

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



JORGE ALEXANDRE DOS SANTOS CRUZ

**DESCOBRINDO O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E O
PRINCÍPIO ADITIVO DA CONTAGEM**

Belo Horizonte
2025

JORGE ALEXANDRE DOS SANTOS CRUZ

**DESCOBRINDO O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E O PRINCÍPIO
ADITIVO DA CONTAGEM**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador

Frederico Augusto Menezes Ribeiro

Banca Examinadora

Daniel Ungaretti Borges – UFRJ

Dênis Emanuel da Costa Vargas – CEFET-MG

Jônathas Douglas Santos de Oliveira – CEFET-MG

Belo Horizonte
2025

C957d Cruz, Jorge Alexandre dos Santos
Descobrimo o princípio multiplicativo e o princípio aditivo / Jorge Alexandre dos Santos Cruz. – 2025.
106 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Frederico Augusto Menezes Ribeiro.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Análise combinatória – Teses. 2. Contagem – Fundamentos – Teses.
3. Multiplicação – Fundamentos – Teses. 4. Combinatória aditiva – Fundamentos – Teses. I. Ribeiro, Frederico Augusto Menezes. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 511.6

JORGE ALEXANDRE DOS SANTOS CRUZ

**DESCOBRINDO O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E O PRINCÍPIO
ADITIVO DA CONTAGEM**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de
Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte
das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional, para obter o título de Mestre

APROVADA: 24 de setembro de 2025

JORGE ALEXANDRE DOS SANTOS CRUZ
(Autor)

FREDERICO AUGUSTO MENEZES RIBEIRO
(Orientador)

Belo Horizonte
2025

Dedico este trabalho ao meu pai, Joel, que despertou em mim o gosto pela Matemática e à minha mãe, Cleonice, minha maior incentivadora. Eles não estão mais aqui, mas sei que, de onde estiverem, estarão felizes e me aplaudindo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço às minhas três filhas, Renata, Luciana e Mariana que pelo apoio, o carinho e a compreensão me fazem o pai mais feliz do mundo. Sem dúvida, o PROFMAT, nesses dois últimos anos, limitou a nossa convivência, mas, tenho certeza de que elas estão orgulhosas dessa minha conquista.

Agradeço ao professor Frederico Augusto Menezes Ribeiro, mais conhecido como Fred, por ter acreditado na minha proposta, desde quando fiz com ele a preparação para o ENQ, e pelo suporte valioso que me deu para a elaboração dessa dissertação. Agradeço também aos professores do PROFMAT que fizeram valer a pena todo o esforço para concluir esse curso de mestrado. Aprendi muito com eles e, o mais importante, minha paixão pela matemática se consolidou.

Por fim, agradeço aos meus colegas de turma pela convivência feliz que tivemos nesse tempo de curso. Por incrível que pareça, estou sentindo falta das tardes de sexta-feira.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

A Análise Combinatória é uma área da Matemática dedicada ao estudo de técnicas de contagem e organização de diferentes arranjos de elementos. No Ensino Médio, seu ensino desempenha um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio lógico e na capacidade dos alunos para resolver problemas complexos. Apesar de sua relevância, o seu conteúdo costuma ser abordado de forma tradicional, com ênfase excessiva na classificação dos problemas em permutações, arranjos e combinações. Essa abordagem, muitas vezes mecânica, dificulta a compreensão conceitual e limita a autonomia dos estudantes na resolução de problemas. Os fundamentos da Análise Combinatória residem no Princípio Multiplicativo e no Princípio Aditivo da contagem, os quais oferecem uma base sólida e unificadora para o tratamento da maioria das situações combinatórias. A compreensão profunda desses dois princípios é essencial para o desenvolvimento de estratégias eficazes de resolução de problemas de contagem e para a construção de um pensamento matemático mais significativo. Este trabalho propõe uma abordagem para a introdução da Análise Combinatória no Ensino Médio, centrada nos Princípios Multiplicativo e Aditivo. O objetivo principal é possibilitar que os alunos descubram esses princípios — no sentido de compreendê-los de forma intuitiva, formalizá-los com clareza e aplicá-los corretamente em diferentes contextos — promovendo, assim, uma aprendizagem mais ativa, significativa e conceitualmente fundamentada. O produto deste trabalho é uma sequência didática voltada a promover a descoberta dos princípios da contagem, por meio de uma aprendizagem investigativa e colaborativa.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Princípio Fundamental da Contagem. Princípio Multiplicativo. Princípio Aditivo

ABSTRACT

Combinatorics is an area of Mathematics that studies techniques for counting and organizing different arrangements of elements. In high school, its teaching plays a fundamental role in the development of logical reasoning and the ability of students to solve complex problems. Despite its relevance, this subject is usually approached in a traditional way, with excessive emphasis on classifying problems into permutations, arrangements, and combinations. This approach, often mechanical, hinders conceptual understanding and limits students' autonomy in problem-solving. The foundations of Combinatorics lie in the Multiplicative Principle and the Additive Principle of counting, which provide a solid and unifying basis for the treatment of most combinatorial situations. A deep understanding of these two principles is essential for the development of effective strategies for solving counting problems and for the construction of more meaningful mathematical thinking. This dissertation proposes an approach for the introduction of Combinatorial Analysis in high school, centered on the Multiplicative and Additive Principles. The main objective is to enable students to discover these principles — in the sense of understanding them intuitively, formalizing them clearly and applying them correctly in different contexts — thus promoting more active, meaningful and conceptually grounded learning. The product of this work is a didactic sequence aimed at promoting the discovery of counting principles, through investigative and collaborative learning.

Keywords: Combinatorial Analysis, Fundamental Counting Principle, Multiplicative Principle, Additive Principle

LISTA DE FIGURAS

3.1	Total de elementos de dois conjuntos disjuntos.....	21
3.2	Estrutura da árvore de decisão.....	22
3.3	Árvore de decisão do exemplo 1.....	24
3.4	Bandeira do exemplo 2.....	24
3.5	Árvore de decisão do exemplo 2.....	25
3.6	Árvore de decisão do exemplo 3.a.....	27
3.7	Árvore de decisão do exemplo 3.b.....	28
3.8	Árvore de decisão do exemplo 4.....	30
5.1	Árvore de decisão para o problema do Princípio Aditivo.....	49
6.1	Modelo de árvore de decisão.....	61
6.2	Árvore de decisão do problema 1.....	62
6.3	Diagrama do problema 2.....	63
6.4	Árvore de decisão do problema 2.....	64
6.5	Árvore de decisão do problema 1.....	66
6.6	Árvore de decisão do problema 2.....	68
6.7	Bandeira do problema 1.....	69
6.8	Árvore de decisão do problema 1.....	70
6.9	Árvore de decisão do problema 2.....	73
6.10	Árvore de decisão do problema 3.....	74
6.11	Árvore de decisão do problema 1.....	75
6.12	Árvore de decisão do problema 2.....	77
6.13	Árvore de decisão do problema 3.....	78
7.1	Árvore de decisão desenhada por um aluno.....	84
7.2	Árvore de decisão desenhada por um aluno.....	84
7.3	Árvore de decisão desenhada por um aluno.....	86
7.4	Árvore de decisão desenhada por um aluno.....	87
7.5	Desenho da bandeira.....	88
7.6	Bandeira pintada por um aluno.....	89
7.7	Árvore de decisão desenhada por um aluno.....	90

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação dos livros didáticos analisados.....	36
Tabela 2 – Sequência Didática.....	58

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
2 MOTIVAÇÃO.....	15
3 O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E O PRINCÍPIO ADITIVO.....	21
3.1 O Princípio Multiplicativo.....	23
3.2 A independência dos eventos no Princípio multiplicativo.....	26
3.3 A divisão em casos e o Princípio Aditivo.....	28
4 UMA ESTRATÉGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE CONTAGEM.....	33
5 ANÁLISE DA APRESENTAÇÃO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E DO PRINCÍPIO ADITIVO NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINOMÉDIO.....	36
5.1 Conexões – Matemática e suas tecnologias.....	37
5.2 Diálogo – Matemática e suas tecnologias.....	40
5.3 Interação – Matemática e suas tecnologias.....	44
5.4 Matemática em contextos.....	46
5.5 Matemática Interligada.....	51
5.6 Conclusão.....	54
6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	56
6.1 Aula 1: Usando a árvore de decisão para resolver problemas de contagem.....	60
6.2 Aula 2: Etapas independentes e o Princípio Multiplicativo.....	64
6.3 Aula 3: Etapas dependentes e o Princípio Multiplicativo.....	68
6.4 Aula 4: O Princípio Aditivo e a estratégia de divisão em casos.....	74
6.5 Aula 5: Consolidando os conhecimentos adquiridos.....	79
7 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	81
7.1 Contextualização da aplicação.....	81
7.2 Aula 1: Usando a árvore de decisão para resolver problemas de contagem.....	82
7.3 Aula 2: Etapas independentes e o Princípio Multiplicativo.....	83
7.4 Aula 3: Etapas dependentes e o Princípio Multiplicativo.....	87
7.5 Aula 4: O Princípio Aditivo e a estratégia de divisão em casos.....	91
7.6 Aula 5: Consolidando os conhecimentos adquiridos.....	94
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	97
REFERÊNCIAS.....	100
APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	102

1 INTRODUÇÃO

“Problemas de contagem oferecem oportunidades para um pensamento matemático rico, mas os alunos lutam para resolver tais problemas corretamente” (LOCKWOOD; SCHAUB, 2016, p. 1, tradução própria).

O presente trabalho consiste numa proposta de introdução ao ensino de Análise Combinatória baseada no Princípio Multiplicativo e no Princípio Aditivo da contagem. O objetivo principal é fazer com que os estudantes “descubram” esses dois princípios, que nesse contexto significa compreender e ser capaz de enunciá-los de forma clara e correta.

Esta é uma abordagem diferente de primeiro ensiná-los sobre os princípios e depois fazer perguntas sobre eles. Segundo D’Ambrosio (2005), o ensino da matemática deve reconhecer e dialogar com os saberes culturais, históricos e sociais que os alunos já possuem, integrando-se com sua experiência de mundo para tornar a aprendizagem mais significativa. O aluno do Ensino Médio, onde a Análise Combinatória é estudada, traz consigo uma bagagem de saberes extensa. A ideia é valorizar essa bagagem e o raciocínio deles sobre ideias matemáticas. O objetivo é que os alunos, por meio de uma sequência de problemas práticos de contagem, sejam incentivados a descobrir os princípios fundamentais por si mesmos, em vez de apenas memorizá-los, aplicando suas habilidades de raciocínio lógico para formular conjecturas sobre as regras de contagem.

Para o sucesso dessa jornada, o papel do professor(a) é essencialmente o de facilitador(a) do processo de descoberta. Ele(a) deve criar um ambiente de aprendizagem que estimule a curiosidade e o pensamento crítico, encorajando os alunos a explorarem diferentes estratégias e a validarem suas próprias soluções.

Ao longo do processo, o professor orienta os alunos com perguntas e provocações, ajudando-os a perceber as relações entre os problemas e a formalizar o enunciado dos princípios. Dessa forma, os alunos não apenas entenderão os princípios Multiplicativo e Aditivo, mas também serão capazes de enunciá-los e aplicá-los de maneira autônoma, tendo vivido o processo de descoberta. Esse método promove uma aprendizagem mais profunda e significativa, pois os alunos se tornam protagonistas de seu próprio aprendizado, desenvolvendo uma compreensão sólida e duradoura dos conceitos.

Um objetivo secundário deste trabalho é oferecer subsídios aos professores do Ensino Médio para o desenvolvimento de metodologias para o ensino da Análise Combinatória baseadas em seus princípios fundamentais. Busca-se, com isso, não apenas favorecer o aprimoramento das habilidades de resolução de problemas por parte dos alunos, mas também contribuir para uma preparação mais consistente para exames oficiais, nos quais os conceitos combinatórios são frequentemente exigidos.

Como produto desta dissertação, foi elaborada uma sequência didática para introduzir os princípios fundamentais da contagem por meio de uma abordagem investigativa, priorizando a construção autônoma e colaborativa do conhecimento pelos estudantes. Estruturada em cinco sessões, a sequência incentiva a resolução de problemas de contagem a partir da listagem das possibilidades, favorecendo uma compreensão concreta e visual dos conceitos e conduzindo, de forma gradual, à formulação do Princípio Multiplicativo e do Princípio Aditivo da Contagem.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

- a) Capítulo 2: Apresenta as razões que motivaram o desenvolvimento deste trabalho;
- b) Capítulo 3: Introduz o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo, discutindo seus aspectos matemáticos, seus usos e suas implicações;
- c) Capítulo 4: Apresenta uma metodologia para resolver problemas de contagem;
- d) Capítulo 5: Realiza uma análise de como os Princípios Aditivo e Multiplicativo são abordados nos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, aprovados no PNLD de 2021;
- e) Capítulo 6: Descreve a sequência didática elaborada para ser aplicada em sala de aula;
- f) Capítulo 7: Apresenta os resultados da aplicação da sequência didática em duas turmas do segundo ano do ensino médio de uma escola estadual de Sete Lagoas – MG;
- g) Capítulo 8: Apresenta as conclusões e sugestões para pesquisas futuras.

Essa organização visa promover uma compreensão mais clara dos temas abordados, facilitando a reflexão e o uso prático dos conceitos apresentados.

2 MOTIVAÇÃO

A análise combinatória é a área da matemática que estuda as técnicas para contar e organizar diferentes arranjos de elementos. No ensino médio, o domínio dessa matéria desempenha um papel crucial no desenvolvimento do raciocínio lógico e na capacidade dos alunos de resolver problemas complexos. Contudo, seu ensino costuma apresentar desafios tanto para professores quanto para alunos.

Embora a análise combinatória seja essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico, o ensino dessa disciplina ainda adota, em grande parte, abordagens tradicionais, nas quais os problemas são classificados em permutações, arranjos e combinações. Essas abordagens frequentemente enfatizam o uso de fórmulas, muitas vezes apresentadas sem a justificativa necessária, limitando a capacidade dos alunos de compreender e resolver problemas.

A dificuldade na aprendizagem da análise combinatória pode ser atribuída a vários fatores, incluindo:

- a) **Falta de compreensão dos princípios fundamentais:** o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo, também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (PFC), são fundamentais para o desenvolvimento da enumeração combinatória. A falta de uma compreensão sólida desses princípios constitui um obstáculo significativo para os alunos, dificultando sua capacidade de entender os processos de contagem e justificar ou explicar as fórmulas. Como destacam Morgado et al. (2006), esses princípios constituem a base a partir da qual se constroem as fórmulas de arranjos, combinações e permutações, sendo que sua não assimilação conduz os estudantes à mera memorização de procedimentos sem compreensão conceitual. Na mesma direção, Carvalho (2015) ressalta que a distinção entre situações de adição — casos mutuamente exclusivos — e multiplicação — casos sucessivos ou independentes — é condição necessária para a aprendizagem significativa da contagem e para evitar erros recorrentes na resolução de problemas.
- b) **Complexidade na diferenciação de conceitos:** muitos alunos encontram dificuldades para distinguir entre permutações, arranjos e combinações, e de

entender quando aplicar cada conceito. Essa classificação rígida leva a confusões sobre qual abordagem utilizar em diferentes situações. Segundo Carvalho (2015), essa dificuldade decorre da abordagem rígida que os estudantes frequentemente adotam, tratando cada conceito isoladamente e aplicando fórmulas de forma mecânica, sem considerar o contexto do problema. O autor enfatiza que a aprendizagem significativa da contagem exige que os alunos reconheçam as condições específicas de cada situação e compreendam o papel de cada conceito, desenvolvendo, assim, um raciocínio combinatório mais flexível e seguro.

- c) **Ênfase na memorização de fórmulas:** a ênfase nas fórmulas específicas para permutações, arranjos e combinações dificulta uma compreensão mais profunda dos princípios subjacentes. Isso faz com que os alunos adotem uma abordagem mecânica, resolvendo problemas sem compreender o raciocínio por trás das fórmulas. Segundo Nahum (2019), a apresentação formal das definições e fórmulas, sem uma exploração prévia do contexto e das relações entre os conceitos, pode dificultar a compreensão dos alunos, levando-os a aplicar fórmulas de forma isolada e sem entender seu significado. Além disso, Kanno (2022) destaca que a abordagem tradicional, centrada na memorização de fórmulas, limita a compreensão dos alunos sobre os conceitos fundamentais da Análise Combinatória, dificultando a aplicação desses conhecimentos em situações práticas.
- d) **Limitação na resolução de problemas:** a forma tradicional de ensino restringe a flexibilidade dos alunos ao resolver problemas de análise combinatória, limitando sua capacidade criativa e a exploração de múltiplas abordagens. Segundo Batanero et al. (1996), quando os alunos são expostos a procedimentos formais e mecânicos sem exploração conceitual, sua capacidade de raciocínio flexível e de elaboração de múltiplas estratégias de resolução é prejudicada. Os autores defendem que a aprendizagem da combinatória deve incentivar a exploração conceitual e a aplicação criativa dos princípios, promovendo um pensamento mais sistemático e autônomo.
- e) **Falta de contextualização:** a classificação dos problemas em permutações, arranjos e combinações muitas vezes carece de um contexto prático. Isso dificulta a compreensão dos alunos sobre como esses conceitos se aplicam a situações do mundo real, tornando mais difícil a percepção da relevância desses tópicos. Segundo Lockwood et al, (2020), a ausência de contextualização nos problemas combinatórios pode limitar a compreensão dos alunos sobre a aplicabilidade desses

conceitos em situações reais, tornando-os menos significativos e mais difíceis de entender.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Brasil, 2002), sistematizam o ensino da matemática em três eixos estruturadores: Álgebra, Geometria e Medidas e Análise de Dados. Neste último eixo, a unidade temática "Contagem" é organizada de acordo com as seguintes orientações:

A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade, também permite o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática, denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para contar os casos possíveis não deve ser aprendido apenas por meio de uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos, com o objetivo de simplificar cálculos quando a quantidade de dados for muito grande (BRASIL, 2002, p.126).

Desta forma, é proposto o desenvolvimento do raciocínio combinatório antes do aprendizado das fórmulas, que devem ter a finalidade de simplificar os cálculos. Os conteúdos e habilidades para a unidade temática "Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem" incluem:

- Decidir a forma mais adequada de organizar números e informações para simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou eventos;
- Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos que exigem contagem;
- Identificar dados e relações envolvidas em situações-problema que envolvem raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem (BRASIL, 2002, p.127).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2006) destacam que:

A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento (BRASIL, 2006, p.79).

Na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), no capítulo 5.2.1, que trata das "Competências específicas e habilidades no ensino médio" para a matemática, é destacada a competência de:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir uma argumentação consistente (BRASIL, 2018, p.535).

Além disso, destaca que os alunos do Ensino Médio devem desenvolver habilidades que os preparem para resolver problemas ao longo de sua vida, com situações propostas que tenham relevância real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos desempenham um papel essencial na aprendizagem e aplicação de conceitos matemáticos, não apenas nas atividades diárias dos estudantes, mas também nas questões da comunidade e do mundo do trabalho. Os alunos também devem construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Neste contexto, a Análise Combinatória está diretamente relacionada à habilidade EM13MAT310 da BNCC:

EM13MAT310: resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, utilizando estratégias diversas, como o diagrama de árvore (Brasil, 2018, p.546).

Assim, os documentos normativos da educação no Brasil destacam a utilização do Princípio Multiplicativo, do Princípio Aditivo e do Diagrama de Árvore como bases essenciais para a compreensão e resolução de problemas combinatórios. Esses princípios devem ter um papel central no ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio pois oferecem aos alunos uma base sólida para resolver a maioria dos problemas e desenvolver habilidades matemáticas essenciais. Aqueles que não os compreendem totalmente enfrentam dificuldades para avançar nos estudos e aplicá-los de forma eficaz. Sobre o Princípio Multiplicativo, Lockwood e Schaub (2016), destacam:

A falta de uma compreensão bem desenvolvida do Princípio Multiplicativo - PM parece ser um problema e um obstáculo significativo para os alunos, particularmente em termos de sua capacidade de justificar ou explicar fórmulas. Descobrimos que os alunos podem facilmente assumir que entendem o PM na contagem porque a multiplicação é uma operação familiar para eles. Como resultado, eles usam a operação com frequência, mas sem uma análise cuidadosa, e tendem a não perceber quando aplicações simples da operação são problemáticas. (LOCKWOOD E.; SCHAUB B.,2016, p.1, tradução própria).

A busca por aprimorar o ensino da Análise Combinatória tem gerado em um número expressivo de dissertações no PROFMAT que propõem estratégias inovadoras fundamentadas nos Princípios Multiplicativo e Aditivo. Essas pesquisas refletem o esforço de professores e

pesquisadores em tornar o aprendizado mais significativo, favorecendo a compreensão conceitual e o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Nesse contexto, a análise das dissertações produzidas nos últimos cinco anos evidencia uma variedade de propostas metodológicas voltadas ao ensino desses princípios em diferentes níveis escolares, que priorizam a contextualização, o engajamento dos estudantes e a construção autônoma do conhecimento matemático.

Em contraposição ao ensino tradicional, Oliveira (2025) apresentou uma sequência didática para explorar os conteúdos de análise combinatória utilizando os princípios aditivo e multiplicativo, jogos didáticos, atividades investigativas e questões do ENEM. Neste trabalho, ele destaca:

A introdução de conteúdos por meio de jogos aumentou a atenção, o interesse e a participação dos alunos, permitindo também que mantivessem o foco durante conteúdos mais teóricos. Os resultados evidenciaram evolução significativa não apenas na compreensão da análise combinatória, mas também na capacidade de abordar problemas desafiadores e estratégias de estudo em matemática (Oliveira, 2025, p. 92).

O trabalho de Adenes Neto (2025) investigou a aplicação da música e do canto, como recursos didáticos, no ensino do Princípio Multiplicativo. Em sua pesquisa, foi realizada uma intervenção em que os estudantes participaram de atividades baseadas em músicas educativas, cujas letras foram elaboradas para introduzir e explicar o princípio de forma dedutiva. Os resultados mostraram que essa abordagem tornou o processo de aprendizagem mais dinâmico e envolvente, favorecendo uma melhor compreensão do conteúdo.

No âmbito da educação básica, Sousa (2023) investigou a importância do ensino do Princípio Multiplicativo considerando o que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) preconiza para o ensino fundamental e médio. No seu trabalho ele mostra que fórmulas de permutação, arranjo e combinação são derivadas do Princípio Multiplicativo e reforça a necessidade de um domínio sólido desse conceito para o sucesso em vestibulares e concursos.

No mesmo sentido, Cavalcante (2022) propôs uma abordagem baseada na resolução de problemas de contagem, sem recorrer ao uso de fórmulas, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) como ferramenta central. A pesquisa enfatizou a criação de um ambiente de aprendizagem estimulante, promovendo discussões e reflexões entre alunos e professores, com foco no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

De forma complementar, Bezerra (2021) enfatizou a importância do Princípio Multiplicativo no contexto da Educação de Jovens e Adultos (EJA), onde grande parte dos

participantes havia se afastado da escola por longos períodos ou vivenciado situações de exclusão do ensino regular. O estudo evidenciou que a abordagem centrada na compreensão do princípio contribuiu para a retomada da aprendizagem matemática e para o desenvolvimento de conceitos mais consistentes e significativos.

No ensino fundamental, Osório (2019) desenvolveu um trabalho com materiais manipuláveis para ensinar o Princípio Multiplicativo e construir gráficos de barras e setores no 8º ano. A aplicação da sequência didática resultou na redução de erros na resolução de problemas simples de contagem, e os alunos relataram maior interesse nas aulas em comparação às aulas tradicionais.

Outras dissertações relevantes incluem: Kanno (2022), que propôs uma abordagem de ensino da análise combinatória estimulando a exploração conceitual; e Nahum (2021), que utilizou problemas contextualizados para o ensino médio, para promover a compreensão dos princípios de contagem.

Em síntese, essas dissertações evidenciam que a abordagem da análise combinatória com base no Princípio Multiplicativo e no Princípio Aditivo fomenta o pensamento crítico e a resolução de problemas e que para o ensino eficaz desses princípios, é fundamental:

- contextualizar os conceitos em situações práticas e envolventes,
- priorizar a compreensão conceitual em detrimento da memorização de fórmulas,
- estimular a resolução criativa de problemas e
- utilizar recursos didáticos variados, incluindo música, jogos, materiais manipuláveis e problemas investigativos.

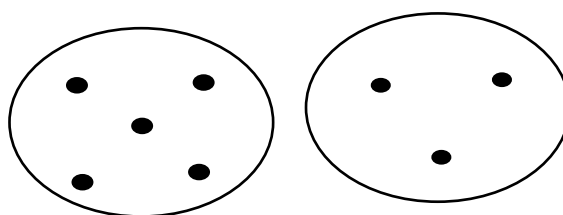
Essas estratégias contribuem para um aprendizado mais significativo, promovendo a autonomia e o raciocínio matemático dos alunos, competências essenciais tanto para o sucesso acadêmico quanto para o sucesso profissional.

3 O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E O PRINCÍPIO ADITIVO

Contagem é um tema fundamental e acessível na matemática, pois, ao contrário de outros tópicos que exigem ferramentas e conceitos mais complexos, sua base repousa nas operações aritméticas básicas de adição e multiplicação, às quais os alunos já começam a ter contato nos primeiros anos da educação matemática. Isso torna a contagem um excelente tópico para resgatar alunos que, apesar de seu talento para a Matemática, apresentam lacunas devido à natureza cumulativa do aprendizado dessa disciplina. Na contagem, o que realmente importa é o entendimento dessas operações e como elas se conectam para resolver problemas.

O significado da adição é juntar ou acrescentar uma quantidade a outra. Quando temos dois conjuntos disjuntos e queremos encontrar o número total de elementos dos mesmos, o que temos que fazer é somar a quantidade de elementos de cada conjunto (figura 1). Essa é a base do Princípio Aditivo que é utilizado em muitos problemas de contagem, especialmente quando estamos lidando com possibilidades que se excluem mutuamente. A adição permite que, ao somar as opções de diferentes categorias ou grupos, possamos chegar ao número total de possibilidades possíveis.

Figura 3.1 – Total de elementos de dois conjuntos disjuntos



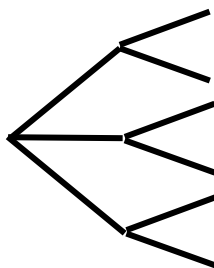
$$5 + 3 = 8$$

Fonte: Elaborada pelo autor

A multiplicação, por sua vez, é facilmente ilustrada através de um diagrama de árvore ou árvore de decisão da figura 3.2. Esse diagrama é um tipo de situação matemática que ocorre em muitos problemas de contagem. Podemos interpretar o diagrama da figura 3.2 da seguinte forma: temos que tomar duas decisões consecutivas. A primeira decisão pode ser tomada de três modos diferentes e, qualquer que seja a decisão tomada, a segunda decisão pode ser tomada de dois modos diferentes. Então o número de maneiras de tomarmos as duas decisões

consecutivas é o produto $3 \times 2 = 6$. A razão da multiplicação está implícita na figura da árvore. Este raciocínio é a base do Princípio Multiplicativo que é uma ferramenta essencial para resolver problemas de contagem.

Figura 3.2 – Estrutura da árvore de decisão



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao trabalhar o ensino da contagem, é fundamental destacar o significado das operações de adição e multiplicação, uma vez que elas constituem a base para a compreensão dos princípios combinatórios. Vale ressaltar que esse tipo de conteúdo pode ser introduzido já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, de forma intuitiva e acessível, antes mesmo de sua formalização no Ensino Médio. A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) explicita essa possibilidade ao estabelecer, por meio da habilidade EF05MA09, a inserção do Princípio Multiplicativo como ferramenta para a resolução de problemas de contagem a partir do quinto ano do Ensino Fundamental.

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas (Brasil, 2018, p.295).

O estudo conjunto do Princípio Multiplicativo e do Princípio Aditivo é fundamental para a compreensão plena da análise combinatória, pois esses dois princípios, embora relacionados, são aplicados de maneiras diferentes dependendo da estrutura do problema. A chave para uma aplicação eficiente dos dois princípios é entender o contexto de cada situação e saber quando usá-los separadamente ou em conjunto.

Neste capítulo, são apresentadas as bases para desenvolvimento dos dois capítulos seguintes: as definições formais dos dois princípios, as questões matemáticas relacionadas com

a aplicação do Princípio Multiplicativo e a utilização da árvore de decisão para ilustrar a solução dos exemplos apresentados e para compreensão de qual ou quais princípios aplicar.

3.1 O Princípio Multiplicativo

O Princípio Multiplicativo é definido por Benevides e Caminha (2016) da seguinte forma:

Se desejamos executar uma sequência de n ações, em que a primeira ação pode ser executada de m_1 maneiras e, qualquer que tenha sido a primeira escolha, a segunda ação pode ser executada de m_2 maneiras e, quaisquer que tenham sido as duas primeiras escolhas, a terceira decisão pode ser executada de m_3 maneiras, e assim sucessivamente, até que a n ésima ação possa ser executada de m_n maneiras, então o número total de maneiras de executar essa sequência de ações é igual ao produto $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$.” (BENEVIDES; CAMINHA, 2016, p. 1).

O exemplo a seguir, extraído de Benevides e Caminha (2016), ilustra a aplicação desse princípio.

Suponhamos que você possua 3 camisas e 2 calças sociais. De quantas maneiras diferentes você pode se vestir escolhendo exatamente uma das camisas e uma das calças?

Solução:

Para se vestir, você tem que executar duas ações:

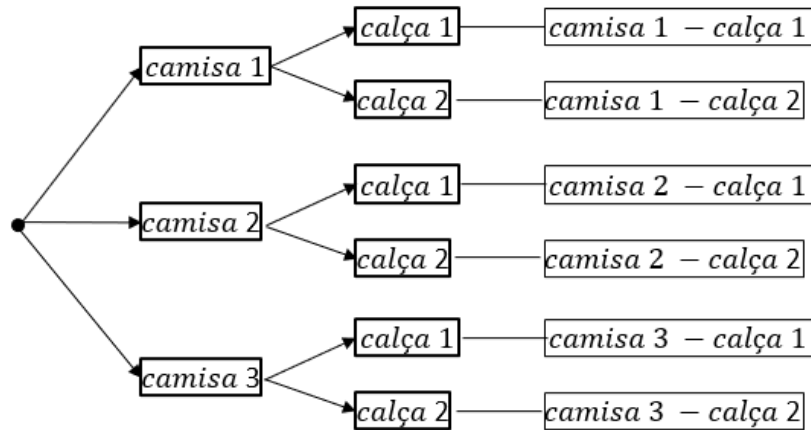
- Ação 1: escolher a camisa
- Ação 2: escolher a calça.

A ação 1 pode ser executada de 3 maneiras diferentes, $m_1 = 3$, e, para cada uma dessas maneiras, você tem 2 maneiras diferentes de executar a ação 2, $m_2 = 2$. Então, o número total de maneiras de executar ambas as ações é $m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Quando o número de maneira para realizar cada ação não é grande, podemos visualizar com clareza todas as sequências possíveis de ações construindo uma árvore de decisão, como a da figura 3.3. Nesse caso, nossa árvore possui três níveis: no primeiro nível indicamos as possíveis escolhas para camisa e, no segundo nível, indicamos as opções de calça para cada uma das camisas escolhidas no primeiro nível. Cada opção do último nível corresponde a uma sequência de ações que pode ser executada. Contando o número de opções desse nível, temos a resposta do problema, ou seja, 6 maneiras de executar a sequência de ações em questão, o que coincide com o número que encontramos anteriormente. O último nível da árvore de decisão

também apresenta uma forma organizada de listar todas as maneiras de realizar as ações em sequência.

Figura 3.3 – Árvore de decisão do exemplo 1

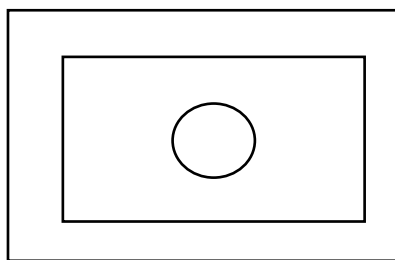


Fonte: Elaborada pelo autor

Vejamos mais um exemplo extraído de Carvalho (2015):

Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes se temos disponíveis as cores amarelo, azul, preto e vermelho?

Figura 3.4 – Bandeira do exemplo 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Solução:

Agora, temos 3 ações consecutivas a executar:

Ação 1: escolher a cor do retângulo externo

Ação 2: escolher a cor do retângulo interno

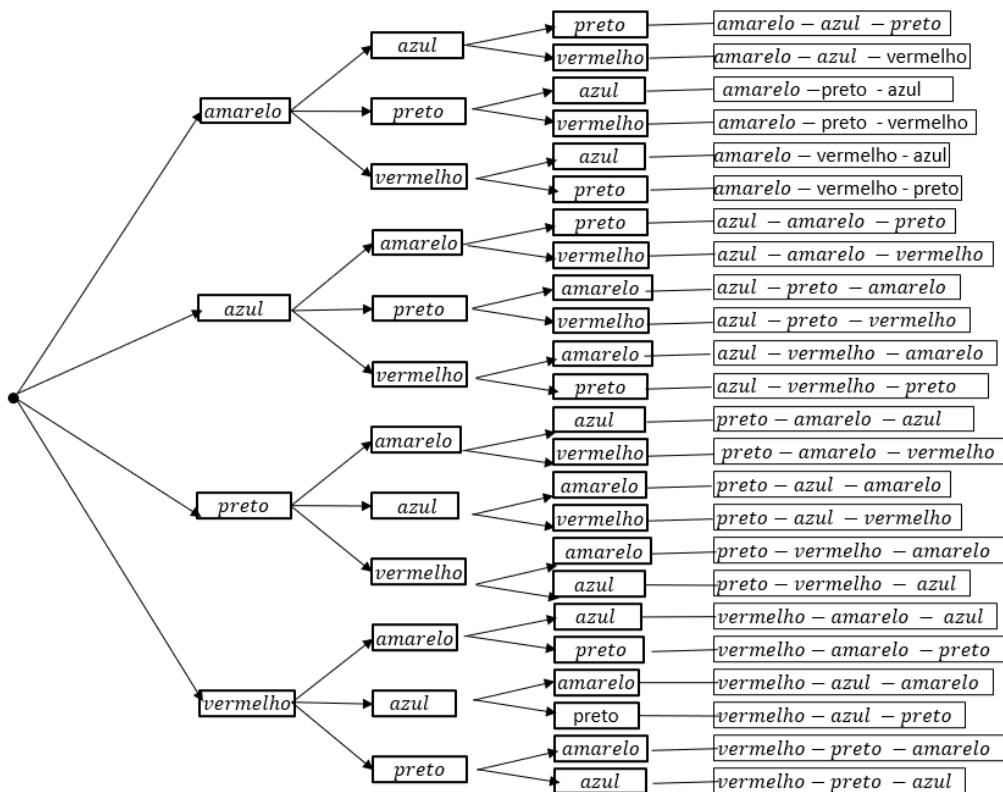
Ação 3: escolher a cor do círculo.

Uma árvore de decisão para este problema é apresentada na figura 3.5. Neste caso, nossa árvore possui quatro níveis: no primeiro nível indicamos as possíveis escolhas para a cor do retângulo externo, no segundo nível, indicamos as opções de cores para o retângulo interno, para cada uma das cores escolhidas no primeiro nível. No terceiro nível, indicamos as opções de cores para o círculo excluindo as escolhas feitas no primeiro e segundo níveis. Cada opção do último nível corresponde a uma sequência de ações que pode ser executada, ou seja, uma forma de pintar a bandeira. Contando o número de opções desse nível, temos a resposta do problema, ou seja, 24 maneiras de executar a sequência de ações em questão.

Aplicando o Princípio Multiplicativo temos: a cor externa pode ser qualquer uma das 4 cores, $m_1 = 4$; uma vez escolhida a cor externa, o retângulo interno pode ser pintado de 3 modos distintos, $m_2 = 3$. Logo, a escolha combinada da cor externa e do retângulo interno pode ser feita de $4 \times 3 = 12$ modos. Para cada um destes 12 modos, o círculo pode ser pintado com uma das duas cores que sobraram, $m_3=2$. Logo, o número total de possibilidades é

$$m_1.m_2.m_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

Figura 3.5 – Árvore de decisão do exemplo 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, vejamos outro exemplo também extraído de Benevides e Caminha (2016).

Quantos são os números naturais de 200 a 999, tais que todos os seus algarismos:

- a) *Pertencem ao conjunto $A = \{1, 4, 7, 9\}$?*
- b) *Pertencem ao conjunto $A = \{1, 4, 7, 9\}$ e são distintos?*

Solução:

No caso (a), para formar um número de 3 algarismos precisamos executar 3 ações:

Ação 1: escolher o algarismo das centenas

Ação 2: escolher o algarismo das dezenas

Ação 3: escolher o algarismo das unidades.

A árvore de decisão da figura 3.6, indica todas as possíveis escolhas para cada algarismo. Podemos ver que existem 48 valores possíveis para o número pedido.

Resolvendo o problema aplicando o Princípio Multiplicativo, temos três possíveis escolhas (4, 7 ou 9) para o algarismo das centenas, $m_1 = 3$. Os algarismos das dezenas e das unidades podem ser quaisquer elementos de A , de forma que $m_2 = m_3 = 4$. Pelo Princípio Multiplicativo, a quantidade de maneiras de formar o número é igual a $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

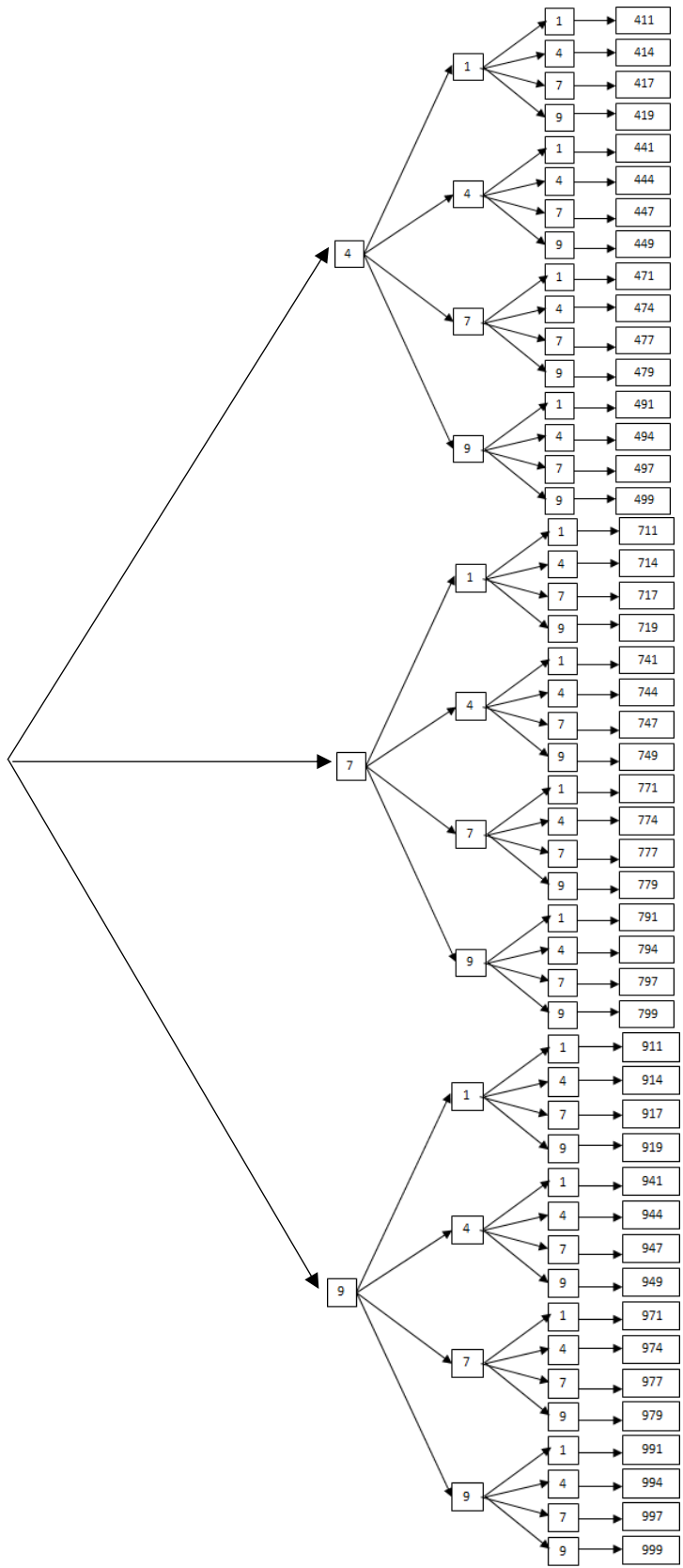
No caso (b), temos que executar as mesmas ações do caso (a), com a restrição adicional de não repetir algarismos. A árvore de decisão da figura 3.7 indica as possíveis escolhas para cada algarismo. Observamos que existem 18 valores para o número desejado.

Resolvendo o problema aplicando o PFC, temos, como no caso anterior, 3 possíveis valores para o algarismo das centenas, $m_1 = 3$. Como os algarismos devem ser distintos, o algarismo das dezenas não pode ser igual ao algarismo das centenas, logo temos três possíveis escolhas para as dezenas, $m_2 = 3$. Para o algarismo das unidades temos 2 possíveis escolhas pois ele deve pertencer a A e ser diferente dos algarismos das centenas e das dezenas, $m_3 = 2$. Concluimos então que o número de maneiras de formar o número desejado é: a $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

3.2 A independência dos eventos no Princípio Multiplicativo

Embora os três exemplos possam ser resolvidos pela aplicação imediata do princípio multiplicativo, eles guardam diferenças entre si. No primeiro exemplo as ações a serem executadas são eventos independentes, isto é, a camisa escolhida na primeira ação não afeta a escolha da calça na segunda ação. De fato, qualquer que seja a escolha da camisa, as opções de

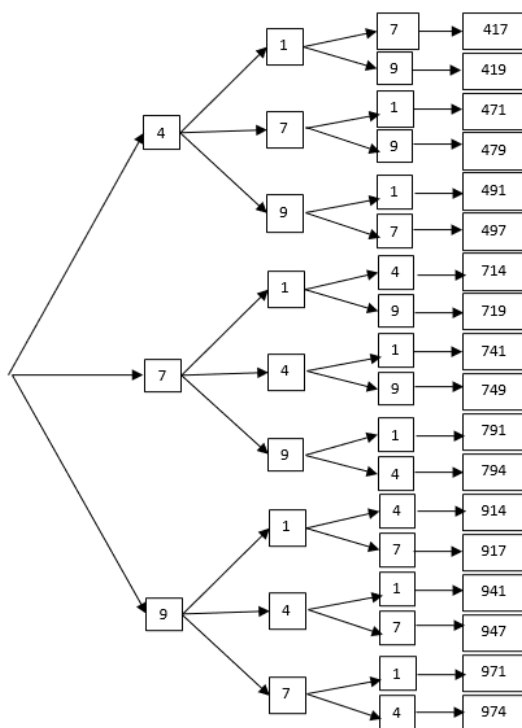
Figura 3.6 – Árvore de decisão do exemplo 3.a



Fonte: Elaborada pelo autor

escolha da calça são sempre as mesmas. Já no segundo exemplo, as ações não são eventos independentes. Se escolhermos, por exemplo, a cor azul para o retângulo externo não poderemos escolher a cor azul para o retângulo interno nem para o círculo. Entretanto, o número de opções para cada ação é sempre o mesmo, independente da escolha anterior: para o retângulo externo temos sempre 4 opções, para o retângulo interno 3 opções e para o círculo 2 opções.

Figura 3.7 – Árvore de decisão do exemplo 3.b



Fonte: Elaborada pelo autor

No terceiro exemplo, no item (a) as ações são eventos independentes, mas, no item (b), as ações não são eventos independentes. Isto mostra que para aplicar o Princípio Multiplicativo os eventos não precisam ser independentes, mas é necessário que o número de opções de escolha em cada nível seja sempre o mesmo.

3.3 A divisão em casos e o Princípio Aditivo

Ao realizar uma contagem, muitas vezes nos deparamos com situações em que não é possível aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo. Isso ocorre quando as opções de uma determinada etapa são mutuamente excludentes e cada opção leva a um conjunto diferente de opções na etapa seguinte. Para lidar com esse tipo de situação, uma abordagem eficaz é dividir

o problema em casos distintos, cada um com suas próprias características e condições de contagem. Ao realizar essa divisão, conseguimos aplicar o Princípio Multiplicativo de forma adequada a cada caso específico e, em seguida, usar o Princípio Aditivo para somar os resultados de todos os casos possíveis. Vamos examinar esse tipo de situação através de um exemplo:

Uma determinada fábrica produz dois modelos de automóvel, A e B. O modelo A é produzido com opções de motorização 1.0 CC ou 1.6 CC. Para o modelo B, além dessas opções de motorização, o comprador tem a opção adicional de motorização 1.0 CC Turbo. O modelo A é produzido nas cores básicas: branco, vermelho e preto. Para o modelo B, além das cores básicas, são oferecidas as cores cinza metálico e azul metálico. De quantas maneiras diferentes um comprador pode adquirir um automóvel dessa fábrica?

Para adquirir o modelo citado, o comprador tem que executar 3 ações:

Ação 1: escolher o modelo

Ação 2: escolher o motor

Ação 3: escolher a cor

Construindo a árvore de decisão do problema, figura 3.8, vemos que temos 21 opções para a compra de um modelo. Para executar a ação 1 temos 2 opções: modelo A ou modelo B. Essas opções são mutuamente excludentes. Se escolhermos o modelo A, para executar a ação 2 teremos à disposição 2 tipos de motor e, para executar a ação 3, 3 tipos de cores diferentes. Se escolhermos o modelo B, para executar a ação 2 teremos à disposição 3 tipos de motor e, para executar a ação 3, 5 tipos de cores diferentes. Nesse caso, o número de opções das ações 2 e 3 mudam de acordo com a escolha da realizada na ação 1. Apesar de ser fácil contar o número total de opções quando construimos a árvore, não podemos aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo nesse problema. Observando a árvore de decisão vemos que em certas escolhas, a depender das escolhas anteriores, há um número diferente de opções.

Continuando a observar a árvore de decisão do problema, vemos que podemos dividi-la em duas árvores, onde em cada árvore, que representa a compra de um dos modelos, toda ação tem o mesmo número de opções, permitindo o uso do Princípio Multiplicativo. Pela árvore 1, temos 6 opções de compra para o modelo A e, pela árvore 2, temos 15 opções de compra para o modelo B. Como, nesse caso, se comprarmos o modelo A não vamos comprar o modelo B, e vice-versa, o número total de opções de compra será $6 + 15 = 21$.

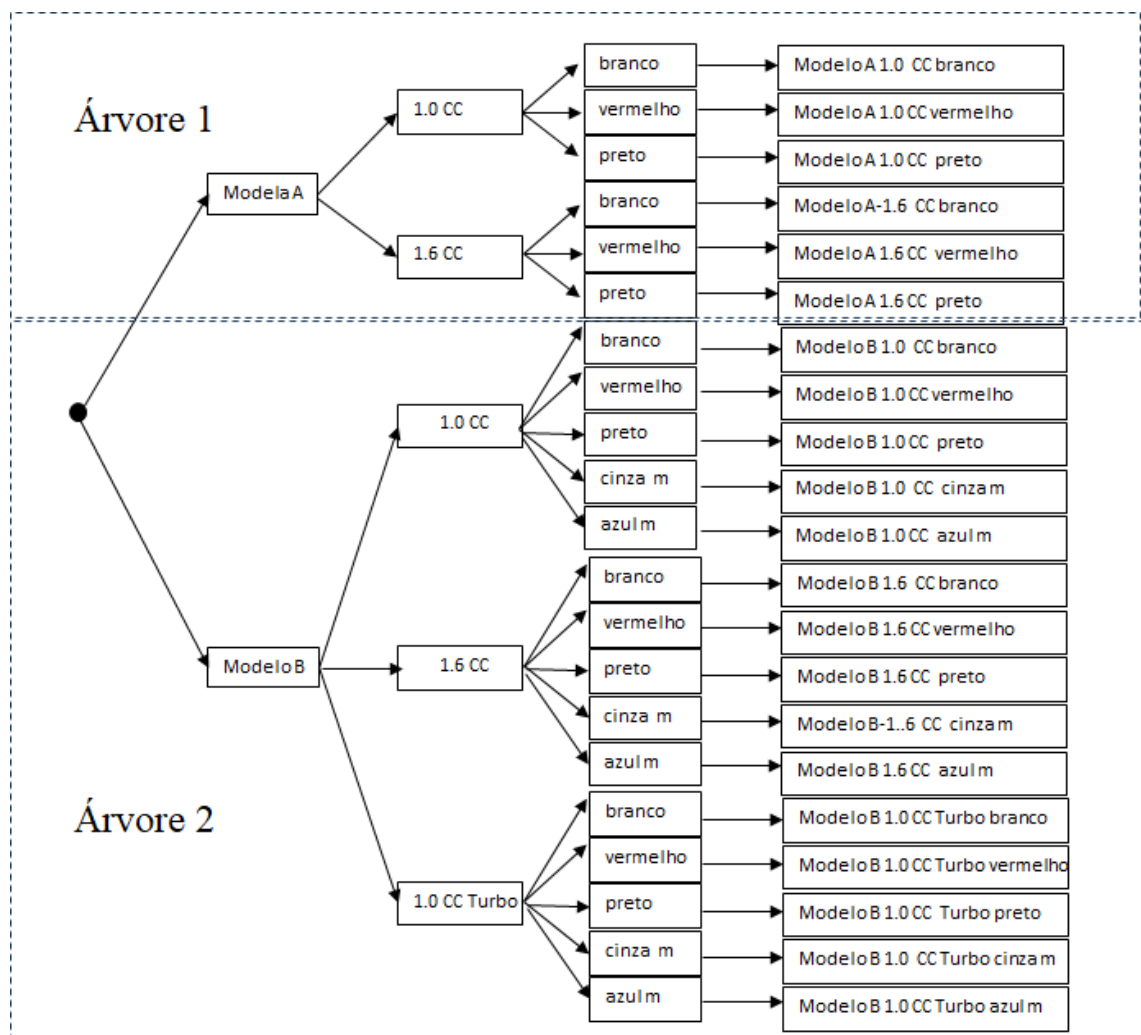
Vamos resumir o que fizemos neste problema. Primeiro, dividimos o problema em dois casos:

Caso 1: Comprar o modelo A

Caso 2: Comprar o modelo B

Depois, calculamos o número de opções de cada caso utilizando o Princípio Multiplicativo. Como os casos são excludentes, obtivemos o total de opções somando o número de opções de cada caso.

Figura 3.8 – Árvore de decisão do exemplo 4



Fonte: Elaborada pelo autor

A técnica adotada na solução desse problema é conhecida como o Princípio Aditivo.

Benevides e Caminha (2016) enunciam o Princípio Aditivo da seguinte maneira:

Ao dividir um problema de contagem em casos, onde dentro de cada caso contamos o número de soluções que nele se enquadram e todas as soluções se enquadram em

exatamente um dos casos, o número total de soluções é igual à soma dos números de soluções de cada caso (Benevides F.S; Caminha A. 2016, p. 5).

E chamam a atenção para dois pontos bastante importantes ao particionar um problema em casos:

1. Toda solução possível deve ser coberta por (i.e., deve enquadrar-se em) algum dos casos. (Ou seja, você deve certificar-se de que, com a divisão em casos que escolheu, você contou todas as possíveis soluções.).
2. Não pode haver nenhuma solução que seja coberta por (i.e., se enquadre em) mais de um dos casos. (Ou seja, a divisão em casos que você escolheu não pode contabilizar uma solução mais de uma vez). (Benevides F.S; Caminha A. 2016, p. 5)

Essas observações são importantes para evitar problemas de contagem a menos ou contagem a mais.

Dessa forma, vimos que o Princípio Aditivo pode ser utilizado para quebrar um problema, no qual não podemos aplicar o Princípio Multiplicativo diretamente, em subproblemas nos quais o Princípio Multiplicativo é válido. ou seja, quando os casos possíveis se distribuem em diferentes "ramos" ou "subcasos", e a contagem total requer somar os números de possibilidades dentro de cada grupo.

Em termos de conjuntos, o Princípio Aditivo pode ser enunciado como: “Se A e B são conjuntos finitos, sem elementos comuns, então $|A \cup B| = |A| + |B|$ ” (Benevides e Caminha C. Neto, 2016), onde escrevemos $|X|$ para denotar o número de elementos do conjunto (finito) X.

A definição em termos de conjuntos do Princípio Aditivo é certamente útil em contextos mais abstratos ou para fundamentação teórica. Na prática de contagem, a aplicação do Princípio Aditivo deve ser orientada por uma análise de situações do cotidiano, em que a formulação do problema é essencial. Em exercícios de contagem, muitas vezes os conjuntos envolvidos não são formalmente apresentados, como em um enunciado abstrato de teoria de conjuntos. Em vez disso, o aluno deve reconhecer situações em que as ações são disjuntas para aplicar o princípio, sem se preocupar com a estrutura formal dos conjuntos. O foco está em entender que, se temos duas ou mais ações mutuamente excludentes, o número total de possibilidades é a soma das possibilidades de cada uma dessas ações. A análise formal em termos de conjuntos pode, sim, ser uma forma mais abstrata de se entender o conceito, mas em situações práticas, essa formalização pode até dificultar a compreensão do aluno. Portanto, embora a definição em termos de conjuntos seja importante para a fundamentação teórica, ela não é a ferramenta mais prática ou acessível para os problemas de contagem cotidianos.

Para desenvolvimento dos capítulos 4 e 5, usaremos como base as definições de Benevides e Caminha C. Neto (2016) para o Princípio Aditivo e para o Princípio Multiplicativo.

Concluimos este capítulo com uma observação importante:

Uma habilidade importante para resolver problemas de contagem é perceber quando devemos usar o Princípio Aditivo, quando usar o Princípio Multiplicativo e, em especial, como e quando podemos combinar ambos em uma solução. (Benevides F.S; Caminha A. 2016, p. 5).

4 UMA ESTRATÉGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE CONTAGEM

As principais dificuldades dos estudantes para resolver problemas de contagem estão na compreensão do problema e na aplicação correta dos princípios combinatórios. Embora a variedade dos problemas seja desafiadora, o maior obstáculo é desenvolver o raciocínio lógico necessário para identificar as condições, escolher o princípio adequado e organizar o processo de contagem.

Diante dessas dificuldades, é fundamental a adoção de uma estratégia estruturada para o seu enfrentamento. Uma estratégia bem definida ajuda o estudante a organizar o pensamento, promove a visualização sistemática das etapas de contagem, reduzindo erros comuns como contagem dupla ou omissão de casos, e torna o processo mais eficiente e compreensível. Além disso, ao seguir um método claro, os estudantes desenvolvem um raciocínio lógico consistente, facilitando a generalização dos princípios combinatórios para problemas mais elaborados e diferentes contextos.

A partir da estratégia apresentada por Carvalho e Morgado (2014), elaboramos uma versão mais detalhada para a resolução de problemas de contagem. A metodologia segue os seguintes passos:

1. Assumir o lugar de quem está fazendo a contagem

Significa colocar-se no papel do indivíduo que realiza o processo de contagem, ou seja, imaginar e compreender as decisões a serem tomadas para contar os elementos envolvidos no problema. Trata-se de adotar uma perspectiva interna, que permite analisar o problema de forma detalhada e sequencial, favorecendo o entendimento dos princípios subjacentes e o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

2. Dividir o problema em etapas ou decisões

Sempre que possível, é fundamental decompor as decisões a serem tomadas em decisões mais simples e distintas, correspondentes às etapas do processo decisório, o que facilita a compreensão e torna a resolução do problema de contagem mais clara e manejável.

3. Identificar as opções disponíveis em cada etapa

Para cada etapa ou decisão devem ser listadas de forma clara quais são as possíveis escolhas que podem ser feitas e a quantidade dessas escolhas.

4. Atacar primeiro as decisões com maior número de restrições.

Se uma das decisões for mais restrita que as outras, isto é, caso esta decisão seja deixada para depois as outras decisões precisariam ser divididas em mais casos, é ela que devemos atacar primeiro. A ordem em que as decisões são tomadas pode ser crucial para a simplicidade do processo de resolução. Vamos retomar o Exemplo 3:

Quantos são os números naturais de 200 a 999 cujos algarismos pertencem ao conjunto $A = \{1, 4, 7, 9\}$ e são distintos?

Vamos ver agora como uma estratégia equivocada pode levar a uma solução desnecessariamente complexa. Em nossa solução, escolhemos primeiro o algarismo das centenas, depois o das dezenas e, por fim, o das unidades. A razão pela qual adotamos essa ordem não foi apenas porque ela segue a sequência natural de escrita de um número, mas porque, no contexto do problema, a escolha do algarismo das centenas era a mais restrita. Além de ser diferente dos outros algarismos, o algarismo das centenas também não podia ser igual a 1.

Agora, vamos imaginar o que teria acontecido se tivéssemos escolhido os algarismos na ordem inversa: começando pelas unidades, seguidas das dezenas e, por último, das centenas. Nesse caso, a única restrição para o algarismo das unidades seria que ele deve pertencer ao conjunto $A = \{1, 4, 7, 9\}$, o que daria 4 possibilidades ($m_1 = 4$). Após isso, teríamos 3 opções para o algarismo das dezenas, já que ele deve pertencer a A e ser diferente do algarismo das unidades ($m_2 = 3$). No entanto, ao tentarmos determinar o número de possibilidades para o algarismo das centenas, encontramos um problema: a resposta depende de quais algarismos já foram escolhidos para as unidades e para as dezenas.

Se o algarismo 1 já tiver sido utilizado, restariam apenas 2 opções para as centenas, já que os algarismos devem ser distintos. Porém, se o algarismo 1 não tiver sido escolhido, sobraria apenas um valor possível para as centenas, já que ele não pode ser igual a 1, nem aos algarismos das unidades ou das dezenas. Como a quantidade de opções para o algarismo das centenas varia dependendo das escolhas anteriores, não é possível definir um valor fixo para m_3 e, portanto, não podemos aplicar o princípio multiplicativo de forma direta.

Esse exemplo ilustra como a ordem das escolhas pode afetar a simplicidade e a aplicabilidade do princípio multiplicativo. Ao seguir a ordem em que as restrições mais rígidas (no caso, a escolha do algarismo das centenas) são aplicadas primeiro, evitamos complicações e garantimos que o raciocínio seja mais direto e eficiente

5. Construir a árvore de decisão listando o conjunto de resultados possíveis

Na fase inicial do ensino de Análise Combinatória, construir a árvore de decisão é fundamental para organizar de forma estruturada e visual o conjunto de todos os resultados possíveis do problema de contagem. Essa representação gráfica permite que os estudantes acompanhem passo a passo as escolhas feitas em cada etapa, facilitando a compreensão das interdependências entre as decisões. Além disso, a árvore de decisão ajuda a evitar omissões e contagens duplicadas, promovendo um raciocínio mais claro e rigoroso. Ao tornar explícito o conjunto de resultados, essa ferramenta contribui para a aplicação correta dos princípios multiplicativo e aditivo.

6. Contar o conjunto de resultados possíveis

Uma vez construída a árvore de decisão, essa é uma tarefa simples.

Na sequência didática que será apresentada no capítulo 6, seguiremos os passos dessa metodologia para solucionar os problemas propostos.

5 ANÁLISE DA APRESENTAÇÃO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E DO PRINCÍPIO ADITIVO NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

A análise dos livros de matemática do ensino médio foi realizada com base nas definições e recomendações do capítulo 3 e na habilidade EM13MAT310 da BNCC – Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Para essa análise, escolhemos cinco livros da relação de dez livros de matemática para o ensino médio aprovados no PNLD 2021. São eles:

Tabela 1. Relação dos livros didáticos analisados

Título	Autores	Referência
1. CONEXÕES – MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS	Obra coletiva Fabio Martins de Leonardo (Editor)	LEONARDO F. M. (2020)
2. DIÁLOGO – MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS	Obra coletiva Lilian Aparecida Teixeira (Editora)	TEIXEIRA L. A (2020)
3. INTERAÇÃO – MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS	Adilson Longes Luciana Tenuta de Freitas (coordenação)	LONGEN A.; FREITAS L.T. (2020)
4. MATEMÁTICA EM CONTEXTOS	Luiz Roberto Dante Fernando Viana	DANTE L. R.; VIANA F. (2020)
5. MATEMÁTICA INTERLIGADA	Obra coletiva Thais Marcelle de Andrade (coordenação)	ANDRADE T. M. (2020)

Fonte: Elaborada pelo autor

Visando uniformizar a análise dos livros, definimos nove critérios que consideramos essenciais para permitir uma boa avaliação de como o Princípio Multiplicativo e o Princípio Aditivo são apresentados nos livros, a saber:

- i. Como é abordada a introdução à Análise Combinatória
- ii. Exemplos práticos para introdução do Princípio Multiplicativo
- iii. Enunciado do Princípio Multiplicativo
- iv. Exemplos de aplicação do Princípio Multiplicativo
- v. Exemplos práticos para introdução do Princípio Aditivo

- vi. Enunciado do Princípio aditivo
- vii. Exemplos de aplicação do Princípio Aditivo
- viii. Lista de exercícios contemplando os dois princípios
- ix. Resumo: pontos positivos e pontos negativos

As análises foram baseadas no conteúdo apresentado no capítulo 3.

5.1 CONEXÕES - MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

i. Como é abordada a introdução à Análise Combinatória

O capítulo de Análise Combinatória se inicia com a apresentação de um fluxograma que propõe avaliar a segurança de senhas utilizadas no cotidiano. Embora esse recurso desperte o interesse dos alunos e dialogue com situações do dia a dia, observa-se a ausência de exemplos diretamente relacionados aos processos de contagem. Considerando o apelo que o tema das senhas exerce sobre os jovens, o material poderia ter apresentado exemplos da quantificação do número de senhas possíveis, variando o tamanho das mesmas e o conjunto de caracteres permitidos. Tal abordagem seria uma oportunidade pertinente e didática para introduzir o Princípio Multiplicativo, a partir de uma situação concreta e motivadora.

ii. Exemplos práticos para introdução do Princípio Multiplicativo

Na sequência da introdução, o livro apresenta a seção intitulada “**Situações envolvendo problemas de contagem**”, na qual são apresentados três exemplos relacionados ao uso do Princípio Multiplicativo. Nenhum deles, no entanto, aborda situações envolvendo a formação de senhas, o que representa uma oportunidade didática não aproveitada. O primeiro exemplo apresentado é o mais complexo da seção e é resolvido sem o apoio de recursos visuais, como árvores de decisão ou tabelas. Por outro lado, os dois exemplos subsequentes, de caráter mais intuitivo, fazem uso de ilustrações, explorando adequadamente o uso da árvore de decisão e da tabela para representar o total de possibilidades. Do ponto de vista pedagógico, a sequência dos exemplos poderia ser reorganizada, colocando o exemplo mais complexo na terceira posição e complementando sua resolução com o uso de uma árvore de decisão. Essa reestruturação seria mais adequada para a compreensão gradual do conceito.

De todo modo, o material oferece condições para que o aluno inicie a compreensão da natureza dos problemas de Análise Combinatória e, com a mediação do professor, consiga aplicar o Princípio Multiplicativo de forma intuitiva, sem recorrer a fórmulas, por meio do uso de árvores de decisão e tabelas, que auxiliam na visualização e organização das possibilidades envolvidas nas situações apresentadas.

iii. Enunciado do Princípio Multiplicativo

Considere que um acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, A e B. Se A pode ocorrer de m maneiras e se, para cada uma delas, B pode ocorrer de n maneiras, o número de maneiras que o acontecimento pode ocorrer é mn.

Acrescido da observação:

O princípio multiplicativo pode ser estendido para três ou mais etapas.

Embora o enunciado, acrescido da observação, esteja correto, da forma reduzida como foi escrito, pode causar dúvida nos alunos sobre como estendê-lo para n etapas.

iv. Exemplos de aplicação do Princípio Multiplicativo

O livro apresenta cinco exemplos resolvidos sobre a aplicação do Princípio Multiplicativo. Entretanto, na solução do problema R3:

Determinar a quantidade de números de 4 algarismos que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

O livro não justifica porque a primeira ação a ser executada é a escolha do algarismo das unidades de milhar. Essa discussão é importante para os alunos compreenderem que a ordem de execução das ações é importante. As ações com mais restrição devem ser executadas primeiro. Se começarmos na ordem errada, pode ser muito trabalhoso chegar à solução correta.

v. Exemplos práticos para introdução do Princípio Aditivo

O livro não apresenta o Princípio Aditivo, que é uma exigência da BNCC, mas o exercício R4 é uma aplicação conjunta do Princípio Aditivo e do Princípio Multiplicativo.

Determinar a quantidade de números de 4 algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 e que são divisíveis por 5.

Apesar do exercício ter sido resolvido de maneira correta, a solução deveria explorar de forma clara o Princípio Aditivo, a divisão do problema em casos, e sua utilização com o Princípio Multiplicativo.

Os critérios **v**, **vi** e **vii** não foram analisados por que o livro não apresenta o Princípio Aditivo.

viii. Lista de exercícios contemplando os dois princípios

O material propõe 19 exercícios com níveis de dificuldade variados e temáticas interessantes. No entanto, um aluno que estude exclusivamente pelo texto do livro poderá enfrentar dificuldades significativas para resolver a lista, uma vez que os exemplos resolvidos não contemplam algumas das situações mais complexas presentes nos exercícios. Dessa forma, caberá ao professor complementar o conteúdo, aprofundando a abordagem do Princípio Aditivo e sua articulação com o Princípio Multiplicativo, a fim de proporcionar aos alunos uma compreensão mais completa e segura dos conceitos envolvidos.

Resumindo, é apresentada uma lista dos pontos considerados positivos e negativos, baseada na análise realizada.

ix. Resumo: pontos positivos e pontos negativos

Pontos positivos:

- a) Contextualização inicial com tema atrativo (senhas) que pode despertar o interesse dos alunos.
- b) Utilização de recursos visuais (árvores de decisão e tabelas) em alguns exemplos.
- c) Lista de exercícios com variedade temática e níveis de dificuldade diversos.

Pontos negativos:

- a) Ausência do enunciado e da discussão formal do Princípio Aditivo, apesar de sua exigência na BNCC.

- b) Falta de exemplos que exijam divisão em casos ou estratégias mais complexas de resolução.
- c) Sequência de exemplos pouco didática; falta de progressão da complexidade.
- d) Falta de justificativas conceituais importantes (ex.: escolha da ordem de etapas na contagem).
- e) Lista de exercícios exige mais do que é trabalhado nos exemplos resolvidos, dificultando o estudo autônomo.

5.2 DIÁLOGO – MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

i. Como é abordada a introdução à Análise Combinatória

O capítulo de Análise Combinatória é iniciado com um texto sobre códigos de barras, cuja abordagem se mostra pouco adequada para introduzir as percepções elementares de contagem. O foco recai quase exclusivamente sobre a descrição da estrutura dos códigos e sobre o algoritmo utilizado para o cálculo do dígito verificador, deixando de lado a exploração conceitual dos princípios combinatórios. Das questões propostas ao final do texto, apenas uma se relaciona, de forma direta, com situações de contagem. Haveria, contudo, um potencial didático significativo se o texto provocasse o leitor a estimar, de maneira intuitiva, por exemplo, a quantidade máxima de países, empresas ou produtos que poderiam ser representados por combinações possíveis de dígitos — o que permitiria introduzir o Princípio Multiplicativo em um contexto mais significativo.

Na sequência, na seção intitulada “Métodos de contagem”, o livro apresenta a seguinte definição:

Métodos de contagem são métodos que permitem determinar quantas decisões podem ser tomadas para executar uma tarefa ou um procedimento.

Essa definição contém um erro conceitual, métodos de contagem não se destinam a determinar o número de decisões possíveis, pois esse número está relacionado à estrutura própria do problema. Na realidade, os métodos de contagem consistem em técnicas matemáticas empregadas para determinar o número total de possibilidades na realização de agrupamentos, conforme as restrições de cada situação.

Ainda nessa seção, o texto apresenta duas questões relacionadas à contagem, mas sem qualquer discussão ou contextualização que as torne motivadoras ou significativas para o aluno. Em seguida, é introduzido o seguinte enunciado para o Princípio Aditivo da Contagem:

Considere dois acontecimentos independentes. Se um pode ocorrer de m maneiras distintas e o outro pode ocorrer de n maneiras distintas, então a quantidade de maneiras de ocorrer um acontecimento ou o outro é $n + m$. Este é o princípio aditivo da contagem.

A definição apresentada está conceitualmente equivocada. O Princípio Aditivo não exige que os acontecimentos sejam independentes, mas sim que sejam mutuamente exclusivos, ou seja, que não possam ocorrer simultaneamente. Essa distinção é fundamental para a correta aplicação do princípio. Além disso, o texto não apresenta qualquer comentário sobre a possibilidade de generalização do princípio para mais de dois casos disjuntos, o que poderia enriquecer a compreensão do aluno.

O exemplo que segue é bastante trivial:

Em certa lanchonete alguns sanduíches são comercializados já montados. Nesse tipo de serviço são oferecidas três opções de sanduíche com carne, duas opções de sanduíche com frango e quatro opções de sanduíches vegetarianos. Nesse tipo de serviço, quantas são as possibilidades de um cliente escolher apenas um sanduíche?

A solução fornecida é direta:

De acordo com as informações apresentadas, o cliente pode escolher qualquer opção de lanche dentre as apresentadas, que totalizam: $3 + 2 + 4 = 9$. Portanto, um cliente possui 9 possibilidades de escolha.”

Apesar de correta, a solução não estabelece nenhuma conexão explícita com o princípio enunciado anteriormente. A definição, que menciona “acontecimentos independentes”, não se articula com o exemplo proposto: afinal, quais seriam os acontecimentos distintos considerados? Conforme já discutido neste trabalho, a apresentação do Princípio Aditivo deveria estar vinculada à ideia de divisão do problema em casos mutuamente exclusivos. Definições imprecisas e exemplos desconectados dificultam o desenvolvimento de uma compreensão sólida dos princípios combinatórios por parte dos alunos.

ii. Exemplos práticos para introdução do Princípio Multiplicativo

No início da seção intitulada “**Princípio Multiplicativo**”, o livro retoma o problema B, apresentado na seção “**Métodos de Contagem**”, que trata da formação de uma senha composta por quatro letras maiúsculas, escolhidas entre as 26 do alfabeto, seguidas por três algarismos, selecionados entre os 10 disponíveis, com a exigência de que todos os caracteres sejam distintos e faz o seguinte comentário:

Podemos resolver o problema B proposto anteriormente escrevendo todas as possibilidades e realizando a contagem das senhas. No entanto, escrever todas essas senhas pode ser trabalhoso. Uma maneira de resolver esse tipo de problema é por meio do princípio multiplicativo da contagem ou, como também é chamado, princípio fundamental da contagem.

Tal afirmação não é cabível pois listar todas as $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 10 \times 9 \times 8 = 258.336.000$ possíveis senhas não é apenas trabalhoso, é inviável sem o uso de ferramentas computacionais.

A apresentação formal do Princípio Multiplicativo é precedida por apenas um exemplo simples, que é resolvido de maneira adequada com o apoio de um diagrama de árvore e de uma tabela. No entanto, a ausência de exemplos mais contextualizados e desafiadores limita o potencial didático da seção, especialmente considerando que o próprio livro reconhece a dificuldade de realizar contagens extensas manualmente, justamente o tipo de situação em que o Princípio Multiplicativo se mostra mais relevante.

iii. Enunciado do Princípio Multiplicativo

Se um acontecimento A pode ocorrer de n maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, um acontecimento B pode ocorrer de m maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos A e B é dada pelo produto n.m. Este é o princípio fundamental da contagem.

Não é feito comentário algum sobre a generalização do princípio.

iv. Exemplos de aplicação do Princípio Multiplicativo

Embora o texto não apresente comentários sobre a generalização do Princípio Multiplicativo, os exemplos propostos envolvem situações em que são necessárias mais de duas

escolhas sequenciais, como na formação de números com três ou quatro algarismos. No entanto, a ausência de uma explicação formal sobre a generalização do princípio pode comprometer a compreensão dos alunos, especialmente em problemas com maior complexidade.

No exemplo 2, por exemplo, é proposto o seguinte enunciado:

Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podemos formar quantos números de quatro algarismos?”

Apesar da pertinência do exemplo, o texto não discute um ponto fundamental para a resolução correta: a razão pela qual é conveniente começar a pela escolha do algarismo das unidades de milhar.

Os itens (v), (vi) e (vii) sobre o Princípio Aditivo já foram comentados em **5.2.1**.

viii. Lista de exercícios contemplando os dois princípios

A lista apresenta 17 exercícios relativamente simples, a maioria de aplicações diretas do Princípio Multiplicativo. No entanto, o material não explora métodos mais elaborados de resolução de problemas combinatórios, tampouco propõe situações em que o aluno precise dividir o problema em casos ou elaborar estratégias de solução mais complexas. Em consequência, a lista pouco contribui para o desenvolvimento do raciocínio combinatório em sentido mais amplo. Assim, caberá ao professor complementar o conteúdo com exemplos adicionais que desafiem os estudantes a aplicar tanto o Princípio Aditivo quanto o Princípio Multiplicativo em contextos que exijam raciocínios mais complexos.

ix. Resumo: pontos positivos e pontos negativos

Pontos positivos:

- a) Apresentação do Princípio Multiplicativo com exemplo simples acompanhado de diagrama de árvore e tabela.

Pontos negativos:

- a) Introdução desconectada dos conceitos fundamentais de contagem; falta de exploração do potencial didático da temática inicial.
- b) Erros conceituais importantes, como na definição dos métodos de contagem e do Princípio Aditivo (confusão entre independência e exclusividade).

- c) Falta de contextualização nos exemplos: não há problemas desafiadores ou motivadores.
- d) Ausência de generalização formal dos princípios, tanto do aditivo quanto do multiplicativo.
- e) Exemplos pouco articulados com os conceitos: definições e aplicações não se conectam adequadamente.
- f) Lista de exercícios limitada a aplicações diretas, sem promover o desenvolvimento do raciocínio combinatório ou exigir estratégias mais elaboradas.

5.3 INTERAÇÃO – MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

i. Como é abordada a introdução à Análise Combinatória

A seção “**Princípios de Contagem**” tem início com um exemplo bastante interessante que propõe a contagem do número de trocas nos algarismos das horas e minutos de um relógio digital, ao longo de determinado intervalo de tempo. Trata-se de uma abordagem concreta e instigante, que pode despertar o interesse dos estudantes.

Na sequência, o livro diferencia corretamente dois tipos de situações: a contagem de elementos de um conjunto e a contagem de possibilidades na formação de agrupamentos. Essa distinção é importante e é acompanhada de questões relevantes que incentivam a reflexão dos alunos.

A subseção “**Problemas iniciais de contagem**” é especialmente rica: nela, o livro explora estratégias de contagem direta e o uso da teoria dos conjuntos. São propostas 14 atividades desafiadoras e criativas, que representam uma excelente oportunidade para que o professor trabalhe a construção intuitiva dos princípios de contagem, antes mesmo de formalizá-los.

ii. Exemplos práticos para introdução do Princípio Multiplicativo

O Princípio Multiplicativo é introduzido por meio de dois exemplos bem escolhidos, nos quais são utilizados recursos visuais — como diagramas de árvore e tabelas — para organizar e contar os resultados possíveis. Essa abordagem favorece a compreensão do princípio de forma concreta e visual.

iii. Enunciado do Princípio Multiplicativo

Se um evento A_1 pode ocorrer de n_1 modos diferentes e, para cada um deles, um segundo evento A_2 pode ocorrer de n_2 modos diferentes, então o número total de modos em que os dois eventos podem ocorrer, nessa ordem, é $n_1 \cdot n_2$.

A seguir, há a observação de que o princípio pode ser estendido para mais de dois eventos. Embora o enunciado esteja correto e acessível para os alunos iniciantes, faltou uma formulação explícita para o caso geral com n eventos.

iv. Exemplos de aplicação do Princípio Multiplicativo

O livro apresenta dois exemplos resolvidos. O primeiro trata da formação de números de três algarismos no sistema decimal. No entanto, assim como observado em outras obras, não há explicação sobre a razão de se iniciar pela escolha do algarismo das centenas. Essa escolha não é arbitrária nem puramente formal, mas decorre de uma restrição importante: o primeiro algarismo não pode ser zero. Discutir esse ponto ajuda os alunos a entenderem que, em contagem, a ordem das ações deve considerar as restrições impostas pelo problema.

O segundo exemplo envolve a divisão em casos, sendo uma aplicação conjunta dos Princípios Aditivo e Multiplicativo. Apesar disso, o livro não define formalmente o Princípio Aditivo. Essa omissão é uma limitação importante, pois o entendimento da contagem combinatória depende, fundamentalmente, da distinção entre a soma de alternativas (casos mutuamente exclusivos) e o produto de etapas sucessivas. A ausência dessa definição também compromete o atendimento à habilidade **EM13MAT310** da BNCC.

Os itens (v), (vi) e (vii) não foram avaliados, pois o livro não apresenta o Princípio Aditivo.

viii. Lista de exercícios contemplando os dois princípios

O livro oferece uma excelente lista de atividades, com problemas bem selecionados e dispostos em ordem crescente de dificuldade. A natureza não trivial das questões favorece o desenvolvimento do raciocínio combinatório. No entanto, em razão da ausência de uma definição formal do Princípio Aditivo, os alunos podem encontrar dificuldades em situações

que exigem a combinação dos dois princípios. A mediação do professor será essencial para suprir essa lacuna conceitual.

ix. **Resumo: pontos positivos e pontos negativos**

Pontos positivos:

- a) Introdução instigante: O livro inicia a Análise Combinatória com um exemplo concreto e envolvente (troca de dígitos em um relógio digital).
- b) Boa distinção conceitual: Diferencia de forma clara a contagem de elementos de um conjunto da contagem de possibilidades de agrupamentos, com propostas de questões que incentivam a reflexão.
- c) Atividades iniciais bem elaboradas: A seção “Problemas iniciais de contagem” oferece 14 atividades desafiadoras e criativas, ideais para introduzir os princípios de forma intuitiva.
- d) Uso de recursos visuais: Diagramas de árvore e tabelas são utilizados na introdução do Princípio Multiplicativo, facilitando a compreensão por meio de representações visuais.
- e) Lista de exercícios bem estruturada: os problemas são organizados em ordem crescente de dificuldade e que favorecem o raciocínio combinatório.

Pontos negativos:

- a) Ausência de generalização formal: Apesar de mencionar a possibilidade de extensão, o livro não apresenta o enunciado do Princípio Multiplicativo para n eventos, o que limita a compreensão mais abstrata e abrangente do conceito.
- b) Falta de justificativa importante: No exemplo sobre números de três algarismos, não é discutido porque a escolha deve começar pelas centenas.
- c) Omissão do Princípio Aditivo: O livro aplica o Princípio Aditivo sem apresentá-lo formalmente, o que dificulta o reconhecimento de situações em que esse princípio deve ser usado e não atende à habilidade **EM13MAT310**.

5.4 MATEMÁTICA EM CONTEXTOS

i. **Como é abordada a introdução à Análise Combinatória**

A introdução do capítulo busca despertar o interesse dos estudantes pela Análise Combinatória ao contextualizar os conceitos por meio das modalidades e da organização dos Jogos Olímpicos. São apresentados elementos históricos e organizacionais dos Jogos, oferecendo subsídios para a compreensão de quatro situações propostas, cada uma acompanhada de um conjunto de questões que incentivam a construção intuitiva de estratégias de contagem.

Além dessas atividades iniciais, o livro apresenta outros quatro exemplos de situações envolvendo contagem, permitindo que o professor explore com os alunos diferentes aspectos dos agrupamentos, destacando se a ordem dos elementos é ou não relevante. Trata-se de um material didático rico, que favorece uma aprendizagem contextualizada e significativa.

ii. Exemplos práticos para introdução do Princípio Multiplicativo

Antes de apresentar formalmente o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), o livro trabalha três situações do cotidiano que o envolvem, utilizando representações visuais como desenhos, diagramas, esquemas, listas, tabelas e árvores de decisão. Contudo, em todos esses exemplos, os acontecimentos são descritos como compostos por etapas sucessivas e *independentes*, o que leva à interpretação equivocada de que o PFC só se aplica quando as etapas são independentes. Essa ideia é reforçada no próprio enunciado do princípio.

iii. Enunciado do Princípio Multiplicativo

Um acontecimento é composto de n etapas a_1, a_2, \dots, a_n , sucessivas e independentes, de maneira que

- *o número de possibilidades distintas de a_1 ocorrer é b_1 ;*
- *para cada possibilidade da etapa a_1 , o número de possibilidades distintas de a_2 ocorrer é b_2 ;*
- *para cada possibilidade das etapas a_1 e a_2 , o número de possibilidades distintas de a_3 ocorrer é b_3 ;*
- *...*
- *para cada possibilidade das etapas anteriores, o número de possibilidades distintas de a_n ocorrer é b_n .*

Então, o número de possibilidades de o acontecimento ocorrer é dado por:

$$b_1.b_2. \dots .b_n$$

Esse é o princípio fundamental da contagem.

Embora o enunciado esteja formalmente bem estruturado, há uma imprecisão conceitual: não é necessário que as etapas sejam independentes. O que se exige é que, independentemente dos resultados das etapas anteriores, o número de possibilidades de cada etapa seja constante. Essa distinção é importante para a aplicação correta do princípio.

iv. Exemplos de aplicação do Princípio Multiplicativo

O livro discute três exemplos para ilustrar a aplicação do PFC. O terceiro exemplo é particularmente relevante, pois envolve etapas não independentes:

Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Neste caso, a escolha dos algarismos para centena, dezena e unidade depende dos anteriores, pois não se podem repetir. Mesmo assim, o número de possibilidades para cada etapa permanece constante: 6 opções para a centena (não pode ser zero), 6 para a dezena (excluindo a escolhida para a centena), 5 para a unidade. Assim, o total é $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$. Contudo, o livro não discute o fato de que, sempre que possível, deve-se começar pelas ações mais restritivas — ou seja, aquelas com mais limitações — como a escolha da centena, nesse caso.

v. Exemplos práticos para introdução do Princípio Aditivo

O Princípio Aditivo é apresentado através do seguinte exemplo:

Carina tem 2 pares de tênis e 3 pares de botas. Dentre os 4 pares de meias que possui, 3 pares de meias diferentes podem ser usados com os pares de tênis, e apenas 1 par de meias pode ser usado com as botas. De quantas maneiras diferentes ela pode escolher um calçado e o par de meias adequado?

A solução apresentada para este problema já parte da divisão do problema em dois acontecimentos sem permitir uma reflexão sobre a necessidade dessa divisão. Teria sido mais didático representar a situação com uma árvore de decisão, mostrando que, nesse caso, o

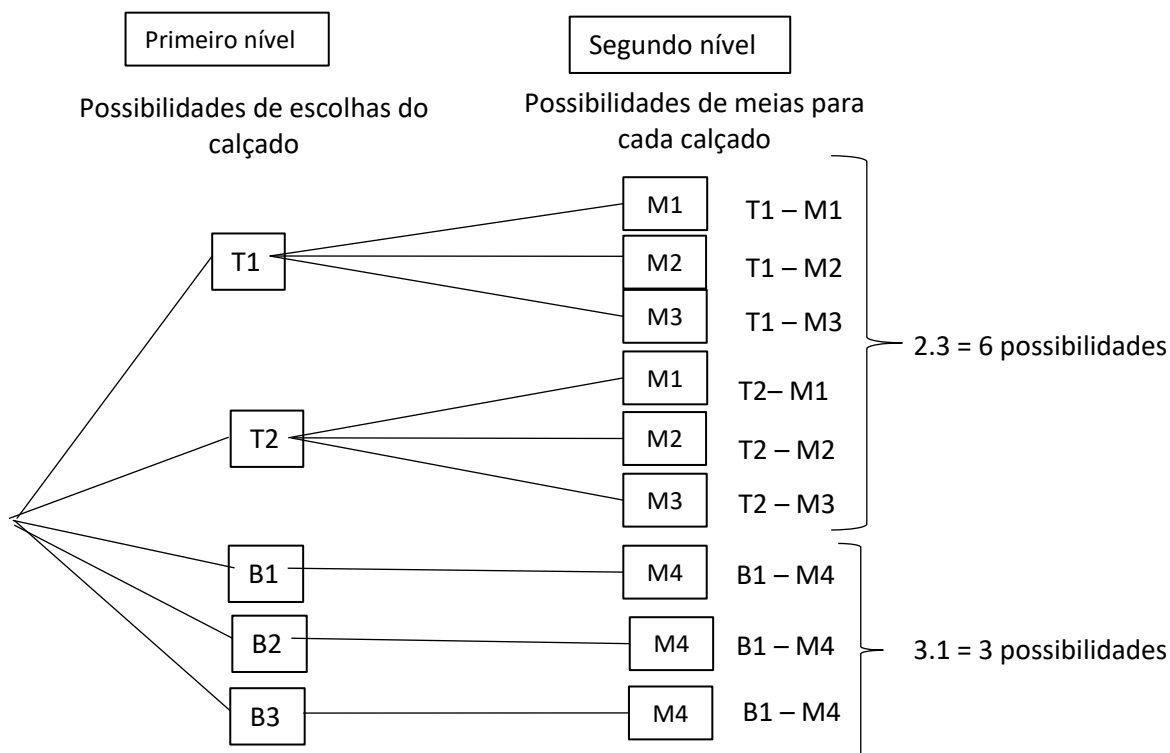
Princípio Multiplicativo não se aplica devido à variação no número de opções conforme a escolha anterior. Exemplificando, chamando os pares de tênis de T1 e T2, os pares de botas de B1, B2 e B3, as meias para tênis de M1, M2 e M3 e a meia para botas de M4, se tentássemos construir uma árvore de possibilidades, ela teria a forma da figura 5.1, que mostra que a solução correta requer a divisão do problema em casos distintos, aplicando o Princípio Aditivo. Essa estratégia favoreceria a compreensão da diferença entre a aplicação dos dois princípios.

vi. Enunciado do Princípio Aditivo

O princípio aditivo é utilizado sempre que podemos escolher um ou outro acontecimento, sendo que ambos não podem ser escolhidos ao mesmo tempo.

Apesar de não estar incorreto, o enunciado é superficial. Seria mais apropriado relacionar o princípio à divisão do problema em casos mutuamente exclusivos, deixando explícito que o total de possibilidades é a soma das possibilidades de cada caso.

Figura 5.1 – Árvore de decisão para o problema do Princípio Aditivo



Fonte: Elaborada pelo autor

vii. Exemplos de aplicação do Princípio Aditivo

O único exemplo apresentado é bastante simples e não contribui significativamente para a compreensão da aplicabilidade do princípio em situações mais complexas.

viii. Lista de exercícios contemplando os dois princípios

O nível de complexidade dos problemas propostos na lista de atividades ao final da seção sobre o Princípio Fundamental da Contagem é adequado a uma abordagem introdutória dos princípios multiplicativo e aditivo. Além dessa lista, o livro propõe o “Jogo dos Quadrados”, que estimula os alunos a construir uma árvore de possibilidades representando todas as sequências possíveis de jogadas, promovendo o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a visualização das diferentes situações.

Ao final do capítulo de Análise Combinatória, nas seções “Problemas que envolvem vários tipos de agrupamento” e “Vestibulares e Enem”, o livro apresenta duas listas de exercícios especialmente bem elaboradas. Os problemas propostos possuem nível de dificuldade compatível com o exigido nos principais vestibulares do país, oferecendo ao estudante uma oportunidade consistente de aprofundamento e consolidação dos conteúdos.

ix. Resumo: pontos positivos e pontos negativos

Pontos Positivos:

- a) Contextualização atrativa: A introdução da Análise Combinatória é feita de maneira envolvente, utilizando o contexto dos Jogos Olímpicos. Isso favorece a motivação dos alunos e a aprendizagem significativa.
- b) Diversidade de estratégias de contagem: O livro apresenta múltiplas situações-problema, com destaque para a variação entre agrupamentos com e sem importância da ordem, estimulando a construção intuitiva dos conceitos.
- c) Uso de representações visuais: Diagramas, árvores, tabelas e esquemas são bem explorados na introdução do Princípio Multiplicativo, facilitando a compreensão dos alunos.

- d) Atividades com potencial didático: O “Jogo dos Quadrados” promove o pensamento combinatório e a visualização de possibilidades, sendo um recurso pedagógico criativo.
- e) Listas de exercícios diversificadas e desafiadoras: As listas ao final do capítulo são bem elaboradas, com nível compatível com os principais vestibulares, favorecendo o aprofundamento do conteúdo.

Pontos Negativos:

- a) Conceito equivocado de independência no PFC: O enunciado do Princípio Fundamental da Contagem afirma que as etapas precisam ser independentes, o que é conceitualmente incorreto.
- b) Ausência de discussão sobre a ordem das ações: No exemplo dos números de três algarismos, não é discutido que, idealmente, as ações mais restritivas devem ser realizadas primeiro — ponto essencial em problemas com restrições.
- c) Tratamento superficial do Princípio Aditivo: O enunciado do Princípio Aditivo é vago e não o relaciona explicitamente à ideia de divisão do problema em casos mutuamente exclusivos. O único exemplo apresentado é simples demais e não explora adequadamente a aplicabilidade do princípio em situações mais elaboradas.

5.5 MATEMÁTICA INTERLIGADA

i. Como é abordada a introdução à Análise Combinatória

O capítulo de Análise Combinatória tem início com um exemplo contextualizado relacionado à montagem de computadores, no qual se exploram as diferentes configurações possíveis a partir da combinação de conjuntos distintos de componentes. A proposta é pertinente e apresenta potencial para motivar os alunos por meio de uma situação do cotidiano. O problema proposto, embora interessante, não é resolvido no texto. No entanto, sua solução seria particularmente adequada para introduzir o Princípio Multiplicativo com o apoio de representações visuais, como árvores de decisão ou tabelas de possibilidades, que favorecem a construção do raciocínio combinatório. Em seguida, são apresentadas outras questões envolvendo situações de contagem, também sem solução explícita. Apesar disso, essas perguntas são relevantes e podem ser aproveitadas pelo professor como ponto de partida para

promover a participação ativa dos alunos e despertar o interesse pelo estudo da Análise Combinatória.

ii. Exemplos práticos para introdução do Princípio Multiplicativo

O livro apresenta um único exemplo resolvido, no qual o uso de uma árvore de decisão e de uma tabela de dupla entrada é feito de forma apropriada. A clareza dessas representações favorece a compreensão do Princípio Multiplicativo. No entanto, a introdução ao princípio poderia contemplar uma variedade maior de situações práticas, permitindo aos leitores explorar diferentes contextos e aprofundar a familiaridade com a aplicação do princípio.

iii. Enunciado do Princípio Multiplicativo

Se uma decisão A pode ser tomada de m maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, uma outra decisão B pode ser tomada de n maneiras distintas, então o número de maneiras distintas de serem tomadas as decisões A e B é $m.n$. Esse princípio é conhecido como princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem – PFC

Acrescido da observação:

O PFC também pode ser estendido para ações com mais de duas etapas sucessivas e independentes

O enunciado, corretamente, não exige independência das decisões. Inexplicavelmente, na observação é exigida independência, o que, como já discutido anteriormente, não está correto.

iv. Exemplos de aplicação do Princípio Multiplicativo

São apresentados dois exemplos de aplicação do Princípio Multiplicativo. O primeiro exemplo:

Uma loja oferece 2 modelos de telefone celular, 2 planos de tarifa e 3 condições de pagamento. Quantas possibilidades diferentes uma pessoa tem para comprar um telefone celular nessa loja?

É resolvido adequadamente, através de uma árvore de decisão, mas poderia ser destacado que a solução utiliza o Princípio Multiplicativo estendido para mais de duas decisões.

No segundo exemplo:

Utilizando os algarismos 1, 2, 4, 5, 7 e 8, é possível formar quantos números:

- a) Maiores do que 20 com dois algarismos?*
- b) Maiores do que 200 com três algarismos distintos?*
- c) Maiores do que 2.000 com quatro algarismos”?*

Na solução apresentada não há uma discussão sobre porque devemos iniciar a solução pela escolha do algarismo mais à esquerda, que é a decisão mais restrita.

v. Exemplos práticos para introdução do Princípio Aditivo

Para introdução do Princípio Aditivo, que é apresentado antes do Princípio Multiplicativo, o texto traz um exemplo bastante trivial de aplicação do princípio.

vi. Enunciado do Princípio aditivo

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ou seja, não possuem elementos comuns. Se o conjunto A tem m elementos e o conjunto B tem n elementos, então $A \cup B$ possui $m + n$ elementos. Esse princípio é conhecido como princípio aditivo da contagem.

Essa é uma definição matematicamente correta, mas que não ajuda o aluno a entender sua aplicação no contexto da contagem. Como já discutido anteriormente, o Princípio Aditivo deveria ser apresentado com uma consequência da divisão em casos mutuamente excludentes

vii. Exemplos de aplicação do Princípio Aditivo

Não há exemplos resolvidos de aplicação do princípio.

viii. Lista de exercícios contemplando os dois princípios

A lista de exercícios é composta por doze exercícios, na sua maioria, triviais.

ix. **Resumo: pontos positivos e pontos negativos**

Pontos Positivos:

- a) Introdução contextualizada à Análise Combinatória: o capítulo se inicia com um tema interessante (montagem de um computador), com potencial para motivar os alunos e conectar o conteúdo à realidade.

Pontos Negativos:

- a) Pouca variedade de exemplos práticos: tanto o Princípio Aditivo quanto o Multiplicativo são ilustrados com pouca variedade de exemplos, o que reduz a riqueza da abordagem didática e a possibilidade de aplicação em diferentes contextos.
- b) Inconsistência no enunciado do Princípio Multiplicativo: embora o enunciado apresentado não exija independência, a observação posterior incorretamente afirma que o princípio pode ser estendido para mais de duas ações sucessivas e independentes, o que não está correto.
- c) Soluções pouco exploradas: nos exemplos de formações de números a partir de um conjunto de algarismos, não é discutida a razão para a ordem das decisões, começar pela decisão mais restrita que é a escolha do dígito mais à esquerda,
- d) Enunciado formal do Princípio Aditivo distante da prática: o Princípio Aditivo é enunciado em termos de conjuntos, sem relacioná-lo diretamente ao contexto da contagem para casos excludentes, o que dificulta a transferência para situações práticas.
- e) Ausência de exemplos resolvidos do Princípio Aditivo: não há nenhum exemplo resolvido para ilustrar a aplicação do Princípio Aditivo, o que prejudica a fixação do conceito pelos alunos.
- f) Lista de exercícios pouco desafiadora: os exercícios propostos são, em sua maioria, triviais, o que limita o desenvolvimento do pensamento combinatório mais sofisticado.

5.6 Conclusão

A análise dos cinco livros didáticos revelou que, de modo geral, a introdução à Análise Combinatória por meio dos Princípios Multiplicativo e Aditivo é bastante limitada e apresenta

deficiências conceituais e didáticas. Em relação ao Princípio Multiplicativo, verificou-se que dois dos livros incorrem no equívoco conceitual de exigir independência entre as ações envolvidas, o que compromete a compreensão correta do princípio. Apenas um dos materiais analisados apresenta a versão generalizada do Princípio Multiplicativo para mais de duas etapas consecutivas. Outro aspecto negligenciado por todos os livros é a importância de se iniciar a sequência de decisões pelas mais restritivas, o que é importante para a uma resolução menos trabalhosa de muitos problemas de contagem.

Quanto ao Princípio Aditivo, observa-se que sua apresentação é restrita à soma de elementos de dois conjuntos disjuntos, geralmente acompanhada de exemplos excessivamente simples. Não há qualquer menção à interpretação do princípio como uma consequência da divisão do problema em casos mutuamente excludentes, nem à sua articulação com o Princípio Multiplicativo — associação essa fundamental para a resolução de problemas mais elaborados em Análise Combinatória.

Além disso, nenhuma das obras analisa ou sugere a estratégia da contagem pelo complementar, recurso que pode simplificar significativamente a resolução de certos problemas e cuja ausência evidencia uma lacuna importante na abordagem didática. A sensação transmitida é que o Princípio Aditivo é incluído apenas como forma de atender formalmente às exigências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sem o devido aprofundamento conceitual ou atenção às práticas pedagógicas.

Dessa forma, conclui-se que os livros analisados não contemplam de maneira satisfatória a habilidade **EM13MAT310** da BNCC, tampouco atendem plenamente às orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no que se refere ao desenvolvimento do pensamento combinatório no Ensino Médio.

6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O objetivo deste capítulo é apresentar, de forma detalhada, uma sequência didática desenvolvida para estimular os alunos a descobrir os princípios da contagem de forma autônoma, em vez de simplesmente memorizá-los. A sequência desafia os alunos a aplicar suas habilidades de raciocínio lógico e a formular conjecturas acerca das regras de contagem.

Essa sequência didática pressupõe que os alunos ainda não tenham sido apresentados à Análise Combinatória nem princípios de contagem, de modo que não tentem simplesmente relembrar alguma definição pronta. A ideia é que essa sequência possa ser usada como introdução ao ensino de Análise Combinatória no ensino médio. Ela foi estruturada em 5 sessões de uma hora cada. Nessas seções os alunos são organizados em grupos para resolução conjunta dos problemas e o professor atua como facilitador, despertando o interesse do aluno pelo tema, estimulando o trabalho em grupo, discutindo as soluções e desafiando os alunos para irem sempre mais longe em suas descobertas.

Nesta sequência didática, como os alunos estão iniciando o estudo da Análise Combinatória, a ideia é estimulá-los a resolver os problemas de contagem através da listagem do conjunto de resultados possíveis do problema. Iniciar o estudo da combinatória através dessas listagens é interessante porque oferece uma abordagem prática e visual para a contagem, que facilita o entendimento dos conceitos fundamentais. A listagem das possibilidades também serve como uma introdução natural ao Princípio Fundamental da Contagem. O processo de multiplicação do número de opções, à medida que se avança nas escolhas, fica mais claro quando o aluno está visualizando diretamente o conjunto de resultados.

Como argumentam Lockwood & Gibson, num experimento que examinou os efeitos dos alunos se envolverem em criar uma lista organizada dos resultados que estão tentando contar, na resolução correta de problemas de contagem:

Mesmo a criação de listas parciais de resultados afetou positivamente o sucesso dos alunos em problemas de contagem, isso implica que a listagem sistemática de resultados pode ser uma atividade valiosa para os alunos à medida que aprendem a resolver problemas de contagem (LOCKWOOD E.; GIBSON B. 2016, p. 3, tradução própria).

Uma ferramenta eficaz para organizar essas listas é a árvore de decisão, que pode ser utilizada para representar as diferentes escolhas em um problema combinatório. A árvore de

decisão ajuda a visualizar e enumerar todas as alternativas de forma clara, tornando o processo mais organizado e acessível, evitando erros de contagem. Além disso, a árvore fornece uma forma mais intuitiva de resolver problemas que envolvem diferentes cenários ou eventos. Através dessa visualização, os alunos podem entender melhor o conceito de independência e dependência entre eventos e as formas de combinar diferentes elementos.

Sendo assim, a primeira aula dessa sequência didática é sobre árvore de decisão e seu uso para resolver problemas de contagem. Nesta aula também é apresentada uma metodologia para abordar problemas de contagem.

A partir da segunda aula até a quinta, os alunos são desafiados a resolver uma série de problemas utilizando a base metodológica apresentada na primeira aula.

Na segunda aula são propostos três problemas cujas etapas são independentes e o uso da multiplicação para calcular o total de resultados possíveis é intuitivo. No final dessa sessão, os alunos são desafiados a escrever uma definição do Princípio Multiplicativo.

Na terceira aula são apresentados problemas cujas etapas não são independentes, isto é, a escolha feita em uma etapa afeta a escolha da etapa seguinte, mas, o número de opções em cada etapa é sempre o mesmo e a multiplicação também é empregada para calcular o total de resultados possíveis. No final da terceira sessão, os alunos são estimulados a revisar a definição do Princípio Multiplicativo para incorporar a não independência das etapas.

Na quarta aula, são apresentados problemas onde o Princípio Multiplicativo não se aplica diretamente. São problemas que devem ser divididos em casos e o total de possibilidades é obtido pelo Princípio Aditivo, isto é, pela soma das possibilidades de cada caso. Nesses problemas, a construção da árvore de decisão deve ser guiada pelo professor para que fique clara a assimetria da árvore e, conseqüentemente, porque o Princípio Multiplicativo não pode ser aplicado diretamente.

Na quinta e última aula os alunos são apresentados às definições dos livros didáticos do Ensino Médio, que analisamos no capítulo 4. O objetivo é que eles possam comparar a definição que eles criaram com as dos livros e, se for possível, melhorar a definição criada.

Resumindo, nessa sequência, os alunos participam de cinco tipos de atividades:

- a) Resolução de problemas de contagem: Nas sessões de 2 a 4, os alunos resolvem problemas envolvendo multiplicação, com o objetivo de refletirem sobre quando e porque aplicam a multiplicação.

- b) Formulação de uma definição inicial do Princípio Multiplicativo: Ao final da Sessão 2, os alunos são convidados a articular uma primeira definição do princípio, descrevendo como e quando usar a multiplicação nos problemas de contagem.
- c) Refinamento das definições do PM: No final da sessão 3, os alunos são incentivados a refinar a definição do PM criada na sessão 2.
- d) Formulação de uma definição do Princípio Aditivo: Na sessão 4, os alunos são apresentados a problemas onde o Princípio Multiplicativo não pode ser aplicado diretamente e o Princípio Aditivo precisa ser utilizado. No final da aula, o professor, atuando como facilitador, incentiva os alunos a criar uma definição para o Princípio Aditivo.
- e) Avaliação das definições nos livros didáticos: Durante a Sessão 5, os alunos compararam suas definições com as apresentadas nos livros didáticos, refletindo sobre as diferenças.

A tabela 2, apresenta os elementos da sequência didática elaborada.

Tabela 2 – Sequência didática

Elemento	Descrição
Título da sequência	Descobrimo os Princípios Aditivo e Multiplicativo da Contagem
Área de conhecimento	Matemática
Tema central	Introdução à Análise Combinatória – Princípios Multiplicativo e Aditivo
Conteúdos abordados	Árvores de decisão, Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo, contagem de possibilidades, etapas dependentes e independentes, divisão em casos.
Objetivo geral	Levar os alunos a descobrir e compreender, de forma autônoma e investigativa, os princípios fundamentais da contagem, utilizando estratégias de listagem e árvores de decisão.
Objetivos específicos	<ul style="list-style-type: none"> • Desenvolver o raciocínio lógico e combinatório; • Incentivar a formulação e o refinamento de definições matemáticas pelos alunos; • Promover a aprendizagem colaborativa e investigativa; • Favorecer a compreensão intuitiva dos Princípios Aditivo e Multiplicativo; • Relacionar representações gráficas (árvore de decisão) com processos de contagem.
Público-alvo	Estudantes do 2º ano do Ensino Médio, em turmas introdutórias à Análise Combinatória.
Carga horária	5 aulas de 1 hora cada.

Organização dos alunos	Grupos de 4 alunos, com atividades colaborativas e discussão coletiva dos resultados.
Papel do professor	Mediador e facilitador da aprendizagem: orienta a construção das árvores de decisão, conduz discussões, provoca reflexões e auxilia na sistematização das definições formuladas pelos alunos.
Papel do aluno	Ativo e protagonista: resolve problemas, constrói árvores de decisão, fórmula e revisa definições, participa das discussões e trabalha de forma colaborativa.
Metodologia de ensino	Abordagem investigativa, resolução de problemas, aprendizagem colaborativa e construção de conceitos a partir de exemplos concretos e generalizações.
Recursos didáticos	Quadro e marcador, papel, lápis, folhas quadriculadas, material impresso com problemas, projetor multimídia (opcional).
Etapas / Estrutura das aulas	Aula 1: Introdução às Árvores de Decisão e método de resolução de problemas de contagem. Aula 2: Etapas independentes – formulação inicial do Princípio Multiplicativo. Aula 3: Etapas dependentes – refinamento do Princípio Multiplicativo. Aula 4: Princípio Aditivo e divisão em casos. Aula 5: Comparação entre as definições dos alunos e as apresentadas em livros didáticos.
Avaliação da aprendizagem	Avaliação processual e formativa, com base na participação dos alunos, nas discussões em grupo, na construção das árvores de decisão, na formulação das definições e na capacidade de justificar o uso dos princípios de contagem.
Produto final da sequência	Formulação, pelos próprios alunos, das definições dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, seguida de comparação crítica com as definições formais dos livros didáticos.
Resultados esperados	Que os alunos desenvolvam autonomia intelectual, compreendam o raciocínio subjacente aos princípios de contagem, consigam aplicá-los corretamente e reconheçam suas próprias descobertas como parte do processo de construção do conhecimento matemático.

Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir, são detalhadas as aulas da sequência didática. Cada aula contempla os conteúdos a serem abordados, acompanhados das soluções dos problemas propostos, construídas com base no “Método para resolver problemas de contagem”, descrito no Capítulo 4.

6.1 Aula 1: Usando a Árvore de Decisão para resolver problemas da Combinatória

O objetivo dessa aula é apresentar o conceito básico de árvore de decisão de forma simples e visual e ensinar os alunos a utilizar árvores de decisão para listar o conjunto de resultados possíveis em situações com múltiplas escolhas, seguindo o método para resolver problemas de contagem apresentado no capítulo 4.

6.1.1 Introdução:

O que é uma árvore de decisão no contexto da Combinatória?

Uma **árvore de decisão** é uma ferramenta visual que representa as decisões que devem ser tomadas sequencialmente num processo de contagem, as diferentes opções de cada decisão e todos os resultados possíveis da sequência de decisões. Um problema complexo é decomposto em etapas mais simples, facilitando a análise de cada uma das possíveis decisões. Ao estruturar o problema dessa forma, cada decisão é representada por um nó na árvore, e as opções ou caminhos possíveis se ramificam a partir desses nós. Isso permite visualizar claramente todas as soluções possíveis.

6.1.2 Estrutura da Árvore

- a) **Raiz:** Início do problema.
- b) **Nós de decisão:** Cada decisão a ser tomada.
- c) **Ramos:** Possíveis opções de escolha.
- d) **Folhas:** O resultado de uma sequência de decisões.

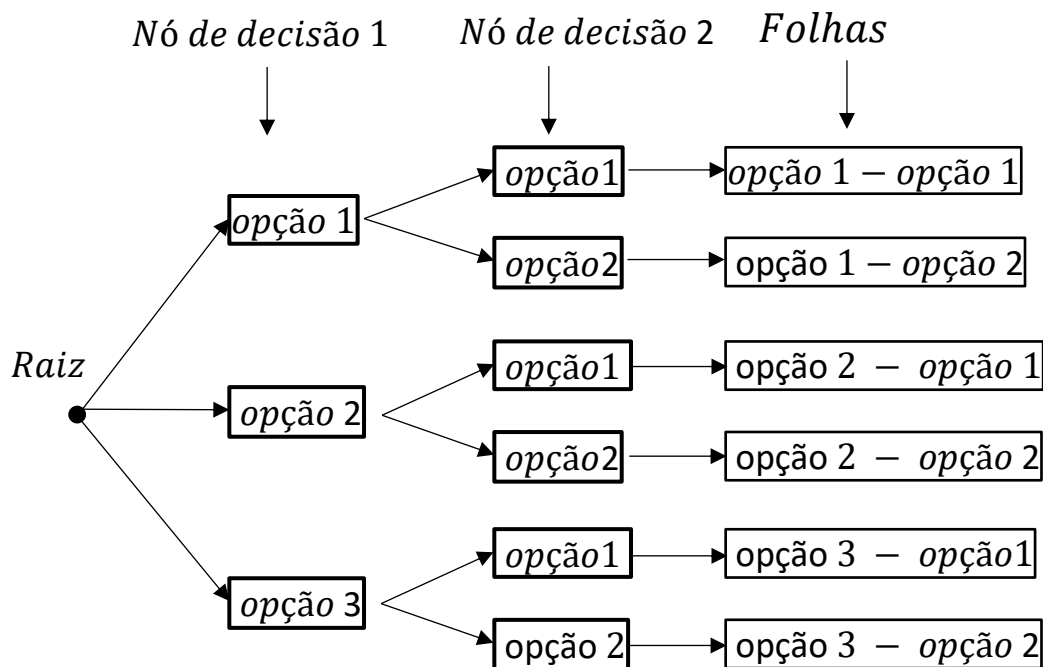
6.1.3 Método para resolver problemas de contagem

O método utilizado já foi discutido no Capítulo 4. Seus passos são apresentados a seguir:

1. Assumir o lugar de quem está fazendo a contagem
2. Dividir o problema em etapas ou decisões.
3. Identificar as opções disponíveis em cada etapa
4. Atacar primeiro as decisões com maior número de restrições.
5. Criar a árvore de decisão listando o conjunto de resultados possíveis

6. Contar o conjunto de resultados possíveis

Figura 6.1 – Modelo de árvore de decisão



Fonte: Elaborada pelo autor

Esse método favorece a compreensão intuitiva e o envolvimento do aluno. Ao organizar o problema em etapas e identificar as opções disponíveis, o raciocínio torna-se mais claro e estruturado. Priorizar as decisões mais restritivas evita erros comuns, enquanto a construção da árvore de decisão permite visualizar o processo e validar os resultados. Além disso, o método aproxima naturalmente o estudante dos Princípios Aditivo e Multiplicativo, promovendo o desenvolvimento da autonomia e do raciocínio combinatório.

6.1.4 Exemplos de utilização do método

Para exemplificar a utilização do método, o professor apresenta o seguinte problema:

Digamos que você possui 3 camisas nas cores branca, azul e verde, 2 calças compridas, nas cores azul e preta e dois calçados, um tênis branco e um preto. De quantas maneiras diferentes você pode se vestir (escolhendo exatamente uma das camisas, uma das calças e um dos tênis)?

Esse problema deve ser resolvido, usando o método apresentado no capítulo 5.

1. Assumir o lugar de quem está fazendo a contagem

Para compor uma vestimenta, as decisões a serem tomadas são três: escolher a camisa, escolher a calça e escolher o calçado.

2. Dividir o problema em etapas ou decisões.

- Etapa 1: escolher a camisa
- Etapa 2: escolher a calça
- Etapa 3: escolher o calçado

3. Identificar as opções disponíveis em cada etapa

- Etapa 1: camisa branca, azul ou verde, 3 opções
- Etapa 2: calça: azul ou preta, 2 opções
- Etapa 3: tênis: branco ou preto, 2 opções

4. Atacar primeiro as decisões com maior número de restrições.

Neste caso, não temos restrições nas decisões. Então qualquer ordem nos leva ao mesmo resultado de contagem.

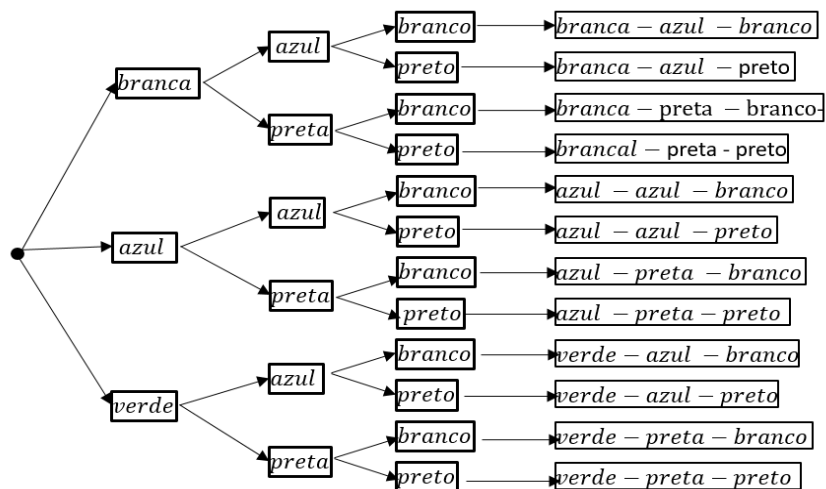
5. Criar a árvore de decisão listando o conjunto de resultados possíveis.

A árvore de decisão para a escolha de camisa, calça e tênis, nesta ordem, é apresentada na figura 6.2.

6. Contar os resultados possíveis

Pela árvore de decisão vemos que são 12 os resultados possíveis.

Figura 6.2 - Árvore de decisão do problema 1



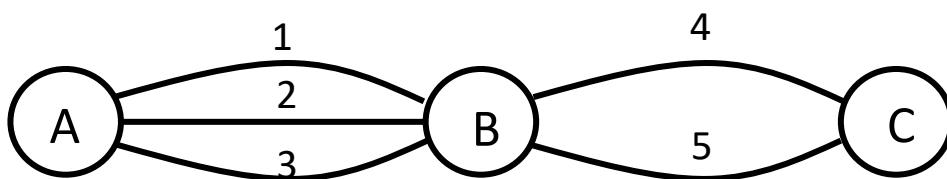
Fonte: Elaborada pelo autor

Para exercitar a construção de árvores de decisão, o professor propõe mais um problema.

Considere três cidades: A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e duas estradas ligando B à C. De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando uma única vez por B?

Nesse problema, vale a pena fazer um desenho esquemático para representar os possíveis caminhos.

Figura 6.3 - Diagrama do problema 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Solução:

1. Dividir o problema em etapas:

- Considerando a ordem das etapas, temos:
- Etapa 1: escolher a estrada para ir da cidade A para a cidade B
- Etapa 2: escolher a estrada para ir da cidade B para a cidade C

Obs.: Neste problema a Etapa 1 poderia ser escolher a estrada para ir da cidade B para a cidade C a Etapa 2 escolher a cidade para ir da cidade A para a cidade B.

2. Descrever as possibilidades em cada etapa:

- Etapa 1: estrada 1, estrada 2, estrada 3 - 3 opções
- Etapa 2: estrada 4, estrada 5 - 2 opções

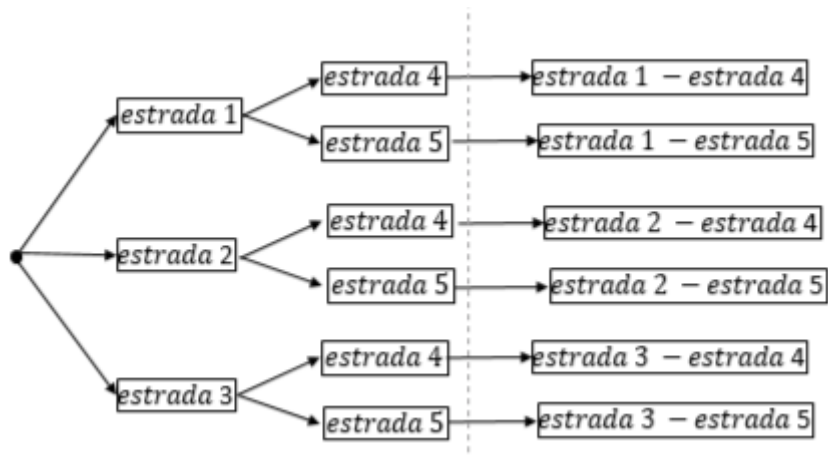
3. Atacar primeiro as decisões mais restritas

Nesse caso não temos decisões mais restritas. A escolha para a Etapa 1 foi escolher a estrada para ir de A para B.

4. Construir a árvore de decisão
5. Contar os resultados possíveis

Pela árvore de decisão, é fácil perceber que são 6 os resultados possíveis

Figura 6.4 - Árvore de decisão do problema 2



Fonte: Elaborada pelo autor

6.1.5 Encerramento

Deve ser reforçado com os alunos como a árvore de decisão ajuda a visualizar as diferentes decisões/opções e facilita o cálculo combinatório. Mesmo em problemas com muitas etapas e/ou opções por etapa, onde a construção da árvore é trabalhosa, vale a pena construí-la parcialmente para deixar clara a estrutura do problema.

6.2 Aula 2: Etapas independentes e o Princípio Multiplicativo

O objetivo dessa aula é resolver problemas de contagem relacionados ao número total de possibilidades para a execução de uma tarefa, que pode ser dividida em duas ou mais etapas sequenciais e independentes. Cabe destacar aqui o conceito de etapas independentes adotado neste trabalho: significa que uma decisão feita numa etapa não afeta as decisões das etapas seguintes. A árvore de decisão é utilizada para descrever e enumerar todas as possibilidades, facilitando a compreensão do uso da multiplicação das possibilidades em cada etapa para determinar o número total de resultados possíveis.

A turma deve ser dividida em grupos de 4 alunos e, para cada problema, o procedimento a ser seguido pelo professor é sempre o mesmo:

- O professor lê o problema junto com os alunos;
- Após garantir que todos compreenderam o enunciado, o professor define um tempo de 10 minutos para que os grupos resolvam o problema;
- Esgotado esse tempo, cada grupo apresenta sua solução;

- O professor discute e registra as soluções de cada grupo no quadro;
- O professor apresenta uma solução utilizando a estratégia de resolução discutida na aula 1.
- Apresentada a solução, o professor pergunta aos alunos se existe uma maneira de determinar o número total de possibilidades, sem precisar fazer a contagem na árvore de decisão.

O professor propõe o primeiro problema:

Para montar um sanduíche em uma lanchonete, o cliente deve escolher exatamente um tipo de pão, um tipo de carne e um tipo de queijo. Sabe-se que existem três opções para o pão (pão francês, pão de forma e pão árabe), duas opções para a carne (hambúrguer ou frango) e três opções para o queijo (muçarela, cheddar e suíço). Calcule quantos sanduíches diferentes é possível montar.

Solução:

1. Dividir o problema em etapas:

- Escolher o pão
- Escolher a carne
- Escolher o queijo

2. Descrever as opções em cada etapa:

- Escolher o pão: pão francês, pão de forma, pão árabe – 3 opções
- Escolher a carne: hambúrguer, frango – 2 opções
- Escolher o queijo: queijo muçarela, queijo cheddar, queijo suíço – 3 opções

3. Atacar primeiro as decisões mais restritas.

Neste caso, não temos restrições nas decisões. Então podemos atacá-las em qualquer sequência, não sendo necessário seguir a ordem de escolhas dada no enunciado.

Então podemos definir:

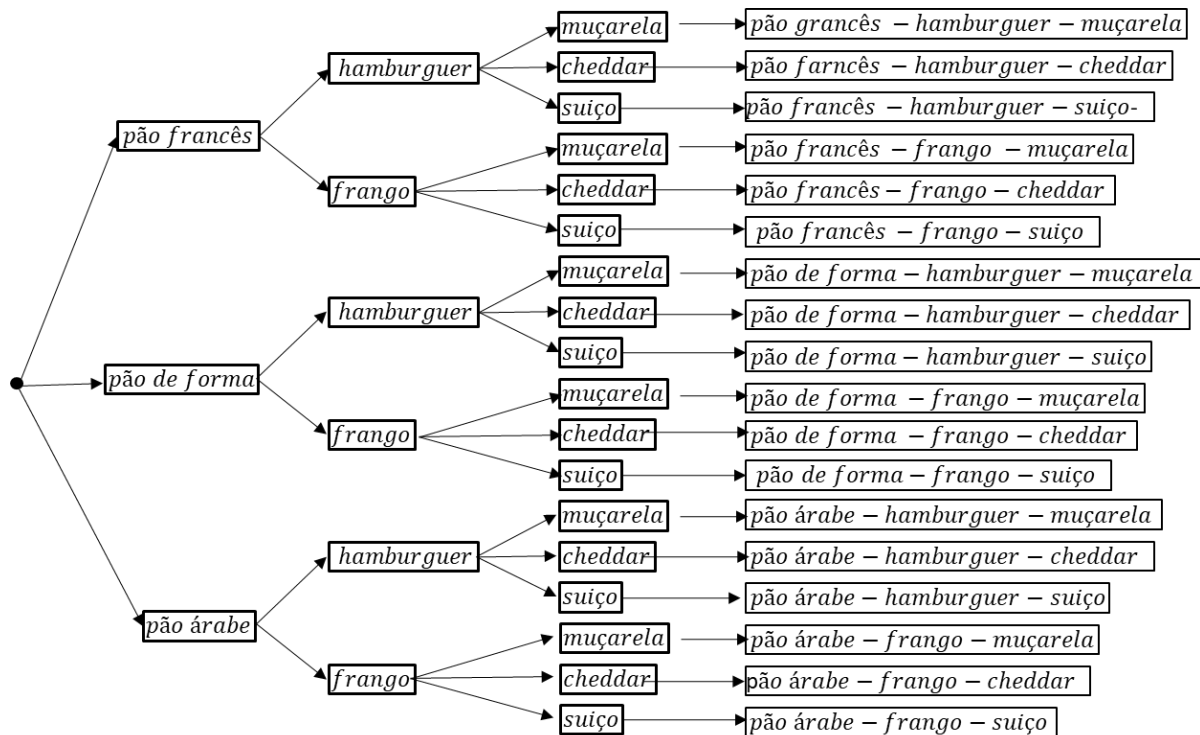
- Etapa 1: escolher o pão
- Etapa 2: escolher a carne
- Etapa 3: escolher o queijo

4. Construir a árvore de decisão:

5. Contar os resultados possíveis

São 18 os resultados possíveis.

Figura 6.5 - Árvore de decisão do problema 1



Fonte: Elaborada pelo autor

Depois de formalizada a solução, é importante que o professor discuta com os alunos a independência das etapas. Quando as etapas são independentes, a escolha ou decisão em uma etapa não afeta as escolhas ou decisões nas etapas seguintes. Ao resolver um problema de combinatória, é importante identificar se as etapas ou decisões são independentes ou não porque isso pode afetar a forma como o número total de possibilidades é calculado.

Com a participação dos alunos, o professor deve concluir que nesse problema as etapas são independentes: a escolha do pão não afeta a escolha da carne que não afeta a escolha do queijo.

Após essa discussão, o professor destaca o número de opções de cada etapa, 3, 2 e 3, e questiona se podemos chegar ao número de resultados possíveis, 18, sem precisar fazer a árvore de decisão. Que conta precisamos fazer?

A seguir, apresenta o problema 2:

Quantos números de 3 algarismos podemos formar com 0, 1, 2, 3 e 4?

Solução:

1. Dividir o problema em etapas:

- Escolher o algarismo das unidades
- Escolher o algarismo das dezenas
- Escolher o algarismo das centenas

2. Descrever as opções em cada etapa:

- Escolher o algarismo das unidades: 0, 1, 2, 3 e 4, 5 opções
- Escolher o algarismo das dezenas: 0, 1, 2, 3 e 4, 5 opções
- Escolher o algarismo das centenas: 1, 2, 3 e 4, 4 opções

3. Atacar primeiro as decisões mais restritas

Neste caso, a decisão mais restrita é a escolha do algarismo das centenas, que não pode ser igual a 0, logo:

- Etapa 1: escolher o algarismo das centenas
- Etapa 2: escolher o algarismo das dezenas
- Etapa 3: escolher o algarismo das unidades

4. Construir a árvore de decisão:

Nesse problema, a árvore de decisão é muito grande e desenhá-la dá muito trabalho, mesmo assim, como as etapas são independentes, vale a pena construí-la parcialmente e provocar os alunos para inferir o número total de possibilidades a partir da parte desenhada. A figura 6.6 mostra a árvore construída parcialmente.

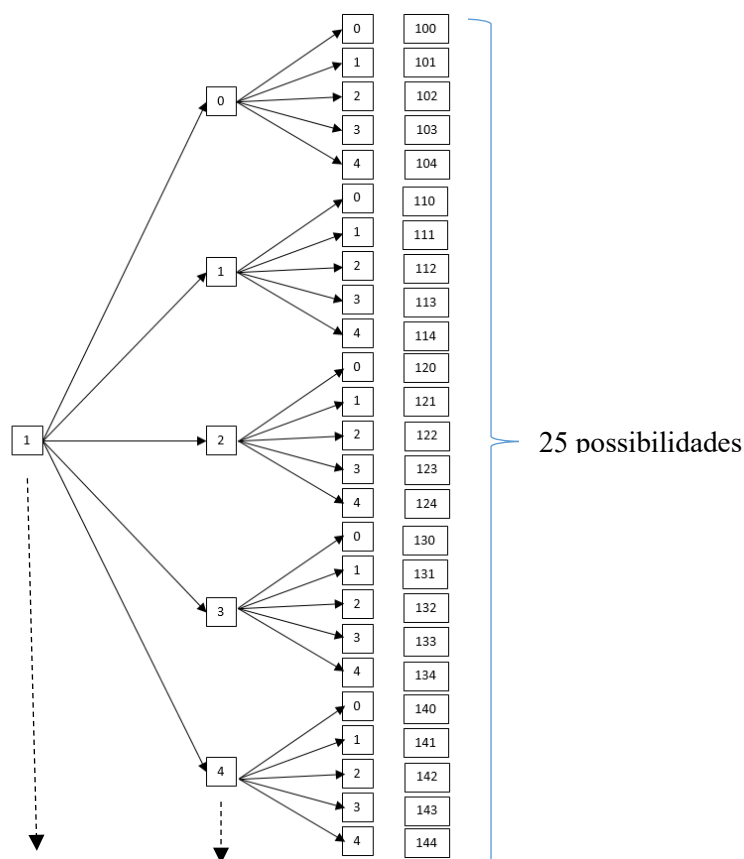
5. Contar os resultados possíveis

Apesar da árvore ter sido construída parcialmente, é fácil perceber que para cada escolha do algarismo das centenas podemos formar 25 números de três algarismos, o que resulta num total de $25 \times 4 = 100$ possibilidades.

Mais uma vez, o professor deve discutir com os alunos a independência das etapas. Esse problema pode gerar dúvidas pois, apesar de termos um número de opções menor para o algarismo das centenas, as três etapas são independentes. Novamente, o professor questiona sobre como chegar ao número de resultados possíveis sem fazer a árvore de decisão.

É importante também discutir com os alunos as semelhanças entre os problemas apresentados até este momento. Neles, as etapas envolvidas são independentes, e conseqüentemente, a escolha realizada numa etapa não afeta a escolha a ser realizada na etapa seguinte e, deste modo, o número de opções em cada etapa é sempre o mesmo.

Figura 6.6 - Árvore de decisão do problema 2



Fonte: Elaborada pelo autor

A esta altura os alunos já devem ter percebido que em casos como esses o número total de possibilidades é obtido multiplicando-se o número de opções de cada etapa. O professor faz um resumo da resolução numérica dos três problemas, enfatizando o uso da multiplicação e encoraja cada grupo a escrever uma regra para solução deste tipo de problema de contagem, perguntando:

Vamos imaginar que vocês estão escrevendo um livro didático de matemática para o segundo ano do ensino médio, e vocês precisam escrever uma regra para o uso da multiplicação para resolver problemas de contagem como esses. Como vocês escreveriam essa regra?

O professor lê e registra no quadro as propostas de cada grupo. Em seguida discute com os alunos cada uma delas e, juntos, estabelecem a primeira versão para o Princípio Multiplicativo.

6.3 Aula 3: Etapas dependentes e o Princípio Multiplicativo.

O objetivo dessa aula é resolver problemas de contagem em que as etapas não são independentes, isto é, uma decisão tomada numa etapa afeta a decisão de uma etapa seguinte. Para que o Princípio Multiplicativo possa ser aplicado, é necessário que o número de opções em cada etapa seja sempre o mesmo, independente da escolha da etapa anterior. A árvore de decisão é utilizada para descrever e enumerar todas as possibilidades, facilitando a compreensão do uso da multiplicação das possibilidades em cada etapa para determinar o número total de resultados possíveis.

Nesta aula, são propostos três problemas. Para cada problema, o procedimento a ser seguido pelo professor é o mesmo da sessão anterior.

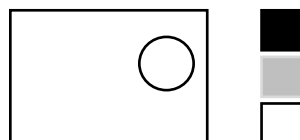
Problema 1:

Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando duas das cores dadas. Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas?

Solução:

1. Dividir o problema em etapas:
 - Escolher a cor para pintar a parte externa ao círculo.
 - Escolher a cor para pintar o círculo interno.

Figura 6.7 – Bandeira do problema 1



Fonte: Elaborada pelo autor

2. Dividir o problema em etapas:
 - Escolher a cor para pintar a parte externa ao círculo.
 - Escolher a cor para pintar o círculo interno.
3. Descrever as possibilidades em cada etapa:

Para esse caso é mais fácil descrever opções de cada etapa construindo da árvore de decisão.
4. Atacar primeiro as decisões mais restritas

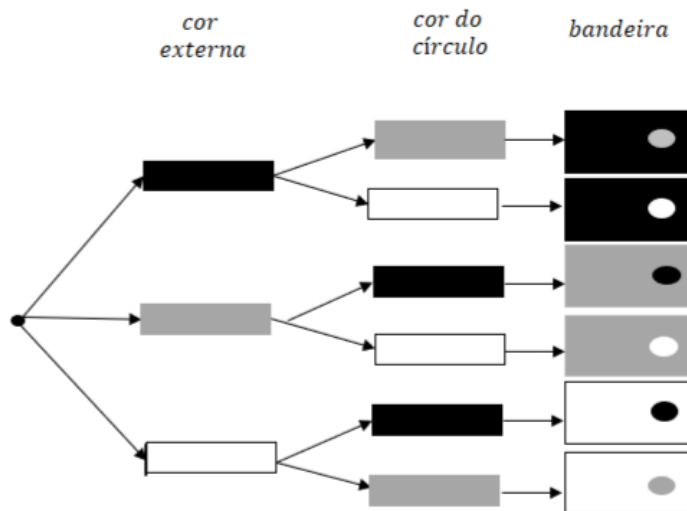
Nesse problema é fácil perceber que a ordem das etapas não faz diferença. A etapa 1 pode ser pintar a parte externa ou pintar o círculo interno. Vamos considerar então:

- Etapa 1: Escolher a cor para pintar a parte externa.
- Etapa 2: Escolher a cor para pintar o círculo interno.

5. Construir a árvore de decisão:

O importante neste problema é discutir com os alunos o que ocorre na escolha da etapa 2. A cor a ser escolhida deverá ser diferente da cor escolhida na etapa 1, senão a bandeira teria uma só cor. Isto significa que a escolha da etapa 2 não é independente da escolha da etapa 1. Por exemplo, se escolhermos a cor preta para a etapa 1, não poderemos escolhê-la na etapa 2. Então a árvore de decisão terá a forma da figura 6.8. Pela árvore, os alunos podem visualizar que, qualquer que seja a escolha da etapa 1, teremos sempre duas opções de escolha na etapa 2. O professor deve destacar que, mesmo as etapas não sendo independentes, o número de opções da etapa 2 é sempre 2, qualquer que tenha sido a cor escolhida na etapa 1. O professor deve destacar também a simetria da árvore de decisão.

Figura 6.8 – Árvore de decisão problema 1



Fonte: Elaborada pelo autor

6. Contar os resultados possíveis:

Pela árvore, podemos contar 6 bandeiras possíveis.

Na discussão de como determinar o número total de possibilidades sem precisar contar na árvore de decisão, provavelmente a maioria dos alunos perceberá facilmente que esse

número é obtido fazendo a multiplicação 3×2 . O professor deve destacar então, que a multiplicação é usada mesmo as etapas não sendo independentes.

Problema 2:

Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com 0, 1, 2, 3 e 4?

Esse problema é uma variação do problema apresentado na aula anterior, só que agora os algarismos não podem se repetir.

Solução:

1. Dividir o problema em etapas:

Como vimos, a decisão mais restrita é a escolha do algarismo das centenas, que não pode ser o zero. Logo, é a decisão que deve ser tomada primeiro.

- Etapa 1: Escolher o algarismo das centenas
- Etapa 2: Escolher o algarismo das dezenas
- Etapa 3: Escolher o algarismo das unidades;

2. Descrever as opções em cada etapa:

- Etapa 1: 1,2,3 e 4 - 4 opções
- Etapa 2: Não pode ser igual ao algarismo das centenas. Serão sempre 4 opções
- Etapa 3: Não pode ser igual aos algarismos das centenas e das dezenas. Serão sempre 3 opções;

3. Construir a árvore de decisão:

A figura 6.9 mostra a árvore construída;

4. Contar os resultados possíveis

Pela árvore, os resultados possíveis são 48.

Esse problema traz uma oportunidade de discutir com os alunos como a ordem em que as decisões são tomadas é importante para o processo de resolução. Se o professor julgar conveniente, pode apresentar a discussão abaixo para mostrar como uma estratégia equivocada pode levar a um impasse.

Se começarmos a escolher os algarismos pelo algarismo das unidades, há 6 modos de escolhê-lo. Em seguida, há 5 modos de escolher o algarismo das dezenas, pois não podemos repetir o algarismo já usado nas unidades. Agora, de quantos modos podemos escolher o algarismo das centenas? Temos um impasse, a resposta é “depende”. Se não tivermos usado o 0, haverá 3 modos de escolher o algarismo das centenas, pois não poderemos usar nem o 0 nem os dois algarismos já usados nas demais casas; se já tivermos usado o 0, haverá 4 modos de

escolher o primeiro algoritmo. Seguindo esse caminho, para contar corretamente as possibilidades, teríamos que dividir o problema em casos, o que tornaria a solução mais trabalhosa.

Isso nos mostra que tomar primeiro a decisão mais restrita, torna a solução mais simples.

Problema 3:

De quantos modos diferentes 4 pessoas podem ser colocadas em fila?

Solução:

Para facilitar a solução vamos chamar essas 4 pessoas de A, B, C e D.

1. Dividir o problema em etapas:

- Etapa 1: Escolher o primeiro da fila
- Etapa 2: Escolher o segundo da fila
- Etapa 3: Escolher o terceiro da fila
- Etapa 4: Escolher o quarto da fila

2. Descrever as opções em cada etapa:

- Etapa 1: A, B, C e D - 4 opções
- Etapa 2: não pode ser a pessoa escolhida na etapa 1, logo temos 3 opções
- Etapa 3: não pode ser a pessoa escolhida na etapa 1 nem na etapa 2, logo temos 2 opções
- Etapa 4: Só sobrou a pessoa que não foi escolhida nas etapas anteriores, logo temos somente 1 opção

3. Atacar primeiro as decisões mais restritas

Neste problema, poderíamos ter começado a escolha por uma posição qualquer. Por exemplo, poderíamos ter começado pela última posição e escolher de trás para frente que o resultado seria o mesmo.

4. Construir a árvore de decisão:

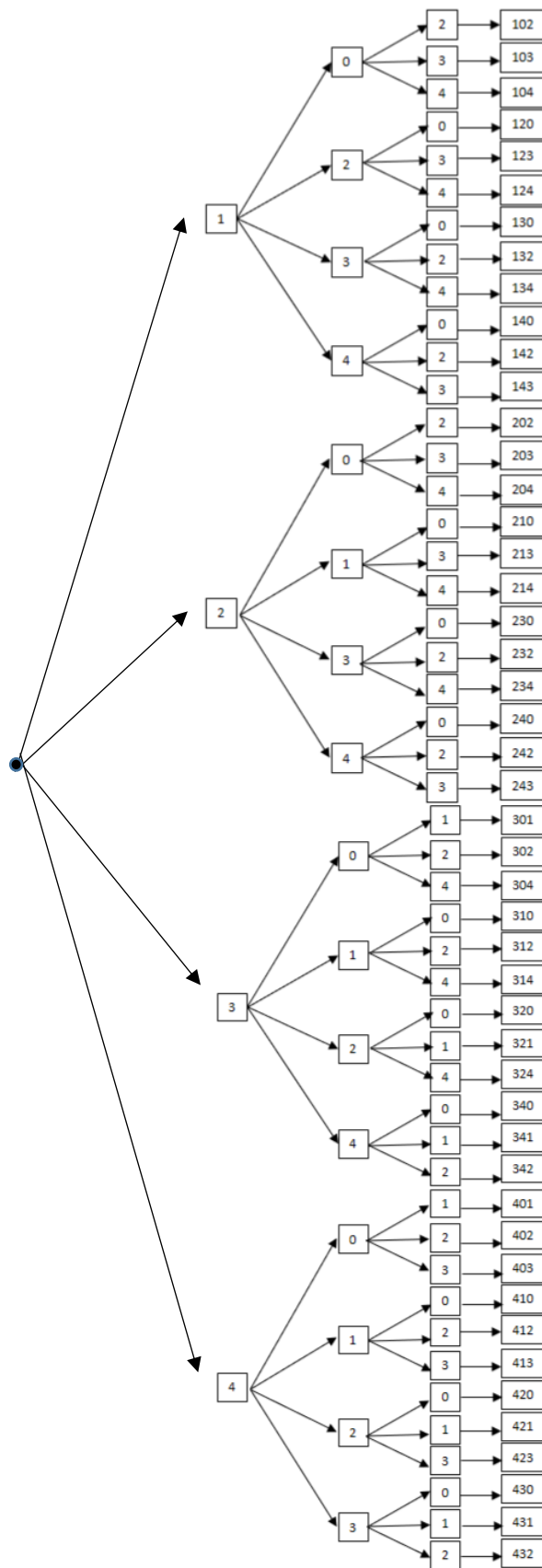
A árvore de decisão é apresentada na Figura 6.10

5. Contar os resultados possíveis

Pela árvore de decisão, figura 6.10, vemos que o total de possibilidades é 24.

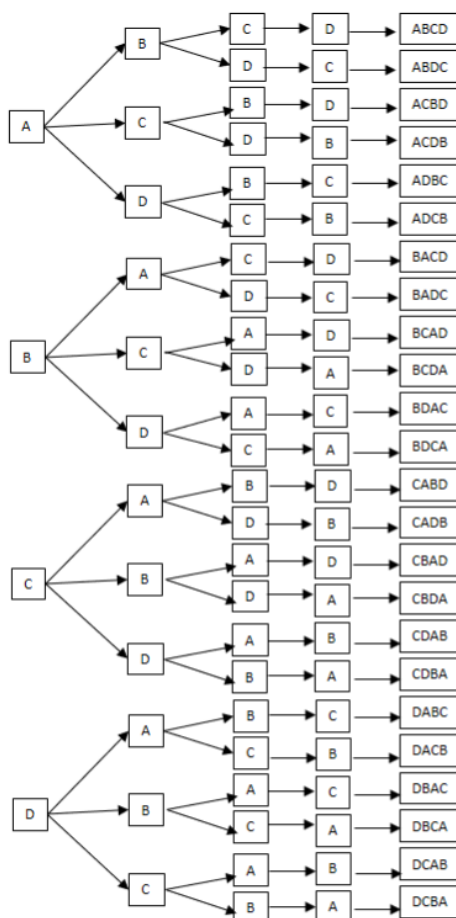
Ao final desta sessão, o professor faz um resumo da resolução numérica dos três problemas, enfatizando o uso da multiplicação e destaca que o Princípio Multiplicativo pode ser usado para calcular o número total de possibilidades, mesmo quando as etapas não são independentes, se o número de opções de cada etapa não muda com as escolhas anteriores.

Figura 6.9 – Árvore de decisão do problema 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.10 – Árvore de decisão do problema 3



Fonte: Elaborada pelo autor

O professor propõe então revisar o enunciado do Princípio Multiplicativo, elaborado na sessão anterior, com base nos conhecimentos adquiridos nessa sessão.

Uma nova versão do Princípio Multiplicativo é então registrada no quadro.

6.4 Aula 4: O Princípio Aditivo e a estratégia de divisão em casos

O objetivo desta aula é apresentar em quais situações o Princípio Aditivo deve ser aplicado. Serão explorados problemas de contagem em que o Princípio Multiplicativo não pode ser utilizado de forma direta. Isso ocorre quando as opções de uma determinada etapa são mutuamente excludentes e cada uma delas conduz a um conjunto distinto de possibilidades na etapa seguinte. Nesses casos, é necessário dividir o problema em casos e determinar o total de opções em cada um deles separadamente. O número total de possibilidades será, então, a soma dos totais de cada caso, de acordo com o Princípio Aditivo da contagem.

Problema 1:

Suponha que você precise escolher entre transporte público, com 2 opções: ônibus ou metrô, e transporte privado, com 3 opções: carro, bicicleta ou motocicleta. Qual o total de possibilidades de transporte que você tem?

Solução:

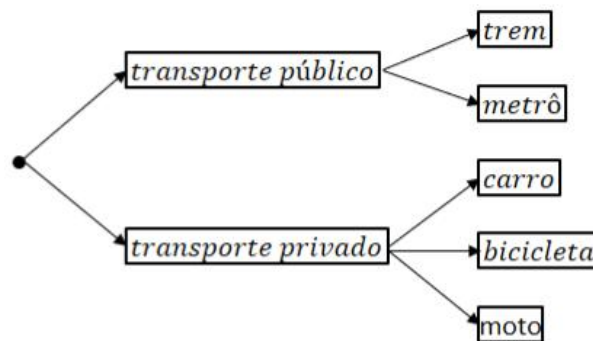
1. Dividir o problema em etapas:
 - Etapa 1: Escolher o tipo de transporte
 - Etapa 2: Escolher qual o transporte
2. Descrever as opções em cada etapa:
 - Etapa 1: transporte público ou transporte privado – 2 opções
 - Etapa 2: as opções da etapa 2 dependem da escolha feita na etapa 1.
 - Transporte público: ônibus ou metrô – 2 opções
 - Transporte privado: carro, bicicleta ou moto – 3 opções
3. Construir a árvore de decisão

A árvore de decisão mostra claramente que temos dois casos distintos:

- escolher transporte público: 2 possibilidades
- escolher transporte privado: 3 possibilidades
- Contar os resultados possíveis

O total de possibilidades de transporte é a soma do total de possibilidades de cada caso: $2 + 3 = 5$

Figura 6.11 – Árvore de decisão do problema 1



Fonte: Elaborada pelo autor

A árvore de decisão é uma ferramenta valiosa para ajudar os alunos a entenderem quando aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo e quando recorrer ao Princípio Aditivo. O professor deve explorar cuidadosamente esse conceito, destacando que o Princípio Multiplicativo é aplicável quando a árvore de decisão é "bem-comportada", ou seja, o número de opções em cada etapa não varia com a escolha da etapa anterior. Caso isso não aconteça, fica evidente que o Princípio Multiplicativo não pode ser usado, e o problema deve ser dividido em casos distintos.

Problema 2:

Para ir à academia Mariana tem 2 pares de tênis, um branco e um preto, e 3 shorts, 2 de cor escura e 1 de cor clara, e 4 blusas, 2 de cor escura e 2 de cor clara. Ela usa o tênis branco com os shorts de cor clara e as blusas de cor escura. Já quando usa o tênis preto ela usa os shorts de cor escura e as blusas de cor clara. De quantas maneiras ela pode escolher um "look" de tênis, short e blusa adequado?

Solução:

1. Dividir o problema em etapas:

- Etapa 1: Escolher o tênis
- Etapa 2: Escolher o short
- Etapa 3: Escolher a blusa

2. Descrever as opções em cada etapa:

- Etapa 1: Tênis branco ou Tênis preto – 2 opções
- Etapa 2: as opções da etapa 2 dependem da escolha feita na etapa 1.
 - Tênis branco: short de cor clara – 1 opção
 - Tênis preto: short de cor escura – 2 opções
- Etapa 3: as opções da etapa 3 também dependem da escolha feita na etapa 1.
 - Tênis branco: blusa de cor escura – 2 opções
 - Tênis preto: blusa de cor clara – 2 opções

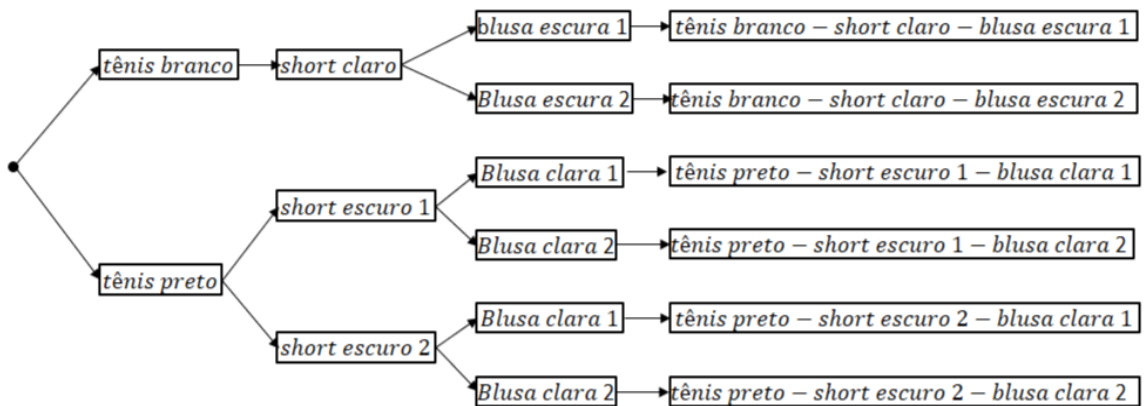
3. Construir a árvore de decisão:

A árvore de decisão, figura 6.12, mostra claramente que temos dois casos distintos: ou Mariana escolhe o tênis branco e um short e uma blusa adequados ou escolhe o tênis preto e os complementos adequados.

4. Contar os resultados possíveis

Mais uma vez, o professor deve destacar que as decisões da etapa 1 são excludentes. Pela árvore de decisão, os “caminhos a seguir” são diferentes e dependem de qual foi o tênis escolhido. Se escolher o tênis branco, Mariana tem 2 opções e, se escolher tênis preto, ela tem $2 \times 2 = 4$ opções. No total Marina tem $2 + 4 = 6$ opções.

Figura 6.12 – Árvore de decisão do problema 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Problema 3:

Digamos que você deseja comprar um computador, mas está em dúvida sobre qual marca, modelo e cor irá escolher. Há apenas duas marcas, que chamaremos de Marca A e Marca B, pelas quais você se interessa. A Marca A tem a disposição três modelos, A1, A2 e A3 e cada um desses pode ser comprado em três possíveis cores C1, C2 e C3. Já a Marca B oferece dois modelos, B1 e B2, tais que, para cada um, há duas possíveis escolhas de cor, C1 e C2. De quantas maneiras diferentes você pode realizar a compra?

Solução:

1. Dividir o problema em etapas:
 - Etapa 1: Escolher a marca
 - Etapa 2: Escolher o modelo
 - Etapa 3: Escolher a cor
2. Descrever as opções em cada etapa:
 - Etapa 1: Marca A ou Marca B
 - Etapa 2: as opções dessa etapa dependem da escolha feita na etapa 1.
 - Marca A: A1, A2 ou A3 – 3 opções

- Marca B: B1 ou B2 – 2 opções

- Etapa 3: as opções desta etapa também dependem da escolha feita na etapa 1

- Marca A: C1, C2 ou C3

- Marca B: C1 ou C2

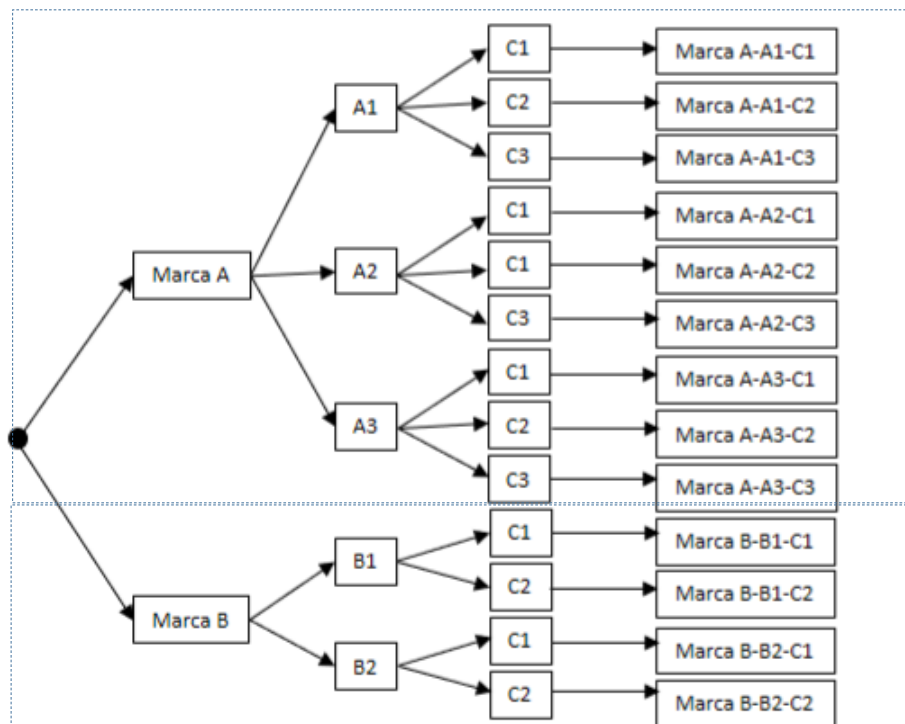
3. Construir a árvore de decisão:

A árvore de decisão é apresentada na figura 6.13

4. Contar os resultados possíveis:

A árvore de decisão nos permite observar claramente que, dependendo da escolha da marca, seguimos caminhos totalmente diferentes. Após a primeira etapa — a escolha da marca — o problema se divide em duas árvores secundárias distintas. Em cada uma dessas árvores o número de opções em cada etapa é sempre o mesmo independente da escolha feita na etapa anterior, o que nos permite aplicar o Princípio Multiplicativo em ambas.

Figura 6.13 – Árvore de decisão do problema 3



Fonte: Elaborada pelo autor

Se optarmos pela Marca A, podemos usar o Princípio Multiplicativo para calcular as possibilidades de modelo e cor: $3 \times 3 = 9$ combinações possíveis. Já se escolhermos a Marca B, aplicando o mesmo princípio, teremos $2 \times 2 = 4$ combinações possíveis. Como as opções de

comprar a Marca A e a Marca B são mutuamente exclusivas, só podemos executar exatamente uma delas — ou compramos uma das 9 opções da Marca A, ou compramos uma das 4 opções da Marca B. Portanto, devemos somar esses valores: $9 + 4 = 13$. Isso nos dá um total de 13 maneiras de realizar a compra.

Na parte final da aula, o professor deve destacar que problemas como este, que exigem a divisão em casos e a aplicação combinada dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, são alguns dos mais interessantes em Análise Combinatória. Como já mencionado anteriormente, uma habilidade fundamental na resolução de problemas de contagem é saber quando aplicar o Princípio Aditivo, quando usar o Princípio Multiplicativo e, especialmente, como combinar ambos de forma eficaz para encontrar a solução.

Após resolver os três problemas desta sessão, o professor deve estimular os alunos a escreverem uma definição para o princípio aditivo.

6.5 Aula 5: Consolidando os conhecimentos adquiridos

Nesta quinta e última sessão, o objetivo é consolidar o que foi aprendido sobre o Princípio Multiplicativo e o Princípio Aditivo.

A sessão se inicia com a apresentação de como os Princípios Multiplicativo e o Princípio aditivo são enunciados nos livros didáticos para o ensino médio. O professor deve apresentar 3 definições, incluindo a definição do livro de matemática dos alunos. A ideia é comparar essas definições com as que foram elaboradas pelos alunos. Para isso, o professor deve destacar os conceitos mais importantes abordados:

- Princípio Multiplicativo: sequência de decisões onde o número de opções de cada decisão não varia com a decisão tomada anteriormente. O total de possibilidades é obtido pela multiplicação das possibilidades de cada etapa.
- Princípio Aditivo: as decisões de uma determinada etapa são excludentes e na próxima etapa, as opções, e o número delas, dependem da decisão tomada na etapa anterior. O problema é dividido em casos e calcula-se o número de possibilidades de cada caso. O número total de possibilidades é a soma do número de possibilidades de cada caso.

Deve ser destacado também que os problemas mais complexos de Análise Combinatória, na maioria dos casos, exigem a divisão em casos e o uso dos dois princípios.

Em seguida, o professor apresenta os enunciados criados pelos alunos e discute com eles se há possibilidade de aperfeiçoar as definições criadas e, em caso positivo, estimula-os a fazê-lo.

Essa sessão termina com os alunos fazendo uma avaliação da sequência didática.

7 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo tem por objetivo relatar a aplicação da sequência didática descrita no Capítulo 6 em duas turmas do segundo ano do Ensino Médio da rede pública estadual e analisar os resultados observados. A proposta dessa sequência foi fomentar nos alunos a “*descoberta*” do Princípio Multiplicativo e do Princípio Aditivo da contagem, por meio de atividades práticas envolvendo problemas de contagem, com o uso da árvore de decisão como ferramenta central. A intenção foi proporcionar uma experiência de aprendizagem ativa, em que os estudantes pudessem construir, de forma autônoma e investigativa, os conceitos fundamentais da Análise Combinatória, ao invés de simplesmente memorizá-los.

7.1. Contextualização da Aplicação

A sequência foi aplicada, pelo autor deste trabalho, nas turmas REG-1 e REG-2 do 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Júlio César Reis Oliveira, localizada na Rua Cícero, 650, bairro JK, em Sete Lagoas, Minas Gerais. O trabalho contou com a colaboração fundamental do professor Welison Fernando da Silva, responsável pelas turmas e mestrando do PROFMAT, cuja experiência e dedicação enriqueceram a execução da proposta. A sequência foi inserida no planejamento didático do professor Welison como introdução ao tema da Análise Combinatória, representando o primeiro contato dos alunos com este conteúdo.

As aulas foram ministradas de forma expositiva e interativa, utilizando apresentações em PowerPoint, projetadas por meio de datashow, para ilustrar de maneira clara e envolvente os conceitos abordados. Para complementar o aprendizado, os alunos receberam o material impresso de cada aula, além de folhas de papel quadriculado para facilitar a construção e a visualização das árvores de decisão. Esse formato visava estimular a participação ativa dos estudantes e encorajá-los a explorar o conteúdo de forma prática e colaborativa. A metodologia foi planejada para preparar os alunos a enunciar o Princípio Multiplicativo e o Princípio aditivo a partir da participação nas atividades realizadas, incentivando-os a refletir e construir suas próprias definições durante o processo de aprendizagem.

Apesar dos desafios característicos das salas de aula atuais — especialmente no que diz respeito ao nível de engajamento e aproveitamento — consideramos a frequência bastante

satisfatória e constatamos um bom envolvimento da maior parte dos alunos com as atividades propostas. Inicialmente, cogitou-se trabalhar com grupos, mas, considerando as dinâmicas das turmas, optamos por conduzir discussões coletivas, o que se mostrou mais produtivo.

A seguir, é apresentado o relato da aplicação da sequência didática, aula por aula.

7.2 Aula 1 – Utilizando a Árvore de Decisão para Resolver Problemas de Contagem

Seguindo a sequência didática descrita no capítulo anterior, iniciamos com a apresentação do conceito de árvore de decisão, ressaltando sua importância como estratégia para decompor problemas complexos em etapas mais simples – a chamada técnica do “dividir para conquistar”. Explicamos que cada decisão dentro de um problema de contagem pode ser representada graficamente, facilitando tanto a organização do pensamento quanto a visualização das possibilidades. Apresentamos também o método proposto para resolução de problemas de contagem,

O primeiro exemplo, tornou mais claros os conceitos apresentados:

Você possui três camisas (branca, azul e verde), duas calças (azul e preta) e dois pares de tênis (branco e preto). De quantas maneiras diferentes você pode se vestir, escolhendo exatamente uma peça de cada tipo?”

Uma boa surpresa foi verificar que os alunos demonstraram facilidade em compreender o que é uma árvore de decisão e a utilização do método proposto para resolver esse problema. A rapidez com que assimilaram o processo de resolução reforçou a nossa convicção de que a árvore de decisão é um instrumento eficaz para introduzir os fundamentos da contagem, especialmente num contexto no qual a abstração matemática representa uma barreira. A árvore de decisão não apenas possibilita uma visualização clara das possibilidades, mas também ajuda a organizar o raciocínio de forma que os alunos consigam acompanhar e controlar o processo de resolução.

Após a apresentação dos conceitos básicos e a discussão do exemplo inicial, foi proposto o segundo problema previsto para esta aula:

Considere três cidades: A, B e C, de modo que existem três estradas ligando A a B e duas estradas ligando B a C. De quantas maneiras diferentes é possível ir de A até C, obrigatoriamente passando por B?

Após a leitura e compreensão do enunciado, retomamos com os alunos a metodologia proposta para a resolução de problemas de contagem. Inicialmente, exploramos com eles o significado do primeiro passo – “se colocar no lugar de quem está fazendo a contagem”. Explicamos que essa atitude consiste em imaginar-se envolvido diretamente no processo de escolha, tomando cada decisão, como se fossem os próprios responsáveis por executar as etapas do percurso. O objetivo é transformar o problema em uma situação concreta, que pode ser vivenciada mentalmente.

No passo 2, solicitamos aos alunos que identificassem as etapas envolvidas no problema apresentado. A resposta foi imediata e correta:

- Etapa 1: escolher uma das estradas que ligam a cidade A à cidade B;
- Etapa 2: escolher uma das estradas que ligam a cidade B à cidade C.

No passo 3, perguntamos quais eram as opções disponíveis em cada etapa. Os alunos, demonstrando uma compreensão correta do problema, responderam prontamente:

- Etapa 1: estrada 1, estrada 2, estrada 3;
- Etapa 2: estrada 4, estrada 5.

Após registrar na lousa as etapas e suas respectivas opções, conforme identificadas pelos próprios alunos, propusemos que resolvessem o problema construindo a árvore de decisão correspondente. Para nossa satisfação, mais da metade da turma foi capaz de elaborar corretamente a árvore e de contar o total de possibilidades, chegando à resposta correta. Nas figuras 7.1 e 7.2 são apresentadas fotos das árvores construídas por dois alunos durante essa atividade:

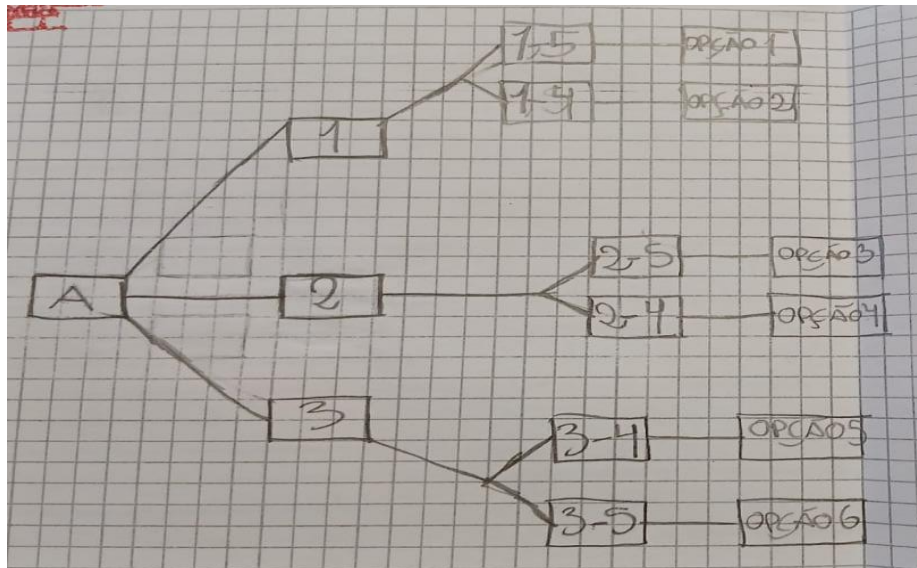
Contudo, foi observado que alguns estudantes necessitaram de apoio adicional para melhorar a organização visual da árvore de decisão — especialmente no que diz respeito ao alinhamento das opções e a disposição das ramificações. Essa demanda por orientação foi aproveitada como uma oportunidade pedagógica para reforçar a importância da clareza na construção da árvore.

O êxito dessa primeira atividade prática evidenciou a eficácia da árvore de decisão como ferramenta pedagógica no ensino de contagem e mostrou que os alunos estavam prontos para avançar em direção a problemas mais desafiadores.

7.3 Aula 2 – Etapas Independentes e o Princípio Multiplicativo

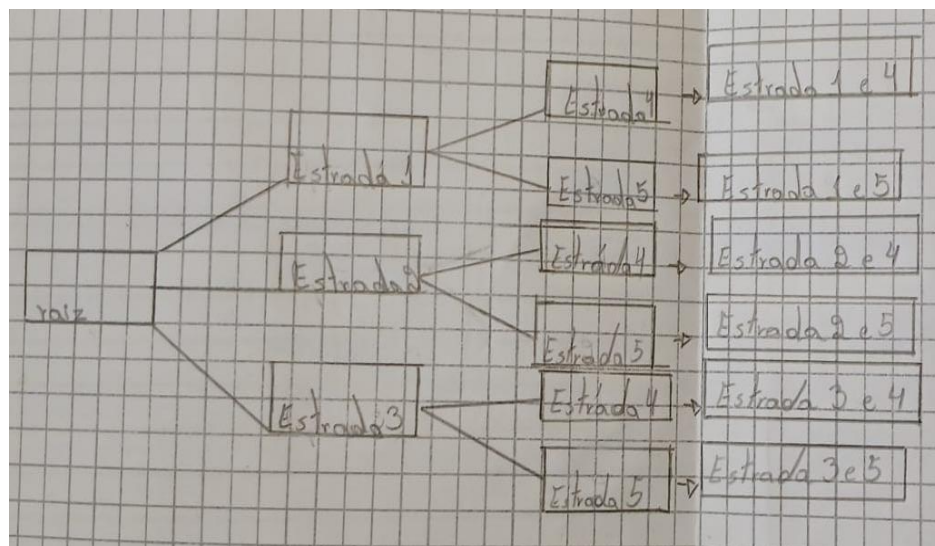
Seguindo o plano elaborado, nesta aula foram trabalhados problemas de contagem compostos por etapas independentes.

Figura 7.1 – Árvore de decisão desenhada por um aluno



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7.2 - Árvore de decisão desenhada por um aluno



Fonte: Elaborada pelo autor

O primeiro problema apresentado foi:

Em uma lanchonete, o cliente deve escolher um tipo de pão (francês, de forma ou árabe), um tipo de carne (hambúrguer ou frango) e um tipo de queijo (muçarela, cheddar ou suíço). Quantos sanduíches diferentes podem ser montados?

Após a leitura do enunciado, promovemos uma breve discussão para garantir a compreensão do problema. Em seguida, solicitamos que os alunos buscassem uma solução por conta própria. Os mais engajados recorreram ao material da aula anterior, construíram corretamente a árvore de decisão e chegaram à resposta correta (18 possibilidades). Outros, no entanto, apenas somaram as opções ($3 + 2 + 3 = 8$), evidenciando a necessidade de retomar o método.

Voltamos à aula anterior, recordamos o método proposto para solução de problemas de contagem e conduzimos a aplicação dele esclarecendo quais eram as etapas, quais eram as opções de cada etapa. Solicitamos então que construíssem a árvore de decisão. A maioria dos alunos conseguiu organizá-la adequadamente e alcançar a resposta correta.

Nas figuras 7.3 e 7.4 apresentamos duas árvores de decisão elaboradas por eles.

Mais uma vez os alunos puderam perceber, na prática, a utilidade da estratégia adotada. Aproveitamos esse contexto para introduzir a ideia de *etapas independentes*, discutindo se as decisões em cada etapa influenciavam as demais — conclusão que os próprios alunos alcançaram de forma espontânea: não havia interferência entre as escolhas.

Uma vez entendida a solução, apresentamos novamente a solução dos dois problemas da aula anterior, registrando na lousa as etapas, as opções de cada etapa, o número total de possibilidades e, também, que eram problemas com etapas independentes. Propusemos então o seguinte desafio:

Nesses problemas, como podemos calcular o número total de possibilidades, sem precisar desenhar a árvore de decisão?

As primeiras respostas foram: *Multiplicando as opções*

Com um pouco de ajuda, eles conseguiram concluir que o mais correto era dizer: *Multiplicando o número de opções de cada etapa*

Continuamos o desafio:

Vamos imaginar que vocês estão escrevendo um livro didático de matemática para o segundo ano do ensino médio, e vocês precisam escrever uma regra para o uso da multiplicação para resolver problemas de contagem como esses. Como vocês escreveriam essa regra?

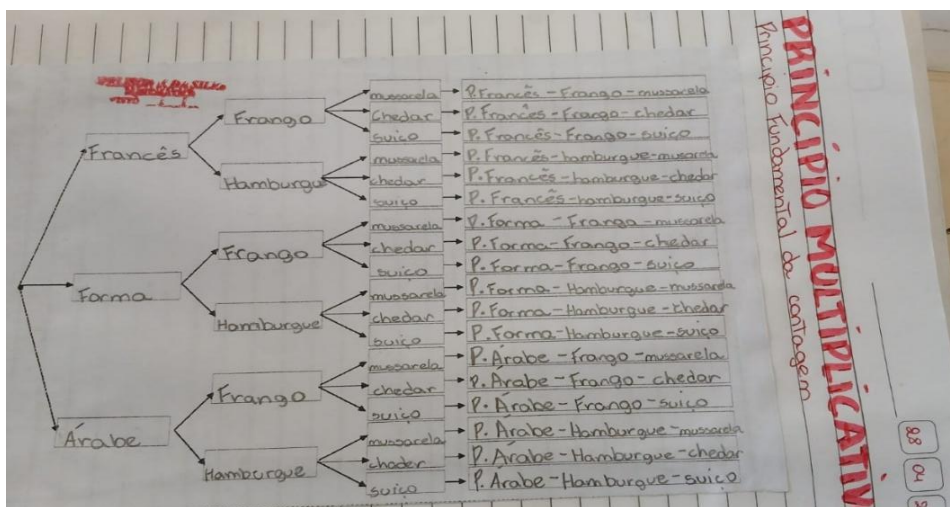
Após várias sugestões saiu a primeira versão:

Para achar o total de possibilidades, multiplicamos o número de opções de cada etapa.

Depois de uma acalorada discussão e com um pouco de ajuda, eles conseguiram chegar a uma versão um pouco mais completa:

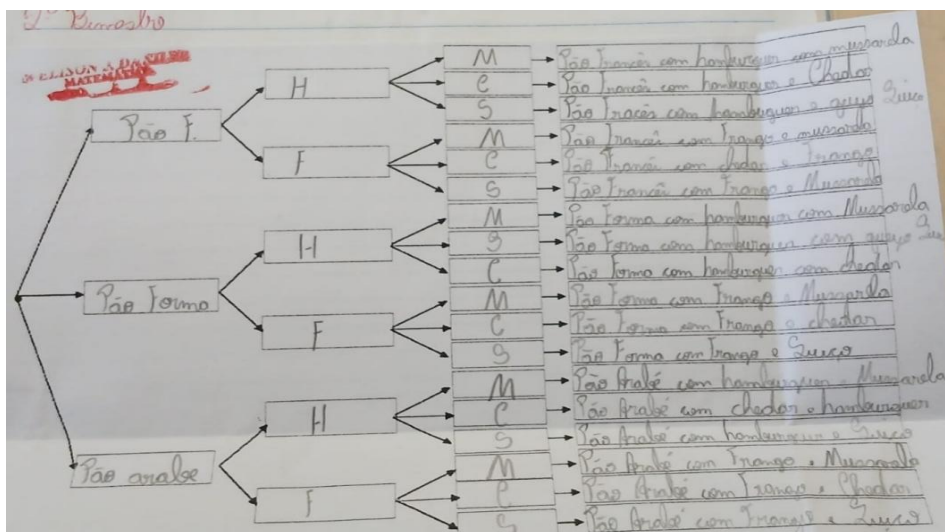
Para resolver problemas de contagem com etapas independentes, devemos multiplicar o número de opções de cada etapa.

Figura 7.3 – Árvore de decisão desenhada por um aluno



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7.4 – Árvore de decisão elaborada por um aluno



Fonte: Elaborada pelo autor

Essa construção coletiva do enunciado do Princípio Multiplicativo foi um dos momentos mais significativos da sequência didática.

Após essa conclusão, propusemos um novo problema:

Quantos números de três algarismos podemos formar com os dígitos 0, 1, 2, 3 e 4?

Inicialmente, os estudantes demonstraram dificuldade em identificar por onde começar a resolução. Retomamos, então, o método de solução proposto, reforçando que a chave para resolver este tipo de problema é dividi-lo em etapas. Sugerimos que refletissem sobre quais seriam estas etapas no contexto da formação de números de três algarismos. Esta pergunta se revelou essencial, pois levou os alunos a perceberem que precisariam escolher um dígito para cada uma das três posições: centenas, dezenas e unidades.

Foi necessário também esclarecer que os algarismos disponíveis podiam se repetir nas diferentes posições do número. Após essa discussão, a maioria dos alunos chegou à resposta 125, o que indicava que haviam considerado 5 opções para cada uma das três casas ($5 \times 5 \times 5$), sem levar em conta que o dígito zero não pode ocupar a casa das centenas. Esclarecida essa restrição, os alunos conseguiram chegar à resposta correta: 100 possibilidades distintas, obtidas pela aplicação do Princípio Multiplicativo.

No tempo restante da aula, aproveitamos para discutir, em conjunto, como seria a árvore de decisão correspondente a esse problema. Construimos, com a participação ativa dos alunos, a parte da árvore em que o algarismo da casa das centenas era o 1. Essa construção resultou em 25 possibilidades (5 opções para a dezena e 5 para a unidade), o que permitiu inferir que, considerando os quatro algarismos possíveis para a casa das centenas (excluindo o 0), o total seria de $4 \times 25 = 100$ combinações. Todos concordaram que elaborar a árvore completa seria bastante trabalhoso. No entanto, aproveitamos essa constatação para reforçar que, mesmo quando não se constrói a árvore de forma integral, sua representação parcial pode ser extremamente útil para organizar o raciocínio e validar a solução de problemas de contagem.

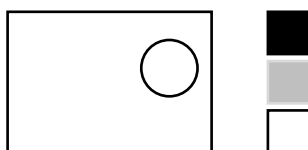
Consideramos que o resultado dessa segunda sessão foi bastante positivo, o tempo foi suficiente e uma parcela significativa da turma acompanhou ativamente as atividades, participou das discussões e demonstrou compreensão dos conceitos abordados. Essa participação significativa é, por si só, um indicativo do potencial da metodologia adotada para promover a aprendizagem dos processos de contagem.

7.4 Aula 3: Etapas Dependentes e Definição Aprimorada do Princípio Multiplicativo

Iniciamos a terceira aula com a apresentação do problema de pintura da bandeira, que reproduzimos aqui:

Uma bandeira com o formato ilustrado abaixo deve ser pintada utilizando duas das cores fornecidas. Liste todas as possíveis bandeiras. Quantas são elas?

Figura 7.5 – Desenho da bandeira



Fonte: Elaborada pelo autor

Solicitamos que os alunos desenhassem todas as bandeiras possíveis. Para isso, disponibilizamos para eles caneta hidrográfica preta e lápis preto. Essa foi uma tarefa divertida onde a maioria da turma se envolveu. Os alunos com maior aptidão para o desenho rapidamente cumpriram a tarefa. A figura 7.6 mostra um exemplo dos desenhos elaborados.

Depois dessa tarefa concluída ficou fácil eles identificarem as etapas envolvidas na resolução do problema. A maioria da turma reconheceu corretamente:

- Etapa 1: Pintar o retângulo;
- Etapa 2: Pintar o círculo.

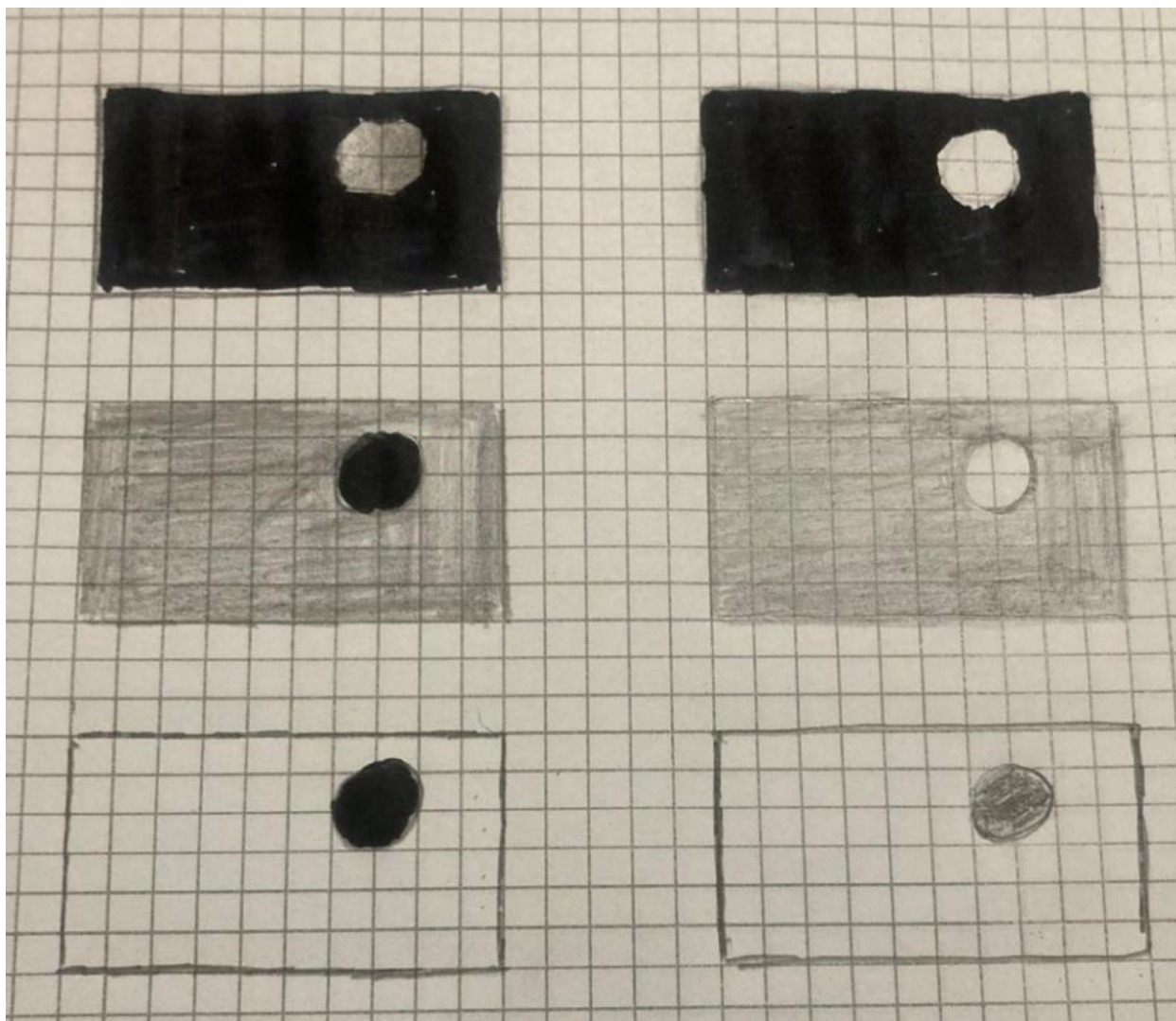
Em seguida, pedimos que listassem as opções de cada etapa. Os alunos prontamente perceberam que a cor escolhida na etapa 1 (retângulo) não poderia ser utilizada na etapa 2 (círculo). Reconheceram, assim, que para listar as opções da segunda etapa seria necessário saber qual havia sido a escolha feita na primeira. Aproveitamos essa conclusão para discutir o conceito de etapas dependentes.

Explicamos que, nesse tipo de situação, a decisão tomada em uma etapa depende diretamente da decisão anterior e que no caso desse problema, a cor utilizada no retângulo restringe as opções disponíveis para o círculo. Isso configura um cenário em que as decisões não são independentes. Solicitamos então que os alunos elaborassem a árvore de decisão correspondente ao problema. Um exemplo das árvores construídas é mostrado na figura 7.7. Por ser diferente dos problemas discutidos nas aulas anteriores, alguns alunos demonstraram certa dificuldade inicial. No entanto, após o esclarecimento das dúvidas, a maioria conseguiu

construir a árvore corretamente, destacamos um exemplo na figura 7.7, e concluímos que o total de bandeiras possíveis era 6.

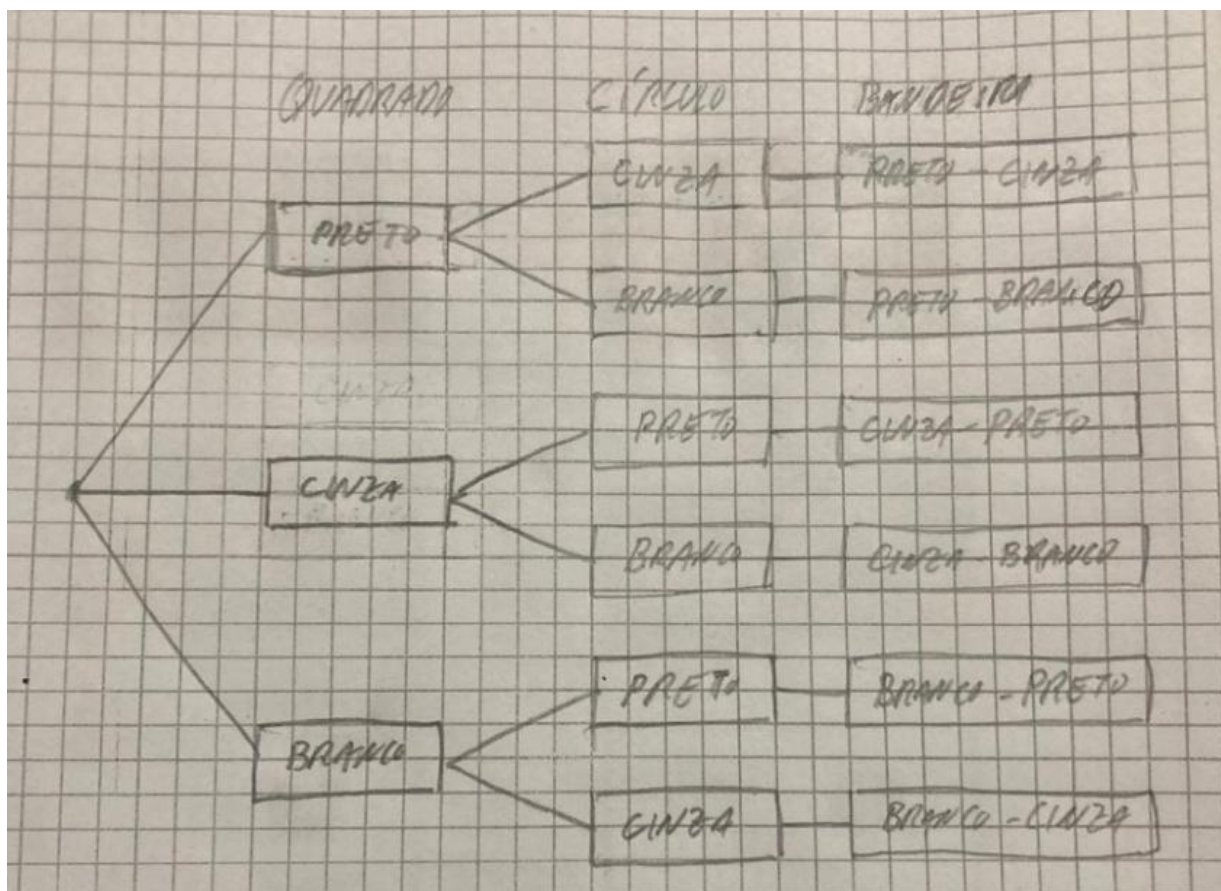
Com a árvore construída, retomamos a discussão sobre a regra formulada na aula anterior — que envolvia a multiplicação do número de opções em cada etapa — e questionamos se ela ainda se aplicava ao novo problema. A análise da árvore permitiu que os alunos percebessem que sim: havia 3 opções para a primeira etapa e, para cada uma delas, 2 opções para a segunda. Assim, confirmaram que o total de bandeiras possíveis poderia ser calculado por $3 \times 2 = 6$.

Figura 7.6 – Bandeira pintada por um aluno



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7.7 – Árvore de decisão desenhada por um aluno



Fonte: Elaborada pelo autor

Na sequência, foi apresentado o segundo problema desta aula:

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os dígitos 0, 1, 2, 3 e 4?

A dificuldade inicial foi compreender o significado do termo “distintos”. Após a explicação, os alunos entenderam que os algarismos não poderiam se repetir e associaram esse problema ao similar abordado na aula passada, reconhecendo que as etapas continuavam as mesmas:

- Etapa 1: Escolher o algarismo das centenas;
- Etapa 2: Escolher o algarismo das dezenas;
- Etapa 3: Escolher o algarismo das unidades.

Eles também identificaram que na etapa 1 havia 4 opções válidas e que, a partir da segunda etapa, as opções disponíveis dependeriam das escolhas anteriores. Essa análise nos permitiu reforçar, novamente, o conceito de etapas não independentes.

Como a construção da árvore de decisão demandaria um tempo grande da aula, projetamos no quadro a árvore de decisão da figura 6.6, construída para este problema. Na análise da árvore eles conseguiram perceber que para a primeira etapa (centenas), havia 4 opções (excluindo o zero), as opções para a segunda etapa mudavam dependendo do algarismo escolhido para as centenas, mas a quantidade de opções para esta etapa era sempre 4 e que, as opções para a terceira etapa também mudavam, dependendo dos algarismos escolhidos para a centena e para a dezena, mas a quantidade de opções dessa etapa era sempre 3.

Contamos o total de possibilidades e questionamos se seria possível aplicar o Princípio Multiplicativo para calcular esse total, a maioria concordou que sim, pois já tinham percebido que $4 \times 4 \times 3 = 48$.

O terceiro problema dessa aula, foi particularmente interessante, pois facilitou a aplicação do primeiro passo da estratégia para resolver de problemas de contagem: se colocar no lugar de quem está fazendo as escolhas.

De quantas formas diferentes quatro pessoas podem ser organizadas em uma fila?

Para tornar a situação mais concreta, simulamos a formação de uma fila com quatro alunos da turma. A simulação permitiu que eles percebessem, de maneira prática, que o problema poderia ser dividido em quatro etapas:

- Etapa 1: Escolher quem será o primeiro da fila (4 opções);
- Etapa 2: Escolher quem será o segundo (3 opções restantes);
- Etapa 3: Escolher quem será o terceiro (2 opções);
- Etapa 4: Escolher quem será o último (1 opção restante).

A partir disso, concluíram que o número total de possibilidades era $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

O desafio de reformular o Princípio Multiplicativo construído na aula anterior ficou para a aula seguinte, uma vez que a discussão dos três problemas ocupou todo o tempo da aula.

Consideramos o resultado dessa aula extremamente satisfatório, pois evidenciou que a metodologia adotada — baseada em situações-problema, construção de árvores de decisão e protagonismo dos alunos — é eficaz para promover a compreensão do Princípio Fundamental da Contagem.

7.5 Aula 4: Princípio Aditivo e a estratégia de divisão em casos

Iniciamos a aula, lançando o desafio de reformular a regra construída na segunda aula:

Para resolver problemas de contagem com etapas independentes, devemos multiplicar o número de opções de cada etapa.

Nosso objetivo era ampliar a regra para abranger os casos de etapas dependentes, como os trabalhados nos problemas da aula anterior. Recordamos os resultados daqueles problemas que mostraram que a aplicação da multiplicação continuava válida desde que o número de opções de cada etapa não variasse com as escolhas realizadas nas etapas anteriores, isto é, o número de opções de cada etapa fosse sempre o mesmo quaisquer que fossem as escolhas das etapas anteriores.

Após uma discussão rica em sugestões, a turma chegou ao seguinte enunciado:

Para resolver problemas de contagem temos que dividi-los em etapas, se cada etapa tem sempre o mesmo número de opções, para calcular o total de possibilidades multiplicamos os números de opções de cada etapa.

Ainda que tenhamos ajustado a redação final para maior clareza e precisão, o conteúdo expressa fielmente o que foi construído coletivamente pelos alunos.

Retomamos o objetivo principal dessa quarta aula que era conduzir os estudantes à descoberta do Princípio Aditivo da Contagem, bem como à compreensão da estratégia de divisão de problemas em casos distintos. As atividades propostas mantiveram a abordagem adotada nas aulas anteriores, com ênfase na construção do conhecimento e no desenvolvimento do raciocínio lógico, a partir da resolução de problemas.

O problema inicial dessa aula foi elaborado para destacar situações mutuamente excludentes — condição essencial para a aplicação do Princípio Aditivo:

Suponha que você precise escolher uma forma de transporte. Se optar pelo transporte público, há 2 opções: ônibus ou metrô. Se optar pelo transporte privado, há 3 opções: carro, bicicleta ou motocicleta. Qual é o total de possibilidades de transporte disponíveis para você?

Ao serem convidados a responder, a maioria dos estudantes indicou que havia 6 possibilidades, baseando-se na multiplicação entre o número de opções de transporte público (2) e o número de opções de transporte privado (3). Essa resposta incorreta revelou uma aplicação indevida do Princípio Multiplicativo, o que foi explorado como ponto de partida para a reflexão coletiva. Para aprofundar a análise, foi apresentada a árvore de decisão desse problema, (figura 6;11). A árvore foi determinante para que os estudantes compreendessem que

as duas categorias de escolha — transporte público e transporte privado — não constituíam etapas sucessivas, mas sim alternativas excludentes. Ou seja, ao optar por uma das formas de transporte, a outra deixava automaticamente de ser considerada.

A árvore evidenciou também que, nesse tipo de problema, o total de possibilidades resulta da soma dos elementos de conjuntos distintos e não da multiplicação entre eles, como ocorreria em situações com etapas sequenciais. Esse contraste com os problemas anteriores serviu como base para introduzir, de forma implícita, a lógica do Princípio Aditivo.

Em seguida, foi apresentado o segundo problema, de maior complexidade:

Para ir à academia, Mariana tem 2 pares de tênis (um branco e um preto), 3 shorts (2 de cor escura e 1 de cor clara) e 4 blusas (2 de cor escura e 2 de cor clara). Ela usa o tênis branco com os shorts de cor clara e as blusas de cor escura. Já quando usa o tênis preto, combina com shorts de cor escura e blusas de cor clara. De quantas maneiras ela pode escolher um 'look' de tênis, short e blusa?

Dividir o problema em etapas foi relativamente fácil para os alunos. Após uma breve discussão eles chegaram à conclusão de que as etapas seriam:

- Etapa 1 - Escolha do tênis
- Etapa 2 - Escolha do short
- Etapa 3 - Escolha da blusa

Foi também relativamente fácil para eles perceberem que o conjunto de opções para as etapas 2 e 3 dependiam da escolha inicial do tênis.

Com o apoio do professor, os alunos conseguiram estruturar as opções das etapas da seguinte forma:

- Etapa 1 - Tênis branco ou Tênis preto (2 opções);
- Etapa 2 - as opções da etapa 2 dependem da escolha feita na etapa 1.
 - Se a escolha da etapa 1 foi tênis branco então, para a etapa 2 temos uma opção de short de cor clara.
 - Se a escolha da etapa 1 foi tênis preto então, para a etapa 2 temos duas opções de short de cor escura.
- Etapa 3 - as opções da etapa 3 também dependem da escolha feita na etapa 1.
 - Se a escolha da etapa 1 foi tênis branco então, para a etapa 3, temos duas opções de blusa de cor escura.

- Se a escolha da etapa 1 foi tênis preto então, para a etapa 3, temos duas opções de blusa de cor clara.

A seguir foi apresentada a árvore de decisão do problema (figura 6.12). A representação gráfica tornou visível a existência de dois casos mutuamente excludentes, e que o total de possibilidades, 6, era a soma das possibilidades de cada caso.

Neste momento da aula, buscamos uma comparação das árvores dos dois problemas dessa aula com as árvores das aulas anteriores que levaram à “descoberta” do Princípio Multiplicativo. As árvores onde pudemos aplicar o Princípio Multiplicativo diretamente, que eles denominaram de “bonitinhas”, tinham o mesmo número de opções para cada ação o que não ocorria com as árvores dos problemas que tivemos dividir em casos, que eles denominaram de “diferentes”.

A comparação das árvores permitiu destacar a diferença estrutural entre os problemas resolvidos por meio do Princípio Multiplicativo e aqueles que envolvem o Princípio Aditivo. Observou-se que:

- Árvores associadas ao Princípio Multiplicativo (“bonitinhas”) apresentam o mesmo número de ramificações em cada nível.
- Árvores que representam situações de escolha excludente, típicas do Princípio Aditivo, têm ramificações de tamanhos distintos, refletindo os diferentes conjuntos de opções em cada caso.

Devido ao tempo necessário para a discussão aprofundada das duas situações-problema e comparação das árvores, não foi possível aplicar o terceiro problema previsto para essa aula, nem propor o desafio de formular um enunciado coletivo para o Princípio Aditivo, conforme planejado inicialmente. Esses dois itens foram, portanto, realocados para a aula seguinte.

Apesar disso, consideramos que a aula foi extremamente produtiva, pois proporcionou aos estudantes a oportunidade de compreender a lógica e a aplicabilidade do Princípio Aditivo em comparação com o Princípio Multiplicativo. Novamente, a árvore de decisão se mostrou uma ferramenta didática eficaz para tornar visível a estrutura dos problemas de contagem, favorecendo o entendimento detalhado do problema.

7.6 Aula 5: Consolidando os conhecimentos adquiridos

A aula foi iniciada com o problema que não foi apresentado na aula anterior.

Digamos que você deseja comprar um computador, mas está em dúvida sobre qual marca, modelo e cor irá escolher. Há apenas duas marcas, que chamaremos de Marca A e Marca B, pelas quais você se interessa. A Marca A tem à disposição três modelos, A1, A2 e A3 e cada um desses pode ser comprado em três possíveis cores: C1, C2 e C3. Já a Marca B oferece dois modelos, B1 e B2, tais que, para cada um, há duas possíveis escolhas de cor: C1 e C2. De quantas maneiras diferentes você pode realizar a compra?

Após a leitura conjunta e o entendimento do problema, a maioria dos alunos conseguiu descrever as etapas do problema:

- Etapa 1: escolher a marca
- Etapa 2: escolher o modelo
- Etapa 3: escolher a cor

A maioria conseguiu perceber, também, que as opções da etapa 2 e da etapa 3 eram completamente diferentes dependendo da marca escolhida. Apresentamos então a árvore de decisão do problema, figura 6.13, e, para nossa satisfação, vários alunos conseguiram interpretá-la corretamente e verificar que o problema se dividia em 2 casos distintos e que o total de maneiras diferentes para realizar a compra, 13, era a soma das possibilidades de cada caso.

Aproveitamos a árvore de decisão desse problema para retomar com os alunos a discussão sobre quando a solução de um problema de contagem deve ser dividida em casos distintos. Mostramos para eles que quando a quantidade de opções de uma certa etapa muda, de acordo com as escolhas feitas anteriormente, não podemos aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo e que, nesses casos, devemos dividir o problema em casos, calcular o número de possibilidades de cada caso e somá-los para obter o número total de possibilidades. Mostramos também que quando as árvores são “diferentes” é possível decompô-las em sub-árvores “bonitinhas”, dentro das quais o Princípio Multiplicativo pode ser aplicado.

Na parte final da aula propusemos o desafio dos alunos formularem um enunciado para o Princípio Aditivo. Como era esperado, foi mais difícil para eles elaborarem esse princípio. Depois de alguma discussão e contando com a ajuda do professor, conseguiram chegar ao seguinte enunciado:

Quando a quantidade de opções de cada etapa muda, devemos dividir o problema em casos e somar as possibilidades de cada caso.

Esse enunciado mostrou que uma parte dos alunos conseguiu compreender a essência do Princípio Aditivo. O que nos levou a considerar que a metodologia foi bem-sucedida.

Não houve tempo para discutir e comparar as definições apresentadas nos livros com as definições que eles criaram.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos uma proposta para a introdução ao ensino de Análise Combinatória fundamentada no Princípio Multiplicativo e no Princípio Aditivo de contagem. A metodologia adotada visa incentivar os estudantes a “descobrirem” esses princípios por meio da resolução de problemas práticos, utilizando a árvore de decisão como ferramenta central para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Para testar essa metodologia, foi elaborada uma sequência didática que foi aplicada em duas turmas do segundo ano do ensino médio da rede estadual de Minas Gerais.

De modo geral, a participação dos estudantes nas aulas da sequência didática foi positiva e engajada. Embora a comparação dos princípios “descobertos” por eles com os princípios apresentados nos livros didáticos não tenha sido possível, consideramos que a aplicação da sequência didática foi bem-sucedida. Observou-se que a maioria dos alunos foi capaz de compreender quando aplicar cada um dos princípios.

A metodologia adotada demonstrou que os alunos são capazes de construir conceitos matemáticos fundamentais, como o Princípio Multiplicativo e o Princípio Aditivo, por meio da resolução orientada de problemas. A utilização da árvore de decisão, para representar visualmente o processo de contagem e facilitar a construção do conjunto de resultados possíveis, desempenhou papel crucial na compreensão do raciocínio combinatório, promovendo um entendimento mais profundo dos conceitos subjacentes. Os resultados indicam que a abordagem baseada na descoberta ativa, associada ao uso da árvore de decisão, estimula a participação dos estudantes, que, ao construírem seu próprio conhecimento por meio do envolvimento pessoal na resolução dos problemas, tornam-se progressivamente mais engajados e motivados. Sem dúvida, essa metodologia se revela superior aos métodos tradicionais de ensino da combinatória, nos quais os princípios são apresentados de forma direta e abstrata. Essa abordagem pode ser replicada ou adaptada para outros contextos.

Comprovamos também que as técnicas de contagem são acessíveis à maioria dos alunos pois, ao contrário de outros tópicos que exigem ferramentas e conceitos mais complexos, sua base repousa nas operações aritméticas básicas de adição e multiplicação. Isso torna a contagem um excelente tópico para resgatar alunos que apresentam lacunas devido à natureza cumulativa

do aprendizado da Matemática. Na contagem, o que realmente importa é o entendimento daquelas operações e como elas se conectam para resolver problemas.

A principal dificuldade enfrentada foi motivar os alunos do segundo ano do ensino médio a participarem ativamente das aulas. A realidade atual das salas de aula impõe inúmeros desafios aos professores, especialmente em disciplinas como matemática, frequentemente percebida pelos estudantes com resistência ou desinteresse. Além disso, organizar a turma em grupos para trabalhos colaborativos revelou-se uma tarefa complexa. Por esse motivo, em ambas as turmas optamos por promover discussões amplas em vez da divisão em grupos, conforme inicialmente previsto.

Ainda assim, considerando o interesse despertado pela metodologia, a participação dos alunos foi avaliada como satisfatória, com mais da metade das turmas demonstrando atenção e envolvimento nas atividades propostas.

Consideramos também que o número de aulas da sequência didática poderia ter sido maior para permitir que os alunos tivessem mais tempo para construir todas as árvores de decisão e se envolverem com a solução dos problemas por um tempo maior.

O Princípio Multiplicativo e o Princípio Aditivo são conceitos fundamentais para compreensão das técnicas de contagem. Este trabalho evidencia que a abordagem por meio da resolução de problemas e do uso de árvores de decisão pode ser eficaz na construção desses conceitos. Ainda são necessárias mais investigações para identificar as estratégias mais adequadas ao ensino desses princípios em contextos reais de sala de aula. No campo da pesquisa, pretendemos aprofundar a compreensão dos elementos envolvidos na aprendizagem significativa desses princípios e explorar formas de aplicá-los à resolução de problemas combinatórios complexos, sem recorrer diretamente a fórmulas.

Concluimos que os resultados deste trabalho foram bastante positivos, reforçando a relevância de práticas pedagógicas mais dinâmicas e investigativas para a formação de alunos que não apenas compreendam, mas também se envolvam ativamente com a Matemática. A aplicação da sequência didática baseada em árvores de decisão revelou-se promissora, ao promover maior participação dos estudantes e facilitar a construção significativa dos conceitos combinatórios.

Como forma de ilustrar o impacto prático dessa proposta, destacamos o depoimento do professor Welison Fernando da Silva, regente de Matemática nas turmas onde o trabalho foi desenvolvido:

“As aulas desenvolvidas e ministradas pelo professor Jorge, com foco na introdução ao ensino de Análise Combinatória por meio de árvores de decisão, foram extremamente produtivas. Os alunos do 2º ano do Ensino Médio demonstraram grande engajamento, interagindo de forma participativa e mostrando interesse em compreender o conteúdo. Embora nem todos tenham se envolvido ativamente, aqueles que ficaram mais reservados não comprometeram o ritmo das aulas. As sessões foram conduzidas de modo expositivo, com apresentação de problemas práticos nos quais os estudantes construíram suas próprias árvores de decisão diretamente nos cadernos. Essa abordagem visual e prática favoreceu a compreensão das diferentes possibilidades combinatórias, contribuindo significativamente para o aprendizado. Parabéns ao professor Jorge pela excelente condução das aulas e pela forma criativa de apresentar os conceitos, promovendo um ambiente de ensino acessível, dinâmico e eficaz.”

Esse retorno positivo reafirma o potencial de abordagens centradas na resolução de problemas e na construção ativa do conhecimento, especialmente em conteúdos que, muitas vezes, são tratados de forma excessivamente formal e abstrata. Esperamos que esta dissertação possa inspirar novas práticas e pesquisas que valorizem o protagonismo dos estudantes no processo de aprendizagem da Matemática — tornando-a, acima de tudo, mais compreensível, envolvente e significativa.

REFERÊNCIAS

- ADENES NETO, B. S. *A música e o canto como instrumentos facilitadores no ensino do Princípio Multiplicativo da Contagem*. 80 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – PROFMAT – UENF, Campos dos Goytacazes, RJ, 2025. Defesa em 21/05/2025.
- ANDRADE T. M. – *Matemática Interligada – Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade*. 1 ed. Editora Scipione, São Paulo 2020.
- BATANERO C.; NAVARRO-PELAYO V.; GODINO J.D.- *Razonamiento Combinatorio em Alumnos de Secundaria*. Educación Matemática, Vol. 8, P.26-39, 1996.
- BENEVIDES, F. S.; CAMINHA, A. *Princípio fundamental da contagem*. Portal da OBMEP, 2016. Disponível em: https://cdnportaldaoemep.impa.br/portaldaoemep/uploads/material_teorico/7sv28v642xc8k. Acesso em: 9 out. 2025.
- BEZERRA, M. J. S. *O ensino de Análise Combinatória para turmas da Educação de Jovens e Adultos com foco no Princípio Multiplicativo*. 72 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – PROFMAT – UFP, Belém, PA, 2021. Defesa em 25/02/2021.
- BRASIL- *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.
- BRASIL- *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, 2002.
- BRASIL- *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, Vol. 2, Brasília, 2006.
- CARVALHO P. C. P- *Métodos de Contagem e Probabilidade*. 1 ed IMPA, Rio de Janeiro, 2015.
- CARVALHO, P. C. P.; OLIVEIRA MORGADO, A. C.-. *Matemática Discreta*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. P. 192. (Coleção Profmat).
- CAVALCANTE, F. L. *Estratégias de resoluções: problemas utilizando o Princípio Multiplicativo em Análise Combinatória*. 47 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – PROFMAT – UFP, Bragança, PA, 2022.
- D'AMBROSIO, U. *Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://ojs.ufgd.edu.br/tangram/article/view/16878>. Acesso em: 9 out. 2025.
- DANTE L. R.; VIANA F. – *Matemática em Contextos – Análise Combinatória, Probabilidade e Computação*. 1 ed. Editora Ática, São Paulo 2020.
- HADAR N.; HADASS R.- *The Road to Solving a Combinatorial Problem is Strewn with Pitfalls*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 12, No. 4, P.435-43, 1981.

- KANNO, T. Y. A. *Análise Combinatória: uma proposta de ensino*. 54 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – PROFMAT – UEL, Londrina, PR, 2022.
- LEONARDO F. M. *Conexões, Matemática e suas Tecnologias, Estatística e Probabilidade*. 1 ed. Editora Moderna, São Paulo 2020.
- LOCKWOOD E. - *Student Approaches to Combinatorial Enumeration: The Role of Set-Oriented Thinking*. Portland State University-PDXScholar, Dissertations and Theses. Paper 338, Disc. (Doutorado), 2011.
- LOCKWOOD E.; SCHAUB B.- *Reinventing the multiplication principle*. Conference: Nineteenth Conference on Research on Undergraduate Mathematics Education, At: Pittsburgh, PA, 2016.
- LOCKWOOD, E.; GIBSON B. – *Combinatorial tasks and outcome listing: examining productive listing among undergraduate students*. Educational Studies in Mathematics, Feb. 2016.
- LOCKWOOD, E.; WASSERMAN, N.H.; TILLEMA, E.S. *A case for combinatorics: a research commentary*. The Journal of Mathematical Behavior, v. 59, p. 100783, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100783>.
- LONGEN A.; FREITAS L.T. – *Interação Matemática e Suas Tecnologias*. Vol.3. 1 ed. Editora do Brasil, São Paulo 2020.
- MORGADO, A.C.O; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J. B.; CARVALHO, P.C.P.; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios*. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).
- NAHUM, N. S. *Métodos de Contagem: uma proposta de ensino com a utilização de problemas para o ensino médio*. 89 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – PROFMAT – UFP, Campus Universitário do Baixo Tocantins, Abaetetuba, PA, 2021.
- OLIVEIRA, R. F. A. *Uma proposta para o ensino de Análise Combinatória com foco nos Princípios Aditivo e Multiplicativo para resolução de problemas*. 110 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – PROFMAT – UFRPE, Recife, PE, 2025.
- OSÓRIO, G. N. L. *O uso de material manipulável no ensino de Princípio Multiplicativo e na construção de gráficos de barras e de setores no ensino fundamental*. 79 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – PROFMAT – UNIVASF, Juazeiro, BA, 2019. Defesa em 11/11/2019.
- SOUSA, J. C. *A importância do ensino do Princípio Multiplicativo na Educação Básica*. 52 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – PROFMAT – UECE, Sobral, CE, 2023. Defesa em 19/06/2023.
- TEIXEIRA L. A. *Diálogo Matemática e suas Tecnologias, Estatística e Probabilidade*. 1 ed. Editora Moderna, São Paulo 2020.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Esta sequência didática foi elaborada com o objetivo de introduzir, de forma investigativa e significativa, os Princípios Aditivo e Multiplicativo da Contagem a estudantes do 2º ano do Ensino Médio. A proposta é que os alunos descubram, formulem e refinem as definições desses princípios a partir da resolução de problemas, da construção de árvores de decisão e da discussão coletiva dos resultados obtidos.

A proposta está organizada em cinco aulas de uma hora, em que o professor atua como mediador e facilitador do processo de construção do conhecimento, enquanto os alunos assumem papel ativo, formulando hipóteses, confrontando ideias e sistematizando conceitos. A sequência pode ser utilizada por professores que desejem trabalhar a introdução à Análise Combinatória sob uma perspectiva exploratória, ou servir de base para novas propostas didáticas sobre o tema.

A tabela a seguir apresenta os elementos da sequência didática.

Elemento	Descrição
Título da sequência	Descobrimo os Princípios Aditivo e Multiplicativo da Contagem
Área de conhecimento	Matemática
Tema central	Introdução à Análise Combinatória – Princípios Multiplicativo e Aditivo
Conteúdos abordados	Árvores de decisão, Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo, contagem de possibilidades, etapas dependentes e independentes, divisão em casos.
Objetivo geral	Levar os alunos a descobrir e compreender, de forma autônoma e investigativa, os princípios fundamentais da contagem, utilizando estratégias de listagem e árvores de decisão.
Objetivos específicos	<ul style="list-style-type: none">• Desenvolver o raciocínio lógico e combinatório;• Incentivar a formulação e o refinamento de definições matemáticas pelos alunos;• Promover a aprendizagem colaborativa e investigativa;• Favorecer a compreensão intuitiva dos Princípios Aditivo e Multiplicativo;• Relacionar representações gráficas (árvore de decisão) com processos de contagem.
Público-alvo	Estudantes do 2º ano do Ensino Médio, em turmas introdutórias à Análise Combinatória.
Carga horária	5 aulas de 1 hora cada.
Organização dos alunos	Grupos de 4 alunos, com atividades colaborativas e discussão coletiva dos resultados.

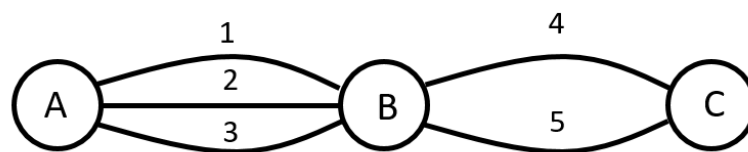
Papel do professor	Mediador e facilitador da aprendizagem: orienta a construção das árvores de decisão, conduz discussões, provoca reflexões e auxilia na sistematização das definições formuladas pelos alunos.
Papel do aluno	Ativo e protagonista: resolve problemas, constrói árvores de decisão, fórmula e revisa definições, participa das discussões e trabalha de forma colaborativa.
Metodologia de ensino	Abordagem investigativa, resolução de problemas, aprendizagem colaborativa e construção de conceitos a partir de exemplos concretos e generalizações.
Recursos didáticos	Quadro e marcador, papel, lápis, folhas quadriculadas, material impresso com problemas, projetor multimídia (opcional).
Etapas / Estrutura das aulas	Aula 1: Introdução às Árvores de Decisão e método de resolução de problemas de contagem. Aula 2: Etapas independentes – formulação inicial do Princípio Multiplicativo. Aula 3: Etapas dependentes – refinamento do Princípio Multiplicativo. Aula 4: Princípio Aditivo e divisão em casos. Aula 5: Comparação entre as definições dos alunos e as apresentadas em livros didáticos.
Avaliação da aprendizagem	Avaliação processual e formativa, com base na participação dos alunos, nas discussões em grupo, na construção das árvores de decisão, na formulação das definições e na capacidade de justificar o uso dos princípios de contagem.
Produto final da sequência	Formulação, pelos próprios alunos, das definições dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, seguida de comparação crítica com as definições formais dos livros didáticos.
Resultados esperados	Que os alunos desenvolvam autonomia intelectual, compreendam o raciocínio subjacente aos princípios de contagem, consigam aplicá-los corretamente e reconheçam suas próprias descobertas como parte do processo de construção do conhecimento matemático.

A seguir, é apresentada a descrição de cada aula.

Aula 1 – Árvores de decisão e o método para resolver problemas de contagem

- Objetivos:
 1. Apresentar o conceito e a estrutura de uma árvore de decisão.

2. Ensinar os alunos a representar graficamente situações de contagem.
 3. Compreender como a listagem organizada das possibilidades auxilia na solução de problemas combinatórios.
- Problemas propostos:
 1. Um estudante possui três camisas (branca, azul e verde), duas calças (azul e preta) e dois calçados (branco e preto). De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?
 2. Três cidades A, B e C são ligadas por três estradas entre A e B e duas entre B e C. De quantos modos diferentes é possível ir de A até C, passando por B uma única vez?



- Recomendações ao professor:
 1. Nos problemas propostos, incentivar a construção manual da árvore de decisão.
 2. Estimular os alunos a identificar etapas, decisões e opções disponíveis em cada situação.
 3. Destacar que o objetivo não é a rapidez no cálculo, mas a compreensão da estrutura da contagem.
 4. Ao final, discutir como a árvore auxilia na organização e visualização das possibilidades.

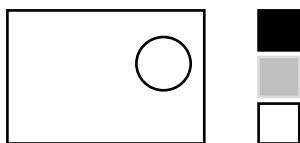
Aula 2 – Etapas independentes e o Princípio Multiplicativo

- Objetivos:
 1. Reconhecer situações em que as etapas do processo de contagem são independentes.
 2. Identificar o uso da multiplicação no cálculo do número total de possibilidades.
 3. Formular uma primeira definição do Princípio Multiplicativo.
- Problemas propostos:
 1. Em uma lanchonete, o cliente escolhe um tipo de pão (3 opções), uma carne (2 opções) e um queijo (3 opções). Quantos sanduíches diferentes podem ser montados?

2. Quantos números de três algarismos podem ser formados utilizando os dígitos 0, 1, 2, 3 e 4?
- Recomendações ao professor:
 1. Dividir a turma em grupos e promover discussões coletivas.
 2. Conduzir a análise da independência das etapas e a justificativa do uso da multiplicação.
 3. Estimular os alunos a redigir, com suas próprias palavras, uma primeira versão do Princípio Multiplicativo.
 4. Valorizar a argumentação dos estudantes e registrar as diferentes formulações no quadro para comparação.

Aula 3 – Etapas dependentes e o Princípio Multiplicativo

- Objetivos:
 1. Resolver problemas de contagem em que as opções de uma etapa dependem das etapas anteriores.
 2. Identificar que o Princípio Multiplicativo continua válido, mesmo com dependência entre as etapas.
 3. Revisar e aprimorar a definição inicial do Princípio Multiplicativo.
- Problemas propostos:
 1. Uma bandeira deve ser pintada com duas cores diferentes entre três disponíveis. De quantas formas distintas isso pode ser feito?



2. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com os dígitos 0, 1, 2, 3 e 4?
 3. De quantos modos diferentes quatro pessoas podem ser colocadas em fila?
- Recomendações ao professor:
 1. Retomar as estratégias da aula anterior, enfatizando o papel das restrições em cada etapa.
 2. Incentivar a análise das árvores, destacando que a multiplicação se mantém válida.

3. Conduzir a revisão coletiva da definição do Princípio Multiplicativo formulada na Aula 2, aperfeiçoando-a à luz dos novos exemplos.

Aula 4 – O Princípio Aditivo e a divisão em casos

- Objetivos:
 1. Identificar situações em que o Princípio Multiplicativo não se aplica diretamente.
 2. Compreender o uso do Princípio Aditivo em problemas que exigem divisão em casos.
 3. Formular, de forma colaborativa, uma definição para o Princípio Aditivo.
- Problemas propostos (sem resolução):
 1. Uma pessoa deve escolher um meio de transporte. Se optar por transporte público, tem 2 opções (ônibus ou metrô). Se optar por transporte privado, tem 3 opções (carro, bicicleta ou moto). Quantas opções totais de transporte estão disponíveis?
 2. Mariana vai à academia e pode usar diferentes combinações de tênis, shorts e blusas, conforme certas restrições de cor (detalhadas pelo professor). Quantas combinações possíveis ela pode formar?
- Recomendações ao professor:
 1. Apresentar os problemas com casos mutuamente excludentes e guiar a construção das árvores correspondentes.
 2. Destacar, através das árvores de decisão, que o Princípio Multiplicativo continua válido dentro de cada caso e que o total de possibilidades é obtido pela soma das possibilidades de cada caso.
 3. Estimular a criação coletiva da definição do Princípio Aditivo.
 4. Registrar no quadro as versões propostas pelos grupos e discutir semelhanças e diferenças.

Aula 5 – Comparação com definições formais dos livros didáticos

- Objetivos:
 1. Confrontar as definições elaboradas pelos alunos com as definidas nos livros didáticos.
 2. Consolidar o entendimento conceitual dos Princípios Aditivo e Multiplicativo.
- Problemas propostos:

1. Revisão de um problema de cada tipo (aditivo e multiplicativo), para reinterpretação com base nas definições finais.
- Recomendações ao professor:
 1. Apresentar trechos de livros didáticos do Ensino Médio que definem os princípios de contagem.
 2. Promover uma discussão sobre as semelhanças, diferenças e generalizações entre as definições dos alunos e as dos livros.
 3. Estimular que os alunos refinem suas definições finais, compreendendo o processo de formalização do conhecimento matemático.