UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

VINICIUS VIAMONTE DOS SANTOS

O USO DO GEOGEBRA E TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO APOIO AO ENSINO DE CÔNICAS

Boa Vista/RR
2025

Vinicius Viamonte dos Santos

O USO DO GEOGEBRA E TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO APOIO AO ENSINO DE CÔNICAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva

Boa Vista/RR
2025

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

S237u Santos, Vinicius Viamonte dos.
O uso do GeoGebra e técnicas de resolução de problemas como apoio ao ensino de cônicas / Vinicius Viamonte dos Santos. – Boa Vista, 2025.
108 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

1. Ensino de matemática. 2. Seções cônicas. 3. Resolução de problemas. 4. Sequências didáticas. 5. GeoGebra. I. Título. II. Silva, Luciano Ferreira (orientador).

CDU (2. ed.) 514.752.2:373.5

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária/Documentalista:
Mariede Pimentel e Couto Diogo - CRB-11-354 - AM

Vinicius Viamonte dos Santos

O USO DO GEOGEBRA E TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO APOIO AO ENSINO DE CÔNICAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida dia 25 de julho de 2025 e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Luciano F. Silva

Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva
Universidade Federal de Roraima
Orientador

Prof. Dr. Marcos André Fernandes Spósito
Instituto Federal de Roraima
Membro Externo

Prof. Dr. Joselito de Oliveira
Universidade Federal de Roraima Membro
Interno

Boa Vista/RR

2025

Dedico este trabalho a minha mãe Mirian Viamonte dos Santos, que não está mais entre nós, mas que sempre será lembrada por seu apoio e carinho.

Agradecimentos

A realização deste trabalho é o resultado de uma jornada que não percorri sozinho. Expresso aqui minha mais profunda gratidão a todos que, de diferentes formas, foram essenciais para a conclusão desta etapa.

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, Dr. Luciano Ferreira Silva, pela condução segura, pela paciência, pelos valiosos ensinamentos e pela confiança depositada em mim desde o início. Sua orientação foi o pilar que sustentou este projeto.

Aos membros da banca examinadora, Dr. Joselito de Oliveira e Dr. Marcos André Fernandes Spósito, minha gratidão por aceitarem o convite, pela leitura atenta e pelas sugestões pertinentes que, sem dúvida, enriqueceram imensamente este trabalho.

Expresso meu reconhecimento aos professores Dra. Kelly Karina Santos, Dr. Guilherme Zsigmond Machado, Dr. Elzimar de Oliveira Rufino, Dr. Max Ferreira e Dr. Lindeval Fernandes de Lima. Vossos ensinamentos foram essenciais para o desenvolvimento das minhas habilidades em matemática e para a construção do conhecimento que tornou esta pesquisa possível.

À minha irmã, Gabriela Viamonte dos Santos, meu pai, José Ricardo dos Santos e minha companheira, Karina Tayná da Silva Almeida, dedico um agradecimento especial. Vocês foram meu refúgio e minha força, sempre me incentivando a continuar nesta árdua jornada de estudar e trabalhar. O apoio incondicional de vocês foi o combustível para não desistir.

Um agradecimento institucional à gestão da Escola Agrotécnica, no momento em que fui lotado, em especial aos professores Dr. Francisco Santos Silva, Dr. Jandiê Araújo e Dra. Cláudia Sales. A orientação de vocês para que eu pudesse solicitar o horário especial de servidor estudante foi essencial para conciliar as responsabilidades profissionais com os estudos.

Da mesma forma, sou imensamente grato aos coordenadores do Departamento de Matemática da UFRR Dr. Wilfredo Renato Lavado Enco, Dra. Lays Grazielle Cardoso Silva de Jesus e Dra. Edileusa do Socorro Valente Belo, pela compreensão e flexibilidade em sempre conseguirem adaptar meus horários de trabalho, de modo que não houvesse choque com as aulas do mestrado, viabilizando minha frequência e dedicação ao curso.

A todos os mencionados, meu muito obrigado!

"A introdução de um computador pode corromper a educação matemática ou enriquecê-la imensamente. A questão não é 'usar ou não usar', mas 'como usar'."

(Adaptado de Edsger Dijkstra)

Resumo

O ensino de seções cônicas no Ensino Médio é marcado por desafios persistentes, agravados por lacunas de aprendizagem que se acumulam desde o Ensino Fundamental. Avaliações de larga escala, como o PISA e o SAEB, evidenciam este cenário ao revelarem que uma parcela significativa dos alunos conclui a educação básica sem desenvolver competências essenciais para a resolução de problemas. Em resposta a este quadro, que frequentemente favorece uma abordagem abstrata e focada na memorização de fórmulas, esta dissertação propõe um modelo pedagógico alternativo para o estudo de elipses, hipérboles e parábolas. A proposta articula a Teoria da Resolução de Problemas de George Polya, que oferece um arcabouço metodológico estruturado para o desenvolvimento do raciocínio, com as potencialidades do software de matemática dinâmica GeoGebra. O GeoGebra atua como ferramenta de exploração e visualização, permitindo que os estudantes manipulem parâmetros e observem em tempo real como alterações nas equações afetam a geometria das curvas. O objetivo central é desenvolver e validar sequências didáticas que promovam uma aprendizagem significativa, guiando os alunos na investigação das cônicas como um lugar geométrico. A principal contribuição reside na oferta de um modelo pedagógico prático e fundamentado que utiliza a tecnologia como catalisadora para o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico, posicionando o estudante como protagonista na construção de seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Seções Cônicas; Resolução de Problemas; Sequências Didáticas; GeoGebra.

Abstract

The teaching of conic sections in high school is marked by persistent challenges, aggravated by learning gaps accumulated since elementary school. Large-scale assessments, such as PISA and SAEB, highlight this scenario by revealing that a significant portion of students complete basic education without developing essential problem-solving skills. In response to this context, which often favors an abstract, formula-memorization approach, this dissertation proposes an alternative pedagogical model for the study of ellipses, hyperbolas, and parabolas. The proposal articulates George Polya's Problem-Solving Theory, which offers a structured methodological framework for developing reasoning, with the capabilities of the dynamic mathematics software GeoGebra. GeoGebra acts as an exploration and visualization tool, allowing students to manipulate parameters and observe in real-time how changes in equations affect the geometry of the curves. The central objective is to develop and validate didactic sequences that promote meaningful learning, guiding students in the investigation of conics as a geometric locus. The main contribution lies in offering a practical and well-founded pedagogical model that uses technology as a catalyst for the development of intellectual autonomy and critical thinking, positioning the student as the protagonist in the construction of their own knowledge.

Keywords: Mathematics Education; Conic Sections; Problem Solving; Teaching Sequences GeoGebra.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

O ensino da disciplina Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio representa um campo de constantes desafios, no qual se busca não apenas a transmissão de conhecimentos, mas o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de abstração e da habilidade de resolver problemas. Dentre os diversos conteúdos que compõem o currículo, o estudo das seções cônicas (elipse, hipérbole e parábola) destaca-se pelo nível de complexidade, por exigir dos estudantes o pensamento algébrico em suas equações, articulado com definições, propriedades e geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Médio (BRASIL. Ministério da Educação, 1999) orientam que a aprendizagem matemática deve estar centrada no desenvolvimento de um "saber fazer"e um "saber pensar"matemático. Essa abordagem visa preparar o aluno para lidar com as exigências de um mundo tecnológico, desenvolvendo competências críticas como selecionar e analisar informações para tomar decisões, indo além do simples manuseio de ferramentas como calculadoras.

Contudo, a abordagem deste tópico é frequentemente marcada por um alto grau de abstração, o que pode levar a uma aprendizagem mecânica, centrada na memorização de fórmulas e desprovida de significado para o aluno. Tal cenário pode gerar um desinteresse dos estudantes no estudo dessas curvas e de suas vastas aplicações, que moldaram desde a nossa compreensão da estrutura do sistema solar até o desenvolvimento de tecnologias modernas.

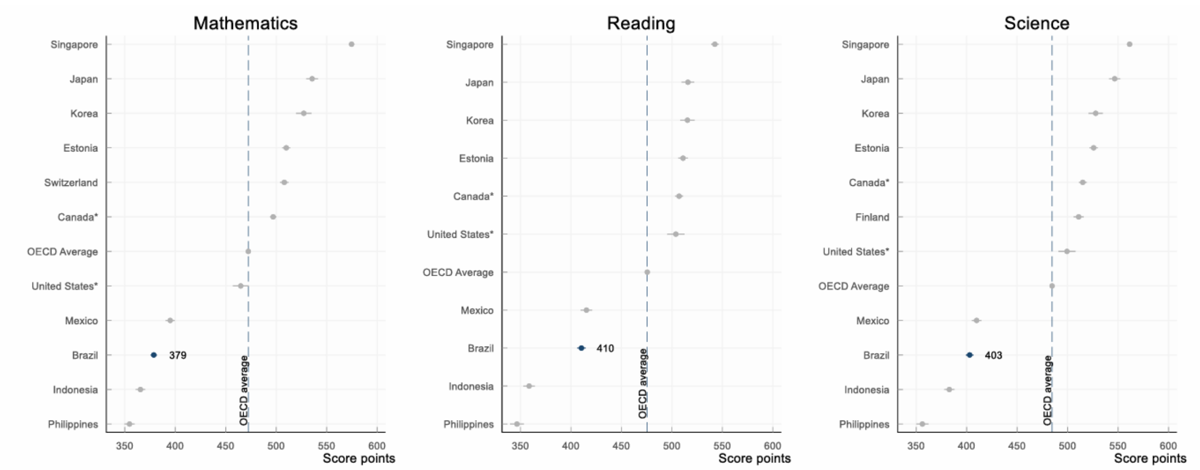
Esta dissertação parte do pressuposto de que a superação dessas barreiras de aprendizagem demanda uma renovação nas práticas pedagógicas no Ensino Médio. Nesse contexto, esta pesquisa se debruça sobre a seguinte questão: como a associação entre uma metodologia consolidada para o desenvolvimento do pensamento matemático, como a Teoria da Resolução de Problemas, e as potencialidades de uma ferramenta tecnológica interativa, pode favorecer uma aprendizagem mais eficaz e significativa das cônicas? A busca por respostas a essa indagação é guiada pelos princípios da heurística e da visualização dinâmica, como sugerem os pensamentos de um de seus maiores mestres e a ferramenta escolhida para esta investigação.

1.1 Motivação

A motivação para esta pesquisa emerge de um cenário educacional desafiador, amplamente documentado por avaliações nacionais e internacionais, que apontam para uma persistente dificuldade dos estudantes brasileiros na aprendizagem da Matemática.

Dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), e do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), revelam que uma parcela significativa dos alunos conclui o Ensino Médio sem desenvolver as competências essenciais para a resolução de problemas. Estima-se que em tópicos como a Geometria Analítica, e mais particularmente o estudo das cônicas, sejam um dos mais complexos pela composição dos conhecimentos implícitos como: propriedades de triângulos, mediatrizes, Teorema de Pitágoras, produtos notáveis, propriedades de potência, resolução de expressões algébricas, distância entre dois pontos e as próprias propriedades e definições das cônicas.

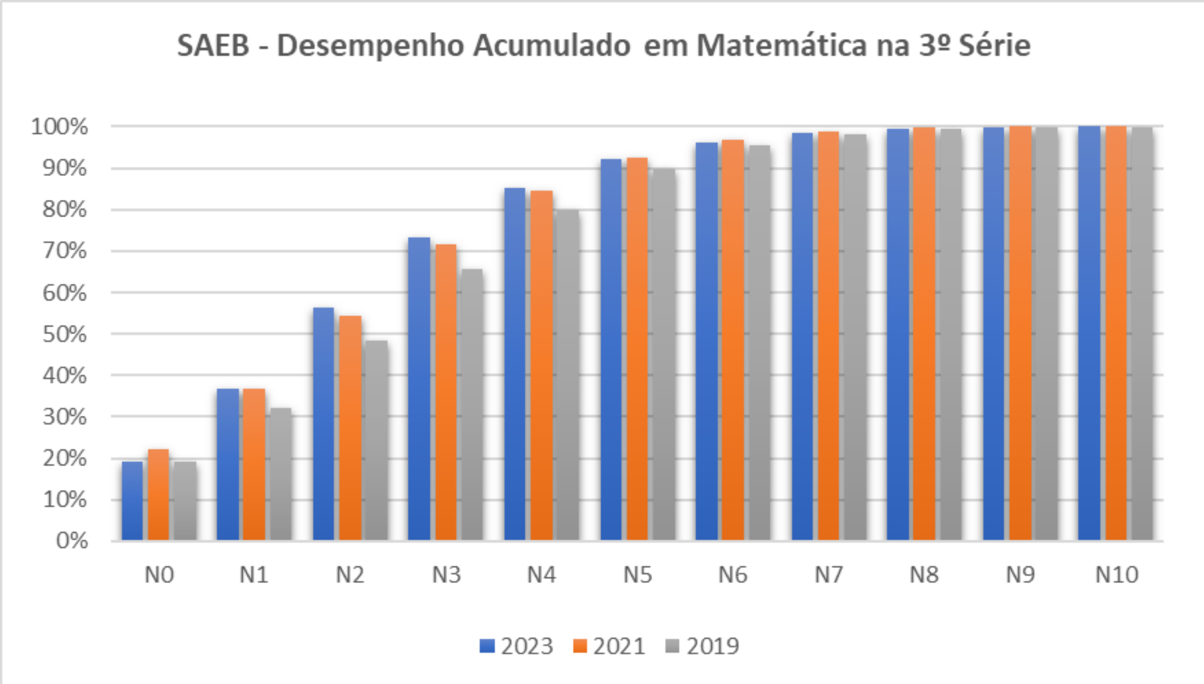
Figura 1 – Índices em matemática, leitura e Ciências no do Brasil comparado com outros países PISA 2022



Fonte: (AVVISATI; ILIZALITURRI, 2023)

O SAEB, apresenta dados estatísticos sobre o desempenho dos alunos em diversas disciplinas, segmentados por série. A Figura 2 exibe o percentual acumulado dos níveis de proficiência em matemática alcançados pelos alunos da 3° série do ensino médio nos anos de 2019, 2021 e 2023, sem filtros por tipo de rede (privada/pública) ou local (região/estado/município).

Figura 2 – SAEB - Desempenho Acumulado em Matemática na 3ª Série do Ensino Médio

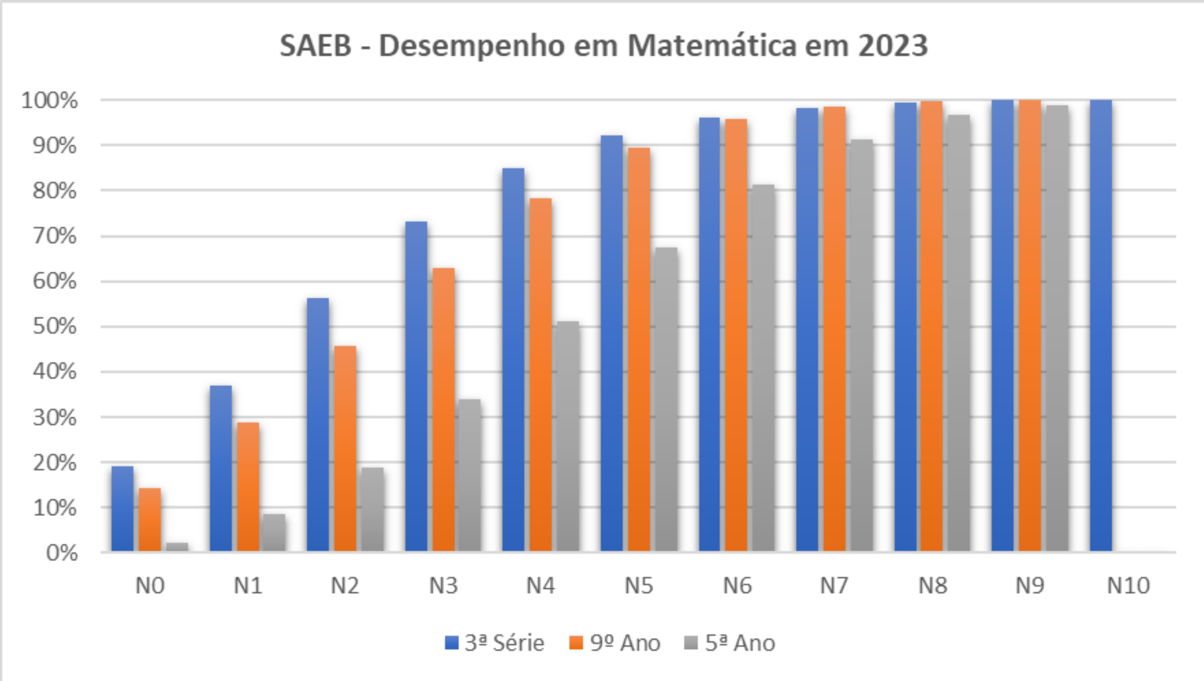


Fonte: Produção do próprio autor (2025), com dados adaptados (INEP, 2024)

O gráfico mostra que, em 2023, aproximadamente 55% dos alunos atingiram, no máximo, o nível 2 de um total de 10, enquanto até nível 3 já são 70% e até o nível 5 90%. Ou seja, analisando o gráfico, verifica-se que apenas 10% dos alunos conseguem fazer metade dos pontos da avaliação. Apesar de não ser o fator determinante do baixo índice, esse dado fornece indícios sobre a dificuldade de aprendizagem dos alunos ou dificuldades de resolver problemas, tendo em vista o alto percentual de alunos que não atingiram um bom resultado na prova.

A Figura 3 exibe o gráfico de desempenho em percentual acumulado em matemática nos alunos da 3ª série do ensino médio, 9° e 5° ano do ensino fundamental, os quais são inversamente proporcionais, quanto maior os seus percentuais nos níveis iniciais (N0, N1, N2, N3), indica um nível menor de aprendizado e a capacidade de resolver problemas.

Figura 3 – SAEB - Desempenho Acumulado em Matemática na 3ª Série do Ensino Médio, 9° ano e no 5° ano do Ensino Fundamental



Fonte: Produção do próprio autor (2025), com dados adaptados (INEP, 2024)

Este quadro reflete não apenas uma lacuna no domínio de conteúdos, principalmente nos anos finais da educação básica, mas também um distanciamento entre a forma como a matemática é tradicionalmente ensinada — muitas vezes de maneira expositiva, abstrata e focada na memorização de fórmulas — e a necessidade de uma aprendizagem mais significativa, que conecte a teoria à prática e estimule o raciocínio lógico. O ensino das cônicas, em particular, frequentemente se resume à manipulação de suas equações algébricas, privando os alunos da rica compreensão de suas propriedades geométricas e de suas inúmeras aplicações no mundo real, que vão desde as órbitas planetárias descritas por Kepler até a engenharia de antenas, lentes e estruturas arquitetônicas.

Do ponto de vista social, essa defasagem na formação matemática tem implicações diretas, limitando o acesso dos jovens a cursos de graduação como medicina, engenharias, direito em universidades federais (Universidades e Institutos Federais) e institutos militares, consequentemente, a oportunidades profissionais em setores estratégicos para o desenvolvimento do país.

Diante disso, este trabalho é motivado pela urgência em investigar e propor novas abordagens pedagógicas que possam reverter esse quadro. Acredita-se que, ao aliar uma metodologia de ensino focada no desenvolvimento do pensamento estratégico, como a Teoria da Resolução de Problemas de George Polya, a uma ferramenta tecnológica dinâmica e visual, como o GeoGebra, é possível criar um ambiente de aprendizagem mais engajador, intuitivo e eficaz, capaz de despertar o interesse dos estudantes e de lhes fornecer as ferramentas cognitivas necessárias para "aprender a fazer", como nos ensina a prática aristotélica.

1.2 Justificativa

A escolha de investigar o ensino de cônicas por meio da articulação entre a heurística de Polya e o software GeoGebra justifica-se pela sinergia potencial entre esses três pilares: o conteúdo, a metodologia e a ferramenta para enfrentar as dificuldades de aprendizagem mencionadas.

Primeiramente, as cônicas foram selecionadas por sua relevância histórica e prática, e por representarem um tópico do currículo do Ensino Médio onde a conexão entre a representação algébrica (equações) e a visualização geométrica (curvas no plano) é fundamental. A complexidade conceitual do tema exige mais do que a simples aplicação de fórmulas; demanda uma compreensão profunda de suas definições e propriedades, tornando-o um campo fértil para a aplicação de metodologias investigativas.

A Teoria da Resolução de Problemas de George Polya é adotada como metodologia central porque oferece um referencial estruturado para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Em vez de apresentar soluções prontas, a abordagem de Polya incentiva os alunos a passarem por etapas cruciais: compreender o problema, traçar um plano, executar o plano e, finalmente, refletir sobre a solução. Esse processo metacognitivo é essencial para a formação de estudantes autônomos e pensadores críticos, capazes de enfrentar problemas complexos de forma organizada e lógica. A metodologia de Polya justifica-se, portanto, como um caminho para superar a aprendizagem mecânica e promover uma verdadeira "arte de resolver problemas".

Por sua vez, o software GeoGebra justifica-se como a ferramenta tecnológica ideal para dar vida a essa abordagem. Sendo um recurso gratuito, de fácil acesso e amplamente disseminado, ele remove barreiras financeiras e tecnológicas. Mais importante, sua natureza dinâmica permite que os alunos explorem as cônicas de uma maneira que seria impossível apenas com papel e caneta. Eles podem manipular parâmetros e observar em tempo real como as alterações nas equações afetam a forma e a posição das curvas. Essa exploração visual e interativa facilita a compreensão intuitiva (Etapa 1 de Polya), permite a formulação e o teste de conjecturas (Etapa 2), oferece retorno imediato durante a execução dos passos (Etapa 3) e enriquece a fase de reflexão e generalização (Etapa 4).

Portanto, a justificativa desta dissertação reside na combinação estratégica desses elementos, onde propões a construção de sequências didáticas para o ensino de cônicas, onde aplica-se metodologia de Polya forneça o "mapa"para o pensamento, e o GeoGebra oferece o "terreno"dinâmico para a exploração, criando um ambiente de aprendizagem onde o aluno é o protagonista na construção do seu próprio conhecimento sobre as seções cônicas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Propor e desenvolver sequências didáticas, buscando apoiar o aprendizado de cônicas e suas propriedades no Ensino Médio.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Investigar as dificuldades dos alunos do Ensino Médio na aplicação das propriedades das cônicas em situações-problema.
- Desenvolver e aplicar atividades baseadas na Teoria de Polya que estimulem os alunos a utilizarem conhecimentos sobre cônicas de forma prática e contextualizada.
- Explorar o uso do GeoGebra como ferramenta didática para representar e analisar cônicas no contexto de resolução de problemas.
- Integrar a abordagem da Teoria de Resolução de Problemas de George Polya ao ensino das cônicas com apoio do GeoGebra.
- Avaliar possível impacto do uso do GeoGebra nas estratégias de resolução de problemas envolvendo cônicas.

1.4 Organização do Documento

Esta dissertação desenvolve-se ao longo de seis capítulos, organizados da seguinte forma: Inicialmente, o Capítulo 2 estabelece a fundamentação teórica sobre o ensino de cônicas, detalhando suas definições geométricas, elementos fundamentais, equações reduzidas e as particularidades dos casos degenerados. O Capítulo 3 introduz a Teoria da Resolução de Problemas como a metodologia central para a abordagem dos problemas apresentados. O Capítulo 4 oferece uma visão geral das ferramentas do GeoGebra relevantes para esta pesquisa, com foco nos pré-requisitos necessários para a aplicação prática no capítulo seguinte. O Capítulo 5 apresenta a proposta de uma sequência didática, composta por três problemas distintos, cada um explorando uma das cônicas: elipse, hipérbole e parábola. Por fim, o Capítulo 6 encerra a dissertação com a avaliação do impacto da utilização do GeoGebra, em conjunto com a Teoria da Resolução de Problemas, no processo de ensino e aprendizagem do tema das cônicas.

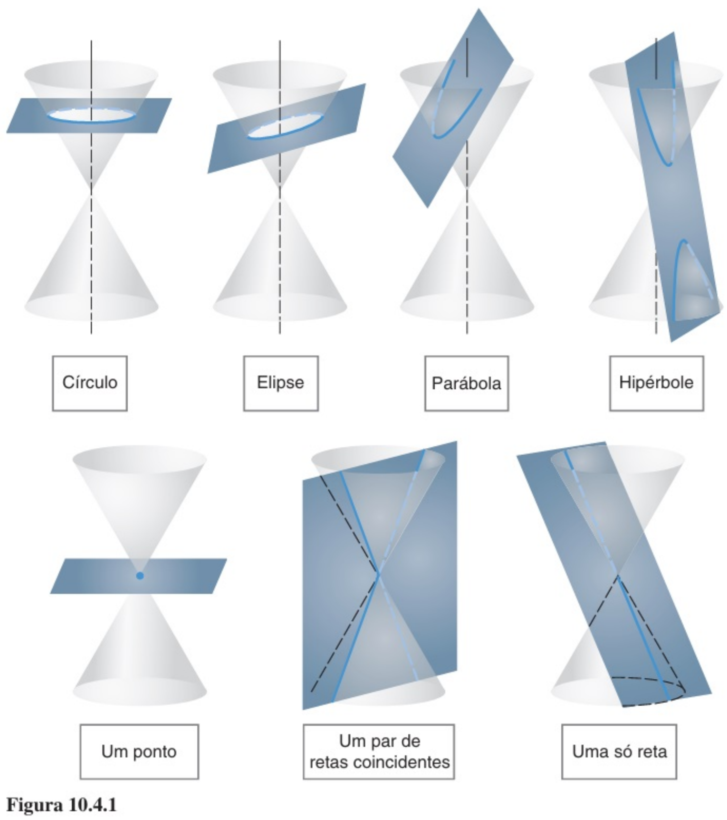
2 Cônicas

Neste capítulo serão abordadas as definições geométricas, identificação dos elementos principais, exploração de proposições e demonstrações das equações reduzidas e casos degenerados das cônicas. Foram utilizados conceitos como base das definições os livros, trazendo uma abordagem para o nível do ensino médio:

- Fundamentos de matemática elementar, Volume 7: Geometria Analítica, do autor: Gelson Iezzi.
- Geometria Analítica, SBM, Coleção do PROFMAT, dos autores: Jorge Joaquín Delgado Gómez, Katia Rosenvald Frensel, Lhaylla dos Santos Crissaff

As cônicas são curvas formadas pela interseção de planos com cones duplos que, dependendo de suas posições, formarão as seguintes curvas: elipse, hipérbole, parábola ou, em casos degenerados, ponto, círculo, reta ou retas concorrentes, conforme observado na Figura 4.

Figura 4 – Representação das cônicas pela interseção



Fonte: (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014)

2.1 Elipse

Longe de ser apenas um círculo "achatado", a elipse possui propriedades geométricas únicas que a tornam fundamental para descrever fenômenos como as órbitas planetárias em torno do Sol, conforme formulado por Johannes Kepler. Além da astronomia, sua forma é explorada no design de lentes, espelhos elípticos e em diversas estruturas arquitetônicas.

A Figura 4 ilustra a formação de uma seção cônica fechada. Ela é obtida quando um plano (azul) intercepta um cone duplo com uma inclinação oblíqua em relação ao eixo (linha preta tracejada), de modo que apenas uma das folhas do cone seja seccionada.

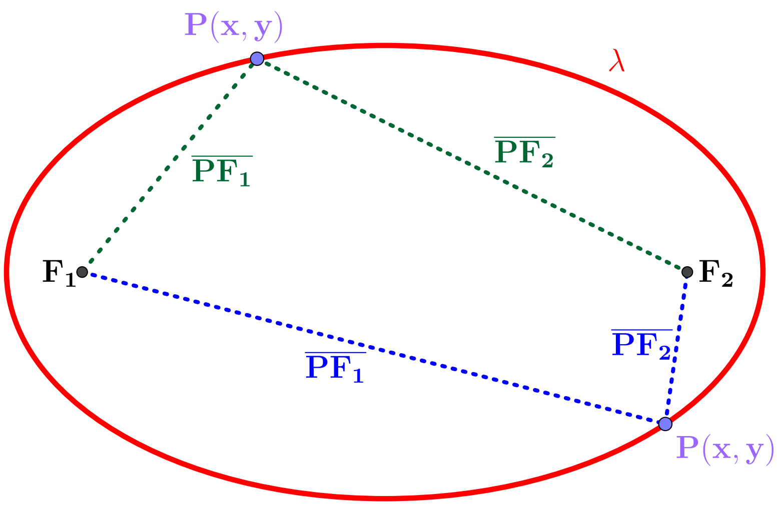
Definição Geométrica

Definição 2.1.1. *Uma elipse* (λ) *de focos F1 e F2 é o conjunto dos pontos* P *do plano cuja soma das distâncias a* F_1 *e* F_2 *é igual a uma constante* $2a > 0$*, maior do que a distância entre os focos* $2c \geq 0$*. Ou seja, sendo* $0 \leq c < a$ *e* $d(F_1, F_2) = 2c$*:*

$$\lambda = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

Essa definição estabelece uma condição necessária e suficiente para que um ponto pertença a esse lugar geométrico, independentemente da orientação ou posição da elipse no plano. Além disso, é essencial para a compreensão das propriedades da elipse e serve como base para sua representação algébrica.

Figura 5 – Elipse



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

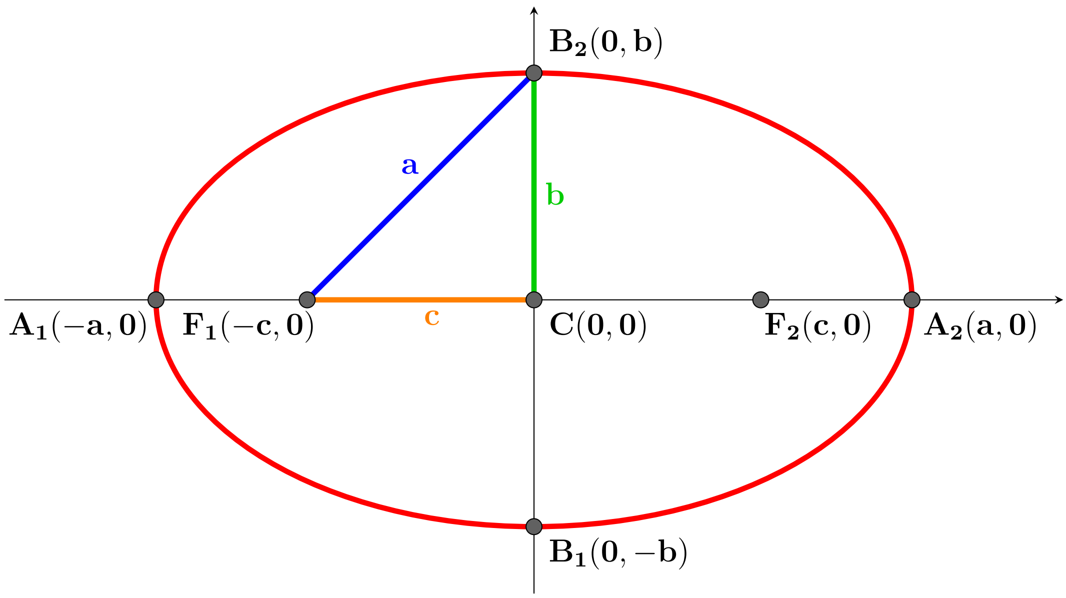
2.1.1 Eixo Focal na Direção Horizontal e Centro na Origem

No estudo inicial da elipse, é vantajoso posicionar seu centro na origem das coordenadas. Essa abordagem simplifica a compreensão e a derivação de suas propriedades, facilitando a exploração das coordenadas de elementos principais como os eixos focal, não focal e a distância focos e a identificação de pontos na curva. Centrar a elipse na origem cria uma base sólida para entender suas características geométricas e a transição para equações mais complexas.

A seguir, serão apresentados exemplos de elipse com as posições no plano cartesiano mais comuns vistas no ensino médio e nos vestibulares, analisando seus elementos principais e equações reduzidas.

Exemplo 2.1.2. *Considere uma elipse com centro na origem e o eixo focal na direção horizontal.*

Figura 6 – Principais elementos da elipse do exemplo 2.1.2



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Relação Pitagórica entre os Semieixos

É notável um triângulo retângulo (O, F_1, B_2), reto em O, cujas medidas dos semieixos são b e c.

Observando a elipse da Figura 6, é possível traçar um triângulo isósceles (F_1, B_2, F_2). Sendo assim, temos que:

$$\overline{F_1 B_2} = \overline{F_2 B_2}$$

Pela definição 2.1.1, temos que $\overline{F_1B_2} + \overline{F_2B_2} = 2a$, então:

$$\overline{F_1B_2} = \overline{F_2B_2} = a$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras nas medidas dos semieixos, temos, em consequência a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{2.1}$$

Esta definição é crucial para definir as dimensões dos alcances da elipse e indica que todas as medidas dos semieixos e as distâncias focais estão diretamente relacionadas. Também é importante destacar que a propriedade é válida para qualquer direção ou posição da elipse.

Elementos Principais

A seguir serão apresentados os elementos principais da elipse que são: centro, eixo focal, eixo não focal, distância focal, excentricidade, pontos que limitam os eixos e a equação reduzida.

- **Centro (C)**: Ponto central da cônica, é o ponto médio entre os eixos focais e não focais. No exemplo 2.1.2, está na origem $C(0, 0)$.

- **Eixo Focal** ($\overline{A_1A_2}$): Segmento definido pelos pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, maior comprimento da cônica, medindo 2a. A definição do nome é devida ao pertencimento dos focos no eixo, também definida como reta focal. No exemplo 2.1.2, está na direção horizontal e coincidente com o eixo x no intervalo que o limita, pois sua coordenada y do ponto C "$y(C) = 0$".

- **Eixo não Focal** ($\overline{B_1B_2}$): Segmento definido pelos pontos $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$, ortogonal ao eixo focal interceptando-o no centro da elipse, medindo 2b. No exemplo 2.1.2, está coincidente com o eixo y no intervalo que o limita, pois em sua coordenada x do ponto C "$x(C) = 0$".

- **Distância Focal** ($\overline{F_1F_2}$): Distância entre os pontos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. O focos pertencem ao eixo focal, também é importante destacar que a medida do eixo focal é $2a$, e a medida da distância focal é de 2c.

- **Excentricidade (e)**: Uma das principais características da elipse é seu formato mais ou menos alongado, calculado a partir da razão:

$$e = \frac{c}{a}$$

Desta forma, temos $0 \leq e \leq 1$, o que implica que quanto mais próximo de zero, mais próximo de uma circunferência e quanto mais próximo de 1, mais achatado será o seu formato. Além disso, essa razão serve para toda posição ou orientação da elipse.

- **Equação Reduzida**: Descreve sua forma e posição no plano cartesiano.

Proposição 2.1.3. *A equação reduzida da elipse, para o caso do exemplo 2.1.2 é dada por:*

$$\lambda : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A equação reduzida nos fornece informações cruciais sobre a geometria da elipse de forma concisa. Primeiramente, os denominadores a^2 e b^2 revelam os comprimentos dos semieixos da elipse.

Demonstração 2.1.4. *Equação reduzida da elipse dada no exemplo 2.1.2.*

Partindo da definição 2.1.1 e substituindo os segmentos pelos pontos $P(x, y)$, $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, temos:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Manipulando a equação, temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando a equação ao quadrado, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$(x+c)^2 - (x-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Aplicando o produto notável $k^2 - w^2 = (k+w)(k-w)$, temos:

$$(x+c+x-c)(x+c-x+c) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$2x.2c = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividindo a equação por 4, temos:

$$xc = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

Elevando a equação ao quadrado, temos:

$$a^2[(x-c)^2+y^2]=a^4-2a^2xc+(xc)^2$$
$$a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$
$$x^2a^2-2a^2xc+a^2c^2+y^2a^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$
$$x^2a^2+a^2c^2+y^2a^2=a^4+x^2c^2$$

Manipulando a equação para simplificá-lá, temos:

$$x^2a^2-x^2c^2+y^2a^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^2(a^2-c^2)$$

Pela relação pitagórica dos semieixos, 2.1, $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2$. *Assim, substituindo, temos:*

$$x^2b^2+y^2a^2=a^2b^2$$

Dividindo a equação por a^2b^2, *temos a proposição 2.1.3 demonstrada:*

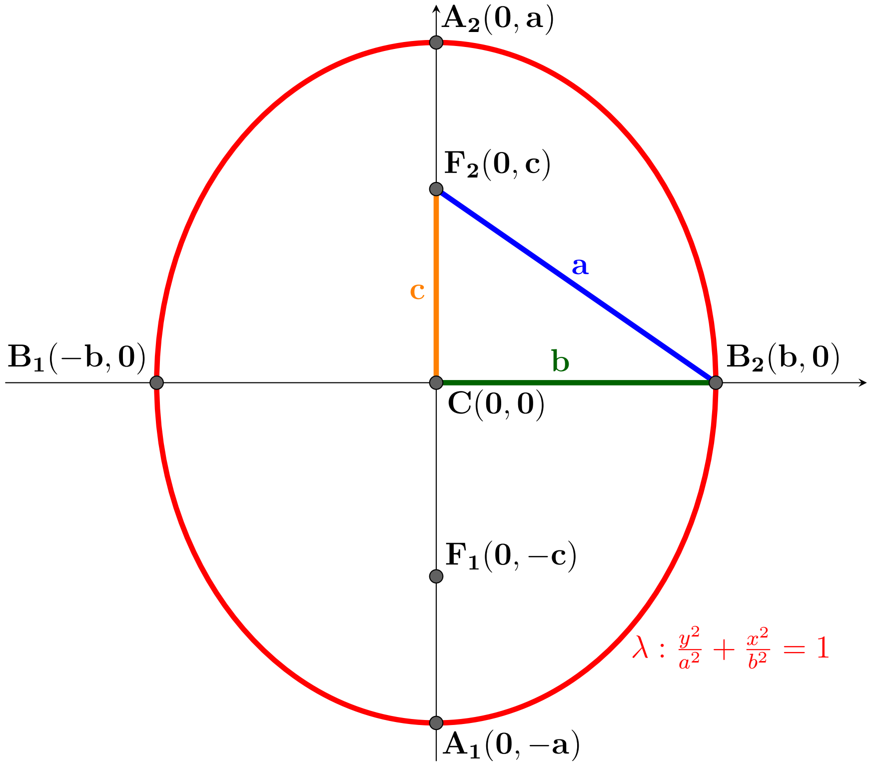
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

A derivação da equação reduzida a partir da definição geométrica de uma elipse (soma constante das distâncias aos focos) é uma prova elegante do poder da geometria analítica. Através de manipulações algébricas, transformamos uma propriedade geométrica em uma equação algébrica que descreve todos os pontos que satisfazem essa propriedade. Essa transformação permite que problemas geométricos sejam resolvidos usando ferramentas da álgebra.

2.1.2 Eixo Focal na Direção Vertical e Centro na origem

Exemplo 2.1.5. *Consideremos uma elipse de centro na origem e eixo focal na direção vertical.*

Figura 7 – Principais elementos da elipse do exemplo 2.1.5



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Após a análise da elipse com o eixo focal posicionado horizontalmente, agora o estudo será direcionado à sua posição vertical. Esta orientação resulta na inversão dos papéis dos semieixos focal e não focal em relação aos eixos coordenados, ou seja, o eixo focal alinha-se com o eixo y e o eixo não focal com o eixo x. Consequentemente, as coordenadas dos focos e vértices serão ajustadas para refletir essa rotação de 90° em torno da origem, alterando a forma padrão da equação reduzida para acomodar esta nova configuração.

- **Centro (O)**: Por ser o ponto central da cônica e referência da rotação de 90°, permanece na origem $C(0,0)$.

- **Eixo Focal** ($\overline{A_1A_2}$): Segmento definido pelos pontos $A_1(0,-a)$ e $A_2(0,a)$, maior comprimento da cônica, medindo 2a. No exemplo 2.1.5, agora está na direção vertical e coincidente com o eixo y no intervalo que o limita.

- **Eixo não Focal** ($\overline{B_1B_2}$): Segmento definido pelos pontos $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$, ortogonal ao eixo focal, interceptando-o no centro da elipse, medindo 2b. No exemplo 2.1.5, está coincidente com o eixo x no intervalo que o limita.

- **Distância Focal** ($\overline{F_1F_2}$): Distância entre os pontos $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$, medindo 2c. No exemplo 2.1.5, encontra-se no eixo y.

- **Equação Reduzida**: Descreve sua forma e posição no plano cartesiano.

Proposição 2.1.6. *A equação reduzida da elipse, para casos do exemplo 2.1.5 é dada por:*

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Observa-se uma inversão das coordenadas x e y, a seguir será demonstrada a equação com as novas coordenadas dos pontos F_1 e F_2.

Demonstração 2.1.7. *Equação reduzida da elipse dada no exemplo 2.1.5.*
Partindo da definição 2.1.1 e substituindo os segmentos pelos pontos $P(x, y)$, $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$, temos:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$
$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a$$

Manipulando a equação, temos:

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

Elevando a equação ao quadrado, temos:

$$x^2 + (y+c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + x^2 + (y-c)^2$$
$$(y+c)^2 - (y-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

Aplicando o produto notável $k^2 - w^2 = (k+w)(k-w)$, temos:

$$(y + c + y - c)(y + c - y + c) = 4a^2 - 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2}$$
$$2y.2c = 4a^2 - 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2}$$
$$4yc = 4a^2 - 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2}$$

Dividindo a equação por 4, temos:

$$yc = a^2 - a\sqrt{(y-c)^2 + x^2}$$
$$a\sqrt{(y-c)^2 + x^2} = a^2 - yc$$

Elevando a equação ao quadrado, temos:

$$a^2[(y-c)^2 + x^2] = a^4 - 2a^2yc + (yc)^2$$
$$a^2(y^2 - 2yc + c^2 + x^2) = a^4 - 2a^2yc + y^2c^2$$
$$y^2a^2 - 2a^2yc + a^2c^2 + x^2a^2 = a^4 - 2a^2yc + y^2c^2$$
$$y^2a^2 + a^2c^2 + x^2a^2 = a^4 + y^2c^2$$

Manipulando a equação para simplificá-la, temos:

$$y^2a^2 - y^2c^2 + x^2a^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$y^2(a^2 - c^2) + x^2a^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Pela relação pitagórica dos semieixos 2.1, $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$. *Assim, substituindo, temos:*

$$y^2b^2 + x^2a^2 = a^2b^2$$

Dividindo a equação por a^2b^2*, temos a proposição 2.1.6 demonstrada:*

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

A rotação de 90° de uma elipse, como demonstrado nos exemplos 2.1.8 e 2.1.11, provoca mudanças significativas na orientação dos seus eixos, alterando a equação reduzida que a descreve. No entanto, é de suma importância notar que essa rotação não afeta as dimensões dos eixos focal e não focal, nem a excentricidade da elipse. A Tabela 1 evidencia quais elementos permanecem os mesmos e quais se alteram com essa rotação.

Tabela 1 – Resumo da Elipse com centro na Origem

Elipse com centro na Origem		
Principais Elementos	**Eixo Focal na Horizontal**	**Eixo Focal na Vertical**
Centro	$C(0,0)$	$C(0,0)$
Comprimento do Eixo Focal	$\overline{A_1A_2} = 2a$	$\overline{A_1A_2} = 2a$
Comprimento do Eixo não Focal	$\overline{B_1B_2} = 2b$	$\overline{B_1B_2} = 2b$
Distância Focal	$\overline{F_1F_2} = 2c$	$\overline{F_1F_2} = 2c$
Extremidades do Eixo Focal	$A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$ e $A_2(0,a)$
Extremidades do Eixo não Focal	$B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$
Focos	$F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$
Excentricidade	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$
Equação Reduzida	$\lambda : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\lambda : \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

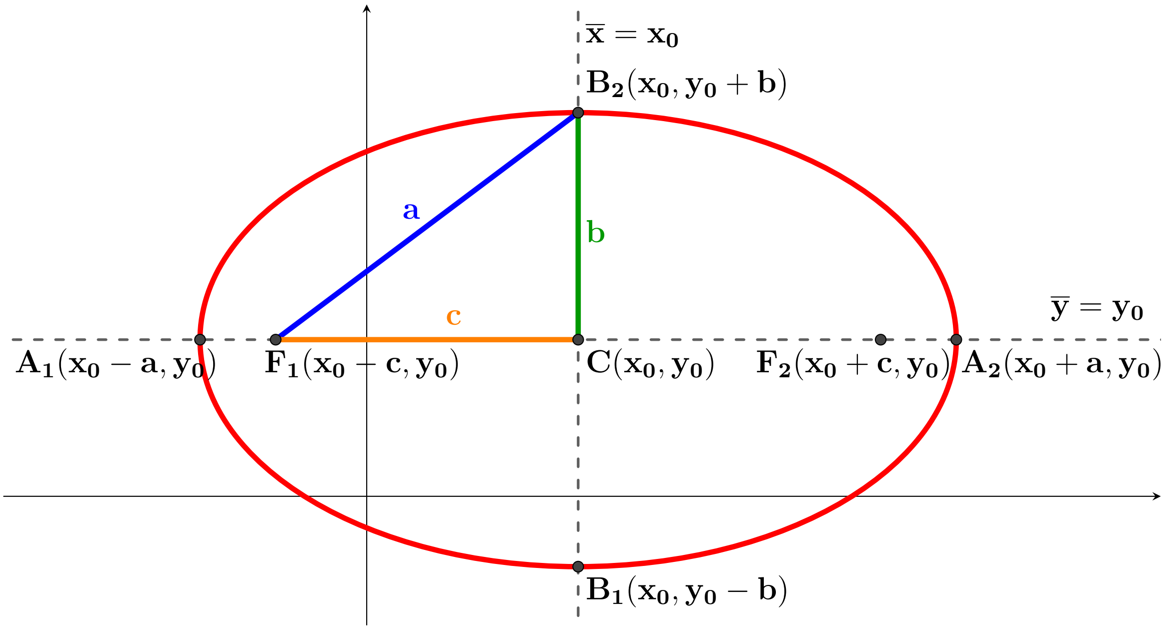
2.1.3 Elipse Transladada

Uma elipse transladada em comparação com uma elipse de centro $C(0,0)$ seria a condição do centro dela estar em qualquer posição de um plano cartesiano, dada pela nova coordenada de centro $C(x_0, y_0)$. As definições da elipse se conservam, da mesma maneira que suas medidas e sua excentricidade. Entretanto, as coordenadas se modificam para manter essas dimensões.

2.1.4 Eixo Focal na Direção Horizontal e Centro $C(x_0, y_0)$

Exemplo 2.1.8. *Consideremos uma elipse de centro em qualquer ponto do plano $C(x_0, y_0)$ e eixo focal na direção horizontal*

Figura 8 – Elementos Principais da elipse do exemplo 2.1.8



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Elementos Principais - Coordenadas

A seguir serão dispostas coordenadas dos pontos extremos dos eixos, e focos, a partir da nova posição centro $C(x_0, y_0)$ para manter as medidas. Em algumas literaturas, utilizam eixos auxiliares como $\overline{x} : y = x_0$ e $\overline{y} : x = y_0$ para facilitar a visualização dessa translação.

- **Eixo Focal** $(\overline{A_1A_2})$: Limitado pelos pontos $A_1(x_0 - a, y_0)$ e $A_2(x_0 + a, y_0)$.
- **Eixo não Focal** $(\overline{B_1B_2})$: Limitado pelos pontos $B_1(x_0, y_0 - b)$ e $B_2(x_0, y_0 + b)$.
- **Distância Focal**: Dada pela distância dos pontos $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$.

- **Equação reduzida**: Como define os comprimentos dos eixos e posição no plano, será adequada para o translado.

Proposição 2.1.9. *A equação reduzida da elipse, para o caso do exemplo 2.1.8, é dada por:*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Demonstração 2.1.10. *Equação reduzida da elipse dada no exemplo 2.1.8.*
Partindo da definição 2.1.1 e substituindo os segmentos pelos pontos $P(x,y)$, $F_1(x_0-c,y_0)$ *e* $F_2(x_0+c,y_0)$*:*

$$\begin{aligned} \overline{PF_1}+\overline{PF_2}&=2a\\ \sqrt{[x-(x_0-c)]^2+(y-y_0)^2}+\sqrt{[x-(x_0+c)]^2+(y-y_0)^2}&=2a\\ \sqrt{[(x-x_0)+c)]^2+(y-y_0)^2}+\sqrt{[(x-x_0)-c]^2+(y-y_0)^2}&=2a \end{aligned}$$

Considere $(x-x_0)=x_1$ *e* $(y-y_0)=y_1$*:*

$$\sqrt{(x_1+c)^2+(y_1)^2}+\sqrt{(x_1-c)^2+(y_1)^2}=2a$$

De maneira análoga a demonstração 2.1.4, temos:

$$\frac{(x_1)^2}{a^2}+\frac{(y_1)^2}{b^2}=1$$

Substituindo x_1 *e* x_2*, temos a proposição 2.1.9 demonstrada:*

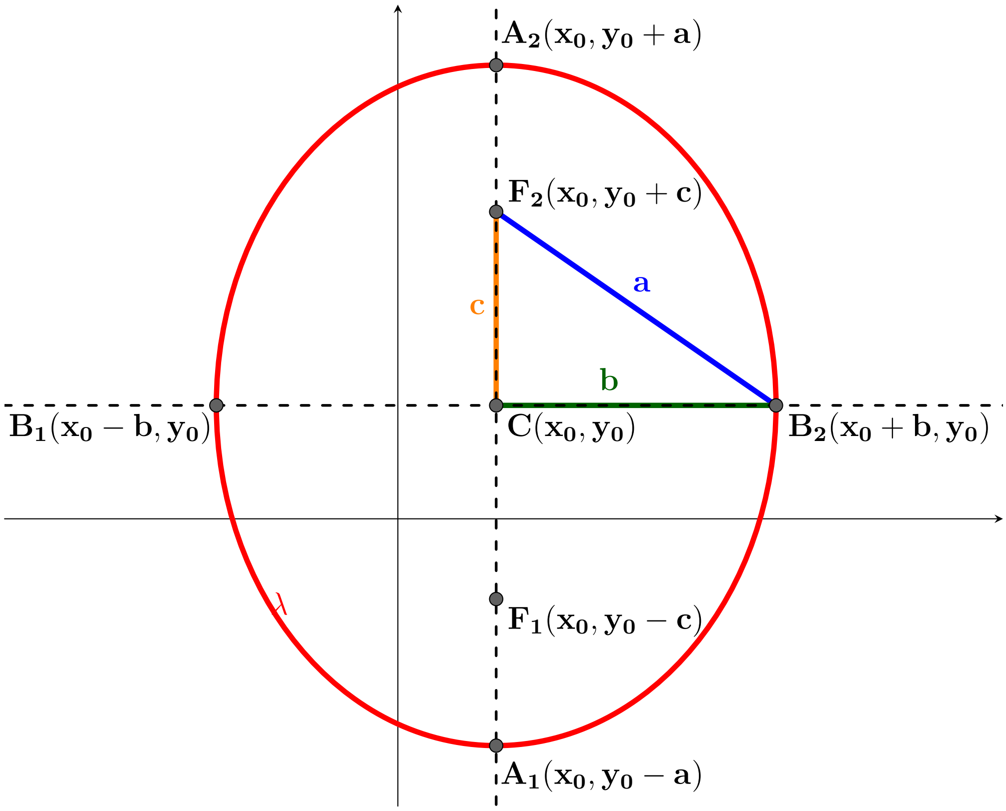
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Portanto, a demonstração da equação reduzida da elipse transladada evidencia as medidas dos eixos focal e não focal e as coordenadas do centro $C(x_0,y_0)$.

2.1.5 Eixo Focal na Direção Vertical e Centro $C(x_0,y_0)$

Exemplo 2.1.11. *Consideremos uma elipse de centro* $C(x_0,y_0)$ *e eixo focal na direção vertical.*

Figura 9 – Elipse do exemplo 2.1.11



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Elementos Principais - Coordenadas

A seguir, serão dispostas as coordenadas dos pontos extremos dos eixos, e focos para elipse do exemplo 2.1.11.

- **Eixo Focal** ($\overline{A_1A_2}$): Limitado pelos pontos $A_1(x_0, y_0 - a)$ e $A_2(x_0, y_0 + a)$, medindo $2a$.
- **Eixo não Focal** ($\overline{B_1B_2}$): Limitado pelos pontos $B_1(x_0 - b, y_0)$ e $B_2(x_0 + b, y_0)$, medindo $2b$.
- **Distância Focal**: Dada pela distância dos pontos $F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$, medindo $2c$.
- **Equação reduzida**: De maneira análoga ao exemplo anterior, a adequação da equação reduzida do caso com eixo focal na vertical na origem é dada por:

Proposição 2.1.12. *A equação reduzida da elipse, para casos do exemplo 2.1.11, é dada por:*

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Para demonstrar a proposição, será conveniente utilizar como referência a demonstração 2.1.7 da elipse de centro na origem e eixo focal na direção vertical, porém adequando os pontos F_1 e F_2.

Demonstração 2.1.13. *Equação reduzida da elipse dada no exemplo 2.1.11.*
Partindo da definição 2.1.1 e substituindo os segmentos pelos pontos $P(x, y)$*,* $F_1(x_0, y_0 - c)$ *e* $F_2(x_0, y_0 + c)$*, temos:*

$$\begin{aligned} \overline{PF_1} + \overline{PF_2} &= 2a \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + [y - (y_0 - c)]^2} + \sqrt{(x - x_0)^2 + [y - (y_0 + c)]^2} &= 2a \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + [(y - y_0) + c)]^2} + \sqrt{(x - x_0)^2 + [(y - y_0) - c)]^2} &= 2a \end{aligned}$$

Considere $(x - x_0) = x_1$ *e* $(y - y_0) = y_1$*:*

$$\sqrt{(x_1)^2 + (y_1 + c)^2} + \sqrt{(x_1)^2 + (y_1 - c)^2} = 2a$$

De maneira análoga a demonstração 2.1.7, temos:

$$\frac{(y_1)^2}{a^2} + \frac{(x_1)^2}{b^2} = 1$$

Substituindo $(x - x_0) = x_1$ *e* $(y - y_0) = y_1$*, temos:*

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Conclui-se, assim, a exposição e demonstração das definições, coordenadas e equações reduzidas pertinentes às elipses transladadas. A Tabela 2 forneceu uma comparação, revelando que, em ambas as direções (horizontal e vertical), as propriedades e as dimensões dos eixos das elipses são preservadas durante a translação. A alteração restringe-se à adequação posicional dos pontos, resultando em uma modificação na equação reduzida para refletir a nova posição do centro.

Tabela 2 – Resumo da Elipse com centro $C(x_0, y_0)$

Elipse com centro $C(x_0, y_0)$		
Principais Elementos	**Eixo Focal na Horizontal**	**Eixo Focal na Vertical**
Centro	$C(x_0, y_0)$	$C(x_0, y_0)$
Comprimento do Eixo Focal	$\overline{A_1A_2} = 2a$	$\overline{A_1A_2} = 2a$
Comprimento do Eixo não Focal	$\overline{B_1B_2} = 2b$	$\overline{B_1B_2} = 2b$
Distância Focal	$\overline{F_1F_2} = 2c$	$\overline{F_1F_2} = 2c$
Extremidades do Eixo Focal	$A_1(x_0 - a, y_0)$ e $A_2(x_0 + a, y_0)$	$A_1(x_0, y_0 - a)$ e $A_2(x_0, y_0 + a)$
Extremidades do Eixo não Focal	$B_1(x_0, y_0 - b)$ e $B_2(x_0, y_0 + b)$	$B_1(x_0 - b, y_0)$ e $B_2(x_0 + b, y_0)$
Focos	$F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$	$F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$
Excentricidade	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$
Equação Reduzida	$\lambda : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$\lambda : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

2.1.6 Elipse - Caso da Circunferência

Sua representação na Figura 4 se dá interseção do cone duplo com o plano, quando o plano (azul) é perpendicular ao eixo central (linha preta tracejada), com a restrição do plano não interceptar o vértice.

Exemplo 2.1.14. *Pensando algebricamente, considere uma elipse na qual as medidas dos eixos focal e não focal são iguais, ou seja,* $a = b \neq 0$*.*

Na definição clássica da elipse, os eixos focal e e não focal são geralmente distintos, caracterizando sua forma alongada. No entanto, um caso particular ocorre quando os comprimentos dos eixos coincidem, ou seja, quando a definição $a = b = r$. Nesse cenário, a relação pitagórica da elipse, descrita na definição 2.1:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

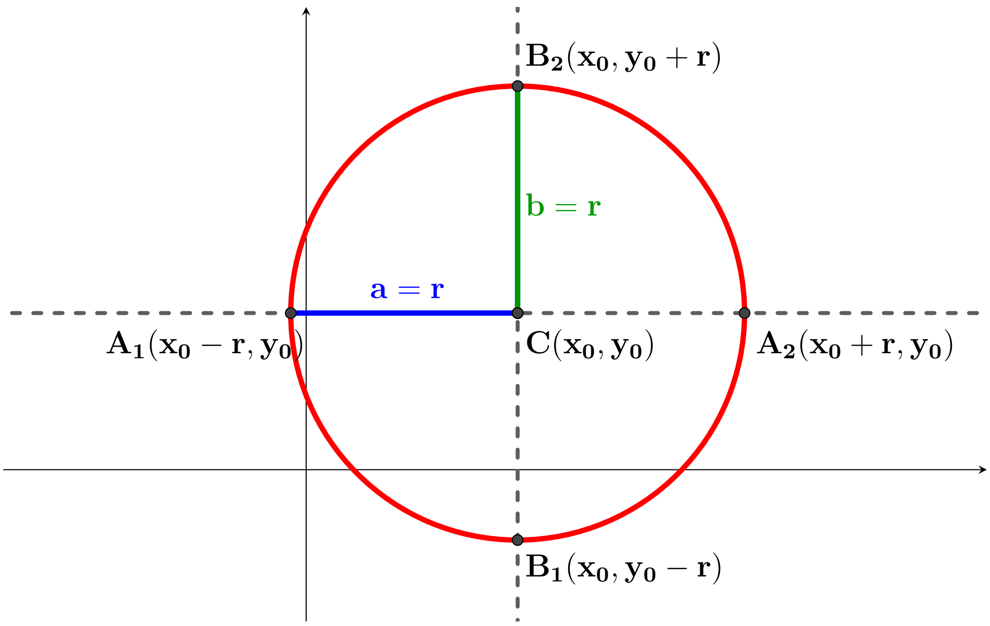
Se simplifica para:

$$r^2 = r^2 + c^2 \Rightarrow c = 0$$

Isso implica que os focos da elipse colapsam para um único ponto coincidente com o centro. Como consequência, a Figura resultante não apresenta alongamento característico da elipse, tornando-se indistinguível de uma circunferência de raio r centrada em $C(x_0, y_0)$, ilustrada na Figura 10.

Dessa forma, podemos interpretar essa condição como um caso degenerado da elipse, no qual a curva gerada corresponde geometricamente a um círculo. Essa transição entre uma elipse e uma circunferência ilustra como as definições das cônicas podem ser unificadas a partir de um mesmo modelo matemático, evidenciando a flexibilidade das equações algébricas na descrição das curvas planas.

Figura 10 – Principais elementos da elipse do exemplo 2.1.14



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Proposição 2.1.15. *A equação reduzida da elipse, para casos do exemplo 2.1.14, é dada por:*

$$\frac{(x - x_0)^2}{r^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} = 1$$

Multiplicando a equação por r^2, temos a equação reduzida da circunferência:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Sendo assim, fica demonstrado algebricamente e analiticamente que, se $a = b \neq 0$, então a elipse será uma circunferência de raio $r = a = b$.

2.2 Hipérbole

Para além de ser meramente uma curva de concavidade dupla, a hipérbole apresenta propriedades geométricas únicas que são usuais na modelagem de fenômenos como as trajetórias de certas partículas subatômicas em campos de força ou o comportamento de ondas de choque supersônicas. Em aplicações que transcendem a física, sua forma é explorada em sistemas de navegação por triangulação, no design de lentes e espelhos especializados, e em notáveis projetos arquitetônicos.

A Figura 4 ilustra a formação de uma hipérbole a partir da interseção de um cone duplo por um plano. A curva é gerada quando o plano secante (azul) é posicionado de forma paralela ao eixo central do cone (linha preta tracejada) ou com um ângulo menor que ângulo formado entre o eixo central e a geratriz, atravessando suas duas folhas.

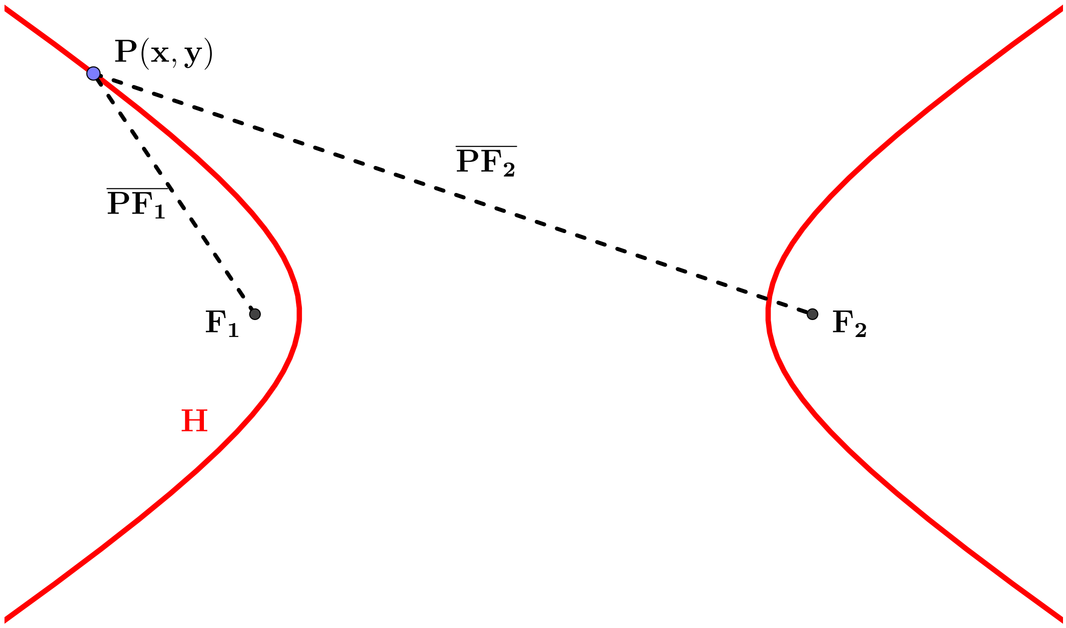
Definição Geométrica

Definição 2.2.1. *A Hipérbole H de focos F_1 e F_2 o conjunto de pontos $P(x, y)$ do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$.*

$$H = \{P \in H \mid |d(P, F1) - d(P, F2)| = 2a\},\ 0 < a < c,\ d(F1, F2) = 2c$$

Essa definição estabelece a condição de existência desse lugar geométrico. Além disso, é importante ressaltar que ela é válida para qualquer orientação ou posição da hipérbole no plano.

Figura 11 – Hipérbole definição



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

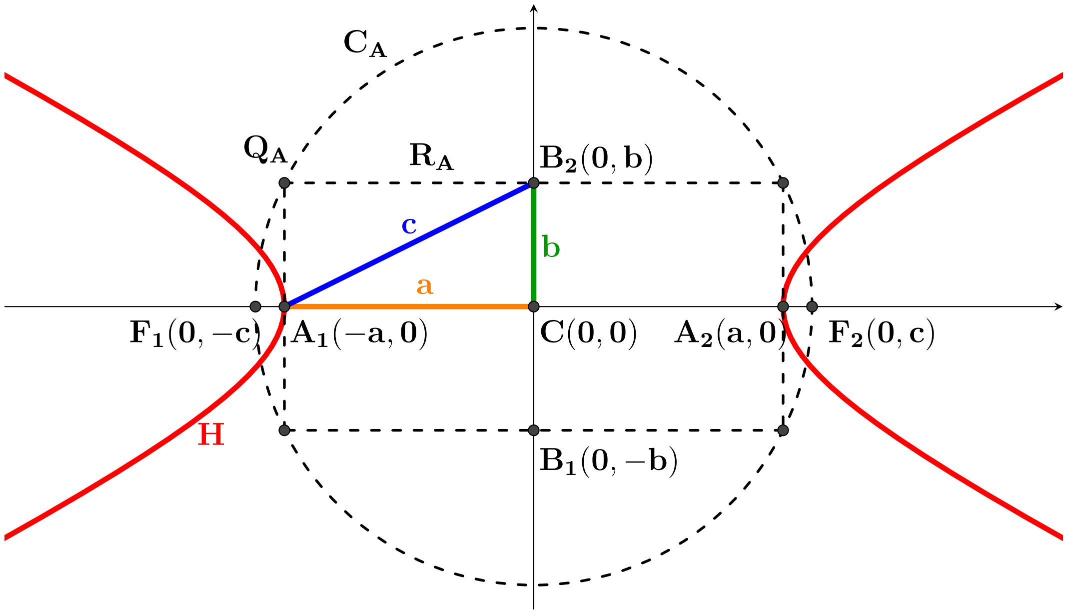
A Figura 11 exibe hipérbole H com os ramos esquerdo e direito, com os focos F_1 e F_2, um ponto (P) qualquer pertencente à hipérbole, e assim formam-se os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ com as propriedades descritas na definição 2.2.1.

2.2.1 Eixo Focal na Direção Horizontal e Centro na origem

Assim como a elipse, a hipérbole será abordada inicialmente na origem para destacar suas propriedades e elementos fundamentais; em seguida, será apresentada em sua forma transladada.

Exemplo 2.2.2. *Considere uma hipérbole com centro na origem e eixo focal na horizontal*

Figura 12 – Eixos da hipérbole do exemplo 2.2.2



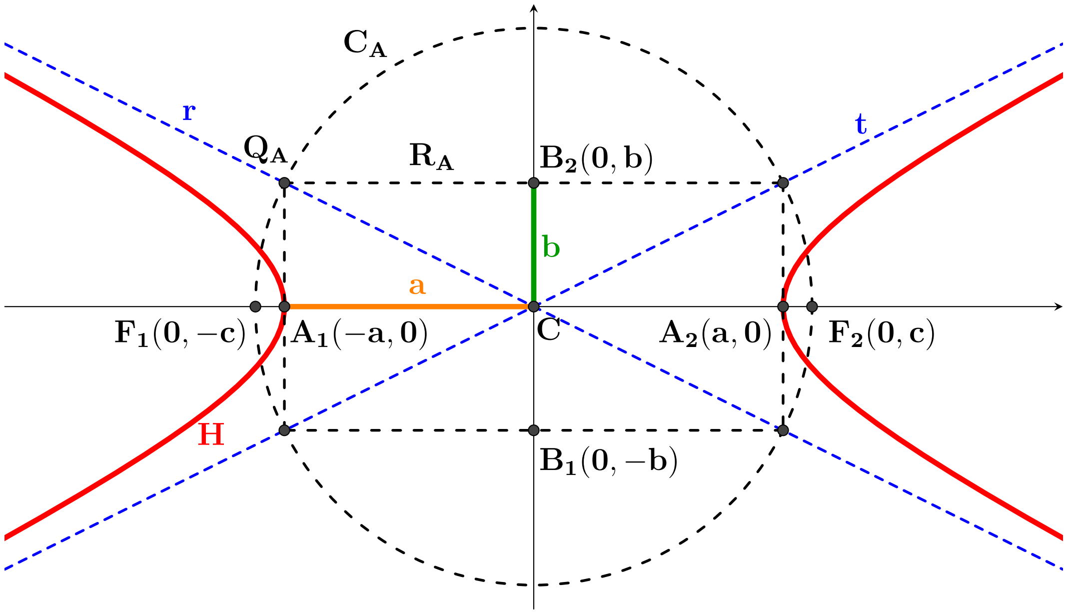
Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Elementos Principais

A seguir serão apresentados os elementos principais de uma hipérbole que são os seus eixos, bem como seus extremos, focos, assíntotas, relação entre eixos, excentricidade, elementos auxiliares e equações reduzidas.

- **Centro (C)**: O ponto médio entre os focos, representado por suas coordenadas $(0, 0)$ no exemplo 2.2.2 quando a hipérbole está centrada na origem.
- **Eixo Focal**: Segmento que liga os vértices da hipérbole, localizado ao longo do eixo principal. Sua medida é $2a$, e seus extremos são os pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$.
- **Eixo não Focal**: Segmento perpendicular ao eixo focal, com medida $2b$, e extremos nos pontos $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$.
- **Focos (F_1 e F_2)**: Pontos fixos ao longo do eixo focal, localizados em $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. A distância focal é dada por $2c$.

Figura 13 – Assintotas da Hipérbole do exemplo 2.2.2



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

- **Assíntotas**: São retas as quais, mais se aproximam da hipérbole, quanto mais distante do centro $C(0, 0)$, mas nunca tocam a cônica. Na equação reduzida de uma reta $y = mx + b$, temos:
  $b = 0$, pois a coordenada no eixo não focal coincidente com o centro nos fornece essa informação.
  Em uma das retas temos, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b-0}{a-0}$, de maneira análoga na outra, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-b}{0-a}$.
  Portanto, suas equações são dadas por $y = \pm\frac{b}{a}x$, ou seja, $r : y = -\frac{b}{a}$ e $t : y = \frac{b}{a}$.

Além desses elementos, a hipérbole pode ser representada de forma geométrica com auxílio de:

- **Círculo Auxiliar (C_A)**: Um círculo de centro $C(0, 0)$ e raio c, que tangencia os focos F_1 e F_2, ou seja seu raio mede c.

- **Retângulo Auxiliar (R_A)**: Inscrito no círculo C_A, com lados iguais às medidas dos eixos focal e não focal. Um de seus pontos de interseção é $Q_A(-a, b)$.

Relação Pitagórica entre os Semieixos

Na Figura 12, observa-se o retângulo dado pelos pontos (Q_A, B_2, C, A_1) com as medidas $\overline{CA_1} = a$ e $\overline{CB_2} = b$, e a circunferência C_A de raio medindo $\overline{CQ_A} = c$. Se (Q_A, B_2, C, A_1) é um retângulo, então as diagonais $\overline{CQ_A}$ e $\overline{A_1B_2}$ são iguais. Sendo assim, forma um triângulo retângulo com a hipotenusa medindo c, ou seja, a metade da distância focal.

Dessa maneira, vale a relação para toda orientação e posição da hipérbole.

Definição 2.2.3. *Pelas medidas apresentadas dos eixos, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- **Excentricidade**: Na hipérbole é uma medida que define a "abertura"ou o quão "achatada"ela é. Diferente da elipse, onde a excentricidade varia entre 0 e 1, na hipérbole esse valor é sempre maior que 1 $e > 1$. Quanto maior a excentricidade, mais "aberta"a hipérbole será, com seus ramos se afastando mais rapidamente dos focos. Matematicamente, a excentricidade (e) é a razão entre a distância do centro ao foco (c) e a distância do centro ao vértice (a), ou seja:

$$e = \frac{c}{a}$$

  Essa propriedade é fundamental para classificar e entender as características geométricas das hipérboles, influenciando diretamente a forma de suas curvas e vale para todas possíveis posições ou orientações da hipérbole.

- **Equação Reduzida**: Descreve a curva em uma forma algébrica exibindo os elementos principais em sua forma.

Proposição 2.2.4. *A equação reduzida da hipérbole, para casos do exemplo 2.2.2, é dada por:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A seguir será demonstrada a equação reduzida da hipérbole partindo da definição 2.2.1 e substituindo os pontos $P(x, y)$, $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Demonstração 2.2.5. *Equação reduzida da hipérbole dada no exemplo 2.2.2.*

$$\begin{aligned}
\overline{PF_1} - \overline{PF_2} &= 2a \\
\sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Elevando a equação ao quadrado, temos:

$$
\begin{aligned}
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
(x+c)^2 - (x-c)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(2x)(2c) &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
4xc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}
\end{aligned}
$$

Dividindo a equação por 4, temos:

$$
\begin{aligned}
xc &= a^2 + a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
xc - a^2 &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}
\end{aligned}
$$

Elevando a equação ao quadrado, temos:

$$
\begin{aligned}
x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 &= a^2(x-c)^2 + y^2 \\
x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 &= x^2a^2 - 2xca^2 + c^2a^2 + y^2a^2 \\
x^2c^2 + a^4 &= x^2a^2 + c^2a^2 + y^2a^2
\end{aligned}
$$

Dividindo a equação por a^2, temos:

$$\frac{x^2c^2}{a^2} + a^2 = x^2 + c^2 + y^2$$

Utilizando a definição fundamental da hipérbole 2.2.3, substituindo $c^2 = a^2 + b^2$, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2(a^2+b^2)}{a^2} + a^2 &= x^2 + a^2 + b^2 + y^2 \\
x^2 + \frac{x^2b^2}{a^2} &= x^2 + b^2 + y^2 \\
\frac{x^2b^2}{a^2} &= b^2 + y^2
\end{aligned}
$$

Dividindo a equação por b^2, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$$

Subtraindo $\frac{y^2}{b^2}$ da equação, temos a proposição 2.2.4 da equação reduzida da hipérbole:

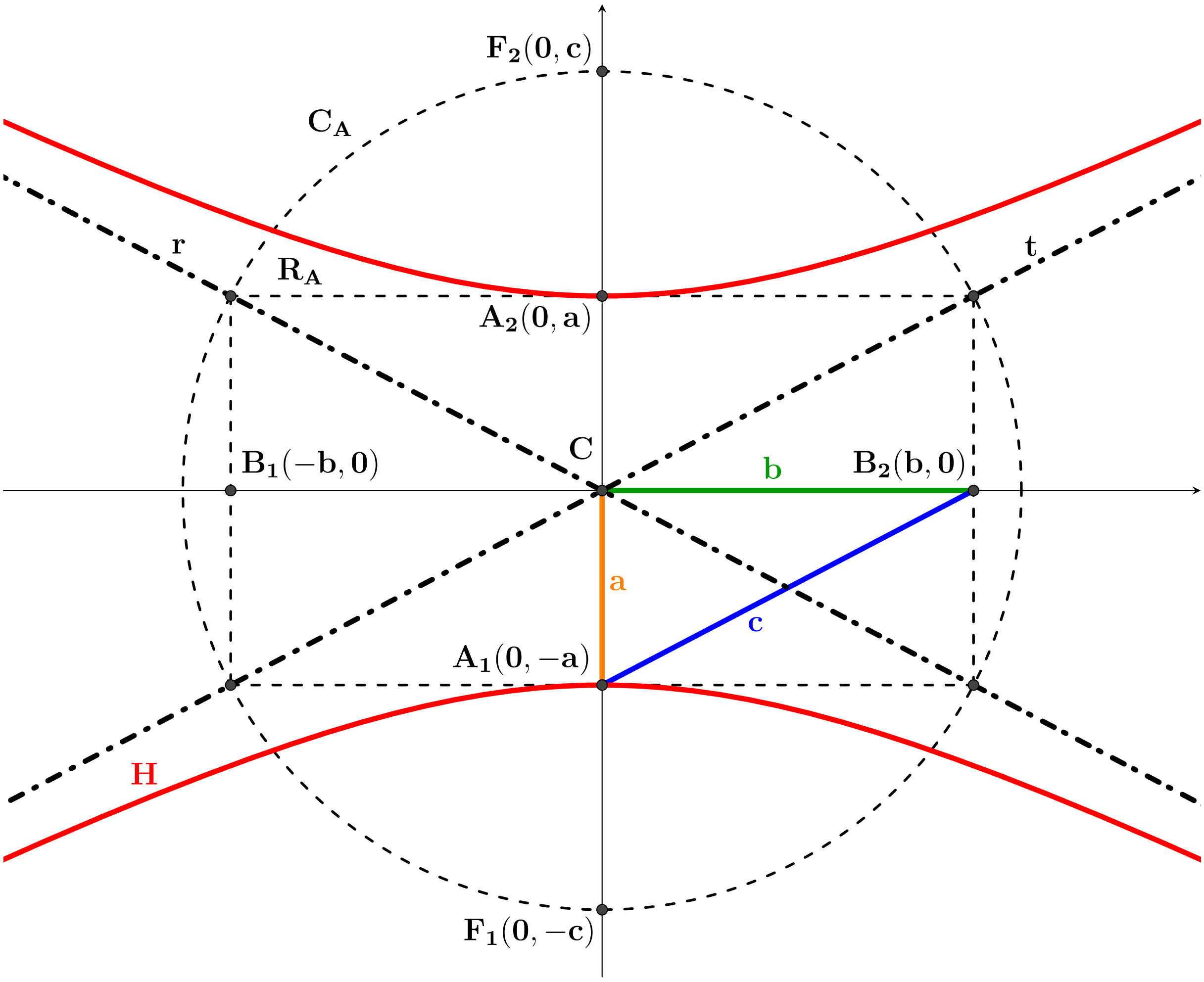
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sendo assim, demonstrada na equação reduzida da hipérbole. Nesse caso, observa-se o quadrado das medidas do eixo focal e do eixo não focal dividindo cada eixo na direção, os quais estão orientados.

2.2.2 Eixo Focal na Direção Vertical e Centro na Origem

Exemplo 2.2.6. *Considere uma hipérbole com centro na origem e eixo focal na vertical*

Figura 14 – Hipérbole com o eixo focal na vertical 2.2.6



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Elementos Principais

Serão apresentados os elementos principais da hipérbole do exemplo 2.2.6, é importante ressaltar que as propriedades das definições apresentadas na orientação horizontal do eixo focal permanecem valendo sem alterações, e que as medidas dos eixos não se alteram. Já os pontos precisam se adequar à troca de posição dos eixos, conforme é observado:

- **Centro (C)**: Sejam as coordenadas do centro $(0, 0)$ no exemplo 2.2.6, não houve alteração tendo vista que a hipérbole do exemplo 2.2.2 também está centrada na origem.
- **Eixo Focal**: Segmento medindo é $2a$ e extremos os pontos $A_1(0, -a)$ e $A_2(0, a)$.

- **Eixo não Focal**: A medida $2b$ e extremos os pontos $B_1(-b, 0)$ e $B_2(b, 0)$.
- **Focos (F_1 e F_2)**: Sejam os $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. A distância focal é dada por $2c$.
- **Assíntotas**: Sejam as equações reduzidas das assíntotas dadas na forma $y = mx + b$, temos: $b = 0$, pois a reta intercepta no eixo focal na coordenada 0
Em uma das retas temos, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a-0}{b-0}$, de maneira análoga na outra, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-a}{0-b}$.
Portanto, suas equações são dadas por $y = \pm\frac{a}{b}x$, ou seja, $r : y = -\frac{a}{b}$ e $t : y = \frac{a}{b}$.

As coordenadas dos pontos dos principais elementos da hipérbole cujo eixo focal está disposto na direção vertical são análogas às da hipérbole com eixo focal na direção horizontal, dessa maneira valem as definições 2.2.1 e a 2.2.3. Conforme é observado na Figura 14, nos pontos foram realizadas uma inversão das coordenadas x e y dos elementos, de modo semelhante ocorreu na elipse. Assim, as proposições terão essa inversão das coordenadas x e y e será demonstrado a seguir.

- **Equação Reduzida**: Exibindo a nova orientação a a troca da posições dos eixos reflete na equação reduzida.

Proposição 2.2.7. *A equação reduzida da hipérbole, para casos do exemplo 2.2.6, é dada por:*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Como a definição 2.2.1 é válida para toda posição e orientação da hipérbole será utilizada pra demonstrar a equação reduzida, substituindo as coordenadas dos pontos: $P(x, y)$, $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$.

Demonstração 2.2.8. *Seja demonstração da equação reduzida da hipérbole dada no exemplo 2.2.6.*

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + [y-(-c)]^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$
$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} - \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a$$
$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a + \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

Elevando a equação ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}
x^2 + (y+c)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + x^2 + (y-c)^2 \\
(y+c)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} \\
(y+c)^2 - (y-c)^2 &= 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} \\
(2y)(2c) &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} \\
4yc &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}
\end{aligned}$$

Dividindo a equação por 4, temos:

$$\begin{aligned}
yc &= a^2 + a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} \\
yc - a^2 &= a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}
\end{aligned}$$

Elevando a equação ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}
y^2c^2 - 2yca^2 + a^4 &= a^2[x^2 + (y-c)^2] \\
y^2c^2 - 2yca^2 + a^4 &= x^2a^2 + y^2a^2 - 2yca^2 + c^2a^2 \\
y^2c^2 + a^4 &= x^2a^2 + y^2a^2 + c^2a^2
\end{aligned}$$

Dividindo a equação por a^2, temos:

$$\frac{y^2c^2}{a^2} + a^2 = x^2 + y^2 + c^2$$

Utilizando a definição fundamental da hipérbole 2.2.3, substituindo $c^2 = a^2 + b^2$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{y^2(a^2+b^2)}{a^2} + a^2 &= x^2 + y^2 + a^2 + b^2 \\
y^2 + \frac{y^2b^2}{a^2} &= x^2 + y^2 + b^2 \\
\frac{y^2b^2}{a^2} &= x^2 + b^2
\end{aligned}$$

Dividindo a equação por b^2, temos:

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{x^2}{b^2} + 1$$

Subtraindo $\frac{x^2}{b^2}$ da equação, temos a proposição 2.2.7 da equação reduzida da hipérbole:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Portanto, foram provados que os exemplos da hipérbole são análogos aos exemplos da elipse, conforme era esperado. Neste caso, quando se muda a direção do eixo focal, a mudança das coordenadas x e y reflete nas coordenadas dos pontos e na equação reduzida. A Tabela 3 exibe e resume o observado.

Tabela 3 – Resumo Hipérbole com centro na origem

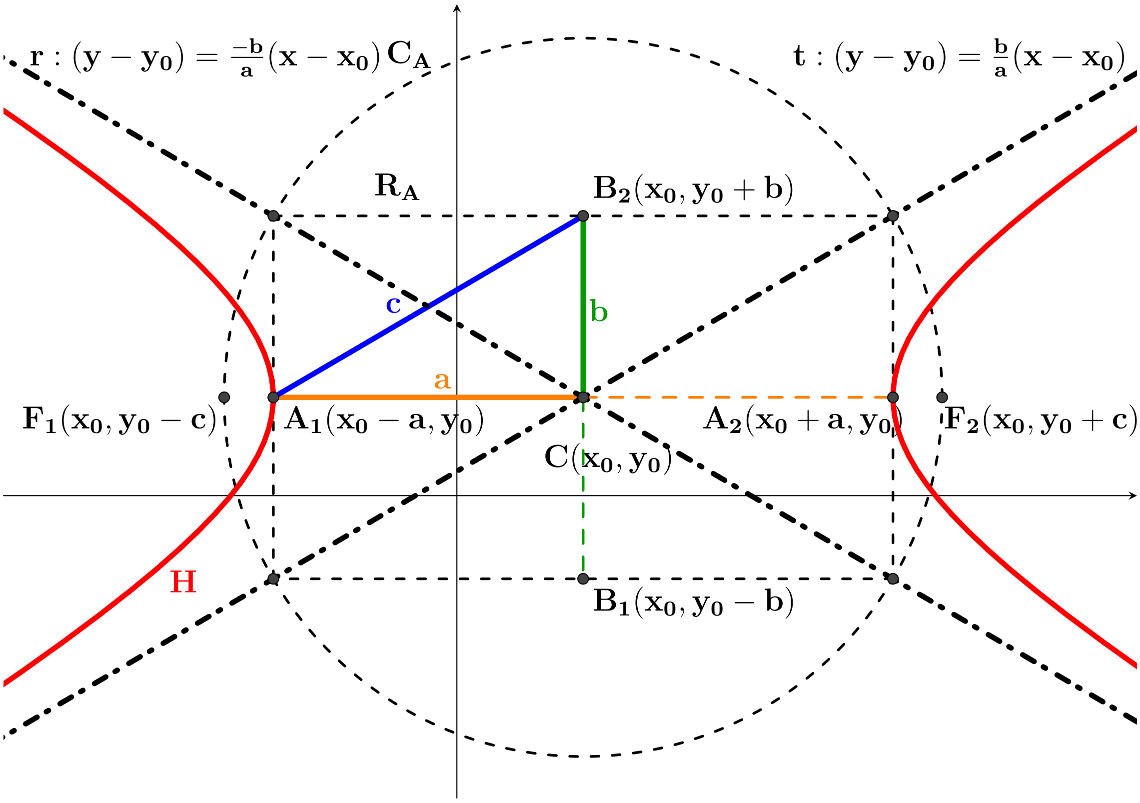
Hipérbole com Centro $C(0,0)$		
Principais elementos	**Eixo Focal na Horizontal**	**Eixo Focal na Vertical**
Centro	$C(0,0)$	$C(0,0)$
Comprimento do Eixo Focal	$\overline{A_1A_2} = 2a$	$\overline{A_1A_2} = 2a$
Comprimento do Eixo não Focal	$\overline{B_1B_2} = 2b$	$\overline{B_1B_2} = 2b$
Distância Focal	$\overline{F_1F_2} = 2c$	$\overline{F_1F_2} = 2c$
Extremidades do Eixo Focal	$A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$ e $A_2(0,a)$
Extremidades do Eixo não Focal	$B_1(0,-b)$ e $B_2(0,-b)$	$B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$
Focos	$F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$
Excentricidade	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$
Assíntotas	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y = \pm\frac{a}{b}x$
Equação Reduzida	$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$H : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

2.2.3 Eixo Focal na Direção Horizontal e Centro $C(x_0, y_0)$

Exemplo 2.2.9. *Considere uma hipérbole com centro em qualquer posição $C(x_0, y_0)$ e eixo focal na horizontal.*

Figura 15 – Hipérbole com o eixo focal na horizontal com um centro $C(x_0, y_0)$ do exemplo 2.2.9



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

A translação de uma hipérbole altera a posição de todos os seus pontos, o que, por sua vez, modifica suas coordenadas e a equação reduzida. No entanto, as propriedades da hipérbole, como as medidas dos eixos e a distância focal, são preservadas. Há uma adaptação das coordenadas e equação reduzida do exemplo 2.2.2, da hipérbole com eixo na direção horizontal e centro na origem, para uma hipérbole com centro $C(x_0, y_0)$.

Elementos Principais - Novas Coordenadas

A seguir serão dispostas as informações dos pontos extremos dos eixos, focos, assíntotas e equação reduzida a partir da nova posição do centro $C(x_0, y_0)$, também exibidos na Figura 15.

- **Eixo Focal**: Limitado pelos pontos $A_1(x_0 - a, y_0)$ e $A_2(x_0 + a, y_0)$.
- **Eixo não Focal**: Limitado pelos pontos $B_1(x_0, y_0 - b)$ e $B_2(x_0, y_0 + b)$.
- **Distância Focal**: Limitado pelos pontos $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$.
- **Assintotas**: Também devem ser adaptadas, não sofrem alteração em seu coeficiente angular, entretanto o termo independente muda de posição, pelo fato de interceptar

o eixo das ordenadas em outra posição diferente de 0. Suas equações são dadas por: $(y - y_0) = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$, sendo $r : (y - y_0) = -\frac{b}{a}(x - x_0)$ e $t : (y - y_0) = \frac{b}{a}(x - x_0)$.

- **Equação Reduzida**: A adequação da equação reduzida com o eixo Focal na horizontal com o centro $C(x_0, y_0)$

Proposição 2.2.10. *A equação reduzida da hipérbole, para casos do exemplo 2.2.9:*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

A adequação da equação reduzida dada pelas novas coordenadas dos pontos dos focos F_1 e F_2.

Demonstração 2.2.11. *Partindo definição 2.2.3 e substituindo os segmentos pelos pontos $P(x, y)$, $F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$, temos:*

$$\begin{aligned} \overline{PF_1} - \overline{PF_2} &= 2a \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + [y - (y_0 - c)]^2} - \sqrt{(x - x_0)^2 + [y - (y_0 + c)]^2} &= 2a \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + [(y - y_0) + c]^2} - \sqrt{(x - x_0)^2 + [(y - y_0) - c]^2} &= 2a \end{aligned}$$

Considere $(x - x_0) = x_1$ e $(y - y_0)^2 = x_1$

$$\sqrt{(x_1)^2 + (y_1 + c)^2} - \sqrt{(x_1)^2 + (y_1 - c)^2} = 2a$$

De maneira análoga a demonstração 2.2.5, temos:

$$\frac{(x_1)^2}{a^2} - \frac{(y_1)^2}{b^2} = 1$$

Substituindo x_1 e x_2, temos a proposição 2.2.10:

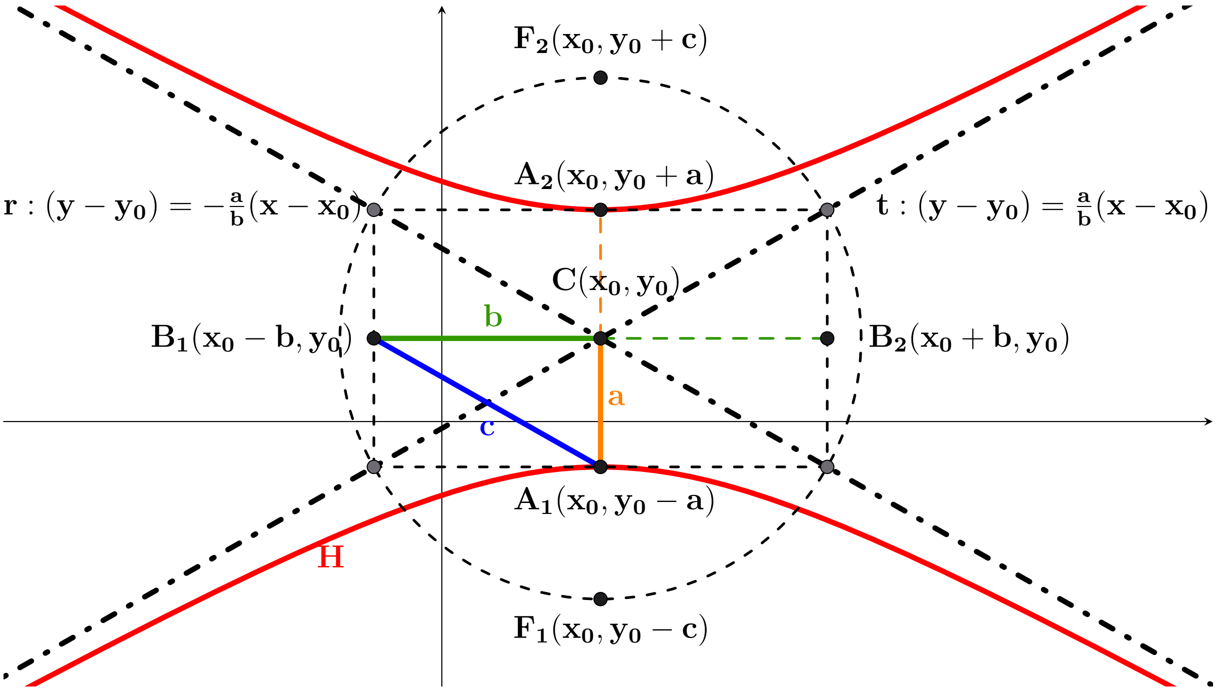
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Portanto, a proposição da equação reduzida da elipse transladada com eixo focal na direção horizontal e centro $C(x_0, y_0)$ foi demonstrada.

2.2.4 Eixo Focal na Direção Vertical e Centro $C(x_0, y_0)$

Exemplo 2.2.12. *Considere uma hipérbole com centro $C(x_0, y_0)$ fora da origem e eixo focal na vertical.*

Figura 16 – Hipérbole com o eixo focal na vertical com o centro $C(x_0, y_0)$ do exemplo 2.2.12



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Conforme visto, houveram adaptações com a hipérbole eixo vertical na vertical e centro na origem do exemplo 2.2.6, de maneira análoga da hipérbole com o centro fora da origem e eixo fora da origem 2.2.9, assim temos:

Elementos Principais - Novas Coordenadas

A seguir serão dispostas as informações dos pontos extremos dos eixos, focos, assíntotas e equação reduzida a partir da nova posição do centro $C(x_0, y_0)$, também exibidos na Figura 16.

- **Eixo Focal**: Limitado pelos pontos $A_1(x_0, y_0 - a)$ e $A_2(x_0, y_0 + a)$.
- **Eixo não Focal**: Limitado pelos pontos $B_1(x_0 - b, y_0)$ e $B_2(x_0 + b, y_0)$.
- **Distância Focal**: Limitado pelos pontos $F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$.
- **Assintotas**: Assim como no exemplo 2.2.9, não sofrem alteração em seu coeficiente angular, entretanto o termo independente muda de posição. Suas equações são dadas por: $(y - y_0) = \pm\frac{a}{b}(x - x_0)$, sendo $r : (y - y_0) = -\frac{a}{b}(x - x_0)$ e $t : (y - y_0) = \frac{a}{b}(x - x_0)$.
- **Equação Reduzida**: A adequação da equação reduzida com o eixo focal na horizontal com o centro $C(x_0, y_0)$

Proposição 2.2.13. *A equação reduzida da hipérbole, para casos do exemplo 2.2.12:*

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

Demonstração 2.2.14. *Partindo definição 2.2.3 e substituindo os segmentos pelos pontos* $P(x,y)$, $F_1(x_0, y_0-c)$ *e* $F_2(x_0, y_0+c)$, *temos:*

$$\begin{aligned} \overline{PF_1} - \overline{PF_2} &= 2a \\ \sqrt{[x-(x_0-c)]^2+(y-y_0)^2} - \sqrt{[x-(x_0+c)]^2+(y-y_0)^2} &= 2a \\ \sqrt{[(x-x_0)+c]^2+(y-y_0)^2} - \sqrt{[(x-x_0)-c]^2+(y-y_0)^2} &= 2a \end{aligned}$$

Considere $(x-x_0) = x_1$ *e* $(y-y_0)^2 = x_1$

$$\sqrt{(x_1+c)^2+(y_1)^2} - \sqrt{(x_1-c)^2+(y_1)^2} = 2a$$

De maneira análoga a demonstração 2.2.8, temos:

$$\frac{(y_1)^2}{a^2} - \frac{(x_1)^2}{b^2} = 1$$

Substituindo x_1 *e* x_2, *temos a proposição 2.2.10:*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Portanto, a proposição da equação reduzida da elipse transladada com eixo focal na direção horizontal e centro $C(x_0, y_0)$ foi demonstrada.

A Tabela 4 exibe o resumo das características de uma hipérbole de centro $C(x_0, y_0)$, dando destaque as diferentes orientações em são mais apresentadas.

Tabela 4 – Resumo Hipérbole com centro em ponto qualquer

Hipérbole com Centro $C(x_0, y_0)$		
Principais elementos	**Eixo Focal na Horizontal**	**Eixo Focal na Vertical**
Centro	$C(x_0, y_0)$	$C(x_0, y_0)$
Comprimento do Eixo Focal	$\overline{A_1A_2} = 2a$	$\overline{A_1A_2} = 2a$
Comprimento do Eixo Não focal	$\overline{B_1B_2} = 2b$	$\overline{B_1B_2} = 2b$
Distância Focal	$\overline{F_1F_2} = 2c$	$\overline{F_1F_2} = 2c$
Extremidades do Eixo Focal	$A_1(x_0 - a, y_0)$ e $A_2(x_0 + a, y_0)$	$A_1(x_0, y_0 - a)$ e $A_2(x_0, y_0 + a)$
Extremidades do Eixo não Focal	$B_1(x_0, y_0 - b)$ e $B_2(x_0, y_0 - b)$	$B_1(x_0 - b, y_0)$ e $B_2(x_0 + b, y_0)$
Focos	$F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$	$F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$
Excentricidade	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$
Assíntotas	$(y - y_0) = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$	$(y - y_0) = \pm\frac{a}{b}(x - x_0)$
Equação Reduzida	$H : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$H : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

2.3 Parábola

As parábolas, frequentemente visíveis em elementos do dia a dia como o arco de uma ponte ou o trajeto de uma bola arremessada, vão muito além de meras curvas. Elas representam uma das formas cônicas com propriedades geométricas que as tornam indispensáveis em campos tão diversos quanto a engenharia, a física e a comunicação. Entender as parábolas é fundamental para compreender a matemática por trás de fenômenos naturais e inovações tecnológicas, desde antenas parabólicas que captam sinais até faróis automotivos otimizados. Geralmente, no ensino médio, são abordadas com as posições das concavidades voltadas para cima, baixo, direita e esquerda.

A parábola, representada na Figura 4, é gerada pela interseção de um plano com um cone duplo sob uma condição muito específica. Para que a curva seja uma parábola, o plano (azul) deve ter a mesma inclinação da geratriz do cone em relação ao eixo (linha preta tracejada), ou seja, ser paralelo a ela.

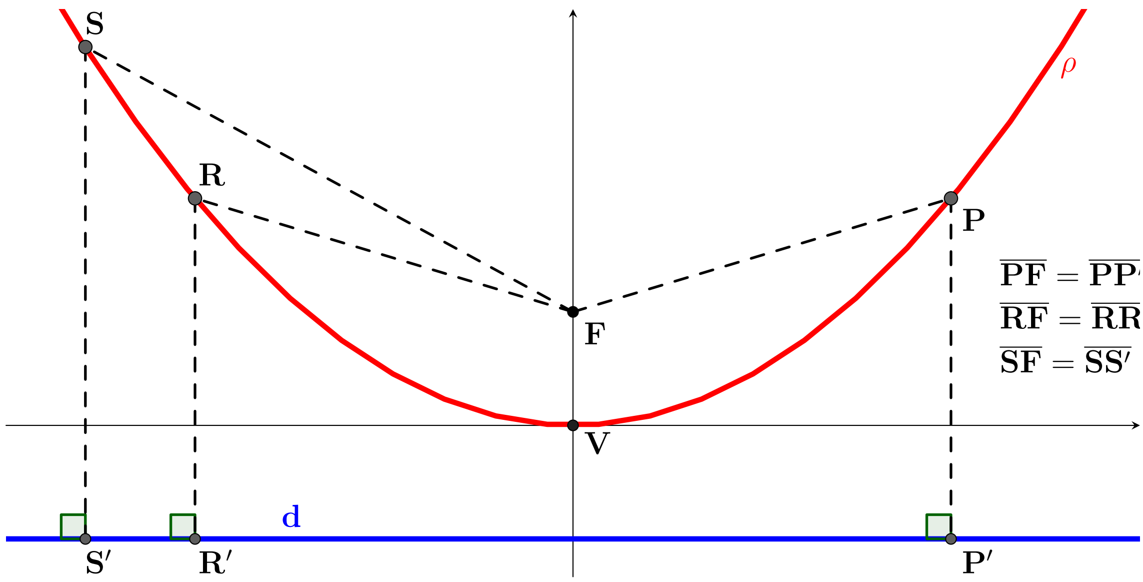
Definição Geométrica

A seguir será descrita a definição geométrica, a qual estabelece uma relação constante entre um ponto, uma linha e a própria curva. É essa relação que confere à parábola suas propriedades únicas, essenciais para suas diversas aplicações.

Definição 2.3.1. *Dado um ponto F e uma reta d pertencentes a um plano α, de forma que $F \notin d$. A parábola ρ o conjunto de pontos equidistantes entre o foco F e da reta diretriz d*

$$\rho = \{P \in \alpha \mid d(P, F) = d(P, d)\}$$

Figura 17 – Definição parábola



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

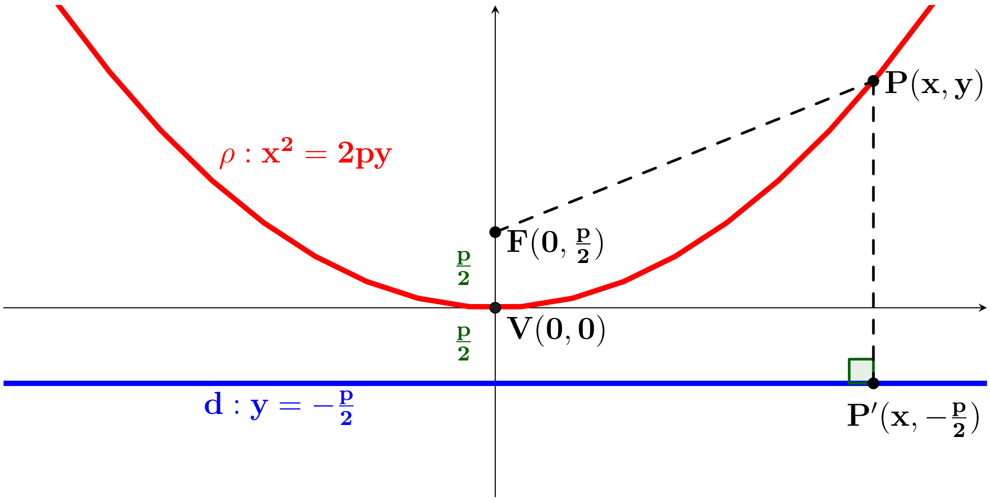
A Figura 17 exibe a definição 2.3.1 das parábolas, evidenciando a característica fundamental da parábola: o conjunto dos pontos equidistantes entre o foco F e a reta diretriz d. Os segmentos traçados entre os pontos P, R e S até o foco F, bem como suas respectivas projeções ortogonais P', R' e S' sobre a diretriz, resultam nas igualdades, $\overline{PF} = \overline{PP'}$, $\overline{RF} = \overline{RR'}$ e $\overline{SF} = \overline{SS'}$.

2.3.1 Concavidade voltada para Cima e Vértice na Origem

Uma concavidade para uma parábola descreve a direção em que ela se abre. Se a parábola se abre para cima, como na Figura 18, dizemos que ela tem concavidade para cima. Neste caso, está no eixo y no intervalo $[V, \infty)$, no eixo x está no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Exemplo 2.3.2. *Considere uma parábola com o vértice na origem e concavidade voltada para cima*

Figura 18 – Parábola do Exemplo 2.3.2



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Elementos Principais da Parábola

A seguir serão definidos e apresentados os principais elementos que são vértice, foco, reta diretriz e pontos auxiliares para definir propriedades da parábola.

- **Vértice** $V(0, 0)$: É um ponto que pertence à parábola ρ, ao eixo de simetria da parábola, e representa o ponto de mínimo (neste caso, devido à concavidade voltada para cima). Para qualquer posição da parábola, o vértice é o ponto médio entre o foco F e a reta diretriz d.
- **O parâmetro** $\frac{p}{2}$: Representa a distância do vértice ao foco (ou do vértice à diretriz).
- **Foco** $F(0, \frac{p}{2})$: É um ponto que não pertence à parábola ρ, mas está localizado a uma distância $\frac{p}{2}$ do vértice, no eixo de simetria da parábola. A definição geométrica da parábola afirma que cada ponto da curva está equidistante do foco e da reta diretriz.
- **Diretriz** d: $y = -\frac{p}{2}$: É uma reta que também está à distância $\frac{p}{2}$ do vértice, mas no sentido oposto ao foco e a concavidade da parábola. Nenhum ponto da parábola pertence à diretriz.
- **Eixo de simetria**: No exemplo, é o eixo y (eixo das ordenadas), pois todos os elementos principais estão alinhados verticalmente. A parábola é simétrica em relação a esse eixo.
- **Ponto** $P(x, y)$: É um ponto qualquer que pertence à parábola, denominado na coordenada (x, y).

- **Ponto** $P'(x, -\frac{p}{2})$: É um ponto mais próximo do ponto P que pertence à reta diretriz d, pois menor distância entre em um ponto e uma reta é um segmento perpendicular a reta partindo ponto ao qual deseja-se saber a distância, conforme são os segmentos $\overline{SS'}$, $\overline{RR'}$ e $\overline{PP'}$.

- **Equação Reduzida**: Define a geometria, posição e orientação da parábola. No exemplo 2.3.2 é dada por:

Proposição 2.3.3. *A equação reduzida da parábola do exemplo 2.3.2, considerando os elementos da Figura 18 é dada por:*

$$\rho\colon x^2 = 2py$$

A seguir será demonstrada a equação reduzida pela definição 2.3.1 e pelos pontos P (ponto pertencente a parábola), P'(ponto que pertence à diretriz) e F (foco).

Demonstração 2.3.4. *Pela definição da parábola 2.3.1 e substituindo as coordenadas dos pontos $P(x, y)$, $P'(x, -\frac{p}{2})$ e $F(0, \frac{p}{2})$, temos:*

$$\begin{aligned}
\overline{PF} &= \overline{PP'} \\
\sqrt{(x-0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y + \frac{p}{2})^2} \\
\sqrt{x^2 + y^2 - yp + \frac{p^2}{4}} &= \sqrt{y^2 + yp + \frac{p^2}{4}} \\
x^2 + y^2 - yp + \frac{p^2}{4} &= y^2 + yp + \frac{p^2}{4} \\
x^2 - yp &= yp \\
x^2 &= 2yp
\end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas, a partir da definição das propriedades da parábola, observa-se que é possível demonstrar a equação reduzida da parábola. Analisando a equação reduzida algebricamente é notável:

- A distância entre a reta diretriz e o foco, representado pela incógnita p

- x^2 indica que há dois valores de x para um mesmo valor y e a simetria da parábola se encontra no eixo y.

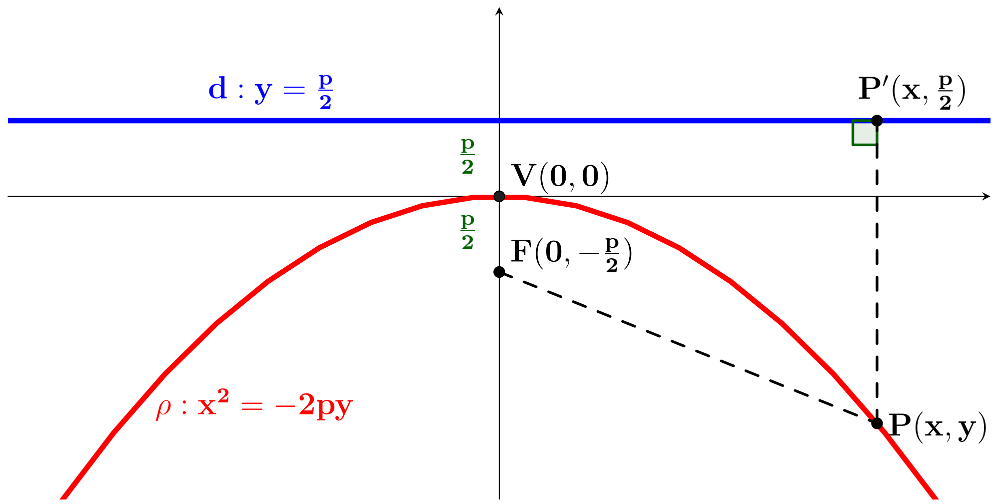
- $2py$ indica que a parábola está voltada para posição positiva na direção do eixo y, ou seja, para cima.

2.3.2 Concavidade voltada para Baixo e Vértice na Origem

Neste exemplo, visualmente, a parábola possui uma semelhança a um lançamento oblíquo estudado na física.

Exemplo 2.3.5. *Considere uma parábola com o vértice na origem e concavidade voltada para baixo.*

Figura 19 – Parábola do Exemplo 2.3.5



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Em relação ao exemplo anterior 2.3.2, é notável uma rotação de rotação de 180° com referência ao vértice da parábola, que é coincidente com a origem em ambos exemplos, como foi apresentado no item anterior.

Elementos Principais da Parábola

Diferente das outras cônicas que tiveram rotação de 90°, agora há uma rotação de 180°, mas as propriedades se conservam e há uma adequação das coordenadas dos pontos e na equação da reta diretriz, as quais também alteram a equação reduzida. Sejam as novas coordenadas:

- **Foco** $F(0, -\frac{p}{2})$: Com a rotação da parábola, houve uma mudança de posição do foco, assim invertendo de sinal na coordenada do eixo y.

- **Reta diretriz** $d : y = \frac{p}{2}$: A reta também acompanha a rotação da parábola, assim a reta diretriz ficou acima da parábola, e como está na origem assim como no exemplo anterior, também ficou com sinal invertido.

- **Ponto** $P'(x, \frac{p}{2})$: Como o Ponto P' pertence a reta diretriz e possui a mesma posição de P no eixo das abscissas, mudou sua coordenada para $P'(x, \frac{p}{2})$.

- **Equação Reduzida**: Adequando a equação reduzida para uma condição de uma parábola com a concavidade voltada para baixo, temos:

Proposição 2.3.6. *A equação reduzida da parábola do exemplo 2.3.5, considerando os elementos da Figura 18, é dada por:*

$$\rho\colon x^2 = -2py$$

A seguir será demonstrada a equação reduzida pela definição 2.3.1 e pelos pontos P, P' e F com suas novas coordenadas.

Demonstração 2.3.7. *Pela definição da parábola 2.3.1 e substituindo as novas coordenadas dos pontos $P(x, y)$, $P'(x, \frac{p}{2})$ e $F(0, -\frac{p}{2})$, temos:*

$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,d) \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y+\frac{p}{2})^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y-\frac{p}{2})^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + yp + \frac{p^2}{4}} &= \sqrt{y^2 - yp + \frac{p^2}{4}} \\ x^2 + y^2 + yp + \frac{p^2}{4} &= y^2 - yp + \frac{p^2}{4} \\ x^2 + yp &= -yp \\ x^2 &= -2yp \end{aligned}$$

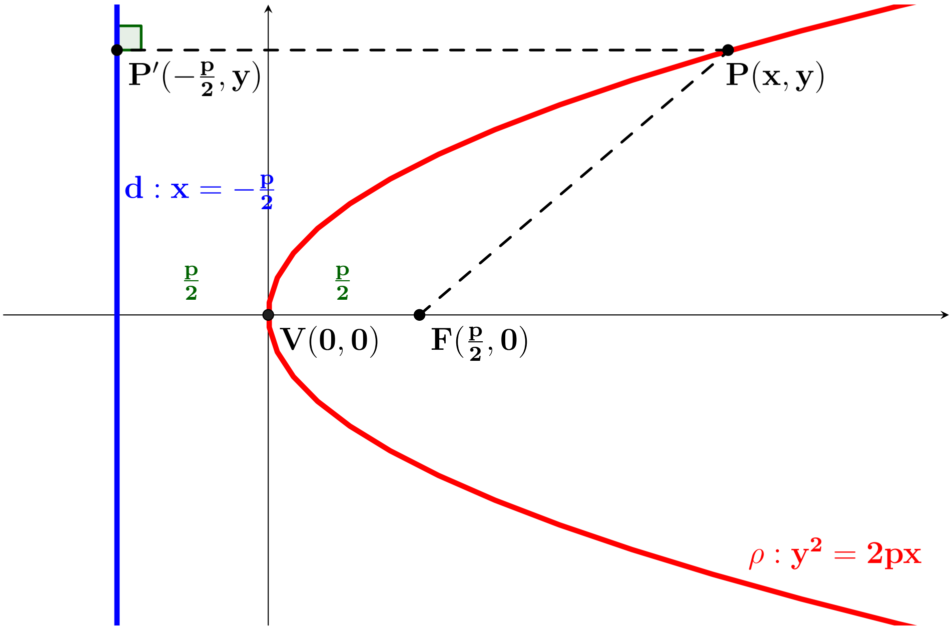
Em análise à demonstração da equação reduzida, é possível observar:

- A distância entre a reta diretriz e o foco, representado pela incógnita p
- x^2 indica que há dois valores de x para um mesmo valor y e a simetria da parábola se encontra no eixo y.
- $-2py$ indica que a parábola está voltada para posição negativa no eixo y, ou seja, para baixo.

2.3.3 Concavidade voltada para Direita e Vértice na Origem

Exemplo 2.3.8. *Considere uma parábola com o vértice na origem e concavidade voltada para direita.*

Figura 20 – Parábola do Exemplo 2.3.8



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Em relação ao exemplo anterior, é notável uma rotação de rotação de 90° com referência o vértice da parábola, que é coincidente com a origem em ambos exemplos, como foi apresentado no item anterior.

Elementos Principais da Parábola

Sejam as novas coordenadas dos pontos e equações dos elementos principais: foco, reta diretriz, ponto P' e equação reduzida:

- **Foco** $F(\frac{p}{2}, 0)$: Com a rotação de 90º com referência à origem, as coordenadas x e y se invertem comparadas ao exemplo 2.3.2, das parábolas com concavidade voltada para cima.
- **Reta diretriz** $d : x = -\frac{p}{2}$: A reta diretriz ficou à esquerda parábola, também acompanhando o giro da parábola, e resultando a equação da reta em $d : x = -\frac{p}{2}$.
- **Ponto** $P'(-\frac{p}{2}, y)$: O Ponto P' pertence a reta diretriz, e agora possui a mesma coordenada de P no eixo das ordenadas, mudando sua coordenada para $P'(-\frac{p}{2}, y)$.
- **Equação Reduzida**: Adequando a equação reduzida para uma condição de uma parábola com a concavidade voltada para direita, temos:

Proposição 2.3.9. *A equação reduzida da parábola do exemplo 2.3.8, considerando os elementos da Figura 20, é dada por:*

$$\rho \colon y^2 = 2px$$

A seguir será demonstrada a equação reduzida pela definição 2.3.1 e pelos pontos P, P' e F com suas novas coordenadas.

Demonstração 2.3.10. *Pela definição da parábola 2.3.1, e substituindo* $P(x, y)$, $P'(-\frac{p}{2}, y)$ *e* $F(\frac{p}{2}, 0)$

$$\begin{aligned} d(P, F) &= d(P, d) \\ \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + (y - 0)^2} &= \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2} \\ \sqrt{x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2} &= \sqrt{x^2 + xp + \frac{p^2}{4}} \\ x^2 + y^2 - xp + \frac{p^2}{4} &= x^2 + xp + \frac{p^2}{4} \\ y^2 - xp &= xp \\ y^2 &= 2xp \end{aligned}$$

Em análise à demonstração da equação reduzida, é possível observar:

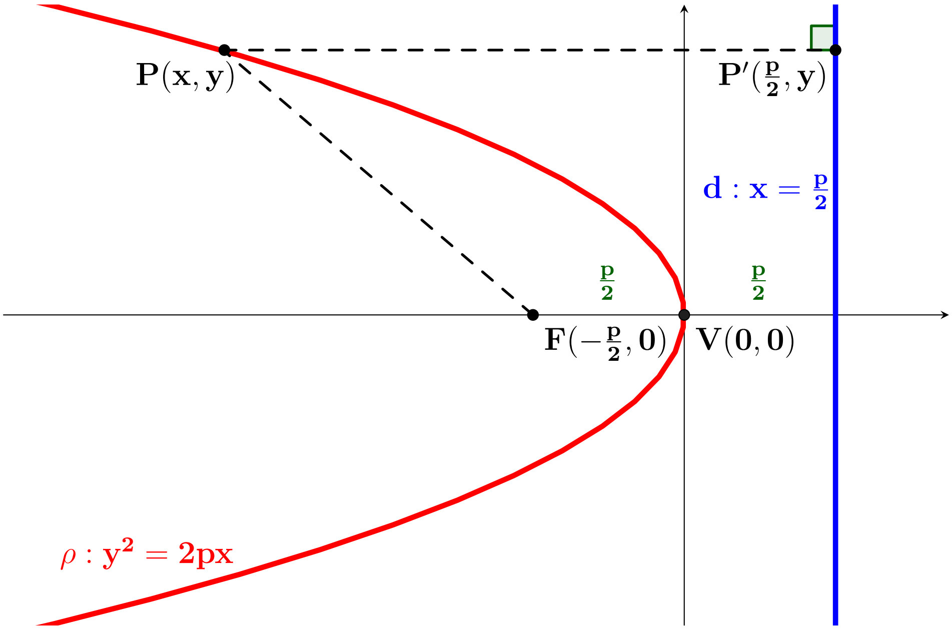
- A distância entre a reta diretriz e o foco, representado pela incógnita p
- y^2 indica que há dois valores de y para um mesmo valor x e a simetria da parábola se encontra no eixo x.
- $-2px$ indica que a parábola está voltada para posição positiva no plano, ou seja, para direita.

2.3.4 Concavidade voltada para Esquerda e Vértice na Origem

A seguir, será mostrada a parábola com a concavidade voltada para cima com vértice $V(x_0, y_0)$.

Exemplo 2.3.11. *Considere uma parábola com o vértice na origem e concavidade voltada para esquerda.*

Figura 21 – Parábola do Exemplo 2.3.11



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Dos principais elementos, tivemos mudanças:

- **Foco** $F(\frac{p}{2}, 0)$: Com a rotação de 90º com referência à origem, as coordenadas x e y se invertem comparadas ao exemplo 2.3.2, das parábolas com concavidade voltada para cima.
- **Reta diretriz** $d : x = -\frac{p}{2}$: A reta diretriz ficou à esquerda parábola, também acompanhando o giro da parábola, e resultando a equação da reta em $d : x = -\frac{p}{2}$.
- **Ponto** $P'(-\frac{p}{2}, y)$: O Ponto P' pertence a reta diretriz, e agora possui a mesma coordenada de P no eixo das ordenadas, mudando sua coordenada para $P'(-\frac{p}{2}, y)$.

Proposição 2.3.12. *A equação reduzida da parábola do exemplo 2.3.11, considerando os elementos da Figura 21, é dada por:*

$$\rho\colon y^2 = -2px$$

Demonstração 2.3.13. *Pela definição da parábola 2.3.1, temos:*

$$\overline{PF} = \overline{PP'}$$
$$\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + (y-y)^2}$$
$$\sqrt{x^2 + xp + \frac{p^2}{4} + y^2} = \sqrt{x^2 - xp + \frac{p^2}{4}}$$
$$x^2 + y^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4}$$
$$y^2 + xp = -xp$$
$$y^2 = -2xp$$

Em análise à demonstração da equação reduzida, é possível observar:

- A distância entre a reta diretriz e o foco, representado pela incógnita p
- y^2 indica que há dois valores de y para um mesmo valor x e a simetria da parábola se encontra no eixo x.
- $-2px$ indica que a parábola está voltada para posição negativa no plano no eixo x, ou seja, para esquerda.

A seguir, a Tabela 5 exibe as diferença entre elementos principais abordados nos casos onde a concavidade está direcionada para cima ou para baixo, já na Tabela 6 são analisados para os casos, onde a convavidade esta direcionada para esquerda ou direita.

Tabela 5 – Elementos Principais da Parábola - Direção da Concavidade: Cima e Baixo

Elementos Principais	**Cima**	**Baixo**
Vértice V	$V(0,0)$	$V(0,0)$
Foco F	$V(0,\frac{p}{2})$	$V(0,-\frac{p}{2})$
Reta Diretriz (d)	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
Eixo de Simetria	$x=0$	$x=0$
P	$P(x,y)$	$P(x,y)$
P'	$P(x,-\frac{p}{2})$	$P(x,\frac{p}{2})$
Equação Reduzida ρ	$x^2=2py$	$x^2=-2py$
$\overline{VF}=Dist(V,d)$	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Tabela 6 – Elementos Principais da Parábola - Direção da Concavidade: Direita e Esquerda

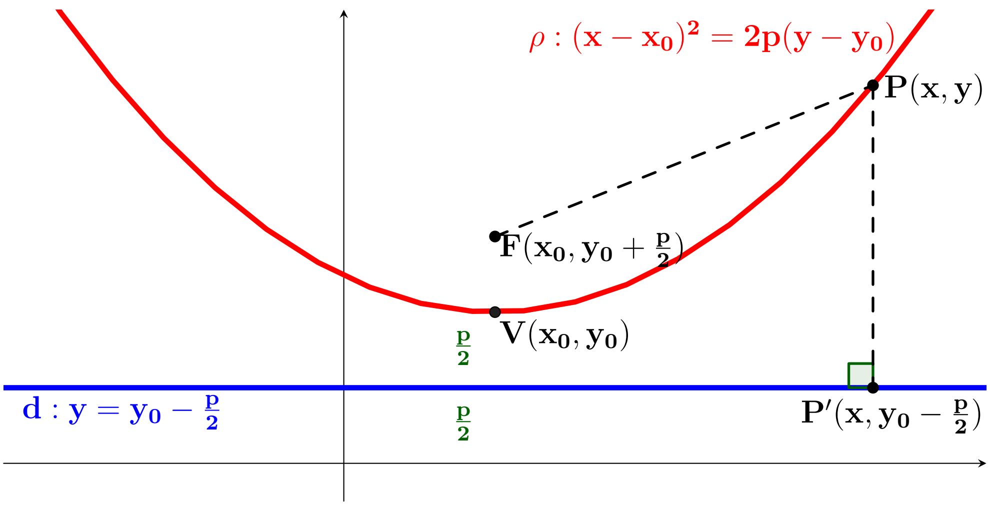
Principais Elementos	**Direita**	**Esquerda**
Vértice V	$V(0,0)$	$V(0,0)$
Foco F	$V(\frac{p}{2},0)$	$V(-\frac{p}{2},0)$
Reta Diretriz (d)	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$
Eixo de Simetria	$y=0$	$y=0$
P	$P(x,y)$	$P(x,y)$
P'	$P(-\frac{p}{2},y)$	$P(\frac{p}{2},y)$
Equação Reduzida ρ	$y^2=2px$	$y^2=-2px$
$\overline{VF}=Dist(V,d)$	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

2.3.5 Concavidade Voltada para Cima e Vértice $V(x_0,y_0)$

Exemplo 2.3.14. *Considere uma parábola com o vértice $V(x_0,y_0)$ e concavidade voltada para cima.*

Figura 22 – Parábola do Exemplo 2.3.14



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

A Figura 22 exibe a parábola com a concavidade voltada para cima e vértice $V(x_0,y_0)$. Nota-se a translação da parábola, assim como foi apresentado nas demais cônicas.

Elementos Principais

A parábola com a concavidade voltada para cima e Vértice $V(x_0, y_0)$ sofrerá adaptações nos elementos principais como: vértice, foco, reta diretriz, eixo de simetria e P' projeção vertical do ponto "P"na reta diretriz serão:

- **Vértice** $V(x_0, y_0)$: No caso, temos $V(x_0, y_0)$.
- **Foco** $F(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$
- **Diretriz** d: $y = y_0 - \frac{p}{2}$
- **Eixo de simetria**: A reta vertical $x = x_0$, pois todos os elementos principais (foco, vértice e diretriz) estão alinhados verticalmente.
- **Ponto** $P(x, y)$: Um ponto genérico da parábola, $P(x, y)$.
- **Ponto** $P'(x, y_0 - \frac{p}{2})$: A projeção vertical do ponto P sobre a diretriz, $(x, y_0 + \frac{p}{2})$.
- **Equação Reduzida**: Exibe a geometria da parábola, neste caso destacando que o vértice está fora da origem.

Proposição 2.3.15. *A equação reduzida da parábola com vértice $V(x_0, y_0)$ e concavidade voltada para cima, é dada por:*

$$\rho\colon (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

A seguir será demonstrada a parábola utilizando sua definição 2.3.1 e as coordenadas dos pontos P, P' e F

Demonstração 2.3.16. *Pela definição da parábola (conjunto dos pontos equidistantes do foco e da diretriz) e substituindo $P(x, y)$, $P'(x, y_0 - \frac{p}{2})$ e $F(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$ temos:*

$$\overline{PF} = \overline{PP'}$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + \left(y - \left(y_0 + \frac{p}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + \left(y - \left(y_0 - \frac{p}{2}\right)\right)^2}$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + \left(y - y_0 - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(y - y_0 + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Considerando $x - x_0 = x_1$ e $y - y_0 = y_1$, temos:

$$(x_1)^2 + \left(y_1 - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y_1 + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$(x_1)^2 + (y_1)^2 - p(y_1) + \frac{p^2}{4} = (y_1)^2 + p(y_1) + \frac{p^2}{4}$$

$$(x_1)^2 - p(y_1) = p(y_1)$$

$$(x_1)^2 = 2p(y_1)$$

Retomando os termos $x - x_0 = x_1$ *e* $y - y_0 = y_1$*, temos:*

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Assim, demonstramos a equação reduzida da parábola com vértice em $V(x_0, y_0)$ e concavidade voltada para cima.

De maneira análoga podemos fazer o mesmo processo e obter as coordenadas dos pontos, equação da reta diretriz e reta reduzida dos caso do vértice $V(x_0, y_0)$ e a concavidade voltada para baixo, direita e esquerda e obtendo os resultados. É possível separar em dois grupos para uma melhor os elementos que mudam e o que não mudam: concavidade para cima x baixo e concavidade direita x esquerda

Tabela 7 – Posição da Concavidade: Cima e Baixo x Principais elementos da Parábola

Principais Elementos	**Cima**	**Baixo**
Vértice V	$V(x_0, y_0)$	$V(x_0, y_0)$
Foco F	$V(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$	$V(x_0, y_0 - \frac{p}{2})$
Reta Diretriz (d)	$y = y_0 - \frac{p}{2}$	$y = y_0 + \frac{p}{2}$
Eixo de Simetria	$x = y_0$	$x = y_0$
P	$P(x, y)$	$P(x, y)$
P'	$P(x, y_0 - \frac{p}{2})$	$P(x, y_0 + \frac{p}{2})$
Equação Reduzida ρ	$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$	$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$
$\overline{VF} = Dist(V, d)$	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Tabela 8 – Posição da Concavidade: Direita e Esquerda x Principais elementos da Parábola

Principais Elementos	**Direita**	**Esquerda**
Vértice V	$V(x_0, y_0)$	$V(x_0, y_0)$
Foco F	$V(x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$	$V(x_0 - \frac{p}{2}, y_0)$
Reta Diretriz (d)	$x = x_0 - \frac{p}{2}$	$x = x_0 + \frac{p}{2}$
Eixo de Simetria	$y = x_0$	$y = x_0$
P	$P(x, y)$	$P(x, y)$
P'	$P(x_0 - \frac{p}{2}, y)$	$P(x_0 + \frac{p}{2}, y)$
Equação Reduzida ρ	$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$	$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$
$\overline{VF} = Dist(V, d)$	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$

Fonte: Produção do próprio autor (2024)

A análise dos principais elementos das parábolas com vértice fora da origem, conforme exibido nas Tabelas 7 e 8, deixa evidente como a posição da concavidade influencia diretamente a representação analítica e geométrica dessas curvas. As expressões das coordenadas do foco, da reta diretriz e da equação reduzida variam conforme a concavidade esteja voltada para cima, para baixo, para a direita ou para a esquerda, ainda que o vértice permaneça fixado no ponto $V(x_0, y_0)$.
Essas variações destacam a importância de compreender a orientação da parábola ao determinar seus elementos característicos, especialmente em contextos de resolução de problemas e interpretação geométrica, favorecendo uma abordagem mais flexível e generalizada em relação ao estudo das cônicas fora da origem.

2.4 Seções Cônicas Degeneradas

As seções cônicas degeneradas são casos especiais que ocorrem quando o plano de interseção passa exatamente pelo vértice do cone duplo. Diferentemente das cônicas padrão — a elipse, a parábola e a hipérbole, que são curvas bem definidas —, as formas degeneradas "colapsam"em figuras geométricas mais simples, que são um ponto, uma reta ou um par de retas concorrentes.

2.4.1 Elipse Degenerada - Ponto

Sua representação na Figura 4 se dá pela interseção do cone duplo com o plano acontece exatamente interceptar o vértice, gerando assim um ponto

Exemplo 2.4.1. *Considere uma elipse onde a medida dos eixos focal e não focal são nulas, ou seja, $a = b = 0$.*

A definição de elipse estabelece que a curva é composta por todos os pontos cuja soma das distâncias a dois focos fixos é constante. No entanto, quando os semieixos focal e focal são nulos, ou seja, $a = b = 0$, a equação da elipse:

$$\frac{(x - x_0)^2}{0} + \frac{(y - y_0)^2}{0} = 1$$

deixa de ser válida, pois os denominadores se anulam. Intuitivamente, isso significa que a elipse colapsa em um único ponto $C(x_0, y_0)$.

Esse é um caso extremo de degeneração, onde a elipse perde completamente sua forma alongada e deixa de ser uma curva no plano, reduzindo-se a um único ponto coincidente com seu centro. Esse fenômeno destaca como as cônicas podem apresentar casos limite em que sua definição se reduz a objetos geométricos elementares.

2.4.2 Hipérbole Degenerada - Duas Retas Concorrentes

A Figura 4 ilustra a formação de uma hipérbole degenerada a partir da interseção de um cone duplo por um plano. A curva é gerada quando o plano secante (azul) contém o eixo central do cone (linha preta tracejada), atravessando suas duas folhas e formando em sua interseção forma duas resta concorrentes.

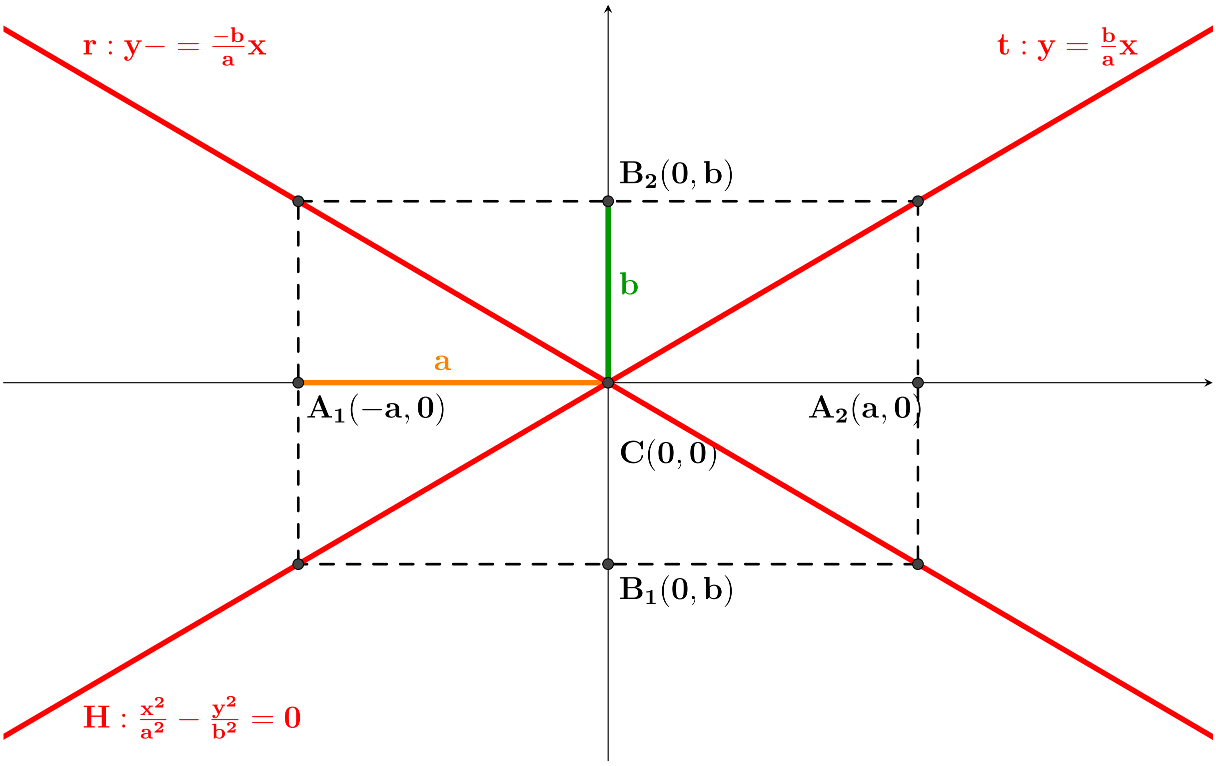
Exemplo 2.4.2. *Considere a equação reduzida de uma hipérbole centrada na origem resulte em:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Desenvolvendo a equação, temos:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}x$$

Figura 23 – Hipérbole degenerada do exemplo 2.4.2



Fonte: Produção do próprio autor (2024)

Assim, observa-se duas retas concorrentes na origem. Caso seja fora da origem, basta aplicar a translação e adequar a equação reduzida.

2.4.3 Parábola Degenerada - Uma Reta

A parábola degenerada, representada na Figura 4, pode ser entendida como o caso limite de uma parábola padrão. Se um plano, que forma uma parábola por ser paralelo a uma geratriz, for deslocado até conter o vértice do cone, a curva aberta da parábola "colapsa"sobre essa mesma geratriz. O resultado da interseção é, portanto, a própria geratriz, manifestando-se como uma única linha reta.

Exemplo 2.4.3. *se a equação reduzida da parábola resulta em* $(y - y_0)^2 = 2px = 0$ *ou* $(x - x_0)^2 = 2py = 0$

Se $(y - y_0)^2 = 2px = 0 \implies y = y_0$ e $2px = 0 \implies p = 0$, ou seja, uma reta na direção horizontal e paralela ao eixo das abscissas, dada pelo colapso do foco da parábola até a reta diretriz.

Se $(x - x_0)^2 = 2py = 0$, de maneira análoga ao anterior, será uma reta na direção vertical e paralela ao eixo das ordenadas, dada pelo colapso do foco da parábola até a reta diretriz de equação $x = x_0$.

3 A Teoria da Resolução de Problemas de Polya no Estudo de Cônicas

Este capítulo trata da teoria da resolução de problemas de George Polya, apresentada na obra "A Arte de Resolver Problemas". Publicado originalmente em inglês em 1945 com o título "How to Solve It", o livro foi posteriormente traduzido para diversas línguas, evidenciando a ampla disseminação de sua teoria pelo mundo. Segundo o site da editora da versão original, Penguin Books, mais de um milhão de cópias foram vendidas, além de a obra ser alvo de inúmeras citações.

O autor, George Polya (1887-1985), foi um matemático húngaro e professor no Instituto Federal de Tecnologia de Zurique, na Suíça, e, posteriormente, na Universidade Stanford, nos Estados Unidos. Ele produziu obras sobre diversos tópicos matemáticos, como séries, teoria dos números, análise matemática, geometria, álgebra, combinatória, probabilidade e a própria técnica de resolução de problemas.

A técnica de resolução de problemas, em 2025, é utilizada tanto por estudantes da educação básica quanto por alunos de graduação em matemática, engenharia e áreas afins das ciências exatas. No entanto, muitos desses estudantes não conhecem a metodologia que estão aplicando ou a utilizam apenas parcialmente.

A metodologia de Polya não se limita apenas a fórmulas, trata-se do desenvolvimento do raciocínio matemático, o que pode ajudar os alunos a organizar os pensamentos e aplicar seus conhecimentos de forma ordenada, facilitando posteriormente nos estudos em casa e potencializando o processo de ensino-aprendizagem. Ao estruturar o processo em quatro fases, oferece uma abordagem de conceitos complexos como os das seções cônicas. A integração dessa heurística com as potencialidades de softwares de matemática dinâmica cria um ambiente de aprendizagem dinâmico e investigativo, fundamental para a construção de um conhecimento significativo sobre elipses, parábolas e hipérboles.

Segundo (POLYA, 2003), a resolução de problemas é uma atividade central no ensino de matemática, pois estimula o pensamento criativo, a autonomia e a capacidade de argumentação lógica. A sua proposta metodológica é estruturada em quatro etapas: compreender o problema, planejar a solução, executar o plano e revisar. Tais fases formam uma base heurística que pode orientar o ensino por meio de situações-problema em diferentes níveis de escolaridade.

A primeira etapa do método de Polya, a compreensão do problema, é fundamental para o sucesso em qualquer investigação matemática. No estudo das cônicas, essa fase se traduz na identificação dos elementos-chave de uma elipse, parábola ou hipérbole, como focos, vértices, diretrizes e excentricidade. O GeoGebra, nesse contexto, permite a visualização e a interação com os dados e as construções geométricas. Ao utilizar suas ferramentas para anotações e manipulação, o software proporciona uma abordagem muito mais dinâmica e intuitiva em comparação com a resolução de problemas em papel.

Ademais, é importante que o aluno verifique se as informações disponíveis são suficientes para a resolução do problema. Caso não sejam, será necessário deduzir, a partir dos dados existentes, os elementos essenciais para a sua solução. O professor, por sua vez, desempenha o papel de mediador, fazendo indagações que conduzam os alunos a uma análise aprofundada das informações e, consequentemente, à próxima etapa: o planejamento.

Uma vez que o problema é compreendido, o estudante avança para a segunda fase: estabelecer um plano. Esta etapa envolve a formulação de uma estratégia para a resolução. O professor deve enfatizar como determinar ou provar o que se pede, e se já for possível determinar a resolução, deve-se verificar a ordem das ações e se os alunos têm conhecimento de todas as ações a serem tomadas. Um problema mais complexo pode precisar ser mais etapas na execução para resolvê-lo e utilizar de experiências de outros problemas já vistos com a turma, e cabe ressaltar que cada turma vai precisar de um suporte diferente. Como exemplo, nos anos finais do ensino médio é possível que um aluno use conceitos de geometria plana e álgebra para resolver problemas de geometria espacial ou geometria analítica.

Com o auxílio do GeoGebra, os alunos podem experimentar diferentes abordagens. Se o problema for, por exemplo, determinar a equação de uma parábola dados seu foco e sua diretriz, o aluno pode, no ambiente do software, construir a reta diretriz, o ponto do foco e, em seguida, utilizar ferramentas de construção para encontrar o lugar geométrico dos pontos equidistantes, visualizando a formação da parábola. Essa experimentação orientada auxilia na formulação de conjecturas e na escolha do caminho mais promissor para a solução analítica, funcionando como uma ponte entre a intuição geométrica e o rigor algébrico.

A terceira etapa, executar o plano, consiste na implementação da estratégia delineada. No contexto da integração entre Polya e GeoGebra, esta fase se desdobra em dois momentos interligados: a execução dos passos no software e a sua correspondente tradução para a linguagem matemática formal. O GeoGebra pode ser utilizado para verificar a correção de cada passo do plano. Por exemplo, ao calcular as coordenadas dos vértices de uma hipérbole, o aluno pode plotar esses pontos no GeoGebra e observar se eles de fato pertencem à curva gerada pela equação encontrada. Essa verificação imediata oferece um feedback visual que pode confirmar a validade do raciocínio ou indicar a necessidade de reavaliar a estratégia.

Finalmente, a quarta e muitas vezes negligenciada etapa de Polya é o retrospecto, ou a revisão da solução. Este é o momento de refletir sobre o processo, verificar a coerência do resultado e explorar possíveis generalizações ou conexões. O GeoGebra enriquece enormemente essa fase ao permitir a exploração de "e se...?"de forma ágil. O que acontece com a hipérbole se a distância entre os focos aumentar? Como a excentricidade de uma elipse afeta sua forma? Ao manipular os parâmetros da cônica em um ambiente virtual, os alunos podem investigar essas questões, aprofundando sua compreensão para além do problema original.

Em síntese, a articulação entre a metodologia de resolução de problemas de Polya e as ferramentas digitais oferece um caminho promissor para o ensino e a aprendizagem das cônicas. Essa sinergia transforma o processo de resolução de problemas em uma atividade investigativa, na qual os alunos, mediados pelo professor, constroem ativamente seu conhecimento, transitando com fluidez entre as representações gráficas e algébricas e desenvolvendo uma compreensão mais profunda e conectada dos conceitos matemáticos.

Nesse contexto, o GeoGebra, ao unir geometria, álgebra e cálculo de forma dinâmica e interativa, conforme apontado por (HOHENWARTER; JONES, 2007), emerge como uma ferramenta ideal para essa abordagem. Sua capacidade de facilitar a experimentação e a descoberta é um elemento essencial para o sucesso da aplicação da heurística de Polya.

4 Explorando o GeoGebra como uma Ferramenta Dinâmica e Interativa

Este capítulo se dedica a uma jornada prática pelo universo da matemática dinâmica, capacitando o leitor a transformar conceitos abstratos em construções interativas e visualmente ricas. O propósito é transcender o papel de espectador passivo e assumir o de criador, desenvolvendo as habilidades necessárias para construir, manipular e investigar objetos matemáticos de forma fluida e intuitiva. Ao dominar estas ferramentas, o leitor estará apto a elaborar suas próprias atividades e explorações, enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem.

O GeoGebra, idealizado por Markus Hohenwarter, é um software de matemática dinâmica gratuito que se tornou uma ferramenta indispensável no cenário educacional global. Seu uso transcende fronteiras, sendo amplamente adotado por milhões de estudantes e professores para o ensino e a aprendizagem da matemática, da ciência e da tecnologia. De acordo com (BORBA; PENTEADO, 2012), o software se destaca por sua rápida disseminação e pela formação de uma "comunidade internacional de usuários e desenvolvedores que compartilham materiais e experiências", o que o consolida como um recurso essencial para a criação de ambientes de aprendizagem interativos e eficazes em uma escala mundial.

Iniciaremos nossa exploração com a manipulação da interface do Geogebra, conhecendo os painéis de interatividade na plataforma, criando controles deslizantes, que funcionam como pontes entre a álgebra e a geometria, permitindo a variação contínua de parâmetros numéricos com impacto visual imediato. Em paralelo, abordaremos a criação de textos interativos, que se atualizam dinamicamente para refletir as alterações na construção, oferecendo um canal de comunicação claro e preciso sobre o comportamento dos objetos.

Com essa base, partiremos para as construções geométricas fundamentais. Serão apresentados os métodos para construir um ponto a partir de coordenadas específicas e a importância de fixar um ponto no plano para criar elementos estáveis em sua construção. Dando sequência, exploraremos a construção de uma reta definida por dois pontos e a de uma circunferência a partir de um ponto central e um raio, solidificando a compreensão de elementos essenciais da geometria euclidiana.

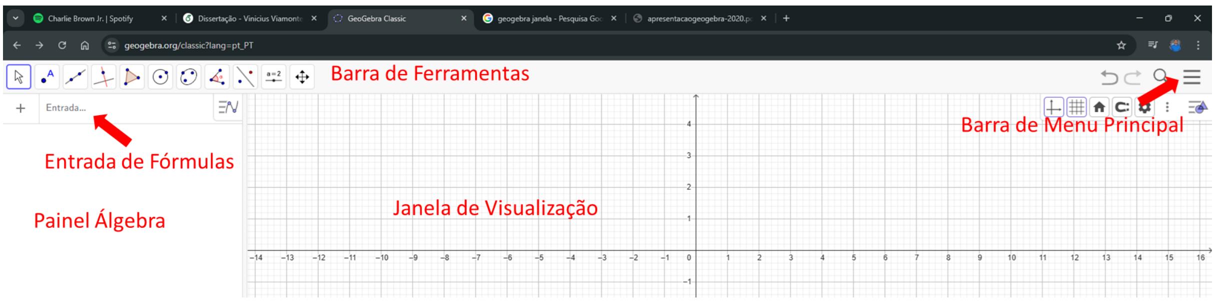
Por fim, o capítulo culminará na aplicação integrada das técnicas aprendidas. Demonstraremos como a sinergia entre controles deslizantes e textos interativos pode ser utilizada para a construção de equações de cônicas (elipses, parábolas e hipérboles) de maneira dinâmica. Esta abordagem permitirá ao leitor não apenas visualizar essas curvas, mas, principalmente, investigar como as alterações em seus coeficientes algébricos promovem transformações geométricas profundas. Ao concluir esta seção, o leitor terá um sólido repertório de habilidades para criar uma vasta gama de materiais didáticos interativos.

O GeoGebra possui diversas versões como: "Calculadora Gráfica, Geometria, Clássico Versão 5, Clássico Versão 6, Calculadora 3D, Realidade Aumentada. Para criar as figura e o problema será utilizado o Geogebra Clássico versão 6. Disponível em GeoGebra Classic Versão 6.

4.1 Paineis do Geogebra

Antes de começar a interação com o aplicativo, é importante o aluno saber suas potencialidades e algumas ferramentas apresentadas na Figura 24

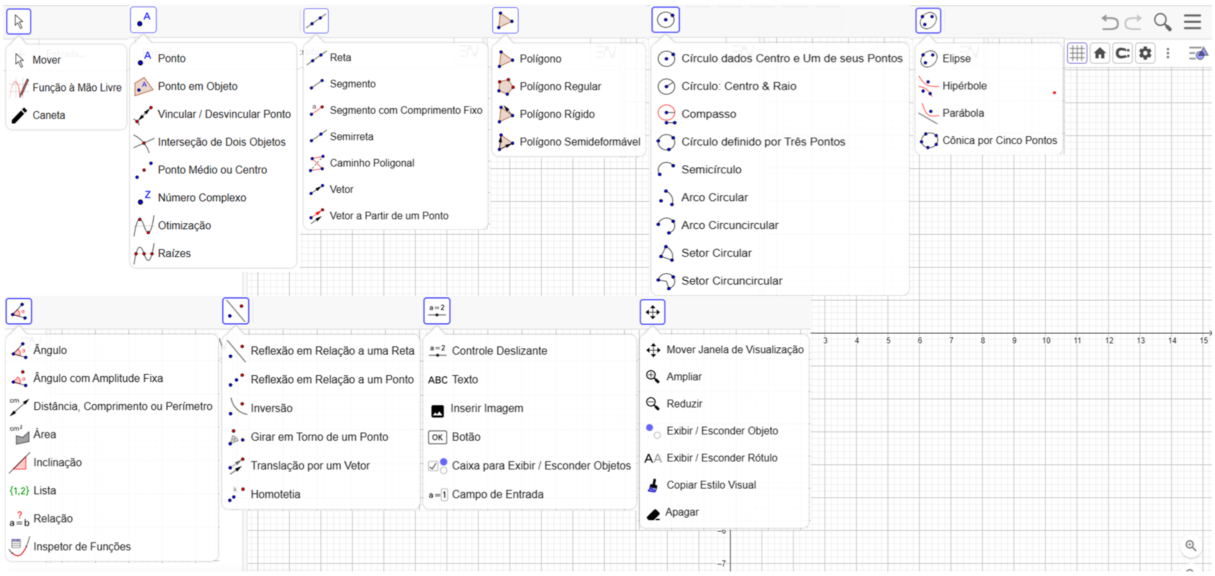
Figura 24 – Interface do Geogebra e seus principais paineis



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

- **Barra de ferramentas**: tem diversas ferramentas nos seus menus, como é possível observar na figura 25: "Mover, Pontos, Reta, Polígonos, Círculo, Elipses, ângulos, Reflexão, controle deslizante e mover a janela de visualização". É interessante os alunos terem conhecimento sobre os botões: "mover, ponto, ponto em objeto, interseção de dois objetos, reta, segmento, reta perpendicular, mediatriz, círculo: Centro & Raio, as cônicas, controle deslizante e texto". Entretanto, neste capítulo serão pouco utilizados para construção, pois o excesso de opções poderá causar erros com muitos alunos construindo os elementos de maneira aleatória, será mais conveniente trabalhar na "Entrada de Fórmulas".

Figura 25 – Menus da barra de ferramentas



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

- **Painel de Álgebra**: Exibe todos os elementos construídos;
- **Entrada de Fórmulas**: Local para digitar os comandos, nele é possível fazer todas as funções disponíveis na barra de ferramentas. Apesar de ser um pouco complexo para quem não tem muitas habilidades no aplicativo é um excelente lugar para construir com a finalidade de ensinar uma turma, pois quando digitadas o resultado será homogêneo na tela dos alunos a comparada com uma construção com a barra de ferramentas.
- **Janela de visualização** Possui os eixo x e y, por se tratar de um plano cartesiano no $\mathbb{R}^2$ e uma malha com linhas mais finas subdividindo os eixo para que as medidas possam ser observadas sem a necessidade de um valor exato. É importante destacar que é possível usa-la no $\mathbb{R}^3$ e ambas podem ser configuradas para tamanhos a critério do usuário ou também podem ser ocultas.
- **Menu principal**: Possui os menus: "Arquivo, Editar, Disposições, Exibir, Configurações, Disposições, Ferramentas, Ajuda e FeedBack, Login", dentro de desses menus é possível: "Abrir, Salvar no Computador, Salvar Online, exportar imagem, baixar como, Visualizar impressão, Exibir diferentes tipos de janelas 2D e 3D, mudar a versão do GeoGebra e algumas outras opções é importante o usuário navegar pelos menus para conhecer todas as opções e ferramentas.

4.2 GeoGebra em Ação: Construindo Elipses Dinâmicas

Seguindo os passos de Aristóteles, "Aquilo que temos que aprender a fazer, aprendemos fazendo.", então a partir daqui inicia-se a construção de uma elipse com elementos dinâmicos.

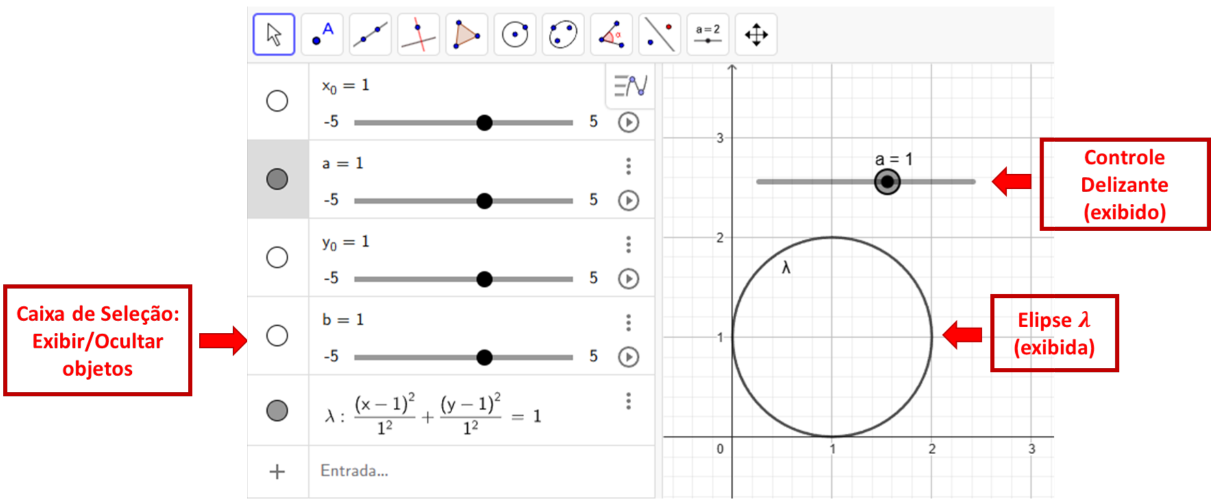
Segue os passos para construção de uma Elipse λ com eixo focal na direção horizontal:

1. Em uma definição formal de elipses seria indicado definir os focos, em seguida a medida do eixo focal. Entretanto, o GeoGebra tem a capacidade de exibir uma função, sendo assim, da Tabela 2 digita-se a equação reduzida de uma elipse com o eixo focal na direção horizontal no campo "Entrada":

   ”$\lambda : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$”

   O λ : que antecede a equação reduzida da elipse é um comandado para o programa que a função terá o nome definido como λ

Figura 26 – Inserindo a equação reduzida da Elipse



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

2. Serão criados automaticamente os controles deslizantes: x_0, y_0, a e b, conforme o observado na Figura 26;

   Em seguida, é preciso limitar as medidas de a e b, pois $a \geq b \geq 0$ (pois, trata-se de uma elipse com eixo focal na direção horizontal), nos três pontos localizados ao lado direito de cada controle deslizantes depois clicar em configurações, depois em controle deslizante é preciso limitar os parâmetros a e b e definir os incrementos.

   Em b pode-se definir o $b_{min} = 0$, e um incremento de 1 (Quando b=0 há um colapso cônica, degeneração exibida no exemplo 2.4.1).

Em a pode-se definir $a_{min} = b$. Dessa maneira, o aluno poderá observa o caso da elipse degenerada onde $a = b$ exibida no exemplo 2.1.14;

Fechando os controles deslizantes, deixe marcado a opção exibir objeto na janela de álgebra e posicione-os na posição em que achar melhor, caso o controle esteja fixo na tela, clique com o botão direito em cima do controle deslizante e desmarque as opções travar na tela e travar objeto;

3. Com os controles deslizantes da medida dos semieixos focal e não focal já ajustados, construa o parâmetro c, da metade da distância focal, dado por "$c = \sqrt{a^2 - b^2}$";

4. Construa o parâmetro e, que será a excentricidade, dada por "$e = \frac{c}{a}$";

5. Construa os pontos: Centro (C): "$C = (x_0, y_0)$"

   Focos (F_1) e (F_2): "$F_1 = (x_0 - c, y_0)$"e "$F_2 = (x_0 + c, y_0)$"

   Extremidades do Eixo Focal (A_1) (A_2): "$A_1 = (x_0 - a, y_0)$"e "$A_2 = (x_0 + a, y_0)$"

   Extremidades do Eixo Não Focal (B_1) (B_2): "$A_1 = (x_0, y_0 - b)$"e "$B_2 = (x_0, y_0 + b)$"

   Ponto que pertence a Elipse (P): "$P = ponto(\lambda)$

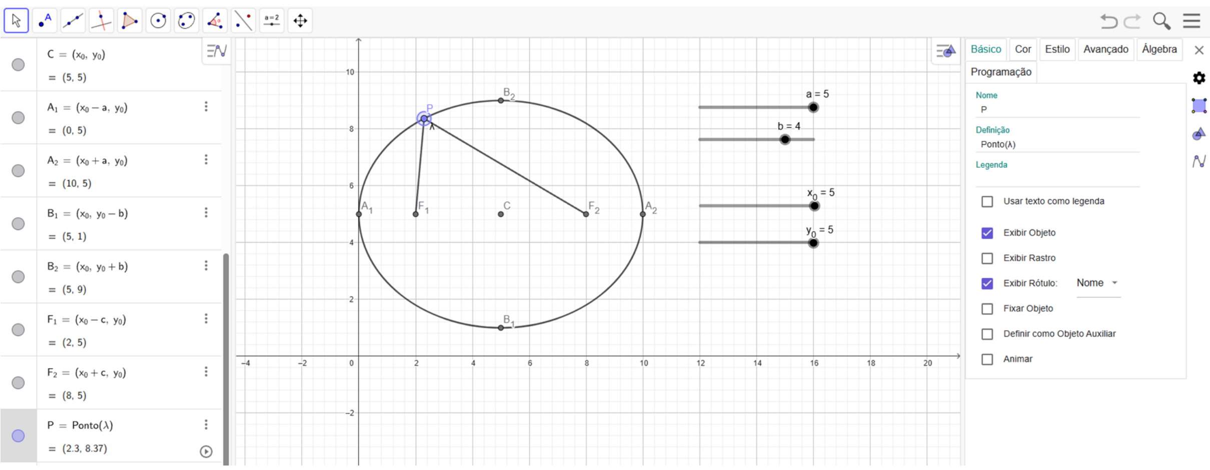
6. Construir os segmentos pelos comandos para serem observados:

   $\overline{PF_1}$: "$f = segmento(P, F_1)$"

   $\overline{PF_1}$ "$f = segmento(P, F_2)$"

   Em seguida, vá na janela de álgebra, localize os segmentos criados e clique em configurações, básico e desmarque a opção exibir rótulo;

Figura 27 – Elipse com os pontos e controles deslizantes devidamente posicionados



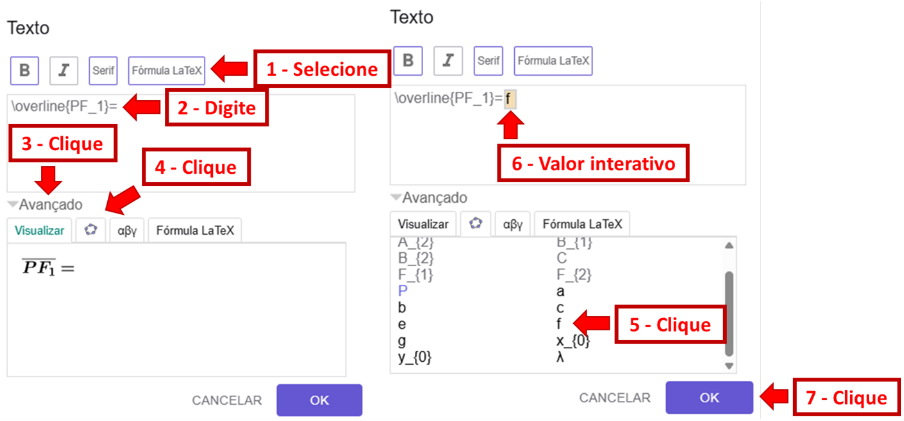
Fonte: Fonte: Produção do próprio autor (2025)

Observa-se o painel com algumas funcionalidades citadas anteriormente, como Exibir Rótulo, Exibir Objeto e o nome definido pelo comandos.

7. Construindo a medida do segmento $\overline{PF_1}$

   Na aba controle deslizante, clique em texto e em seguida siga os passos da imagem 28, o texto exibirá a medida do segmento, que muda de acordo com a posição do ponto P (interativo).

Figura 28 – Construindo texto o dinâmico do segmento $\overline{PF_1}$



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

8. Construindo a medida do segmento $\overline{PF_2}$. Deve-se seguir os passos da Figura 28, o segmento a ser escolhido na etapa 5 deve ser o parâmetro "g", e o texto na etapa 6:

```
\overline{PF_2}=g
```

9. Criar o parâmetro h, que deve ser a soma da medida $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ que será criado a partir do comando na "Entrada": $h = f + g$

10. Construir o parâmetro dinâmico da medida da soma dos segmentos $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$. Deve-se seguir os passos da Figura 28, o segmento a ser escolhido na etapa 5 deve ser o parâmetro "h", e o texto na etapa 6:

```
\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=h
```

    Dai é possível fazer o aluno observar a definição da Elipse 2.1.1, que $\overline{PF_1}+\overline{PF_2} = 2a$ e que F_1 e F_2 são os focos.

11. Construir o texto dinâmico exibindo a excentricidade definida como "e": Deve-se seguir os passos da Figura 28, o segmento a ser escolhido na etapa 5 deve ser o parâmetro "e", e o texto na etapa 6:

```
\frac{c}{a}=e
```

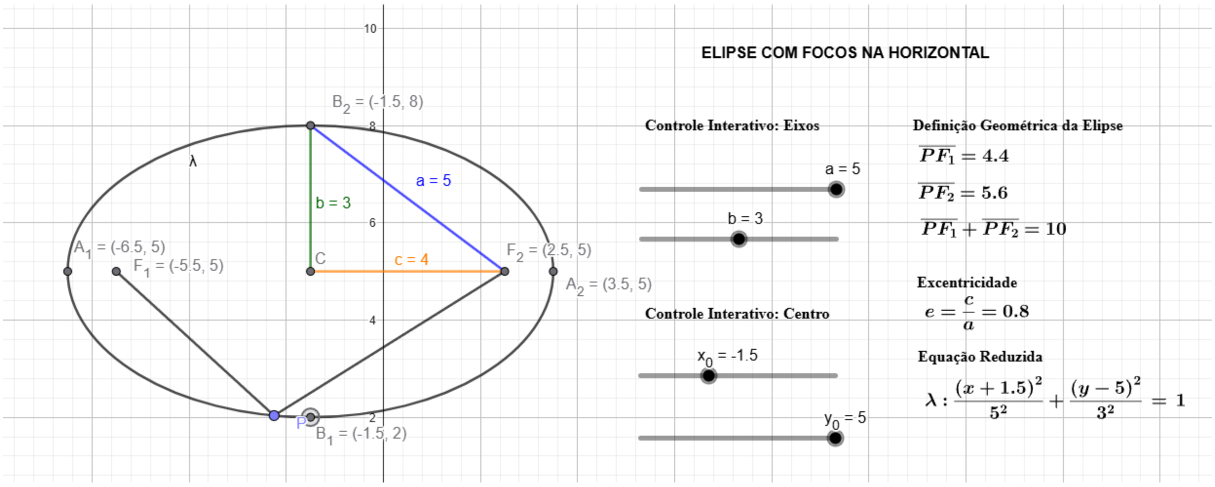
12. Construir um texto dinâmico com a equação reduzida, dentro da caixa de texto:

```
"\lambda=Parâmetro correspondende a equação da elipse"
```

O λ deve ser da aba dos controles interativos como na Figura 28.

13. Em seguida os textos para identificar cada controle deslizante interativo e cada texto dinâmico.

Figura 29 – Elipse com controles interativo dinâmicos exibidos na janela de visualização



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

Com base no detalhado processo de construção apresentado, foi possível desenvolver uma representação dinâmica e interativa da elipse no GeoGebra. Partindo unicamente de sua equação reduzida, a implementação de controles deslizantes para os semieixos, e a subsequente definição de seus pontos notáveis e da excentricidade, permitiu não apenas a visualização da cônica, mas também a exploração prática de suas propriedades fundamentais. A manipulação desses parâmetros em tempo real oferece ao estudante uma poderosa ferramenta de descoberta, onde é possível observar instantaneamente o impacto de cada elemento na forma e nas características da curva, validando a propriedade da soma das distâncias focais de maneira concreta e investigativa.

Este método de construção, centrado na equação reduzida e na interatividade, pode ser replicado com sucesso para as demais cônicas. Seguindo uma lógica análoga, os estudantes podem utilizar as equações reduzidas da hipérbole e da parábola, demonstradas em capítulos anteriores, para construir suas próprias representações dinâmicas, identificando seus respectivos focos, vértices, e assíntotas ou diretrizes. Ao assumir este papel de protagonista na construção do conhecimento, o aluno transcende a mera cópia de figuras estáticas, que frequentemente falham em capturar a precisão dessas curvas.

Essa abordagem, que une rigor matemático e tecnologia, tem o potencial de despertar um maior interesse pelo conteúdo, alinhando o aprendizado a uma geração nativa digital e transformando o estudo das cônicas em uma experiência de aprendizado ativa e significativa. Os modelos corretos estão disponíveis na Tabela 9.

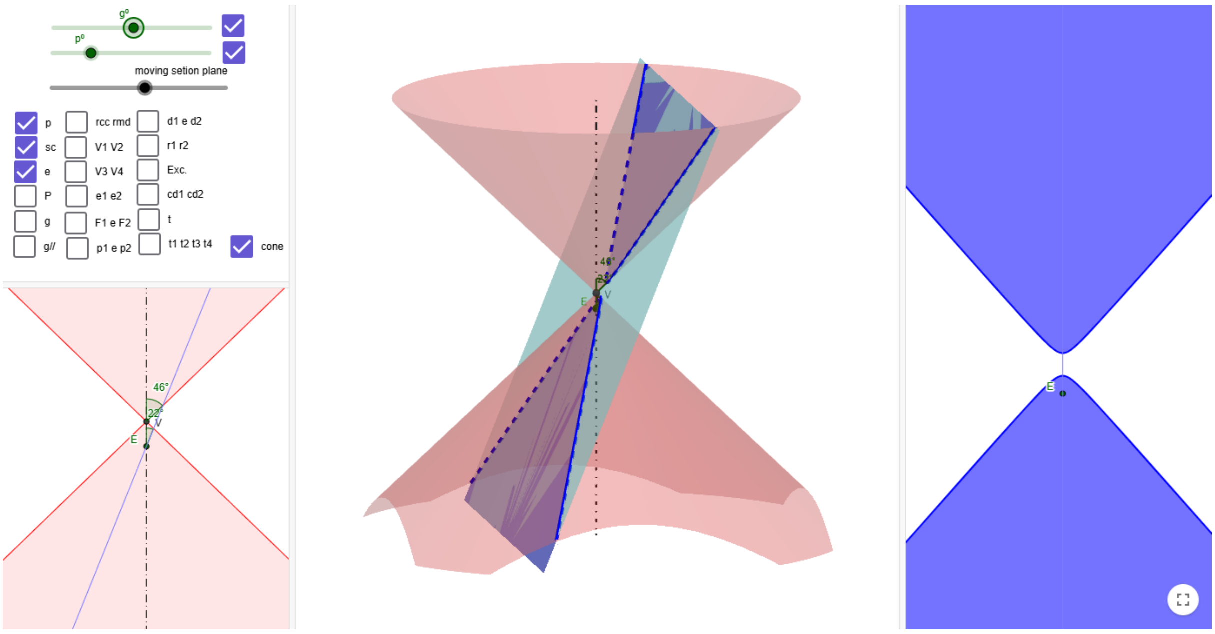
Tabela 9 – Links dos modelos dinâmicos criados no GeoGebra

Modelos Dinâmicos das Cônicas		
Cônica	**Disposição**	**Link**
Elipse	Focos na Horizontal	Link
Elipse	Focos na Vertical	Link
Hipérbole	Focos na Horizontal	Link
Hipérbole	Focos na Vertical	Link
Parábola	Concavidade para Cima	Link
Parábola	Concavidade para Baixo	Link
Parábola	Concavidade para Direita	Link
Parábola	Concavidade para Esquerda	Link

Fonte: Produção do próprio autor (2025)

No GeoGebra possui uma galeria com diversos tópicos matemáticos e exemplos contextualizados. Para o ensino de cônicas, com a visualização e interação com o plano e o cone duplo formando as cônicas, o modelo do autor (LEITE, Bruno, 2017) exibe perfeitamente, devido a suas múltiplas janelas exibindo vários detalhes da posição do plano e do cone duplo, a figura 30

Figura 30 – Modelo interativo da Galeria do GeoGebra - Seções Cônicas



Fonte: (LEITE, Bruno, 2017)

Disponível em para acesso: https://www.geogebra.org/m/uj2bfSJV

Na Janela 1 é uma seção do cone duplo na direção do eixo central do cone, exibe o ângulo interno entre o eixo central, que no controle é identificado pela letra g, além disso, o ângulo da interseção do plano da seção com o eixo central, identificado pela letra p. Na Janela 2, é uma janela apresenta o cone duplo e o plano em 3 dimensões. Na janela 3 exibe a cônica formada pela interseção. Assim, o aluno consegue transitar entre todas as seções cônicas simples e degeneradas.

5 Sequências Didáticas: Problemas envolvendo Seções Cônicas e Resolvidos utilizando a Teoria de Polya e apoio do GeoGebra

Neste capítulo, apresenta-se uma proposta com três sequências didáticas voltadas ao ensino de cônicas, construída com base na metodologia de resolução de problemas formulada por (POLYA, 2003) e no uso do software GeoGebra como ferramenta pedagógica.

Uma sequência didática pode ser definida como um conjunto de atividades escolares, planejadas e ordenadas de maneira progressiva, com o intuito de facilitar a assimilação de um conceito ou o desenvolvimento de uma habilidade complexa. Segundo o renomado didata francês Jean-Pierre Astolfi, uma sequência didática não se resume a uma mera sucessão de exercícios, mas constitui um percurso metodológico que busca confrontar o aluno com problemas significativos, permitindo que ele elabore, teste e valide hipóteses para construir um conhecimento sólido e coerente. Essa abordagem, portanto, difere da simples transmissão de conteúdo, pois organiza o processo de aprendizagem em torno de desafios que levam o estudante a mobilizar seus saberes e a evoluir em suas representações sobre o objeto de estudo (ASTOLFI, 1999)

As sequências foram elaboradas com o objetivo de articular a exploração geométrica dinâmica com o desenvolvimento do raciocínio heurístico, favorecendo uma aprendizagem mais significativa dos conceitos relacionados às curvas cônicas: parábola, elipse e hipérbole.

Os exemplos foram adaptados do canal MATEMÁTICA PARA GENTE GRANDE (2024) e aplicados à teoria da resolução de problemas de Polya. O canal foi elaborado por Alan Kardek Santos Ferreira, professor do Instituto Federal da Bahia - campus Vitória da Conquista, e possui atividades de matemática de diversos tópicos, incluindo algumas com o uso da tecnologia, as quais são interessantes trabalhar com os alunos do ensino médio.

A proposta se apoia na concepção de ensino por investigação, valorizando a construção do conhecimento matemático a partir da resolução de problemas, e no uso de recursos tecnológicos que ampliam a visualização e a interatividade nos ambientes de aprendizagem.

5.1 Requisitos Técnicos para a Sequência Didática

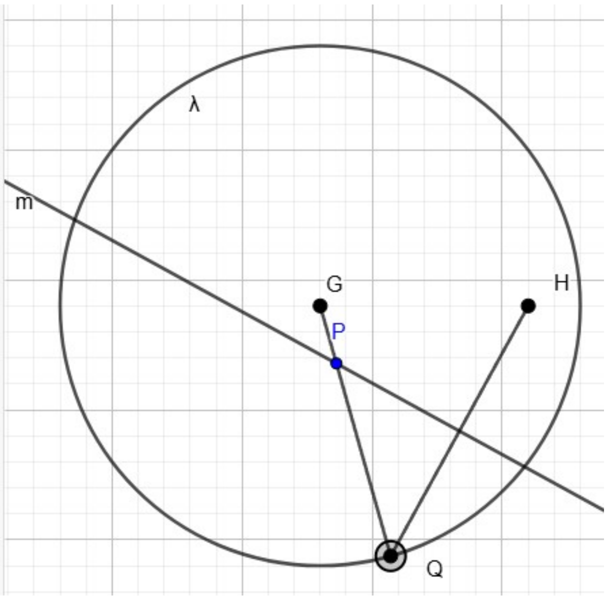
Para a realização das atividades propostas, é essencial que os alunos tenham acesso a um computador ou dispositivo móvel.

A experiência de visualização dos exemplos interativos é otimizada em dispositivos com resolução de tela de 1920x1080 pixels. Em resoluções inferiores ou em telas de dispositivos móveis, partes dos exemplos podem não ser exibidas completamente. Contudo, todos os exemplos estão disponíveis como figuras estáticas no material de apoio, e as atividades podem ser desenvolvidas adaptando-se às limitações de cada tela.

5.2 Problema 1: Desvendando a Elipse a partir de um Ponto Interior à Circunferência

ENUNCIADO: A Circunferência λ com centro $G(-4,0)$ e raio $r = 10$, o ponto Q pertencente à circunferência e $H(4,0)$ um ponto interno à circunferência.
Considere os segmentos $\overline{GQ}$ e $\overline{HQ}$, observe que $\overline{GQ}$ é raio da circunferência. Além disso, temos que a reta m é mediatriz do segmento $\overline{HQ}$, o ponto P é a interseção do segmento $\overline{GQ}$.

Figura 31 – Circunferência do problema



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

a) Criar todos os elementos do problema no software GeoGebra junto com o professor.

b) Prove que o rastro do movimento do ponto P em função da posição do ponto Q é uma Elipse.

c) Determine a equação reduzida da elipse descrita pelo rastro do ponto P.

CAMINHO ESCOLHIDO: O aluno utilizará o GeoGebra para gerar o problema, traçar novos segmentos, escrever no aplicativo com a ferramenta de texto para verificar as respostas ou papel à mão.

CONTEÚDOS ABORDADOS: Definição e as propriedades de uma circunferência, como centro e raio, além das propriedades de uma mediatriz. Também serão estudadas a definição e as características de uma elipse, com ênfase em seus focos e no eixo focal, bem como a equação reduzida da elipse. Serão explorados ainda conceitos fundamentais como a distância entre dois pontos e as propriedades dos triângulos isósceles. Por fim, será abordada a prova geométrica como ferramenta para a demonstração de propriedades e relações entre os elementos estudados.

CATEGORIZAÇÃO: Segundo Polya – Problema de Demonstração (letra b) e problema de determinação (letra c).

COMENTÁRIO: O problema envolve a criação da figura no aplicativo GeoGebra, que deverá ser realizado preferencialmente em um computador. Além disso, serão abordados conteúdos de geometria analítica e revisadas propriedades da geometria plana, sendo necessário que o aluno já tenha estudado os conteúdos abordados. Esta atividade aplica-se na 3ª série do ensino médio, na modalidade regular.

5.2.1 Construção do problema

O professor deverá utilizar um projetor para exibir e acompanhar a construção com os alunos, para garantir que os mesmos deem prosseguimento na resolução do problema.

A escolha por comandos digitados na janela de álgebra garante a funcionalidade dos elementos interativos. Entretanto, todos os comandos devem ser escritos idênticos como estão sendo apresentados entre aspas, não se esquecendo dos acentos, vírgulas, pontos e lembrando que as letras maiúsculas e minúsculas são elementos diferentes no programa.

1. Na janela de álgebra, no campo “Entrada...”, serão digitados todos os comandos. Construa o ponto G na coordenada $(-4, 0)$ digitando o comando:

   "$G = (-4, 0)$";

   O ponto G deve estar fixado, para manter a construção geométrica estável. Para realizar esta ação, é necessário clicar com o botão direito no objeto a ser fixado, selecionar configurações e marcar a caixa de seleção da opção "Fixar Objeto", conforme explicado no capítulo 4;

2. Construa uma circunferência λ de centro G e raio 10 pelo comando:
   "λ:círculo$(G, 10)$";

3. Construa o ponto H pelo comando:

   "$H = (4, 0)$" e fixe este ponto;

4. Construa o ponto Q, pertencente à circunferência λ, que será inserido pelo comando: "$Q = Ponto(\lambda)$"

   O ponto Q deve percorrer o comprimento da circunferência e não deve alterar a geometria da circunferência.

5. Construa o raio da circunferência, o segmento $\overline{GQ}$ pelo comando:

   "$r = segmento(G, Q)$".

6. Construa o segmento $\overline{HQ}$ pelo comando:

   "$s = segmento(H, Q)$".

7. Construa e a mediatriz m pelo comando:

   "$m = mediatriz(H, Q)$".

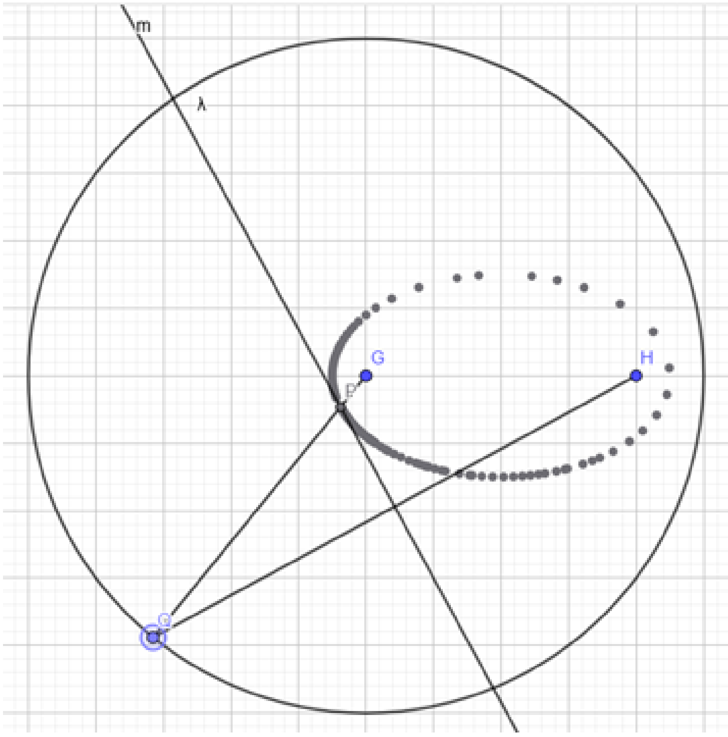
8. Construa o ponto P, ele é a interseção da mediatriz m como segmento $\overline{HQ}$, pelo comando:

   "P=Interseção(r, m)".

9. Para ativar o rastro do ponto P, basta clicar com o botar direito, e clicar a opção "Exibir Rastro", assim como no item anterior.

10. O aluno deve interagir girando o ponto Q ao redor da circunferência até formar a suposta elipse, que será provada.

Figura 32 – Elaboração do Problema Concluída



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

11. A construção do problema está disponível no link:

    https://www.geogebra.org/classic/hcq4qph5

5.2.2 Resolução do Problema

Etapa 1: Compreensão do Problema

Nesta etapa o objetivo principal é familiarizar os alunos com a construção geométrica, os elementos envolvidos e o que está sendo solicitado.

Ações do Professor:

Inicie com uma leitura conjunta do problema, garantindo que os alunos consigam visualizar cada elemento geométrico apresentado. Em seguida, instrua-os a movimentar o ponto Q sobre a circunferência λ e a observar atentamente o "rastro"formado pelo ponto P. Encoraje-os a descrever verbalmente o que acontece com P e com os demais elementos (segmentos, mediatriz) durante esse movimento dinâmico.

Em seguida, um questionamento dirigido para aprofundar o raciocínio sobre os dados fornecidos:

- Sobre a circunferência λ:

  - O centro de λ foi explicitamente fornecido? Qual ponto o representa?
  - Existe um raio definido? Qual segmento representa esse raio?

- Sobre os segmentos interativos:
  - O que foi observado com os comprimentos dos segmentos $\overline{GQ}$ e $\overline{HQ}$ enquanto o ponto Q se movimenta?

- Sobre a mediatriz m:
  - Qual é a função da mediatriz m em relação ao segmento $\overline{HQ}$? Quais são suas propriedades constantes?

- Sobre o ponto P:
  - Considerando que o ponto P é a interseção do prolongamento do raio $\overline{GQ}$ (ou do próprio raio, dependendo da configuração) com a mediatriz m, o que se pode observar sobre sua trajetória? Que forma geométrica essa trajetória sugere?

Atividades do Aluno:

As atividades do aluno iniciam-se com a leitura e identificação do enunciado, onde devem ser reconhecidos os dados (G, Q, H, λ, m, P) e o que é solicitado. Em seguida, interagir com o GeoGebra, movimentando o ponto Q para observar o trajeto do ponto P e como os segmentos $\overline{GQ}$, $\overline{HQ}$ e a mediatriz ”m” se comportam durante esse movimento.

Construir o texto interativo da medida dos segmentos $\overline{GQ}$ e $\overline{HQ}$ faz parte desta etapa, pois deixará de maneira mais evidente na tela e servirá como ponto de partida para o estabelecimento de um plano. Assim, quando o aluno mover o ponto Q observará as medidas dos segmentos.

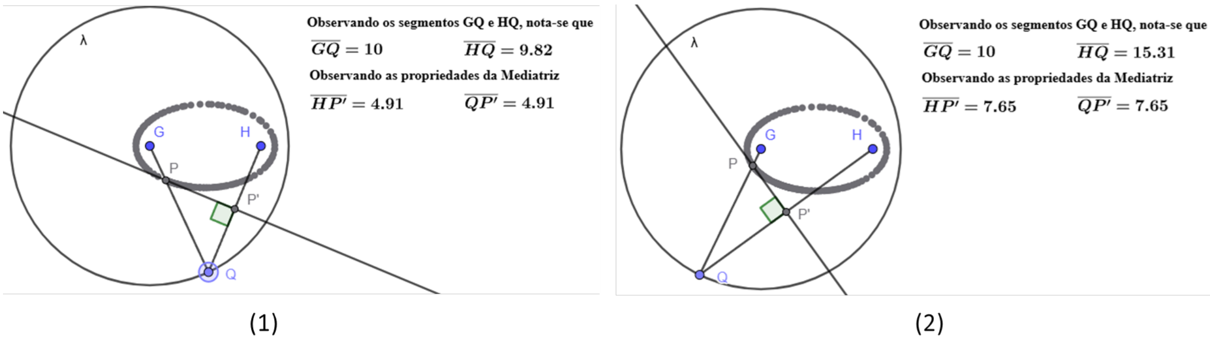
Para que esta configuração funcione perfeitamente, é essencial que os segmentos $\overline{GQ}$ e $\overline{HQ}$ estejam associados aos parâmetros "r"e "s"no GeoGebra, respectivamente, conforme com a construção que vem sendo estruturada. Caso contrário, também será possível criar, mas deverá ser adaptado ao parâmetros criados pelo usuário ou criados automaticamente pelo GeoGebra quando não se define um parâmetro.

A partir dessa observação, o aluno deve formular hipóteses iniciais, anotando as primeiras impressões sobre a forma gerada pelo rastro de P e reconhecendo que, embora se assemelhe a uma elipse, tal fato necessita de comprovação.

Por fim, é crucial realizar anotações, listando os elementos fixos e variáveis na construção: $\overline{GQ}$ (raio) é constante, $\overline{HQ}$ varia em tamanho, e a mediatriz "m"se movimenta, mas sempre divide $\overline{HQ}$.

Para melhor visualização, construir o ponto P', interseção da mediatriz m com o segmento a fim de criar um texto interativo comprovando que m divide $\overline{HQ}$ ao meio. Além disso, fazer um ângulo entre os pontos $PP'Q$ para observar que sempre forma um ângulo de 90° com este segmento, o aluno deverá ter em sua tela algo semelhante À Figura 33.

Figura 33 – Anotações dos alunos no GeoGebra para observar propriedades abordadas



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

Etapa 2: Estabelecimento de um Plano

Nesta etapa, o professor deve conduzir os alunos a conectar a observação com a definição formal de uma elipse e planejar os passos da demonstração.

Ações do Professor

- Definição de Elipse:
  - Pergunte: "Como definimos uma elipse?".
  - Guie-os para a definição focal: *Uma elipse é o conjunto de todos os pontos P no plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos (os focos F_1 e F_2) é constante ($PF_1 + PF_2 = 2a$).*
- Identificando os Focos:
  - Questione: "Com base na nossa construção, quais poderiam ser os focos da elipse que P descreve?"
  - Sugira que G e H são os candidatos a focos (F_1 e F_2).
- O Que Precisamos Provar?:
  - Se G e H são os focos, o que precisamos demonstrar sobre o ponto P para provar que ele descreve uma elipse? (Resposta: Que $PG + PH$ é constante).

- Estratégia de Prova:
  - Pergunte sobre as propriedades da mediatriz m. "O ponto P está na mediatriz do segmento HQ. O que isso nos diz sobre as distâncias de P a H e de P a Q?"(Resposta: $PH = PQ$).
  - "O ponto P também está no segmento GQ. Como podemos expressar o comprimento do raio GQ em termos de GP e PQ?"(Resposta: $GQ = GP + PQ$).
  - "Considerando $PH = PQ$, como podemos reescrever a soma $GP + PH$?"

Atividades do Aluno

O aluno deve recordar a definição de elipse (soma das distâncias aos focos é constante), considerar G como um dos focos (F_1), H como o outro foco (F_2), ponto P como ponto que descreve a curva e construir o segmento $\overline{PH}$. Em seguida, concluir que é necessário provar que $\overline{GP} + \overline{HP} =$ constante.

Para o Desenvolvimento do Plano serão realizadas as etapas:

- Utilizar a propriedade da mediatriz: Como P pertence à mediatriz m do segmento $\overline{HQ}$, então $PH = PQ$. (Pode ser necessário que o professor lembre ou que os alunos deduzam isso, por exemplo, observando que o triângulo $\triangle PQH$ formado pelo segmento $\overline{HQ}$ e um ponto que pertence a mediatriz sempre será um triângulo isósceles, desde que P seja diferente de P'.
- Utilizar a colinearidade dos pontos G, P, Q: O ponto P está no segmento GQ, então $GQ = GP + PQ$.
- Combinar as informações: Substituir PQ por PH na equação $GQ = GP + PQ$.

Etapa 3: Execução do Plano

Nesta etapa, é necessário realizar a demonstração formal (item a) e os cálculos para a equação da elipse (item b).

Guiando a Demonstração (item b):

- Peça aos alunos para escreverem no Geogebra a prova passo a passo, de acordo com o planejamento na etapa anterior, justificando cada afirmação com as propriedades geométricas identificadas e as verificando.
- Como P pertence à mediatriz m do segmento $\overline{HQ}$, então o triângulo $\triangle$ HPQ sempre será isósceles, assim os segmento:

  - $\overline{PH} = \overline{PQ}\ \forall\ Q \in \lambda$. Só não existirá o triângulo $\triangle HPQ$, quando $P = P'$, mas a equação $\overline{PH} = \overline{PQ}$ continuará valendo.

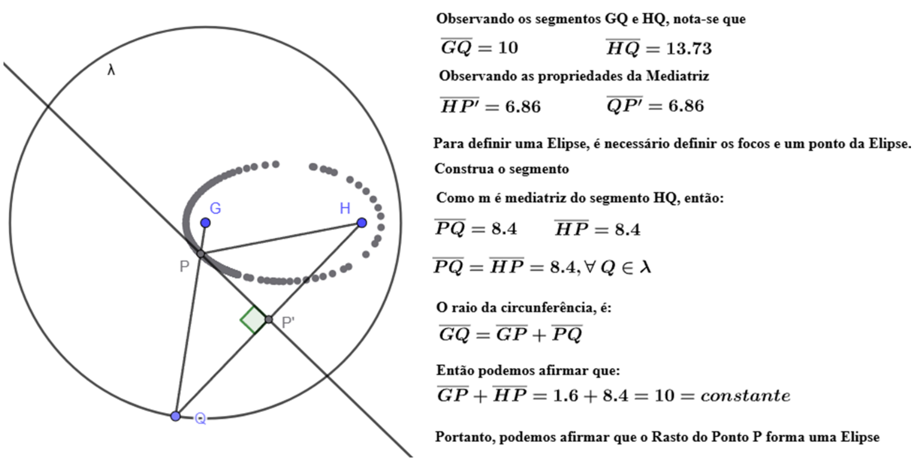
- Então, o aluno poderá provar essa igualdade no Geogebra criando os textos interativo com os segmentos $\overline{PH}$ e $\overline{PQ}$ e suas respectivas medidas, movendo o ponto que e observando a propriedade.

- Observando e escrevendo que o Raio $(r) = \overline{GQ}$ da circunferência mede sempre:
$$\begin{cases} \overline{GQ} & = \overline{PG} + \overline{PQ} \\ \overline{PH} & = \overline{PQ} \end{cases} \implies \overline{GQ} = \overline{PG} + \overline{PH}$$

- Pergunte: "O comprimento $\overline{GQ}$ é constante ou variável? Por quê?"
  - Resposta: Constante, pois é o raio da circunferência λ.

- Conclua: "Se $PG + PH$ é igual ao raio (uma constante), o que isso significa para a trajetória de P?"
  - Resposta: É uma elipse com focos G e H, e a medida do eixo focal $2a$ é igual ao raio da circunferência λ.

Figura 34 – Resolução do item b) construído pelo aluno



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

Para uma exploração interativa dos elementos, acesse: https://www.geogebra.org/classic/mcc82ete.

Item c) Equação Reduzida:

- Uma vez provado que é uma elipse, introduza os valores específicos: raio $r = 10$, $G(-4, 0)$ e $H(4, 0)$.

- Ao analisar as hipótese com os alunos, pergunte: "Se G e Q são os focos e temos as coordenadas, é possível calcular qual distância?"
- Pergunte: "Quais elementos serão necessários para obter as equação reduzida?"
- Lembre aos alunos a forma da equação reduzida de uma elipse com focos no eixo x e centro na origem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Se o centro não for a origem, usar $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$. Sendo assim, eles precisarão calcular a posição do centro da hipérbole $C(x_0, y_0)$ e as medidas dos semieixos a e b.
- O centro da elipse $C(x_0, y_0)$: O ponto médio do segmento $\overline{GH}$.
  - Centro da Elipse: $\begin{cases} x_c = & \frac{-4+4}{2} = 0. \\ y_c = & \frac{0+0}{2} = 0. \end{cases} \implies C(0,0)$
- O valor do eixo focal $2a$, é o tamanho do raio:
  - $2a = 10 \implies a = 5$
- A distância focal $2c > 0$: Distância entre G e H.
  - $2c = \sqrt{(-4-4)^2 + (0+0)^2} \implies 2c = \sqrt{(-8)^2} \implies 2c = 8 \implies c = 4$
- Utilizando a relação fundamental dos semieixos da elipse, obtêm-se a medida do semieixo não focal (b):
  - $a^2 = b^2 + c^2 \implies b^2 = a^2 - c^2 \implies b^2 = 25 - 16 \implies b^2 = 9 \implies b = 3$
- Por fim, o aluno será capaz de escrever a equação reduzida.
  - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Etapa 4: Reflexão sobre o Trabalho

Nesta Etapa, é importante consolidar o aprendizado, verificar a solução e explorar variações ou generalizações.

Verificação da Solução:

- "A prova faz sentido? Todos os passos estão justificados?"
- "A equação encontrada é consistente com a elipse visualizada no GeoGebra?"
- Peça para os alunos verificarem se, ao configurar G, H e o raio no GeoGebra com os valores do item (b), a elipse traçada pelo ponto P corresponde visualmente à elipse da equação. (Eles podem plotar a equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ no GeoGebra para comparar).

Discussão e Generalização:

- "O que aconteceria com a elipse se o ponto H estivesse mais próximo do centro G?"(A elipse seria menos "achatada", mais próxima de uma circunferência, pois c diminuiria e b se aproximaria de a).
- "O que aconteceria se H coincidisse com G?"(Se H=G, a mediatriz de GQ seria considerada. P seria o ponto médio de GQ. Então $GP = PQ$. A soma $GP + PH$ se tornaria $GP + PG = 2GP$. Se $2GP$ = Raio, então GP = Raio/2. O traço seria uma circunferência concêntrica com G e raio igual à metade do raio da circunferência original λ).
- "E se H estivesse sobre a circunferência λ (mas diferente de Q)?"(A elipse degeneraria. Se H está na circunferência, a mediatriz de HQ pode ter diferentes configurações. Por exemplo, se Q e H forem diametralmente opostos, a mediatriz passa por G. P seria G. Se Q=H, a mediatriz não está definida. Esta construção específica pode levar a degenerações interessantes para explorar, como um segmento de reta).
- "A propriedade $2a$ = raio é sempre verdadeira para esta construção?"(Sim, conforme provado).

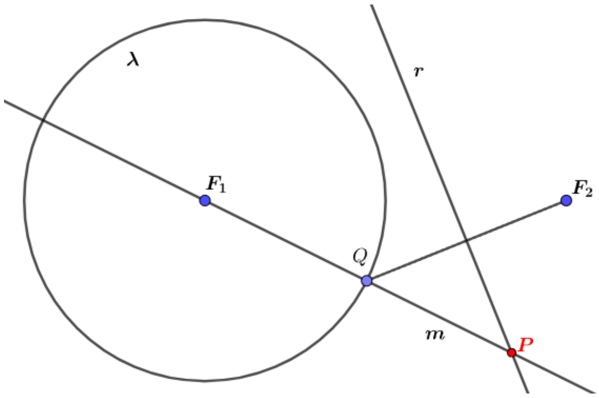
Finalizando com conexões:

É possível relacionar esta construção com outras formas de gerar cônicas ou com aplicações de elipses no mundo real como órbitas planetárias, formato de estádios de futebol e outros modelos. No GeoGebra, há diversos modelos para serem utilizados com essa finalidade, como sugestão sobre as órbitas dos planetas do sistema solar, como o de (PEDONE, Marcello, 2012), disponível no link: https://www.geogebra.org/classic/wwhmvbkj.

5.3 Problema 2 - Explorando a Hipérbole: A Interação entre a Circunferência e um Ponto Externo

ENUNCIADO: A Circunferência λ com centro $F_1(-15, -1)$ e raio $r = 24$, o ponto Q pertencente à circunferência e o ponto $F_2(11, -1)$ externo à circunferência. Considere a reta r que contém os pontos F_1 e Q, e a reta m é a mediatriz do segmento $\overline{QF_2}$, e o ponto P que é a interseção entre as retas r e m.

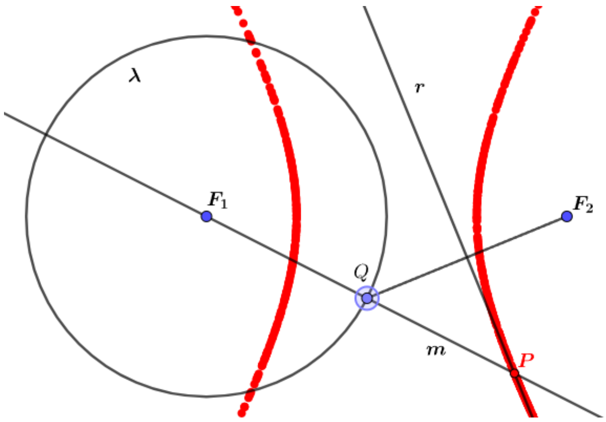
Figura 35 – Elementos iniciais do problema



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

Após a interação com o ponto Q, girando-o em torno da circunferência λ, gera uma figura semelhante a uma cônica, rastro do ponto P, exibido na Figura 36.

Figura 36 – Rastro de P apos interação com ponto Q



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

A partir das informações dadas, responda e faça os itens a), b) e c).

a) Construa todos os elementos do problema no software GeoGebra junto com o professor.

b) Prove que o rastro do movimento do ponto P em função da posição do ponto Q é uma hipérbole.

c) Determine a equação reduzida da hiperbole descrita pelo rastro do ponto P.

CAMINHO ESCOLHIDO: O aluno utilizará o GeoGebra para gerar o problema, traçar novos segmentos, escrever no aplicativo com a ferramenta de texto para verificar as respostas ou papel à mão.

CONTEÚDOS ABORDADOS: Definição e as propriedades de uma circunferência, como centro e raio, além das propriedades de uma mediatriz. Também serão estudadas a definição e as características de uma hipérbole, com ênfase em seus focos e no eixo focal, bem como a equação reduzida da hipérbole. Serão explorados ainda conceitos fundamentais como a distância entre dois pontos e as propriedades dos triângulos isósceles. Por fim, será abordada a prova geométrica como ferramenta para a demonstração de propriedades e relações entre os elementos estudados.

CATEGORIZAÇÃO: Segundo Polya – Problema de Demonstração (item b) e Determinação (item c).

COMENTÁRIO: O problema envolve a criação da Figura no aplicativo GeoGebra, que deverá ser realizado preferencialmente em um computador. Além disso, serão abordados conteúdos de geometria analítica e revisadas propriedades da geometria plana, sendo necessário que o aluno já tenha estudado os conteúdos abordados. Esta atividade aplica-se na 3ª série do ensino médio, na modalidade regular.

5.3.1 Construção do problema

Assim como no problema anterior, o professor deve exibir no projetor e executar os passos junto com os alunos. Além disso, é importante ressaltar que os comandos sejam escritos idênticos aos exibidos entre parênteses e a sequência prevista.

1. Construa os pontos F_1 e F_2 pelos comandos:

   "$F_1 = (-15, -1)$" e "$F_2 = (11, -1)$";

2. Construa a circunferência λ, indicando seu centro e o comprimento do raio, pelo comando:

   "λ=circunferência($F_1, 24$)";

3. Construa o ponto Q pertencendo a circunferência λ, pelo comando:

   "P=ponto(λ)";

4. Construa a reta r indicando dois pontos, pelo comando:

   "r=reta(Q,F_1)";

5. Construa o segmento $\overline{QF_2}$, pelo comando

   "f=segmento(Q,F_2)";

6. Construa a mediatriz do segmento $\overline{QF_2}$, pelo comando:

   "m=mediatriz(Q,F_2)";

7. Construa o ponto P, interseção da das retas m e r, pelo comando:
   "P=interseção(m,r)";
8. Desmarque a opção exibir rótulo no segmento $\overline{QF_2}$;
9. Fixe os pontos F_1 e F_2 para que os alunos não alterem as posições dos pontos por engano;
10. Habilite o rastro do ponto P.

Na tela do aplicativo GeoGebra deve exibir uma construção semelhante à Figura 35. Em seguida, o aluno deve girar o ponto Q em torno da circunferência λ pelo menos uma volta completa e observar o rastro descrito pelo ponto P, que deve ser semelhante ao exibido na Figura 36.

5.3.2 Resolução do Problema

Etapa 1: Compreensão do Problema

Nesta etapa, o objetivo principal é familiarizar os alunos com a construção geométrica, os elementos envolvidos e o que está sendo solicitado.

Ações do Professor:

Inicie com uma leitura conjunta do problema, garantindo que os alunos consigam visualizar cada elemento geométrico apresentado. Em seguida, instrua-os a movimentar o ponto Q sobre a circunferência λ e a observar atentamente o "rastro"formado pelo ponto P. Encoraje-os a descrever verbalmente o que acontece com P e com os demais elementos (reta r, mediatriz m, segmento $\overline{QF_2}$) durante esse movimento dinâmico.

Em seguida, um questionamento dirigido para aprofundar o raciocínio sobre os dados fornecidos:

- Sobre a circunferência λ:
  - O centro de λ foi explicitamente fornecido? Qual ponto o representa? (Sim, $F_1(-15,-1)$).
  - Existe um raio definido? Qual segmento representa esse raio e qual seu valor? (Sim, o raio é $\overline{F_1Q} = 24$).
- Sobre os segmentos e distâncias interativas:
  - O que foi observado com o comprimento do segmento $\overline{F_1Q}$ enquanto o ponto Q se movimenta? (Permanece constante, igual ao raio 24).

- O que foi observado com o comprimento do segmento $\overline{QF_2}$? (Varia conforme Q se move).

- Sobre a mediatriz m:
  - Qual é a função da mediatriz m em relação ao segmento $\overline{QF_2}$? Quais são suas propriedades constantes? (É perpendicular a $\overline{QF_2}$ e passa pelo seu ponto médio. Qualquer ponto em m é equidistante de Q e F_2).

- Sobre o ponto P:
  - Considerando que o ponto P é a interseção da reta r (que contém F_1 e Q) com a mediatriz m de $\overline{QF_2}$, o que se pode observar sobre sua trajetória? Que forma geométrica essa trajetória sugere? (Sugere uma hipérbole).

Atividades do Aluno:

As atividades do aluno iniciam-se com a leitura e identificação do enunciado, onde devem ser reconhecidos os dados (F_1, F_2, Q, λ, r, m, P) e o que é solicitado. Em seguida, interagir com o GeoGebra, movimentando o ponto Q para observar o trajeto do ponto P e como a reta r, o segmento $\overline{QF_2}$ e a mediatriz m se comportam durante esse movimento.

A partir dessa observação, o aluno deve formular hipóteses iniciais, anotando as primeiras impressões sobre a forma gerada pelo rastro de P e reconhecendo que, embora se assemelhe a uma hipérbole, tal fato necessita de comprovação.

Por fim, é crucial realizar anotações, listando os elementos fixos e variáveis na construção: F_1Q (raio) é constante ($r = 24$), $PF_2 = PQ$ (pois P está na mediatriz de $\overline{QF_2}$). Além disso, os pontos F_1, Q, P são colineares.

Etapa 2: Estabelecimento de um Plano

Nesta etapa, o professor deve conduzir os alunos a conectar a observação com a definição formal de uma hipérbole e planejar os passos da demonstração.

Ações do Professor

- Definição de Hipérbole:
  - Pergunte: "Como definimos uma hipérbole?".
  - Guie-os para a definição focal: *Uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos P no plano tais que o valor absoluto da diferença das distâncias de P a dois pontos fixos (os focos F_1 e F_2) é constante ($|PF_1 - PF_2| = 2a$).*

- Identificando os Focos:
  - Questione: "Com base na nossa construção, quais poderiam ser os focos da hipérbole que P descreve?"
  - Sugira que F_1 e F_2 são os candidatos a focos.
- O Que Precisamos Provar?:
  - Se F_1 e F_2 são os focos, o que precisamos demonstrar sobre o ponto P para provar que ele descreve uma hipérbole? (Resposta: Que $|PF_1 - PF_2|$ é constante).
- Estratégia de Prova:
  - Pergunte sobre as propriedades da mediatriz m. "O ponto P está na mediatriz do segmento $\overline{QF_2}$. O que isso nos diz sobre as distâncias de P a F_2 e de P a Q?"(Resposta: $PF_2 = PQ$).
  - "O ponto P também está na reta r que contém F_1 e Q. Como podemos relacionar PF_1, PQ e F_1Q (o raio)?"(Resposta: Depende da ordem dos pontos F_1, Q, P na reta r).
  - "Considerando $PF_2 = PQ$, como podemos reescrever a diferença $|PF_1 - PF_2|$?"(Resposta: $|PF_1 - PQ|$).
  - "Como a colinearidade dos pontos F_1, Q, P e o fato de F_1Q ser o raio da circunferência nos ajudam a encontrar o valor de $|PF_1 - PQ|$?"

Atividades do Aluno

O aluno deve recordar a definição de hipérbole (o valor absoluto da diferença das distâncias aos focos é constante), considerar F_1 e F_2 como os focos e P como ponto que descreve a curva. Em seguida, concluir que é necessário provar que $|PF_1 - PF_2| =$ constante.

Para o Desenvolvimento do Plano serão realizadas as etapas:

- Utilizar a propriedade da mediatriz: Como P pertence à mediatriz m do segmento $\overline{QF_2}$, então $PF_2 = PQ$.
- Utilizar a colinearidade dos pontos F_1, P, Q: O ponto P está na reta r que contém F_1 e Q. O segmento $\overline{F_1Q}$ é o raio da circunferência λ, logo $F_1Q = r_{circ} = 24$.
- Analisar a relação entre PF_1, PQ e F_1Q devido à colinearidade.
- Combinar as informações: Substituir PF_2 por PQ na expressão $|PF_1 - PF_2|$ e usar a relação de colinearidade para mostrar que essa diferença é igual a r_{circ} (ou $-r_{circ}$).

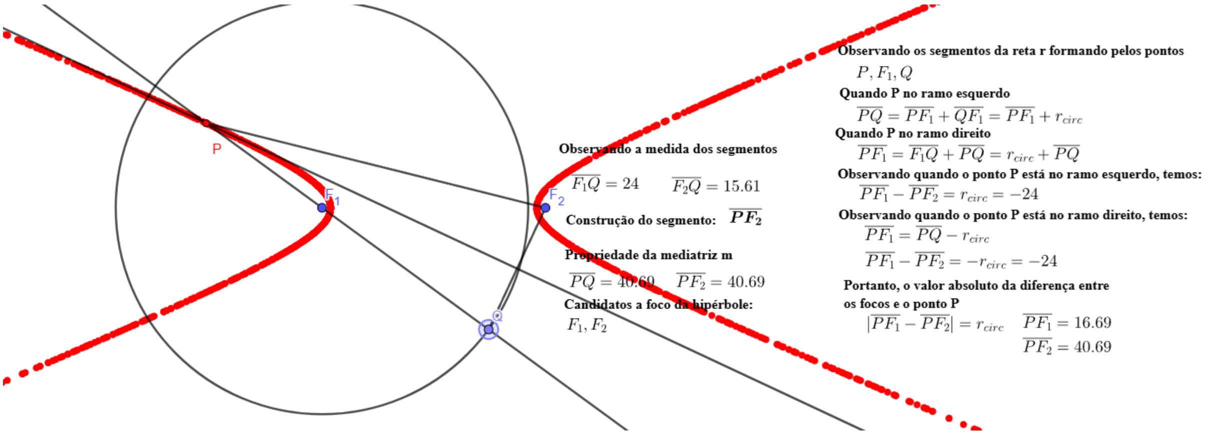
Etapa 3: Execução do Plano

Nesta etapa, é necessário realizar a demonstração formal (item b) e os cálculos para a equação da hipérbole (item c).

Guiando a Demonstração (item b):

- Peça aos alunos para escreverem a prova passo a passo, de acordo com o planejamento da etapa anterior, justificando cada afirmação com as propriedades geométricas identificadas.
- Como P pertence à mediatriz m do segmento $\overline{QF_2}$, o ponto P é equidistante de Q e F_2. Assim:
  - $PF_2 = PQ \ \forall \ Q \in \lambda$.
- O aluno pode verificar essa igualdade no GeoGebra criando textos interativos com os segmentos $\overline{PF_2}$ e $\overline{PQ}$ e suas respectivas medidas, movendo o ponto Q e observando a propriedade.
- Os pontos F_1, Q, P são colineares, pois P pertence à reta r que contém F_1 e Q. O segmento F_1Q é o raio da circunferência λ, então $F_1Q = r_{circ} = 24$.
- Vamos analisar a diferença das distâncias $|PF_1 - PF_2|$. Substituindo $PF_2 = PQ$, temos $|PF_1 - PQ|$.
- Devido à colinearidade de F_1, Q, P, temos duas situações principais para a posição de P em relação a F_1 e Q (excluindo o caso em que P estaria entre F_1 e Q, que levaria a uma elipse):
  1. **Q está entre F_1 e P:** Neste caso, P está no prolongamento do raio F_1Q para além de Q. Então, $PF_1 = F_1Q + QP$. Assim, $PF_1 - PQ = (F_1Q + QP) - QP = F_1Q = r_{circ}$. Logo, $PF_1 - PF_2 = r_{circ} = 24$.
  2. **F_1 está entre Q e P:** Neste caso, P está no prolongamento do raio QF_1 para além de F_1. Então, $PQ = QF_1 + F_1P$. Assim, $PF_1 - PQ = PF_1 - (QF_1 + PF_1) = -QF_1 = -r_{circ}$. Logo, $PF_1 - PF_2 = -r_{circ} = -24$.
- Em ambos os casos, o valor absoluto da diferença é constante: $|PF_1 - PF_2| = |\pm r_{circ}| = r_{circ} = 24$.
- Pergunte: "O comprimento r_{circ} (raio F_1Q) é constante ou variável? Por quê?"
  - Resposta: Constante, pois é o raio da circunferência λ.

Figura 37 – resoluçãodo aluno item b



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

- Conclua: "Se $|PF_1 - PF_2|$ é igual ao raio (uma constante), o que isso significa para a trajetória de P?"
  - Resposta: É uma hipérbole com focos F_1 e F_2, e a medida do eixo focal $2a$ é igual ao raio da circunferência λ, ou seja, $2a = r_{circ} = 24$.

Para uma exploração interativa dos elementos, acesse:

https://www.geogebra.org/classic/uxmvcs4w.

Item c) Equação Reduzida:

- Uma vez provado que é uma hipérbole, utilize os valores específicos: raio $r_{circ} = 24$, $F_1(-15, -1)$ e $F_2(11, -1)$.
- Lembre aos alunos a forma da equação reduzida de uma hipérbole com focos no eixo x e centro (x_c, y_c): $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$ (para eixo focal horizontal) ou $\frac{(y-y_c)^2}{a^2} - \frac{(x-x_c)^2}{b^2} = 1$ (para eixo focal vertical).
- **Cálculo do centro da hipérbole $C(x_c, y_c)$:** O centro é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$.
  - $x_c = \frac{-15+11}{2} = \frac{-4}{2} = -2$.
  - $y_c = \frac{-1+(-1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.
  - Logo, o centro é $C(-2, -1)$.
- **Cálculo de a (semi-eixo focal):** Como provado no item b), $2a = r_{circ}$.
  - $2a = 24 \implies a = 12$.

- **Cálculo de c (semi-distância focal):** A distância focal $2c$ é a distância entre F_1 e F_2.
  - $2c = \sqrt{(11-(-15))^2 + (-1-(-1))^2} = \sqrt{(26)^2 + 0^2} = \sqrt{26^2} = 26.$
  - $c = 13.$
- **Cálculo de b (semi-eixo não focal):** Para uma hipérbole, temos a relação $c^2 = a^2 + b^2$.
  - $b^2 = c^2 - a^2 \implies b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25.$
  - $b = \sqrt{25} = 5.$
- **Equação reduzida da hipérbole:** Os focos $F_1(-15,-1)$ e $F_2(11,-1)$ estão sobre uma reta horizontal ($y = -1$). Portanto, o eixo focal da hipérbole é horizontal. A equação é da forma $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$.
  - Substituindo $x_c = -2$, $y_c = -1$, $a = 12$ e $b = 5$: $\frac{(x-(-2))^2}{12^2} - \frac{(y-(-1))^2}{5^2} = 1$
  - $\frac{(x+2)^2}{144} - \frac{(y+1)^2}{25} = 1.$
- O aluno será capaz de escrever a equação reduzida final e, opcionalmente, verificá-la no GeoGebra.

Etapa 4: Reflexão sobre o Trabalho

Nesta Etapa, é importante consolidar o aprendizado, verificar a solução e explorar variações ou generalizações.

Verificação da Solução:

- "A prova faz sentido? Todos os passos estão justificados?"
- "A equação encontrada é consistente com a hipérbole visualizada no GeoGebra (Figura 36)?"
- Peça para os alunos plotarem a equação $\frac{(x+2)^2}{144} - \frac{(y+1)^2}{25} = 1$ no GeoGebra para comparar com o rastro gerado pelo ponto P.

Discussão e Generalização:

- "O que aconteceria com a hipérbole se o ponto F_2 estivesse mais distante de F_1 (aumentando c), mantendo o raio r_{circ} da circunferência?"(Se c aumenta e a (que depende de r_{circ}) permanece o mesmo, $b^2 = c^2 - a^2$ aumentaria, tornando a hipérbole mais "aberta").

- "O que aconteceria se o raio r_{circ} da circunferência λ fosse menor, por exemplo, $r_{circ} = 10$ (lembrando que $2a = r_{circ}$ e $2c = 26$, então $a = 5$ e $c = 13$; $a < c$ ainda é válido)?"(O valor de a diminuiria, e a hipérbole se tornaria mais "fechada"ou "aguda"em seus vértices).
- "O que aconteceria se o ponto F_2 estivesse *dentro* da circunferência λ?"(Nesse caso, a construção geométrica levaria a uma elipse, pois teríamos $PF_1 + PF_2 = r_{circ}$, assumindo que P esteja entre F_1 e Q. A condição de P ser interseção da reta F_1Q com a mediatriz de QF_2 levaria a $|PF_1 \pm PQ| = r_{circ}$. Se P entre F_1 e Q, $PF_1 + PQ = F_1Q = r_{circ}$. Como $PQ = PF_2$, então $PF_1 + PF_2 = r_{circ}$, uma elipse).
- "A propriedade $2a = r_{circ}$ é sempre verdadeira para esta construção de hipérbole?"(Sim, conforme provado, desde que P esteja no prolongamento de F_1Q ou QF_1).

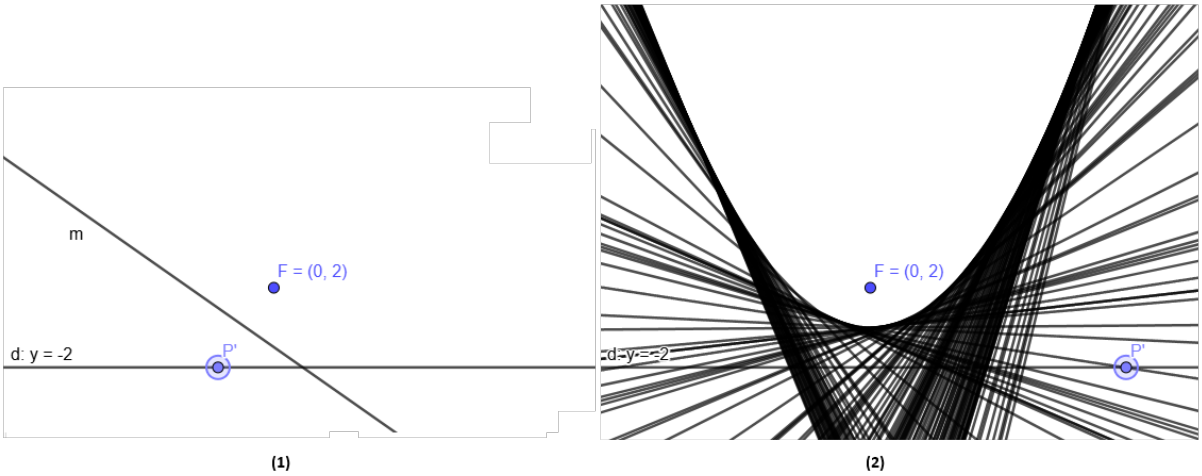
Finalizando com conexões:

Relacione esta construção com outras formas de gerar cônicas ou com aplicações de hipérboles no mundo real (por exemplo, na astronomia para descrever trajetórias de certos cometas, em sistemas de navegação como o LORAN, ou na acústica e ótica em refletores hiperbólicos).

5.4 Problema 3: Investigando a Parábola a partir da Propriedade da Equidistância

ENUNCIADO: No aplicativo GeoGebra, a construção dos elementos: ponto $F(0, 2)$, reta $d : y = -2$ e ponto P' que pertence à reta d. Em seguida, constrói-se a mediatriz m dos pontos F e P' e habilita-se o rastro da reta m.

Figura 38 – (1) Construção; (2) Construção após interação com o Ponto P’



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

Após a interação do ponto P’ da mediatriz, deixa o rastro das mediatrizes formam uma curva que delimita uma região. A partir dessas informações, responda aos itens abaixo.

a) Faça a construção dos elementos do problema no software GeoGebra junto com o professor.

b) Prove que a curva formada pelo rastro da reta m, ao se mover o ponto P’, é uma parábola.

c) Determine a equação reduzida dessa parábola.

CAMINHO ESCOLHIDO: OO aluno utilizará o GeoGebra para visualizar o problema, traçar novos segmentos e poderá usar a ferramenta de texto do próprio aplicativo ou papel para desenvolver e verificar suas respostas.

CONTEÚDOS ABORDADOS: Definição e propriedades da mediatriz. Definição e características da parábola, com ênfase em seu foco e na reta diretriz, bem como a equação reduzida da parábola. Conceitos fundamentais como a distância entre dois pontos e as propriedades dos triângulos isósceles. Por fim, a prova geométrica como ferramenta para a demonstração de propriedades e relações entre os elementos estudados.

CATEGORIZAÇÃO: Segundo Pólya – Problema de demonstração (letra b) e determinação (letra c).

COMENTÁRIO: O problema envolve a construção da figura no GeoGebra, cuja execução deve ser realizada preferencialmente em um computador. Além disso, serão abordados conteúdos de geometria analítica e serão revisadas propriedades da geometria plana, sendo necessário que o aluno já tenha familiaridade com os conteúdos mencionados. Esta atividade aplica-se à 3ª série do ensino médio, na modalidade regular.

5.4.1 Construção do problema

O professor deverá utilizar um projetor para exibir e acompanhar a construção com os alunos, para garantir que os mesmos deem prosseguimento na resolução do problema.

A escolha por comandos digitados na janela de álgebra, garantem a funcionalidade dos elementos interativos. Entretanto, todos os comandos devem ser escritos idênticos como estão sendo apresentados entre aspas, não se esquecendo os acentos, vírgulas, pontos e lembrando que as letras maiúsculas e minúsculas são elementos diferentes no programa.

1. Na janela de álgebra, no campo "Entrada...", serão digitados todos os comandos. Construa o ponto F na coordenada $(0, 2)$ digitando o comando:

   "$F = (0, 2)$";

2. Construa a reta diretriz d pelo comando:

   "$d : y = -2$";

3. Construa o ponto P' pertencente à reta, pelo comando:

   "$P' = Ponto(d)$";

4. Construa a mediatriz entre os pontos P' e F pelo comando:
   "$m = Mediatriz(F, P')$"

   Ative o rastro dessa mediatriz: clique com o botão direito do mouse sobre a reta m, vá em Configurações, na aba Básico, e marque a caixa de seleção na opção "Exibir Rastro".

5. Movimente o ponto P' pela reta o observe se o rastro da mediatriz faz a transição entre as imagens na Figura 38.

A construção do problema está disponível no link:
https://www.geogebra.org/classic/g8dmdupe

Fonte: Produção do próprio autor (2025)

5.4.2 Resolução do Problema

Etapa 1: Compreensão do Problema

Nesta etapa, o objetivo é que os alunos se familiarizem com a construção geométrica, os elementos envolvidos (ponto fixo, ponto móvel, reta diretriz) e o que está sendo solicitado no problema.

Ações do Professor:

O professor deve iniciar com uma leitura conjunta do enunciado, assegurando que os alunos identifiquem cada elemento na construção do GeoGebra. Em seguida, deve instruí-los a movimentar o ponto P' ao longo da reta diretriz d e a observar atentamente o "rastro"deixado pela mediatriz m. O objetivo é que os alunos percebam que as infinitas retas do rastro parecem tangenciar uma curva bem definida.

O professor pode aprofundar a investigação com os seguintes questionamentos:

- Sobre os elementos fixos e móveis:
  - Quais elementos na construção não mudam de posição? (O ponto F e a reta d).
  - Quais elementos se movem? (O ponto P' e, consequentemente, a reta mediatriz m).
- Sobre a mediatriz m:
  - Qual é a definição de uma mediatriz de um segmento? (É a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio).
  - Se tomarmos qualquer ponto sobre a reta m, qual é a relação de suas distâncias aos pontos F e P'? (Qualquer ponto na mediatriz é equidistante de F e P').
- Sobre a curva formada:
  - O rastro deixado pela reta m parece "desenhar"o contorno de que figura geométrica? (Uma parábola).
  - Como podemos provar que essa curva é, de fato, uma parábola? Qual é a definição de uma parábola?
  - Os dados obtidos somente com a leitura são suficientes para provar que a curva é uma parábola? Ou há necessidade de tirar conclusões dos dados e traçar novos segmentos?

Atividades do Aluno:

A atividade do aluno começa com a leitura e identificação dos dados do problema (Foco - $F(0,2)$, diretriz $d : y = -2$) e do que é solicitado (provar que o rastro é uma parábola e encontrar sua equação).

Em seguida, o aluno deve interagir com a construção no GeoGebra, movendo o ponto P' para observar como a reta m se comporta. A partir dessa observação, o aluno deve formular a hipótese de que a curva formada pelo rastro é uma parábola os quais contemplam tirar conclusões e traçar novos segmentos a partir dos elementos dados.

- Construir a reta r', que será perpendicular a reta d, passando por por P', pelo comando:

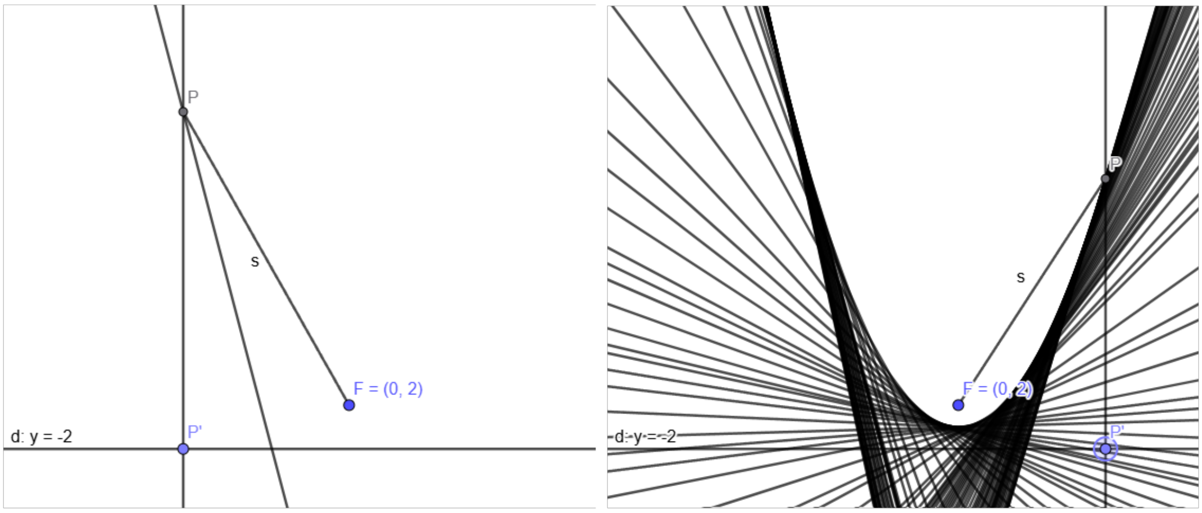
  "r'=Perpendicular(d,P')"

- Ao interagir novamente, ele notará que a interseção das retas r' e da m, tangencia a envoltória. Sendo assim, construirá o ponto P, pelo comando:

  "P=interseção(m,r')"

- Em seguida, a construção do segmento $s = \overline{PF}$, para ficar cada vez mais próximo de uma parábola.

Figura 39 – Anotações da Etapa 1 no GeoGebra



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

Caso o aluno tenha feito as atividades da elipse ou da hipérbole, provavelmente lembrar-se-ão da propriedade da mediatriz e irão para a etapa do planejamento somente para organizar as ideias.

Etapa 2: Estabelecimento de um Plano

Nesta etapa, o professor deve guiar os alunos para que conectem as observações feitas no GeoGebra com a definição formal de uma parábola e, assim, estruturem um plano para a demonstração.

Ações do Professor

- Revisar a Definição de Parábola:
  - Pergunte: "Qual é a definição geométrica de uma parábola?"

  - Conduza-os à definição: *Uma parábola é o conjunto de todos os pontos P de um plano que são equidistantes de um ponto fixo F (o foco) e de uma reta fixa d (a diretriz).* Matematicamente, $d(P, F) = d(P, d)$.

- Conectar a Definição com o Problema:
  - Questione: "Em nosso problema, quem são o foco e a diretriz?"(Resposta: F e d, respectivamente).
  - "Nós construímos um ponto P. O que precisamos provar sobre este ponto P para mostrar que ele pertence a uma parábola?"(Resposta: Que a distância de P até F é igual à distância de P até a reta d).

- Elaborar a Estratégia da Prova:
  - Pergunte: "O ponto P que construímos está na mediatriz m do segmento $\overline{FP'}$. O que isso nos garante sobre as distâncias $d(P, F)$ e $d(P, P')$?"(Resposta: Que elas são iguais, $d(P, F) = d(P, P')$).
  - Pergunte: "É possível concluir que $d(P, d) = \overline{PP'}$?"(Resposta: Sim, pois o ponto P' pertence a reta d e r', o ponto P pertence a r', e a reta r' é perpendicular a d).
  - "Agora, juntando essas duas informações, o que podemos concluir sobre a relação entre $d(P, F)$ e $d(P, d)$?"

Atividades do Aluno

O aluno deve recordar a definição de parábola e identificar que, para provar que a curva é uma parábola, é necessário mostrar que todo ponto P da curva satisfaz $d(P, F) = d(P, d)$.

Com base nas dicas do professor, o aluno deve traçar o seguinte plano para a demonstração:

1. Usar a propriedade da mediatriz: O ponto P está sobre a reta m, que é a mediatriz do segmento $\overline{FP'}$. Logo, por definição de mediatriz, P é equidistante de F e P'. Portanto, $d(P, F) = d(P, P')$.

2. Distância de P à diretriz d: A distância do ponto P a uma reta d, $d(P, d)$, é medida ao longo da perpendicular r' a reta d de $d(P, P')$.

3. Combinar as informações: Usando as duas igualdades, por transitividade, concluímos que $d(P, F) = d(P, d)$. Isso provará que o lugar geométrico dos pontos P é uma parábola.

4. No GeoGebra: O aluno construirá um texto interativo com a medida de cada segmento e concluir escrevendo literalmente com definições matemáticas.

Etapa 3: Execução do Plano

Nesta etapa, os alunos formalizam a demonstração (item b) e realizam os cálculos para encontrar a equação da parábola (item c).

Guiando a Demonstração (item b):

O professor deve orientar os alunos a escreverem a prova, passo a passo, com base no plano estabelecido.

- Seja P' um ponto qualquer sobre a reta diretriz d.
- Seja m a reta mediatriz do segmento $\overline{FP'}$.
- Seja r' a reta perpendicular a d que passa por P'.
- Seja P o ponto de interseção entre as retas m e r', ou seja, $P = m \cap r'$.
- Afirmação 1: Como $P \in m$ e m é a mediatriz de $\overline{FP'}$, temos que a distância de P a F é igual à distância de P a P'.

$$d(P, F) = d(P, P')$$

- Afirmação 2: A distância do ponto P à reta diretriz d é o comprimento do segmento da reta perpendicular a d que une P a d. Como $P \in r$ e $r' \perp d$, essa distância é exatamente o comprimento do segmento $\overline{PP'}$.

$$d(P, d) = d(P, P')$$

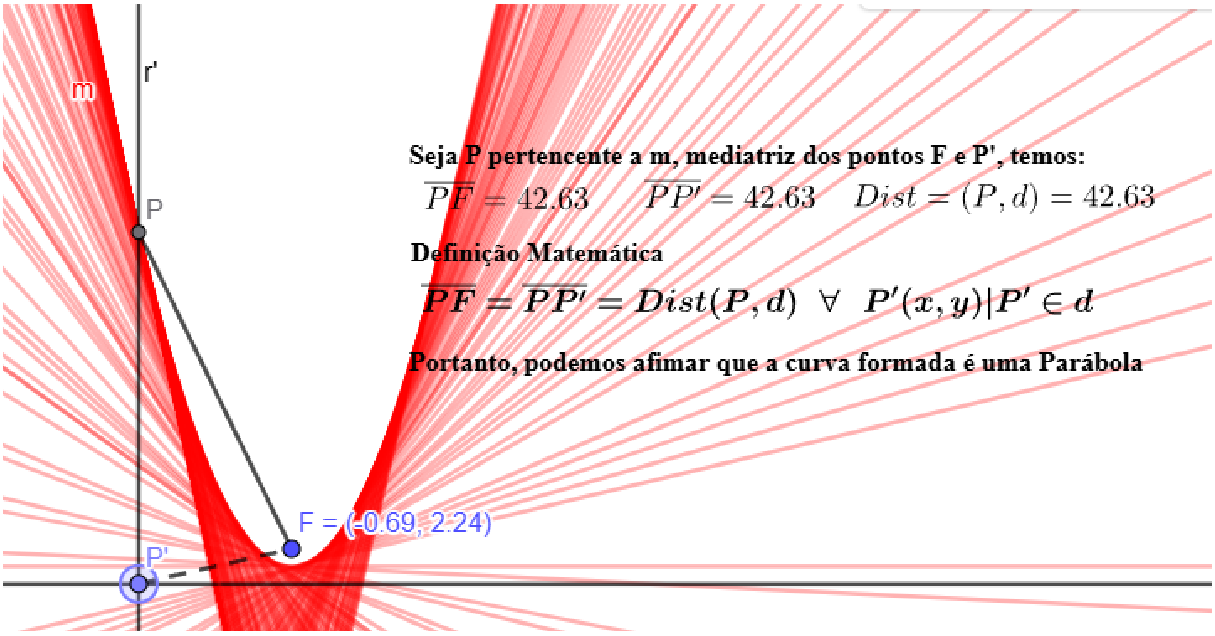
Como P, $P' \in r'$, então $d(P, d)$=(P, P')

- Conclusão: Das afirmações 1 e 2, por transitividade, concluímos que:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

- Como esta igualdade vale para qualquer ponto P' escolhido na diretriz, o lugar geométrico descrito pelo ponto P é, por definição, uma parábola de foco F e diretriz d. A reta m é a reta tangente a essa parábola no ponto P, e o rastro de todas as retas tangentes forma a própria parábola como sua curva envoltória. Dessa maneira, escrevendo matematicamente, $\overline{PF} = \overline{PP'}\ \forall\ P'(x, y) \mid P' \in d$.

Figura 40 – Prova da Parábola pela Definição - Letra b



Fonte: Produção do próprio autor (2025)

- Alguns alunos tem dificuldade com essa linguagem matemática pesada, para exemplificar o trecho acima, o aluno pode criar os textos interativos como no exemplo da Figura 40

Disponível em:
https://www.geogebra.org/classic/wpnmxbyc

Item c) Equação Reduzida:

O professor deve guiar os alunos a usarem a definição $d(P, F) = d(P, d)$ com as coordenadas dos pontos para encontrar a equação.

- Seja $P(x, y)$ um ponto genérico da parábola.
- O foco é $F(0, 2)$.
- A reta diretriz é $d : y = -2$.
- Calcular $d(P, F)$: Usando a fórmula da distância entre dois pontos.

$$d(P, F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

- Calcular $d(P, d)$: A distância de um ponto (x, y) a uma reta horizontal $y = k$ é $|y - k|$.

$$d(P, d) = |y - (-2)| = |y + 2|$$

Como o foco $(0, 2)$ está acima da diretriz $y = -2$, a parábola abre para cima e todos os seus pontos terão ordenada $y \geq -2$, o que torna $y + 2 \geq 0$. Assim, podemos remover o módulo.

$$d(P, d) = y + 2$$

- Igualar as distâncias: $d(P, F) = d(P, d)$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = y + 2$$

- Resolver a equação: Elevar ambos os lados ao quadrado para eliminar a raiz.

$$x^2 + (y-2)^2 = (y+2)^2$$
$$x^2 + (y^2 - 4y + 4) = (y^2 + 4y + 4)$$

Cancele os termos y^2 e 4 de ambos os lados:

$$x^2 - 4y = 4y$$
$$x^2 = 8y$$

- Conclusão Final: A equação reduzida da parábola é $x^2 = 8y$.

Etapa 4: Reflexão sobre o Trabalho

Nesta etapa final, consolida-se o aprendizado, verificando a solução e explorando generalizações do problema.

Verificação da Solução:

- Peça aos alunos para digitarem a equação encontrada, $x^2 = 8y$, na Entrada do GeoGebra. Eles verão que o gráfico da equação se sobrepõe perfeitamente à curva formada pelo rastro da mediatriz m e pelo rastro do ponto P.
- Discuta a forma da equação $x^2 = 4py$. No nosso caso, $x^2 = 8y$, temos $4p = 8$, o que implica $p = 2$. Para uma parábola com vértice na origem, o foco é $(0, p)$ e a diretriz é $y = -p$. Com $p = 2$, obtemos Foco $(0, 2)$ e diretriz $y = -2$, o que confirma que nossa equação corresponde exatamente aos dados iniciais do problema.

Discussão e Generalização:

- "O que aconteceria com a parábola (e com o valor de p) se o foco fosse $F(0, 5)$ e a diretriz $y = -5$?"(A parábola ficaria mais "aberta", pois $p = 5$ e a equação seria $x^2 = 20y$).

- "E se o foco fosse $F(3,2)$ e a diretriz $y = -2$?"(O vértice da parábola, que é o ponto médio entre o foco e a diretriz, se deslocaria para $(3,0)$. A equação seria $(x-3)^2 = 8y$).
- "Como seria a construção se quiséssemos uma parábola que abre para a direita, com foco em $F(2,0)$ e diretriz $x = -2$?"(A construção seria análoga, mas P' se moveria numa reta vertical. A equação resultante seria $y^2 = 8x$).

Finalizando com conexões:

O professor pode concluir a atividade relacionando a propriedade geométrica da parábola com suas aplicações no mundo real. A propriedade de que a tangente (a reta mediatriz m) divide o ângulo entre a linha que vai para o foco ($\overline{PF}$) e a linha perpendicular à diretriz ($\overline{PP'}$) é a base para o funcionamento de:

- Antenas parabólicas e telescópios refletores: Raios paralelos que chegam são refletidos e convergem para um único ponto, o foco.
- Faróis de carros e lanternas: Uma fonte de luz colocada no foco emite raios que, ao serem refletidos pela superfície parabólica, saem como um feixe de luz paralelo.

Explorar esses exemplos ajuda a solidificar a relevância do conteúdo matemático estudado.

6 Conclusão

Ao longo desta dissertação, foi proposto enfrentar o desafio do ensino e da aprendizagem das seções cônicas no Ensino Médio, um tema de notória complexidade e abstração para os estudantes. A problemática central que norteou este trabalho foi a busca por uma abordagem pedagógica que vai além da memorização de fórmulas, promovendo uma compreensão conceitual profunda, o desenvolvimento do raciocínio lógico e um maior engajamento discente. Para tanto, a hipótese norteadora foi que a articulação sinérgica entre a Teoria da Resolução de Problemas de George Polya e o potencial dinâmico do software GeoGebra constituiria um caminho eficaz para atingir esses objetivos.

Pode-se afirmar que o objetivo geral desta dissertação foi atingido, uma vez que se propôs o desenvolvimento de sequências didáticas, baseadas na ferramenta GeoGebra e na teoria de Resolução de Problemas de Polya, buscando apoiar o aprendizado de cônicas e suas propriedades no Ensino Médio. Para alcançar tal propósito, foi construída uma fundamentação teórica robusta, detalhando-se não apenas os aspectos matemáticos das cônicas (Capítulo 2), mas também os pilares metodológicos da heurística de Polya (Capítulo 3) e as funcionalidades da ferramenta GeoGebra (Capítulo 4). Esta base teórica culminou na elaboração de uma proposta concreta: três sequências didáticas (Capítulo 5) composta por três problemas investigativos, cada um focado em uma das cônicas, projetada para ser implementada em sala de aula.

A busca por respostas sobre como a associação entre a Teoria da Resolução de Problemas e o GeoGebra favorece o desenvolvimento do pensamento matemático na aprendizagem das cônicas exige uma avaliação do cenário em que estamos inseridos. Na 3ª série do Ensino Médio, resultados de exames nacionais e internacionais apontam lacunas de aprendizagem significativas, de modo que os alunos podem apresentar dificuldades na resolução de problemas ou carência de habilidades básicas de anos anteriores. Nesse contexto, a Teoria da Resolução de Problemas cumpre o papel de estruturar o raciocínio e orientar a forma de agir. Com a mediação do professor, a teoria auxilia na identificação dessas lacunas e na elaboração de estratégias para mitigar tais dificuldades, permitindo inclusive a revisão de conceitos implícitos nos problemas propostos. No âmbito do ensino de cônicas e de grande parte da geometria, o GeoGebra surge como uma ferramenta de criação na qual os alunos se tornam protagonistas, sendo capaz de promover a interação entre a álgebra e a geometria ao exibir graficamente as abstrações contidas em fórmulas complexas para os estudantes desse nível, e assim, contribuir para um desenvolvimento do pensamento matemático, compreendendo os conteúdos de geometria e geometria analítica e desenvolvendo habilidades tecnológicas.

A sequência didática proposta busca ativamente investigar e endereçar as dificuldades dos alunos ao promover uma aprendizagem contextualizada. Ao invés de partir das equações, os problemas propostos levam os alunos a descobrirem as cônicas como um lugar geométrico, utilizando as propriedades da mediatriz e da equidistância, o que está em plena consonância com a etapa de "compreensão do problema"de Polya. O GeoGebra atua como um laboratório virtual, permitindo que os estudantes visualizem, manipulem e testem suas hipóteses, tornando a etapa de "planejamento"um processo interativo e exploratório. A execução e a posterior reflexão são enriquecidas pela capacidade do software de fornecer "feedback"visual imediato, validando ou refutando as soluções encontradas e permitindo generalizações. Cabe destacar que a sequência didática não tem a finalidade de substituir os exercícios tradicionais abordados em livros didáticos; ela vem para atuar em conjunto, trazendo uma nova abordagem para os alunos.

A principal contribuição desta dissertação reside, portanto, na oferta de um modelo pedagógico prático e fundamentado que integra teoria e prática. A proposta não se limita a uma discussão teórica; ela fornece aos professores um material didático detalhado, pronto para ser adaptado e aplicado, que exemplifica como a tecnologia pode ser utilizada não como um fim em si mesma, mas como um poderoso catalisador para metodologias de ensino ativas. Espera-se que o impacto do uso desta abordagem se traduza em uma aprendizagem mais significativa, onde os alunos deixem de ser receptores passivos de informação e se tornem construtores ativos de seu próprio conhecimento, desenvolvendo habilidades de resolução de problemas que extrapolam o domínio das cônicas e são valiosas para toda a sua formação acadêmica e pessoal.

Destaca-se que, cada sequência didática elaborada aumenta o acervo nacional, para que cada vez mais professores pesquisem e apliquem. Essa construção coletiva de conhecimento fortalece o campo de pesquisa para os educadores da educação básica vai de encontro a um caminho que a tecnologia seja efetivamente incorporada como ferramenta pedagógica no ensino dos alunos.

No entanto, são reconhecidas limitações deste estudo, inicialmente a necessidade de infraestrutura tecnológica disponível nas escolas, como laboratórios de informática e internet disponível, assim como, a formação dos professores para mediar atividades com recursos digitais. Infelizmente, não é uma realidade das escolas do Brasil ter todos esses requisitos. Entretanto, se um dia for atingido esses requisitos, é importante que o professor conheça diferentes meios de ensinar seus alunos. Para isso melhorar essa realidade, faz-se necessário mais investimento na educação (infraestrutura/formação de professores) para que todos tenham as mesmas oportunidades.

Como sugestões para pesquisas futuras, vislumbramos a condução de um estudo de caso ou de uma pesquisa-ação para aplicar a sequência didática proposta e analisar, por meio de dados qualitativos e quantitativos, suas efetivas contribuições para a aprendizagem dos alunos. Seria igualmente relevante expandir esta metodologia para outros tópicos da Geometria Analítica ou de outras áreas da Matemática, bem como desenvolver materiais de formação continuada para professores, capacitando-os a criar suas próprias atividades investigativas com o suporte do GeoGebra e da teoria de Polya.

Por fim, este trabalho buscou demonstrar que, ao equipar os estudantes com uma "arte de resolver problemas"e com ferramentas que tornam a matemática visível e palpável, é possível transformar o estudo das cônicas de um desafio abstrato em uma jornada de descoberta lógica e visualmente fascinante.

Referências

ANTON, H.; BIVENS, I. C.; DAVIS, S. *Cálculo: Volume II*. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. ISBN 978-85-8260-246-4. Citado na página 21.

ASTOLFI, J.-P. *A didática das ciências*. Campinas: Papirus, 1999. Citado na página 78.

AVVISATI, F.; ILIZALITURRI, R. *PISA 2022 Results: Factsheets Brazil*. Paris, 2023. Disponível em: www.oecd.org/pisa. Citado na página 16.

BORBA, M. d. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012. Citado na página 69.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, DF: [s.n.], 1999. Acesso em: 6 de junho de 2025. Disponível em: <https://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Citado na página 15.

HOHENWARTER, M.; JONES, K. Ways of linking geometry and algebra: the case of geogebra. In: *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*. [S.l.: s.n.], 2007. v. 27, n. 3, p. 126–131. Citado na página 68.

INEP, B. I. N. de Estudos e P. E. A. T. *Análise da Proficiência dos Alunos da Educação Básica*. 2024. Painel Power BI. Dados adaptados do Saeb/Inep. Disponível em: <https://app.powerbi.com/view?r=...Acessoem:9jul.2025>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

LEITE, Bruno. *Seções cônicas e elementos das curvas cônicas*. 2017. GeoGeebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/uj2bfSJV. Acesso em: 15 dez. 2024. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 77.

MATEMÁTICA PARA GENTE GRANDE. *Matemática para Gente Grande*. 2024. O objetivo deste canal é fornecer conteúdo de matemática. Disponível em: https://www.youtube.com/c/matematicaparagentegrande. Acesso em: 1 dez. 2024. Citado na página 78.

PEDONE, Marcello. *II sistema Solare*. 2012. GeoGeebra. Disponível em: https:https://www.geogebra.org/m/HbQgnKmZ. Acesso em: 25 fev. 2025. Citado na página 88.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 78.