CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

LUIZ FERNANDO BENTO

ISOMETRIAS E CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO À LUZ DA TEORIA DE VAN HIELE

Belo Horizonte
2025

LUIZ FERNANDO BENTO

ISOMETRIAS E CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO À LUZ DA TEORIA DE VAN HIELE

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador(a):
Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Banca Examinadora:
Dr. Carlos Magno Martins Cosme
Dra. Eliane Scheid Gazire
Dr. Warley Machado Correia

Belo Horizonte
2025

Bento, Luiz Fernando
B478i Isometrias e congruência de triângulos: uma proposta de ensino à luz da teoria de Van Hiele / Luiz Fernando Bento. – 2025.
107 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientadora: Fernanda Aparecida Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Triângulo (Ensino fundamental) – Teses. 2. Congruências (Geometria) – Teses. 3. Isometria (Matemática) – Teses. 4. Modelo Van Hiele – Teses. 5. Prática de ensino – Teses. I. Ferreira, Fernanda Aparecida. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 516.15

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

LUIZ FERNANDO BENTO

ISOMETRIAS E CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO À LUZ DA TEORIA DE VAN HIELE

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 26 de setembro de 2025.

Luiz Fernando Bento

Luiz Fernando Bento
(Autor)

Fernanda Ap Ferreira

Fernanda Aparecida Ferreira
(Orientadora)

Belo Horizonte
2025

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo apoio incondicional; à minha esposa, pela paciência e companheirismo; à minha orientadora, Prof.ª Dra. Fernanda, pela orientação e incentivo ao longo da pesquisa; e aos professores que contribuíram para a minha formação ao longo do mestrado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, com todo o meu carinho, aos meus pais, que sempre acreditaram no meu potencial e me incentivaram nos estudos.

À minha esposa, deixo um agradecimento especial pelo apoio incondicional, pela paciência nos momentos difíceis e por ter estado ao meu lado durante toda essa jornada.

Deixo meu agradecimento à Prof.ª Dra. Fernanda, por sua orientação, pelo apoio contínuo e pelas palavras de motivação ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca avaliadora, Prof. Dr. Carlos Magno Martins Cosme, Prof.ª Dra. Eliane Scheid Gazire e Prof. Dr. Warley Machado Correia pelas contribuições valiosas e pelo tempo dedicado à avaliação deste trabalho.

Agradeço também ao CEFET-MG, aos professores e aos colegas do PROFMAT, que contribuíram significativamente para minha formação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Este trabalho investiga o ensino da congruência de triângulos por meio das transformações isométricas, com o objetivo de abordar esses conteúdos nos anos finais do Ensino Fundamental, a partir de uma sequência didática que considera os diferentes níveis de pensamento geométrico dos estudantes. A proposta parte do pressuposto de que as isometrias fornecem uma noção intuitiva de congruência e se sustenta na Teoria de Van Hiele, tendo por base os estudos de Nasser, De Villiers e Nasser e Sant'Anna. No planejamento das atividades, buscou-se relacionar as habilidades descritas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e no Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG) sobre isometrias e congruência de triângulos, considerando os três primeiros níveis da Teoria: Reconhecimento, Análise e Ordenação. A sequência foi aplicada para 92 alunos de uma escola pública, acompanhada da aplicação de um questionário online ao final das atividades. Posteriormente, foram realizadas as análises do questionário e dos protocolos resultantes da aplicação, possibilitando apresentar alguns resultados descritivos, dialogando com as bases teóricas. Dentre os resultados, destacam-se a incorporação do vocabulário, a compreensão de conceitos geométricos e a transição entre os níveis de Van Hiele. Espera-se que o material elaborado possa servir de suporte para a prática docente e inspire novas pesquisas voltadas ao Ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Geometria. Van Hiele. Sequência didática. Isometrias. Congruência de Triângulos.

ABSTRACT

This study investigates the teaching of triangle congruence through isometric transformations, aiming to approach this content by means of a didactic sequence that considers the different levels of students' geometric thinking. The proposal assumes that isometries provide an intuitive notion of congruence and grounded in the Van Hiele Theory, based on the works of Nasser, De Villiers, and Nasser & Sant'Anna. In planning the activities, an effort was made to relate the skills described in the Brazilian National Common Core Curriculum (BNCC) and the Minas Gerais Reference Curriculum (CRMG) regarding isometries and triangle congruence, considering the first three Van Hiele levels: Visualization, Analysis, and Informal Deduction. The sequence was implemented with 92 students from a public school and included the application of an online questionnaire at the end of the activities. Subsequently, analyses of both the questionnaire and the protocols resulting from the implementation were carried out, enabling the presentation of descriptive results in dialogue with the theoretical framework. Among the results, we highlight the incorporation of vocabulary, the understanding of geometric concepts, and the transition between Van Hiele levels. It is expected that the material developed can support teaching practice and inspire further research focused on the teaching of Geometry in the final years of middle school.

Keywords: Geometry. Van Hiele. Didactic sequence. Isometries. Triangle congruence.

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT – Associação de Normas Técnicas
BNCC - Base Nacional Comum Curricular
CEFET/MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
CRMG - Currículo Referência de Minas Gerais
ENEM's - Encontros Nacionais de Educação Matemática
OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PF-Mat -Setor de Matemática do Projeto Fundão
PIC - Programa de Iniciação Científica Jr
PNLD - Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede
TAI - Termo de Anuência Institucional
TALE - Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Minha trajetória com a Matemática se iniciou ainda na infância. Analisar e resolver problemas que envolvem raciocínio lógico sempre foi algo que me envolvia e motivava. É bem verdade que, nos primeiros anos da vida escolar, o contato com a Matemática muitas vezes se dava sob a ótica da memorização de algoritmos, procedimentos e sua repetição sistemática.

Somente no Ensino Fundamental II, ao conhecer a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), passei a lidar de forma mais consistente com problemas que exigem raciocínio lógico, criatividade e capacidade de argumentação. A realização das provas da OBMEP proporcionou minha participação no Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC). Foi nesse momento que comecei a vislumbrar um novo universo de possibilidades, lidando com questões mais desafiadoras e que demandavam maior grau de formalização.

A Geometria esteve sempre muito presente no PIC. A oportunidade de desenvolver argumentos intuitivos se tornou uma porta de entrada para a construção e o amadurecimento do pensamento geométrico. Ao longo desse processo, passei a olhar para a Geometria sob uma nova perspectiva: não apenas explorava os problemas, mas também buscava justificar as soluções encontradas.

Paralelamente, junto a alguns amigos, formei um grupo de estudos voltado aos conteúdos e avaliações da escola. Ainda que de forma inconsciente, acredito que foi a primeira vez em que "ensinei" Matemática. Esse grupo me revelou os desafios de se fazer compreendido no processo de ensino. Mais tarde, já como professor, essa inquietação se tornaria uma constante em minha trajetória profissional.

Posteriormente, já cursando Matemática na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), realizei um estágio em um espaço de acompanhamento escolar e aulas particulares, sob supervisão da psicopedagoga Edslene Mara. Esse estágio despertou maior interesse pelo ensino, ao mesmo tempo em que me vi imerso em dois mundos aparentemente disjuntos.

Enquanto no estágio as reuniões e supervisões tinham como pauta a educação e o ensino, as aulas na universidade, em sua maioria, focavam na Matemática pura e aplicada. Ao longo desse período, tive pouco contato com a Educação Matemática. Embora tenha cursado algumas disciplinas optativas que promoviam a interseção entre Educação e Matemática, ainda percebia lacunas na minha formação.

Ao concluir a licenciatura em Matemática, em 2021, fui aprovado em concurso público para professor da Prefeitura de Contagem-MG e passei a lecionar para alunos do Ensino Fundamental. Nessa etapa, deparei-me com os desafios de ensinar e planejar aulas que favorecessem a aprendizagem dos estudantes. Dentre esses desafios, a Geometria se mostrou particularmente complexa, os alunos apresentavam muitas dificuldades em compreender e aplicar os conceitos, e eu me questionava sobre as possíveis causas dessas dificuldades.

Diante desses questionamentos, em 2023 iniciei o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), com o objetivo de complementar minha formação e, ao mesmo tempo, auxiliar minha prática em sala de aula. Entendia, desde o início, que minha pesquisa deveria dialogar diretamente com minhas vivências como professor do Ensino Básico.

Dessa forma, o Ensino da Geometria passou a se consolidar como o foco central desta pesquisa, motivada pelas dificuldades observadas em sala de aula e pelo desejo de compreender melhor os obstáculos enfrentados pelos alunos.

1.1 Justificativa e Objetivos

A partir da trajetória acadêmica e profissional desse professor, esta pesquisa **justifica-se** pelas suas inquietações em relação à sua prática docente, em particular, sobre o Ensino de Geometria. Essa investigação surge, portanto, como uma tentativa de construir caminhos didáticos que favoreçam o aprendizado da Geometria. Aliado a isso, reconhece-se que a Geometria constitui um importante campo da Matemática, oportunizando o desenvolvimento do pensamento espacial e da capacidade de argumentação lógica.

Como consequência dessa justificativa, emergem reflexões acerca do Ensino da Geometria e, a partir delas, formula-se a questão que orienta o desenvolvimento desta dissertação: “De que maneira é possível abordar tópicos da Geometria Euclidiana Plana, considerando e suscitando os diferentes níveis de pensamento geométrico dos alunos nos anos finais do Ensino Fundamental?”

Dessa forma, o presente estudo tem como **objetivo principal** investigar o ensino da congruência de triângulos a partir das transformações isométricas, por meio de uma sequência didática que considera e explora os diferentes níveis de pensamento geométrico dos alunos do 8° ano do Ensino Fundamental.

Visando contemplar o objetivo geral, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos:

- Conhecer e discorrer acerca do cenário das pesquisas sobre o Ensino de Geometria e suas principais tendências;
- Avaliar as orientações presentes nos documentos oficiais sobre o ensino das isometrias e da congruência de triângulos;
- Apresentar o referencial teórico que fundamenta a elaboração da sequência didática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento geométrico;
- Planejar, desenvolver e aplicar a sequência didática proposta;
- Analisar descritivamente os protocolos de aplicação da sequência didática à luz do referencial teórico.

Nesse contexto, esta proposta busca articular as vivências docentes às escolhas teóricas e metodológicas da investigação. Assim, entende-se que esta pesquisa não apenas dialoga com as inquietações do pesquisador, mas também oferece subsídios para pensar o Ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental.

1.2 A Estrutura da Dissertação

Para percorrer um caminho na direção dos objetivos delineados para a pesquisa, a dissertação foi estruturada em 6 (seis) capítulos e as considerações finais. O primeiro capítulo é a Introdução, a qual se lê.

O segundo capítulo busca contextualizar a proposta de desenvolver o ensino da congruência de triângulos a partir das transformações isométricas. Para isso, inicia-se com um panorama histórico do Ensino de Geometria no Brasil, destacando fatores que contribuíram para o seu abandono na Educação Básica e os movimentos que buscaram resgatá-la.

Em seguida, são analisadas as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e do Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG) em relação às transformações isométricas e à congruência de figuras, identificando avanços, lacunas e possibilidades de articulação entre esses conteúdos. Aliado a isso, discute-se o papel das isometrias no Ensino Fundamental, evidenciando sua importância.

Contextualizada a proposta, o terceiro capítulo apresenta as bases teóricas da sequência didática a partir da Teoria de Van Hiele, que sustenta o desenvolvimento do Recurso Educacional. Inicialmente, expõe-se o modelo teórico com base nos estudos de Nasser (1991), De Villiers (2010) e Nasser e Sant'Anna (2017), destacando suas principais características.

Neste capítulo, são estabelecidas concepções sobre os níveis de pensamento geométrico propostos pela Teoria. Sob a perspectiva dos Van Hieles são abordados os desafios e o papel do professor nesse processo, com ênfase nas fases de aprendizagem que orientam o Ensino de Geometria.

O quarto capítulo apresenta a estrutura e o desenvolvimento da sequência didática elaborada como Recurso Educacional, considerando os diferentes níveis de pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele. O capítulo descreve o processo de planejamento e aplicação da sequência, detalhando seus objetivos gerais e específicos, apresentando concepções acerca da sequência didática a partir do referencial teórico, evidenciando os objetos de conhecimento trabalhados e a metodologia adotada para sua implementação junto a estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental.

No capítulo 5, são analisados os dados coletados por meio de um questionário aplicado aos participantes, os quais também contribuíram para a interpretação dos protocolos e dos resultados da aplicação. O capítulo 6, por sua vez, dedica-se à análise descritiva dos protocolos construídos pelos estudantes durante a aplicação da sequência didática. Inicialmente, realiza-se uma análise individual de cada atividade, em seguida, apresenta-se uma análise geral da sequência didática.

Por fim, ao término da análise dos resultados da aplicação da sequência didática, são apresentadas as considerações finais da dissertação.

2 O ENSINO DE GEOMETRIA

A proposta desta pesquisa parte da compreensão de que o ensino da congruência de triângulos, tópico da Geometria Euclidiana, pode ser favorecido quando desenvolvido em articulação com as transformações isométricas. Para sustentar essa abordagem, é necessário, primeiramente, compreender como o Ensino de Geometria tem se constituído ao longo das últimas décadas no Brasil, quais foram seus avanços e os principais desafios ainda enfrentados. Este capítulo, portanto, tem como objetivo apresentar um relato histórico do Ensino de Geometria no contexto brasileiro, destacando os fatores que levaram ao seu abandono na Educação Básica e o movimento que, nas últimas décadas, buscou resgatar sua importância nos currículos escolares.

Além disso, este capítulo apresenta o que os documentos curriculares, Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG) , discorrem acerca do Ensino de Geometria e em particular das transformações isométricas e congruência de triângulos. Serão examinadas as diretrizes desses documentos quanto às isometrias e à congruência de figuras, evidenciando avanços, lacunas e a importância de uma abordagem que relacione esses dois conteúdos no Ensino Fundamental. Por fim, será apresentada algumas compreensões acerca das isometrias e seu ensino nos anos finais do Ensino Fundamental.

Assim, este capítulo busca apresentar o contexto no qual essa pesquisa se insere, e justificar a proposta de desenvolver o ensino da congruência de triângulos a partir das isometrias, em consonância com as diretrizes curriculares e com os avanços da pesquisa em Educação Matemática.

2.1 Tendências no Ensino de Geometria

Durante o século XX, ocorreram mudanças significativas no ensino de Matemática no Brasil. Segundo Duarte e Silva (2006), antes da década de 1950, o currículo de Matemática no Ensino Básico priorizava os cálculos aritméticos, as identidades trigonométricas, o Ensino de Geometria por meio de demonstrações de teoremas, além de problemas com enunciados longos e complicados, muitas vezes sem aplicação prática.

O ensino de Matemática era realizado de forma “excessivamente abstrata”, apresentando demonstrações, regras e fórmulas, sem oferecer ao aluno vivências que possibilitassem um aprendizado significativo. Os ramos da Matemática, por sua vez, eram abordados de forma isolada, sem apresentar relações entre si ou com outras áreas do conhecimento

> A Matemática contribuía para uma elitização intelectual e econômica pela constatação do baixo rendimento dos alunos; o objetivo da disciplina era o adestramento dos alunos em regras, fórmulas e cálculos sem aplicações e o currículo apresentava a Aritmética, a Álgebra, a Geometria e a trigonometria como ramos estanques e isolados da Matemática e o estudo de um só era iniciado após o estudo completo do outro. (Soares, 2001, p. 78)

A partir da segunda metade do século XX, surgem alguns esforços com o objetivo de melhorar o ensino da Matemática. Em 1955, foi realizado o I Congresso Nacional de Ensino da Matemática, com sede em Salvador, na Bahia, que abordou algumas propostas de mudanças em relação ao currículo vigente, ainda que tímidas. Somente durante o II Congresso Nacional de Ensino da Matemática, realizado em Porto Alegre em 1957, no Rio Grande do Sul, a adequação do currículo, o interesse em estudar questões relativas à aprendizagem da Matemática e a relação da Matemática com as demais disciplinas se evidenciaram como propostas de estudo.

Nesses congressos, percebe-se a presença das primeiras ideias no Brasil do movimento que acontecia em todo o mundo, buscando adequar o ensino da Matemática aos avanços da ciência e da psicologia. Esse movimento, intitulado “Matemática Moderna”, tinha como propósito: “aproximar a matemática desenvolvida na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área.” (Duarte; Silva, 2006, p. 88). Segundo Pavanello (1993) e Kaleff (1994), esse movimento defendia a concentração dos esforços no ensino da Álgebra e da linguagem da Teoria de Conjuntos.

O movimento da “Matemática Moderna” propunha que a Teoria de Conjuntos promovesse a integração de toda a Matemática. Tanto no ensino da Álgebra quanto no da Geometria, a Teoria de Conjuntos seria a linguagem utilizada para a apresentação desses conteúdos. De acordo com Soares (2001), esse movimento promoveu grandes transformações no ensino da Matemática, estabelecendo “alterações no currículo, na metodologia de ensino, nos livros didáticos, no papel das aplicações da Matemática e no enfoque dado à Álgebra e à Geometria.” (p. 64).

Nesse processo, o ensino da Álgebra passou a ser destacado na Matemática escolar, enquanto, aos poucos, a Geometria perdeu seu espaço no currículo do Ensino Básico. A proposta de um currículo para o Ensino de Geometria com enfoque nas transformações geométricas, utilizando a linguagem da Teoria de Conjuntos, trouxe maior grau de formalização e rigor para o Ensino de Geometria na Educação Básica. Segundo Pavanello (1993), os professores, que já lidavam com a falta de conhecimento geométrico e de formação, apresentaram maiores dificuldades em desenvolver a Geometria sob o enfoque das transformações. Dessa forma, embora o movimento da “Matemática Moderna” enfatizasse o Ensino de Geometria por meio das transformações geométricas, na prática, a Geometria escolar continuou a ser abordada sob a ótica das demonstrações de teoremas, incorporando a linguagem dos conjuntos.

A Lei 5.692/71, que estabeleceu as Diretrizes e Bases da Educação, também contribuiu para esse cenário, pois possibilitou uma maior liberdade por parte das escolas e dos professores de Matemática na definição dos currículos a serem trabalhados com os alunos. Nesse contexto, docentes sem uma formação adequada para ensinar Geometria passaram a negligenciar seu ensino, acarretando em prejuízos à formação dos educandos.

> A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de Matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de inclui-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula - talvez numa tentativa ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão (Pavanello, 1993, p.7).

Por outro lado, a partir dos anos 1970, surge no mundo um movimento pelo resgate do Ensino da Geometria. De acordo com Kaleff (1994), algumas tendências para o Ensino de Geometria são estabelecidas, cujo objetivo era proporcionar uma formação integral ao educando. São elas:

- Induzir no aluno o entendimento de aspectos espaciais do mundo físico e desenvolver sua intuição espacial e seu raciocínio espacial;
- Desenvolver no aluno a capacidade de ler e de interpretar argumentos matemáticos, utilizando a Geometria como o meio para representar conceitos e as relações Matemáticas;
- Proporcionar ao aluno meios de estabelecer o conhecimento necessário para auxiliá-lo no estudo de outros ramos da Matemática e de outras disciplinas, visando uma

interdisciplinaridade dinâmica e efetiva;

- Desenvolver no aluno habilidades que favoreçam a construção do seu pensamento lógico, preparando-o para os estudos mais avançados em outros níveis de escolaridade.

No Brasil, percebe-se o interesse pela retomada do Ensino de Geometria a partir do final da década de 1980 e ao longo da década de 1990, período em que diversas pesquisas (Pavanello, 1988; Miguel; Fiorentini; Miorim, 1992; Pavanello, 1993; Kaleff, 1994; Lorenzato, 1995) relataram a negligência em relação ao Ensino de Geometria nas escolas.

Sob a perspectiva do movimento de resgate da Geometria que ocorria no restante do mundo, Lorenzato (1995) destaca as tendências do Ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental durante esse período no Brasil:

- Apresentar a Geometria como meio de descrever o mundo físico;
- Explorar as transformações de figuras geométricas através de rotação, translação, simetrias e deformação, ressaltando a semelhança e a congruência;
- Utilizar a Geometria como auxiliar para resolver problemas;
- Aplicar propriedades geométricas;
- Favorecer a emissão e a verificação de hipóteses;
- Integrar a Geometria com a Aritmética e a Álgebra.

Com o objetivo de resgatar o Ensino de Geometria na Educação Básica, tais pesquisas propõem que ele seja conduzido de forma a permitir que os educandos realizem deduções lógicas, mesmo que informalmente, nas quais os processos sejam justificados. Dessa forma, nesse período, destaca-se o ensino de noções geométricas a partir de descobertas empíricas.

Nesse contexto, os materiais concretos/manipulativos surgem como recursos e ferramentas para o Ensino de Geometria, tendo em vista seu caráter “motivador” e mais “atrativo” para as aulas. Diversos estudos ao longo das décadas de 1980 e 1990 (Behr et al., 1983; Fiorentini; Miorim, 1990; Kaleff, 1994; Lorenzato, 1995) reconhecem que o uso de manipulativos facilita a aprendizagem de conceitos, habilidades e conteúdos matemáticos. De acordo com Lorenzato (1995), a utilização desses recursos provoca a imaginação e permite a compreensão, mesmo que, inicialmente, de maneira informal.

Fiorentini e Miorim (1990) entendem que, muitas vezes, esses materiais são vistos como a “solução” para os problemas enfrentados em sala de aula. Entretanto, é importante que o professor compreenda o que fundamenta o uso desses materiais e em quais situações eles podem, e devem, ser utilizados.

Nos anos que se seguem, os estudos sobre os manipulativos passam a destacar sua utilização de maneira que favoreça efetivamente a aprendizagem dos alunos. Segundo Pais (2000), a utilização inadequada dos materiais manipuláveis pode resultar em uma concepção de ensino puramente empírica e desprovida de significado. Grando (2015) destaca que esses materiais devem ser capazes de representar noções matemáticas mais abstratas.

A fim de identificar a existência de tendências didático-pedagógicas/investigativas no Ensino de Geometria no Brasil, Andrade e Nacarato (2004) realizaram uma análise dos Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs), no período de 1987 a 2001. A partir desse estudo, foram destacadas as seguintes tendências já descritas por Lorenzato (1995): o Ensino de Geometria por meio das transformações geométricas, a integração entre a Álgebra e a Geometria e o Ensino de Geometria por meio de descobertas empíricas, denominado pelos autores como "Geometria Experimental".

Além dessas tendências, com a popularização das tecnologias da informação, é observada uma nova tendência para o Ensino de Geometria que Andrade e Nacarato (2004) denominam de "Geometria em Ambientes Computacionais". Destacam-se, nesse contexto, os softwares de Geometria dinâmica e os ambientes de programação.

O movimento de resgate do Ensino de Geometria no Brasil, nas últimas décadas, resultou em avanços significativos nas pesquisas realizadas. A consolidação de novas tendências para o Ensino de Geometria trouxe conquistas importantes no contexto escolar, embora Costa (2020) reconheça que esses avanços ainda enfrentam obstáculos para a sua incorporação nas práticas pedagógicas dos professores de Matemática do Ensino Básico. Segundo Caldato e Pavanello (2015) e Costa (2020), a ausência de formação continuada para professores de Matemática ainda resulta em dificuldades por parte dos docentes para trabalharem a Geometria, mesmo sendo um componente presente no currículo da Educação Básica.

Apesar dessas dificuldades, observa-se que documentos curriculares recentes, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), têm buscado incorporar os avanços das pesquisas sobre o Ensino de Geometria. Percebem-se, em seu texto, elementos que dialogam com as tendências destacadas por Lorenzato (1995) e Andrade e Nacarato (2004), como o uso de recursos concretos/manipulativos, a integração entre a Álgebra e a Geometria, a incorporação de tecnologias digitais como ferramentas pedagógicas e a Geometria pelas transformações geométricas.

Na próxima seção, apresenta-se uma análise do que os currículos da Educação Básica propõem em relação ao ensino das isometrias e da congruência de triângulos, conteúdos matemáticos abordados no Recurso Educacional proveniente dessa dissertação.

2.2 As Isometrias e a Congruência de Triângulos no Currículo do Ensino Fundamental

Com as transformações geométricas se estabelecendo com tendência para o Ensino da Geometria, será apresentado o que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo Referência de Minas Gerais (CRMG) discorrem acerca do ensino das isometrias e da congruência de figuras durante o Ensino Fundamental. Aliado a isso, será evidenciado como a proposta desta pesquisa se insere nos documentos referenciais oficiais.

Os documentos curriculares oficiais são elaborados sob aparente influência do movimento de retomada do Ensino da Geometria que se estabeleceu ao longo das últimas décadas no Brasil. Tendências para o Ensino de Geometria como: o uso de recursos concretos/manipulativos, integração entre a Álgebra e a Geometria, apresentar a Geometria como meio de descrever o mundo físico, explorar as transformações de figuras geométricas e Geometria em Ambientes Computacionais são destacadas nos currículos.

De modo geral, o CRMG propõe um currículo para o ensino de Matemática bastante similar à BNCC, embora se diferencie em alguns aspectos. A Geometria na BNCC é apresentada como uma das unidades temáticas que compõem a área de Matemática e, de acordo com esse documento, essa unidade temática envolve a compreensão e a resolução de problemas do mundo físico, além de se relacionar com diversas áreas do conhecimento.

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. (Brasil, 2018, p. 271)

Essa unidade temática reforça a importância das transformações geométricas, principalmente as isometrias, que na BNCC são denominadas como simetrias. De acordo com o documento: “é importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias" (Brasil, 2018, p. 271). Entende-se também que as transformações geométricas dialogam com diversos objetos e áreas do conhecimento.

A BNCC e o CRMG destacam que o estudo das simetrias deve começar nos anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio da manipulação, representação e uso de softwares. Já nos anos finais do Ensino Fundamental, os documentos enfatizam a análise e a construção de figuras geométricas por meio das transformações geométricas, possibilitando o desenvolvimento de conceitos como congruência e semelhança. Dessa forma, a BNCC e o CRMG estão alinhadas com Coxeter e Greitzer (1967), que entendem que as isometrias podem proporcionar a ideia familiar de congruência.

O CRMG utiliza as habilidades descritas na BNCC relacionadas às simetrias, seguindo a mesma organização e estrutura proposta no documento nacional. A primeira habilidade que se destaca é descrita para os alunos do 4° ano do Ensino Fundamental, na qual se propõe que os estudantes reconheçam e construam figuras a partir da isometria de reflexão. Essa habilidade sugere atividades práticas com o uso de malhas quadriculadas e recursos tecnológicos, como softwares de geometria dinâmica.

> (EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria. (Brasil, 2018, p. 293)

Já nos anos finais do Ensino Fundamental, destacam-se duas habilidades relacionadas às isometrias. No 7° ano, são descritas como objetos de conhecimento as isometrias de reflexão, translação e rotação, estabelecendo que os alunos devam reconhecer e construir figuras obtidas por meio dessas transformações. No 8° ano, aborda-se a composição dessas transformações isométricas, ou seja, a realização de duas ou mais transformações sucessivas em uma mesma figura.

> (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. (Brasil, 2018, p. 309)
>
> (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica. (Brasil, 2018, p. 309)

Observa-se que as isometrias, tanto na BNCC quanto no CRMG, são apresentadas como objeto de conhecimento desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até os anos finais. Entende-se que os documentos oficiais contemplam essas transformações geométricas de maneira contínua ao longo dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, propondo a manipulação, representação, construção e análise dessas transformações, utilizando diversos recursos, como a malha quadriculada, instrumentos de desenho, softwares de geometria dinâmica e propondo o vínculo das isometrias com outras áreas do conhecimento.

A partir disso, sob a concepção de que o ensino das isometrias pode oportunizar o ensino da congruência de figuras, em especial dos triângulos, busca-se entender como as habilidades da BNCC e do CRMG contemplam o ensino da congruência no Ensino Fundamental. Ao observar as habilidades descritas por esses documentos que possuem como objeto de conhecimento a congruência de figuras planas e triângulos, percebe-se apenas uma habilidade relacionada à congruência de figuras geométricas planas no 3° ano do Ensino Fundamental: "(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais" (Brasil, 2018, p. 289).

Em relação à congruência de triângulos, uma habilidade do 8° ano é observada, ainda assim é apresentada como mero recurso para a dedução das propriedades dos quadriláteros: "(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos" (Brasil, 2018, p. 315). Dessa forma, não há de maneira explícita, na BNCC, uma habilidade que tem como objeto de conhecimento ensino de congruência de triângulos no Ensino Fundamental.

O CRMG, por sua vez, além das habilidades descritas na BNCC, apresenta uma habilidade específica no 9° ano do Ensino Fundamental que possui como objeto de conhecimento a congruência de triângulos e seus casos de congruência: "(EF09MA29MG) Reconhecer triângulos congruentes a partir dos critérios de congruência." (CRMG, 2018, p. 727). Percebe-se que o CRMG avança em relação à BNCC ao propor o estudo da congruência de triângulos e seus critérios no Ensino Fundamental, mesmo que essa habilidade estabeleça que os alunos devam reconhecer os casos de congruência de triângulos apenas no 9° ano, enquanto tal habilidade aparentemente se mostra fundamental no ano anterior para a dedução das propriedades dos quadriláteros (EF08MA14).

A Geometria nos documentos curriculares, enquanto unidade temática, propõe seu ensino alinhado com a tendência descrita por Lorenzato (1995) e Andrade e Nacarato (2004) ao propor explorar as transformações de figuras geométricas, compreendendo que as isometrias possibilitam a introdução da ideia de congruência. Todavia, ao analisar as habilidades específicas referentes a esse conteúdo, tal situação não se concretiza.

As habilidades descritas na BNCC relacionadas ao ensino de congruência de figuras não dialogam diretamente com as isometrias. A congruência de triângulos é apresentada como uma ferramenta para o ensino das propriedades dos quadriláteros, sem ter uma habilidade específica para esse conteúdo. O CRMG, por sua vez, descreve uma habilidade que propõe o ensino da congruência de triângulos e seus critérios, também sem propor essa articulação com as isometrias.

Tal situação resulta em uma abordagem desses conteúdos nos livros didáticos de maneira independente, sem que as isometrias se relacionem com a congruência de figuras. Santos e Telles (2012) ao analisar o ensino das transformações geométricas nos livros didáticos para os anos iniciais do Ensino Fundamental destacam que, por muitas vezes, os livros de Matemática ao abordar as isometrias deixam de ressaltar aspectos relacionados a congruência entre as figuras.

Ao analisar coleções de livros didáticos nos anos finais do Ensino Fundamental, Rafael e Miranda (2018) apontam que as "noções de congruências de figuras planas, a partir das simetrias, não são desenvolvidas em nenhum dos livros didáticos analisados." (p.46). A lacuna entre as orientações gerais dos documentos e as habilidades neles descritas parece impactar diretamente a abordagem adotada pelos materiais didáticos, contribuindo para o fortalecimento de uma visão fragmentada da Geometria.

Diante disso, entende-se que, para possibilitar que as transformações geométricas auxiliem no desenvolvimento do conceito de congruência, faz-se necessário que a congruência de figuras seja trabalhada de maneira contínua ao longo do Ensino Fundamental e articulada com o ensino das isometrias. Propõe-se, portanto, ao longo deste trabalho, que as habilidades aqui descritas dos documentos oficiais se relacionem, favorecendo o aprendizado dos alunos.

2.3 O Ensino das Isometrias

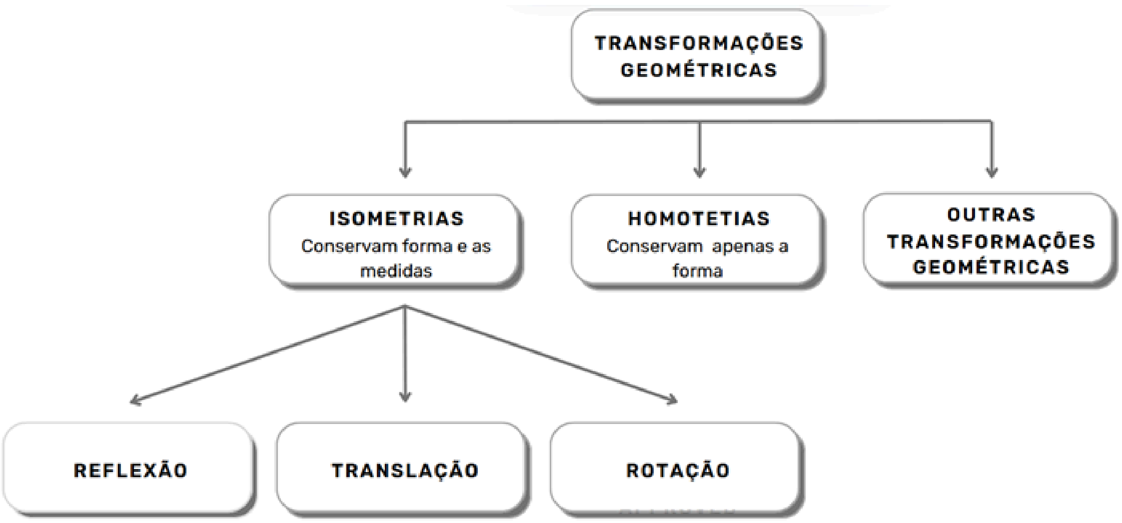
As transformações isométricas possibilitam o desenvolvimento de diversas competências no ensino básico. As isometrias contribuem com a percepção e compreensão de realidades, culturas e expressões artísticas. Tais transformações podem ser percebidas na natureza, na ciência, na arte, no cotidiano, entre outros.

Assim como ocorre com a Geometria, a importância atribuída ao estudo das transformações geométricas no ensino básico tem oscilado em nível mundial (Maia, 2014). Presentes nos currículos oficiais, as isometrias conquistaram um papel relevante no Brasil ao longo dos últimos anos. Segundo Maia (2014), o estudo das isometrias na educação básica favorece o processo de ensino-aprendizagem, promovendo o desenvolvimento do pensamento geométrico. A abordagem desse tema no ensino básico possibilita aos alunos formular e testar conjecturas, desenvolver habilidades espaciais e realizar generalizações, além de promover a integração da Geometria com outras áreas do conhecimento, como a Álgebra (Bansilal; Naidoo, 2012).

As transformações geométricas podem ser compreendidas como aplicações bijetivas entre duas figuras geométricas situadas no mesmo plano ou em planos diferentes. A partir de uma figura original, forma-se outra que é, geralmente, geometricamente congruente ou semelhante à primeira. Assim, as transformações geométricas designam um conjunto de funções que estabelecem uma interseção entre a Álgebra e a Geometria.

No plano, essas transformações englobam um conjunto importante de operações que podem auxiliar o professor no Ensino da Geometria e da Álgebra, além de favorecer a aprendizagem dos alunos. No ensino básico, destacam-se dois grupos principais: as isometrias e as homotetias, como ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Esquema representativo das transformações Geométricas



Fonte: Autores (2025)

As isometrias são transformações no plano que conservam as distâncias entre os pontos. Ao aplicá-las a uma figura geométrica, preservam-se também sua forma e seus ângulos. Dessa maneira, a figura original e sua imagem por isometria são congruentes. Por outro lado, as homotetias preservam a forma e os ângulos, mas não as distâncias, resultando em figuras semelhantes (Bilac, 2008; Rodrigues, 2011; Silva, 2015).

Por meio das isometrias é possível introduzir o conceito de congruência de figuras e pelas homotetias pode-se trabalhar a ideia de semelhança de figuras (Coxeter; Greitzer, 1967). Diante da proposta de ensinar a congruência de triângulos aos alunos do Ensino Fundamental, essa pesquisa se restringirá a trabalhar com as transformações isométricas[1].

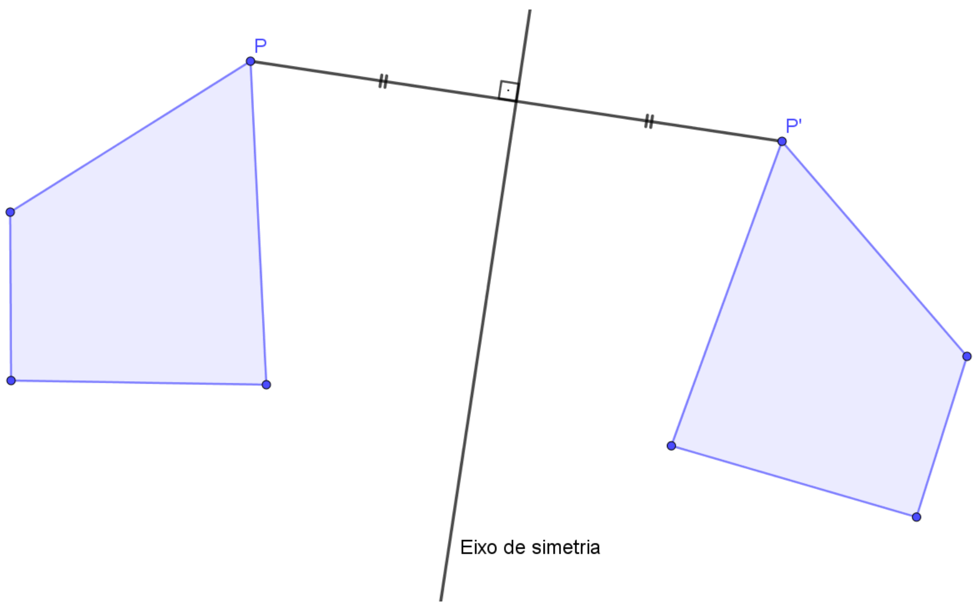
As isometrias contemplam as transformações de reflexão, translação e rotação, são elas:

A) Reflexão

A reflexão ou simetria axial é uma transformação geométrica determinada por um eixo chamado de eixo de simetria ou reflexão. Uma figura é obtida de outra por reflexão em torno do eixo de simetria, como mostra a Figura 2, se cada ponto P da figura original, faz corresponder a um ponto P', tal que:

- O segmento PP' é perpendicular ao eixo de simetria.
- P e P' são equidistantes ao eixo de simetria.

Figura 2 – Reflexão de um quadrilátero



Fonte: Autores (2025)

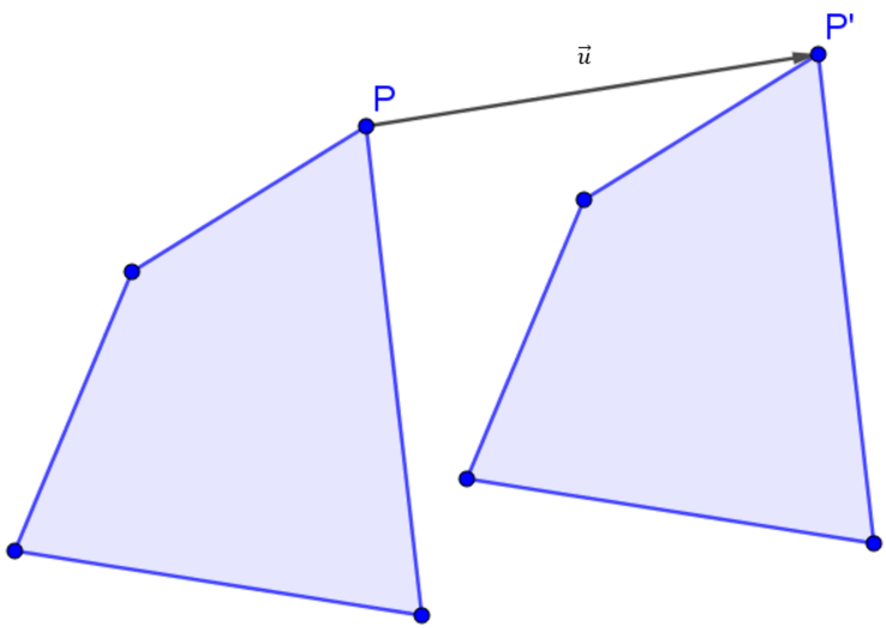
[1] A partir desse momento, quando forem mencionadas as transformações geométricas, estará se fazendo referência especificamente às isometrias.

B) Translação

A translação é uma transformação geométrica determinada por um vetor denominado vetor de translação. A translação associada ao vetor de translação $\vec{u}$, como mostra a Figura 3, é uma transformação que faz corresponder a um dado ponto P um ponto P', tal que:

- $d(PP') = \vec{u}$ (Distância de P à P' é igual a $\vec{u}$)
- As figuras são geometricamente iguais.

Figura 3 – Translação de uma quadrilátero



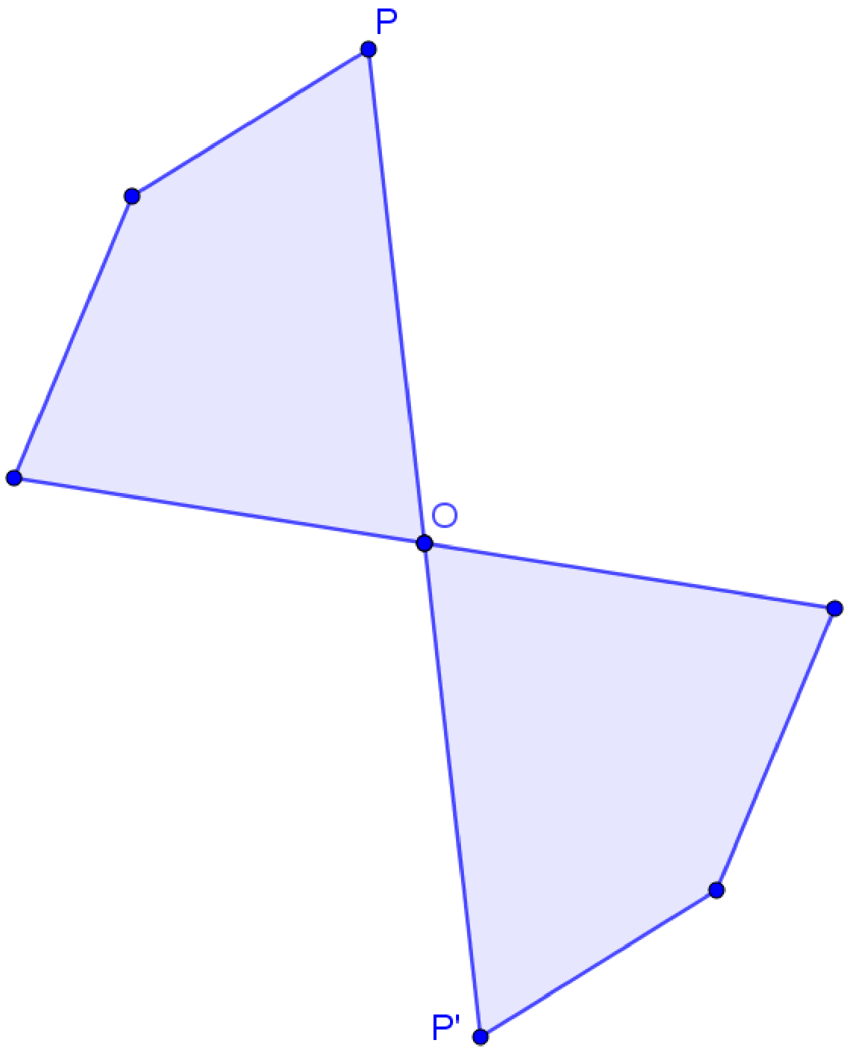
Fonte: Autores (2025)

C) Rotação

A rotação é uma transformação geométrica determinada por um centro de rotação e o ângulo ou amplitude de rotação. No plano, uma rotação de centro O e amplitude α, como mostra a Figura 4, é uma transformação geométrica que a cada ponto P faz corresponder um ponto P' tal que:

- $d(PO) = d(P'O)$ (distância de P até O é igual a distância de P' até O)
- $P\hat{O}P' = \alpha$

Figura 4 – Rotação de um quadrilátero de 180° em torno do ponto O



Fonte: Autores (2025)

Apresentadas as transformações isométricas, sob a perspectiva do Ensino de Geometria, compreende-se que nos currículos do Ensino Fundamental as isometrias são aplicadas e observadas em distintas formas no plano ou no espaço. Percebe-se a aplicação dessas transformações em polígonos, círculos e sólidos geométricos, mas também em desenhos, obras de arte, dobraduras, esculturas, entre outros. Para tal, deixa-se de maneira implícita que essas formas podem ser entendidas como um conjunto de pontos no plano ou no espaço, no qual em cada ponto é aplicada a/uma transformação isométrica.

As isometrias se mostram como importante recurso para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos no Ensino Fundamental. A BNCC enquanto documento curricular brasileiro destaca a importância do aspecto funcional das isometrias. Os estudos das transformações isométricas destacam que, além de estimular a percepção visual dos estudantes, também contribuem para a introdução de diversos conceitos como números, medidas e congruências. Kaleff (1994a) destaca que as simetrias podem ser observadas em outras áreas de conhecimento, possibilitando aos estudantes a contextualização e aplicação de conceitos geométricos em diferentes contextos do mundo físico.

Compartilha-se da concepção de Bastos (2006) de que no Brasil "o hábito de resolver problemas com recurso às transformações geométricas não está muito enraizado". Mashingaidze (2012) afirma que esse conteúdo é considerado difícil tanto para os alunos quanto para os professores do ensino básico. No Brasil, esse cenário se agrava pelos estudos de Caldato e Pavanello (2014) e Costa (2020) que reconhecem que a falta de conhecimento geométrico dos professores ainda se apresenta como um desafio para o Ensino de Geometria. Entretanto, as isometrias são ferramentas que podem ser úteis para a análise de figuras, resolução de problemas, construção de figuras, dedução/argumentação de propriedade e desenvolvimento de conceitos geométricos.

Apesar de as transformações geométricas se consolidarem como uma tendência no Ensino da Geometria e de documentos curriculares, como a BNCC, contemplarem de forma satisfatória esse conteúdo, percebe-se uma maior ênfase no ensino da isometria de reflexão. Nesse sentido, destaca-se a necessidade de que as pesquisas desenvolvidas resultem em propostas que impactem diretamente a prática docente, contribuindo para a elaboração de materiais didáticos adequados para a formação continuada de professores e para a construção de abordagens pedagógicas que favoreçam a efetiva inserção das transformações geométricas no cotidiano escolar.

Ainda, para complementar os debates supracitados, foi realizado no repositório de dissertações do PROFMAT, um levantamento bibliográfico com o objetivo de identificar o que está sendo produzido sobre o Ensino de Geometria no Ensino Fundamental, em particular com o uso de materiais manipuláveis.

O corpus desse levantamento é constituído por 31 pesquisas publicadas no período de 2014 a 2024 e, a partir dos trabalhos mapeados, foram feitas análises de algumas das informações. Dentre as pesquisas analisadas destaca-se que, apenas 5 delas discorrem acerca do ensino das isometrias. Este dado reforça a percepção de que, embora o conteúdo esteja previsto nos documentos curriculares e seja reconhecido por sua importância didática e formativa, ainda há a necessidade de desenvolvimento de novos estudos.

Por fim, a proposta desta pesquisa não se limita ao ensino das transformações isométricas como recurso para o ensino da congruência de triângulos. Ela também busca fundamentar essa abordagem em uma teoria cognitiva que ofereça suporte à construção do conhecimento geométrico. No capítulo que segue, será apresentada essa teoria, cujos princípios orientam a construção do recurso educacional.

3 A TEORIA DE VAN HIELE

A proposta de abordar o Ensino de Geometria Euclidiana Plana nos anos finais do Ensino Fundamental, por meio da elaboração de uma sequência didática sobre isometrias e congruência de triângulos, tem como fundamentação a Teoria de Van Hiele. Dessa forma, neste capítulo, será apresentado o modelo de Van Hiele, com base nos estudos e pesquisas desenvolvidos, principalmente, por Nasser (1991), De Villiers (2010) e Nasser e Sant'Anna (2017).

Diante dessa perspectiva, apresenta-se o modelo de Van Hiele, bem como suas características. Após a exposição da Teoria, serão estabelecidas algumas concepções acerca dos níveis de pensamento geométrico. Por fim, ressaltam-se os desafios e o papel do professor de acordo com a Teoria, destacando as fases de aprendizado.

3.1 O Modelo de Van Hiele

A Teoria de Van Hiele (1957) foi desenvolvida a partir dos trabalhos de Pierre van Hiele e sua esposa, Dina van Hiele-Geldof, na Universidade de Utrecht, na Holanda. No entanto, Dina faleceu logo após a publicação de seus primeiros estudos e Pierre deu continuidade à pesquisa, consolidando a Teoria. Inicialmente, em sua tese de doutorado, Pierre buscou explicar as dificuldades dos alunos na aprendizagem da Geometria Euclidiana Plana. Por outro lado, Dina abordou aspectos relacionados à proposição de atividades e à organização dos conteúdos no Ensino de Geometria.

Embora a Teoria de Van Hiele tenha surgido no final da década de 1950, o modelo desenvolvido pelo casal só passou a ser amplamente divulgado internacionalmente duas décadas depois.

> Com exceção da União Soviética que reformulou seu currículo de geometria nos anos 60 conforme o assim chamado Modelo de van Hiele, este só recentemente vem despertando a atenção internacional. Foi somente em 1976 que um professor americano, Izaak Wirsup, começou a divulgar o Modelo. Ao mesmo tempo, Hans Freudenthal, na Holanda, chamou a atenção sobre o trabalho dos van Hieles em seu livro "Mathematics as an Educational Task" (1973). (Kallef et al., 1994b, p. 25)

No Brasil, observa-se algumas produções acadêmicas voltadas para o modelo dos Van

Hiele. Entre elas, destaca-se o Projeto Fundão, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), que propõe práticas para o Ensino de Geometria sob a perspectiva da Teoria de Van Hiele. O setor de Matemática do Projeto Fundão (PF-Mat)[2] teve início em 1983, sob a coordenação do professor Radial Alves Pereira, um de seus fundadores, e, posteriormente, das professoras Lúcia Tinoco e Lilian Nasser. O projeto busca integrar ensino, pesquisa e extensão em ações voltadas para a melhoria do Ensino de Matemática.

O PF-Mat reúne pesquisadores, professores do Ensino Básico e estudantes de licenciatura para analisar, elaborar e testar práticas docentes voltadas à comunidade escolar. Entre suas principais áreas de atuação, destaca-se a Geometria e o interesse em compreender: *"Por que os alunos apresentam tantas dificuldades na aprendizagem de Geometria?"*. Com base nessa questão, diversas investigações e experimentos em sala de aula foram conduzidos, resultando em livros, cursos e atividades sobre o Ensino de Geometria Euclidiana Plana. Muitos desses projetos foram liderados por Lilian Nasser, seguindo a perspectiva da Teoria de Van Hiele.

Embora as pesquisas sobre o modelo de Van Hiele no Ensino da Geometria, presentes na literatura brasileira, apresentem resultados relevantes e contribuam para a prática docente no Ensino Fundamental e Médio, Caldatto e Pavanello (2014) destacam que muitos professores de Matemática ainda enfrentam dificuldades para trabalhar a Geometria Euclidiana Plana em sala de aula. Essa situação frequentemente resulta na negligência do Ensino de Geometria nas escolas.

Além disso, Lorenzato (1995), Ferreira (2008) e Kaleff (2016) apontam diversos fatores que agravam esse cenário, especialmente a insuficiência de conhecimento geométrico e a falta de formação continuada por parte dos professores. Outro aspecto determinante é a abordagem conteudista predominante nos livros didáticos, que prioriza a memorização[3] de conceitos em detrimento do desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Nos últimos anos, as pesquisas sobre o Ensino de Geometria têm avançado significativamente, mesmo que esses avanços ainda não sejam tão evidentes no ambiente escolar. Costa (2020) apresenta um cenário no qual, embora os estudos sobre o tema tragam contribuições para a Educação Matemática, ainda há um distanciamento entre a pesquisa

[2] Para saber mais, ver em: www.matematica.projetofundao.ufrj.br. Acesso em 01 de fevereiro de 2025.
[3] Apesar dos avanços observados nas obras didáticas em comparação aos livros das décadas de 1980, 1990 e 2000, é importante destacar que os autores e editoras devem seguir as normas e critérios estabelecidos pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), conforme orientações e editais disponíveis no portal oficial do MEC: https://www.gov.br/mec/pt-br/pnld.

acadêmica e a prática em sala de aula. Costa (2020) atribui esse distanciamento à forma como a Geometria é abordada tanto nas Licenciaturas quanto na Educação Básica.

De acordo com a Teoria de Van Hiele, o principal motivo do fracasso no Ensino da Geometria está no fato de que o currículo frequentemente é apresentado em um nível mais avançado do que os alunos conseguem compreender. Nesse contexto, o modelo proposto por Pierre Van Hiele surge como uma alternativa para o Ensino da Geometria Euclidiana Plana, enfatizando a importância do papel do professor e a necessidade de adequar os conteúdos e as estruturas conceituais ao nível de compreensão dos estudantes.

> Os Van Hiele atribuíram a principal razão da falha do currículo de geometria tradicional ao fato de que o currículo era apresentado em um nível mais alto do que o dos alunos, ou seja, eles não conseguiam entender o professor e o professor não conseguia entender o porquê eles não conseguiam entender! (De Villiers, 2010, p. 402)

Como exemplo, pode-se citar o Ensino de Geometria centrado em demonstrações formais e deduções lógicas, sem que os alunos tenham desenvolvido previamente a capacidade de reconhecer, descrever, comparar figuras e analisar propriedades. Os van Hiele, então, propõem níveis de pensamento geométrico, também conhecidos como níveis de Van Hiele. O modelo classifica os alunos com base no nível de pensamento geométrico em que se encontram e define um processo de aquisição de conceitos, relacionando os objetos estudados a uma linguagem adequada a cada nível.

3.2 Os Níveis de Van Hiele

A Teoria de Van Hiele define cinco níveis de pensamento e compreensão geométrica, nos quais os alunos desenvolvem estruturas conceituais que favorecem a aprendizagem. Cada nível possui características próprias e uma linguagem específica, adequadas à forma como os estudantes percebem e interpretam os objetos geométricos.

A partir dos níveis de pensamento, a Teoria de Van Hiele sugere que o conteúdo ensinado deve estar alinhado ao nível de compreensão do aluno. À medida que o professor proporciona experiências educacionais adequadas, os estudantes avançam de forma sequencial pelos níveis de pensamento geométrico.

De Villiers (2010) e Kaleff et al. (1994b) destacam que os alunos não podem realizar saltos entre os níveis, pois as estruturas geométricas assimiladas em um nível são reorganizadas no nível seguinte. Por outro lado, Nasser e Sant’Anna (2017) apontam que é comum observar estudantes começando a adquirir um novo nível sem terem consolidado completamente o anterior.

Além disso, Nasser e Sant'Anna (2017) e De Villiers (2010) afirmam que a transição entre os níveis de Van Hiele está diretamente relacionada a uma aprendizagem adequada e não, necessariamente, à idade dos alunos. Dessa forma, proporcionar experiências apropriadas aos estudantes é o que favorece seu avanço pelos níveis de pensamento geométrico.

> No Japão, por exemplo, os alunos já começam na 1ª série com tangram estendido, além de outras pesquisas de planos e espaços [...]. Isso progride continuamente nos anos seguintes de modo que, na 5ª série, eles já estão lidando formalmente com os conceitos de congruência e semelhança, conceitos que são apresentados apenas nas 8ª e 9ª séries na África do Sul. (De Villiers, 2010, p. 406)

Cada nível apresenta um conjunto próprio de símbolos e um sistema específico de relações, que conectam esses elementos dentro da matemática. Um conceito ou relação que é aceito em um determinado nível pode, no nível subsequente, ser reestruturado e formalizado. À medida que um aluno progride pelos níveis, ele deixa de utilizar uma linguagem informal e de basear suas percepções apenas no concreto, passando a estabelecer relações lógicas e argumentos dedutivos.

Outra característica do modelo é que alunos em diferentes níveis não conseguem se compreender plenamente. Essa propriedade implica que estudantes em níveis distintos desenvolvem concepções diferentes para o mesmo conjunto de figuras, além de utilizarem nomenclaturas e simbologias distintas, de acordo com o nível de pensamento geométrico em que se encontram.

Por exemplo, em um determinado nível, os alunos conseguem reconhecer que um quadrado também é um retângulo, pois compreendem as propriedades compartilhadas entre essas figuras. No entanto, em um nível anterior, essa percepção ainda não está consolidada, e o estudante pode considerar que quadrado e retângulo são classes de figuras completamente distintas.

O Quadro 1, elaborado por Nasser e Sant'Anna (2017), apresenta os níveis de Van Hiele e sua relação com o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Quadro 1- Os níveis de Van Hiele

Nível de Van Hiele	Características	Exemplos
1° Nível (Básico) Reconhecimento	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
2° Nível Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
3° Nível Ordenação	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra. Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que um quadrado é também um retângulo.
4° Nível Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
5° Nível Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais. Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

Fonte: Nasser e Sant'Anna (2017, p. 7)

Durante o aprendizado da Geometria na Educação Básica, destacam-se os quatro primeiros níveis de pensamento propostos por Van Hiele, enquanto o *quinto nível* é geralmente adquirido no Ensino Superior. Nasser (1992) afirma ser incomum um estudante do

Ensino Fundamental atingir o *nível 4*, pois, nesse estágio, apenas os três primeiros níveis costumam ser alcançados, enquanto o *quarto nível* começa a ser desenvolvido no Ensino Médio.

Embora essa categorização seja frequentemente observada em sala de aula, existem casos excepcionais em que alunos do Ensino Fundamental conseguem atingir o *nível 4*, demonstrando habilidade para estabelecer definições formais e justificar propriedades geométricas com base na lógica dedutiva. Da mesma forma, estudantes do Ensino Médio podem alcançar o *nível 5*, adquirindo domínio completo dos sistemas dedutivos.

De acordo com a Teoria de Van Hiele, para que os alunos realizem a transição do *nível 1* para o *nível 2*, é necessário que, além de assimilarem as nomenclaturas geométricas básicas, reconheçam novas relações e aprimorem suas concepções. Somente após a reorganização das estruturas geométricas, os estudantes serão capazes de estabelecer relações lógicas entre as figuras e suas propriedades, atingindo assim o *nível 2*.

Para a transição entre o *nível 2* e o *nível 3*, os alunos devem aprofundar o estudo das propriedades estabelecidas no nível anterior, identificando implicações, descrevendo as classes de figuras com base em um conjunto mínimo de propriedades e realizando deduções informais. Ao alcançar o terceiro nível de pensamento, os alunos são capazes de realizar associações lógicas entre as propriedades das figuras, além de efetuar inclusões e interseções de classes.

Para progredir para o *nível de Dedução Formal*, é necessário que os estudantes sejam capazes de reestruturar as deduções realizadas de forma intuitiva e informal no nível anterior em demonstrações formalizadas. Isso envolve a utilização de axiomas e teoremas previamente estabelecidos, organizando as informações de maneira lógica e sequencial. Por fim, para atingir o último nível, os alunos, além de realizarem demonstrações formais, devem apresentar domínio dos sistemas axiomáticos.

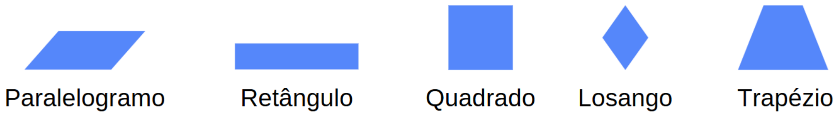
Dessa forma, a Teoria de Van Hiele compreende que o desenvolvimento do pensamento geométrico se inicia pela observação e considerações visuais das formas geométricas e, a partir disso, as percepções estabelecidas são reorganizadas para que o aluno possa progredir ao próximo nível. Em cada nível de pensamento, as estruturas conceituais anteriormente aceitas são reestruturadas, formando um novo conjunto de conceitos e promovendo o aprendizado, até atingir o último nível.

As características apresentadas dos níveis de Van Hiele podem, portanto, serem descritas e exemplificadas da seguinte maneira:

- **Nível 1: Reconhecimento ou Visualização –** Inicialmente, os alunos compreendem as figuras por meio de sua aparência global e de considerações visuais. Nesse estágio, são capazes de reconhecer e reproduzir figuras, como na Figura 5, mas ainda não associam claramente as formas geométricas às suas propriedades. O professor deve proporcionar experiências em que os alunos possam descrever, manipular e construir figuras geométricas.

  Exemplo: Reconhecer e nomear os quadriláteros com base em sua forma global.

Figura 5 – Nomeação dos quadriláteros

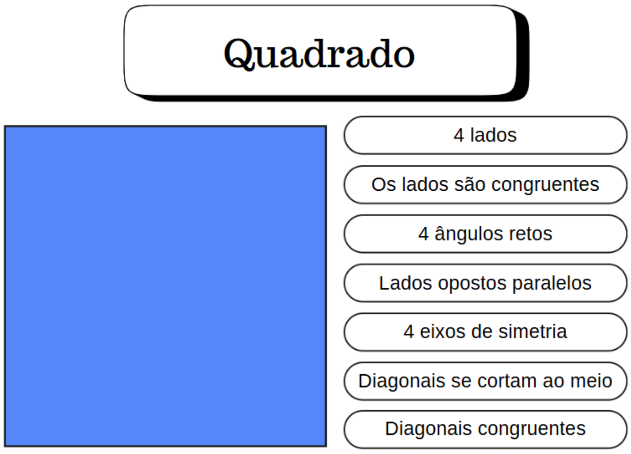


Fonte: Autores (2025)

- **Nível 2: Análise** – Neste estágio, os alunos deixam de priorizar apenas a aparência das figuras e passam a analisar suas propriedades, aprendendo o vocabulário adequado para descrevê-las. No entanto, ainda não identificam as propriedades mínimas que definem uma figura (ou seja, não percebem que uma propriedade pode implicar em outra) e não realizam inclusões de classes. É fundamental proporcionar aos estudantes oportunidades para medir, comparar e descrever, permitindo que identifiquem e compreendam as propriedades geométricas, como apresenta a Figura 6.

  Exemplo: Descrever um quadrado por meio de suas propriedades.

Figura 6 – Propriedades dos quadrados

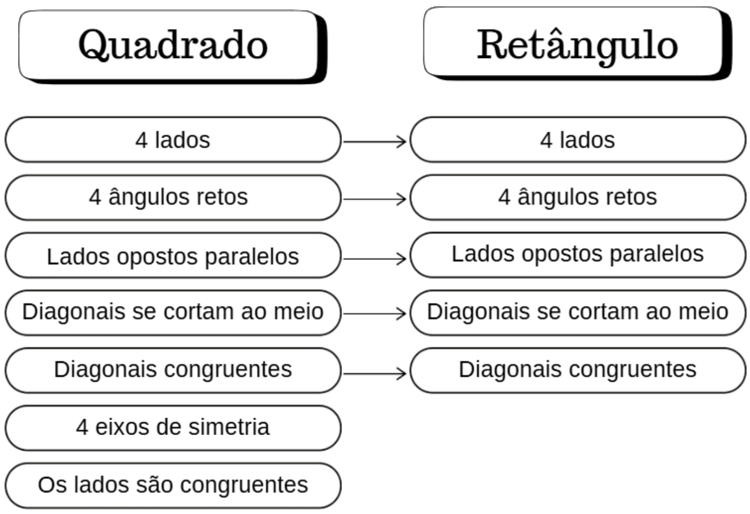


Fonte: Autores (2025)

- **Nível 3: Ordenação ou Dedução Informal** – Os alunos que alcançam este nível são capazes de estabelecer relações entre as propriedades de uma mesma figura e identificar a interseção entre diferentes classes de figuras. Além disso, podem desenvolver pequenas deduções lógicas informais, embora ainda não compreendam completamente o papel dos axiomas nem consigam realizar provas formais. O professor deve proporcionar oportunidades para que os estudantes relacionem as propriedades trabalhadas no *nível 2*, como mostra a Figura 7, identificando implicações e inclusões de classes.

  Exemplo: Identificar que todo quadrado também é um retângulo (inclusão de classes).

Figura 7 – Comparação entre as propriedades dos quadrados e retângulos



Fonte: Autores (2025)

- **Nível 4: Dedução ou Dedução Formal –** Neste estágio, os estudantes são capazes de deduzir propriedades das figuras a partir de outras já conhecidas. Além disso, compreendem o papel dos axiomas, teoremas e provas, embora ainda não dominem completamente os sistemas dedutivos. O professor deve proporcionar oportunidades para que os alunos identifiquem os dados fornecidos e o que deve ser provado, compreendam definições formais e desenvolvam demonstrações.

  Exemplo: Demonstrar formalmente deduções realizadas no *nível 3,* como provar que, se os lados opostos de um quadrilátero são paralelos, então suas diagonais se cortam ao meio.

- **Nível 5: Rigor –** No último nível, os alunos desenvolvem um entendimento completo dos sistemas dedutivos, alcançando um alto grau de formalização e rigor matemático. Eles são capazes de estabelecer e demonstrar teoremas, compreendendo as relações entre definições, além de determinar e descrever conjuntos de axiomas e teoremas de maneira abstrata e estruturada.

Exemplo: Estabelecer e demonstrar teoremas dentro de uma geometria finita, analisando suas implicações dentro do sistema axiomático adotado.

Apresentados os níveis de Van Hiele, entende-se que a identificação dos níveis de pensamento geométrico dos alunos em sala de aula é fundamental. Em uma mesma turma, os estudantes podem se encontrar em diferentes níveis de desenvolvimento. O professor, conhecendo a teoria, poderia identificar melhor o nível dos seus alunos, planejando aulas que poderiam facilitar o desenvolvimento dos estudantes, seja nos níveis mais simples ao mais avançado.

O progresso entre os níveis, muitas vezes, ocorre ao longo de meses e resulta de um trabalho contínuo junto aos estudantes. Fatores como a experiência do professor e a escolha adequada das atividades desempenham um papel essencial no avanço dos alunos. Estratégias didáticas bem planejadas, alinhadas ao nível de compreensão dos estudantes, favorecem a transição entre os níveis de pensamento geométrico, contribuindo para a aprendizagem dos alunos.

3.3 As Fases de Aprendizado

Como já foi mencionado, segundo o modelo de Van Hiele, as dificuldades enfrentadas pelos alunos nas aulas de Geometria decorrem, principalmente, do fato de o conteúdo ser frequentemente apresentado em um nível mais avançado do que o estágio de compreensão dos estudantes. De acordo com Nasser e Sant'Anna (2017), os livros didáticos costumam exigir raciocínio correspondente aos níveis de ordenação e dedução formal, enquanto grande parte dos alunos ainda se encontra em níveis mais iniciais. Tal situação aliada a falta de formação continuada dos professores ajuda no insucesso do Ensino da Geometria na Educação Básica.

Diante desses desafios, percebe-se que o professor de Matemática, muitas vezes, se encontra em uma posição que limita sua prática em sala de aula. Por um lado, o livro didático e os recursos disponíveis não estão alinhados ao nível de compreensão dos estudantes. Por outro, o docente não dispõe dos materiais necessários e, frequentemente, não se sente preparado para elaborar recursos didáticos que se adequem ao nível de pensamento de seus alunos.

Nesse contexto, entende-se que o professor de matemática desempenha um papel central no Ensino da Geometria. De acordo com o modelo de Van Hiele, é fundamental que o docente identifique o nível de pensamento dos alunos para oferecer práticas adequadas e utilizar um vocabulário apropriado. Além disso, segundo Lindquist e Shulte (1998) e Nasser e Sant'Anna (2017), cabe ao professor selecionar cuidadosamente as atividades a serem trabalhadas em sala de aula, de modo a promover o avanço gradual dos estudantes pelos níveis de pensamento geométrico.

Destaca-se, portanto, que embora a Teoria de Van Hiele ofereça um modelo para o desenvolvimento do pensamento geométrico, identificar os níveis em que os alunos se encontram e planejar atividades adequadas para cada nível de pensamento nem sempre é uma tarefa simples para o professor de matemática. Tais atividades, além de propiciar a aquisição do nível trabalhado deve, sempre que possível, preparar os estudantes para aprendizagens futuras.

Com a finalidade de orientar o docente no Ensino de Geometria, a Teoria de Van Hiele propõe cinco fases de aprendizagem, nas quais os alunos devem percorrer para progredir de nível, são elas:

- **Informação:** O professor deve mediar conversas a respeito do conteúdo estimulando a formulação de perguntas, a investigação pelos alunos e introduzindo o vocabulário.
- **Orientação dirigida:** O professor deve selecionar e ordenar metodicamente os materiais com o objetivo de os alunos se familiarizar com as estruturas conceituais do nível de pensamento.
- **Explicação:** Os alunos refletem sobre as experiências prévias, expressam e modificam seu ponto de vista. Nesta fase, o papel do professor é o de mediar as atividades e garantir o uso da linguagem correta.
- **Orientação livre:** Os alunos investigam problemas abertos e com mais de uma solução. Nesta fase, eles devem pensar soluções para problemas complexos.
- **Integração:** Os alunos revisitam o que foi estudado, produzindo uma síntese e uma ideia mais ampla do conteúdo.

As fases de aprendizado auxiliam os estudantes e guia a prática do professor durante o Ensino da Geometria. Dessa forma, ao passar por todas essas fases, espera-se que os alunos estejam prontos para progredir para o próximo nível e vivenciá-las novamente.

Nesse sentido, elaborou-se uma sequência didática tendo por base o desenvolvimento do pensamento geométrico de acordo com a Teoria de van Hiele, assim como as fases de aprendizagem supracitadas.

4 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Com o objetivo de abordar o ensino da congruência de triângulos por meio das transformações isométricas, considerando e percorrendo os diferentes níveis de pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele junto aos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, foi desenvolvida uma sequência didática como Recurso Educacional. O Recurso Educacional elaborado na pesquisa explora as transformações isométricas com o objetivo de introduzir o conceito de congruência de triângulos com base nessas transformações.

A sequência didática foi elaborada a partir de conteúdos curriculares da BNCC e do CRMG, que estabelecem que as transformações geométricas possibilitam o desenvolvimento do conceito de congruência. Para essa finalidade, busca-se trabalhar as habilidades descritas nos documentos oficiais de maneira estruturada e articulada entre os objetos de conhecimento, respaldados pela Teoria de Van Hiele.

Dessa forma, este capítulo relata o processo de planejamento e aplicação da sequência didática. São apresentados sua proposta, seus objetivos, suas concepções teóricas, os objetivos específicos de cada atividade e a metodologia de aplicação.

4.1 Proposta da Sequência Didática

Para o desenvolvimento do Recurso Educacional, adotou-se a perspectiva de sequência didática conforme proposta por Zabala (1998), que a define como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (p. 18). Essa definição destaca a intencionalidade e a organização das ações pedagógicas, permitindo que o processo de ensino-aprendizagem se desenvolva de forma orientada por objetivos claros e previamente estabelecidos.

Essa concepção compreende a sequência didática como um instrumento pedagógico que incorpora as complexidades da prática docente, estruturando-se em três fases fundamentais: (1) o planejamento, em que se definem os objetivos, conteúdos e estratégias; (2) a aplicação, momento em que as atividades são desenvolvidas com os alunos; (3) a avaliação, que permite analisar os resultados da aprendizagem e o alcance dos objetivos propostos.

A sequência didática, disponível em Recurso Educacional, foi elaborada com o objetivo de apresentar aos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental uma proposta de Ensino de Geometria. Essa proposta tem como foco introduzir o conceito de congruência de triângulos por meio das isometrias (reflexão, translação e rotação) e de suas composições. Em relação às habilidades descritas na BNCC, destacam-se:

> (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. (Brasil, 2018, p. 309)
>
> (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica. (Brasil, 2018, p. 309)

Além das habilidades presentes na BNCC, também adota-se a habilidade EF09MA29MG do CRMG: "Reconhecer triângulos congruentes a partir dos critérios de congruência." (Minas Gerais, 2018, p. 727).

Com a proposta de trabalhar esses conteúdos e habilidades de maneira articulada, estabelecendo as isometrias como ferramenta para o ensino da congruência, compartilha-se da concepção de Coxeter e Greitzer (1967), que entendem que as isometrias proporcionam a ideia familiar de congruência. Para isso, adotou-se a seguinte definição para congruência entre triângulos:

"Dois triângulos são congruentes se um pode ser obtido a partir do outro por uma transformação isométrica ou por uma combinação delas."

Tal abordagem busca estabelecer uma alternativa à maneira com que os livros didáticos[4] apresentam a congruência de triângulos, nos quais definem que dois triângulos são congruentes quando possuem lados e ângulos correspondentes congruentes, sem a necessidade de analisar suas propriedades. As habilidades descritas na BNCC relacionadas ao ensino de congruência de figuras também não dialogam diretamente com as isometrias, o que

[4] Essa compreensão resulta da experiência do professor-pesquisador em sala de aula no Ensino Fundamental, observando que os livros didáticos frequentemente abordam os temas de maneira dissociada, sem articular a definição de congruência com as transformações isométricas, além dos dados expostos no capítulo 2.

contribui para uma abordagem desarticulada do conteúdo. Na definição estabelecida na sequência didática, propõe-se a análise das características de dois triângulos, possibilitando a compreensão de que eles serão congruentes quando possuem lados e ângulos correspondentes com a mesma medida.

A concepção da sequência didática foi orientada a partir dos seguintes objetivos específicos:

- Propiciar aos alunos a experiência de observar, manipular e realizar as transformações isométricas por meio de dobraduras, recortes e representações por escrito;
- Oportunizar a realização de medições e comparações, a fim de identificar propriedades comuns das transformações isométricas;
- Trabalhar o conceito de congruência de figuras a partir das propriedades das isometrias e suas composições;
- Evidenciar as propriedades das figuras congruentes, com ênfase nos triângulos;
- Identificar implicações, permitindo a dedução dos casos de congruência.

As atividades da sequência foram planejadas de modo que, além de promoverem a aquisição do nível de pensamento geométrico trabalhado em cada atividade, também ofereçam suporte aos alunos durante a realização, contribuindo para a construção dos conceitos geométricos. Para isso, a sequência didática foi ordenada e suas atividades selecionadas de modo que os alunos possam percorrer as fases de aprendizado expressas no capítulo anterior.

A sequência didática foi organizada em oito atividades, sendo cinco voltadas para transformações isométricas e três dedicadas à congruência de triângulos. As tarefas relacionadas às isometrias contemplam os níveis de Van Hiele de *reconhecimento* e *análise*, além de alguns aspectos do *nível de ordenação*. Já nas propostas que envolvem a congruência de figuras e triângulos, são trabalhados os três primeiros níveis de pensamento geométrico.

Segundo Bansilal e Naidoo (2012), "Embora os níveis de pensamento de Van Hiele se concentrem na Geometria, eles são valiosos ao trabalhar com a Geometria das transformações, que trata da transformação de figuras geométricas." Dessa forma, os níveis de Van Hiele podem contribuir para superar as dificuldades no aprendizado das isometrias relatadas por Mashingaidze (2012). Com a consolidação do aprendizado das transformações isométricas, foram elaboradas atividades de modo a possibilitar a transição entre as transformações isométricas e o conceito de congruência.

Durante a elaboração das atividades, buscou-se apresentar os conteúdos de maneira que a aquisição dos conceitos ocorresse de forma progressiva e interligada, de modo que os conhecimentos previamente abordados contribuíssem para a assimilação de novos conceitos. Além disso, espera-se que a sequência das atividades esteja alinhada ao nível de compreensão dos alunos[5], promovendo uma evolução gradativa entre os níveis de Van Hiele. Assim, entende-se que proporcionar experiências adequadas aos estudantes é essencial para favorecer o aprendizado.

As atividades foram estruturadas para que o professor desempenhe um papel ativo, incentivando discussões sobre os objetos geométricos e os conceitos abordados. O docente deve estimular os alunos a compartilharem suas percepções, formularem conjecturas e elaborarem questionamentos sobre o conteúdo. Além disso, é fundamental que o professor introduza o vocabulário adequado e incentive seu uso durante a realização das atividades.

Um dos aspectos relevantes para o desenvolvimento da sequência didática foi a escolha da linguagem e sua progressiva formalização ao longo das atividades. Os conceitos e nomenclaturas empregados são introduzidos gradualmente, favorecendo sua assimilação pelos estudantes. Acredita-se que, ao realizarem as atividades, os alunos passem a utilizar os termos e conceitos próprios da Geometria em detrimento de uma linguagem informal.

Outro ponto considerado na elaboração, seleção e organização das atividades foi a transição entre os níveis de Van Hiele. Buscou-se fornecer subsídios para que os alunos avançassem entre os níveis de forma espontânea e estruturada. À medida que transitam entre os estágios de pensamento geométrico, espera-se que reorganizem suas estruturas conceituais previamente adquiridas, formalizando-as.

Embora se reconheça que os alunos não podem realizar saltos entre os níveis, concorda-se com a perspectiva de Nasser e Sant’Anna (2017) de que é possível iniciar a construção de um novo nível sem ter concluído completamente o anterior. Dessa forma, as atividades propostas, além de alinhadas a um determinado nível de Van Hiele, podem favorecer a formação de estruturas conceituais características do nível subsequente.

[5] Para auxiliar o professor na identificação do nível de pensamento geométrico dos alunos, existem os testes de Van Hiele que tem como objetivo diagnosticar o estágio de compreensão geométrica em que cada estudante se encontra.

Por fim, a sequência didática desenvolvida não apenas incorporou as características do modelo de Van Hiele, mas também foi planejada para permitir que os alunos avancem gradualmente pelas diferentes fases de aprendizado.

4.2 O Design da Sequência Didática

Com os objetivos estabelecidos e a proposta fundamentada, a sequência didática foi dividida em 8 atividades. A elaboração de cada atividade foi orientada por um dos níveis de Van Hiele e suas fases de aprendizado.

A seguir são apresentados os objetivos específicos de cada uma das atividades:

A) ATIVIDADE I - REFLEXÃO DE FIGURAS PLANAS

Correspondendo ao *nível de Reconhecimento* da Teoria de Van Hiele, a primeira atividade aborda as reflexões de figuras planas. Ela foi desenvolvida de modo a proporcionar a observação, manipulação e realização das reflexões por meio de dobraduras, recortes e representações escritas.

Os objetivos específicos da atividade são:

- **Reconhecer** a transformação isométrica por reflexão;
- **Visualizar e representar** os eixos de simetria nas figuras planas;
- **Determinar** os pontos correspondentes ou simétricos das figuras obtidas por meio da reflexão;
- **Realizar** a transformação de reflexão a partir do eixo de simetria.

B) ATIVIDADE II - TRANSLAÇÃO DE FIGURAS PLANAS

A segunda atividade contempla o *nível de Reconhecimento* da Teoria de Van Hiele, a atividade explora as translações de figuras planas. Sua estrutura foi planejada para ofertar vivências a partir da visualização e manipulação das translações, utilizando recursos como dobraduras, recortes e representações da transformação trabalhada.

Os objetivos específicos da atividade são:

- **Reconhecer** a transformação isométrica por translação;
- **Visualizar e representar** os vetores de translação nas figuras planas;
- **Determinar** os pontos correspondentes das figuras obtidas por meio da translação;
- **Realizar** a transformação de translação a partir do vetor de translação.

C) ATIVIDADE III - ROTAÇÃO DE FIGURAS PLANAS

Seguindo no *nível de Reconhecimento* da Teoria de Van Hiele, a atividade aborda as rotações de figuras planas. Sua estrutura foi planejada para proporcionar experiências por meio da visualização e manipulação das rotações, utilizando recursos como dobraduras, recortes e representações gráficas da transformação estudada.

Os objetivos específicos da atividade são:

- **Reconhecer** a transformação isométrica por rotação;
- **Visualizar e representar** os centros e ângulos de rotação nas figuras planas;
- **Determinar** os pontos correspondentes das figuras obtidas por meio da rotação;
- **Realizar** a transformação de rotação a partir do centro e do ângulo de rotação.

D) ATIVIDADE IV - COMPOSIÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS

A quarta atividade aborda a composição de isometrias, proporcionando a observação e realização das transformações isométricas por meio de recortes e representações escritas. Desenvolvida sob a perspectiva do *nível de Reconhecimento*, a proposta inclui atividades que, em geral, oferecem mais de um caminho para a resolução.

Os objetivos específicos da atividade são:

- **Reconhecer** as transformações isométricas envolvidas ao realizar a composição de isometrias;
- **Visualizar e representar** os elementos constituintes da composição de isometrias;
- **Realizar** composições de transformações isométricas.

E) ATIVIDADE V - PROPRIEDADES DAS TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS

A quinta atividade formaliza as propriedades comuns das isometrias e corresponde ao *nível de Análise* da Teoria. Nessa etapa, são oportunizadas medições e comparações, permitindo a análise das propriedades das transformações isométricas. Além disso, são introduzidos os conceitos apropriados para descrever essas propriedades.

Os objetivos específicos da atividade são:

- **Analisar** a correspondência entre os lados e os ângulos das figuras obtidas por meio das transformações isométricas;
- **Introduzir e construir** o conceito de congruência para medidas de comprimento e ângulos;

- **Determinar** propriedades de conservação de forma e medidas das figuras obtidas por meio das transformações isométricas.

F) ATIVIDADE VI - CONGRUÊNCIA DE FIGURAS PLANAS

Correspondendo ao *nível de Reconhecimento*, a sexta atividade introduz o conceito de congruência de figuras planas. Foi elaborada de modo a estabelecer esse conceito a partir da análise das propriedades das isometrias.

Os objetivos específicos da atividade são:

- **Reconhecer** figuras congruentes por meio das isometrias;
- **Visualizar e representar** os lados e ângulos correspondentes das figuras congruentes;
- **Determinar** medidas dos lados e ângulos de figuras congruentes.

G) ATIVIDADE VII - CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

A sétima atividade formaliza a compreensão de que duas figuras são congruentes quando possuem lados e ângulos correspondentes de mesma medida, apresentando essas características como propriedades. Essa etapa corresponde ao *nível de Análise*, na qual são introduzidos os conceitos e notações apropriados para descrever a congruência de triângulos.

Os objetivos específicos da atividade são:

- **Analisar** a congruência de triângulos a partir dos lados e ângulos correspondentes;
- **Introduzir** a notação de congruência para triângulos;
- **Determinar** propriedades de triângulos congruentes.

H) ATIVIDADE VIII - CASOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

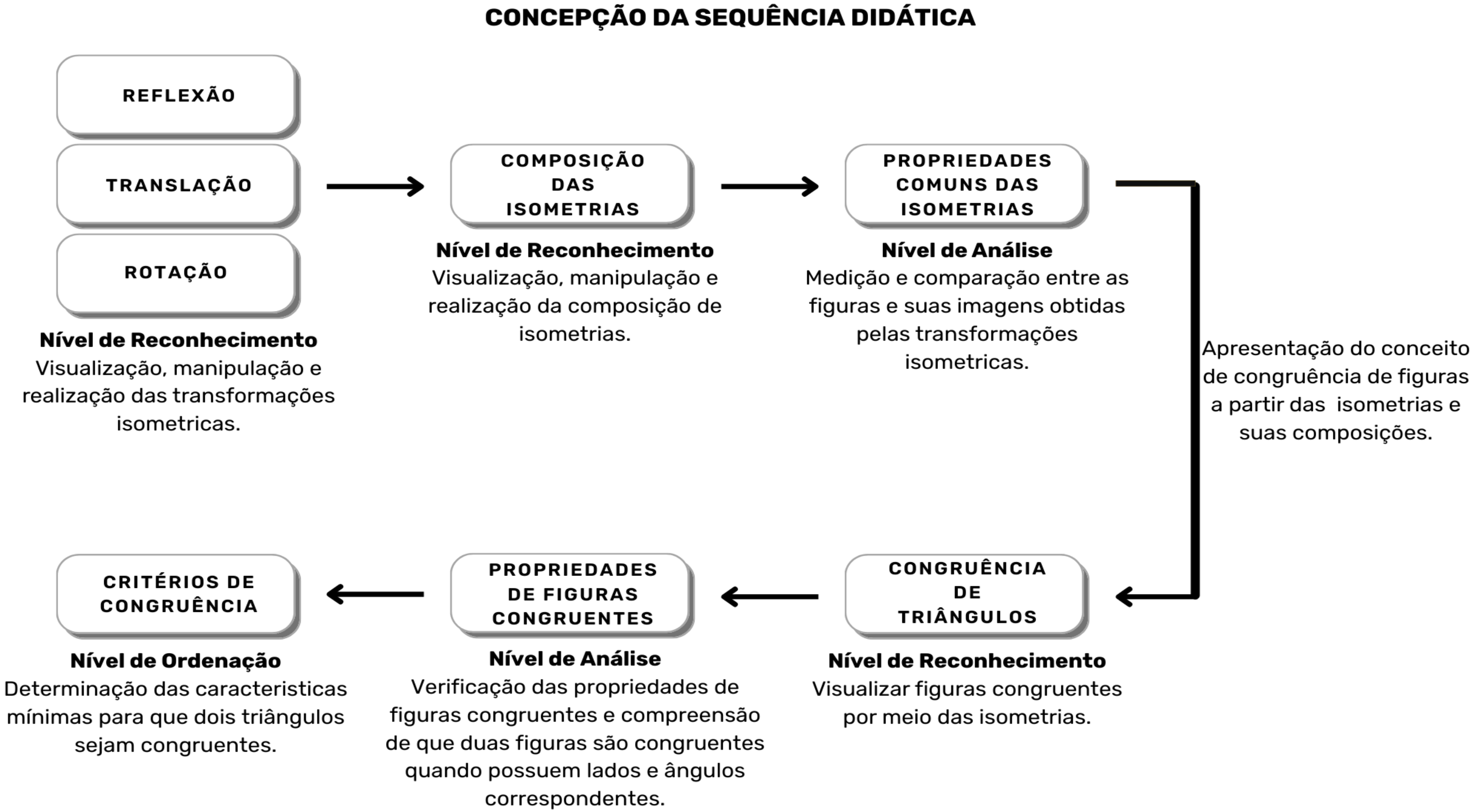
A oitava atividade apresenta os casos de congruência de triângulos. Correspondendo ao *nível de Ordenação*, ela define as características mínimas necessárias para que dois triângulos sejam considerados congruentes. Sua estrutura foi planejada para proporcionar experiências por meio de medições e deduções informais.

Os objetivos específicos da atividade são:

- **Ordenar** os lados e ângulos para estabelecer quando os triângulos estão bem determinados;
- **Estabelecer** os três primeiros casos de congruência de triângulos;
- **Deduzir** informalmente o quarto caso de congruência.

Para alcançar os objetivos traçados, utilizando-se do referencial teórico, a sequência didática foi organizada conforme a Figura 8 que apresenta um esquema que ilustra sua concepção, evidenciando a progressão dos níveis de pensamento geométrico segundo o modelo de Van Hiele. O esquema também mostra a ordenação das atividades, organizada de forma a possibilitar, por meio do trabalho com as isometrias, a construção e o desenvolvimento do conceito de congruência de triângulos.

Figura 8 – Esquema representativo da concepção da sequência didática



Fonte: Autores (2025)

4.3 Aplicação da Sequência Didática

Elaborada a sequência didática, a mesma foi aplicada a alunos do 8º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública localizada na região metropolitana de Belo Horizonte. Foram selecionadas três turmas em que o pesquisador também atuava como professor regente, totalizando 92 alunos frequentes.

A aplicação da sequência didática seguiu padrões de conduta e ética por parte dos pesquisadores (Resolução CNS 466/2012)[6], sendo requisitados os Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) (Apêndice A) e o Termo de Anuência Institucional (TAI) (Apêndice B) onde a aplicação foi desenvolvida.

De posse do TALE e do TAI, a aplicação da sequência didática mostrou que a proximidade dos alunos com o pesquisador facilitou o processo de aplicação da sequência didática, permitindo que os estudantes se sentissem à vontade para participar das discussões e realizar as atividades. Além disso, possibilitou minimizar a influência de fatores externos que poderiam interferir na coleta de dados, além do pesquisador já estar imerso no ambiente escolar.

A aplicação da sequência didática ocorreu ao longo de oito encontros que eram realizados duas ou três vezes por semana, cada um com duração de uma hora, distribuídos entre o mês de novembro e o início de dezembro de 2024. Em cada encontro, trabalhou-se uma das atividades da sequência que foram entregues e recolhidas pelo próprio pesquisador.

De modo geral, o tempo disponibilizado foi adequado para a realização da maioria das atividades. No entanto, as atividades 1 e 3 não puderam ser concluídas dentro do tempo previamente estipulado. Diante dessa situação, o pesquisador permitiu que os alunos finalizassem essas atividades em casa e as entregassem no encontro seguinte. Para as demais atividades, o tempo planejado revelou-se suficiente, permitindo que fossem realizadas integralmente durante os encontros.

Os alunos realizaram as atividades de forma individual, mas o diálogo entre eles durante a realização das tarefas foi incentivado, pois compreende-se que a troca de ideias

---

[6] A Resolução CNS 466/2012 estabelece diretrizes e normas para pesquisas envolvendo seres humanos, assegurando a proteção dos direitos dos participantes e a ética na condução científica. Para saber mais, ver em: https://www.gov.br/conselho-nacional-de-saude/pt-br/atos-normativos/resolucoes/2012/resolucao-no-466.pdf/view. Acesso em: 26 de maio de 2025.

contribui significativamente para o desenvolvimento do pensamento geométrico. As turmas foram instruídas a seguir a ordem estabelecida para a execução das tarefas, de modo que os conceitos abordados em cada item pudessem contribuir para a resolução dos itens seguintes. Essa abordagem está alinhada à Teoria de Van Hiele, que enfatiza a importância da seleção e ordenação do material apresentado aos alunos.

Em alguns momentos durante a aplicação, o professor-pesquisador precisou orientar os alunos para garantir que as atividades fossem executadas de acordo com a fundamentação teórica e as instruções estabelecidas para a elaboração da sequência didática. No início de cada atividade, buscou-se motivar discussões sobre os conteúdos a serem trabalhados, além de estimular os estudantes a exporem suas percepções e conjecturas sobre o conteúdo e o vocabulário apresentados. Além disso, em algumas atividades que exigiram a manipulação e construção de figuras, foi necessário o suporte e auxílio por parte do professor-pesquisador.

No próximo capítulo, apresenta-se uma análise de caráter descritivo e interpretativo do desenvolvimento da sequência didática.

5 ANÁLISE DESCRITIVA: UM OLHAR PARA A PERCEPÇÃO DOS SUJEITOS DA PESQUISA

Realizada a aplicação, os alunos responderam a um questionário estruturado, elaborado por meio do Google Forms, para expressar suas percepções sobre a sequência didática. As percepções do professor-pesquisador acerca do desenvolvimento das atividades foram registradas em um diário de bordo. Dessa maneira buscou-se confrontar as percepções do professor-pesquisador com as dos alunos com a finalidade das análises das atividades não serem induzidas apenas pela percepção do pesquisador. Assim, o questionário teve como objetivo fornecer dados para a pesquisa e auxiliar na análise dos protocolos e dos resultados obtidos com a aplicação. Ao longo deste capítulo, serão apresentadas as análises das respostas do questionário.

5.1 O Questionário

Com o objetivo de verificar as percepções dos participantes sobre a sequência didática realizada e os conteúdos abordados, foi elaborado um questionário (Apêndice D) composto por 11 questões objetivas. Algumas dessas questões solicitavam ao aluno que justificasse ou explicasse sua resposta. Além disso, ao final do questionário, havia um campo aberto para que os participantes pudessem inserir informações, comentários ou observações que considerassem relevantes, de forma mais livre, possibilitando uma manifestação sobre a atividade como um todo.

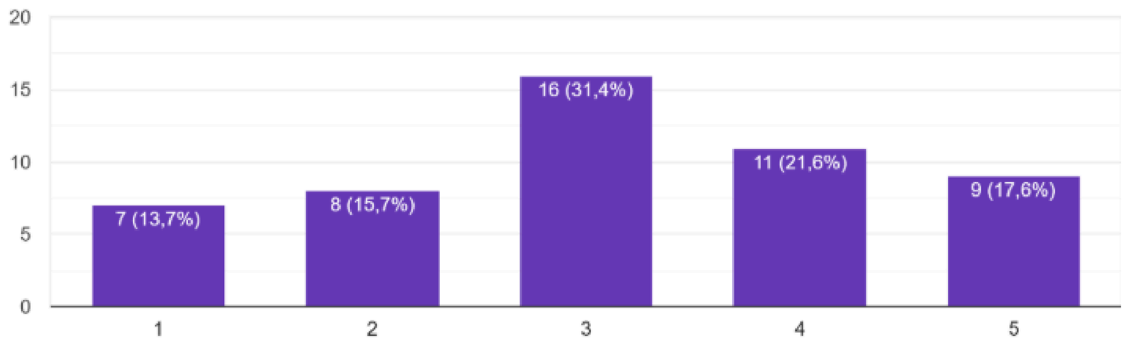
O questionário foi aplicado em sala de aula, logo após a conclusão da sequência didática, sendo disponibilizado por meio de um QR Code, de forma que os alunos pudessem acessá-lo diretamente por seus celulares, além disso, também foi fornecido um computador para os alunos que não tinham acesso ao celular ou a internet. O questionário foi disponibilizado a todos os 92 estudantes que participaram das atividades, sendo aplicado ao final do ano letivo. Contudo, em virtude do elevado índice de ausências nesse período do ano, apenas 51 alunos o responderam. O tempo destinado ao preenchimento foi de aproximadamente 10 minutos, e as respostas obtidas foram submetidas à análise.

5.2 Análise descritiva das respostas dos alunos

Os gráficos a seguir apresentam os resultados quantitativos das respostas ao questionário, complementados pela análise descritiva das justificativas fornecidas e da questão aberta.

Gráfico 1 – Resultados da questão 1

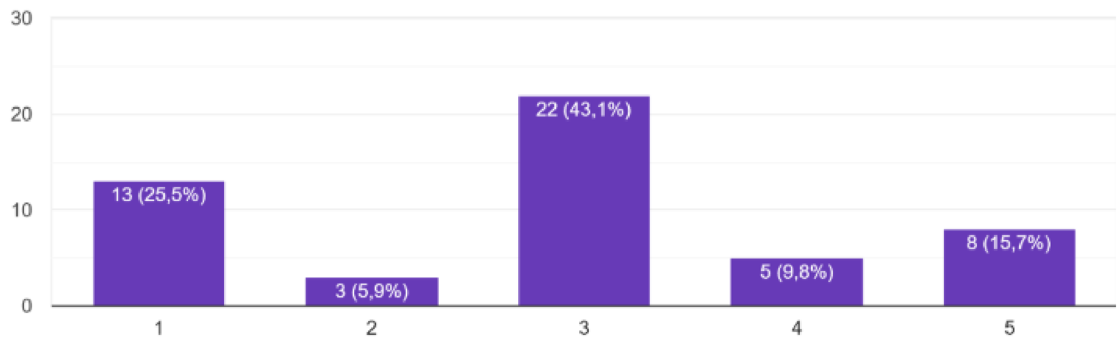
Questão 1) Os tópicos que estudamos ao longo da sequência de atividades são assuntos tratados na área de Geometria Plana. Em uma escala de 1 a 5, como você classificaria seu interesse por Geometria.



Fonte: Autores (2025)

Gráfico 2 – Resultados da questão 2

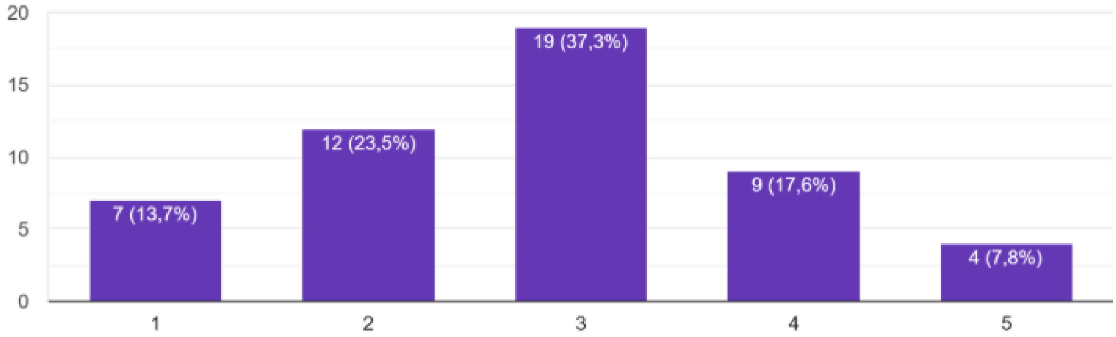
Questão 2) Ainda na escala de 1 a 5, como você classificaria sua facilidade em aprender tópicos de Geometria?



Fonte: Autores (2025)

Gráfico 3 – Resultados da questão 3

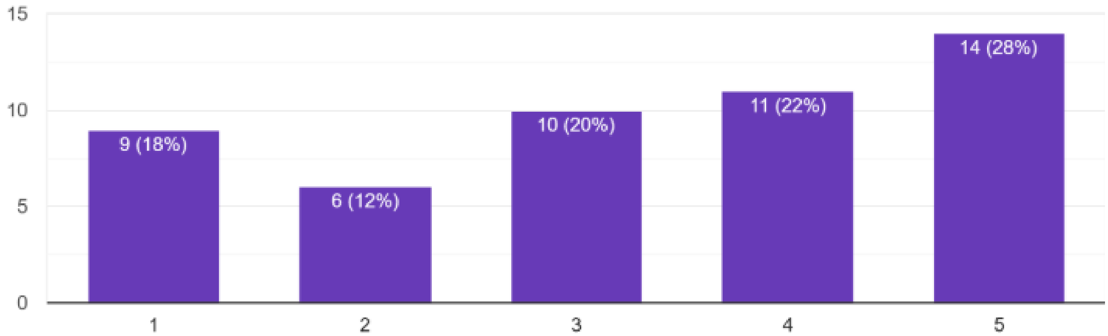
Questão 3) Em relação aos assuntos tratados nas atividades realizadas, em uma escala de 1 a 5, como você classificaria sua dificuldade em realizar as tarefas.



Fonte: Autores (2025)

Gráfico 4 – Resultados da questão 4

Questão 4) Em uma escala de 1 a 5, marque o quanto você gostou de realizar as atividades.

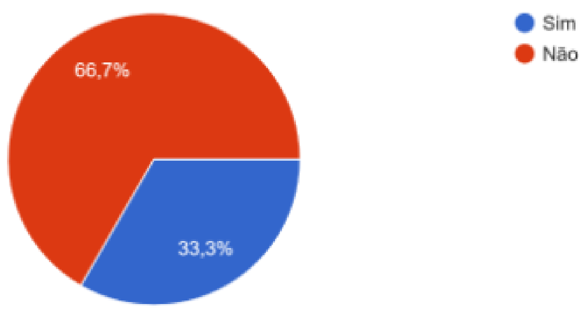


Fonte: Autores (2025)

Ao analisar as respostas das quatro primeiras perguntas, percebe-se que, embora a maioria dos alunos tenha demonstrado gostar de realizar as atividades, também enfrentou dificuldades para concluí-las. Tal situação pode estar relacionada à perspectiva de Bastos (2006), que ressalta que as transformações isométricas ainda são pouco exploradas no ensino de Geometria. Além disso, outro fator que pode contribuir para essas dificuldades é a forma como as isometrias são apresentadas aos alunos ao longo dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, muitas vezes sem a devida ênfase em aspectos fundamentais, como a congruência entre as figuras envolvidas nas transformações, o que compromete a compreensão de características, como a conservação de ângulos, medidas e distâncias.

Gráfico 5 – Resultados da questão 5

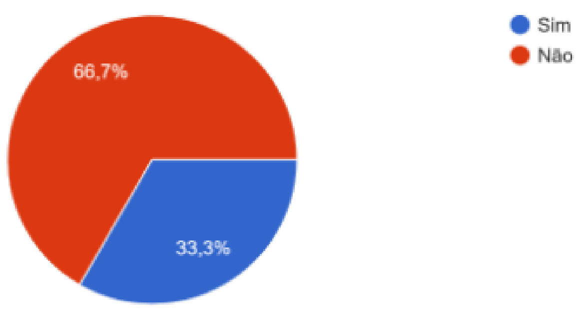
Questão 5) Você já havia estudado as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) anteriormente?



Fonte: Autores (2025)

Gráfico 6 – Resultados da questão 6

Questão 6) No desenvolvimento das atividades sobre as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação), você conseguiu perceber alguma relação dos conceitos trabalhados com outras áreas ou até mesmo outros assuntos trabalhados anteriormente na Geometria?

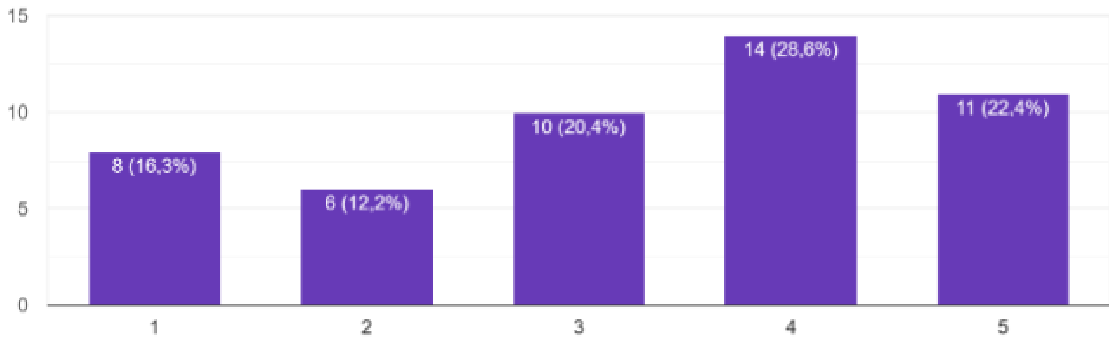


Fonte: Autores (2025)

Nessa última questão, os alunos que responderam "sim" foram solicitados a exemplificar onde haviam estudado anteriormente esses conteúdos. Muitos afirmaram ter tido contato com o tema durante as aulas de Arte no 7º ano e ao utilizar malhas quadriculadas. O professor de Arte do ano anterior costumava explorar formas geométricas e trabalhar com malhas quadriculadas em suas aulas. Kaleff (1994a) destaca que as isometrias possibilitam a interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento, como a Arte, permitindo que os alunos desenvolvam uma percepção mais ampla das transformações geométricas em diferentes contextos.

Gráfico 7 – Resultados da questão 7

Questão 7) Em uma escala de 1 a 5, como você classificaria suas habilidades em reconhecer as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação), após realizar as atividades.



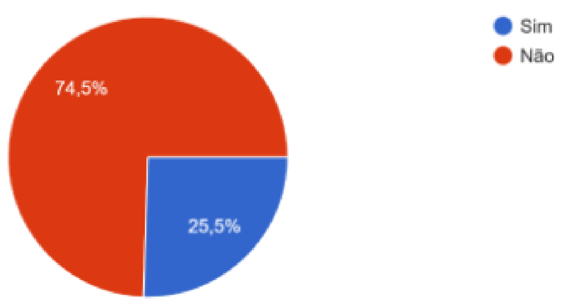
Fonte: Autores (2025)

Nessa questão, mais da metade dos alunos atribuíram notas 4 ou 5, o que indica que se consideram capazes de reconhecer as isometrias. No entanto, diante das respostas apresentadas na questão anterior, cabe refletir: será que esses alunos identificariam essas transformações em uma atividade de Arte, na qual nada fosse mencionado sobre as isometrias?

Segundo a Teoria de Van Hiele, o reconhecimento de uma transformação geométrica depende não apenas da familiaridade visual com figuras ou padrões, mas também da apropriação do vocabulário e dos conceitos formais que a definem. Assim, mesmo que afirmem reconhecer as isometrias, é possível que, em contextos não matemáticos, como nas atividades de Arte, essa identificação não ocorra com o uso de uma linguagem formal, especialmente se os termos "reflexão", "rotação" ou "translação" não forem explicitamente utilizados.

Gráfico 8 – Resultados da questão 8

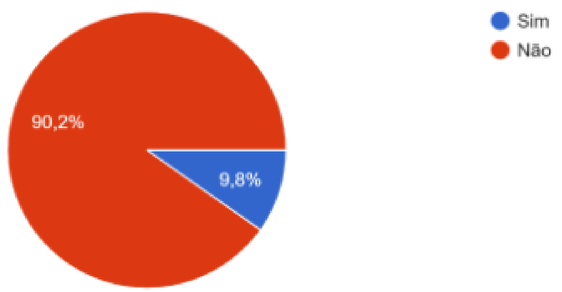
Questão 8) Você já havia estudado congruência de triângulos anteriormente?



Fonte: Autores (2025)

Gráfico 9 – Resultados da questão 9

Questão 9) No desenvolvimento das atividades sobre congruências de triângulos, você conseguiu perceber alguma relação dos conceitos trabalhados com outras áreas ou até mesmo outros assuntos trabalhados anteriormente na Geometria?



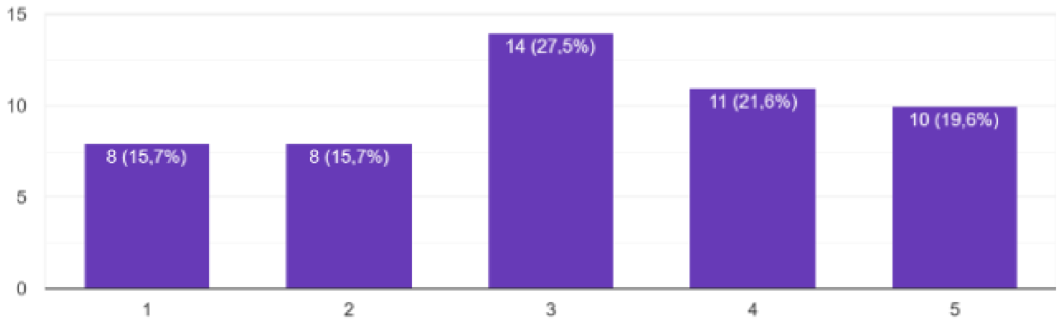
Fonte: Autores (2025)

Observa-se que o número de alunos que afirmaram já ter estudado congruência de triângulos é menor em relação àqueles que disseram ter estudado isometrias. Tal situação possivelmente se relaciona ao fato de que na BNCC não há uma habilidade específica no Ensino Fundamental que tenha como objeto de conhecimento o ensino da congruência de triângulos.

Outro aspecto relevante é que menos de 10% dos alunos afirmaram perceber alguma relação entre os conceitos trabalhados e outras áreas do conhecimento ou outros conteúdos da própria Geometria. Embora alguns tenham reconhecido as isometrias em atividades de Arte, essa identificação parece ter ocorrido sem a associação entre as transformações realizadas e o conceito de congruência.

Gráfico 10 – Resultados da questão 10

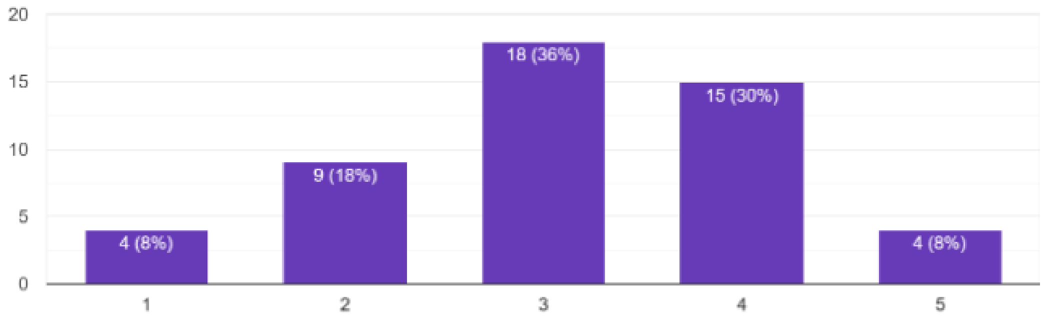
Questão 10) Em uma escala de 1 a 5, como você classificaria suas habilidades em reconhecer triângulos congruentes, após realizar as atividades.



Fonte: Autores (2025)

Gráfico 11 – Resultados da questão 11

Questão 11) Em uma escala de 1 a 5, como você classificaria suas habilidades para ordenar os elementos do triângulos e identificar os casos de congruências de triângulos, após realizar as atividades.



Fonte: Autores (2025)

A análise das questões 10 e 11 revela uma distribuição semelhante entre os alunos que declararam com habilidades médias a baixas e médias a altas no reconhecimento de triângulos congruentes e na ordenação de seus elementos. No entanto, chama atenção o fato de que, na questão 11, as respostas se concentram com maior frequência na medida central da escala, sugerindo que os alunos percebem a ordenação dos elementos dos triângulos como uma tarefa mais difícil do que reconhecer a congruência entre figuras. Isso pode indicar que, embora os estudantes sejam capazes de identificar visualmente dois triângulos como congruentes, demonstram dificuldade em justificá-la utilizando os casos de congruência.

Por fim, os alunos puderam acrescentar qualquer informação, comentário ou observação que considerassem relevante. Dos 17 alunos que fizeram observações, destacam-se 7 delas que afirmaram que gostaram de realizar as atividades e julgam terem aprendido, 4 delas relataram dificuldades em fazer as atividades e, alguns alunos, agradeceram pela proposta das atividades e outros relataram que no final as atividades se tornaram um pouco cansativas.

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

As atividades da sequência didática foram apresentadas ao longo do Capítulo 4 e constituem o Recurso Educacional desenvolvido nesta pesquisa. Neste capítulo, portanto, dá-se ênfase à interpretação dos protocolos construídos pelos estudantes.

Após a aplicação das atividades e do questionário, iniciou-se a análise de 30 (trinta) protocolos entre os 92 (noventa e dois) aplicados. A seleção foi feita de forma aleatória, com 10 (dez) protocolos escolhidos em cada uma das três turmas participantes. Esse recorte justificou-se pelo grande volume de dados a serem examinados, não comprometendo a consistência nem a representatividade das análises.

As análises têm caráter qualitativo e buscam dialogar com o referencial teórico adotado. É importante lembrar que o principal objetivo desta proposta foi promover o desenvolvimento e a progressão dos estágios de pensamento geométrico dos estudantes por meio da sequência didática elaborada. Essa perspectiva norteia a leitura e interpretação dos dados apresentados a seguir.

Inicialmente, foi realizada uma análise individual de cada atividade, considerando as respostas e produções dos alunos em relação aos objetivos específicos de cada atividade. Em seguida, procedeu-se a uma análise geral da sequência didática.

6.1 Análise Individual das Atividades da Sequência Didática

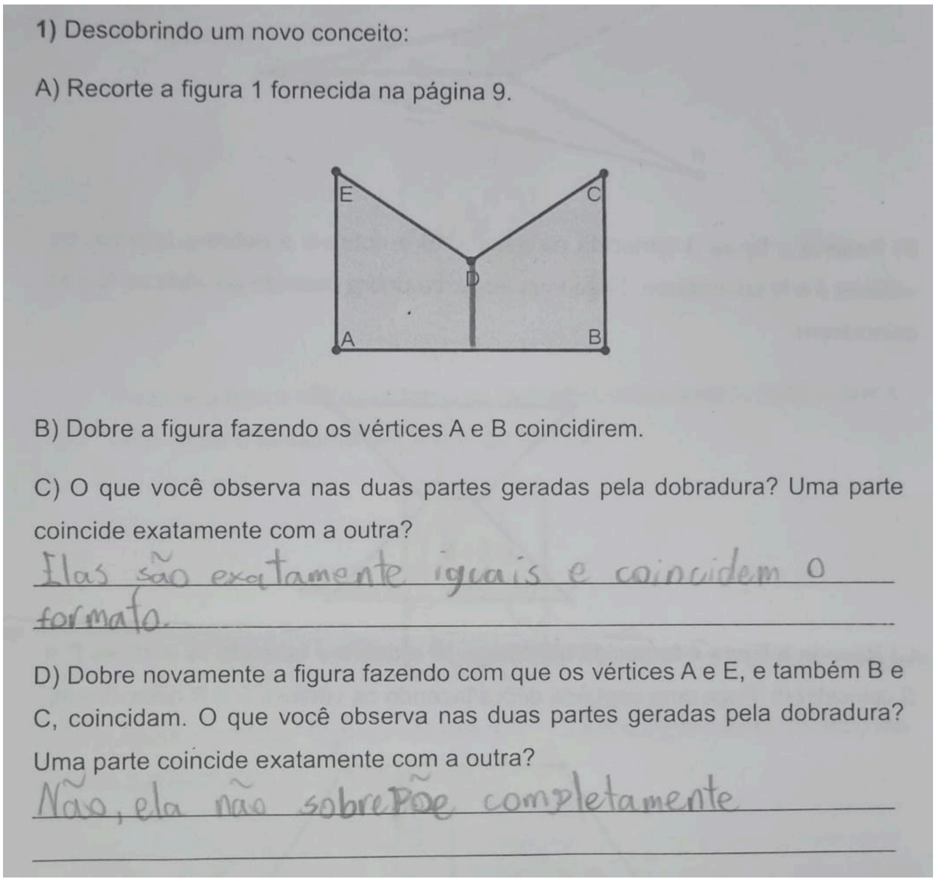
- **ATIVIDADE I - REFLEXÃO DE FIGURAS PLANAS**

A primeira atividade da sequência didática abordou as reflexões de figuras planas, com foco na representação das formas obtidas por reflexão e na identificação do eixo de simetria. Alguns alunos relataram que já haviam estudado o conteúdo em anos anteriores e, de modo geral, conseguiram realizá-la com êxito.

Observou-se que poucos cometeram erros nas questões 1 e 2, sendo os mais frequentes registrados no item "d" da primeira questão. Esse item solicitava que realizassem a dobra de uma figura e verificassem se as partes separadas pela linha de dobra coincidiam. No entanto, alguns verificaram apenas a coincidência dos vértices, sem considerar as demais partes da figura.

Um aspecto relevante nessa questão foi a linguagem empregada nas respostas. A maioria utilizou os termos "coincidem" ou "não coincidem", conforme presentes no enunciado. Entretanto, também surgiram expressões como "são iguais", "são diferentes", "elas se encontram", "elas não se sobrepõem completamente", "iguais em tamanho, largura e altura" e, em apenas uma resposta, o termo "são simétricas", conforme exposto na Figura 9. O uso de palavras como "iguais", "diferentes" e "encontram" indica que os alunos basearam suas respostas em percepções visuais, sem ainda demonstrar domínio dos conceitos matemáticos, o que é característico do *nível de Reconhecimento* da Teoria de Van Hiele.

Figura 9 – Resposta dada por um aluno na questão 1 da atividade I


1) Descobrindo um novo conceito:

A) Recorte a figura 1 fornecida na página 9.

B) Dobre a figura fazendo os vértices A e B coincidirem.

C) O que você observa nas duas partes geradas pela dobradura? Uma parte coincide exatamente com a outra?

Elas são exatamente iguais e coincidem o formato.

D) Dobre novamente a figura fazendo com que os vértices A e E, e também B e C, coincidam. O que você observa nas duas partes geradas pela dobradura? Uma parte coincide exatamente com a outra?

Não, ela não sobrePõe completamente

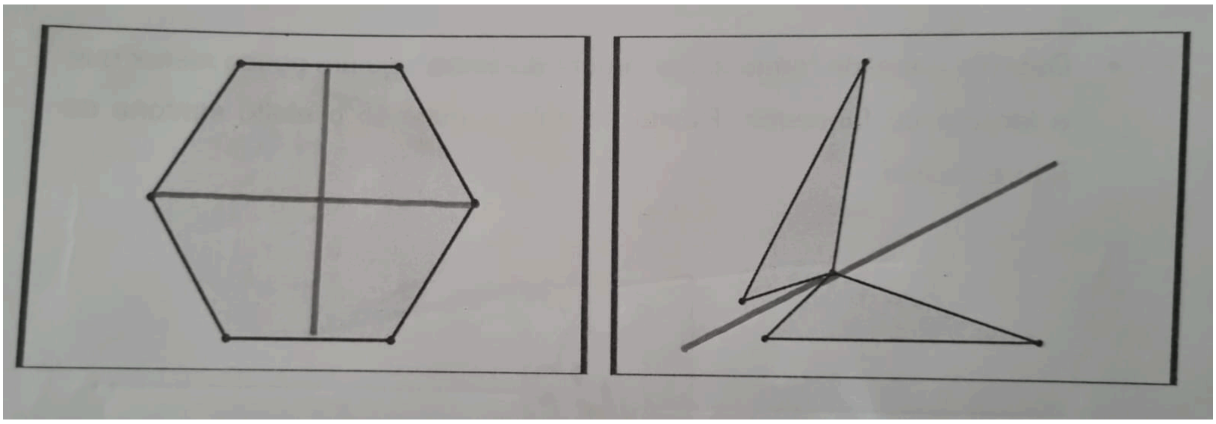
Fonte: Autores (2025)

A questão 3 solicitava que os alunos realizassem a dobra e o recorte de um fantasma em uma tira de papel, formando uma corrente de fantasmas, e posteriormente descrevessem as características observadas. Ressalta-se que muitos encontraram dificuldades para executar as dobras e os recortes, o que foi mencionado em várias respostas. Além da descrição de que as figuras eram iguais, alguns alunos relataram outras características, como a presença do eixo de simetria (ainda que não desenhado), o fato de as figuras formadas estarem invertidas (espelhadas) e serem simétricas.

Apesar de a atividade ter um enfoque no *nível de Reconhecimento*, as características observadas na questão 3 sugerem que algumas propriedades da reflexão, como a conservação da forma e das medidas, já começam a ser percebidas, ainda que não formalizadas. Essas observações pavimentam o caminho para que os alunos avancem ao *nível de Análise.*

A questão seguinte demandava a representação dos eixos de simetria nas figuras fornecidas, quando houvessem. A maioria dos alunos conseguiu identificar e representar os eixos corretamente. Entretanto, percebeu-se uma dificuldade maior na identificação dos eixos quando a figura possuía mais de um. Nesse caso, muitos alunos representaram apenas os eixos horizontais e verticais, e apenas dois identificaram todos os eixos de simetria, como mostra a Figura 10.

Figura 10 – Resposta dada por um aluno em dois itens da questão 4 da atividade I



Fonte: Autores (2025)

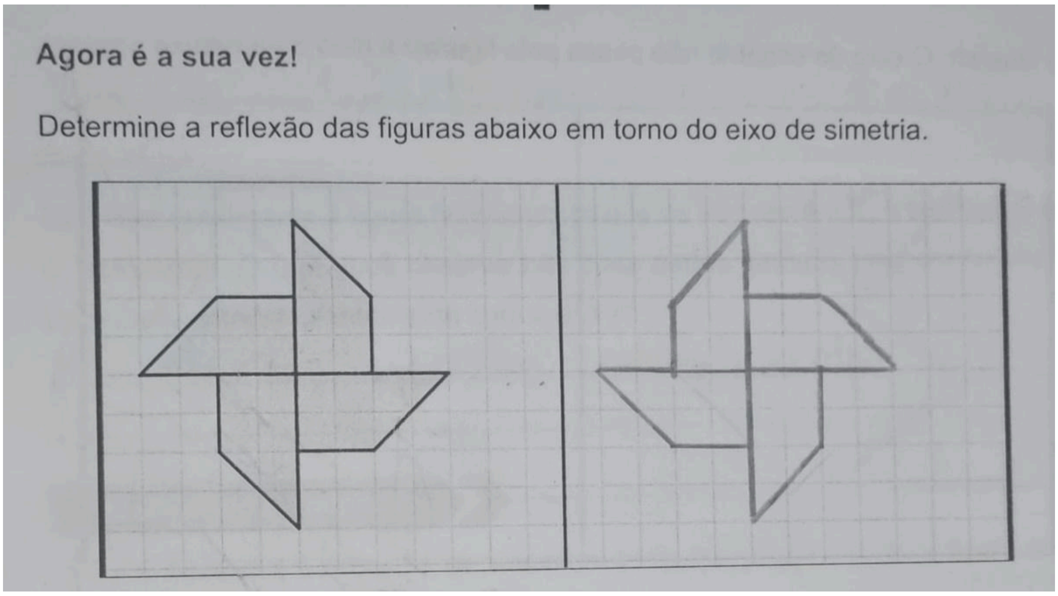
A ênfase na representação dos eixos de simetria horizontais e verticais pode estar associada às vivências dos alunos. É comum que professores e livros didáticos priorizem esses eixos. Além disso, até aquele momento, as atividades haviam explorado apenas essas duas direções. Isso destaca a importância da seleção e ordenação das atividades, que, segundo a Teoria de Van Hiele, contribuem para a aprendizagem dos alunos.

As questões 5 e 6 abordavam o conceito de pontos correspondentes ou simétricos. A questão 5 solicitava que os alunos identificassem os pontos correspondentes das figuras de acordo com os eixos de simetria fornecidos. Já a questão 6 solicitava que os alunos desenhassem a outra parte da figura fornecida, utilizando como referência os pontos correspondentes. Em ambos os itens, todos os eixos de simetria possuíam pontos de interseção com a forma geométrica.

Observou-se que os estudantes tiveram facilidade em identificar os pontos correspondentes na questão 5. Além disso, entende-se que essa atividade contribuiu para a realização da questão 6, tendo em vista que praticamente todos os alunos a resolveram corretamente, reforçando a importância da seleção e ordenação criteriosa das atividades pelo professor.

Após a conceituação da transformação isométrica denominada reflexão, na questão 7 os alunos deveriam determinar a reflexão das figuras em torno do eixo de simetria quando este não possuía pontos de interseção com a figura. Na questão 8, foi solicitado às turmas que realizassem a transformação reflexão para formar figuras a partir do eixo de simetria. Para essas questões, era essencial compreender que os pontos correspondentes equidistam do eixo de simetria. Embora essa propriedade seja formalizada no *nível de Análise*, um exemplo foi apresentado e, com base no que já havia sido trabalhado, esperava-se que os alunos a observassem de alguma forma, o que não foi constatado nas respostas, como mostrado na Figura 11.

Figura 11 – Resposta dada por um aluno na questão 7 da atividade I



Fonte: Autores (2025)

Diante das respostas, verificou-se que praticamente todos os alunos reconheceram a transformação reflexão. Eles também foram capazes de visualizar os eixos de simetria e os pontos correspondentes. Muitos identificaram que as figuras deveriam ficar "espelhadas" ou "invertidas", e a linguagem utilizada nas respostas reforçou a compreensão da reflexão a partir de uma perspectiva global, com ênfase nos aspectos visuais da transformação isométrica trabalhada. No entanto, poucos realizaram as reflexões considerando corretamente que os pontos correspondentes devem estar equidistantes do eixo de simetria.

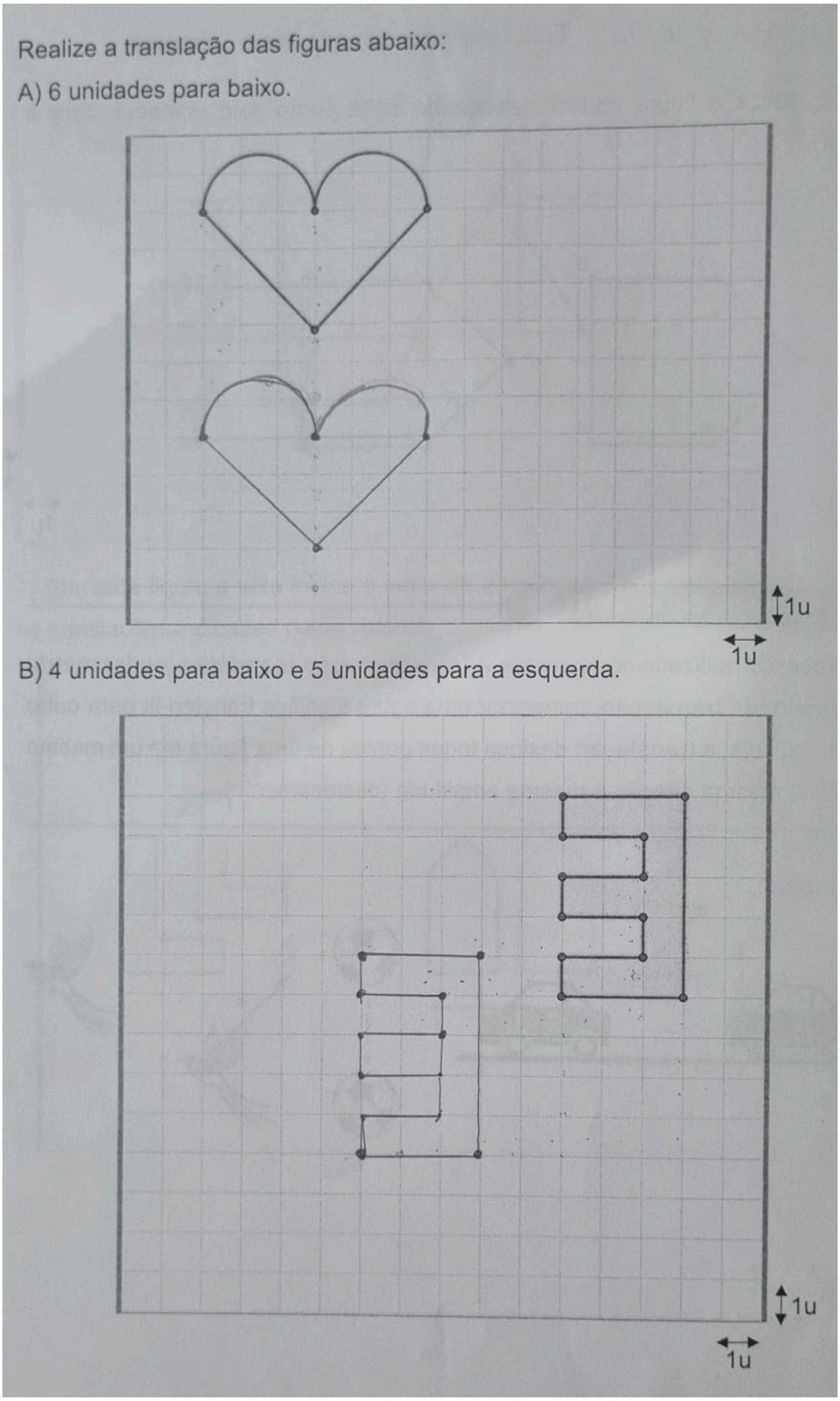
- **ATIVIDADE II - TRANSLAÇÃO DE FIGURAS PLANAS**

A Atividade II trabalha o conceito de translação de figuras planas no primeiro nível de pensamento (*Reconhecimento*). Nessa atividade, destaca-se a representação de figuras obtidas por translação e o uso de vetores de deslocamento. A maioria dos estudantes conseguiu realizá-la. Novamente, percebeu-se uma maior dificuldade apenas nas questões que demandam recorte e dobra.

A questão 1 solicitava que os alunos realizassem o deslocamento de uma figura na malha quadriculada. A maioria conseguiu realizar a tarefa, outros não se atentaram às distâncias do deslocamento, e mesmo conservando a forma, realizaram a translação de forma incorreta. O item B, dessa mesma questão, foi o único que gerou alguma dúvida, pois exigia que a figura fosse deslocada tanto para baixo quanto para a esquerda, o que fez com que alguns estudantes não conseguissem concluir corretamente a questão.

Nesse primeiro momento, observou-se que muitos utilizaram os vértices das figuras como referencial para efetuar os deslocamentos e que a marcação das distâncias percorridas (fazendo o pontilhado) contribuiu para a realização adequada da questão, como exemplificado na Figura 12. Compreende-se que o uso de representações gráficas pelos próprios alunos, como a marcação dos pontilhados, auxiliaram na construção das concepções visuais sobre a translação.

Figura 12 – Solução dada por um aluno na questão 1 da atividade II



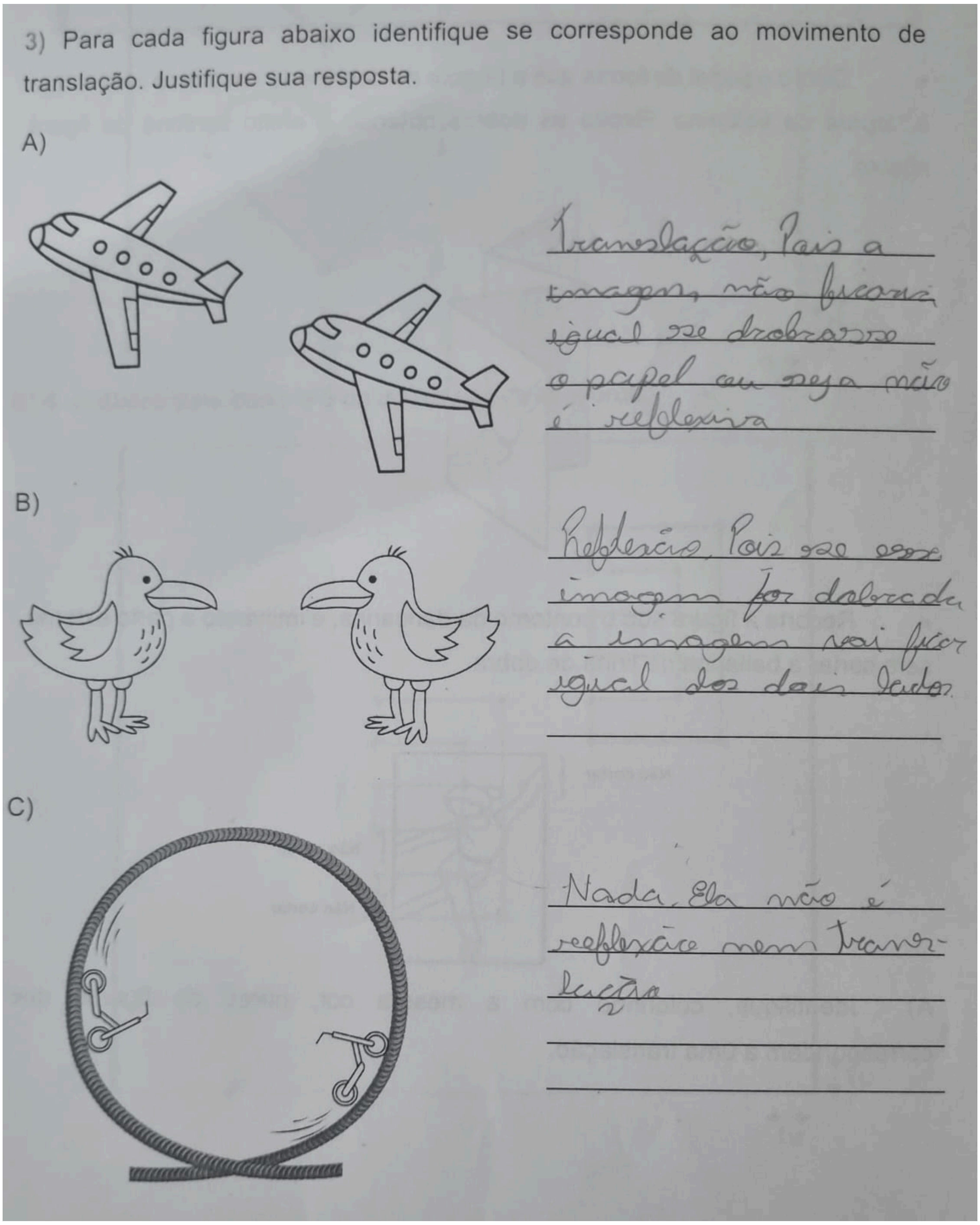
Fonte: Autores (2025)

Na questão 2, era necessário dobrar e recortar uma dançarina em uma tira de papel, formando uma corrente de figuras idênticas, além de colorir com a mesma cor as que correspondiam a uma translação. Apesar da dificuldade inicial com as dobras e os recortes, ao obterem a figura final, os estudantes identificaram com facilidade que as dançarinas intercaladas correspondiam a translações entre si. Ou seja, as figuras em posições ímpares eram translações umas das outras, assim como as figuras nas posições pares.

Também foi perguntado se os alunos conseguiam reconhecer outra transformação além da translação. Alguns identificaram a reflexão e utilizaram termos como "espelhadas" e "invertidas", enquanto outros não conseguiram reconhecer essa transformação. Nesse momento observou-se que muitos alunos, mesmo tendo realizado a atividade I sobre as reflexões, ainda não utilizavam o termo reflexão para se referir a transformação.

A questão 3 solicitava que os estudantes identificassem quais pares de figuras correspondiam ao movimento de translação, como mostra a Figura 13. No item A, todos afirmaram que a transformação era uma translação. Como justificativa, utilizaram expressões como "vai de um lugar para o outro", "os aviões estão se deslocando no mesmo sentido" e "uma é cópia da outra imagem em outro lugar". Embora as explicações não tenham sido precisas ou formais, os alunos apresentaram concepções visuais e corretas sobre a translação, características do *nível de Reconhecimento*. Para o *nível 1* de Van Hiele, tais respostas devem ser aceitas e, posteriormente, formalizadas.

Figura 13 – Resposta dada por um aluno na questão 3 da atividade II



Fonte: Autores (2025)

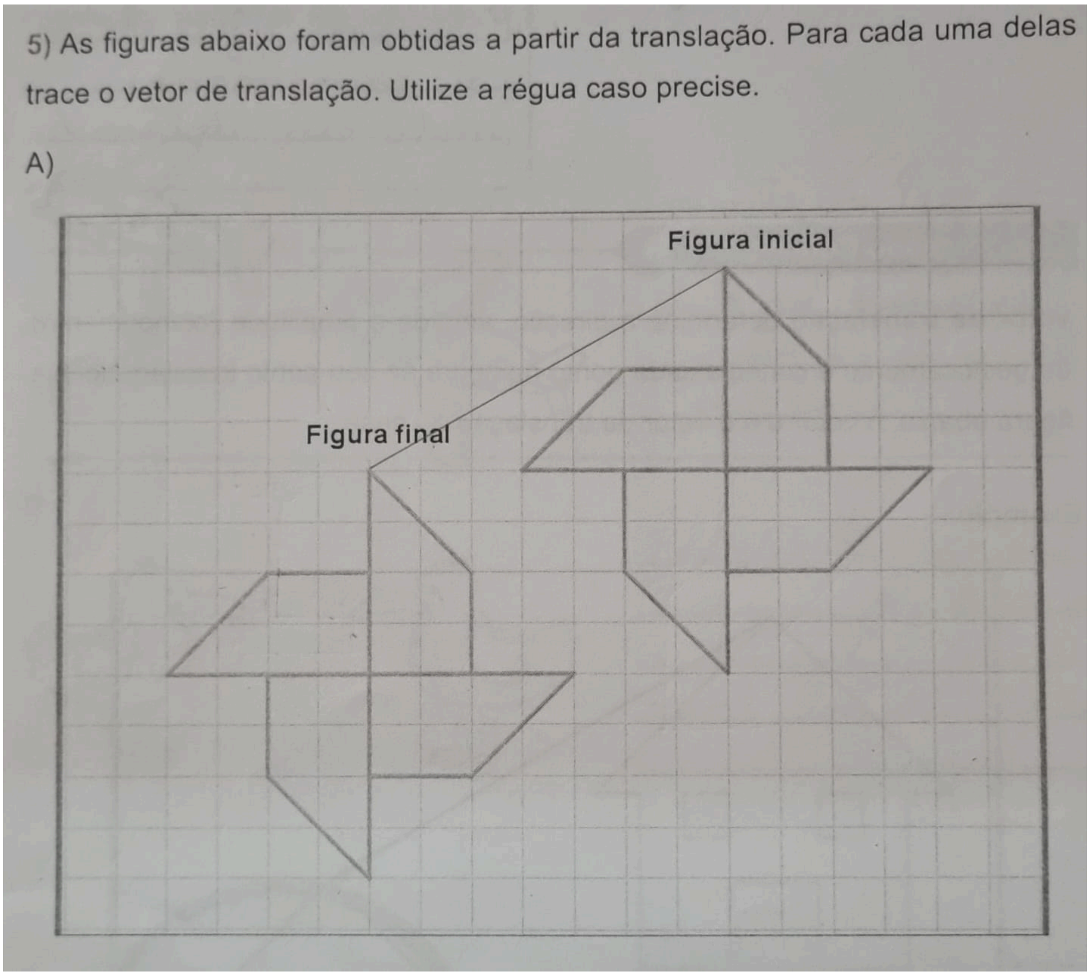
No item B, apenas um estudante cometeu um erro ao afirmar que a transformação correspondia a uma translação, enquanto todos os demais reconheceram que a figura não se encaixava nessa categoria. Entre aqueles que responderam corretamente, cinco identificaram que não era uma translação, porém não reconheceram a isometria de reflexão. Os demais alunos reconheceram que as figuras correspondiam a uma reflexão, mesmo que tenham utilizado outros termos para se referir a reflexão. Isso sugere que esses alunos já estão no processo de aquisição do *nível de Reconhecimento* para a transformação de reflexão.

No item C, todos afirmaram que a transformação não correspondia a um movimento de translação, porém apenas três alunos identificaram corretamente que se tratava de uma rotação. Ressalta-se que essa isometria ainda não havia sido apresentada aos estudantes. Nesse item, muitos se limitaram a identificar que não correspondia ao movimento de translação, alguns poucos reconheceram que o movimento era circular.

A questão 4 fornecia uma figura e solicitava que os alunos identificassem as transformações realizadas, nesse caso a atividade foi pensada apenas para duas possibilidades: translação e reflexão. Somente dois participantes não identificaram corretamente as transformações, enquanto os demais reconheceram ambas. Esse resultado sugere que os estudantes já são capazes de identificar diferentes tipos de transformações e perceber mais de uma possibilidade para um mesmo conjunto de figuras.

Após a questão 4, o professor-pesquisador apresentou o conceito de vetor de translação aos alunos e, em seguida, foi solicitado que representassem os vetores nas figuras fornecidas na questão 5. Três estudantes não representaram o vetor de translação, e um outro o fez de forma incorreta. Os demais conseguiram realizar a representação, porém apenas 20% indicaram o sentido do vetor, como mostra a Figura 14. Isso sugere que, embora tenham identificado os pontos correspondentes nas figuras, alguns alunos não se atentaram à ordem das figuras, ou seja, qual era a inicial e qual era a final (imagem), não reconhecendo qual das formas era gerada a partir da outra.

Figura 14 – Resposta dada por um aluno no item a da questão 5 da atividade II



Fonte: Autores (2025)

As questões 6 e 7 solicitaram que os estudantes realizassem a translação de algumas figuras a partir do vetor fornecido. Na questão 6, os alunos tinham o auxílio da malha quadriculada, enquanto na questão 7 deveriam realizar as construções utilizando régua. Na questão 6, apenas cinco não realizaram corretamente a transformação isométrica, enquanto na questão 7, quatro cometeram erros na construção. Os estudantes que erraram, apesar de deslocarem a figura, não se atentaram ao comprimento do vetor de translação, ou seja, não realizaram o deslocamento conforme solicitado.

Diante das respostas apresentadas pelos alunos, percebe-se que os estudantes conseguiram realizar a atividade, reconhecendo e realizando a translação de figuras. A seleção e ordenação da atividade se mostrou adequada, favorecendo a compreensão dos alunos.

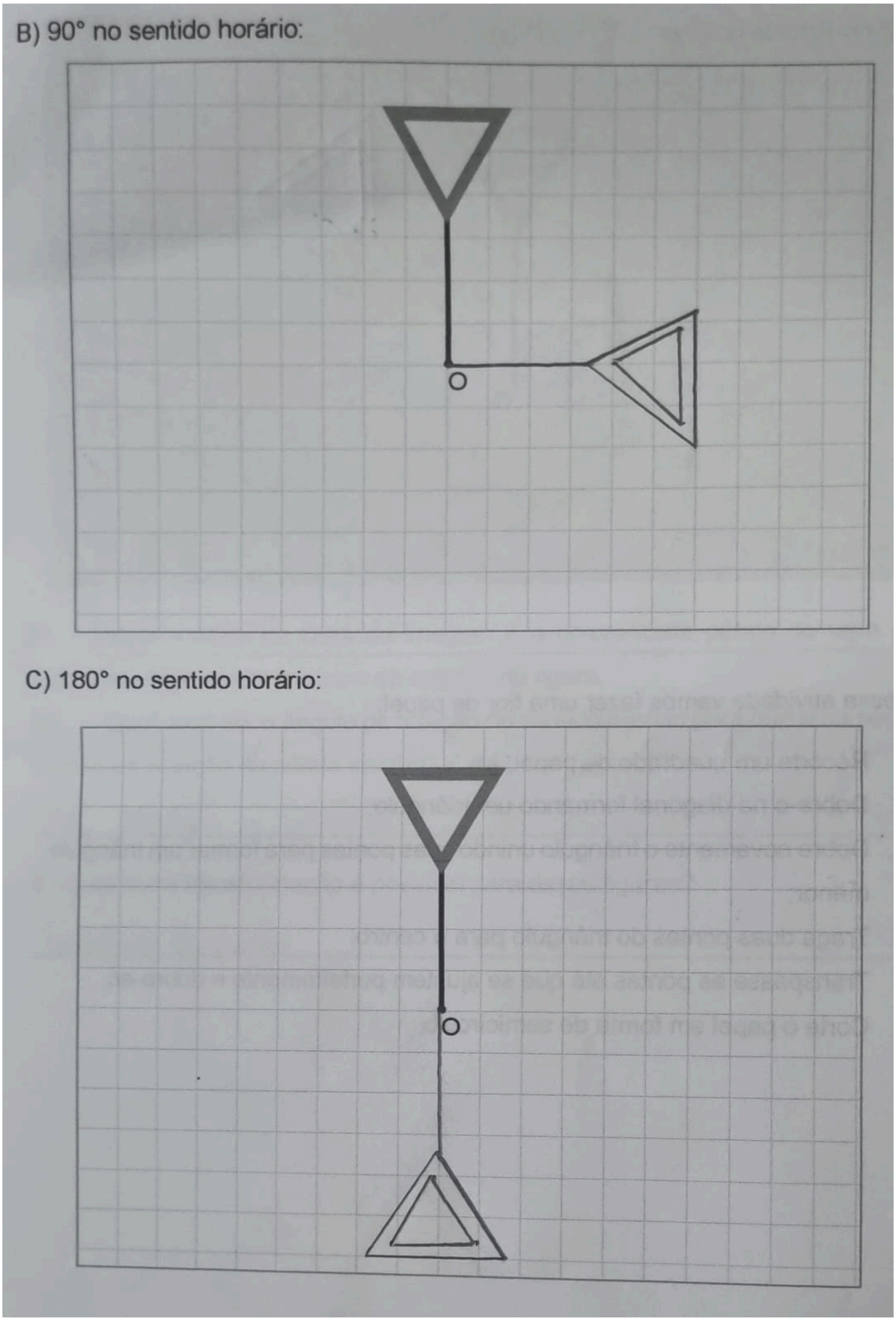
Apesar de reconhecerem e realizarem a translação, ressalta-se que a maior parte dos alunos não representou corretamente o sentido do vetor de translação, indicando que eles ainda não distinguem entre a figura inicial e a transladada. Nesse sentido, é possível que o comando da questão possa não ter dado ênfase na orientação do vetor de translação, por outro lado, alguns alunos podem ter se atentado apenas aos pontos correspondentes da transformação.

- **ATIVIDADE III - ROTAÇÃO DE FIGURAS PLANAS**

A atividade abordou o conceito de rotação de figuras planas. Sob a perspectiva do *nível de Reconhecimento*, trabalhou a visualização da isometria, bem como a identificação do centro e do ângulo de rotação. Inicialmente, o professor-pesquisador apresentou um exemplo de rotação e o seu conceito, além de possibilitar que os alunos expressassem suas percepções acerca dessa transformação.

Após essa introdução, a primeira questão solicitou que os alunos realizassem rotações das figuras apresentadas, utilizando os ângulos e centros de rotação fornecidos, de maneira semelhante ao exemplo demonstrado na Figura 15. Apenas um aluno não realizou a transformação corretamente nos itens A e B. Entendeu-se que, devido à familiaridade com os ângulos de rotação de 45°, 90° e 180°, a maioria dos estudantes conseguiu aplicar a rotação sem dificuldades.

Figura 15 – Solução dada por um aluno na questão 1 (B) e (C) da atividade III



Fonte: Autores (2025)

A segunda questão propôs que os alunos, por meio de dobras e recortes, confeccionassem uma flor de papel com seis pétalas, identificassem os centros de rotação, reconhecessem os ângulos entre duas pétalas consecutivas e determinassem se havia outra transformação possível na figura. Ressalta-se que alguns alunos não conseguiram formar a figura corretamente e precisaram de auxílio.

Em relação às respostas, todos os alunos identificaram corretamente o centro de rotação. No entanto, no item C, apenas dois reconheceram que, para que uma pétala assumisse a posição da vizinha, seria necessária uma rotação de 60°. Além disso, metade dos alunos responderam corretamente que, para que uma pétala ocupasse a posição oposta, a rotação deveria ser de 180°. Percebe-se que reconhecer ângulos diferentes de 90° e 180° foi mais desafiador e que realizar essas rotações nem sempre é uma tarefa fácil.

Ainda no item C, poucos alunos identificaram a reflexão como outra transformação isométrica possível. Alguns utilizaram expressões como "dobra ao meio", sem se referir explicitamente ao termo reflexão. Notou-se uma dificuldade maior dos alunos ao lidar com figuras quando os ângulos de rotação não foram fornecidos, pois determinar esses ângulos visualmente, sem o recurso de um instrumento auxiliar, se mostrou mais complexo.

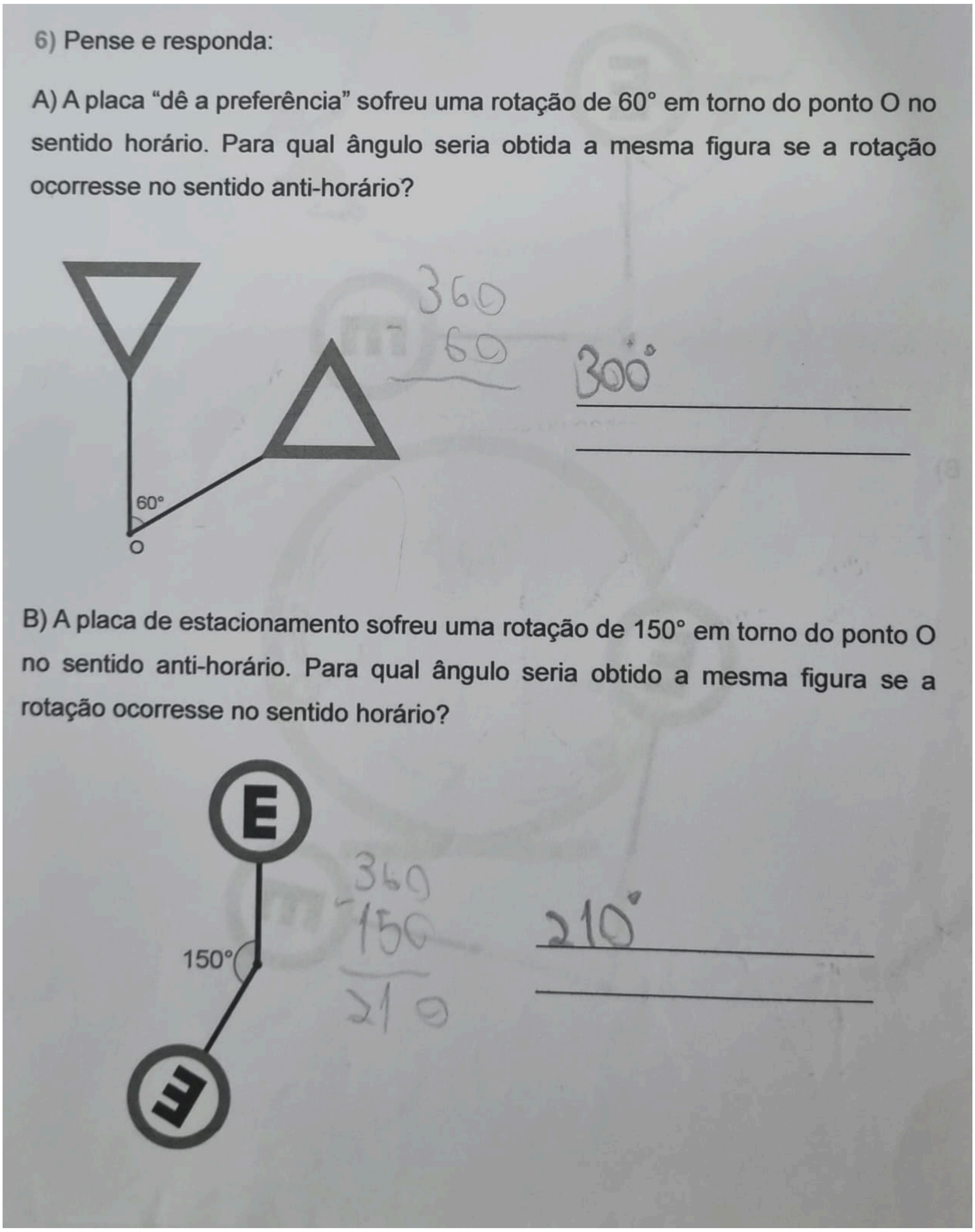
Na questão 3, os alunos precisavam representar na figura o centro de rotação e utilizaram um transferidor para medir o ângulo de rotação. Todos, com exceção de três, representaram corretamente o centro. Em relação aos ângulos, a maioria identificou corretamente, embora tenham ocorrido pequenos erros de medição. Isso sugere que o uso do transferidor auxiliou os estudantes a reconhecerem os ângulos de forma mais precisa.

A questão 4 solicitou que os alunos apresentassem exemplos do cotidiano em que a rotação estivesse presente. Seis respostas não apresentaram exemplos, enquanto as demais destacaram elementos como relógios e ventiladores. Isso indicou que os alunos já percebiam o movimento de rotação e conseguiam identificá-lo em objetos do dia a dia.

A questão 5 exigiu que os alunos identificassem o centro de rotação das figuras apresentadas. Todos os alunos reconheceram corretamente os centros de rotação, muitos apenas ligando as bases das figuras. Esse resultado sugeriu que essa identificação é mais intuitiva do que a determinação dos ângulos de rotação.

A questão 6 apresentou uma transformação e solicitou que os alunos identificassem o ângulo de rotação no sentido contrário, resultando na mesma posição final, como exemplificado na Figura 16. Ao todo, 11 alunos erraram pelo menos um dos itens. Desses, quatro calcularam erroneamente o item B, enquanto os demais erraram tanto o item A quanto o item B. Entende-se que os alunos que erraram ambos os itens não compreenderam que uma volta completa equivale a 360° e não conseguiram deduzir o ângulo solicitado.

Figura 16 – Solução dada por um aluno na questão 6 da atividade III


6) Pense e responda:

A) A placa "dê a preferência" sofreu uma rotação de 60° em torno do ponto O no sentido horário. Para qual ângulo seria obtida a mesma figura se a rotação ocorresse no sentido anti-horário?

B) A placa de estacionamento sofreu uma rotação de 150° em torno do ponto O no sentido anti-horário. Para qual ângulo seria obtida a mesma figura se a rotação ocorresse no sentido horário?

Fonte: Autores (2025)

A questão 7 apresentou uma imagem do carrossel de um parque de diversões e solicitou que os alunos representassem o centro de rotação do brinquedo. Todos os alunos reconheceram o centro de rotação. Posteriormente, o item B questionou qual ângulo faz um cavalo assumir a posição do cavalo seguinte, três alunos não determinaram o ângulo, enquanto outros 5 determinaram de forma incorreta. No item C, os estudantes determinaram qual ângulo o carrossel deve rotacionar

A questão 8 propôs que os alunos realizassem transformações de rotação utilizando régua e compasso. Essa tarefa se mostrou bastante desafiadora, pois, mesmo tentando realizá-la em casa e depois em sala, apenas dois alunos conseguiram completá-la satisfatoriamente. Os demais não conseguiram realizar a rotação corretamente. Mesmo com o auxílio do professor-pesquisador, muitos tiveram dificuldade em compreender como a rotação deve ser aplicada, enquanto outros apresentaram dificuldades na manipulação do compasso.

Concluiu-se que a realização da questão 8 possivelmente exigiu que os alunos estejam em níveis mais avançados de pensamento e já tivessem analisado algumas propriedades da rotação. A atividade evidenciou que, enquanto identificar centros de rotação é uma tarefa relativamente acessível, determinar ângulos e realizar construções geométricas mais precisas ainda foram tarefas desafiadoras para muitos estudantes, entende-se que para a construção das figuras a partir da transformação de rotação o conhecimento das propriedades da transformação rotação *(nível 2*) pode ter contribuído para sua realização.

- **ATIVIDADE IV - COMPOSIÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS**

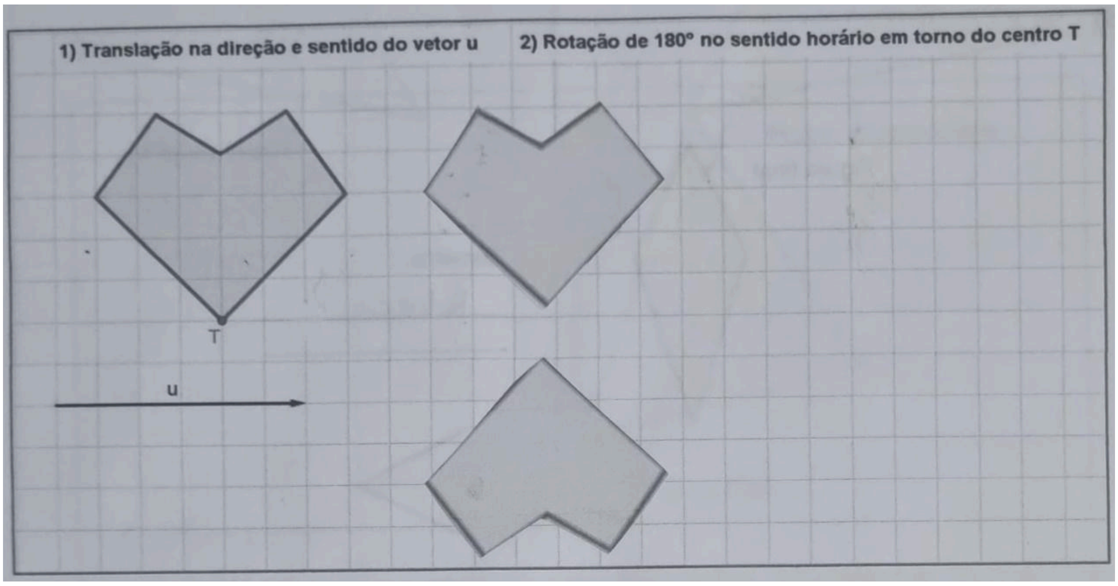
A atividade IV trabalhou as composições de transformações geométricas. Ela foi composta por duas partes: inicialmente, os alunos deveriam identificar as isometrias realizadas e seus elementos (eixo de simetria, vetor de translação, ângulo e centro de rotação). Posteriormente, realizar algumas transformações para obter as composições das isometrias. Embora ainda contemplasse o *nível de Reconhecimento* a compreensão da conservação da forma e das medidas enquanto propriedades das isometrias contribui para a realização das transformações isométricas. Dessa forma, pode-se adotar uma perspectiva de que a atividade demandou alguns aspectos do *nível de Análise*.

Na primeira parte da atividade (questão 1), muitos estudantes adotaram os termos reflexão, translação e rotação para descrever as transformações isométricas, embora alguns ainda não tenham conseguido identificar corretamente a transformação realizada. Apenas um aluno utilizou o termo "girar" para se referir à rotação. Percebeu-se que os alunos passaram a utilizar os termos reflexão, translação e rotação para se referir às isometrias. As respostas reforçaram a perspectiva da Teoria de Van Hiele de que a medida que as transformações foram trabalhadas os alunos passaram a adotar o vocabulário e a linguagem adequados para se referirem às isometrias.

Embora tenham reconhecido as transformações, identificar e representar os elementos correspondentes a cada uma das isometrias ainda se mostrou desafiador para a maioria dos alunos. Muitos não representaram os elementos constituintes das transformações geométricas, enquanto outros o fizeram de forma incorreta. As respostas apresentadas corroboram as análises das atividades anteriores que sugeriram que os alunos ainda se encontravam no processo de aquisição do *nível 1* da Teoria de Van Hiele: reconhecer as transformações isométricas, mas não associar de forma clara as isometrias aos seus elementos.

A dificuldade em representar os eixos de simetria, vetores de translação, ângulos e centros de rotação impactou diretamente a realização da segunda parte da atividade (questões 2 e 3). Na questão 2, embora tenham executado corretamente as transformações (reflexão, translação e rotação), muitos alunos não se atentaram às distâncias para o eixo de rotação, as medidas dos vetores de translação e os ângulos de rotação solicitados, situação também observadas em algumas questões das atividades anteriores. Destacou-se o item B da questão 2, Figura 17, no qual a maioria não realizou as transformações corretamente.

Figura 17 - Resposta dada por um aluno na questão 2 (B) da atividade IV



Fonte: Autores (2025)

Na questão 3, apenas três alunos conseguiram identificar e realizar as transformações corretamente. As questões dessa atividade apresentaram problemas de caráter mais aberto, nos quais era possível obter mais de uma solução. Observou-se que, entre os alunos que conseguiram realizar as transformações, optaram pela reflexão sempre que possível. A transformação de rotação aparentemente apresentou um maior grau de dificuldade aos alunos, os quais não se atentaram aos centros e aos ângulos de rotação.

Compreende-se que os participantes conseguiram reconhecer e nomear as transformações isométricas. Todavia, realizar as isometrias dados os eixos de simetria, vetor de translação, centros e ângulos de rotação, aparentou exigir um maior nível de pensamento geométrico e o domínio dos elementos relacionados às transformações. As dificuldades apresentadas nas três primeiras atividades continuaram a ser observadas na atividade IV. Ressaltou-se, portanto, a necessidade de se trabalhar com maior profundidade os elementos que constituem as transformações isométricas no *nível de Reconhecimento*, para que os estudantes pudessem realizar as composições das transformações e progredir em seu nível de pensamento.

- **ATIVIDADE V - PROPRIEDADES DAS TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS**

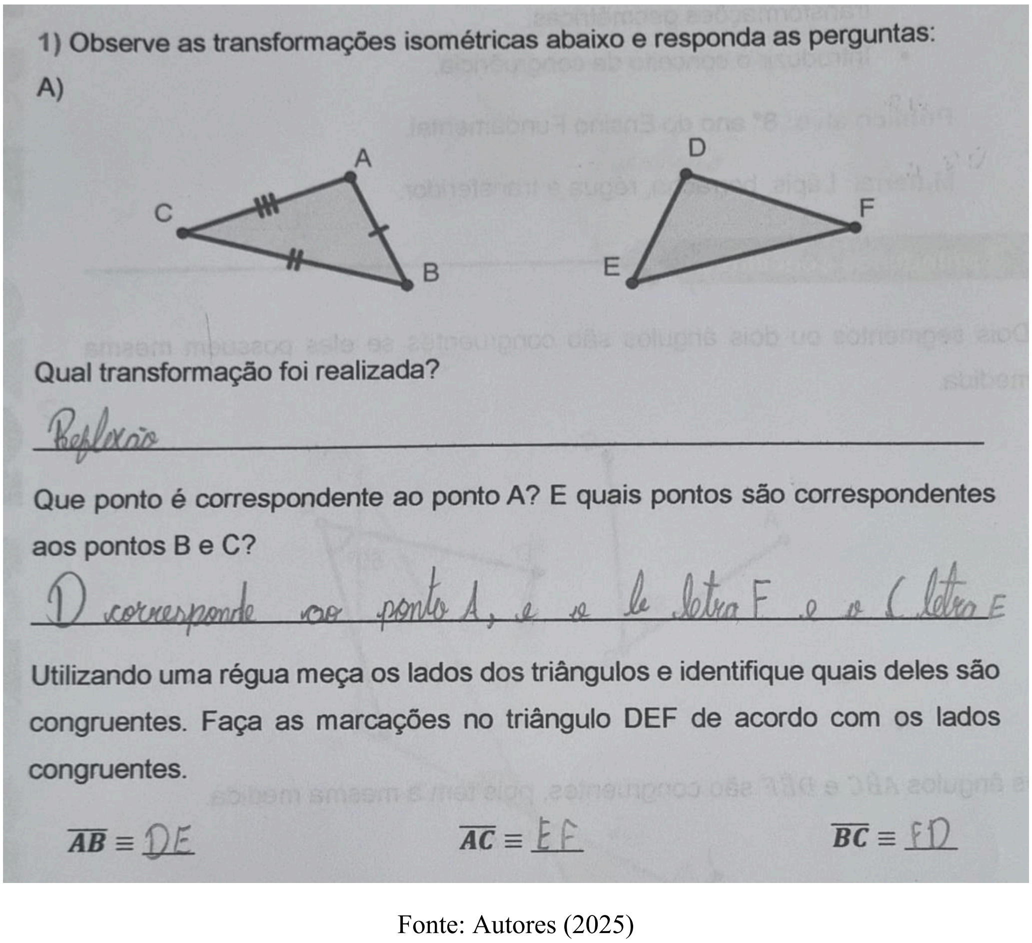
A quinta atividade da sequência didática abordou as propriedades comuns das transformações geométricas, as correspondências entre os lados e ângulos das isometrias e introduziu o conceito de congruência. Essa atividade correspondeu ao *nível 2 (Análise)*, permitindo que os alunos examinassem as propriedades das figuras enquanto aprendiam o vocabulário adequado para descrevê-las. Embora o foco esteja no segundo nível de pensamento, também foi possível identificar algumas características do *nível de Ordenação* ao estabelecer relações entre as diferentes isometrias e suas propriedades.

Inicialmente, o professor-pesquisador promoveu uma discussão com as turmas sobre o conceito de congruência, apresentando a definição para segmentos e ângulos. Com base nessa definição, na questão 1 os alunos deveriam analisar as formas, identificando o tipo de isometria realizada, os pontos correspondentes e, utilizando régua e transferidor, verificar quais lados e ângulos eram congruentes. Nessa primeira questão, a maioria dos alunos realizou a atividade corretamente.

As dificuldades apresentadas por alguns participantes estiveram na identificação da correspondência entre os vértices das figuras obtidas por meio das transformações isométricas. Percebeu-se que esses estudantes não conseguiram estabelecer corretamente essas relações e também não foram capazes de realizar as medições dos lados e ângulos. De acordo com Van Hiele, as respostas desses estudantes indicaram que eles ainda não reconheciam, mesmo visualizando as formas (*nível de Reconhecimento*), a correspondência entre os pontos das figuras, estrutura essencial para determinar a congruência entre seus lados e ângulos.

Por outro lado, a maioria dos alunos identificou corretamente os vértices das figuras correspondentes, possibilitando também a análise dos lados e ângulos congruentes, mesmo que nem sempre utilizassem a notação adequada, como mostra a Figura 18. Dessa forma, entende-se que a visualização dos pontos correspondentes das figuras trabalhadas no *nível de Reconhecimento* foi fundamental para que os alunos analisassem as figuras e determinassem que as isometrias conservam ângulos e medidas (*nível de Análise*).

Figura 18 – Resposta dada por um aluno nas questões 1 (A) da atividade V



1) Observe as transformações isométricas abaixo e responda as perguntas:

A)

Qual transformação foi realizada?

Reflexão

Que ponto é correspondente ao ponto A? E quais pontos são correspondentes aos pontos B e C?

D corresponde ao ponto A, e o B letra F e o C letra E

Utilizando uma régua meça os lados dos triângulos e identifique quais deles são congruentes. Faça as marcações no triângulo DEF de acordo com os lados congruentes.

$\overline{AB} \equiv$ DE $\qquad \overline{AC} \equiv$ EF $\qquad \overline{BC} \equiv$ FD

Fonte: Autores (2025)

Embora tenham identificado corretamente os lados e ângulos congruentes, muitas vezes não utilizaram a notação adequada para representá-los. Durante a aplicação, muitos alunos relataram que não se lembravam ou nunca haviam visto essas notações, apesar de o conceito de segmentos e ângulos ter sido trabalhado em anos anteriores. Diante desse contexto, entendeu-se que, à medida que os alunos forem vivenciarem essas representações, também poderão utilizá-las adequadamente.

A questão 2 solicitou que as turmas identificassem os lados e ângulos congruentes e os representassem nas figuras por meio de marcações nos lados e ângulos, conforme apresentado nas questões anteriores. Já reconhecendo que as isometrias conservam a forma e as medidas, a maioria determinou corretamente os lados congruentes. No entanto, quanto aos ângulos no item B, observou-se que alguns alunos não os reconheceram corretamente, enquanto outros apenas determinaram os lados congruentes.

Nota-se que esses alunos também não realizaram corretamente a questão anterior e, aparentemente, os erros persistiram na questão seguinte. Essa questão foi elaborada com o intuito de que os estudantes pudessem, inicialmente, identificar a isometria e posteriormente os vértices correspondentes, como na questão 1, para que fossem capazes de analisar os lados e ângulos congruentes. Entretanto, como esses alunos não estabeleceram as relações corretamente na questão 1, não foram capazes de estabelecer a congruência entre os lados e ângulos.

A questão 3, por sua vez, solicitou que os alunos completassem as medidas dos lados e ângulos das figuras a partir do reconhecimento da isometria. A maioria conseguiu representar corretamente as medidas dos ângulos e lados. Nessa questão específica, não houve muitas dúvidas, apenas alguns poucos estudantes deixaram de completar algumas medidas das figuras.

No geral, percebeu-se que os estudantes assimilaram a propriedade de que os lados e ângulos correspondentes das isometrias são congruentes. Além disso, reconhecem que as transformações isométricas conservam a forma. Por outro lado, a falta de familiaridade com o vocabulário e com as notações comumente utilizadas na matemática fez com que nem sempre utilizassem a notação de congruência corretamente. Além disso, alguns participantes, possivelmente ainda em processo de aquisição do *nível de Reconhecimento*, não foram capazes de analisar as propriedades das isometrias e utilizar o vocabulário adequado para descrevê-las.

- **ATIVIDADE VI - CONGRUÊNCIA DE FIGURAS PLANAS**

Trabalhadas as transformações isométricas, a sexta atividade buscou expandir o conceito de congruência para figuras e triângulos, observando seus lados e ângulos correspondentes. A proposta foi desenvolvida sob a perspectiva do *nível de Reconhecimento*, com ênfase na identificação das congruências a partir da forma global das figuras e das transformações isométricas.

Diante disso, na primeira questão, o professor-pesquisador apresentou aos alunos um exemplo de figuras congruentes, acompanhado da seguinte definição: "Dizemos que duas figuras planas são congruentes se uma pode ser obtida a partir da outra por uma transformação isométrica ou a combinação delas". Os participantes reconheceram as transformações e a relação de congruência entre as figuras, exceto um aluno, que afirmou o contrário.

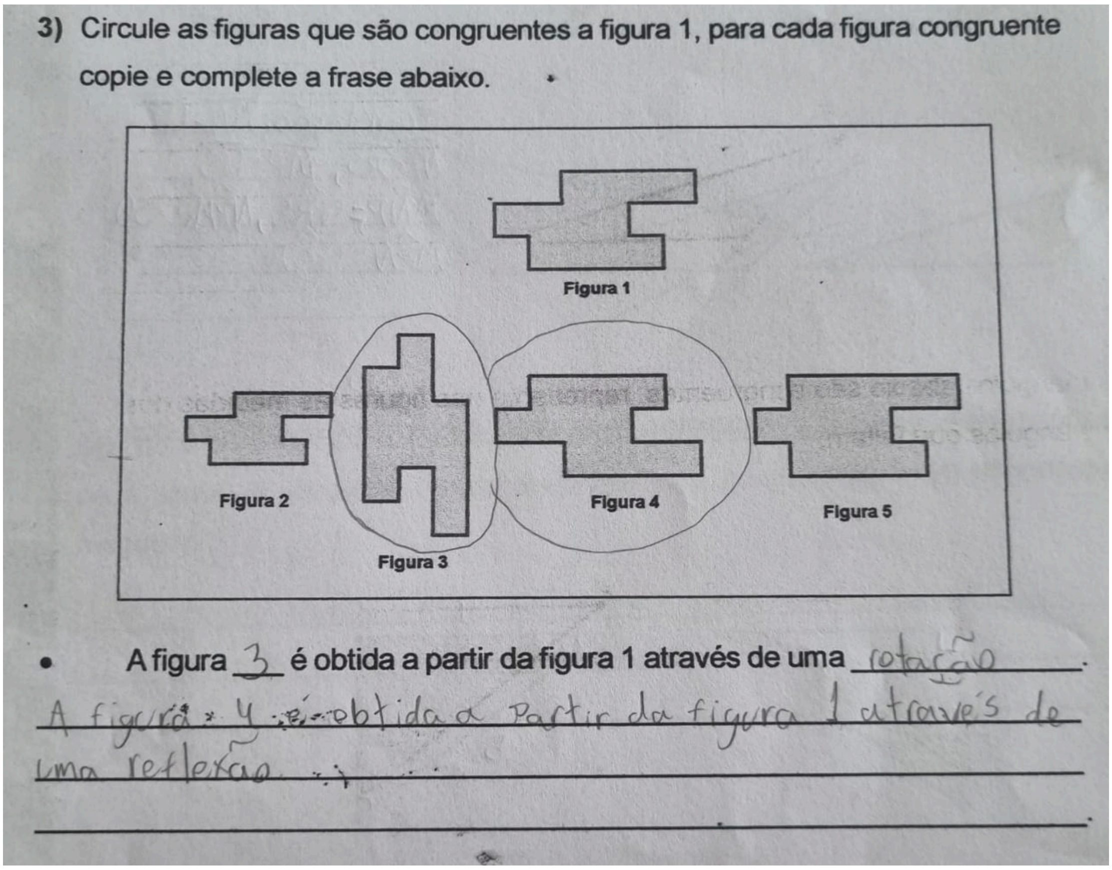
Na questão 2, os estudantes deveriam identificar quais pares de figuras são congruentes e indicar a transformação isométrica aplicada. Apenas um aluno não identificou corretamente os pares de figuras congruentes, afirmando, especificamente no item B, que as figuras eram congruentes. Os demais participantes reconheceram as figuras correspondentes sem dificuldades.

Em relação à transformação isométrica associada a cada par de figuras, os alunos tiveram maior dificuldade no item A. Seis deles responderam "reflexão" em vez de "rotação". A posição das figuras se assemelha muito a uma reflexão, entretanto, como os gatos estavam com os rostos invertidos, tratou-se de uma rotação de 180°. Esse contexto pode ter gerado confusão, mostrando que alguns estudantes reconheceram as isometrias apenas por aspectos visuais.

Por outro lado, não foram observados termos como "girou", "deslocou" ou "invertidas" para descrever as transformações. Todas as respostas se referiram a isometrias como reflexão, translação e rotação. Isso demonstrou que, à medida que progrediam pelos níveis de Van Hiele, os alunos substituem uma linguagem cotidiana por termos específicos e comumente utilizados na Geometria.

A questão 3 apresentou uma figura e solicitou aos estudantes que circulassem as figuras congruentes a ela e completassem a seguinte frase: "A figura ___ é obtida a partir da figura 1 através de uma ___________." Além de identificar as figuras equivalentes, os alunos deveriam indicar a transformação realizada, como mostra a Figura 19. A maioria reconheceu as figuras 3 e 4 como congruentes à figura 1, mas alguns também assinalaram a figura 2, que, embora mantivesse a forma, não conservava as medidas.

Figura 19 – Resposta dada por um aluno na questão 3 da atividade VI

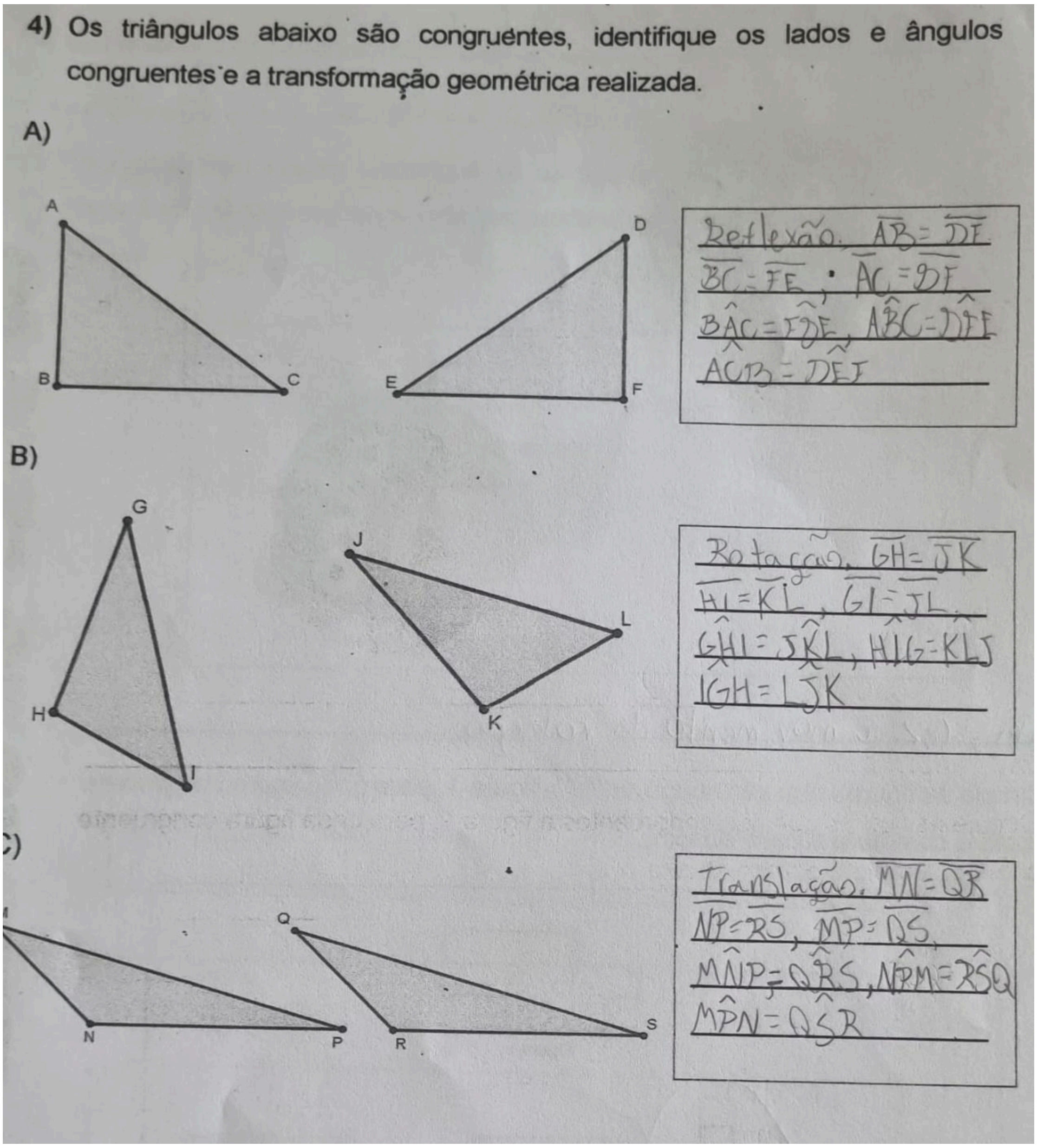


Fonte: Autores (2025)

Entende-se que as atividades anteriores prepararam os alunos para assimilar o conceito de congruência de maneira sequencial, a ordenação das questões permitiu que os participantes pudessem tanto reconhecer as figuras congruentes quanto assimilar o vocabulário adequado. A identificação das figuras congruentes foi facilitada pela compreensão das isometrias, mesmo que alguns estudantes tenham encontrado dificuldades. Essa percepção está alinhada com a Teoria de Van Hiele, segundo a qual proporcionar experiências adequadas aos alunos favorece o aprendizado.

Na questão 4, os alunos deveriam identificar os lados e ângulos congruentes, além da transformação geométrica realizada. Para essa questão, o professor-pesquisador relembrou com a turma a notação utilizada na atividade V. Observou-se que a maioria utilizou a simbologia de forma correta, conforme exemplificado na Figura 20. Como destacado nas atividades anteriores, à medida que os estudantes lidaram com essas representações, aprimoraram seu vocabulário e a escrita matemática.

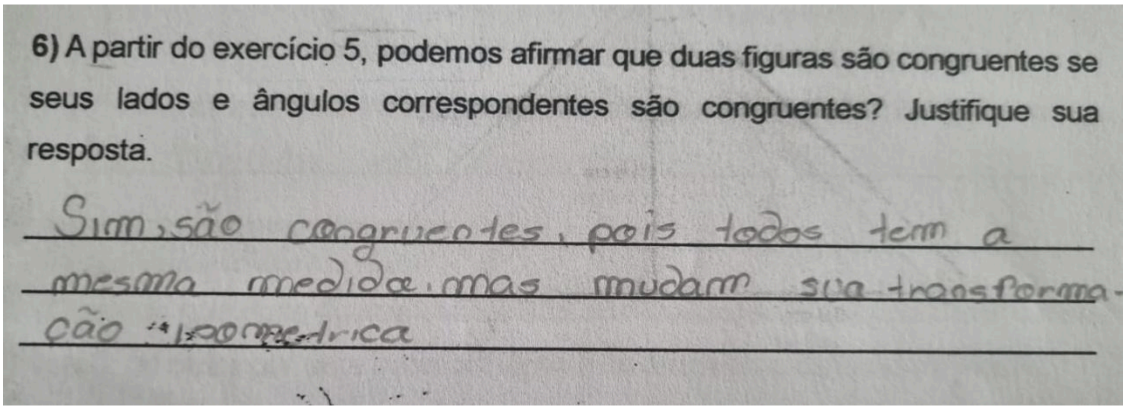
Figura 20 – Resposta dada por um aluno na questão 4 da atividade VI



Fonte: Autores (2025)

Na questão 5, os participantes deveriam representar nas figuras as medidas dos lados e ângulos ausentes. Praticamente todos conseguiram realizar a tarefa com precisão. Já a questão 6 propunha uma reflexão sobre a congruência entre figuras com base na correspondência de seus lados e ângulos, como observado na Figura 21. Essas questões possibilitaram a análise das propriedades das figuras congruentes e incentivaram os alunos a formular uma definição para congruência a partir dos lados e ângulos correspondentes.

Figura 21 – Resposta dada por um aluno na questão 4 da atividade VI



6) A partir do exercício 5, podemos afirmar que duas figuras são congruentes se seus lados e ângulos correspondentes são congruentes? Justifique sua resposta.

Sim, são congruentes, pois todos tem a mesma medida, mas mudam sua transformação isométrica

Fonte: Autores (2025)

A questão 7 apresentou triângulos resultantes de transformações e que possuem um lado ou um vértice em comum. Os alunos deveriam determinar a transformação realizada e os valores de x e y nas figuras. Todos identificaram corretamente a transformação. No entanto, oito estudantes não conseguiram atribuir corretamente as medidas dos lados e ângulos, trocando-as entre si, o que indicou que não estabeleceram corretamente a correspondência entre os elementos das figuras.

A atividade VI evidenciou que as transformações isométricas foram essenciais para a introdução do conceito de congruência de figuras. As atividades anteriores permitiram que os alunos reconhecessem figuras equivalentes e utilizassem uma linguagem mais precisa para descrever a congruência de triângulos e as transformações realizadas, mesmo estando ainda no *nível de Reconhecimento*. Dessa forma, compreendeu-se que a seleção e a organização das atividades desempenharam um papel fundamental no aprendizado dos estudantes.

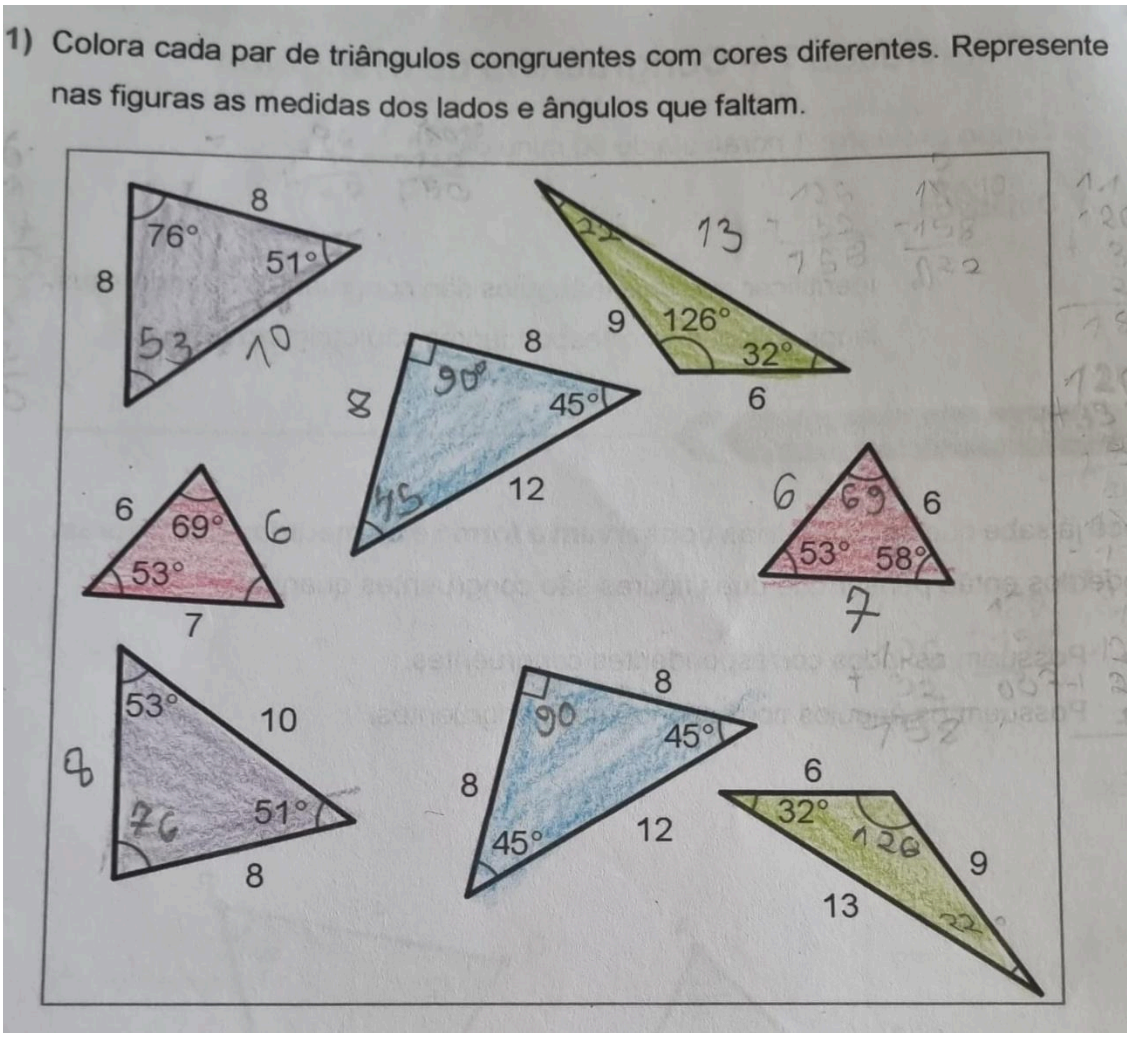
- **ATIVIDADE VII - CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS**

A atividade teve como objetivo explorar as propriedades dos triângulos congruentes, analisando seus lados e ângulos correspondentes. Essa etapa correspondeu ao *nível de Análise* e buscou estabelecer uma definição para congruência de triângulos a partir dos lados e ângulos congruentes, além de preparar os alunos para a introdução dos casos de congruência de triângulos (*Nível de Ordenação*).

Inicialmente, o professor-pesquisador retomou o conceito abordado ao final da atividade VI, na qual os alunos concluíram que triângulos congruentes possuem lados e ângulos correspondentes com medidas iguais. Dessa forma, essa definição é apresentada como uma propriedade de figuras congruentes, permitindo a identificação de medidas das figuras congruentes.

Na primeira questão, os alunos deveriam identificar quais pares de triângulos eram congruentes e completar as medidas ausentes, com exemplificado na Figura 22. Apenas dois estudantes não reconheceram corretamente todos os pares congruentes, o que sugere que possivelmente ainda não adquiriram o *nível de Reconhecimento* e, portanto, tiveram dificuldade em identificar a congruência pela forma global.

Figura 22 – Resposta dada por um aluno na questão 1 da atividade VII

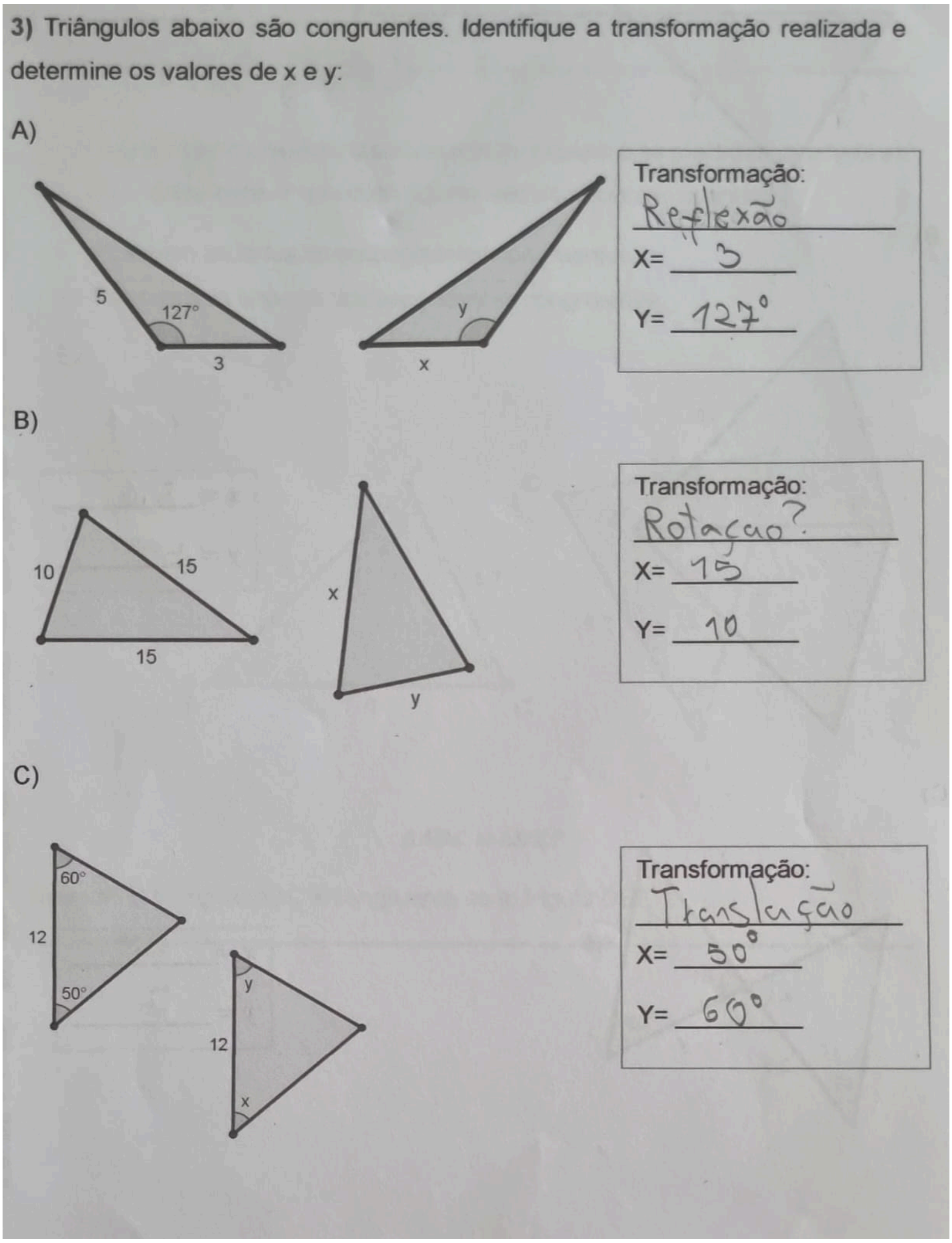


Fonte: Autores (2025)

Outros cinco alunos reconheceram corretamente os triângulos congruentes, mas não atribuíram as medidas corretas aos lados e ângulos correspondentes. Isso indica que já foram capazes de identificar figuras congruentes visualmente, mas ainda encontram dificuldades em associar corretamente os elementos correspondentes. Os demais alunos resolveram a questão sem problemas, demonstrando indícios de que estão no processo de aquisição do *nível de Análise.*

As questões 2 e 3 solicitavam que os alunos representassem, nos triângulos congruentes, as medidas dos lados e ângulos faltantes. No item 3, foi necessário também identificar as transformações realizadas, como mostra a Figura 23. Na questão 2, apenas os dois alunos que não reconheceram os triângulos congruentes na questão 1 tiveram dificuldades em determinar corretamente as medidas. Essa situação evidencia a importância da progressão gradual entre os níveis, já que a compreensão de conceitos mais avançados dependem da consolidação dos anteriores. Na questão 3, apenas quatro alunos não identificaram corretamente as transformações isométricas e as medidas dos triângulos.

Figura 23 – Resposta dada por um aluno na questão 3 da atividade VII



Fonte: Autores (2025)

A questão 4 apresentou pares de triângulos congruentes que compartilham vértices ou lados, desafiando os alunos a determinar as medidas ausentes. Sendo uma variação das questões anteriores, essa atividade mostrou-se mais complexa. Nos itens A e C, onde um dos triângulos foi obtido por uma rotação de 180° em torno de um vértice, houve dúvidas na identificação dos lados correspondentes. No item A, quatro alunos inverteram as medidas dos lados, enquanto no item C sete respostas apontaram corretamente a medida do lado correspondente.

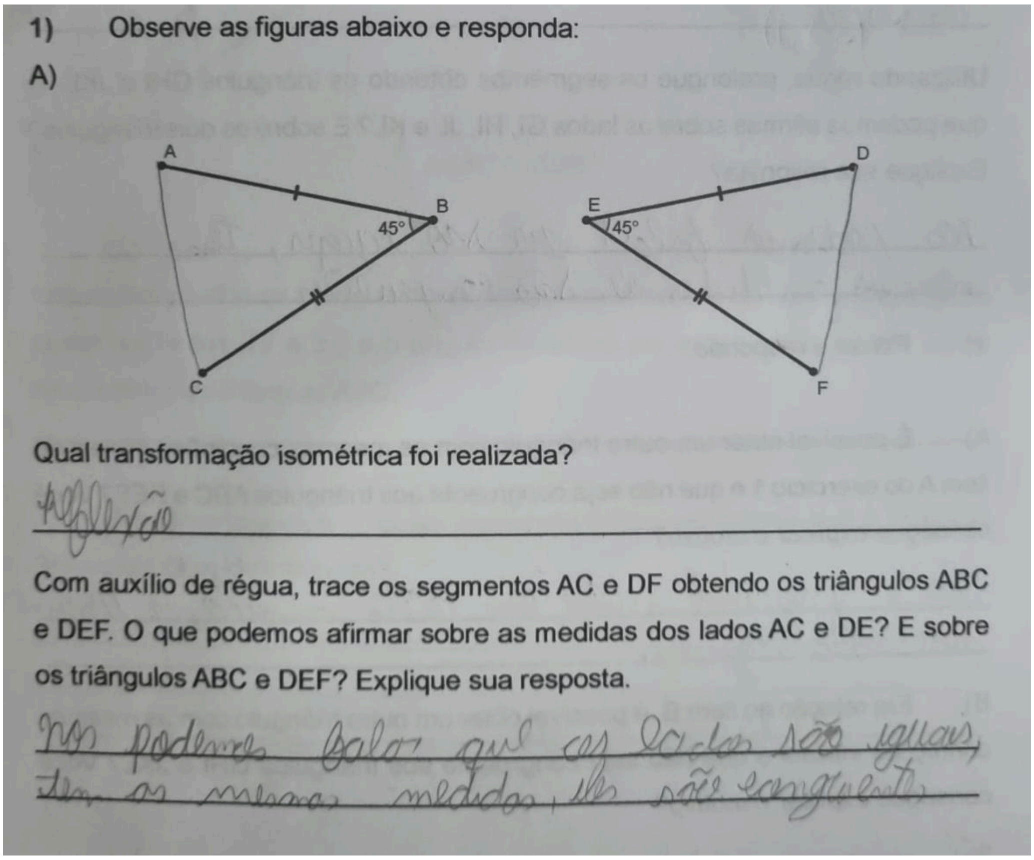
De modo geral, a atividade possibilitou aos alunos aprofundar a compreensão sobre a congruência de triângulos, permitindo que identificassem e analisassem lados e ângulos correspondentes. Observou-se que a maioria conseguiu analisar propriedades das figuras congruentes e reconheceu suas medidas correspondentes. No entanto, alguns estudantes ainda demonstraram dificuldades, especialmente na correspondência entre os lados e ângulos em transformações mais complexas. Essa atividade reforçou a importância de experiências progressivas e estruturadas, garantindo que os alunos progridam pelos níveis de pensamento geométrico de forma a avançar para conceitos mais abstratos, como os casos de congruência de triângulos.

- **ATIVIDADE VIII - CASOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS**

A oitava atividade buscou apresentar os casos de congruência de triângulos, permitindo que os alunos identifiquem quando um triângulo está bem determinado, resultando nos diferentes critérios de congruência. A proposta corresponde ao *terceiro nível* da Teoria de Van Hiele, no qual os estudantes precisam reconhecer os elementos mínimos que garantam a congruência entre triângulos.

A primeira questão apresentou figuras para que os alunos analisassem quando os triângulos estavam bem determinados. Inicialmente, eles utilizaram régua para completar a figura, identificar a transformação realizada e suas características, como mostra a Figura 24. O pesquisador conduz essa etapa estimulando questionamentos e permitindo que os alunos compartilhassem suas percepções e hipóteses sobre as figuras.

Figura 24 – Resposta dada por um aluno na questão 1 (A) da atividade VIII


1) Observe as figuras abaixo e responda:

A)

Qual transformação isométrica foi realizada?

reflexão

Com auxílio de régua, trace os segmentos AC e DF obtendo os triângulos ABC e DEF. O que podemos afirmar sobre as medidas dos lados AC e DE? E sobre os triângulos ABC e DEF? Explique sua resposta.

nós podemos falar que os lados são iguais, tem as mesmas medidas, eles são congruentes

Fonte: Autores (2025)

A maioria dos estudantes reconheceu a congruência dos triângulos. No entanto, dois alunos não a identificaram no item A e quatro não perceberam a congruência no item B. Observou-se que esses alunos, ao completarem a figura, erraram a construção ou não realizaram corretamente a medição dos lados. Entre as respostas corretas, destacou-se a percepção de que os triângulos possuem “lados e ângulos iguais”, “são simétricos” e “congruentes por reflexão e translação”.

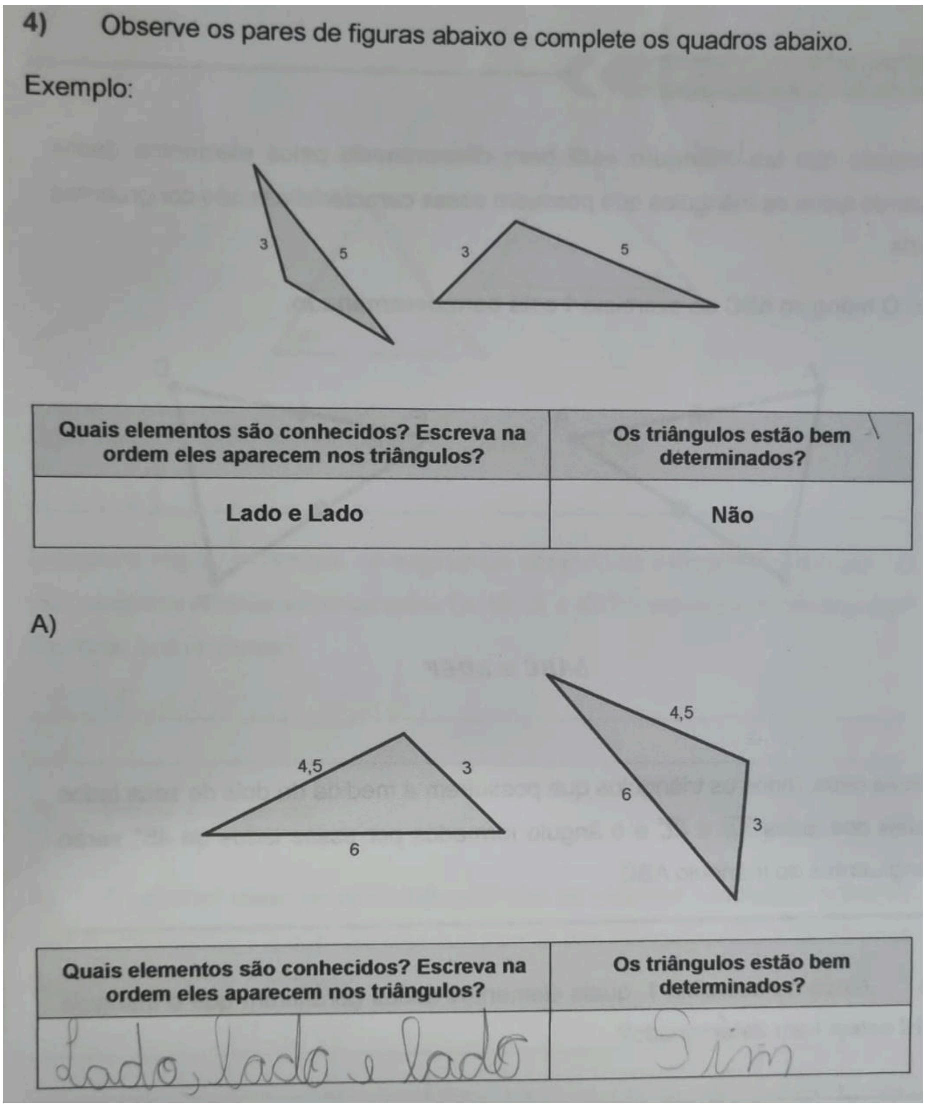
A questão 2 propôs que os alunos avaliassem se seria possível construir outro triângulo com as mesmas condições da questão anterior, mas que não fosse congruente aos apresentados. Apenas quatro alunos não reconheceram a impossibilidade dessa construção, sendo os mesmos que demonstraram dificuldades na questão anterior, demais compreenderam a rigidez do triângulo.

Na justificativa, os alunos usaram expressões como "os triângulos estão rígidos", " os ângulos travaram os triângulos" e " não consegue mudar sua forma". Embora essa linguagem ainda tenha sido informal, essas percepções intuitivas contribuem para a ordenação dos conceitos e posterior formalização dos casos de congruência.

Com base nas análises feitas nas primeiras questões, o pesquisador conduziu os alunos à construção do conceito de triângulo bem determinado. A questão 3 questionou quais elementos garantem que o triângulo do item B da questão 1 estivesse completamente definido. A maioria dos alunos identificou corretamente os elementos necessários e organizou suas respostas com atenção à ordem dos lados e ângulos. Respostas como "o ângulo, o lado entre os ângulos e outro ângulo" e "ângulo, lado, ângulo" indicaram que, mesmo sem a formalização dos critérios de congruência, os estudantes já reconheceram a importância da ordem dos elementos.

Na questão 4, os alunos analisaram pares de triângulos, registraram os elementos conhecidos e verificaram se estão bem determinados, como apresentado na Figura 25. Essa questão introduziu os casos de congruência que foram formalizados posteriormente. Nos itens A e C, todos os alunos acertaram. Já nos itens B e D, os alunos apresentaram maior dificuldade e muitas respostas estavam incorretas.

Figura 25 – Resposta dada por um aluno na questão 4 (A) da atividade VIII



4) Observe os pares de figuras abaixo e complete os quadros abaixo.

Exemplo:

Quais elementos são conhecidos? Escreva na ordem eles aparecem nos triângulos?	Os triângulos estão bem determinados?
Lado e Lado	Não

A)

Quais elementos são conhecidos? Escreva na ordem eles aparecem nos triângulos?	Os triângulos estão bem determinados?
Lado, lado e lado	Sim

Fonte: Autores (2025)

No item B, entende-se que a rotação da figura dificultou que os alunos estabelecessem a ordem correta dos lados e ângulos, comprometendo a identificação da congruência. No item D, muitos não perceberam a presença do ângulo reto e se atentaram apenas aos lados, o que os levou a não reconhecer que os triângulos estavam bem determinados.

A questão 4 apresentou os casos de congruência de triângulos. Embora parte dos alunos não os tenha identificado corretamente nessa questão, ela serviu de base para a compreensão dos três primeiros critérios de congruência, formalizados posteriormente. Com base nesse conceito, a questão 5 propôs que os alunos identificassem os casos de congruência dos triângulos apresentados. Apenas dois estudantes não conseguiram associar corretamente as figuras aos critérios correspondentes.

Por fim, a questão 6 introduziu o último caso de congruência, estabelecendo a relação entre o critério Ângulo, Lado, Ângulo (ALA) e a soma dos ângulos internos do triângulo. A partir dessa relação, os alunos deduziram um quarto critério de congruência, denominado Lado, Ângulo, Ângulo Oposto (LAAo). Essa questão permitiu consolidar o conceito de congruência, incentivando os alunos a deduzirem as condições que determinaram a congruência entre triângulos. Muitos alunos estabeleceram a relação entre os casos ALA e LAAo, mesmo que em alguns momentos foi necessário relembrar aos alunos que a soma dos ângulos internos é 180°.

A oitava atividade proporcionou um avanço significativo no entendimento dos casos de congruência de triângulos, levando os alunos a reconhecerem quando uma figura está bem determinada e quais elementos garantiram essa condição. A maioria conseguiu identificar corretamente os critérios de congruência, demonstrando progressão no pensamento geométrico. No entanto, alguns estudantes ainda apresentaram dificuldades na correspondência entre lados e ângulos, especialmente quando as figuras estavam rotacionadas ou dispostas de maneira diferente. Reconhece-se a necessidade de um trabalho sistemático com os alunos para que os desafios relatados possam ser superados.

6.2 Análise Geral da Sequência Didática

A sequência didática aplicada demonstrou ser uma estratégia eficaz para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. De modo geral, eles avaliaram positivamente as atividades propostas, demonstrando interesse e engajamento ao longo do processo. No entanto, alguns desafios foram identificados durante a aplicação, o que ressalta a necessidade de um acompanhamento sistemático e contínuo para que essas dificuldades sejam superadas e o aprendizado se consolide.

Ao longo das atividades, percebeu-se uma evolução significativa na forma como os estudantes expressavam suas respostas. Inicialmente, suas justificativas baseavam-se na visualização das formas, característica do *nível 1* da Teoria de Van Hiele (*Reconhecimento*). Nesse estágio, os conceitos são compreendidos a partir da percepção visual das propriedades geométricas, sem o uso de definições formais. Com o avanço das atividades, os alunos passaram a utilizar termos matemáticos mais precisos e a formular explicações fundamentadas, evidenciando a transição para os níveis 2 (Análise) e 3 (Ordenação). Esse progresso demonstra não apenas uma ampliação do repertório conceitual dos alunos, mas também uma reorganização de suas estruturas cognitivas, conforme prevê a Teoria.

Além disso, algumas respostas indicaram a assimilação de conceitos pertencentes a níveis superiores ao que foi diretamente trabalhado. Esse aspecto sugere que a sequência didática não apenas cumpriu seu papel imediato, mas também contribuiu para preparar o caminho para avanços futuros no pensamento geométrico dos estudantes. Isso reforça a ideia de que o desenvolvimento cognitivo nessa área ocorre de maneira gradual e pode ser estimulado de forma contínua.

Outro ponto relevante observado foi a interseção entre os níveis de Van Hiele. Embora a Teoria estabeleça uma progressão entre os níveis, percebe-se que, em determinados momentos, os estudantes transitaram entre dois níveis simultaneamente. Essa sobreposição pode ser interpretada como um reflexo da natureza dinâmica do aprendizado, no qual diferentes formas de raciocínio coexistem e se complementam.

Dessa forma, os resultados obtidos indicam que a abordagem utilizada foi positiva, favorecendo tanto a construção quanto a formalização do conhecimento geométrico. No entanto, reforça-se a importância de um acompanhamento contínuo para que os desafios identificados possam ser superados e os alunos avancem na aprendizagem da Geometria.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresenta uma sequência didática composta por oito atividades voltadas para o 8º ano do Ensino Fundamental, contemplando os conteúdos de isometrias e congruência de triângulos. A proposta foi elaborada com base na perspectiva de que as transformações isométricas podem favorecer a compreensão da congruência de triângulos.

A pesquisa teve início com o levantamento do cenário do Ensino de Geometria no Brasil e de suas tendências, buscando situar o contexto em que este estudo se insere e delinear caminhos para o desenvolvimento da sequência didática. Aliado a isso, as orientações presentes na BNCC e no CRMG reforçam a perspectiva de Coxeter e Greitzer (1967), segundo a qual as transformações isométricas oferecem uma noção de congruência, ainda que as habilidades descritas nesses documentos oficiais não explicitem diretamente essa relação.

A elaboração da sequência didática foi fundamentada na Teoria de Van Hiele, com o objetivo de contemplar os três primeiros níveis de pensamento geométrico: Reconhecimento, Análise e Ordenação. Embora a Teoria proponha um modelo estruturado para o Ensino de Geometria, a construção das atividades mostrou-se desafiadora, especialmente no que diz respeito a percorrer as fases de aprendizagem sugeridas pelos autores.

Essa situação reforça os desafios enfrentados pelos professores da Educação Básica, que, além de lidarem com a escassez de recursos didáticos e de tempo para o planejamento, podem apresentar dificuldades em desenvolver atividades fundamentadas teoricamente. Isso evidencia a importância de propostas que articulem teoria e prática, oferecendo subsídios que contribuam de forma concreta e aplicável para o trabalho docente.

Sob a perspectiva de Zabala (1998), a concepção da sequência didática compreendeu três etapas: (1) planejamento; (2) aplicação; (3) avaliação. As atividades foram elaboradas buscando não apenas contemplar as habilidades descritas na BNCC e no CRMG, mas também articular essas habilidades de forma a favorecer a aprendizagem dos alunos. Além disso, procuraram promover a aquisição dos níveis de Van Hiele, sendo organizadas de modo que os estudantes pudessem percorrer as fases de aprendizagem.

Durante a aplicação, de modo geral, foi possível observar a aquisição progressiva dos conceitos e dos níveis de pensamento geométrico propostos por Van Hiele. As atividades relacionadas às isometrias contemplaram os níveis de reconhecimento, análise e alguns aspectos do *nível de Ordenação*, enquanto aquelas voltadas à congruência possibilitaram o trabalho com os três primeiros níveis.

Verificou-se, ainda, a importância do papel ativo do professor durante a aplicação das atividades, promovendo discussões, incentivando a formulação de conjecturas e introduzindo o vocabulário adequado. A estrutura da sequência buscou favorecer essa mediação, oferecendo experiências que respeitam o nível de compreensão dos estudantes e possibilitam a transição entre os níveis de Van Hiele de forma estruturada. Esses elementos, planejados desde a elaboração da proposta, mostraram-se fundamentais para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos ao longo do processo.

Para avaliar os resultados, foi realizada a análise dos protocolos, a qual indicou uma evolução significativa na forma de expressão dos estudantes: inicialmente, suas justificativas baseavam-se apenas na percepção visual das figuras, característica do *nível 1* da Teoria de Van Hiele (*Reconhecimento*). Com o avanço das atividades, passaram a empregar termos próprios da Geometria e justificativas fundamentadas nos conteúdos já trabalhados, indicando uma transição para os níveis 2 (Análise) e 3 (Ordenação). Esse progresso evidencia não apenas a ampliação do vocabulário, mas também a reorganização das estruturas cognitivas dos alunos, em consonância com o referencial teórico.

Além disso, algumas respostas observadas nos protocolos analisados sugerem que os estudantes podem começar a adquirir um nível antes de dominarem completamente o anterior, o que reforça a perspectiva de Nassar e Sant'Anna (2017) de que os alunos podem transitar entre dois níveis de Van Hiele de forma simultânea.

Apesar dos avanços observados, foram identificados desafios ao longo do processo, o que ressalta a importância de um acompanhamento contínuo por parte do professor para consolidar os aprendizados e garantir a progressão dos estudantes no campo da Geometria. Percebeu-se uma maior dificuldade dos alunos em reconhecerem e realizarem a transformação geométrica de rotação. Essa dificuldade ressalta uma maior necessidade de um trabalho contínuo com atividades que envolvam a visualização e a experimentação dessa transformação, bem como sua composição com outras isometrias.

A partir dos resultados obtidos e dos desafios identificados durante o planejamento, aplicação e análise dos protocolos, emergem novas questões:

- Como adaptar e implementar propostas didáticas para o Ensino de Geometria fundamentadas na Teoria de Van Hiele em contextos escolares marcados por diferentes condições de infraestrutura, limitações de carga horária e variados níveis de formação docente?
- De que forma as transformações isométricas podem ser integradas com outros campos da Matemática, de modo a favorecer o aprendizado dos estudantes?

Por fim, compreende-se que esta pesquisa não se constitui como um ponto final, mas como uma etapa em um processo contínuo de investigação e aprimoramento das práticas pedagógicas no Ensino de Geometria. Ao propor, aplicar e refletir sobre uma sequência didática, reafirma-se a importância de um ensino que articule teoria a prática em sala de aula. Acredita-se, assim, que o aprofundamento dessas discussões poderá contribuir para a construção de novas propostas de ensino, fortalecendo o aprendizado dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. A. A; NACARATO, A. M. Atuais tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria: um olhar sobre os anais dos ENEM's. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática.** Recife, 2004.

BANSILAL, S.; NAIDOO, J. Learners engaging with transformation geometry. **South Africa Journal of Education**, 32, p. 26-39, 2012.

BASTOS, R. Simetria. Notas sobre o ensino da geometria (GTG). **Educação e Matemática**, n. 88, 2006.

BEHR, M. J. et al. Rational number concepts. **Acquisition of mathematics concepts and processes**, v. 91, p. 126, 1983.

BILAC, C. U. **Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do cabri-géomètre.** 2008. 194 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v.24, n.1, p. 103–128, 2015.

COSTA, A. P. A Geometria na educação básica: um panorama sobre o seu ensino no Brasil. **Revista Educação Matemática em Foco**, Campina Grande, v. 9, n. 1, p. 128-152, jan./abr. 2020.

COXETER, H. S. M; GREITZER, S. L. **Geometry Revisited**. The Mathematical Association of America. Washington. USA. 1967.

DE VILLIERS, M.. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matemática Pesquisa**, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.

DUARTE, A. R. S.; SILVA, M. C. L. da. Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Práxis Educativa**, [S. l.], v. 1, n. 1, p. 87–93, 2009. Disponível em: https://revistas.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/271. Acesso em: 26 maio. 2025.

FERREIRA, F. A. **Demonstrações em geometria euclidiana: o uso da sequência didática como recurso metodológico para seu ensino**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC- MINAS), Belo Horizonte, 2008.

GRANDO, R. C. Recursos didáticos na Educação Matemática: jogos e materiais manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica-ISSN: 2236-2150**, v. 5, n. 02, 2015.

KALEFF, A. M. M. R. Tomando o ensino de geometria em nossas mãos. **Educação Matemática em Revista**, v. 2, n. 2, p. 19-25, 1994.

KALEFF, A. M. Uma aplicação do conceito de simetria axial plana visando a um ensino interdisciplinar. Zetetiké, Campinas, n. 2, p. 85 91, 1994a.

KALEFF, A. M. M. R.; et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de Van Hiele. **Bolema**, v. 9, n.10, p. 21-30, 1994b.

KALEFF, A. M. M. R. **Memórias de uma trajetória acadêmica de perseverança.** Niterói/RJ: CEAD, 2016. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/livro_ana.pdf. Acesso em: 11 novembro de 2024.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, P. A. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1998.

LORENZATO, S. A. Porque não ensinar Geometria?. **A Educação Matemática em Revista**, v.3, n. 4, p. 3-13, 1995.

MAIA, C. M. F. **As isometrias na inovação curricular e a formação de professores de Matemática do Ensino Básico.** 2014. 332 f. Tese (Doutorado) - Departamento de Ciências da Educação e do Património, Universidade Portucalense, Porto, 2014.

MASHINGAIDZE, S. The Teaching of Geometric (Isometric) Transformations at Secondary School Level: What Approach to Use and Why? **Asian Social Science**, v.8, n.15, p.197-210, 2012.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?. **Pro-Posições**, v. 3, n. 1, p. 39-54, 1992.

MINAS GERAIS. Currículo Referência de Minas Gerais. Minas Gerais, 2018. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1MWIv4JKcei5_OMhpMFF10ENdhgpsH0FW/view Acesso em: 11 abr. 2025.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem.** 3. Ed. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 2009.

NASSER, L. Níveis de van Hiele: uma explicação definitiva para as dificuldades em Geometria. **Boletim do GEPEM**. n. 0, p. 29, 1991.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 3° ed. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 2017.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. **Reunião da ANPED**, v. 23, p. 24, 2000.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, 1993.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica.** 1989. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

RAFAEL, J. A. M; MIRANDA, P. R. Onde está a Simetria? Uma investigação nos documentos oficiais e livros didáticos de Matemática. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, [S. l.], v. 2, n. 1, 2019. Disponível em: https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/27362. Acesso em: 7 jun. 2025.

RODRIGUES, C. R. F. **Potencialidades do Ensino das Transformações Geométricas no Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado, Porto Alegre: UFRGS, 2012.

SILVA, C. V. **A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da Simetria Ortogonal.** 2015. 312 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

SANTOS, L. F.; TELES, R. A. M.. Pintar, Dobrar, Recortar e Desenhar: o ensino da Simetria e Artes Visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 26, p. 291-310, 2012.

SOARES, F. S. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Avanço ou Retrocesso?** Dissertação Mestrado em Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro,
2001.

ZABALA, A. A prática educativa como ensinar. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Reimpressão 2010. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

Prezados pais e responsáveis,

O desenvolvimento do pensamento geométrico é fundamental para a compreensão e a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento e em situações cotidianas. O Ensino da Geometria, embora desafiador, desempenha um papel central no desenvolvimento do raciocínio lógico e espacial. Ao aprender Geometria, os alunos adquirem habilidades para compreender formas, tamanhos, medidas e relações entre objetos, facilitando a interpretação de espaços, a análise de proporções e a capacidade de resolver problemas de maneira estruturada e visual.

Estamos convidando os estudantes dos 8° anos a participar de uma pesquisa de mestrado vinculada ao programa PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) do CEFET-MG. O objetivo desse estudo é investigar como uma sequência didática sobre Geometria pode contribuir para o aprendizado e desenvolvimento das habilidades geométricas dos estudantes. A mesma será conduzida pelo professor de Matemática Luiz Fernando Bento, sob a orientação da professora Dra. Fernanda Aparecida Ferreira.

As atividades ocorrerão no mês de novembro, durante as aulas regulares de Matemática, e incluirão temas do currículo de matemática do Ensino Fundamental. Espera-se que essa experiência possa trazer benefícios educacionais, proporcionando um maior entendimento dos conteúdos geométricos. A participação é completamente voluntária, e o estudante poderá se retirar da pesquisa a qualquer momento, sem que haja qualquer penalidade, prejuízo em sua avaliação escolar ou tratamento diferenciado em sala de aula.

Os dados coletados nesta pesquisa poderão ser apresentados em eventos da área de Ensino e Educação Matemática e publicados em revistas científicas, bem como farão parte da dissertação que está em fase de escrita. Destaca-se que os dados coletados serão tratados de maneira confidencial, garantindo a privacidade e o anonimato dos participantes. **NENHUMA** informação que possa identificar o estudante será divulgada, e os dados obtidos serão utilizados para análise da pesquisa acadêmica.

Este termo de consentimento está sendo entregue em duas vias: uma ficará com o(a) responsável e a outra será arquivada pelos pesquisadores, conforme as normas legais. Estamos disponíveis para esclarecer quaisquer dúvidas. Caso deseje mais informações, entre em contato conosco:

Prof. Luiz Fernando Bento – [redacted]

Profª Dra. Fernanda Aparecida Ferreira – [redacted]

Este termo foi elaborado em conformidade com a Resolução CNS 466/2012, que regulamenta as pesquisas com seres humanos no Brasil.

[ ] AUTORIZO a participação na pesquisa.
[ ] NÃO AUTORIZO a participação na pesquisa.

____

Assinatura do responsável

TERMO DE ASSENTIMENTO

Prezado estudante,

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa de mestrado no âmbito do PROFMAT com o objetivo de investigar como uma sequência de atividades didáticas sobre Geometria pode contribuir para o aprendizado e desenvolvimento das habilidades geométricas. Essas atividades acontecerão em novembro, durante as aulas regulares de Matemática, e abordarão temas do currículo de Matemática do Ensino Fundamental visando proporcionar um maior entendimento dos conteúdos geométricos. A pesquisa será conduzida pelo professor de Matemática Luiz Fernando Bento, sob a orientação da professora Dra. Fernanda Aparecida Ferreira. Sua participação é voluntária, e você pode optar por não participar ou desistir a qualquer momento, sem qualquer prejuízo. Todas as informações coletadas serão mantidas em sigilo e utilizadas exclusivamente para fins de pesquisa, garantindo o anonimato dos participantes.

Contatos:

Prof. Luiz Fernando Bento – [redacted]
Profa Dra. Fernanda Aparecida Ferreira – [redacted]

Caso concorde em participar, pedimos que assine abaixo.

____

Assinatura do participante

APÊNDICE B - TERMO DE ANUÊNCIA INSTITUCIONAL

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE

TERMO DE ANUÊNCIA INSTITUCIONAL

Essa renomada Instituição de Ensino e alguns dos seus estudantes matriculados no Ensino Fundamental II, estão sendo convidados a participar de uma pesquisa com objetivo de investigar como uma sequência didática sobre Geometria pode contribuir para o aprendizado e desenvolvimento das habilidades geométricas dos estudantes.

A pesquisa está sendo realizada no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede - PROFMAT, no Centro Federal de Educação Tecnológica de Matemática (CEFET-MG), e tem por objetivo geral planejar, desenvolver e aplicar uma proposta de ensino de Geometria Euclidiana Plana para o Ensino fundamental II sobre isometrias e congruência de triângulos.

A referida pesquisa está sob orientação da Doutora Fernanda Aparecida Ferreira, pertencente ao quadro de docentes do PROFMAT- CEFET/MG.

Solicitamos sua colaboração para autorizar que a Instituição e os estudantes selecionados pelo pesquisador Luiz Fernando Bento, professor nesta Instituição, possa realizar a aplicação da referida sequência didática e coletar informações que poderão ajudar no refinamento da proposta e, além disso, trazer elementos importantes sobre o Ensino de Geometria na Educação Fundamental.

Destaca-se que os dados coletados nesta pesquisa poderão ser apresentados em eventos da área de Ensino e Educação Matemática e publicados em revistas científicas, bem como farão parte da dissertação que está em fase de escrita. Entretanto, os dados da Instituição e dos estudantes envolvidos são confidenciais e, na publicação dos resultados, tais informações não serão divulgadas.

[ ] Autorizo a participação na pesquisa.

[ ] NÃO autorizo a participação na pesquisa.

____

Assinatura do representante da Instituição de Ensino

____

Luiz Fernando Bento

____

Fernanda Aparecida Ferreira

Contatos:

Prof. Luiz Fernando Bento – [redacted]

Profª Dra. Fernanda Aparecida Ferreira – [redacted]

APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS

QUESTIONÁRIO

Esse questionário é destinado aos alunos do 8° ano que realizaram as atividades sobre transformações isométricas e congruências de triângulos.

Nome completo:____

1) Os tópicos que estudamos ao longo da sequência de atividades são assuntos tratados na área de Geometria Plana. Em uma escala de 1 a 5, como você classificaria seu interesse por Geometria.

1	2	3	4	5
○	○	○	○	○

2) Ainda na escala de 1 a 5, como você classificaria sua facilidade em aprender tópicos de Geometria?

1	2	3	4	5
○	○	○	○	○

3) Em relação aos assuntos tratados nas atividades realizadas, em uma escala de 1 a 5, como você classificaria sua dificuldade em realizar as tarefas.

1	2	3	4	5
○	○	○	○	○

4) Em uma escala de 1 a 5, marque o quanto você gostou de realizar as atividades.

1	2	3	4	5
○	○	○	○	○

5) Você já havia estudado as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) anteriormente?

○ Sim

○ Não

6) No desenvolvimento das atividades sobre as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação), você conseguiu perceber alguma relação dos conceitos trabalhados com outras áreas ou até mesmo outros assuntos trabalhados anteriormente na Geometria?

○ Sim

○ Não

Se você respondeu "sim" à questão anterior, exemplifique.

---

7) Em uma escala de 1 a 5, como você classificaria suas habilidades em reconhecer as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação), após realizar as atividades.

1	2	3	4	5
○	○	○	○	○

8) Você já havia estudado congruência de triângulos anteriormente?

○ Sim

○ Não

9) No desenvolvimento das atividades sobre congruências de triângulos, você conseguiu perceber alguma relação dos conceitos trabalhados com outras áreas ou até mesmo outros assuntos trabalhados anteriormente na Geometria?

○ Sim

○ Não

Se você respondeu "sim" à questão anterior, exemplifique.

---

10) Em uma escala de 1 a 5, como você classificaria suas habilidades em reconhecer triângulos congruentes, após realizar as atividades.

1	2	3	4	5
○	○	○	○	○

11) Em uma escala de 1 a 5, como você classificaria suas habilidades para ordenar os elementos do triângulos e identificar os casos de congruências de triângulos, após realizar as atividades.

1	2	3	4	5
○	○	○	○	○

12) Fique à vontade para acrescentar qualquer informação, comentário ou observação que você considere relevante.
