numerador seja 45;
   (f) denominador seja 85

2. Em cada item a seguir, verifique se os pares de frações são equivalentes entre si.

   (a) $\frac{2}{7}$ e $\frac{8}{28}$
   (b) $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{12}$
   (c) $\frac{5}{4}$ e $\frac{9}{8}$
   (d) $\frac{42}{66}$ e $\frac{7}{11}$
   (e) $\frac{5}{3}$ e $\frac{25}{9}$
   (f) $\frac{9}{4}$ e $\frac{27}{12}$
   (g) $\frac{5}{4}$ e $\frac{25}{20}$
   (h) $\frac{12}{10}$ e $\frac{18}{15}$
   (i) $\frac{15}{6}$ e $\frac{5}{2}$
   (j) $\frac{20}{5}$ e $\frac{15}{5}$
   (k) $\frac{20}{28}$ e $\frac{10}{14}$
   (l) $\frac{6}{9}$ e $\frac{4}{6}$

3. Determine se a fração é aparente. Em caso afirmativo, diga qual número inteiro essa fração está representando.

   (a) $\frac{16}{8}$
   (b) $\frac{16}{5}$
   (c) $\frac{9}{9}$
   (d) $\frac{4}{20}$
   (e) $\frac{36}{3}$
   (f) $\frac{40}{5}$
   (g) $\frac{48}{5}$
   (h) $\frac{120}{3}$
   (i) $\frac{60}{7}$
   (j) $\frac{82}{9}$
   (k) $\frac{25}{100}$
   (l) $\frac{100}{25}$

4. Assinale dentre os itens a seguir aqueles contêm frações que são irredutíveis.

   (a) $\frac{7}{15}$
   (b) $\frac{7}{21}$
   (c) $\frac{9}{15}$
   (d) $\frac{16}{3}$
   (e) $\frac{8}{16}$
   (f) $\frac{2}{11}$
   (g) $\frac{4}{15}$
   (h) $\frac{3}{7}$
   (i) $\frac{5}{8}$
   (j) $\frac{1}{4}$
   (k) $\frac{6}{10}$
   (l) $\frac{2}{9}$
   (m) $\frac{2}{24}$
   (n) $\frac{5}{40}$
   (o) $\frac{100}{3}$

5. Determine o valor das somas e das diferenças a abaixo. Se possível, simplifique sua resposta.

   (a) $\frac{50}{6} + \frac{17}{6}$
   (b) $\frac{29}{15} + \frac{46}{15}$
   (c) $\frac{8}{34} + \frac{9}{34}$
   (d) $\frac{6}{11} - \frac{4}{11}$
   (e) $\frac{13}{48} - \frac{5}{48}$
   (f) $\frac{92}{3} - \frac{71}{3}$
   (g) $\frac{16}{7} + \frac{8}{7}$
   (h) $\frac{5}{4} - \frac{3}{4}$
   (i) $\frac{31}{20} - \frac{30}{20}$

6. Em cada item, reescreva as frações em ordem decrescente.

   (a) $\frac{3}{10} \quad \frac{7}{10} \quad \frac{4}{10}$
   (b) $\frac{19}{4} \quad \frac{11}{4} \quad \frac{17}{4}$
   (c) $\frac{5}{26} \quad \frac{11}{26} \quad \frac{7}{26}$
   (d) $\frac{2}{31} \quad \frac{16}{31} \quad \frac{17}{31}$

7. Em cada item abaixo, confira se os pares de frações fornecidas são equivalentes ou não.

   (a) $\frac{8}{12}$ e $\frac{4}{6}$
   (b) $\frac{10}{6}$ e $\frac{25}{15}$
   (c) $\frac{8}{5}$ e $\frac{10}{6}$
   (d) $\frac{27}{15}$ e $\frac{18}{10}$
   (e) $\frac{10}{15}$ e $\frac{4}{7}$
   (f) $\frac{16}{9}$ e $\frac{32}{10}$
   (g) $\frac{12}{10}$ e $\frac{5}{6}$
   (h) $\frac{6}{8}$ e $\frac{9}{12}$
   (i) $\frac{18}{12}$ e $\frac{30}{21}$

8. Resolva as expressões abaixo, realizando corretamente as operações indicadas (adição e subtração). Após encontrar o resultado, verifique se é possível simplificá-lo. Caso seja, escreva a forma mais simplificada da resposta.

   (a) $\frac{4}{9} + \frac{5}{6}$
   (b) $\frac{11}{8} - \frac{5}{4}$
   (c) $\frac{7}{10} + \frac{9}{8}$
   (d) $\frac{6}{4} + \frac{7}{6}$
   (e) $\frac{5}{6} - \frac{7}{12}$
   (f) $\frac{3}{8} - \frac{2}{6}$
   (g) $\frac{11}{12} + \frac{7}{18}$
   (h) $\frac{8}{15} - \frac{4}{10}$

9. Determine o valor das expressões numéricas abaixo:

   (a) $\frac{11}{8} - \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$
   (b) $\frac{5}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$
   (c) $\frac{7}{8} - \frac{3}{16} + \frac{1}{2}$
   (d) $3 + \frac{2}{5} - \frac{7}{10}$
   (e) $\frac{11}{15} - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right)$
   (f) $\frac{14}{3} - 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$

10. Em cada item, reescreva as frações em ordem decrescente.

(a) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{2}$

(b) $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{4}{3}$

(c) $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$

(d) $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{9}{5}$

(e) $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{10}$

(f) $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{7}{6}$

11. Utilize a simplificação prévia para determinar o resultado de:

(a) $\frac{18}{25} \times \frac{45}{27}$

(b) $\frac{49}{100} \times \frac{9}{7}$

(c) $\frac{24}{27} \times \frac{36}{25}$

(d) $\frac{48}{11} \times \frac{33}{16}$

(e) $\frac{7}{12} \times \frac{75}{21} \times \frac{9}{100}$

(f) $\frac{18}{4} \times \frac{64}{81} \times \frac{27}{54}$

12. Determine o resultado simplificado de:

(a) $\frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$

(b) $\frac{9}{40} \div \frac{36}{25}$

(c) $\frac{3}{8} \times \frac{2}{5} \div \frac{6}{7}$

(d) $\frac{9}{10} \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right)$

(e) $\frac{5}{12} \times \frac{3}{7} \div \frac{15}{28}$

(f) $\left(\frac{7}{9} \div \frac{14}{27}\right) \times \frac{3}{4}$

13. Resolva as expressões numéricas a seguir:

(a) $\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$

(b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

(c) $\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}\right) \div \frac{3}{10}$

(d) $\frac{7}{10} \div \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right)$

(e) $\left(\frac{9}{16} \times \frac{4}{9}\right) + \frac{1}{8}$

14. Ao preparar uma receita de bolo, uma confeiteira precisará de $\frac{3}{4}$ de xícara de açúcar. Se ela já colocou $\frac{1}{3}$, quantas xícaras de açúcar ainda faltam para que ela possa terminar a receita?

15. Lucas começou hoje pela manhã a pintar as paredes de seu quarto. Após 3 horas de serviço ele fez uma pausa para o almoço sendo que já havia pintado $\frac{3}{8}$ das paredes. No período da tarde, depois do almoço, ele pintou mais $\frac{1}{4}$ das paredes. Quanto da parede ele já pintou no total e quanto ainda falta para terminar?

16. Uma equipe composta por três atletas está participando de uma corrida de revezamento cujo percurso total é de 12 km. Se o primeiro corredor percorreu $\frac{1}{4}$ da distância e o segundo percorreu $\frac{1}{3}$, pergunta-se:

(a) Qual a fração do percurso já foi feita pelos dois primeiros atletas?

(b) Quantos quilômetros serão percorridos pelo terceiro corredor?

(c) Quem percorreu a menor distância?

4.2.6 Respostas

1. (a) $\frac{24}{40}$
   (b) $\frac{18}{30}$
   (c) $\frac{36}{60}$
   (d) $\frac{48}{80}$
   (e) $\frac{45}{75}$
   (f) $\frac{51}{85}$
2. (a) São.
   (b) Não são.
   (c) Não são.
   (d) São.
   (e) Não são.
   (f) São.
   (g) São.
   (h) São.
   (i) São.
   (j) Não são.
   (k) São.
   (l) São.
3. (a) Sim, 2.
   (b) Não é.
   (c) Sim, 1.
   (d) Não é.
   (e) Sim, 12.
   (f) Sim, 8.
   (g) Não é.
   (h) Sim, 40.
   (i) Não é.
   (j) Não é.
   (k) Não é.
   (l) Sim, 4.
4. (a) (d) (f) (g) (h) (i) (j) (l) (o)
5. (a) $\frac{67}{6}$
   (b) $\frac{75}{15}$ $(= 5)$
   (c) $\frac{1}{2}$
   (d) $\frac{2}{11}$
   (e) $\frac{1}{6}$
   (f) $\frac{21}{3}$ $(= 7)$
   (g) $\frac{25}{7}$
   (h) $\frac{1}{2}$
   (i) $\frac{1}{20}$
6. (a) $\frac{7}{10}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{3}{10}$
   (b) $\frac{19}{4}$ $\frac{17}{4}$ $\frac{11}{4}$
   (c) $\frac{11}{26}$ $\frac{7}{26}$ $\frac{5}{26}$
   (d) $\frac{17}{31}$ $\frac{16}{31}$ $\frac{2}{31}$
7. (a) São.
   (b) São.
   (c) Não são.
   (d) São.
   (e) Não são.
   (f) Não são.
   (g) São.
   (h) São.
   (i) Não são.

8. (a) $\frac{19}{18}$
   (b) $\frac{1}{8}$
   (c) $\frac{73}{40}$
   (d) $\frac{8}{3}$
   (e) $\frac{1}{4}$
   (f) $\frac{1}{24}$
   (g) $\frac{47}{36}$
   (h) $\frac{2}{15}$

9. (a) $\frac{1}{4}$
   (b) $\frac{1}{2}$
   (c) $\frac{19}{16}$
   (d) $\frac{27}{10}$
   (e) 0
   (f) $\frac{41}{18}$

10. (a) $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$
    (b) $\frac{5}{2}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$
    (c) $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$
    (d) $\frac{9}{5}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{5}{6}$
    (e) $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{10}$
    (f) $\frac{7}{6}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{5}$

11. (a) $\frac{6}{5}$
    (b) $\frac{63}{100}$
    (c) $\frac{96}{75}$
    (d) 9
    (e) $\frac{3}{16}$
    (f) $\frac{16}{9}$

12. (a) $\frac{2}{3}$
    (b) $\frac{5}{32}$
    (c) $\frac{7}{40}$
    (d) 3
    (e) $\frac{1}{3}$
    (f) $\frac{9}{8}$

13. (a) $\frac{11}{12}$
    (b) 1
    (c) $\frac{25}{2}$
    (d) $\frac{7}{9}$
    (e) $\frac{3}{8}$

14. $\frac{5}{12}$

15. Pintou $\frac{5}{8}$, faltam $\frac{3}{8}$.

16. (a) $\frac{7}{12}$
    (b) 5 km
    (c) O primeiro corredor.

4.3 IDENTIFICANDO PADRÕES

- **Conteúdos a serem trabalhados:** Operações algébricas ($+, -, \times, \div$ e potência); resolução de expressões algébricas; uso da linguagem algébrica; modelagem matemática; cálculo de valor numérico; diferenciação entre variável e incógnita; sequências numéricas.
- **Série:** Ensino Médio.
- **Tema da proposta didática:** Utilizando a Álgebra para simplificar padrões numéricos e determinar valores.
- **Objetivos da proposta didática:**
  - Reconhecer que a Álgebra é uma facilitadora no entendimento e manipulação de determinados padrões numéricos;
  - Identificar no contexto algébrico quando estamos trabalhando com incógnitas e quando estamos trabalhando com variável;
  - Cálculo de valor numérico de uma expressão algébrica;
  - Modelagem algébrica na resolução de problemas;
  - Retomar as propriedades operatórias dos números.
- **Unidade temática:** Álgebra.
- **Objeto de conhecimento:** Manipulação algébrica.
- **Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:**
  - EF07MA12 - Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita;
  - EF07MA15 - Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas;
  - EF08MA06 - Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
- **Tempo de execução da proposta didática:** 4 aulas + 2 aulas de avaliação (**APÊNDICE C**).
- **Materiais necessários:** caderno, caneta, lápis e borracha.

SINOPSE: Esta proposta didática se inicia com as operações algébricas básicas, para então falarmos sobre resolução de resolução de expressões algébricas. Na segunda aula aprofundaremos nossos conhecimentos com os alunos utilizando a linguagem algébrica para traduzir as expressões e operações que estão sendo realizadas. Na aula três daremos um enfoque à modelagem matemática e como ela nos ajuda na análise e tomada de decisões, além de calcular o valor numérico de expressões. Por fim, na última aula, comentaremos a diferença entre variável e incógnita, e traremos um problema para estimular os alunos na observação e na resolução de problemas que envolvem a observação de padrões numéricas e a descrição de uma fórmula que descreva este padrão.

4.3.1 Aula 1 - Introdução à Álgebra básica; adição, subtração e multiplicação algébrica

Buscando resgatar os conhecimentos adquiridos pelos alunos, motive-os dizendo que o objetivo das próximas aulas será compreender e aceitar cada vez mais o uso da Álgebra como uma facilitadora na resolução de problemas matemáticos e em contextos numéricos.

Ativação dos conhecimentos prévios: Para aproximá-los mais do nosso foco de estudo, pergunte aos alunos o que eles sabem sobre a Álgebra e, dependendo das respostas fornecidas, o que eles acham da ideia de trabalhar com letras para representar números. Considerando que geralmente há uma forte resistência ao uso da Álgebra na resolução dos problemas matemáticos, por considerar que ela complica ao invés de simplificar os cálculos, podemos tentar, através do "cansaço", mostrar aos alunos que a Álgebra facilita a nossa vida.

Inciaremos a abordagem de uma situação fictícia para motivar as operações algébricas.

Exemplo 4.3.1. *Em uma cidade pequena do interior havia uma papelaria que era a melhor e a mais completa da cidade. Frequentemente os pais dos alunos optavam por comprar os materiais escolares de seus filhos nesta papelaria. Dentre os que mais eram solicitados, estavam:*

CÓDIGO	**PRODUTO**	**PREÇO (venda)**
C	caderno com pauta (96 folhas)	R$ 15,00
B	borracha branca	R$ 8,00
L	lápis de escrever	R$ 2,00
K	caneta esferográfica (azul, preta, vermelha)	R$ 4,00
R	régua 30cm	R$ 3,00

Dos produtos acima listados, temos que o custo de cada produto para o dono da papelaria é:

CÓDIGO	**PRODUTO**	**PREÇO (compra)**
C	caderno com pauta (96 folhas)	R$ 8,00
B	borracha branca	R$ 5,00
L	lápis de escrever	R$ 1,00
K	caneta esferográfica (azul, preta, vermelha)	R$ 2,00
R	régua 30cm	R$ 1,00

Se ele quiser bater uma meta de lucro de R$ 250,00 por dia com a venda apenas destes produtos e, mais ainda, acompanhar para saber quanto tempo está levando para bater esta meta, é natural pensar que a cada venda de algum desses produtos, independente da quantidade, o vendedor deveria calcular o total de venda e subtrair o total de custos, para então encontrar o lucro.

Sugestão: Aqui vale destacar a importância de se resolver alguns casos particulares com os alunos, uns 7 (ou qualquer quantidade que indique que a maior parte entendeu o processo envolvido), para que eles visualizem o padrão da situação e sintam a necessidade de criar uma fórmula que facilite os cálculos da obtenção do lucro total.

Usando a Álgebra podemos associar a cada um dos códigos a quantidade de produtos que foram vendidos para então determinar o total de vendas e também total do custo de aquisição destes mesmos produtos. Logo, teremos:

VENDAS	**COMPRAS**
$15 \cdot C$	$8 \cdot C$
$8 \cdot B$	$5 \cdot B$
$2 \cdot L$	$1 \cdot L$
$4 \cdot K$	$2 \cdot K$
$3 \cdot R$	$1 \cdot R$

Observação 4.3.1. *Caso algum aluno não conheça esta informação ou não se lembre, é interessante comentar sobre a troca do sinal de vezes* ($\times$) *pelo ponto no centro da linha* ($\cdot$)*, que isto acontece para que não haja dupla interpretação e o aluno confunda com o* x *utilizado para incógnitas ou variáveis. Além disso, é válido comentar que, como as crianças menores costumam se distrair mais facilmente, usar o ponto no centro da linha desde o início poderia fazer com que eles confundissem com o ponto final usado para finalizar frases.*

Mais adiante, voltaremos neste problema para realizar mais algumas análises e cálculos. Por enquanto refletiremos sobre as operações algébricas.

Alinhando expectativas: Relembre-os de que as letras estão representando um número qualquer, como o que estava acontecendo na venda dos produtos da papelaria (do problema). Utilizaremos a letra B para representar este número principal com o qual efetuaremos as operações. Além disso, a Álgebra utiliza uma linguagem própria que pode ser compreendida por qualquer pessoa, bastando apenas que os alunos se predisponham a querer aprendê-la.

Diante disso, podemos iniciar a análise.

Iniciando com a MULTIPLICAÇÃO, para facilitar a escrita, é possível omitir o ponto no centro da linha para denotar o produto. Além disso, vemos que ela pode ser de três tipos: por um número fixo, pelo mesmo valor variável ou por outro valor variável.

1º) **Por um número fixo:** Neste caso não há o que se fazer, apenas indicar esta operação.

2º) **Pelo mesmo valor variável:** Se lembrarmos da definição de potência veremos que neste caso específico podemos simplificar a escrita utilizando propriedades das potências. Esta técnica é válida ainda que os expoentes sejam diferentes de 1, desde que a letra utilizada seja a mesma.

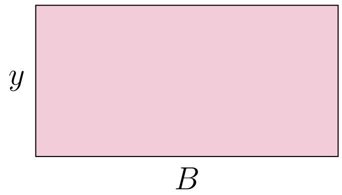
3º) **Por outro valor variável:** Neste caso também não o que se fazer, apenas indicar que os valores estão sendo multiplicados.

Nas expressões $3 \cdot m$, $8 \cdot g$, $x \cdot z$ e $w \cdot p$ não há o que se fazer para simplificá-las pois são do 1º e do 3º tipo. Já no caso de $k \cdot k$ e $q^4 \cdot q$ podemos simplificá-las respectivamente por k^2 e q^5, já que estamos multiplicando um valor por ele mesmo.

Observação 4.3.2. *Leve os alunos a reparar que a multiplicação do terceiro tipo é um caso mais geral em relação aos outros dois anteriores. Por exemplo, na multiplicação* $y \cdot B = yB$*, o sinal de multiplicação é* ***o único*** *que pode ser omitido. Veja que* y *pode ser um número fixo; pode ser o próprio valor* B*, ainda que não tenhamos seu valor; ou também pode ser um valor variável qualquer, diferente de* B*. Como a multiplicação só pode ser simplificada no segundo caso, então os demais casos só serão indicados.*

Exemplo 4.3.2. *Considere o retângulo abaixo cujas medidas estão indicadas na figura. Da geometria plana, sabemos que sua área é dada pelo produto* yB*.*

Figura 15: Retângulo de base B e altura y.



Fonte: Autor.

Logo a expressão que fornece a área só pode ser simplificada quando o valor da altura for o mesmo valor da base, ou seja, quando o retângulo for um quadrado. E daí a sua área será dada por $BB = B^2$*.*

Observação 4.3.3. *Como a DIVISÃO é a operação inversa da multiplicação, então as conclusões serão as mesmas. Apenas podemos simplificar uma divisão desde que os valores variáveis sejam iguais, nos demais casos iremos apenas indicar a divisão. Por exemplo,*

$$\frac{m^9}{m^5} = m^4, \ \frac{m^9}{6}, \ \frac{m^9}{g^2} \ e \ \frac{am^9}{m^7k^5} = \frac{am^2}{k^5}.$$

Na sequência veremos sobre a ADIÇÃO, que assim como no caso da operação anterior, também só pode ser de três tipos.

1º) **Por um número fixo:** Neste caso não há o que se fazer, apenas indicar esta operação.

2º) **Pelo mesmo valor variável:** Se lembrarmos da definição de adição veremos que neste caso específico podemos simplificar a escrita transformando-a em uma multiplicações. Esta técnica ainda é válida caso o coeficiente seja diferente de 1 e a parte literal seja a mesma.

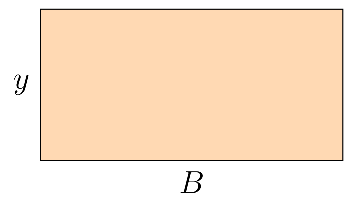
3º) **Por outro valor variável:** Neste caso também não o que se fazer, apenas indicar que os valores estão sendo adicionados.

Nas expressões $7+m$, $p+10$, $r+q$ e $z+x^3$ não há o que se fazer para simplificá-las pois são do 1º e do 3º tipo. Já no caso de $w+w$ e $g+7g$ podemos simplificá-las respectivamente por $2w$ e $8g$, já que estamos adicionando um valor a ele mesmo.

Observação 4.3.4. *Leve os alunos a repararem que a adição do terceiro tipo é um caso mais geral em relação aos outros dois anteriores. Por exemplo, na adição* $y + B$*,* y *pode ser um número fixo; pode ser o próprio valor* B*, ainda que não tenhamos seu valor; ou também pode ser um valor variável qualquer, diferente de* B*. Como a adição só pode ser simplificada no segundo caso, então os demais casos só serão indicados.*

Exemplo 4.3.3. *Considere o retângulo abaixo cujas medidas estão indicadas na figura. Da geometria plana, sabemos que seu perímetro é dada pela soma $2y + 2B$.*

Figura 16: Retângulo de base B e altura y.



Fonte: Autor.

Logo a expressão que fornece a área só pode ser simplificada quando o valor da altura for o mesmo valor da base, ou seja, quando o retângulo for um quadrado. E daí o seu perímetro será dado por $2B + 2B = 4B$.

Observação 4.3.5. *Como a SUBTRAÇÃO é a operação inversa da adição, então as conclusões serão as mesmas. Apenas podemos simplificar uma subtração desde que os valores variáveis sejam iguais, nos demais casos iremos apenas indicar a subtração. Por exemplo,*

$$9m - 5m = 4m,\ 7m - 2,\ 9m - 2g \text{ e } 9am - 7km = (9a - 7k)m.$$

Exercitando os conhecimentos: Para ajudá-los a fixar os conceitos vistos anteriormente, peça a eles que realizem os **Exercícios de fixação** 1 e 2.

4.3.2 Aula 2 - Linguagem e operações algébricas

Inicie esta segunda aula da proposta didática refazendo algumas perguntas sobre o tema abordado no dia anterior. Escreva no quadro expressões, tais quais as do exercício de fixação nº 1, e peça a eles que levantem a mão quando a expressão puder (ou não) ser simplificada. É interessante também mostrar expressões algébricas mais simples e ir pedindo a alguns alunos para dar a resposta simplificada. Não aconselhamos apenas fazer a dinâmica onde o aluno precise levantar a mão pois tem aqueles que acabam sendo induzidos pela resposta dos demais, a segunda dinâmica ajuda a verificar como está o entendimento individual do aluno.

Na sequência, comente com os alunos que resolveremos expressões algébricas envolvendo várias operações para que eles possam exercitar como as quatro operações se relacionam.

Exemplo 4.3.4 (Continuação do Exemplo 4.3.1)**.** *Diante do que foi visto anteriormente podemos agora determinar uma expressão que permita calcular o lucro total obtido com a venda dos produtos. Recapitulando a última aula, tínhamos obtido o seguinte quadro com os valores de venda e de compras dos produtos.*

Logo, o lucro total (LT) será a diferença entre o total de vendas e o total gasto na compra dos produtos, ou seja:

Daí temos $LT = 7C + 3B + L + 2K + 2R$. O que já nos fornece o valor do lucro mais rapidamente. Perceba que a meta de R$ 250,00 diários com a vendas dos produtos pode ser obtida de várias formas, por exemplo, se forem vendidos:

VENDAS	**COMPRAS**
$15C$	$8C$
$8B$	$5B$
$2L$	$1L$
$4K$	$2K$
$3R$	$1R$

VENDAS - COMPRAS	**LUCRO TOTAL**
$15C - 8C$	$7C$
$8B - 5B$	$3B$
$2L - 1L$	L
$4K - 2K$	$2K$
$3R - 1R$	$2R$

- *10 cadernos, 20 borrachas, 36 lápis, 26 canetas e 16 réguas;*
- *18 cadernos, 14 borrachas, 24 lápis, 21 canetas e 8 réguas; ou*
- *13 cadernos, 19 borrachas, 36 lápis, 23 canetas e 10 réguas.*

Mais adiante voltaremos neste exemplo ao longo da proposta didática. Agora iremos aprofundar os conhecimentos em operações algébricas.

Observação 4.3.6. *Adiante estão listados os casos particulares envolvendo a adição e a multiplicação, e suas respectivas operações inversas, além de uma observação sobre a potência de um termo algébrico.*

*I- A **ADIÇÃO** (e a **SUBTRAÇÃO**) só podem ser realizadas caso os termos forem semelhantes, isto é, **mesma letra e mesmo expoente**;*

*II- Caso a **ADIÇÃO** (ou a **SUBTRAÇÃO**) possua termos que "quase semelhantes", no caso que tenham apenas a mesma letras mas **expoente diferente**, podemos simplificar a expressão utilizando a propriedade distributiva colocando o termo de menor expoente, e também o fator comum, caso exista, em evidência;*

*III- A **MULTIPLICAÇÃO** (e a **DIVISÃO**) é realizada na parte literal e nos coeficientes dos termos;*

*IV- Se recorrermos à definição de **POTÊNCIA** (de expoente inteiro positivo), veremos que tanto o coeficiente quanto a parte literal devem ser elevados ao valor do expoente em questão.*

Exemplo 4.3.5. *Simplificando cada expressão abaixo, temos:*

a) $7h + 12h = (7 + 12) \cdot h = 19h$

b) $26m^5 - 12m^5 = (26 - 12) \cdot m^5 = 14m^5$

c) $9xy^{11} - 8zy^7 = y^7(9xy^4 - 8)$

d) $8g^3 + 6g^8 = 2g^3(4 + 3g^5)$, *2 está em evidência pois é o máximo divisor comum dos coeficientes 8 e 6* *e)* $3a^5 \cdot 4a^2 = (3 \cdot 4)a^{5+2} = 12a^7$

f) $\dfrac{18x^7}{6x^2} = (18 \div 6)x^{7-2} = 3x^5$

g) $6m^2p \cdot 10n^3p^3 = (6 \cdot 10)m^2n^3p^{1+3} = 60m^2n^3p^4$

h) $(2q^3)^4 = 2^4 \cdot (q^3)^4 = 16q^{3 \cdot 4} = 16q^{12}$

É bom relembrar com os alunos expressões que podem ser utilizadas na matemática e o seu significado algébrico. Abaixo citaremos algumas e outras serão trabalhadas nos exercícios de fixação. Considere que estamos chamando o número em questão de p.

sucessor de um número $\longrightarrow$ $p+1$

dobro de um número $\longrightarrow$ $2p$

antecessor de um número $\longrightarrow$ $p-1$

metade de um número $\longrightarrow$ $\dfrac{p}{2}$

quadrado de um número $\longrightarrow$ p^2

triplo de um número $\longrightarrow$ $3p$

raiz quadrada de um número $\longrightarrow$ $\sqrt{p}$

um quinto do triplo do quadrado de um número $\longrightarrow$ $\dfrac{3p^2}{5}$

Peça aos alunos que resolvam as questões 3, 4, 5 e 6 dos **Exercícios de fixação**.

4.3.3 Aula 3 - Cálculo de valor numérico e modelagem matemática

Nesta terceira aula espera-se que os alunos tenham relembrado as operações algébricas, simplificar expressões e a utilizar a linguagem algébrica para expressar conceitos abstratos. Antes de iniciar os tópicos da aula, selecione alguns alunos para responder perguntas envolvendo os assuntos dos exercícios de fixação trabalhados na aula anterior. Este momento pode ser de muita utilidade para que eles manifestem alguma possível dúvida e também para verificação do entendimento dos assuntos vistos.

O objetivo desta aula é trabalhar com o cálculo de valor numérico e a modelagem de situações.

O valor numérico de uma expressão algébrico nada mais é que a determinação do resultado numérico da expressão quando temos o valor da variável. Para tal, devemos realizar a substituição da variável pelo valor específico que ela está assumindo e resolver, agora, uma expressão numérica.

Exemplo 4.3.6. *Determine o valor de* $\dfrac{p^2-3p+10}{2p-1}$ *se* $p=4$.

i) Substituição: $\dfrac{4^2 - 3 \cdot 4 + 10}{2 \cdot 4 - 1}$;

ii) Resolução da expressão numérica: $\dfrac{16 - 12 + 10}{8 - 1} = \dfrac{14}{7} = 2.$

SUGESTÃO: Pode ser interessante perguntar aos alunos se eles lembram da ordem de execução das operações durante a resolução de uma expressão numérica. Escreva-as em ordem no canto do quadro para facilitar a visualização e também para que esta informação seja mais facilmente gravada no cérebro do aluno.

Exemplo 4.3.7. *Calcule o valor da expressão* $2a^3 - 3b^2$ *quando* $a = -2$ *e* $b = 4$.

i) Substituição: $2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot 4^2$;

ii) Resolução da expressão numérica: $2 \cdot (-8) - 3 \cdot 16 = -16 - 48 = -54.$

Dando continuidade aos estudos algébricos, é importante que o aluno desenvolva a habilidade de modelar matematicamente uma situação, isto é, a tradução de um problema do mundo real para a linguagem matemática. Esta habilidade é necessária para que, por exemplo, possamos prever o comportamento do problema ou possamos tomar melhores decisões sobre ele, usando ferramentas matemáticas. Utilizaremos o exemplo a seguir para exemplificar uma modelagem.

Exemplo 4.3.8. *Em uma escola onde os bimestres valem 100 pontos e a média para aprovação no bimestre é 70, um professor de Matemática realiza duas provas no valor de 30 pontos cada, um trabalho valendo 10 pontos e dez perguntas orais, de igual valor, feitas ao longo do bimestre com o restante dos pontos. Se um aluno tirou 25 e 27 pontos nas provas e não conseguiu entregar o trabalho, determine quantas perguntais orais no mínimo ele deverá responder para alcançar a nota média.*

i) Note que cada pergunta oral vale 3 pontos;

*ii) Utilize a variável **P** para representar a quantidade mínima de perguntas orais que o aluno precisa responder;*

iii) Modelagem: $25 + 27 + 0 + 3P = 70$;

iv) Resolvendo a equação de 1º grau: $52 + 3P = 70 \Rightarrow P = \frac{18}{3} = 6$;

v) Conclusão: Ele deve responder no mínimo 6 das 10 perguntas orais.

Após finalizar a resolução é importante frisar com os alunos que a modelagem matemática requer muita criatividade, imaginação e também "conhecimento de mundo" pois os alunos utilizarão a Álgebra nos mais variados contextos e situações. A resolução da equação é importante porém não é a única parte a ser executada nos problemas de modelagem.

Agora, peça a eles que realizem os **Exercícios de fixação** nº 7, 8, 9, 10 e 11.

4.3.4 Aula 4 - Padrão algébrico e resolução de exercícios

Nas aulas anteriores desta proposta, vimos sobre diversos assuntos que permeiam a Álgebra básica. Contudo, não fizemos uma distinção entre dois conceitos que são muito utilizados pelos alunos e que causam confusão ou troca de significados: a diferença entre **variável** e **incógnita**.

Exemplo 4.3.9. *(Continuação do Exemplo 4.3.1) Vimos na **AULA 2** que a expressão que fornece o lucro total com a venda dos produtos é*

$$LT = 7C + 3B + L + 2K + 2R.$$

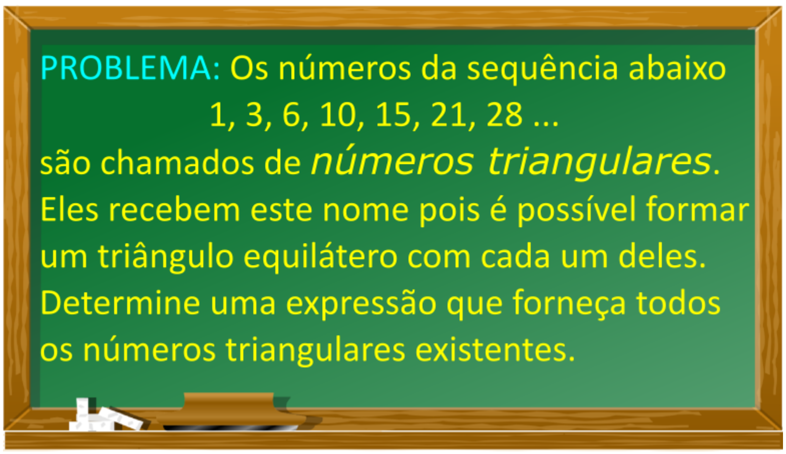
*Perceba que, como não temos as quantidades vendidas de cada produto, logo os valores de **C**, **B**, **L**, **K** e **R** não são fixos, são valores variáveis, isto é, podem ser quaisquer números inteiros não negativos.*

Caso, por um descuido qualquer, as vendas das réguas não tenham sido registradas no computador mas saibamos que o lucro total do dia fora de R$ 216,00 e que, além disso, foram vendidos 9 cadernos, 17 borrachas, 34 lápis e 27 canetas, bastaria substituir estes valores conhecidos na expressão do lucro total e depois resolver uma equação para encontrar o valor desconhecido do total de réguas, ou seja, da incógnita.

Em resumo, a **variável** pode assumir qualquer valor, já a **incógnita** é um caso específico da variável onde o valor da letra existe, só não é de conhecimento à primeira vista.

Aplicando os conhecimentos anteriores: Agora utilizaremos a linguagem algébrica e os temas revisados sobre modelagem algébrica para resolver problemas que podem ser expressos através da análise de comportamentos numéricos e operacionais para a obtenção de uma fórmula. Utilize o problema abaixo como exemplo para motivar os alunos a recorrer aos conhecimentos algébricos para determinar a resolução.

Figura 17: Problema dos números triangulares.



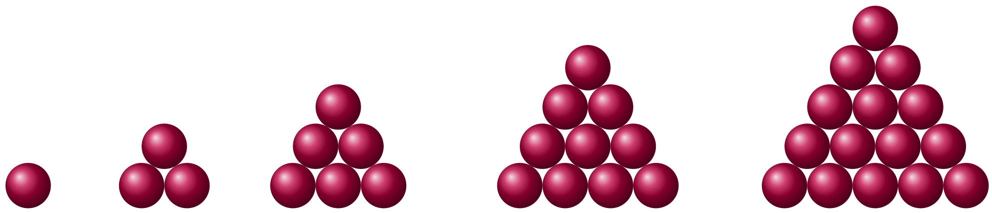
Fonte: adaptado de Pixabay (2014).

Utilizando as quatro etapas de Polya:

1. **Compreensão** - A visualização geométrica pode ajudar consideravelmente no entendimento do aluno. Sugira a eles que façam desenhos dos triângulos correspondentes a cada número. É interessante também que eles associem os números triangulares

aos números correspondentes aos termos da sequência dos números naturais. Isso pode ajuda-lo na escrita da expressão geral.

Figura 18: Representação geométrica dos números triangulares.

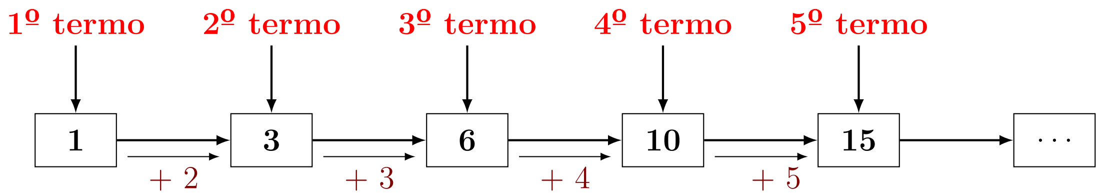


Fonte: Autor.

Considere que a expressão se chamará **T** e a escreveremos com base na posição **n** da sequência do respectivo número triangular.

2. **Concepção de um plano** - Com base no enunciado, podemos montar o seguinte esquema que nos ajuda a entender como que os números triangulares se relacionam com a ordenação dos mesmos.

Figura 19: Padrão observado nos números triangulares.



Fonte: Autor.

E assim observamos os seguintes comportamentos numéricos, por exemplo:

i) Para encontrar o próximo número triangular estamos adicionando os números naturais a partir do 2 (por exemplo: $6 = 3 + 3$, $10 = 6 + 4$);

ii) A soma de dois números triangulares consecutivos nos fornece a sequência dos números quadrados perfeitos, a partir do 4 (por exemplo: $6+10 = 4^2$, $10+15 = 5^2$);

iii) O n-ésimo número triangular é igual à metade do produto de n por $n + 1$ (por exemplo: $1 = \frac{1\times 2}{2}$, $10 = \frac{4\times 5}{2}$).

Observação 4.3.7. *Se por acaso algum aluno observar outro padrão numérico, desde que este esteja correto, caberia aproveitar a oportunidade para parabeniza-lo pela contribuição e comentar com os demais alunos para incentivar a participação.*

3. **Execução de um plano** - Utilizaremos o comportamento numérico observado em (iii), pois ele já associa diretamente a posição a seu respectivo número triangular.

Aqui será utilizado um raciocínio parecido com o da **soma de Gauss** (para os números de 1 a 100). Observe que:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\
+ & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \dots & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1
\end{array}
$$

Como aparecem n parcelas $n+1$ e estamos somando os números de 1 até n duas vezes, então, é possível afirmar que

$$T = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Observação 4.3.8. *Apesar desta conclusão não possui rigor matemático, pois precisaríamos utilizar o processo de indução finita, o objetivo é fazer com que o aluno se familiarize com o raciocínio abstrato para manipular valores algébricos e encontrar uma expressão que generalize uma situação.*

4. **Retrospecto** - Em posse da expressão geral, é interessante que agora o aluno utilize-a e veja se a expressão encontrada é condizente com a situação. Por exemplo, use a fórmula para determinar o valor dos cinco primeiros valores da sequência dos números triangulares. Em seguida, o professor pode:

   a) Utilizar a fórmula obtida para conferir se ela descreve as observações pontuadas nos itens (i) e (ii) da **concepção do plano**, ou alguma outra que os alunos tenham notado.
   b) Reforçar com os alunos a facilidade de se ter uma fórmula pois com ela é possível encontrar, neste caso, um número triangular qualquer dado a sua posição na sequência.
   c) Conferir qual etapa os alunos tiveram mais dificuldade para que o professor possa compreender melhor como o aluno está assimilando as informações e assim possa ajudá-lo no pleno entendimento do exercício e da matéria.

   Por fim, caso o professor tenha notado que o entendimento das etapas de resolução tenha sido razoavelmente satisfatório, recomenda-se passar exercícios onde a fórmula a ser obtida utilize as operações básicas de tal forma que o aluno consiga rapidamente observar o padrão envolvido nas sequências numéricas. E conforme mais alunos na turma demonstrarem mais domínio, então o nível dos exercícios pode ser gradualmente elevado.

Lembre-se também que o fato dos conceitos estarem óbvios para você, professor, não significa que o aluno irá assimila-los em pouco tempo. É necessário entender o momento em que o aluno se encontra e o nível de familiaridade deste com a Matemática. Ainda assim podemos utilizar de nossa versatilidade para motivar o maior número possível de estudantes a mudar suas próprias percepções sobre a disciplina e os assuntos inerentes a ela. Tudo dependerá do nível de confiança existente na relação professor-aluno e do interesse deste aluno em querer progredir.

É interessante que eles revejam toda a resolução do problema e que tenham seu próprio momento para exercitar o que foi visto. Por isso, peça-os para realizar os **Exercícios de fixação** nº 12 e 13.

SUGESTÃO: Após executar toda a proposta didática realize um trabalho com os alunos onde eles possam realiza-lo (preferencialmente) em sala de aula visto que, sem a supervisão do professor, ele pode ficar tentado a utilizar ferramentas de inteligência artificial, por exemplo, para resolver. Quanto mais ele for exposto a problemas de investigação matemática para descobrir e determinar padrões em sequências numéricas, melhor será sua familiaridade com a abstração e com a linguagem algébrica que estão presentes em diversos assuntos da Matemática do Ensino Médio.

4.3.5 Exercícios de fixação

1. Dentre as expressões a seguir, marque com "X" aquelas que podem ser simplificadas (resolvidas).

   (a) ( ) $h + k$
   (b) ( ) $m \cdot m$
   (c) ( ) $g^2 \cdot g^5$
   (d) ( ) $10v - 3w$
   (e) ( ) $8h^7 \div h^3$
   (f) ( ) $4q + 2q$
   (g) ( ) $9k^3 \div 3j^2$
   (h) ( ) $f^3 \cdot h^2$
   (i) ( ) $9d - 2d$
   (j) ( ) $y + y$
   (k) ( ) $w \div w$
   (l) ( ) $b^7 \cdot b^3$

2. Simplifique as expressões algébricas abaixo:

   (a) $z + z$
   (b) $\dfrac{n^8}{n^6}$
   (c) $by^6 \cdot y^5$
   (d) $8x - 5x$
   (e) $14k + 3k$
   (f) $\dfrac{9p^{17}}{hp^{11}}$
   (g) $ax^3 \cdot bx^7$
   (h) $20w - 7w$
   (i) $f + 21f$

3. Em cada item a seguir, diga o motivo pelo qual as expressões não podem ser simplificadas.

   (a) $3r - u$
   (b) $7xn^2 + 5ym^2$
   (c) $\dfrac{12yg^7}{5zq^3}$
   (d) $5x^2 + 4z^2$

4. Efetue as operações algébricas indicadas abaixo:

   (a) $31p + 17p$
   (b) $16d^3 - 7d^3$
   (c) $8gd^2 \cdot 3g^2d^3$
   (d) $40x^5 \div 5x^3$
   (e) $10az^3 - 4az^3$
   (f) $19w^2 + 23w^2$
   (g) $5xy^3z \cdot 9y^2z^2$
   (h) $\dfrac{48g^5a}{3g}$

5. Simplifique as expressões algébricas.

   (a) $6a^2 + 8a - (5a^2 + 3a - 1)$
   (b) $9z^2y + 7zy^2 - 4z^2y + 3zy^2 - 2zy^2$
   (c) $20zw^7 - 8z^2w^3 + 12z^5w^4$
   (d) $\dfrac{20x^4y^7 + 8x^5y^9}{2x^2y^3}$
   (e) $(5z - 2z)^2 + 4z \cdot 5w$

6. Escreva um termo ou expressão algébrica que expresse as seguintes ideias:

   (a) o quádruplo de um número;
   (b) um número elevado à oitava potência;
   (c) um número 12 unidades maior;
   (d) a décima parte de um número;
   (e) a soma de dois números;
   (f) o cubo de um número;
   (g) a raiz quinta de um número;
   (h) a sétima parte de um número;

(i) o sucessor do dobro de um número;

(j) a diferença do quadrado de um número por seu triplo;

(k) o antecessor do quadrado de um número;

(l) o dobro da diferença dos quadrados de dois números.

7. Em cada expressão algébrica a seguir, determine seu valor quando $x = 5$.

   (a) $x - 3$

   (b) $9x$

   (c) $3x^2 - 10x$

   (d) $18x + 20 - (2x)^2$

   (e) $\dfrac{4x^2 + 50}{75}$

8. Um objeto é solto do alto de um prédio, a partir de uma altura de 500 metros. Sua posição em função do tempo t, em segundos, é dada pela fórmula:

$$s(t) = 500 - 4,9t^2$$

   onde $s(t)$ representa a altura (em metros) em relação ao solo no instante t. Determine qual será a posição do objeto após:

   (a) 1 segundo.

   (b) 2 segundos.

   (c) 5 segundos.

   (d) 10 segundos.

9. O cinema de um *shopping* está cobrando R$ 30,00 pelo ingresso inteiro e R$ 15,00 pela meia-entrada. Considerando que foram vendidos x ingressos para entrada inteira, y ingressos para meia-entrada e o total das vendas em uma determinada seção foi de R$ 16450,00, escreva uma equação que expresse o valor total arrecadado nesta seção.

10. Se no problema anterior soubermos que 35 pagaram pela entrada inteira, qual seria então o total de pessoas que pagaram meia-entrada?

11. Para realizar as entregas de um restaurante, um *motoboy* cobra R$ 2,00 por entrega mais um valor fixo de R$ 150,00 pelos custos de manutenção do veículo por dia de serviço trabalhado.

   (a) Escreva uma expressão algébrica que forneça o valor recebido VR ao final de um dia de trabalho sabendo que ele realizou x entregas.

   (b) Quantas entregas foram realizadas se ele recebeu R$ 316,00?

4.3.6 Respostas

1. (b) (c) (e) (f) (i) (j) (k) (l)

2. (a) $2z$

   (b) n^2

   (c) by^{11}

   (d) $3x$

   (e) $17k$

   (f) $\frac{9p^6}{h}$

(g) abx^{10}

(h) $13w$

(i) $22f$

3. (a) Os termos não são semelhantes.
   (b) Os termos não são semelhantes.
   (c) Não é possível realizar a simplificação dos coeficientes e as partes literais não possuem nada em comum.
   (d) Os termos não são semelhantes.

4. (a) $48p$
   (b) $9d^3$
   (c) $24g^3d^5$
   (d) $8x^2$
   (e) $6az^3$
   (f) $42w^2$
   (g) $45xy^7z^3$
   (h) $16g^2a$

5. (a) $a^2 + 5a + 1$
   (b) $5z^2y8zy^2$
   (c) $4zw^3(5w^4 - 2z + 3z^4w)$
   (d) $2x^2y^4(5y^2 + 2xy^2)$
   (e) $9z^2 + 20zw$

6. (a) $4x$
   (b) x^8
   (c) $x + 12$
   (d) $\frac{x}{10}$
   (e) $x + y$
   (f) x^3
   (g) $\sqrt[5]{x}$
   (h) $\frac{x}{7}$
   (i) $2x + 1$
   (j) $x^2 - 3x$
   (k) $x^2 - 1$
   (l) $2(x^2 - y^2)$

7. (a) 2
   (b) 45
   (c) 25
   (d) 10
   (e) 2

8. (a) 495,1 m
   (b) 480,4 m
   (c) 377,5 m
   (d) 10 m

9. $30x + 15y = 1645$

10. 63 pessoas

11. (a) $VR = 2x + 150$
    (b) 83 entregas.

4.4 REALIZANDO (FACILITANDO) CONTAS

- **Conteúdos a serem trabalhados:** Algumas técnicas para a realização de operações aritméticas; divisão e critérios de divisibilidade; cálculo mental; potências e resolução de expressões numéricas.
- **Série:** Ensino Médio.
- **Tema da proposta didática:** Utilizando propriedades e padrões operatórios para facilitar os cálculos.
- **Objetivos da proposta didática:**
  - Apender estratégias para determinar somas e diferenças mentalmente;
  - Familiarizar-se com os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 10;
  - Aprender estratégias para determinar produtos mentalmente;
  - Realizar operações com potências através de suas propriedades operatórias.
- **Unidade temática:** Álgebra.
- **Objeto de conhecimento:** Operações com números naturais.
- **Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:**
  - EF06MA03 - Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais; Divisão euclidiana;
  - EF06MA05 - Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 100 e 1000.
- **Tempo de execução da proposta didática:** 4 aulas + 1 aula de avaliação (**APÊNDICE D**).
- **Materiais necessários:** caderno, caneta, lápis, borracha e alguns tablets (caso a escola possua).

SINOPSE: A presente proposta didática tem como finalidade o desenvolvimento de competências relacionadas ao cálculo mental e à compreensão das propriedades fundamentais dos números naturais. A proposta contempla a sistematização de técnicas de cálculo mental articuladas ao estudo dos critérios de divisibilidade, à distinção entre números primos e compostos e à análise dos conceitos de divisor, múltiplo e fator. As atividades estão organizadas de forma a promover a mobilização de saberes prévios, o reconhecimento de regularidades e a aplicação de estratégias operatórias eficientes, com vistas à resolução de problemas matemáticos. A abordagem adotada favorece a aprendizagem significativa por meio da problematização, da generalização de regras e da valorização da linguagem matemática como ferramenta de argumentação e análise.

4.4.1 Aula 1 - Estratégias diversas de cálculo mental

Desde os primeiros níveis escolares os alunos realizam operações, algumas como a adição e subtração são velhas conhecidas. Contudo, não é raro se deparar com alunos que chegam à etapa do Ensino Médio sem saber realizar com habilidade e destreza as quatro operações fundamentais da aritmética: Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão. Em uma área como a Matemática onde a evolução do conhecimento se dá de forma ramificada, é fundamental que os alunos dominem determinados conteúdos anteriores para que os novos conhecimentos sejam minimamente absorvidos e incorporados ao repertório matemático do aluno.

A proficiência em cálculo mental das operações básicas é uma ferramenta essencial para o estudante do ensino médio, indo muito além da agilidade em provas. Ela desenvolve o raciocínio lógico, a agilidade cognitiva e a capacidade de estimativa, habilidades cruciais não apenas para o sucesso em disciplinas exatas como matemática e física, mas também para a resolução de problemas cotidianos e para a tomada de decisões rápidas e eficazes. Dominar o cálculo mental fomenta a confiança e a autonomia, transformando o aluno em um pensador mais eficiente e preparado para os desafios acadêmicos e da vida adulta.

Ativação dos conhecimentos prévios: Para não ficar algo fragmentado, organizaremos algumas estratégias de forma mista, sem separar pelo tipo de operação envolvida. É interessante para que o aluno diversifique sua análise sobre o objeto de estudo. Forneceremos alguns exemplos da estratégia abordada e ao final da proposta didática, haverá uma lista mais extensa com exercícios similares. Sugerimos que alguns exemplos sejam escritos no quadro para que verificar se algum aluno já conhece a estratégia ou não. Em seguida, seria interessante que o professor explicasse a estratégia para os demais alunos.

1. Multiplicação por 10, 100, 1 000, 10 000 ... (potências de base 10)

   Exemplo 4.4.1. *Calcule quanto é:*

   (a) 841×100 *(b)* $1\ 000 \times 95$ *(c)* $2\ 248 \times 100$

   Como o número é formado apenas por um único algarismo 1 e zeros, precisaremos nos lembrar que: **i)** Todo número multiplicado por **zero** é igual a 0; e **ii)** todo número multiplicado por 1 é ele próprio. Desta forma, basta escrevermos o número que não é a potência de 10 e, em seguida, adicionar a mesma quantidade de zeros da potência de base 10.

2. Adição com números que terminem com zeros

   Exemplo 4.4.2. *Calcule quanto é:*

   (a) $632 + 60$ *(b)* $200 + 7\ 523$ *(c)* $102\ 000 + 82\ 242$

   Como a operação a ser realizada é a adição, devemos nos lembrar que *adicionar zero não altera a soma*, desta forma basta realizar a adição a partir do primeiro dígito diferente de zero (da direita para a esquerda) com o seu correspondente posicional no outro número. Os demais dígitos, correspondentes aos zeros, no outro número, serão escritos normalmente. No item c), escreveremos 242 (da direita para a esquerda) e depois o resultado de $102 + 82$, portanto o resultado será 184 242.

3. Multiplicação por números que terminam com zeros

Exemplo 4.4.3. *Calcule quanto é:*

(a) 923×20 *(b)* $5\ 000 \times 76$ *(c)* $10\ 884 \times 20\ 100$

Como um dos números termina com zeros e *todo número multiplicado por* ***zero*** *é igual a 0*, basta deslocar os zeros para o final do valor superior, duplicar eles na linha do resultado e então começar a multiplicação a partir do primeiro dígito diferente de zero (da direita para a esquerda).

$$\begin{array}{r} 386 \\ \times \quad 700 \\ \hline 000 \\ 000 \\ +2\ 702 \\ \hline 270\ 200 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 64} \\ 386 \\ \times \quad 700 \\ \hline 270\ 200 \end{array}$$

4. Divisão por 2

Exemplo 4.4.4. *Calcule quanto é:*

(a) $86\ 024 \div 2$ *(b)* $143\ 714 \div 2$ *(c)* $61\ 154 \div 2$

Como todos os dígitos pares são divisíveis por 2 e a maior parte da tabuada do 2 são valores menores que 20 (que possui dois algarismos), basta ir dividindo o número, da esquerda para a direita, em números pares de um ou dois algarismos, o que for formado antes. Para os casos em que o número de dois algarismos formado seja ímpar, descontaremos uma unidade e usaremos ela com o dígito seguinte, para formar outro número.

$$\begin{array}{l|l} 2'0'6'5'8' & 2 \\ \cline{2-2} & 20\ 329 \end{array} \longrightarrow$$

Divida 2, 0 e 6 por 2. Ao chegar no 5, que comporta o 2 (dividendo) duas vezes, sobrará 1 e, "juntando" com 8, formará o número 18. Ao dividir 18 por 2 o resultado será 9.

5. Adição em geral

Exemplo 4.4.5. *Calcule quanto é:*

(a) $2\ 301 + 40\ 123$ *(b)* $16\ 002 + 4\ 537$ *(c)* $118\ 154 + 72\ 602$

Podemos realizar a decomposição do número que possui uma quantidade menor de dígitos (em unidade, dezena, centena, etc...) e ir somando mentalmente cada parcela dessas ao número que possui mais casas posicionais. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 1\ 684 + 327 &= 1\ 684 + 300 + 20 + 7 \\ &= 1\ 984 + 20 + 7 \\ &= 2\ 004 + 7 \\ &= 2\ 011. \end{aligned}$$

6. Algumas multiplicações onde um dos fatores é uma soma

   Exemplo 4.4.6. *Calcule quanto é:*

   (a) $263 \times (20 + 1)$ *(b)* $(300 + 2) \times 1\ 021$ *(c)* $95 \times (10 + 2)$

   Neste caso utilizaremos a propriedade distributiva para encontrar o resultado. Note que mesmo que um dos fatores não seja explicitamente uma soma, podemos decompô-lo em uma soma e aplicar a propriedade. Esta técnica é mais útil quando a multiplicação do número, após sua decomposição, for fácil de ser resolvida mentalmente.

7. Subtrações onde o número a ser subtraído possui apenas o primeiro dígito diferente de zero

   Exemplo 4.4.7. *Calcule quanto é:*

   (a) $9\ 105 - 700$ *(b)* $350\ 862 - 4\ 000$ *(c)* $1\ 070\ 912 - 30\ 000$

   Como subtrair zero de um número não altera seu valor, podemos focar apenas no primeiro dígito diferente de zero do número a ser subtraído. Assim, basta realizar a subtração correspondente a esse dígito, mantendo os demais dígitos do minuendo inalterados.

8. Multiplicação por 2, 4, 8, 16, 32 ... (potências de base 2)

   Exemplo 4.4.8. *Calcule quanto é:*

   (a) $9\ 401 \times 2$ *(b)* $43\ 006 \times 8$ *(c)* 32×105

   Multiplicar um número por 2 é uma tarefa relativamente fácil. Para as demais potências de base 2, basta ir multiplicando por 2 sucessivamente, conforme o valor do seu expoente. Por exemplo, efetuar 203×64, sendo $64 = 2^6$ é o mesmo multiplicar 203 por 2 um total de 6 vezes. Neste caso pode ser relevante ir anotando os resultados no canto da folha.

9. Dividir por 10, 100, 1 000, 10 000 ... (potências de base 10)

   Exemplo 4.4.9. *Calcule quanto é:*

   (a) $95\ 000 \div 100$ *(b)* $8\ 020\ 000 \div 1\ 000$ *(c)* $20\ 000 \div 10$

   Como o número é formado apenas por um único algarismo 1 e zeros, precisaremos nos lembrar que *todo número dividido por 1 é igual a ele próprio*, neste caso, basta retirar a mesma quantidade de zeros que possui a potência de base 10.

10. Multiplicar por 5

    Exemplo 4.4.10. *Calcule quanto é:*

(a) 4066×5 *(b)* 723×5 *(c)* $24\ 258 \times 5$

Como $5 = 10 \div 2$, para multiplicar um número por 5 basta multiplicar ele por 10 e depois dividir por 2, ou seja, acrescentar um zero ao final dele e depois dividi-lo por 2.

SUGESTÃO: Comente com os alunos que estes foram alguns exemplos de situações onde pode-se aplicar técnicas de cálculo mental para agilizar a determinação do resultado. Em uma prova ou outra atividade avaliativa, os cálculos a serem realizados geralmente são uma ferramenta necessária à resolução do problema então quanto mais rápido o aluno puder chegar nos valores melhor será pois ele terá mais tempo disponível para analisar ou revisar as etapas da sua resolução.

Alinhando expectativas: Para ajudar na fixação das técnicas mencionadas acima, peça aos alunos para realizarem em casa a atividade proposta no **Exercício de fixação** nº 1.

4.4.2 Aula 2 - Múltiplos; números primos e compostos; critérios de divisibilidade

Nesta segunda aula da proposta didática iremos iniciar retomando as estratégias vistas na aula anterior. Para isso, o professor pode escrever em uma folha de papel ou mesmo na lousa as operações a serem realizadas pelos alunos. No mínimo realize um exemplo de cada tipo e comente ao final com os alunos sobre a justificativa que embasa o uso da técnica. É interessante que o professor crie seus próprios exemplos com base no que os alunos conseguiram assimilar. Formule exemplos mais simples e, conforme eles forem tomando mais domínio, aumente o nível de complexidade.

Após este aquecimento poderemos dar início aos assuntos do dia.

Ao estudarmos sobre as operações de multiplicação e de divisão, alguns conceitos são bem corriqueiros e utilizados posteriormente em outros contextos, como por exemplo, no estudos de frações. Relembraremos alguns destes conceitos e o seu significado.

Definição 4.4.1 (Fator)**.** *Diremos que um número **n** é um fator de outro número **A** quando **A** for o resultado da multiplicação de **n** por algum número. Por exemplo, 2, 3 e 5 são fatores de 60 pois* $60 = 2 \times 3 \times 5 \times 2$.

Definição 4.4.2 (Múltiplo)**.** *Diremos que um número **a** é múltiplo de um número **b** quando conseguirmos realizar a divisão exata de **a** por **b**. Por exemplo, 10 é múltiplo de 2 pois* $10 \div 2 = 5$*; e 28 é múltiplo de 7 pois* $28 \div 7 = 4$.

Para verificar se os alunos entenderam, peça para eles fornecerem mais exemplos de múltiplos.

Definição 4.4.3 (Divisor)**.** *Diremos que um número **c** é divisor de um número **d** quando conseguirmos realizar a divisão exata de **d** por **c**. Por exemplo, 6 é divisor de 18 pois* $18 \div 6 = 3$*; e 10 é divisor de 260 pois* $260 \div 10 = 26$.

Como feito para o conceito anterior, peça aos alunos que forneçam mais exemplos de divisores.

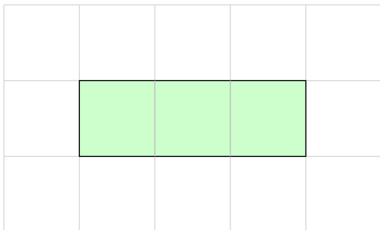
SUGESTÃO É interessante voltar nas definições dadas acima e expressá-las em termos da operação de multiplicação, para que os alunos vejam que estas definições podem ser entendidas de outras formas. Talvez alguém consiga absorver melhor caso mude-se a operação enfatizada nas definições.

Em seguida realize os **Exercícios de fixação** n$^{\underline{o}}$ 2 e 3.

Definição 4.4.4. *Diremos que um número natural, maior que 1, é* ***primo*** *quando ele for divisível apenas por 1 e por ele mesmo. Por exemplo, 2, 3 e 7 são números com esta característica, de serem divisíveis apenas por 1 e por eles próprios.*

É interessante chamar a atenção do aluno para esta definição acima e fazê-lo perceber que é possível dividir todo número (maior que 1) por 1 e também pelo próprio número. Geometricamente, é como se tivéssemos quadrados de área 1 e como estes quadrados quiséssemos montar retângulos. Quando a quantidade de quadrados é um número primo, apenas conseguimos este formato:

Figura 20: Retângulo de área 3 (número primo).

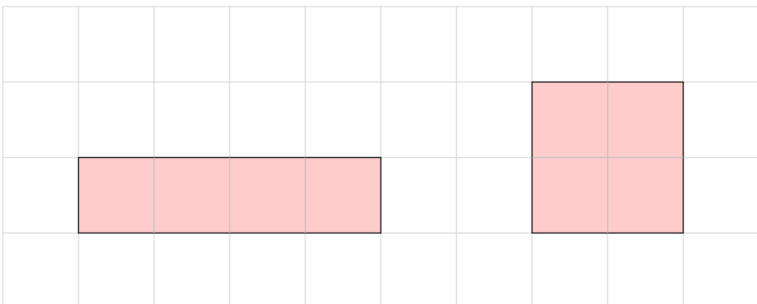


Fonte: Autor.

Definição 4.4.5. *Diremos que um número natural é* ***composto*** *quando ele for múltiplo de outros dois números naturais. Por exemplo, 4, 6 e 15 são números compostos.* $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$ *e* $15 = 3 \times 5$.

Utilizando a comparação acima com a área de um retângulo quadriculado, quando o número é composto, é possível formar outro tipo de retângulo com a mesma área porém dimensões diferentes.

Figura 21: Retângulos de área 4 (número composto).



Fonte: Autor.

Pode ser interessante neste ponto trazer ao conhecimento do aluno que o conceito de número primo, apesar de ser simples, possui implicações profundas em nossa sociedade atual, uma vez que muita da nossa segurança eletrônica está baseada em codificação utilizando números primos. Deixaremos a cargo do professor esta pesquisa para que a abordagem possa ser a mais atual e enriquecedora possível.

Algumas vezes é interessante apenas saber se conseguiremos ou não realizar uma divisão de um número por outro, sem que necessariamente realizemos esta divisão num primeiro momento. Por exemplo, quando estamos trabalhando com frações é importante saber por qual número conseguiremos simplificá-la, ou seja, se existe algum número que seja divisor tanto do numerador quanto do denominador.

Critérios de divisibilidade

i) Por 2
Veja abaixo a sequência dos números divisíveis por 2 e diga se você observa algo que eles tenham em comum.

$\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\boxed{10}$ $\boxed{12}$ $\boxed{14}$ $\boxed{16}$ $\boxed{18}$ $\boxed{20}$ $\boxed{\cdots}$

Critério: Com base nas respostas dos alunos, complete dizendo que um número só é divisível por 2 se ele terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

ii) Por 3
Veja abaixo uma parte da sequência dos números que são divisíveis por 3 e diga se você observa algo que eles tenham em comum.

$\boxed{57}$ $\boxed{60}$ $\boxed{63}$ $\boxed{66}$ $\boxed{69}$ $\boxed{72}$ $\boxed{75}$ $\boxed{78}$ $\boxed{81}$ $\boxed{\cdots}$

Provavelmente neste caso as respostas serão as mais diversas, pois é um critério menos lembrado.

Critério: Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos também for divisível por 3. Exemplifique com alguns números da sequência acima e depois pergunte-os se o número 1 651 387 450 é divisível por 3.

iii) Por 5
Veja abaixo a sequência dos números divisíveis por 5 e diga se você observa algo que eles tenham em comum.

$\boxed{5}$ $\boxed{10}$ $\boxed{15}$ $\boxed{20}$ $\boxed{25}$ $\boxed{30}$ $\boxed{35}$ $\boxed{40}$ $\boxed{45}$ $\boxed{\cdots}$

Critério: Com base nas respostas dos alunos, complete dizendo que um número só é divisível por 5 se ele terminar em 0 ou 5.

iv) Por 6
Veja abaixo uma parte da sequência dos números que são divisíveis por 6 e diga se você observa algo que eles tenham em comum.

$\boxed{72}$ $\boxed{78}$ $\boxed{84}$ $\boxed{90}$ $\boxed{96}$ $\boxed{102}$ $\boxed{108}$ $\boxed{114}$ $\boxed{120}$ $\boxed{\cdots}$

Este é um bom exemplo para explicar para eles que no caso de números que são o resultado da multiplicação de dois números primos, o critério de divisibilidade é uma combinação dos critérios dos números primos em questão. No caso, $6 = 2 \times 3$.

Critério: Um número é divisível por 6 caso ele seja par e também divisível por 3.

v) Por 9
Veja abaixo alguns números que são divisíveis por 9 e diga se você observa algo que eles tenham em comum.

99	126	198	387	792	801	846	999	2 988

Este é um outro caso onde provavelmente eles não fornecerão a resposta correta mas ainda assim é válida a tentativa e a investigação por encontrar um critério.

Critério: Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos também é divisível por 9 (semelhante ao que acontece com o critério de divisibilidade por 3).

vi) Por 10
Veja abaixo alguns números que são divisíveis por 10 e diga se você observa algo que eles tenham em comum.

40	70	90	120	200	230	240	710	890

Provavelmente este aqui eles acertarão. Aproveite para comentar que, pelo fato de $10 = 2 \times 5$, que são números primos, então basta juntarmos os critérios de divisibilidade por 2 e por 5 para determinar o critério de divisibilidade por 10.

Critério: Um número é divisível por 10 quando ele terminar em 0.

vii) Por 4 ou 8
Todas as potências de base 2 ($2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, ...) possuem um critério de divisibilidade específico. Basicamente este critério diz que: por exemplo, para que um número seja divisível por 8, que é 2^3, os número formado pelos 3 (expoente) últimos dígitos dele precisa ser divisível por 8. O mesmo vale para qualquer outra potência de base 2. Logo, 65 480 é divisível por 8 pois 480 é divisível por 8.

Contudo, para não acumular muita informação desnecessária na mente do aluno, apenas comente que basta ele utilizar o critério de divisibilidade por 2 quantas vezes forem necessárias. Por exemplo, para um número se divisível por 8, que é igual a 2^3, ele precisa ser divisível por 2 três vezes (mesmo valor do expoente).

viii) Por 100 ou 1000
Critério: Para que um número seja divisível por alguma potência de base 10 ($10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1\ 000$, ...) basta que ele termine com a mesma quantidade de zeros da potência. Por exemplo, um número será divisível por 10 000, que possui 4 zeros, se o próprio número terminar com pelo menos 4 zeros.

Para ajudar os alunos a fixarem os critérios, peça-os para realizar o **Exercício de fixação** nº 4.

4.4.3 Aula 3 - Funcionamento do algoritmo da divisão euclidiana

Nas aulas anteriores vimos com os alunos técnicas que nos ajudam a determinar a resposta de um cálculo mentalmente, sem precisar realizar as operações de forma escrita; vimos os conceitos "é múltiplo de", "é divisor de" e "é fator de"; em seguida falamos dos números primos e compostos; e por fim, comentamos sobre alguns critérios de divisibilidade.

Como são várias definições e é bem provável que o estudante não tenha contato com eles para além da sala de aula, é significativo utilizar alguns instantes iniciais desta aula para relembrar todos os conceitos com os alunos através de alguma atividade breve.

Para facilitar a aplicação, sugerimos que o professor escreva os números no quadro e vá realizando as perguntas sobre os temas das aulas anteriores. Dependendo da disponibilidade, você pode fazer a pergunta a todos da sala ou mesmo ir perguntando individualmente. A depender da necessidade vista com os alunos da turma.

Agora abordaremos o algoritmo da divisão euclidiana.

Definição 4.4.6. *(Algoritmo da divisão euclidiana) Dados dois números inteiros positivos* ***a*** *(dividendo) e* ***b*** *(divisor), com $b \neq 0$, o algoritmo da divisão euclidiana afirma que* ***existem*** *dois números inteiros positivos* ***q*** *(quociente) e* ***r*** *(resto), tais que:*

$$a = b \cdot q + r, \ \ com \ 0 \leq r < b.$$

Vamos realizar um exemplo de divisão. Aproveitando a ocasião, faremos uma divisão que os alunos costumam ficar em dúvida, quando o número formado nos rebaixamentos dos algarismos é menor que o divisor.

Exemplo 4.4.11. *Determine o quociente e o resto da divisão de 34 145 por 17.*

$$\begin{array}{r|l} 34'145 & 17 \\ \cline{2-2} & 2 \end{array} \longrightarrow$$

Da esquerda para a direita, vemos que 34 é o menor número que é igual ou maior que 17. Então faremos a divisão de 34 por 17, que é 2.

$$\begin{array}{r|l} 341'45 & 17 \\ \cline{2-2} -34 & 20 \\ \cline{1-1} 01 & \end{array} \longrightarrow$$

Realiza-se a multiplicação de 2 por 17 e rebaixaremos o próximo algarismo do dividendo. O número formado é 1, que quando dividido por 17 dá zero.

$$\begin{array}{r|l} 3414'5 & 17 \\ \cline{2-2} -34 & 200 \\ \cline{1-1} 014 & \end{array} \longrightarrow$$

Precisaremos rebaixar o próximo algarismo do dividendo, que é o 4. Como o número formado é 14, ao dividi-lo por 17 obtemos quociente zero.

$$\begin{array}{r|l} 34145' & 17 \\ \cline{2-2} -34 & 2008 \\ \cline{1-1} 0145 & \\ -136 & \\ \cline{1-1} 9 & \end{array} \longrightarrow$$

Por fim, devemos rebaixar o algarismo 5 para formar o número 145, que já é divisível por 17.

Portanto, o quociente é 2 008 e o resto da divisão é 9, ou seja, $34\,145 = 17 \times 2\,008 + 9$.

SUGESTÃO: Visando uma maior autonomia do aluno, é interessante reforçar que ele pode fazer a conferência de seus cálculos para confirmar se sua respostas está correta ou não. Esta ação é importante para que ele possa se ver como um agente ativo no processo de ensino e não apenas um receptor inerte. A capacidade crítica frente às informações que chegam até nós ou às quais nós concluímos é o que nos difere e o que possibilita que tenhamos uma vida mais alinhada com as nossas expectativas.

Ao realizar um divisão é normal não sabermos inicialmente qual é o múltiplo do divisor que está mais próximo para realizarmos a divisão, como no caso acima da divisão de 145 por 17. Neste caso podemos usar aproximações para nos ajudar a ter uma noção de qual será o resultado dessa divisão. Utilizaremos a própria divisão do **Exemplo ??**.

- Para fazer bom uso desta estratégia de divisão é essencial que o aluno esteja familiarizado com aproximações.
- Três resultados são os mais cruciais: $17 \times 0 = 0$; $17 \times 10 = 170$; e 17×5 (que é a metade de 17×10), ou seja, $17 \times 5 = (160 + 10) \div 2 = 80 + 5 = 85$.
- Na primeira divisão por 17 a ser realizada tínhamos $34 \div 17$. Como 34 está mais próximo de 0 (resultado da multiplicação de 17 por zero) do que de 85 (resultado da multiplicação de 17 por 5), então o valor procurado é menor que 5 e está mais próximo de 0. A princípio temos os valores 1, 2 ou 3 como possibilidade. Contudo, note que o 1 mesmo não pode ser pois o valor com o qual estamos realizando a divisão não é o próprio 17.
- Agora, na divisão de 145 por 17, vemos facilmente que este valor está mais próximo de 170 (resultado da multiplicação de 17 por 10) do que de 85, então o valor procurando é maior que 5 e provavelmente está mais próximo de 10. No caso precisaremos tentar com 9 ou 8.

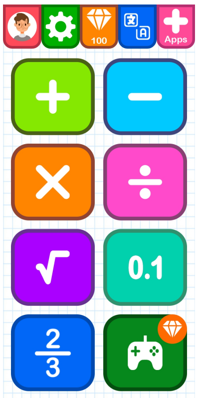
Procedendo conforme as dicas acima comentadas, é bem provável que o aluno passe a se sentir mais confiante ao realizar a divisão, independente da quantidade de dígitos que possui o divisor.

E para ajudar no melhor entendimento do assunto exposto nesta aula, recomendamos a realização do **Exercício de fixação** nº 5.

Aula 4 - Atividades interativas de revisão

Para a última aula desta proposta didática sugerimos a execução de uma competição onde os alunos deverão responder perguntas que envolvam os temas anteriormente vistos afim de que eles possam fixar o aprendizado de uma forma mais interativa. Aqui estamos sugerindo o uso do aplicativo **Jogos de Matemática**, disponível na *Play Store*. Ele possui vários recursos e níveis de jogabilidade.

Figura 22: Página inicial do aplicativo.



Fonte: GunjanApps Studios.

Nesta página inicial vemos que o jogador pode escolher exercícios com qualquer uma das quatro operações básicas da aritmética, além de raízes e potências, números decimais e frações.

Abaixo temos as opções de jogabilidade disponíveis para a operação de Adição.

Figura 23: Estilos de jogos disponíveis.

Fonte: GunjanApps Studios.

No canto superior direito, na engrenagem, é possível mudar o nível de dificuldade (fácil/médio/difícil) e a quantidade de perguntas (10/20/30) dos jogos. Aconselhamos o professor a verificar cada um dos diferentes tipos de jogos e adaptar dependendo do que se espera dos alunos da turma. Contudo, nossa proposta é que seja utilizado o modo **Duelo** (caso o dispositivo eletrônico a ser utilizado seja um tablet pois a tela é maior) se o professor optar por realizar algo em grupo ou o modo **Teste** (caso os alunos estejam utilizam seus próprios celulares e as respostas serão individuais).

Apesar da conveniência que se tem com a execução de uma atividade direcionada a respeito do que fazer com o aplicativo, deixaremos a cargo do professor explorá-lo ou algum outro aplicativo com características semelhantes e utilizá-lo com seus alunos da forma que for mais interessante para atingir os objetivos que você quer conseguir com a turma.

4.4.4 Exercícios de fixação

1. Determine mentalmente o resultado de:

   (a) $1\,332\,104 \times 2$

   (b) $6\,152 + 824$

   (c) $85\,195 + 4\,000$

   (d) $62\,810 \times 5$

   (e) $84\,620\,000 \div 1\,000$

   (f) $6\,200 \times (200 + 1)$

   (g) $956 \times 10\,000$

   (h) $26\,486 - 5\,000$

   (i) $2\,312 \times 300$

   (j) $946\,042 \div 2$

   (k) $333\,026 \times 5$

   (l) $12\,730 + 26\,492$

   (m) $1\,357\,946 - 80\,000$

   (n) $46\,139 \times 4$

   (o) $(7\,000 + 200) \times 46$

   (p) $465\,948\,130 \div 2$

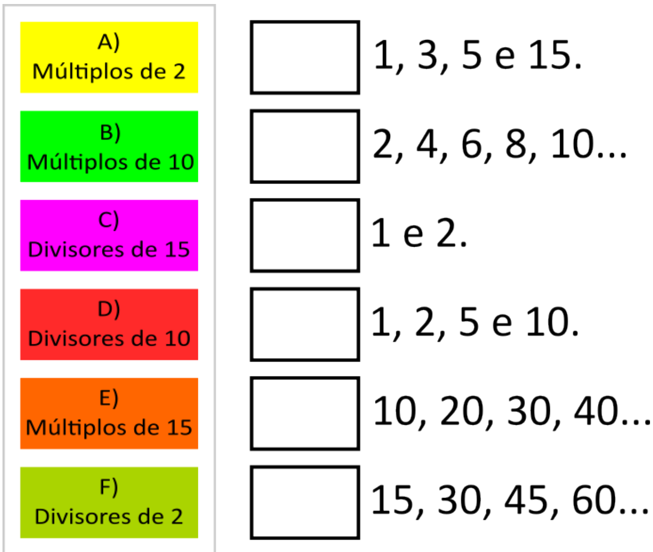
   (q) $70\,000 + 494\,032$

   (r) $64\,138 \times 500$

   (s) $98\,030\,000 \div 1\,000$

   (t) $3\,212 \times 10\,000\,000$

2. Complete os espaço da segunda coluna abaixo com as respectivas letras das informações na primeira coluna.



Fonte: Autor.

3. Determine quais são todos os fatores primos de:

   (a) 10 (b) 15 (c) 18 (d) 12 (e) 30

4. Assinale com verdadeiro ou falso. Para as afirmações falsas, justifique sua resposta.

   (a) ( ) 23 740 é divisível por 10.

   (b) ( ) 8 007 é divisível por 5.

   (c) ( ) 672 é divisível por 6.

   (d) ( ) 9 801 é divisível por 9.

   (e) ( ) 73 912 é divisível por 4.

   (f) ( ) 654 185 é divisível por 9.

   (g) ( ) 739 é divisível por 3.

   (h) ( ) 7 914 é divisível por 2.

(i) (   ) 12 051 é divisível por 5.
(j) (   ) 73 808 é divisível por 8.
(k) (   ) 80 200 é divisível por 1 000.
(l) (   ) 690 é divisível por 5.
(m) (   ) 7 310 é divisível por 4.
(n) (   ) 891 é divisível por 3.

5. Determine o quociente e o resto das divisões a seguir:

(a) $2\ 112\ 029 \div 3$
(b) $36\ 432 \div 7$
(c) $112\ 051 \div 14$
(d) $1\ 122\ 501 \div 31$
(e) $44\ 144 \div 71$
(f) $1\ 608\ 202\ 379 \div 201$

4.4.5 Respostas

1. Regras a serem utilizadas:
   (a) Regra nº 8 - 2 664 208
   (b) Regra nº 5 - 6 976
   (c) Regra nº 2 - 89 195
   (d) Regra nº 10 - 314 050
   (e) Regra nº 9 - 84 620
   (f) Regra nº 6 - 1 246 200
   (g) Regra nº 1 - 9 560 000
   (h) Regra nº 7 - 21 486
   (i) Regra nº 3 - 693 600
   (j) Regra nº 4 - 473 021
   (k) Regra nº 10 - 1 665 130
   (l) Regra nº 5 - 39 222
   (m) Regra nº 7 - 1 277 946
   (n) Regra nº 8 - 184 556
   (o) Regra nº 6 - 331 200
   (p) Regra nº 4 - 232 974 065
   (q) Regra nº 2 - 564 032
   (r) Regra nº 3 - 32 069 000
   (s) Regra nº 9 - 98 030
   (t) Regra nº 1 - 32 120 000 000

2. A) 2, 4, 6, 8, 100...
   B) 10, 20, 30, 40...
   C) 1, 3, 5 e 15
   D) 1, 2, 5 e 10
   E) 15, 30, 15, 60...
   F) 1 e 2.

3. (a) 2 e 5
   (b) 3 e 5
   (c) 2 e 3
   (d) 2 e 3
   (e) 2, 3 e 5

4. (a) (V)
   (b) (F), não termina em 0 ou 5.
   (c) (V)
   (d) (V)
   (e) (V)
   (f) (F), a soma dos algarismos é 29, que não é múltiplo de 9.
   (g) (F), a soma dos algarismos é 19, que não é múltiplo de 3.
   (h) (V)
   (i) (F), não termina em 0 ou 5.
   (j) (V)
   (k) (F), 80 200, termina com apenas dois algarismos iguais a 0.
   (l) (V)
   (m) (F), 10 não é múltiplo de 4.
   (n) (V)

5. (a) Quociente: 704 009, resto: 2
   (b) Quociente: 5 204, resto: 4
   (c) Quociente: 8 003, resto: 9
   (d) Quociente: 36 209, resto: 22
   (e) Quociente: 621, resto: 53
   (f) Quociente: 8 001 006, resto: 173

4.5 PORCENTAGENS SÃO QUANTIDADES?

- **Conteúdos a serem trabalhados:** Estratégias para cálculo mental de porcentagens; conversão de porcentagem para fração e vice-versa; conversão de porcentagem para número decimal e vice-versa; leitura de gráficos envolvem porcentagens.
- **Série:** Ensino Médio.
- **Tema da proposta didática:** Utilizando as porcentagens para facilitar a análise de situações cotidianas.
- **Objetivos da proposta didática:**
  - Identificar contextos nos quais o conceito de porcentagem são aplicados;
  - Conseguir associar o valor percentual com seu respectivo valor absoluto;
  - Realizar leitura e interpretação de gráficos simples que se utilizem de porcentagens.
- **Unidade temática:** Álgebra.
- **Objeto de conhecimento:** Uso de porcentagens.
- **Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:**
  - EF07MA02 - Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros;
  - EF09MA05 - Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.
- **Tempo de execução da proposta didática:** 3 aulas + 1 aula de avaliação (**APÊNDICE E**).
- **Materiais necessários:** caderno, caneta, lápis e borracha.

SINOPSE: Iniciaremos esta proposta didática fazendo uma introdução ao estudos das porcentagens através de um exemplo correlato a uma situação que pode ser facilmente vivenciada no contexto da sala de aula. Depois abordaremos as porcentagens especiais, 10% e 1% que são mais fáceis e diretas de serem obtidas. Na segunda aula os alunos realizarão operações de acréscimo e desconto, além de relembrar como converter porcentagem para fração e número decimal, e vice-versa. A terceira aula será reservada para trabalhar aplicações envolvendo taxas percentuais, que estão presentes em diversos contextos do dia a dia, e a leitura de informações em gráficos, também em contextos que envolvam as porcentagens.

4.5.1 Aula 1 - Cálculo mental de porcentagens

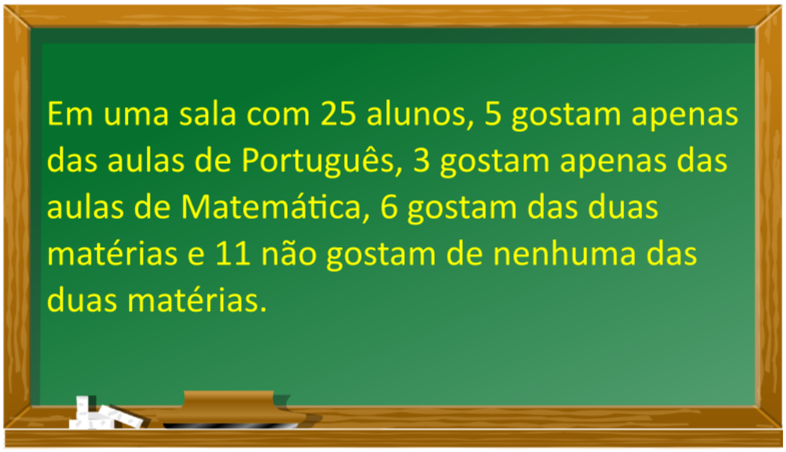
A porcentagem está presente em diversas situações do nosso dia a dia: descontos em lojas, aumento de preços, juros bancários, resultados de pesquisas, entre muitos outros contextos. Entender esse conceito é fundamental não apenas para resolver problemas matemáticos, mas também para tomar decisões conscientes como consumidor, cidadão e estudante.

Nesta proposta didática, os alunos serão convidados a explorar o conceito de porcentagem de forma prática e contextualizada, relacionando-o com situações reais. A proposta é desenvolver o raciocínio matemático a partir de atividades que envolvem interpretação de informações, resolução de problemas e análise crítica, contribuindo para a construção de uma aprendizagem significativa e conectada com a realidade.

Ativação dos conhecimentos prévios: Para "aquecer os motores", pergunte aos alunos se eles sabem como escrever uma porcentagem na forma de fração. Como este conceito é visto desde a metade do ensino fundamental, então provavelmente alguns dirão que sim. E neste caso, pergunte se eles conseguiriam dizer o que uma porcentagem representa ou para que ela é utilizada.

Dependendo do que for dito pelo alunos, complete com a seguinte ideia: "Uma porcentagem é uma forma padronizada de representar uma fração onde o todo (a totalidade de algo), que está no denominador, é sempre considerado 100 e o numerador é a parte desse todo que nos interessa". Considere o exemplo abaixo:

Figura 24: Exemplo para trabalhar com porcentagens.



Fonte: adaptado de Pixabay (2014).

Se analisarmos a situação em questão veremos que o todo, 100%, representa o total de alunos, 25. E neste caso em particular veremos que cada aluno corresponde, em termos percentuais, a 4%, ou seja, cada 1 aluno equivale a 4%.

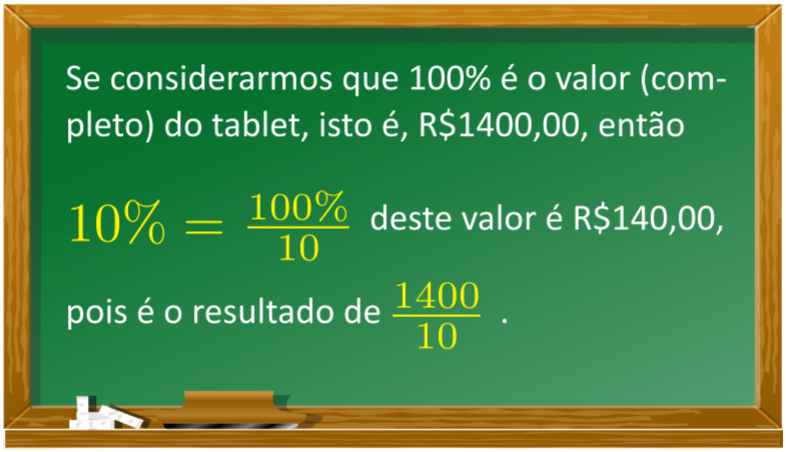
Mantendo esta proporção vemos que 20% gostam das aulas de Português, 12% gostam apenas das aulas de Matemática, 24% gostam das duas matérias e 44% não gostam de nenhuma das duas matérias.

O uso de porcentagens é muito útil quando se quer analisar uma situação através dos valores relativos (porcentagens) e não através dos valores absolutos (quantidades reais).

SUGESTÃO: Utilize os moldes do **apêndice G** para trabalhar com os alunos a construção de gráfico de setores e assim ilustrar o exemplo acima. Você notará que cada setor no círculo representa 10% da superfície total, já que o círculo foi dividido em 10 setores iguais. Para facilitar a construção do gráfico você pode utilizar aproximações para determinar a representação das porcentagens que não são múltiplas de 10%.

Alinhando expectativas: No molde disponibilizado no **apêndice 5**, a escolha por dividir o círculo em 10 setores iguais não foi aleatória. A determinação das quantidades ficam mais fáceis quando sabemos os valores que são representados por 10% e por 1%, já que eles são, respectivamente, a décima e a centésima parte de 100%. Desta forma, considerando uma situação onde estamos analisando o valor de um tablet que custa R\$1400,00, podemos chegar às conclusões abaixo:

Figura 25: Exemplo com porcentagens especiais.



Fonte: adaptado de Pixabay (2014).

De forma análoga, poderíamos determinar quanto é 1% de R\$1400,00. Neste caso bastaria dividir o valor por 100.

Resolva com os alunos o seguinte exemplo aplicando as porcentagens especiais.

Exemplo 4.5.1. *Na situação descrita acima determine quanto é 30%, 6% e 23% de R\$1400,00.*

- *30% é o triplo de 10%, logo 30% de R\$1400,00 é* $140 \times 3 = 420$*;*
- *6% é o sêxtuplo de 1%, logo 6% de R\$1400,00 é* $14 \times 6 = 84$*;*
- *como* $23\% = 20\% + 3\%$*, logo 23% de R\$1400,00 é* $140 \times 2 + 14 \times 3 = 280 + 42 = 322$.

Em seguida, peça a eles para resolverem os **Exercícios de fixação** nº 1 e 2.

4.5.2 Aula 2 - Operações com porcentagens: acréscimos, decréscimos e conversões

No início desta segunda aula da proposta didática, e visando testar o aprendizado dos alunos sobre o assunto uma maior fixação dos conceitos, sugerimos aos professores que realizem com os alunos uma atividade oral. nos moldes dos **Exercícios de fixação** nº 1 e 2, perguntando para alguns individualmente, o valor de algumas porcentagens para que eles respondam. Isso ajudará na maior absorção do conhecimento.

A seguir, ampliaremos os estudos com porcentagem para falar de dois conceitos que são frequentemente utilizados no comércio e na área de finanças, **acréscimo** e **decréscimo** (simples).

- O **acréscimo simples** indica o valor ou a porcentagem com que algo foi **aumentado, incorporado, agregado**.

  Exemplo 4.5.2. *A produção média semanal em uma fábrica de queijo frescal no ano de 2024 foi de 900 kg. Para o ano de 2025 foi projetado um acréscimo na produção em 20%. Observe que neste caso, as expectativas são de que a produção média semanal em 2025 seja de* $900 + 2 \times 90 = 1\ 080$ *kg, já que devemos adicionar 20% de 900 ao valor produzido no ano de 2024.*

- Já o **decréscimo simples** indica o contrário, ou seja, o valor ou a porcentagem com que algo foi **diminuído, reduzido, retirado**.

  Exemplo 4.5.3. *No lançamento de um smartphone, o seu preço de venda era R$ 6800,00. Passados 8 meses do lançamento, uma loja resolveu revende-lo oferecendo a seus clientes um desconto de 8%. Note que, uma pessoa que fosse comprar o smartphone pagaria por este* $6800 - 8 \times 68 = 6256$ *reais pois é preciso retirar 8% de 6800 do valor de venda.*

SUGESTÃO: Pode ser conveniente aproveitar a oportunidade para comentar com os alunos algo que é recorrente na Matemática: a abordagem de conceitos que são opostos um do outro mas que possuem alguma relação de complementariedade. Por exemplo, ao se introduzir os números inteiros é comum associarmos os números positivos a algum tipo de acréscimo e os números negativos a um decréscimo; analisar a posição relativa de um ponto que não pertence a uma circunferência, se ele é exterior ou interior; se um número real é racional ou irracional, etc.

Prosseguindo com o estudo das porcentagens, até o presente momento trabalhamos com situações nas quais já estava determinado o valor da porcentagem. Contudo, há situações nas quais temos apenas o valor da totalidade (valor de referência) e da parte dela (ou do acréscimo, ou do decréscimo na totalidade). Nestes casos, precisaremos transformar os valores em quantidades porcentuais.

Exemplo 4.5.4. *Em uma escola com 800 alunos, 40 foram premiados por terem obtido as maiores notas gerais de suas turmas. Determine qual foi o percentual de alunos premiados.*

Seguindo o que foi falado no início da **Aula 1** desta proposta didática, de que uma porcentagem é uma forma padronizada de escrever uma fração onde o todo representa 100 e o numerador é a representação da parte que nos interessa, o objetivo aqui será determinar uma fração equivalente a $\frac{40}{800}$ cujo denominador seja 100. Comente com os alunos que neste caso, vemos facilmente que se dividirmos 800 por 8 então o denominador já será 100, logo basta dividir também o numerador por 8. Desta forma,

$$\frac{40^{\div 8}}{800^{\div 8}} = \frac{5}{100}.$$

Como o numerador representa o quanto nos interessa em relação ao todo, então podemos afirmar que a porcentagem procurada é 5%.

Observe também que, se dividirmos 5 por 100, obteremos 0,05. Este valor também seria obtido caso tivéssemos dividido 40 por 800. Desta forma, se tivermos um valor decimal e quisermos transformá-lo em porcentagem basta multiplicá-lo por 100, pois se $\frac{5}{100} = 0,05$ então $5 = 0,05 \times 100$ (utilizando a reversibilidade da operação de divisão, transformando-a em multiplicação).

Observação 4.5.1. *Estas etapas e passagens precisam ser feitas com os alunos e, a depender das impressões observadas pelo professor, as devidas adaptações e comentários precisam ser feitos a fim de que eles possam elevar seu nível de entendimento sobre o conteúdo estudado.*

Com estas considerações feitas, agora direcione os alunos a realizar os **Exercícios de fixação** n$^{\underline{o}}$ 3, 4, 5, 6 e 7.

4.5.3 Aula 3 - Taxas percentuais e leitura de gráficos

Para esta terceira aula iremos basicamente revisitar o que foi visto nas aulas anteriores desta proposta didática em contextos específicos. Então nossa revisão será baseada nas situações a seguir que o professor deverá resolver e explicar cada uma delas para os alunos.

É importante sempre lembrar de trazer que a própria experiência do professor pode enriquecer ainda mais a experiência do aluno, uma vez que ele verá que os conceitos vistos possuem aplicação prática no cotidiano das pessoas. Além disso, como estamos lidando com alunos do ensino médio, pode ser interessante eles manifestarem em quais situações eles observam o uso das porcentagens no dia a dia e se eles conseguem entender o que estes valores estão representando.

Taxa percentual (TP) é um conceito utilizado em diversas área, em particular na Matemática Financeira, que mede, em porcentagem, a variação proporcional entre dois valores. O cálculo da taxa percentual é feito realizando a diferença entre o valor final e o valor inicial, em seguida, analisa-se essa diferença em relação ao valor inicial para então obter-se a porcentagem.

Exemplo 4.5.5. *Um restaurante que cobrava R\$ 20,00 pela refeição padrão, o popular* ***"prato feito"ou P.F.****, reajustou esse valor para R\$ 25,00. Neste caso, a taxa percentual é dada por*

$$TP = \frac{(25-20)}{20} = \frac{5}{20} = 25\%.$$

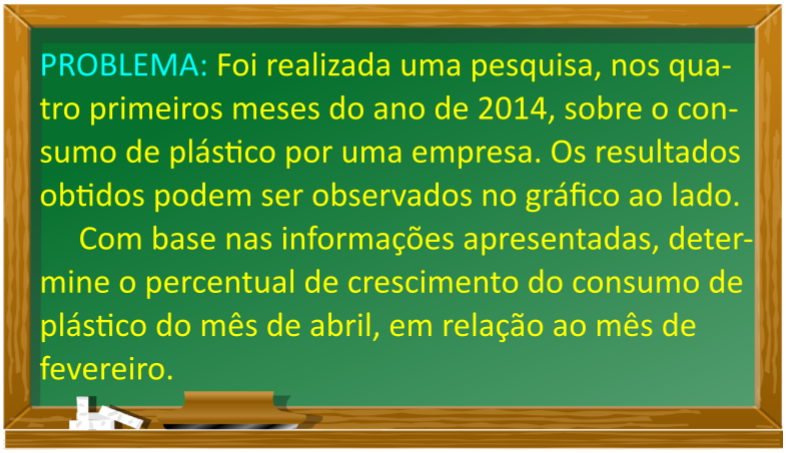
Há contextos onde esta taxa já é fornecida e aí precisamos interpretar a situação para identificar o que está implícito no problema.

Exemplo 4.5.6. *Ao avaliar diferentes opções de investimentos em renda fixa, um estudante decidiu aplicar R\$ 1200,00 em uma modalidade que oferecia um rendimento de 4% ao mês sobre o valor investido.*

Note que no exemplo acima, se o investimento representa o valor inicial e como o rendimento é de 4% ao mês (de R\$ 1200,00), isto é R\$ 48,00 (ao mês), então está subentendido que após o primeiro mês o valor final foi de R\$ 1248,00.

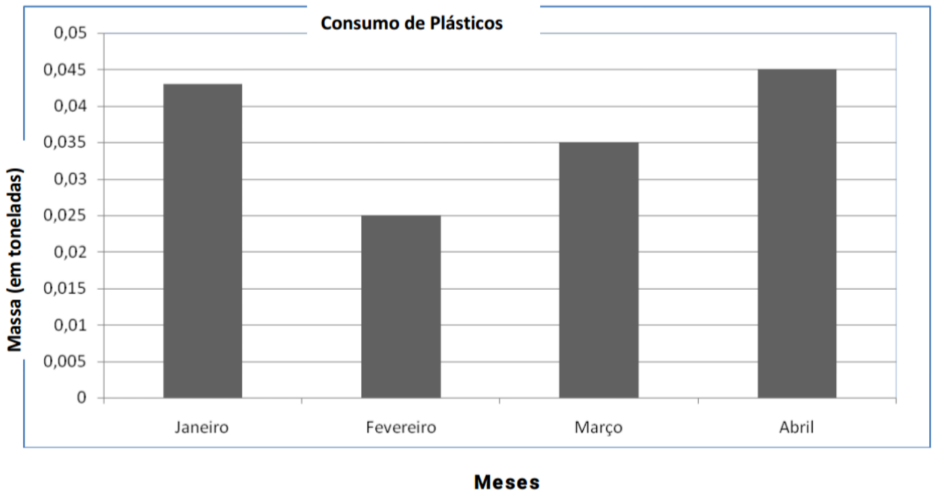
Aplicando os conhecimentos anteriores: Nesta etapa da aula, iremos utilizar os conceitos vistos anteriormente sobre porcentagens para resolver problemas onde os alunos precisarão, além de realizar cálculos de porcentagens, interpretar alguma situação e fazer leitura de tabelas e gráficos para a coleta de dados. Utilizaremos o problema abaixo, que foi adaptado da apostila **Introdução à porcentagem**, disponível no *Portal da OBMEP*, como motivador.

Figura 26: Problema do gráfico de consumo.



Fonte: adaptado de Pixabay (2014).

Figura 27: Gráfico do consumo mensal de plástico no 1ª quadrimestre de 2014.



Fonte: adaptado de Portal da OBMEP (2025).

Utilizando as quatro etapas de Polya:

1. **Compreensão** - Problemas com tabelas (ou gráficos) são muito interessantes pois nos possibilita explorar diferentes habilidades dos alunos antes de chegarmos à resposta final. Antes de realizar algum tipo de cálculo, pergunte à classe quais informações eles conseguem extrair da leitura do enunciado e do gráfico fornecido. Neste ponto é esperado que eles notem que o eixo horizontal do gráfico estão representados os quatro primeiros meses do ano de 2014 e que no eixo vertical estão representadas as quantidades, em toneladas, de plástico que foram consumidas, variando de 0 a 0,05 toneladas. É possível também,por exemplo, inferir que a partir de fevereiro o consumo cresceu (uniformemente).

2. **Concepção de um plano** - Para determinar o percentual de aumento no consumo de plástico é necessário saber a quantidade inicial e a quantidade final de consumo

no período, para então determinarmos quanto representa este percentual em relação ao valor inicial. Como estamos analisando o consumo no mês de abril (final) em relação ao mês de fevereiro (inicial) vemos que estes valores são de 0,025 em fevereiro e 0,045 em abril.

3. **Execução de um plano** - Com base na concepção descrita anteriormente, temos que:
$$\frac{0,045-0,025}{0,025}=\frac{0,02}{0,025}=0,8.$$
Multiplicando este valor por 100 chegamos à conclusão de que o percentual de crescimento no mês de abril em relação ao mês de fevereiro foi de 80%.

4. **Retrospecto** - O valor encontrado condiz com a situação descrita? Este é um questionamento interessante de ser feito e pode ajudar a elevar o nível de compreensão dos seus alunos para este tipo de problema. Como 80% está próximo de 100%, que no caso está sendo representado pela quantia de 0,025 toneladas, a interpretação que podemos fazer é: ao analisarmos o consumo de abril em relação ao consumo de fevereiro veremos que o consumo excedente teve **quase o mesmo valor** do consumo de fevereiro. Em outras palavras, espera-se que o consumo de abril seja quase que o dobro do consumo de fevereiro. O que é totalmente plausível com o gráfico do consumo. Logo, o aluno pode ter a noção de que sua resposta, caso ele tivesse resolvido sozinho, teria grandes chances de estar correta.

   Esta abordagem final é relevante para que o aluno desenvolva um olhar crítico a respeito dos procedimentos realizados e com isso aumente a confiança em si próprio para poder resolver outros problemas sem depender constantemente da validade de outros. O que é algo que certamente este ser carregará consigo pelo resto da vida.

Ao final, os alunos deverão realizar o **Exercício de fixação** n$^{\text{o}}$ 8.

SUGESTÃO: Visando um maior interesse por parte do aluno, o professor, caso julgue possível de se aplicar, poderá pedir aos alunos para que pesquisem em jornais matérias onde estão sendo utilizadas porcentagens no contexto de gráfico e infográficos. A depender da familiaridade do professor com os dispositivos eletrônicos e do quanto ele utiliza esses recursos nas aulas, os alunos poderão levar as matérias nos dispositivos ou mesmo salvá-las numa pasta online comum para que a turma faça uma análise de situações cotidianas. Além de engajá-los ativamente nesta pesquisa, a exposição a diferentes tipos de matérias terá o potencial de aumentar os conhecimentos gerais do alunos.

4.5.4 Exercícios de fixação

1. Determine mentalmente as porcentagens especiais a seguir:

   (a) 10% de 49 000
   (b) 10% de 58 100
   (c) 1% de 7 900
   (d) 10% de 803
   (e) 10% de 45 004
   (f) 10% de 6 420
   (g) 1% de 960
   (h) 10% de 41,09
   (i) 1% de 9 640,4
   (j) 10% de 5,087
   (k) 10% de 0,483
   (l) 1% de 0,92
   (m) 10% de 0,0419
   (n) 10% de 0,00934
   (o) 1% de 0,00087

2. Determine quanto é:

   (a) 12% de 30 200
   (b) 37% de 300
   (c) 75% de 8 000
   (d) 8% de 4 003
   (e) 15% de 6 800
   (f) 82% de 900
   (g) 93% de 1 200
   (h) 65% de 40 000
   (i) 23% de 5 000

3. Um produto que custava R$ 1500,00 sofreu um acréscimo de 25% em seu valor. Determine de quanto foi o acréscimo no valor deste produto.

4. Um produto que custava R$ 1500,00 sofreu um acréscimo de 25% em seu valor. Determine o valor do produto após este acréscimo.

5. Calcule o valor final de um produto que custa R$ 4000,00 considerando que ele tenha sofrido um decréscimo de:

   (a) 4%
   (b) 9%
   (c) 15%
   (d) 20%
   (e) 36%

6. Dê a porcentagem de representantes nas seguintes situações abaixo:

   (a) (de alunos que gostam de Matemática ou Português) Em uma sala com 25 alunos, constatou-se que 9 gostam de Matemática ou de Português.
   (b) (produtos defeituosos) Uma fábrica de liquidificadores produziu 500 unidades em uma determinada semana. Destes, 3 apresentaram algum tipo de defeito.
   (c) (gastos fixos) A receita diária de uma padaria é de R$ 1000,00. Os gastos diários com produção, funcionários e manutenção do ambiente giram em torno de R$ 550,00.

7. Escreva as frações e números decimais a seguir na sua forma porcentual.

   (a) 0,184
   (b) $\dfrac{324}{400}$
   (c) 0,0497
   (d) $\dfrac{16}{80}$
   (e) 0,7
   (f) $\dfrac{950}{5000}$
   (g) 0,93
   (h) $\dfrac{17}{20}$

4.5.5 Respostas

1. (a) 4 900
   (b) 5 810
   (c) 79
   (d) 80,3
   (e) 4 500,4
   (f) 642
   (g) 9,6
   (h) 4,109
   (i) 6,404
   (j) 0,5087
   (k) 0,0483
   (l) 0,0092
   (m) 0,00419
   (n) 0,000934
   (o) 0,0000087

2. (a) 3 624
   (b) 111
   (c) 6 000
   (d) 320,24
   (e) 1 020

   (f) 738
   (g) 1 116
   (h) 26 000
   (i) 1 150

3. R$ 375,00

4. R$ 1 875,00

5. (a) R$ 3 840,00
   (b) R$ 3 640,00
   (c) R$ 3 400,00
   (d) R$ 3 200,00
   (e) R$ 2 560,00

6. (a) 36%
   (b) 0,6%
   (c) 55%

7. (a) 18,4%
   (b) 81%
   (c) 4,97%
   (d) 20%
   (e) 70%
   (f) 19%
   (g) 93%
   (h) 85%

4.6 DÍZIMAS PERIÓDICAS

- **Conteúdos a serem trabalhados:** Conceito de dízima periódica; métodos algébrico e analítico para a obtenção da fração geratriz; resolução de expressões numéricas que contenham dízimas periódicas.
- **Série:** Ensino Médio.
- **Tema da proposta didática:** Utilizando as frações geratrizes para simplificar os cálculos com dízimas periódicas.
- **Objetivos da proposta didática:**
  - Identificar que há diferenças entre os números decimais infinitos (periódicos e não periódicos);
  - Fornecer ferramentas para a conversão de dízimas periódicas em frações;
  - Perceber a praticidade que se adquiri ao resolver expressões numéricas com frações geratrizes ao invés de dízimas periódicas.
- **Unidade temática:** Álgebra.
- **Objeto de conhecimento:** Manipulação de dízimas periódicas.
- **Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:**
  - EF08MA05 - Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
- **Tempo de execução da proposta didática:** 4 aulas + 1 aula de avaliação (**APÊNDICE 5**).
- **Materiais necessários:** calculadora, caderno, caneta, lápis e borracha.

SINOPSE: A Aula 1 revisitará alguns conceitos a respeitos dos números decimais e abordará a noção do que representa uma dízima periódica, o que é o período da dízima, e o conceito de fração geratriz, além de propor a resolução obtenção da fração geratriz através de uma resolução algébrica, utilizando conceitos de equação de 1º grau. Na Aula 2 iremos observar alguns padrões de ocorrência em dízimas periódicas, que será o motivador para a próxima aula. A Aula 3 os alunos consolidarão os padrões observados na aula anterior para obter as conclusões a respeito das técnicas analíticas para a obtenção da fração geratriz. Finalmente, na Aula 4 veremos como determinar o valor de uma expressão numérica que contenha dízimas periódicas.

4.6.1 Aula 1 - Elementos básicos das dízimas periódicas e resolução pelo método algébrico

Nesta proposta didática, desejamos que o aluno possa se familiarizar com as dízimas periódicas. Para isso, considere a situação hipotética descrita no exemplo abaixo.

Exemplo 4.6.1. *Você saiu com mais dois amigos e foram à uma lanchonete comemorar a aprovação em todas as matérias do ano letivo. A conta de vocês ficou em R$ 70,00 e precisaria ser dividida entre todos igualmente. Ao realizar a divisão pelo método habitual, você encontra o valor 23,333..., que nunca se encerra e não pode ser obtido dentro do nosso sistema monetário pois o real só pode ser dividido em 100 partes, ou seja, só conseguimos contar até a segunda casa decimal, a dos centavos.*

Esse número é uma **dízima periódica** — um tipo de número decimal que revela muito mais do que aparenta. O estudo das dízimas periódicas é importante para que possamos entender como o sistema numérico representa quantidades infinitas com precisão, algo fundamental em diversas áreas: na economia, ao calcular juros compostos; na ciência, ao expressar resultados com alta precisão; na tecnologia, ao trabalhar com algoritmos e programação. Além disso, o conhecimento sobre dízimas ajuda a desenvolver o pensamento lógico, a atenção aos detalhes e a consciência crítica sobre como lidamos com números em situações práticas, como compras, divisão de contas ou até mesmo na compreensão de estatísticas veiculadas pela mídia.

Explorar as dízimas periódicas de forma crítica e conectada à realidade nos ajuda a perceber que a Matemática vai muito além da sala de aula — ela nos dá ferramentas para interpretar o mundo e tomar decisões mais conscientes. Então, vamos embarcar nesse estudo com um novo olhar!

Ativação dos conhecimentos prévios: Desde o Ensino Fundamental I é natural os alunos trabalharem com números decimais e suas aplicações cotidianas. Contudo, nem todos os números decimais possuem as mesmas propriedades e devem ser analisados ou trabalhados da mesma forma. No caso das dízimas periódicas, que são números decimais infinitos que possuem algum valor que se repete em suas infinitas casas decimais, este fato nos permite transformá-las em frações. Este fato facilita a análise e os cálculos com o número, pois agora estamos trabalhando com algo exato e finito.

Vamos relembrar algumas características dos números decimais.

$$\underbrace{47}_{\text{PARTE INTEIRA}},\underbrace{26485}_{\text{PARTE DECIMAL}}$$

- **Na parte inteira**, os zeros que estão à esquerda não alteram o número. Por exemplo, 00321,95 é o mesmo que escrever apenas 321,95;
- **na parte decimal**, os zeros que estão à direita não alteram o número. Por exemplo, 7,302 000 0 é o mesmo que escrever apenas 7,302;
- há decimais que são finitos, como 7,302, e que têm uma quantidade fixa de casas decimais;
- há decimais que são infinitos e que não apresentam valor se repetindo nas infinitas casas decimais. Por exemplo,

$$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 46\ldots$$

- e também há aqueles números decimais que são infinitos e periódicos, como 45,3818181... Neste caso escreveremos o **período (valor que está se repetindo)** três vezes seguido de uma reticência ou então o representaremos com uma barra acima do período, por exemplo
$$45,3818181\ldots \;=\; 45,3\overline{81}.$$

A seguir veremos uma técnica algébrica para determinar a fração geratriz das dízimas periódicas.

Alinhando expectativas: Pergunte aos alunos como eles poderiam utilizar frações para representar este valor. Caso ninguém consiga desenvolver esta provocação então utilize os conhecimentos de soma de frações. Note que

$$\frac{100}{3} = \frac{99}{3} + \frac{1}{3} = 33 + \frac{1}{3},$$

logo, ao dividir 100 por 3 obteremos 33 inteiros e mais a terça parte de um inteiro.

No caso do **Exemplo 4.6.1**, partimos de uma situação onde era conhecida a fração e assim obtínhamos o número decimal. Contudo, há situações nas quais temos apenas o valor da dízima periódica e precisamos determinar a sua respectiva **fração geratriz**.

Exemplo 4.6.2. *Determine a fração geratriz da dízima periódica* $1,04313131\ldots$.

i) Chamaremos de G *a fração geratriz da dízima periódica* $1,04313131\ldots$.

Desta forma escreveremos a seguinte igualdade: $G = 1,04313131\ldots$

ii) Identificar em qual casa decimal se encontra o período;

O período de $1,04313131\ldots$ *é 31, e ele começa a aparecer na terceira casa decimal.*

iii) Multiplicar a dízima por alguma potência de base 10, até que o período seja deslocado uma vez para a parte inteira e obter uma primeira equação algébrica;

Como o período possui dois algarismos e aparece pela primeira vez na terceira casa decimal, então precisaremos deslocar a vírgula até a quarta casa decimal. Neste caso, basta multiplicar a igualdade por $10^4 = 1\ 000$*, logo* $10\ 000G = 1\ 000 \cdot 1,04313131\ldots$*, ou seja,*

$$10\ 000G = 10\ 431,313131\ldots \tag{4.1}$$

iv) Caso necessário, multiplicar a dízima periódica por alguma potência de base, até que o período comece a aparecer na primeira casa decimal, obtendo assim uma segunda equação algébrica;

Aqui precisaremos deslocar a vírgula até a segunda casa decimal. Neste caso, basta multiplicar a igualdade por $10^2 = 100$*, logo* $100G = 100 \cdot 1,04313131\ldots$*, ou seja,*

$$100G = 104,313131\ldots \tag{4.2}$$

v) Realizar uma subtração algébrica e determinar o valor da fração geratriz.

Subtraindo as equações (4.1) e (4.2), temos

$$\begin{aligned}
10\ 000G - 100G &= 10\ 431,\overline{31} - 104,\overline{31}\\
9\ 900G &= 10\ 327\\
G &= \frac{10\ 327}{9\ 900}
\end{aligned}$$

Ao determinar a fração geratriz é interessante que o aluno faça a conferência da sua resposta através da calculadora. E este processo é simples, basta dividir o numerador pelo denominador e conferir se ele encontra o mesmo valor no visor.

Incentive os alunos a revisitarem todos os passos executados no exemplo acima para absorver melhor os conceitos envolvidos. Em seguida, para fixar melhor as etapas, peça-os para resolver os **Exercícios de fixação** nº 1 e 2.

4.6.2 Aula 2 - Método algébrico para a obtenção da fração geratriz

Para começar esta segunda aula da proposta didática, retome as etapas para a determinação da fração geratriz vistas na aula anterior. Uma forma de ajudar na fixação das etapas é montar uma tabela com as instruções a serem executadas, de forma breve e sucinta. O aluno poderá fazer isso em uma folha separada para consultar quando necessário.

Etapa	**Exemplo**
1º) Nomear a fração geratriz	$x = 1,0\overline{3}$
2º) Identificar o período e a casa decimal onde aparece pela primeira vez	2ª casa decimal
3º) Deslocar o período **uma vez** para a parte inteira	$100x = 103,\overline{3}$
4º) Caso necessário, deslocar o período para a primeira casa decimal	$10x = 10,\overline{3}$
5º) Subtrair as equações das etapas 3 e 4, e resolver a equação	$90x = 103,\overline{3} - 10,\overline{3} \Leftrightarrow x = \frac{93}{90} = \frac{31}{30}$

Observação 4.6.1. *Dentre as muitas formas de se apresentar informações, a tabela é um recurso muito útil. As tabelas são fundamentais quando se quer organizar informações e, neste caso em específico, o uso de uma tabela permitiu a visualização rápida dos pontos mais essenciais do conteúdo explicado na aula anterior, evitando o uso de textos extensos e destacando relações importantes entre os elementos apresentados.*

Pode ser relevante que o professor comente a importância do uso de tabelas como forma de fazer resumos em Matemática e também para ajudá-los a se organizar nos estudos tanto em sala de aula quanto fora dela, já que a constância é fundamental para uma melhor fixação dos conteúdos vistos.

Para motivar as análises da próxima aula desta proposta didática, peça aos alunos para determinar a fração geratriz e verificar se eles encontram observam algum padrão acontecendo.

Exemplo 4.6.3. *Em cada grupo abaixo, determine a fração geratriz.*

- *Grupo 1*

  a) $0,888\ldots$

  b) $0,555\ldots$

  c) $0,171717\ldots$

  d) $0,\overline{23}$

  e) $0,\overline{103}$

- *Grupo 2*

  A) $0,000888\ldots$

  B) $0,00555\ldots$

  C) $0,000171717\ldots$

  D) $0,00\overline{23}$

  E) $0,00000\overline{103}$

Em seguida, responda:

1. *O que as dízimas periódicas do grupo 1 possuem em comum?*

2. *O que as dízimas periódicas do grupo 2 possuem em comum?*

3. *Com base nas respostas anteriores, o que cada dízima periódica do grupo 1 possui em comum com a sua correspondente no grupo 2? Por exemplo, a dízima periódica do item (d), no grupo 1, corresponde à dízima periódica do item (D) no grupo 2?*

4.6.3 Aula 3 - Método analítico para a obtenção da fração geratriz

Diante do que foi visto na aula anterior desta proposta didática, para esta aula iremos fazer um resumo das conclusões às quais se pode chegar a partir do que foi visto. Antes de apresentar os métodos analíticos para a determinação da fração geratriz, é importante que o professor antecipe aos alunos que o objetivo de ter estudado previamente o processo algébrico foi justamente prepará-los para o uso dessa linguagem, amplamente empregada na Matemática do Ensino Médio.

Após esta observação inicial, vamos às conclusões:

- Se a parte inteira for 0 (zero) e o período aparecer na 1ª casa decimal.

  Neste caso, a fração geratriz terá o período no numerador e o denominador terá a mesma quantidade de algarismos 9 quantos forem os algarismo do período.

  a) $0,171717\ldots$

  O período é 17 (dois algarismos), logo a fração geratriz é $\dfrac{17}{99}$ (também com dois algarismos 9 no denominador).

- Se a parte inteira for 0 (zero) e o período não aparece na 1ª casa decimal.

  Neste caso, o numerador da fração geratriz será a soma do período com o produto dos outros dígitos da parte decimal pela respectiva quantidade de algarismos 9 referentes ao período, e o denominador terá a mesma quantidade de algarismos 9 quantos forem os algarismo do período seguidos de quantos zeros forem os algarismos da parte decimal que não fazem parte do período.

b) $0,0083902902902\ldots$
O período é 902 (três algarismos), ele começa a aparecer na 5ª casa decimal e há 4 quatro algarismos na parte decimal que não compõem o período, logo a fração geratriz é $\dfrac{902 + 0083 \times 999}{9\,990\,000} = \dfrac{83\,819}{9\,990\,000}$.

- Se a parte inteira não é 0 (zero).

  Neste caso, basta separar a parte inteira do número decimal, através de uma adição, e utilizar um dos métodos anteriores. Ao final, realizaremos uma adição da fração obtida com o número inteiro.

  a) $2,10555\ldots$
  Note que $2,10555\ldots = 2 + 0,10555\ldots$ e, pelo método anterior, sabemos que $0,10555\ldots = \dfrac{5 + 10 \times 9}{900} = \dfrac{19}{180}$. Logo,
  a fração geratriz é $2 + \dfrac{19}{180} = \dfrac{379}{180}$.

Observação 4.6.2. *Caso a dízima periódica seja negativa, ao separar a parte inteira da parte decimal, tanto a parte inteira quanto a parte decimal serão precedidas do sinal de menos.*

$$-15,0\overline{23} = -15 - 0,0\overline{23}$$

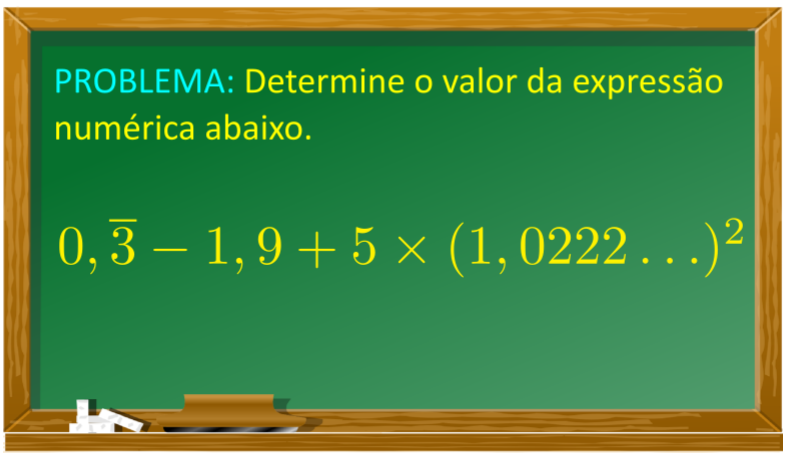
Após estas explicações, peça aos alunos para que resolvam o **Exercício de fixação** nº 3.

4.6.4 Aula 4 - Expressões numéricas

Para esta última aula da proposta didática sobre dízimas periódicas, abordaremos a resolução de expressões numéricas que possuem dízimas periódicas.

Aplicando os conhecimentos anteriores: Agora iremos utilizar os conhecimentos anteriores a respeito das dízimas periódicas para resolver expressões numéricas. Utilize o problema abaixo como exemplo para motivar os alunos a recorrer aos conhecimentos algébricos necessários para determinar a solução.

Figura 28: Exercício envolvendo expressão numérica.



Fonte: adaptado de Pixabay (2014).

Utilizando as quatro etapas de Polya:

1. **Compreensão** - Antes de resolver iniciar a parte dos cálculos na resolução da expressão numérica, peça aos alunos para identificar quais operações estão sendo abordadas e quais tipos de números foram utilizados na escrita da expressão numérica. Esse olhar para a expressão de forma integral é importante pois apesar de termos várias operações e vários tipos de números, as operações se comportam de forma particular dependendo do número com o qual se está trabalhando.

2. **Concepção de um plano** - Com base nos conhecimentos prévios a respeito de resolução de expressões numéricas, precisamos resolver primeiramente a **potência**, depois a **multiplicação** e, então, poderemos resolver a **adição** e a **subtração** (na ordem em que aparecem). Contudo, há dízimas periódicas na expressão. Desta forma, antes de resolver as operações iremos determinar as frações geratrizes.

3. **Execução de um plano** - Inicialmente note que:

$$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

   e

$$1,0222\ldots = \frac{2 + 10 \times 9}{90} = \frac{92}{90} = \frac{46}{45}.$$

   Reescrevendo a expressão numérica temos

$$\frac{1}{3} - 1,9 + 5 \times \left(\frac{46}{45}\right)^2,$$

   e resolvendo-a encontramos o seguinte resultado: $\dfrac{2963}{810}$.

4. **Retrospecto** - Apesar de o grande objetivo ser determinar o resultado da expressão numérica, é de suma importância se atentar às etapas na resolução e os conhecimentos necessários para a sua execução. A resolução de expressões numéricas é uma atividade importante pois nela condensamos vários conhecimentos, vistos anteriormente de forma individual, e ativamos simultaneamente diversas memórias e informações antes de determinarmos a resposta final.

   Na resolução acima foi necessário utilizar encontrar a fração geratriz da dízima periódica, transformar decimais finitos em fração e realizar operações com frações de denominadores diferentes. Pergunte aos alunos quais etapas durante a resolução eles tiveram dificuldades. Estas respostas vão possibilitar ao professor sondar onde é que podem estar as deficiências aritméticas dos alunos e assim propor atividades mais específicas, caso necessário.

Para finalizar, os alunos deverão resolver as expressões numéricas contidas no **Exercício de fixação** nº 4.

SUGESTÃO: Caso o professor queira realizar uma atividade diferenciada para avaliar o aprendizado dos alunos a respeito das dízimas periódicas, uma indicação é a realização de uma atividade de bingo envolvendo as frações geratrizes. Fazendo uma busca rápida na internet sobre o tema é possível encontrar muito material desenvolvido por outros professores e quem estão disponíveis para aplicação. Dependendo da disponibilidade de tempo extraclasse do professor é também possível se inspirar e adaptar estas atividades para a realidade de suas turmas, reforçando tópicos que o professor julguem ser mais relevantes.

4.6.5 Exercícios de fixação

1. Marque com um X os números que representam dízimas periódicas.

   (a) ( ) $12,6666$
   (b) ( ) $12,6666\ldots$
   (c) ( ) $0,848484\ldots$
   (d) ( ) $61,00111\ldots$
   (e) ( ) 151515
   (f) ( ) $1,111\ldots$

2. Determine, pelo método algébrico, a fração geratriz em cada caso abaixo.

   (a) $0,888\ldots$
   (b) $1,\overline{5}$
   (c) $2,0111\ldots$
   (d) $61,222\ldots$
   (e) $23,\overline{1}$
   (f) $2,00\overline{31}$

3. Determine, pelo método analítico, a fração geratriz em cada caso abaixo.

   (a) $9,\overline{7}$
   (b) $15,0\overline{1}$
   (c) $3,00\overline{2}$
   (d) $21,04\overline{1}$
   (e) $1,010\overline{2}$
   (f) $4,121\overline{3}$

4. Determine o valor das expressões numéricas a seguir.

   (a) $3 + 0,75 + 0,\overline{3}$
   (b) $(2 + \overline{6}) \times 1,5$
   (c) $5 - (1,2 + 0,\overline{1})$
   (d) $(3,5 - 0,\overline{7}) \cdot (2 + 0,\overline{3})$

4.6.6 Respostas

1. (b) (c) (d) (f)

2. (a) $\dfrac{8}{9}$
   (b) $\dfrac{14}{9}$
   (c) $\dfrac{181}{90}$
   (d) $\dfrac{551}{9}$
   (e) $\dfrac{208}{9}$
   (f) $\dfrac{19831}{9900}$

3. (a) $\dfrac{88}{9}$
   (b) $\dfrac{1351}{90}$
   (c) $\dfrac{1351}{450}$
   (d) $\dfrac{18937}{900}$
   (e) $\dfrac{2273}{2250}$

4. (a) $\overline{083}$
   (b) 4
   (c) $\frac{337}{90}$
   (d) $\frac{1715}{270}$

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho nasceu da necessidade, observada na prática de sala de aula, de se enfrentar as lacunas conceituais e habilidades matemáticas não consolidadas, que estudantes do Ensino Médio trazem do Ensino Fundamental. Tais defasagens comprometem não apenas o desempenho acadêmico mas a própria relação dos alunos com a Matemática. Diante desse cenário, o objetivo central deste estudo foi elaborar uma proposta de intervenção pedagógica, materializada em propostas didáticas que abordam conhecimentos de aritmética e Álgebra, focadas no resgate de conhecimentos prévios como alicerce para novas aprendizagens.

SÍNTESE DOS RESULTADOS

A principal contribuição deste trabalho reside, portanto, em oferecer ao professor do Ensino Médio um material didático estruturado e fundamentado, em conhecimentos de psicologia da aprendizagem, produção de material didático para o ensino de Matemática, técnica de resolução de problemas matemáticos, e pronto para ser utilizado e adaptado quando for necessário. Espera-se que sua aplicação possa fomentar não apenas a superação de lacunas conceituais, mas também o desenvolvimento do raciocínio lógico e de uma postura mais ativa e investigativa por parte dos estudantes.

Como mencionado anteriormente, este material pode ser adaptado a depender das necessidades do professor. Neste sentido, e observando a própria organização das propostas didáticas, reforçamos a importância da visão crítica também de quem estiver aplicando estas propostas em sala de aula para que não use-as como uma solução pronta e acabada, capaz de sanar todas as lacunas se executada de forma literal. As particularidades dos alunos, da turma, do próprio professor e as dinâmicas estabelecidas entre estes agentes envolvidos no processo de aprendizagem precisam e devem ser levadas em consideração para que se possa atingir o melhor resultado dentro do contexto no qual ela está sendo utilizada.

RELEVÂNCIA E IMPACTOS DA PESQUISA

Ao realizar o levantamento dos conhecimentos prévios dos objetos de conhecimento das séries do Ensino Médio e organizar as propostas didáticas para a consolidação destes conhecimentos prévios, podemos observar que este trabalho é extremamente importante e necessário, pois fornece materiais específicos para que o professor possa sanar as defasagens que vier a observar com seus alunos.

Apesar de termos limitado nosso levantamento à organização proposta no Estado de

Roraima para o Ensino Médio, vemos que as propostas didáticas elaboradas podem ser aplicadas para os alunos em quaisquer outras unidades federativas da nação e facilmente adaptável para gerações de estudantes, tornando-o abrangente e com um forte potencial atemporal.

LIMITAÇÕES DA PESQUISA

Apesar do empenho em pesquisar os conhecimentos prévios e confeccionar as propostas didáticas, percebemos que seria necessário, por exemplo, realizar uma outra subseção, dentro de cada proposta didática, que contivesse exercícios de aprofundamento ou mais contextualizados para fortalecer as bases já estabelecidas. Contudo, não foi possível realizar esta etapa pois ela demandaria mais pesquisas sobre cada tema para a produção dos exercícios ou análise em bancos de dados para encontrar questões que atendessem a estas necessidades.

SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

É fundamental ressaltar que este estudo se caracteriza como uma proposta teórica, ficando em aberto uma validação empírica em ambiente de sala de aula. Assim, pode-se dar continuidade a esta pesquisa com uma aplicação prática das sequências didáticas, coletando dados que permitam analisar o desenvolvimento dos alunos e realizar os ajustes necessários. Além disso, pode-se ampliar a proposta para o campo da Geometria, que não fora contemplado no desenvolvimento deste estudo.

REFLEXÃO FINAL

Por fim, ressalto que do ponto de vista profissional, este estudo me conferiu um maior embasamento para minhas ações como docente e ser humano. Reforcei, também, a importância da constante atualização, aprendizado e reformulação das práticas didáticas conforme as características de cada turma. Afinal, cada estudante é singular, cada grupo tem demandas específicas e motivações que variam ao longo do tempo. Nesse sentido, as normas e diretrizes pedagógicas devem servir como referência, no entanto o *como fazer* exige revisão constante, escuta ativa e flexibilidade.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, Tamíris. PISA 2022: Por que o Brasil está nas últimas posições em matemática, ciências e leitura?. **Futura**, Rio de Janeiro, dez 2023. Notícia Educação Básica. Disponível em: https://futura.frm.org.br/. Acesso em 28 set 2024.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. 1. ed. Belém: SBEM, 2017. 104 p.

COSTA JUNIOR, J. F.; LIMA, P. P. de; ARCANJO, C. F.; SOUSA, F. F. de; SANTOS, M. M. de O.; LEME, M.; GOMES, N. C. Um olhar pedagógico sobre a Aprendizagem Significativa de David Ausubel. **Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem**. Alagoas, v. 5, p. 51, 2023. Disponível em: https://rebena.emnuvens.com.br/revista/index. Acesso em: 01 maio 2025.

DEHAENE, Stanislas. **É assim que aprendemos**: por que o cérebro funciona melhor do que qualquer máquina (ainda...). Tradução: Rodolfo Ilari. São Paulo: Contexto, 2022.

DEMBART, Lee. George Polya, 97, Dean of Mathematicians, Dies. **Los Angeles Times**, 8 set. 1985. Disponível em: https://www.latimes.com/archives/la-xpm-1985-09-08-mn-2892-story.html. Acesso em: 03 maio 2025.

ELLENBERG, Jordan. **O poder do pensamento matemático**: A ciência de como não estar errado. Tradução: George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

FARIA, Leonardo. Hemisférios cerebrais: dois cérebros ou um só?. **Meu cérebro**, 30 abr. 2024. Disponível em: https://meucerebro.com/hemisferios-cerebrais/. Acesso em: 07 abr. 2025.

GARCIA, J. A. M.; LILLO, C. Os mitos e erros sobre os hemisférios do cérebro. **BBC News Brasil**, 12 maio 2023. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/articles/cjj999w39dgo. Acesso em: 02 maio 2025.

INEP - INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Página inicial. Brasília: INEP, 2020. Disponível em: https://www.gov.br/inep/. Acesso em: 29 ago. 2025

HASARD, Romina. Números y letras: Aportes de Dehaene a la neurociencia educativa. **NeuroClass**, 20 out. 2024. Disponível em: https://neuro-class.com/numeros-y-letras-aportes-de-dehaene-a-la-neurociencia-educativa/. Acesso em 01 maio 2025.

LOPES, Maria Liz M. Sequências didáticas e possibilidades de uma prática pedagógica. **Caderno Marista de Educação**, Porto Alegre, v. 10, n. 1, nov. 2020. Disponível em: https://revistaseletronicas.pucrs.br/index.php/caderno-marista-de-educacao/index. Acesso em: 06 abr. 2025.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 18 jun. 2024.

MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa:** a teoria e textos complementares. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011. 179 p.

III ENCONTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, 2000, Peniche. **Anais** [...]. Peniche: The Meaningful Learning Research Group, 2000. 147 p. Disponível em: https://mlrg.org/memberpublications/LivroPeniche2000.pdf. Acesso em: 04 maio 2025.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 203 p.

PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. **Linhas de Pesquisa** Rio de Janeiro, 2024. Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/linhas-de-pesquisa/. Acesso em: 25 abr. 2025.

PUHL, C. S.; MÜLLER, T. J.; DE LIMA, I. G. As contribuições de David Ausubel para os processos de ensino e de aprendizagem. **Revista Dynamis**. Blumenau, v. 26, n. 1, p. 61-77, 2020. Disponível em: https://repositorio.pucrs.br/. Acesso em: 03 maio 2025.

DE PAULO, Iramaia J. C. Marco Antônio Moreira - O professor, o investigador, o ser humano. **Revista do Professor de Física**, Brasília, v. 2, n. 3, dez. 2018. Disponível em: https://periodicos.unb.br/index.php/rpf/issue/archive. Acesso em: 03 maio 2025.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA. Biblioteca Central. **Manual de normas para apresentação dos trabalhos técnico-científicos da UFRR**. 3. ed. Boa Vista, RR: Editora da UFRR, 2025, 138 p. Disponível em: https:/ufrr.br/bibliotecas/manual-de-normas-da-ufrr/. Acesso em: 07 abr. 2025.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 46. ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

RORAIMA. **Documento Curricular de Roraima (DCRR)**. Roraima: Secretaria de Estado de Educação, 2021.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p.

APÊNDICE A - AVALIAÇÃO 1 - O SINAL DE IGUAL

Aluno(a): ______________________________

Turma: ________ Data: ___/___/___ NOTA:__________

QUESTÃO 1: Sobre a utilização do sinal de igualdade (=), circule nas passagens abaixo, aquelas em que este sinal foi utilizado incorretamente. Reescreva a linha abaixo corretamente utilizando a igualdade.

$$\frac{3\cdot(-2)-4\cdot 7}{12+4} \overset{1}{=} \frac{-6-4\cdot 7}{12+4} \overset{2}{=} \frac{-6-4\cdot 7}{16} \overset{3}{=} \frac{-10\cdot 7}{16} \overset{4}{=} \frac{70}{16} \overset{5}{=} \frac{35}{8}$$

QUESTÃO 2: A soma das idades de duas irmãs é 54 anos. Sabendo que uma é 8 anos mais nova que a outra, determine a idade de cada uma das irmãs.

QUESTÃO 3: Abaixo está indicado como um aluno procedeu para reescrever $4^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 9$ na forma de multiplicação,

$$4^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 9 = 4^2 \cdot (3+9) = 4^2 \cdot 12 = 4^2 \cdot 4 \cdot 3 = 4^3 \cdot 3.$$

Escreva as adições e subtrações abaixo na forma de multiplicação (utilize potenciação quando for possível).

a) $12^6 \cdot 6 + 12^6 \cdot 5$

b) $3^3 \cdot 25 - 3^3 \cdot 15$

c) $3 \cdot 5^9 + 5^9$

d) $2 \cdot 7^3 - 5 \cdot 7^3$

QUESTÃO 4: Sandra e Vitória estavam brincando de adivinhar números com base em instruções. Sandra diz para Vitória:

- Pense em um número;
- Multiplique ele por 4;
- Adicione 36 unidades;
- Agora divida o resultado por 3;
- Por fim, subtraia 8 unidades;
- Agora me diga o resultado obtido.

Considerando que Vitória disse 40, faça o que se pede:

a) Escreva uma equação que represente a situação descrita acima utilizando corretamente o sinal de igual.

b) Resolva a equação encontrada e descubra qual foi o número pensado por Vitória.

QUESTÃO 5: Ananias possui três sobrinhos e as idades deles, do mais novo para o mais velho, aumentam de 7 em 7 anos. Há algum tempo atrás, quando Ananias tinha 69 anos, sua idade era igual à soma das idades de seus três sobrinhos. Determine a idade de cada um dos sobrinhos no período em questão.

QUESTÃO 6: Uma empresa gasta R$ 14,00 para produzir uma unidade de um produto. Além disso, possui uma despesa fixa de R$ 12.000,00, que não depende da quantidade de unidades produzidas. Sabendo que o preço de venda de cada unidade é R$ 39,00, quantas unidades, no mínimo, a empresa deve vender para começar a obter lucro?

QUESTÃO 7: Considere a seguinte fórmula: $P = 45 + 20c$, em que c é um valor natural.

a) Qual o valor de P quando $c = 2$?

b) É possível que P valha 145 para algum valor de c? Justifique.

c) Qual o valor de c quando $P = 205$?

d) É possível que P valha 155 para algum valor de c? Justifique.

QUESTÃO 8: Um supermercado está vendendo bombons e bolachas de uma determinada marca por um preço menor que o praticado normalmente. Luana foi ao supermercado e comprou 4 bombons e 6 bolachas, pagando R$ 42,00 por sua compra. Arthur aproveitou a promoção para levar 2 bombons e 2 bolachas, por R$ 16,00. Descreva um método pelo qual seja possível saber por quanto foi vendido cada bombom e cada bolacha neste supermercado.

QUESTÃO 9: A mãe de José tinha uma dívida na mercearia do bairro. Ela entregou a ele 8 cédulas de mesmo valor e disse que elas eram suficientes para pagar a dívida de R$ 385,00. Ao voltar para casa, José entregou à sua mãe R$ 15,00 de troco. Diga de quais valores eram as notas que a mãe de José entregou-lhe.

QUESTÃO 10: Em um triângulo isósceles (possui dois lados de mesma medida) cujo perímetro é 43, sabe-se que dois de seus lados medem $2x + 1$ e $x + 1$. Além disso, sabe-se x é diferente de 0 (zero).

a) Qual é o valor de x?

b) Há uma única solução para o item a)? Caso haja mais de uma solução, diga qual é a soma das possíveis soluções.

Soluções e dicas

QUESTÃO 1: Igualdade 3 (ordem de execução das operações) e igualdade 4 (esqueceu de analisar o sinal). Consequentemente a resposta final será diferente.

$$\frac{-6-4\cdot 7}{16} \overset{3}{=} \frac{-6-28}{16} \overset{4}{=} \frac{-34}{16} \overset{5}{=} -\frac{17}{8}$$

QUESTÃO 2: Considerando que a idade da irmã mais velha é N, e como uma é 8 anos mais nova que a outra, então a mais nova tem $N-8$ anos de idade. Se a soma das idades é igual a 58 então podemos escrever a equação

$$N+(N-8)=54,$$

cuja solução é $N=31$. Portanto, as idades das irmãs é 23 e 31 anos.

QUESTÃO 3: Escreva as adições e subtrações abaixo na forma de multiplicação (utilize potenciação quando for possível).

a) $12^6\cdot 11$

b) $3^3\cdot 10$

c) $4\cdot 5^9$

d) $-3\cdot 7^3$

QUESTÃO 4:

a) Seja x o número pensado. De acordo com os passos dados temos:

1º) $4x$

2º) $4x+36$

3º) $(4x+36)\div 3$

4º) $(4x+36)\div 3-8$

5º) Resultado: 40

Logo, a equação é: $\dfrac{4x+36}{3}-8=40.$

b) $x=27$

DICA: Utilize operações inversas, a partir do resultado dito por Vitória, para encontrar o número que foi pensado por ela.

QUESTÃO 5: Idade do mais novo: x; idade do irmão "do meio": $x+7$; idade do mais velho: $x+14$. Logo, a idade dos sobrinhos é: 16, 23 e 30 anos.

DICA: É possível dizer que as idades dos irmãos são: $x-7$, x e $x+7$. O que facilita para determinar o idade do irmão do meio sem a necessidade de executar manualmente os cálculos.

QUESTÃO 6: Para começar a obter lucro devemos encontrar a quantidade de produtos que precisam ser vendidos para cobrir os gastos totais. Chamando de p a quantidade de produtos a ser vendida, podemos escrever a seguinte equação:

$$39x - (14x + 12\ 000) = 0$$

e logo, $x = 480$, ou seja, é necessário vender no mínimo 480 unidades do produto.

DICA: Note que o lucro por unidade vendida é $39 - 14 = 25$. como 12 000 é uma despesa fixa, então bastaria resolver a equação $25x = 12000$ para encontrar a quantidade mínima de unidades a serem vendidas.

QUESTÃO 7:

a) $P = 85$

b) Sim, basta que $c = 5$.

c) $c = 8$

d) Não, pois c não seria mais um número natural.

QUESTÃO 8: Se $2(\text{bombons}) + 2(\text{bolachas}) = 16$ então $4(\text{bombons}) + 4(\text{bolachas}) = 32$, logo concluímos que as duas bolachas a mais que Luana comprou custaram 10 reais, ou seja, 5 reais cada uma. Consequentemente, cada bombom custa 3 reais.

QUESTÃO 9: Chamando de C o valor de cada cédula, conseguimos escrever a seguinte equação: $8C - 15 = 385$. Resolvendo a equação concluímos que $C = 50$.

QUESTÃO 10:

a) Se o triângulo tiver dois lados medindo $x + 1$ então podemos escrever a equação $(2x + 1) + 2(x + 1) = 43$ e logo, $x = 10$.

b) Caso o triângulo tenha dois lados medindo $2x + 1$, então teríamos que $(x + 1) + 2(2x + 1) = 43$ e logo, $x = 8$.

APÊNDICE B - AVALIAÇÃO 2 - FRAÇÕES TAMBÉM SÃO NÚMEROS

Aluno(a): ____

Turma: ________ Data: ___/___/___ NOTA: __________

QUESTÃO 1: Complete as lacunas nas afirmações a seguir de modo a torná-las verdadeiras:

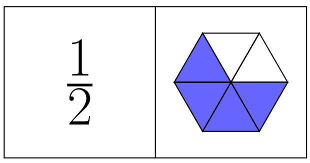
a) Para determinar a soma (ou a diferença) de frações de mesmo denominador devemos conservar o ______________________ e adicionar (ou subtrair) os ______________________.

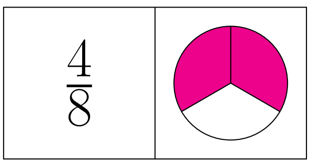
b) Para ______________________ duas frações devemos conservar a primeira delas e ______________________ pelo inverso da segunda destas frações.

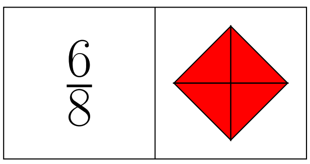
c) Para subtrair frações de denominadores diferentes devemos transformá-las em frações equivalentes de ______________ denominador. Daí, podemos proceder realizando a subtração de frações de mesmo ______________________.

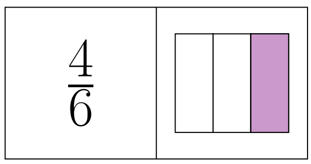
QUESTÃO 2: Carlos e Kamila são os únicos herdeiros de um terreno rural. Sabendo que $\frac{4}{7}$ do terreno pertencem a Carlos e os 270 m^2 restantes ficaram com Kamila. Determine o valor da área total do terreno.

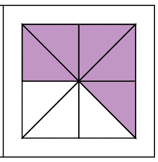
QUESTÃO 3: O dominó de João possui frações e figuras que representam estas frações. Se João for colocar uma peça ao lado da outra, começando da esquerda para a direita, sendo que ele começou pela peça ao lado, qual será a 5ª peça da sequência?

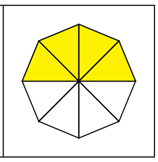


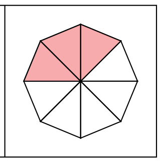
a) 

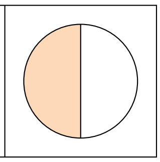
b) 

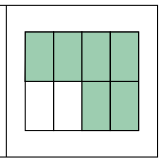
c) 

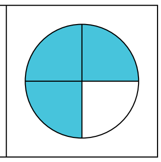
d) $\dfrac{3}{4}$ 

e) $\dfrac{2}{3}$ 

f) $\dfrac{4}{4}$ 

g) $\dfrac{5}{8}$ 

h) $\dfrac{3}{8}$ 

i) $\dfrac{1}{3}$ 

QUESTÃO 4: Laís, Letícia e Lívia retiraram, respectivamente, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$ e $\frac{3}{20}$ do total de morangos em uma tigela.

a) Quem retirou a maior quantidade de morangos?

b) A quantidade de morangos que restou na tigela corresponde a que fração do total?

QUESTÃO 5: Efetue as operações e simplifique seus resultados.

a) $\dfrac{11}{3}+\dfrac{7}{3}$ b) $\dfrac{25}{8}-\dfrac{5}{8}$ c) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}$ d) $\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{4}{6}$ e) $6\cdot\dfrac{2}{3}$

QUESTÃO 6: Calcule o valor da expressão numérica

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right).$$

OBS: *Efetue os cálculos de forma organizada para que eu possa ajudá-lo caso você erre em alguma passagem.*

QUESTÃO 7: Complete os espaços entre as frações com os sinais de $+$, $-$, $\times$, ou $\div$, de forma a tornar verdadeiras as igualdades a seguir:

a) $\dfrac{4}{5} \quad \dfrac{1}{5}=1$

b) $\dfrac{10}{4} \quad \dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{8}$

c) $\dfrac{7}{8} \quad \dfrac{7}{16}=\dfrac{7}{16}$

d) $\dfrac{3}{2} \quad \dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{6}$

e) $\dfrac{6}{5} \quad \dfrac{7}{5}=\dfrac{6}{7}$

QUESTÃO 8: Calcule as expressões a seguir e simplifique seus resultados sempre que possível:

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{2}{9}$

b) $\left[\dfrac{4}{5}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]\div\dfrac{3}{5}$

c) $\sqrt{\dfrac{4}{5}\cdot\left(1+\dfrac{4}{5}\right)}$

d) $\dfrac{3}{8}\div\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{6}\right)$

QUESTÃO 9: Qual das alternativas a seguir representa a metade de $\frac{3}{8}$:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{16}$ d) $\frac{3}{32}$

QUESTÃO 10: Marcos tomou $\frac{2}{5}$ de uma jarra de suco de 1200 ml. Seu amigo, André, tomou $\frac{4}{5}$ do que havia sobrado. Qual a quantidade de refrigerante que ainda resta na garrafa?

Soluções e dicas

QUESTÃO 1:

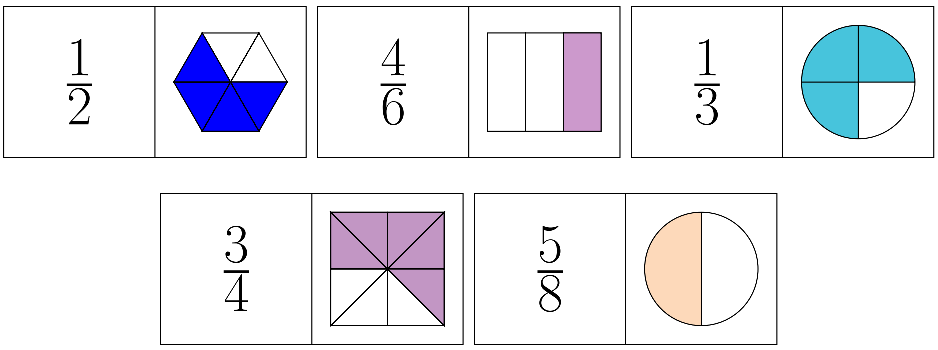
a) denominador/numeradores

b) dividir/multiplicar

c) mesmo/denominador

QUESTÃO 2: Como $\frac{4}{7}$ pertencem a Carlos, é fácil concluir que Kamila herdou os $\frac{3}{7}$ restantes. Neste caso, $\frac{3}{7}$ equivalem a 270 m^2. Logo, cada $\frac{1}{7}$ representa 90 m^2. E portanto, o valor da área do terreno é $90 \times 7 = 630$ m^2.

QUESTÃO 3: Colocando as peças uma ao lado da outra, da esquerda para a direita temos



Portanto a 5ª peça da sequência é a da alternativa g).

QUESTÃO 4:

a) Determinamos as frações equivalentes, vemos que Laís retirou $\frac{8}{20}$, Letícia retirou $\frac{6}{20}$ e Lívia retirou $\frac{3}{20}$ dos morangos. Então Laís retirou a maior quantidade de morangos.

b) Como a soma das quantidades é $\frac{17}{20}$, então restou na tigela $\frac{3}{20}$ do total de morangos.

QUESTÃO 5:

a) $\dfrac{20}{3}$ b) $\dfrac{5}{2}$ c) $\dfrac{41}{35}$ d) $\dfrac{1}{4}$ e) 4

QUESTÃO 6: $\dfrac{1}{10}$

QUESTÃO 7:

a) $+$ b) $\times$ c) $-$ d) $-$ e) $\div$

QUESTÃO 8:

a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{17}{12}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{3}{2}$

QUESTÃO 9: c) $\frac{3}{16}$:

QUESTÃO 10: Após Marcos tomar o suco restaram $\frac{3}{5}$ de 1200 ml, isto é, 720 ml. Se André tomou $\frac{4}{5}$ do que havia sobrado então restaram $\frac{1}{5}$, no caso, 140 ml.

APÊNDICE C - AVALIAÇÃO 3 - IDENTIFICANDO PADRÕES

Aluno(a): ____

Turma: ________ Data: ___/___/___ NOTA:__________

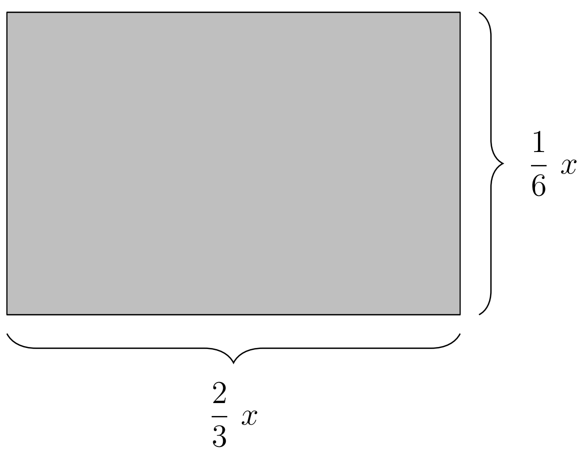
QUESTÃO 1: Seu amigo o chama para ir ao supermercado comprar arroz e feijão para a mãe dele. Ele compra 3 pacotes de arroz e 2 pacotes de feijão, que juntos pesam 8kg. Você, como é um amigo camarada, resolve ajudá-lo a carregar os alimentos e leva dois pacotes de arroz, para que cada um carregue a mesma quantidade. Utilizando estas informações, determine:

a) as incógnitas envolvidas na situação e o que elas representam.

b) as equações envolvidas na situação descrita.

c) quantos quilos pesam cada pacote de arroz e cada pacote de feijão. (Explique como encontrou a resposta)

QUESTÃO 2: Considere o retângulo a seguir cujas medidas dos lados estão expressas de forma algébrica. Em seguida, faça o que se pede.



a) Determine uma expressão algébrica que forneça o perímetro do retângulo em qualquer situação. Dê a resposta em sua forma simplificada.

b) Determine uma expressão algébrica que forneça a área do retângulo em qualquer situação. Dê a resposta em sua forma simplificada.

c) Utilizando uma das fórmulas acima, determine o valor de x quando o perímetro do retângulo for 20.

QUESTÃO 3: Diremos que um retângulo é "bi-mágico" quando for possível obter duas regras para preenche-lo com números, uma para as linhas e outra regra para as colunas. Sabendo que o retângulo abaixo é "bi-mágico", analise o seu padrão de formação e responda às perguntas a seguir.

	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	$\cdots$	n
1ª	2	4	8	16	32	F	$\cdots$	K
2ª	4	8	16	32	64	G	$\cdots$	$\vdots$
3ª	6	12	24	48	96	H	$\cdots$	$\vdots$
4ª	8	16	32	64	128	I	$\cdots$	$\vdots$
5ª	A	B	C	D	E	$\ddots$	$\cdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	J	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	L

a) Diga quais são os números que deveriam ser preenchidos no lugar das letras A e F.

b) Quais números deveriam ser preenchidos no lugar das letras B, C, D e E?

c) Quais números deveriam ser preenchidos no lugar das letras G, H e I?

d) Qual é a regra que nos permite encontrar o próximo número na linha seguinte? Escreva uma expressão para determinar o valor de J.

e) Qual é a regra que nos permite encontrar o próximo número na coluna seguinte? Escreva uma expressão para determinar o valor de K.

f) Seja m a posição da linha de número m e n a posição da coluna de número n, qual a fórmula que nos permite determinar o valor de L, um número qualquer no retângulo "bi-mágico", independente de sua posição?

QUESTÃO 4: Na tabela abaixo, em cada coluna o valor de z é o mesmo. Utilize este fato para completar a tabela.

z	3		1,1		
$z+2$				-4	
$2z$		-2			
z^2					100

QUESTÃO 5: Considere os polinômios $A = 5x + 3$ e $B = -4x + 1$ e em seguida responda às perguntas abaixo:

a) Qual é o valor de A e de B para $x = 1$?

b) Qual é o valor de A e de B para $x = 10$?

c) Qual é o valor do produto $x \cdot B$?

d) Qual é o valor de $x \cdot B$ para $x = 2$? (Utilize o item anterior).

QUESTÃO 6: Simplifique as expressões polinomiais abaixo:

a) $4j - j + 5$

b) $10g - g + 17 + 3g - 4g - 6$

c) $36 + 9m^2 - 3m^2 + 6$

d) $13t^2 + 2t^2 + 94x - 54x$

e) $77xz - 42xz + 65 - xz$

f) $ab + 31 + 6ab + 2z + ab + 5z - 14 - z$

QUESTÃO 7: Um parque aquático cobra R$ 30,00 pela entrada de seus clientes e mais uma taxa de utilização (t) de R$ 5,00 por brinquedo usado (por cada vez em que for usado). Qual o valor final (VF) a ser pago por alguém que resolveu visitar este parque aquático em um dia qualquer?

QUESTÃO 8: Uma loja de ventiladores está comercializando uma linha de ventiladores a R$ 150,00 a unidade. Qual a receita (R) a ser arrecadada em função da quantidade de ventiladores vendidos (v)?

QUESTÃO 9: Simplifique a expressão algébrica $[z^2 \cdot (-2z)]^3$.

QUESTÃO 10: A variável n representa qualquer número inteiro positivo não nulo, isto é, $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$.

a) Quantos são os algarismos iguais a zero do resultado de 10^n?

b) Quantos são os algarismos do resultado de 10^n?

Soluções e dicas

QUESTÃO 1:

a) Podemos utilizar as incógnitas A e F, sendo que A representa o peso de cada pacote de arroz e F representa o peso de cada pacote de feijão.

b) $3A + 2F = 8$ e $2A = A + 2F$.

c) Se 2 pacotes de arroz têm o mesmo peso que 1 pacote de arroz mais dois pacotes de feijão, então conclui-se que 1 pacote de arroz tem o mesmo peso que 2 pacotes de feijão. Como 3 pacotes de arroz e 2 de feijão pesam 8kg, então isso equivale a ter 8 pacotes de feijão pesando 8kg. Logo, cada pacote de feijão pesa 1kg e cada pacote de arroz pesa 2kg.

QUESTÃO 2:

a) $P = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{6}x = \dfrac{5}{3}x$.

b) $A = \dfrac{2}{3}x \cdot \dfrac{1}{6}x = \dfrac{1}{9}x^2$.

c) Como o enunciado forneceu o valor do perímetro então iremos utilizar a fórmula do item (a). Desta forma, $\dfrac{5}{3}x = 20$ e, logo, $x = \frac{20 \cdot 3}{5} = 12$.

QUESTÃO 3: Pelo que estamos observando na tabela, a próxima linha, da 1ª coluna, mostra a sequência dos números pares. E a próxima coluna, da 1ª linha, mostra a sequência dos números que são o resultado das potências de base 2.

	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	$\cdots$	n
1ª	2	4	8	16	32	F	$\cdots$	K
2ª	4	8	16	32	64	G	$\cdots$	$\vdots$
3ª	6	12	24	48	96	H	$\cdots$	$\vdots$
4ª	8	16	32	64	128	I	$\cdots$	$\vdots$
5ª	A	B	C	D	E	$\ddots$	$\cdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	J	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	L

a) No lugar da letra A devemos colocar 10 e no lugar da letra F devemos colocar 64.

b) $B = 20$ (múltiplos de 4), $C = 40$ (múltiplos de 8), $D = 80$ (múltiplos de 16) e $E = 160$ (múltiplos de 32).

c) $G = 128$, $H = 196$ e $I = 256$ (basta multiplicar o número anterior da linha por 2).

d) Basta somar, em cada coluna, o valor que aparece na primeira linha ao valor que aparece na linha anterior. Como na 1ª linha da 1ª coluna apareceu 2 (que é o mesmo que $2 \cdot 1$), na 2ª linha apareceu 4 ($= 2 \cdot 2$), na terceira linha apareceu 6 ($= 2 \cdot 3$) e assim sucessivamente, então na linha m, da 1ª coluna, aparecerá $2 \cdot m$, ou seja, $J = 2m$.

e) Basta multiplicar, em cada linha, o valor que aparece na coluna anterior por 2. Como na 1ª coluna da 1ª linha apareceu 2 ($= 2 \cdot 2^0 = 2^1$), na 2ª linha apareceu 4 ($2 \cdot 2^1 = 2^2$), na terceira linha apareceu 8 ($2 \cdot 2^2 = 2^3$) e assim sucessivamente, então na coluna n, da 1ª linha, aparecerá $2 \cdot 2^{n-1}$, ou seja, $K = 2^n$.

f) As conclusões dos itens anteriores nos levam a concluir que o elemento fundamental para obtermos os demais é o que aparece na 1ª linha 1ª coluna, o 2. Para encontrar um valor qualquer da primeira linha usamos $m \cdot 2$ e para encontrarmos os valores das demais colunas basta multiplicar por 2^n, então a localização de qualquer número no retângulo "bi-mágico" é dada por $m \cdot 2^n$, onde m é a posição da linha e n é a posição da coluna deste número.

QUESTÃO 4: Determinando inicialmente os valores de z, temos que:

- O segundo valor de z é -1 pois $2z = -2$;
- O quarto valor de z é -6 pois $z + 2 = -4$;
- O quinto valor de z é 10 pois $z^2 = 100$.

Daí, a tabela completa fica:

z	3	-1	1,1	-6	10
$z+2$	5	1	3,1	-4	12
$2z$	6	-2	2,2	-12	20
z^2	9	1	1,21	36	100

QUESTÃO 5:

a) $A = 8$ e $B = -3$

b) $A = 53$ e $B = -39$

c) $xB = -4x^2 + x$

d) -14

QUESTÃO 6: Simplifique as expressões polinomiais abaixo:

a) $3j - 5$

b) $8g + 11$

c) $42 + 6m^2$

d) $15t^2 + 40x$

e) $34xz + 65$

f) $8ab + 17 + 6z$

QUESTÃO 7: $VF = 30 + 5t$

QUESTÃO 8: $R = 150v$

QUESTÃO 9: $[-2z^3]^3 = -2z^9$

QUESTÃO 10:

a) Como as potências de base 10 são: 10, 100, 1 000, ... então conclui-se que a potência 10^n terá n algarismos iguais a zero.

b) Pelo item anterior vemos que as potências de base 10 tem n algarismos iguais a 0 e o primeiro dígito igual a 1, logo 10^n possui $n + 1$ algarismos.

APÊNDICE D - AVALIAÇÃO 4 - REALIZANDO (FACILITANDO) CONTAS

Aluno(a): ____

Turma: ________ Data: ___/___/___ NOTA:__________

QUESTÃO 1: Utilizando cálculo mental, diga qual é o resultado das expressões numéricas a seguir:

a) $75 \cdot 100$

b) $9\ 353 \cdot 1\ 000$

c) $190\ 000 \div 100$

d) $2\ 000\ 000 \div 1\ 000$

e) $34 \cdot 100 + 56$

f) $570\ 000 \div 10\ 000 + 17$

QUESTÃO 2: Em cada item abaixo, os símbolos $\triangle$, $\square$ e $\diamondsuit$ representam algarismos que foram apagados da multiplicação. Descubra os valores dos símbolos em cada um dos itens.

a)

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 4 \\ \times & & \square & \triangle \\ \hline & 1 & 1 & 2 \\ + & \diamondsuit & 8 & \\ \hline & 3 & 9 & 2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cccccc} & & & 7 & 6 & \triangle \\ \times & & & & \square & 3 \\ \hline & & 2 & 3 & 0 & \diamondsuit \\ + & 3 & 8 & 4 & 5 & \\ \hline & 4 & 0 & 7 & 5 & 7 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & 1 & 2 \\ \times & & & & \triangle & 9 \\ \hline & & \diamondsuit & 9 & 0 & 8 \\ + & & 8 & \triangle & \square & \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 8 & 8 \end{array}$$

QUESTÃO 3: O professor de matemática da turma “7° azul” comprou balas para distribuir igualmente entre seus alunos de tal forma que todos os alunos recebessem mais que uma e menos que dez balas. Sabendo que esta turma possui mais que 1 aluno, circule qual dos valores abaixo representa uma quantidade possível de balas presentes neste pacote. Justifique sua escolha.

a) 11 b) 13 c) 15 d) 17 e) 19

QUESTÃO 4: O professor José escreveu no quadro um número que é divisível por 3, par e que não termina em 0. Porém, ele acabou se confundiu com a matéria de outra série que leciona e trocou um dos algarismos deste número, escrevendo no quadro $2130B$. Você, que é muito habilidoso com a Matemática, percebeu o erro e disse a ele qual o algarismo deveria ser colocado no lugar de B. Justificando sua resposta, qual algarismo você disse ao professor desatento?

QUESTÃO 5: Dos pares de números abaixo, qual deles não tem como divisores os números 3 e 5 simultaneamente?

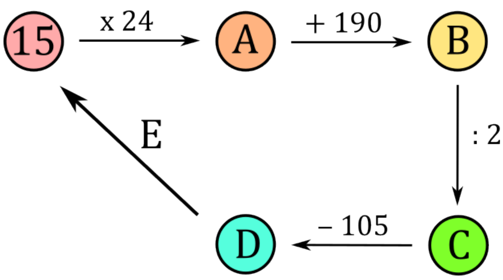
a) 90 e 210
b) 135 e 285
c) 630 e 1.065
d) 510 e 680
e) 930 e 1.500

QUESTÃO 6: Júnior e seu pai brincam com operações envolvendo números inteiros. Ele desenhou um circuito e pediu a seu pai que escrevesse algumas operações para que ele descobrisse os números que faltavam, sendo que ao final, ele também teria de resolver um desafio. Observe o circuito representado na figura ao lado que começa com o número 5 e segue a ordem alfabética das letras. Em seguida responda às questões.

a) Qual o número inteiro que deve ser colocado no lugar da letra A?

b) Qual o número inteiro que deve ser colocado no lugar das letras B, C e D?

c) O desafio final consiste em descrever a operação que foi escrita no lugar da letra E, para que voltemos ao número 5 e fechando o ciclo. O que deverá ser posto no lugar da letra E se a operação utilizada foi uma divisão? E se tiver sido utilizada uma subtração?



QUESTÃO 7: Utilize a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma (à subtração) para resolver as multiplicações a seguir:

a) Calcule $15 \cdot 52$ utilizando obrigatoriamente o fato que $52 = 20 + 30 + 2$.

b) Calcule $25 \cdot 16$ utilizando obrigatoriamente o fato que $16 = 20 - 2 - 2$.

QUESTÃO 8: Utilizando o fato de que $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, onde x e y representam números, utilize o produto notável mencionado para determinar quanto é:

a) 12×8, ou seja, $(10 + 2)(10 - 2)$

b) 14×6

c) 35×25

d) 23×17

e) 101×99

f) 105×95

QUESTÃO 9: Em cada item, efetue as divisões e diga quais são seus quociente e resto.

a) $231 \div 17$ b) $928 \div 27$ c) $32\ 860 \div 155$

QUESTÃO 10: Utilizando o fato de que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, onde x e y representam números, utilize o produto notável mencionado para determinar quanto é 24^2, ou seja, $(20 + 4)^2$.

Soluções e dicas

QUESTÃO 1:

a) 7 500 (adicionar dois zeros ao final)

b) 9 353 000 (adicionar três zeros ao final)

c) 1 900 (retirar dois zeros)

d) 2 000 (retirar três zeros)

e) 3 450 (adicionar dois zeros ao final de 34 e trocar os zeros por 56)

f) 74 (retirar os quatro zeros e somar 57 com 17)

QUESTÃO 2: É possível analisar os possíveis valores nas multiplicações e depois descobrir os valores das somas, ou fazer a análise no sentido inverso, descobrir os valores das somas e depois realizar uma divisão para descobrir os algarismos do outro número.

a) $\square = 2$, $\triangle = 2$, $\diamondsuit = 8$ b) $\square = 5$, $\triangle = 9$, $\diamondsuit = 7$ c) $\square = 8$, $\triangle = 4$, $\diamondsuit = 1$

QUESTÃO 3: Para que as condições do problema sejam satisfeitas é necessário que a quantidade de balas do pacote deve ser um número composto, pois cada aluno recebeu mais que uma e menos que dez balas, além de sabermos que a turma possui mais que 1 aluno. Portanto, a quantidade de balas no pacote é 15.

QUESTÃO 4: Como o número é divisível por 3 então a soma dos algarismos é um múltiplo de 3, logo 2 + 1 + 3 + 0 + B= $6 + B$. Neste caso, os únicos algarismos possíveis são $B = 0$, 3, 6 e 9. Como o número escrito no quadro é par e não termina em zero então o único algarismo possível para o valor de B é 6.

QUESTÃO 5: (d) 680 não é múltiplo de 3.

QUESTÃO 6:

a) $A = 360$

b) $B = 450$, $C = 225$ e $D = 120$

c) $E = \div 8$. $E = -105$.

QUESTÃO 7:

a) $15 \cdot 20 + 15 \cdot 30 + 15 \cdot 2 = 300 + 450 + 30 = 780$

b) $25 \cdot 20 - 25 \cdot 2 - 25 \cdot 2 = 500 - 50 - 50 = 400$

QUESTÃO 8:

a) $(10 + 2)(10 - 2) = 100 - 4 = 96$

b) $(10+4)(10-4) = 100 - 16 = 84$

c) $(30+5)(30-5) = 900 - 25 = 875$

d) $(20+3)(20-3) = 400 - 9 = 391$

e) $(100+1)(100-1) = 10\ 000 - 1 = 9\ 999$

f) $(100+5)(100-5) = 10\ 000 - 25 = 9\ 975$

QUESTÃO 9:

a) quociente 13 e resto 10

b) quociente 34 e resto 10

c) quociente 212 e resto 0

QUESTÃO 10: 24^2, ou seja, $(20+4)^2 = 400 + 80 + 4 = 484$.

APÊNDICE E - AVALIAÇÃO 5 - PORCENTAGENS SÃO QUANTIDADES?

Aluno(a): ____

Turma: ________ Data: ___/___/___ NOTA:__________

QUESTÃO 1: Considere os itens a seguir:

(1) $\rightarrow$ 2% de 200 é 4.

(2) $\rightarrow$ $\dfrac{3}{2}$ de 60 é 40.

(4) $\rightarrow$ 10% de 200 é o mesmo que $\dfrac{1}{2}$ de 40.

(8) $\rightarrow$ 12% de 3.200 é 384.

A soma dos itens corretos é: ______

QUESTÃO 2: Samuel comprou um **A55** (smartphone *Samsung Galaxy A55*) por R$ 2 500,00 no mês de junho de 2024. Em março dezembro, ao ouvir rumores de que seria lançado em março do ano seguinte o **A56**, ele decidiu vender seu smartphone para ter alguma grana guardada no ano seguinte. Porém, o valor de venda do **A55** sofreu uma redução de 25% em relação a seu valor de compra. Por quanto Samuel venderá seu **A55**?

QUESTÃO 3: Numa pesquisa sobre a preferência de cores, foram entrevistadas 50 pessoas e o resultado obtido foi o seguinte:

Preferência por	**Nº de pessoas**	**%**
Azul	11	
Vermelho	8	
Preto	2	
Verde	10	
Rosa	14	
Branco	5	

Preencha a tabela acima com os respectivos valores percentuais.

QUESTÃO 4: Numa cidade, 40% da população é de homens adultos e 35% de mulheres adultas. Quantos habitantes possui a cidade, se o número de crianças e adolescentes é 20 000?

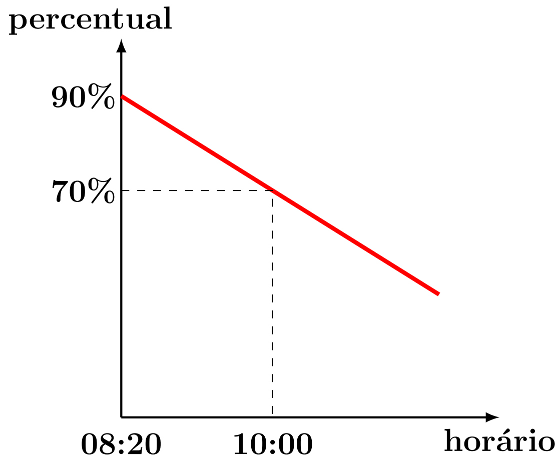
QUESTÃO 5: Uma torneira leva 30 minutos para encher 24% de um reservatório, cuja capacidade é 180.000 litros. Responda os itens abaixo.

a) Qual o volume de água do reservatório é preenchido em 30 minutos?

b) Qual o tempo necessário para encher o restante do reservatório?

QUESTÃO 6: Quanto é 10% de 20% de 360?

QUESTÃO 7: Um estudante do ensino médio está realizando uma pesquisa para um trabalho sobre aplicações da matemática no cotidiano em seu notebook. Às 08:20, quando ele começou a utilizar o notebook, a bateria estava com 90% de sua carga e às 10:00 ele observou que a bateria estava com carga de 70%. O gráfico abaixo ilustra a situação. Caso ele decida continuar realizando sua pesquisa ao longo do dia, sem pausas



ou interrupções, e considerando que o descarregamento acontece de maneira linear, sem que ele o conecte ao carregador em qual horário a carga estará em 16%? (Resolva de forma detalhada e organizada)

QUESTÃO 8: Uma rodovia ligando duas cidades está em reforma. Se 28% já foi reformada e ainda faltam 54km, qual é o comprimento desta rodovia?

QUESTÃO 9: Uma escola decidiu reformar uma de suas salas de aula. Para isso, foi feito um orçamento com os seguintes itens:

- Pintura das paredes: R$ 1.250,00
- Troca do piso: R$ 2.380,00
- Instalação de ventiladores: R$ 1.120,00

Por se tratar de uma escola pública, a empresa responsável pela reforma concedeu um desconto de 15% sobre o valor total da obra. Responda as perguntas a seguir:

a) Qual foi o valor total do orçamento antes do desconto?

b) Qual foi o valor do desconto concedido?

c) Qual foi o valor pago pela escola após o desconto?

d) Se a escola tivesse um orçamento máxima de R$ 4.500,00, ainda conseguiria fazer a reforma com o valor final? Justifique com cálculos.

QUESTÃO 10: Sandra tomou 30% de um suco que estava em uma jarra, completamente cheia, de 1400 mililitros. Seu irmão, Sérgio, tomou 60% do que havia sobrado. Qual a quantidade de suco que ainda resta na jarra?

Soluções e dicas

QUESTÃO 1:

(1) $\rightarrow$ Correto

(2) $\rightarrow$ Errado

(4) $\rightarrow$ Correto

(8) $\rightarrow$ Correto

A soma dos itens corretos é: $1 + 4 + 8 = 13$.

QUESTÃO 2: R$ 1 850,00.

QUESTÃO 3: Numa pesquisa sobre a preferência de cores, foram entrevistadas 50 pessoas e o resultado obtido foi o seguinte:

Preferência por	Nº de pessoas	%
Azul	11	22%
Vermelho	8	16%
Preto	2	4%
Verde	10	20%
Rosa	14	28%
Branco	5	10%

QUESTÃO 4: Note que o total de pessoas adultas, homens e mulheres, é de 75%. Logo, 25% são de crianças e adolescentes. Como eles são um total de 20 000, então conclui-se que a cidade possui 80 000 habitantes.

QUESTÃO 5:

a) 24% de 180 000 litros equivale a 43 200.

b) Note que 96% do reservatório é preenchido em 120 minutos e como 24% é preenchido em 30 minutos, então 4% é preenchido em 5 minutos. Portanto, o reservatório é preenchido em 2h e 5min.

QUESTÃO 6: 20% de 360 é 72. 10% de 72 é 7,2.

QUESTÃO 7: Pelo gráfico observamos que 20% da bateria foi consumida em um intervalo de 1h e 40min (= 100 minutos). Logo, cada 1% são consumidos em 5 minutos de uso. Para que a bateria chegue a 16% é necessário que sejam consumidos mais 54% da bateria, o que será feito em $5 \times 54 = 270$ minutos, ou seja, 4 horas e 30 minutos. Como não haverá pausas então conclui-se que a carga estará a 16% às 14:30.

QUESTÃO 8: Note que 72% da rodovia equivalem a 54km, logo 3km equivalem a 4%. Portanto a rodovia possui no total 75km.

QUESTÃO 9:

a) R$ 4.750,00

b) 15% de 4.750 = R$ 712,50

c) Valor final: R$ 4.037,50

d) Sim. Sobraram R$ 462,50.

QUESTÃO 10: Após Sandra tomar o suco sobraram 980 mililitros. Como Sérgio tomou 60%, então ainda restam na jarra 392 mililitros.

APÊNDICE F - AVALIAÇÃO 6 - DÍZIMAS PERIÓDICAS

Aluno(a): ____

Turma: ________ Data: ___/___/___ NOTA:__________

QUESTÃO 1: Determine a fração geratriz dos seguintes decimais periódicos:

a) $0,242424\ldots$

b) $0,166\ldots$

QUESTÃO 2: Calcule e expresse o resultado na forma de fração irredutível:

$$0,111\ldots + \frac{4}{3}$$

QUESTÃO 3: Dadas as dízimas periódicas a seguir, determine, de forma algébrica, suas correspondentes frações geratrizes:

a) $3,\overline{2}$

b) $8,\overline{3}$

c) $11,\overline{2}$

d) $2,000\overline{5}$

QUESTÃO 4: Se $x = \sqrt{0,444\ldots}$, então qual é o valor de x?

QUESTÃO 5: Qual é o numerador da fração geratriz da dízima periódica: $-1,2313131\ldots$?

a) (   ) 1 231

b) (   ) −1 231

c) (   ) −322

d) (   ) −1 219

e) (   ) −1 219

QUESTÃO 6: Calcule o valor da expressão numérica

$$\frac{2}{3} + 0,666\ldots + 0,3$$

QUESTÃO 7: Determine o valor da expressão numérica

$$\frac{1,202020\ldots - 0,111\ldots}{0,0222\cdots}$$

Soluções e dicas

QUESTÃO 1:

a) $\dfrac{8}{33}$

b) $\dfrac{1}{6}$

QUESTÃO 2: $\dfrac{13}{3}$

QUESTÃO 3:

a) $x = \dfrac{29}{9}$

b) $x = \dfrac{25}{3}$

c) $x = \dfrac{101}{9}$

d) $x = \dfrac{18\ 005}{9\ 000}$

QUESTÃO 4: $x = \dfrac{2}{3}$ ou $0,666\ldots$.

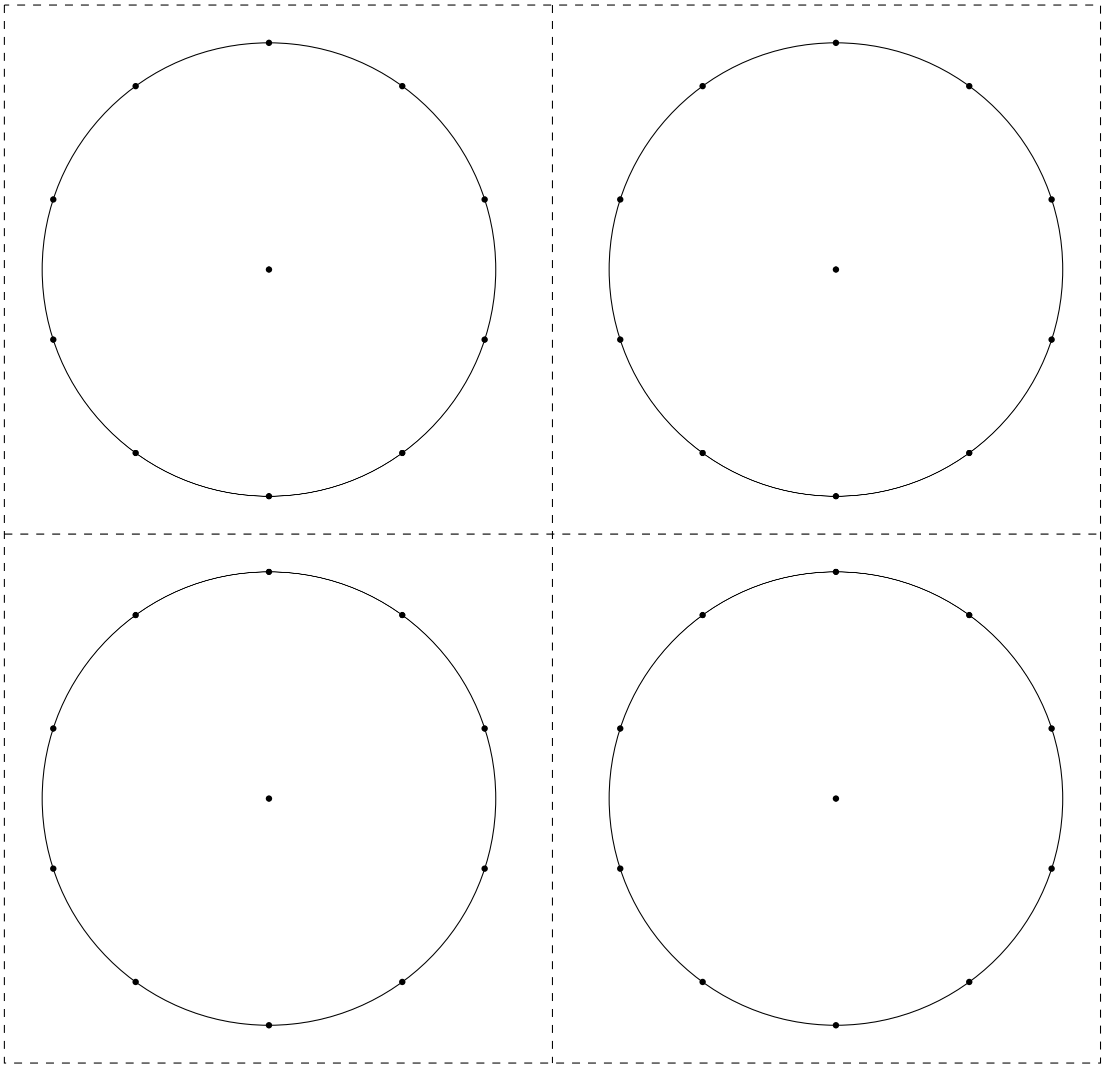
QUESTÃO 5: d) $-1\ 219$

QUESTÃO 6: $\dfrac{49}{30}$

QUESTÃO 7: $\dfrac{\frac{107}{99}}{\frac{1}{45}} = \dfrac{540}{11}$

APÊNDICE G - CÍRCULOS PARA A CONSTRUÇÃO DE GRÁFICO DE SETORES

Figura 29: Círculos divididos em 10 partes iguais (cada um).



Fonte: Autor.

APÊNDICE H - MALHA QUADRICULADA

Figura 30: Malha quadriculada de dimensões 17 x 16.

Fonte: Autor.