Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ALESSANDRO FERREIRA DA SILVA

Explorando a Relação de Euler: um relato de experiência com oficinas educativas no ensino de Geometria Espacial

GOIÂNIA
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

ALESSANDRO FERREIRA DA SILVA

3. Título do trabalho

Explorando a Relação de Euler: um relato de experiência com oficinas educativas no ensino de Geometria Espacial

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Hiuri Fellipe Santos Dos Reis**, **Professor do Magistério Superior**, em 14/07/2025, às 16:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Alessandro Ferreira Da Silva**, **Discente**, em 14/07/2025, às 17:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5502263** e o código CRC **7B1CC544**.

Referência: Processo nº 23070.032527/2025-31 SEI nº 5502263

ALESSANDRO FERREIRA DA SILVA

Explorando a Relação de Euler: um relato de experiência com oficinas educativas no ensino de Geometria Espacial

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística (IME), da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Hiuri Fellipe Santos dos Reis

GOIÂNIA
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Alessandro Ferreira da
Explorando a Relação de Euler [manuscrito] : um relato de experiência com oficinas educativas no ensino de Geometria Espacial / Alessandro Ferreira da Silva. - 2025.
CV, 105 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Hiuri Fellipe Santos dos Reis.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2025.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Geometria Espacial. 2. Ensino de Matemática. 3. Oficinas Educativas. 4. Materiais Manipuláveis. 5. Pensamento Geométrico. I. Reis, Hiuri Fellipe Santos dos, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **17** da sessão de Defesa de Dissertação de **Alessandro Ferreira da Silva**, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

Aos quatros dias do mês de julho de dois mil e vinte e cinco, a partir das 14:00h, por meio de videoconferência (meet.google.com/igg-havv-obe), realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Explorando a Relação de Euler: um relato de experiência com oficinas educativas no ensino de Geometria Espacial"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador Professor Doutor Hiuri Fellipe Santos dos Reis (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Sunamita Souza Silva (IME/UFG) e o Professor Doutor Fábio Nunes da Silva (UFOB), membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Hiuri Fellipe Santos dos Reis, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos quatros dias do mês de julho de dois mil e vinte e cinco.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Fábio Nunes da Silva**, **Usuário Externo**, em 04/07/2025, às 16:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Hiuri Fellipe Santos Dos Reis**, **Professor do Magistério Superior**, em 07/07/2025, às 09:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Sunamita Souza Silva**, **Professora do Magistério Superior**, em 10/07/2025, às 18:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5455181** e o código CRC **455AEBA6**.

Referência: Processo nº 23070.032527/2025-31 SEI nº 5455181

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Alessandro Ferreira da Silva graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás em 2002. Professor efetivo da rede estadual de ensino de Goiás desde 2004. Professor efetivo da rede municipal de ensino da Prefeitura de Goiânia desde 2011.

Dedico este trabalho à minha esposa Eleusa, e aos meus filhos, Ananda, Júlia e Miguel Leonardo, presentes que Deus me deu.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida, e por me conceder tantas oportunidades para meu desenvolvimento como essa de terminar um curso de pós-graduação em nível de Mestrado em uma instituição de excelência.

Aos meus pais, Antônio e Alzira, que cuidadosamente cuidaram de mim na infância e ainda hoje demonstram a mesma dedicação e preocupação, ensinando-me princípios e valores que sempre levarei comigo, alegrando-se comigo em cada nova conquista.

À minha esposa Eleusa, pelo apoio e incentivo sempre constantes, muitas vezes acreditando em mim até mais do que eu mesmo, percebendo capacidades em mim que nem sempre eu percebo, sendo minha amiga, conselheira e namorada, vibrando comigo a cada etapa concluída do curso.

A meus filhos, Ananda, Júlia e Miguel Leonardo, que muitas vezes tiveram de renunciar a minha atenção e companhia, seja em casa, seja em passeios de férias enquanto eu me isolava para me dedicar às provas das disciplinas e especialmente na preparação para o temido Exame Nacional de Qualificação.

A meus queridos professores, Paulo Henrique, Alacyr José, Marcelo Ferro, Ana Paula, Kamila, Jhone Caldeira, Geci José, Marcio Augusto e Ole Peter, que sempre fizeram o máximo que puderam para nos entregar um ensino de excelência e em especial ao professor Hiuri Fellipe Santos dos Reis, pela sua excelente orientação, paciência e dedicação em ajudar, e ao querido professor e coordenador do curso, Marcelo Almeida, sem dúvida alguém que teve papel importante em minha formação por sua dedicação e competência profissional.

Aos meus queridos colegas de curso, pessoas com as quais vivi momentos muito agradáveis, estabeleci parcerias, troquei conhecimentos e recebi socorro nos momentos mais difíceis, em especial aos colegas Aline, Jordana, Wallison, Ricardo, Daniel, Marcos, Ivan, Marília, Samuel, Dhiego, Wilington, Lucas e Railton.

Ao meu querido amigo e colega de trabalho, Eliezer Gouveia, in memorian, que iniciou o curso de mestrado conosco, sendo o primeiro a me dar notícia de minha aprovação, e vibrando por estarmos iniciando o tão aguardado PROFMAT, mas que infelizmente, acometido por uma doença, acabou falecendo durante o curso, deixando para nós saudades e ao mesmo tempo admiração pelo seu caráter e amizade.

Enfim, a todos aqueles que direta ou indiretamente me auxiliaram no desenvolvimento desse trabalho, me proporcionando crescimento profissional e pessoal.

“A persistência é o caminho do êxito.”

Charles Chaplin

Resumo

SILVA, Alessandro Ferreira da. **Explorando a Relação de Euler: um relato de experiência com oficinas educativas no ensino de Geometria Espacial.** Goiânia, 2025. 105p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O ensino da Geometria Espacial no Brasil enfrenta desafios relacionados à falta de metodologias de ensino adequadas, e geralmente não explora de forma sistemática a visualização, construção e manipulação de formas e objetos tridimensionais, dificultando o processo de aprendizagem dos alunos. A predominância de abordagens teóricas e tradicionais, utilizando-se de representações tridimensionais em meios bidimensionais, como a lousa ou o livro didático, contribui para a desmotivação e a dificuldade na construção do pensamento espacial. Com base em estudos desenvolvidos na área da educação e do ensino de matemática, esta pesquisa investiga o impacto do uso de oficinas educativas no ensino da Geometria Espacial em turmas do 8º ano do ensino fundamental da Escola Municipal Dalka Leles, em Goiânia. A metodologia adotada é qualitativa, com foco na aplicação de atividades práticas e materiais manipuláveis para explorar conceitos como faces, vértices e arestas em poliedros e a Relação de Euler identificada em poliedros convexos em geral. Espera-se que a pesquisa contribua para a adoção de metodologias mais dinâmicas e interativas, promovendo uma aprendizagem mais efetiva e que estimule o interesse dos alunos pela Matemática.

Palavras-chave: Geometria Espacial; ensino de Matemática; oficinas educativas; materiais manipuláveis; pensamento geométrico.

Abstract

SILVA, Alessandro Ferreira da. **Exploring Euler's Formula: An Experience Report on Educational Workshops in the teaching of Solid Geometry.** Goiânia, 2025. 105p. Master's Dissertation. Institute of Mathematics and Statistics, Federal University of Goiás.

The teaching of Spatial Geometry in Brazil faces challenges related to the lack of appropriate teaching methodologies, often failing to systematically explore visualization, construction, and manipulation of three-dimensional forms and objects, hindering students' learning process. The predominance of traditional and theoretical approaches, usually employing two-dimensional representations of three-dimensional figures on media such as blackboards or textbooks, contributes to student demotivation and difficulty in developing spatial reasoning. Based on studies developed in the field of education and mathematics teaching, this research investigates the impact of educational workshops on the teaching of Spatial Geometry with 9th-grade students at Dalka Leles Municipal School, in Goiânia. The methodology adopted is qualitative, focusing on practical activities and manipulable materials to explore concepts such as faces, vertices, and edges of polyhedra, as well as Euler’s relation identified in convex polyhedra in general. It is expected that this research will contribute to the adoption of more dynamic and interactive methodologies, fostering more effective learning and stimulating student interest in mathematics.
Keywords: Spatial Geometry; mathematics education; educational workshops; manipulable materials; geometric reasoning.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática no Brasil tem sido alvo de críticas recorrentes nas últimas décadas, especialmente no que tange à sua eficácia e à escassa articulação entre os conteúdos escolares e a realidade dos estudantes (D'Ambrosio, 2004; Bicudo & Borba, 2006). No campo específico da Geometria Espacial, observa-se uma persistente dificuldade de aprendizagem relacionada, em grande parte, à forma como os conceitos são apresentados: de modo abstrato, com ênfase na memorização e no uso predominante de recursos bidimensionais, como quadros e livros didáticos. Essa abordagem, centrada na simples transmissão de saberes, limita o desenvolvimento do pensamento espacial e a construção de significados, afastando os alunos de uma compreensão mais concreta e significativa dos conteúdos geométricos. Conforme destaca Ausubel (1968), a aprendizagem significativa ocorre quando novas informações se conectam de maneira substantiva à estrutura cognitiva do aluno, o que dificilmente acontece quando os conteúdos são desprovidos de contextualização e visualização adequada.

Neste contexto, a presente pesquisa propõe investigar a utilização de oficinas educativas com materiais concretos como estratégia pedagógica para o ensino de Geometria Espacial, voltada para turmas de 8º ano do Ensino Fundamental II. Essas oficinas serão estruturadas abordando temas centrais da Geometria Espacial, tais como a compreensão conceitual e identificação de poliedros e corpos redondos, identificação dos elementos constituintes dos poliedros (vértices, faces e arestas), compreensão da relação de Euler e exploração das vistas e planificações de sólidos geométricos.

A escolha do tema justifica-se inicialmente pela relevância apontada por teorias da aprendizagem, como as de Piaget (1976) e Van Hiele (1986), que destacam a importância da manipulação concreta e da interação direta com objetos tridimensionais para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Jean Piaget salienta que o pensamento abstrato emerge justamente da interação do sujeito com o meio físico, sobretudo na fase operatória concreta, crucial para a assimilação efetiva dos conceitos matemáticos. Complementarmente, a teoria dos níveis de pensamento geométrico de Van Hiele reforça que os estudantes progridem em sua compreensão espacial inicialmente por meio da percepção visual das formas, evoluindo posteriormente para níveis mais abstratos, envolvendo propriedades e relações espaciais.

Ademais, a justificativa também decorre da experiência docente acumulada ao longo de mais de 20 anos no ensino básico em Goiânia, especialmente pela observação das limitações impostas pela ausência de recursos didáticos adequados ao ensino da Geometria Espacial. Essa carência metodológica tem sido apontada por diversos autores da área da Educação Matemática como um fator determinante para as dificuldades dos estudantes em internalizar plenamente os conteúdos geométricos (D'Ambrosio, 2004).

Considera-se, ainda, a importância de criar condições favoráveis para uma aprendizagem significativa, segundo os princípios defendidos por Ausubel (2003), na qual novos conhecimentos devem estar diretamente vinculados a conceitos previamente adquiridos, proporcionando uma estrutura cognitiva mais sólida e duradoura.

Assim, espera-se com esta pesquisa contribuir para uma reflexão crítica sobre as práticas pedagógicas em Geometria Espacial, demonstrando o potencial das metodologias ativas e do uso de materiais concretos não apenas como facilitadores da compreensão conceitual, mas também como meios para estimular o interesse e o engajamento dos alunos na Matemática. Em síntese, este estudo pretende fornecer subsídios teóricos e práticos que possam colaborar efetivamente com o aprimoramento das metodologias adotadas pelos educadores, possibilitando um ensino mais acessível e eficiente para todos os alunos.

1.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem como objetivo geral relatar a experiência da aplicação de oficinas educativas para o ensino de Geometria Espacial em uma escola da rede pública municipal de Goiânia, utilizando-se materiais manipuláveis que permitam aos alunos extrapolarem o uso de representações bidimensionais (livros, lousa e cadernos) no estudo de Geometria e interagir diretamente com formas e objetos tridimensionais. A partir disso, busca-se a construção de um ambiente tridimensional de aprendizagem, entendido como um espaço educativo no qual os estudantes têm a oportunidade de manipular concretamente modelos geométricos, visualizar as formas em diferentes perspectivas, explorar suas propriedades e relações espaciais, e desenvolver o pensamento geométrico de maneira ativa e investigativa. Esse ambiente é caracterizado pela presença de materiais físicos (como o Vertex, Geomag, sólidos de madeira ou papel cartão), pela organização das atividades em dinâmicas de grupo e pela mediação docente que estimula a reflexão, o diálogo e a construção coletiva do conhecimento, tornando o processo de aprendizagem mais significativo, visual e concreto para os alunos.

O presente estudo visa discutir a experiência de aplicação de uma oficina educativa voltada à construção e manipulação de sólidos geométricos, utilizando-se diferentes materiais didáticos, tais como o Vertex e o Geomag (que podem ser adquiridos pela internet), e também sólidos de papelão, madeira, caixas de produtos de supermercado, varetas, etc., pode impactar a aprendizagem dos alunos, e possivelmente tornar os conceitos geométricos mais acessíveis e favorecendo um maior engajamento com a Matemática, e consequentemente maior aprendizado dessa disciplina.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analisar como as oficinas pedagógicas influenciam a compreensão conceitual dos alunos em Geometria.
- Avaliar o impacto das oficinas pedagógicas na motivação e interesse dos alunos pela disciplina de Geometria.
- Acompanhar o desenvolvimento de habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas dos alunos participantes das oficinas pedagógicas.
- Discutir a colaboração e o trabalho em equipe facilitados pelas oficinas pedagógicas em relação ao método tradicional de ensino.
- Identificar as percepções dos professores e dos alunos sobre a implementação das oficinas pedagógicas de Geometria.
- Explorar as propriedades dos poliedros e suas relações fundamentais. Pretende-se proporcionar aos alunos uma vivência prática em que possam identificar e compreender as relações entre vértices, arestas e faces nos poliedros, utilizando materi-

ais concretos que permitam a visualização tridimensional das estruturas geométricas, superando as limitações das representações bidimensionais.

- Discutir conceitos essenciais da Geometria Espacial, como planificações, dualidade e a relação de Euler. A manipulação de modelos físicos permitirá que os alunos observem e experimentem a planificação de sólidos geométricos, estabelecendo conexões entre suas representações 2D e 3D. Além disso, será possível explorar a dualidade entre poliedros e verificar, na prática, a validade relação de Euler ($V - A + F = 2$), favorecendo uma compreensão mais intuitiva e investigativa desses conceitos.

- Descrever a metodologia empregada nas oficinas e sua aplicabilidade no ensino da Geometria Espacial; Este estudo pretende apresentar, de forma detalhada, como as oficinas foram organizadas e conduzidas, destacando os materiais utilizados, o planejamento das atividades e as estratégias didáticas adotadas para criar um ambiente tridimensional de aprendizado. A documentação desse processo poderá servir como referência para outros educadores interessados em implementar abordagens similares em suas práticas pedagógicas.

- Observar as percepções dos alunos e do professor sobre a atividade; Além de observar o impacto da manipulação dos sólidos geométricos no aprendizado dos alunos, busca-se compreender como essa abordagem influencia a motivação e o interesse pela Geometria Espacial. A pesquisa também pretende refletir sobre o papel do professor nesse contexto, avaliando os desafios e as potencialidades do uso de materiais manipuláveis como ferramenta didática capaz de proporcionar uma experiência imersiva e interativa no ensino da Matemática.

Ao relatar essa experiência, espera-se que este estudo possa contribuir para a discussão sobre metodologias promissoras no ensino da Matemática, oferecendo subsídios tanto para professores que enfrentam dificuldades na abordagem da Geometria Espacial quanto para pesquisadores interessados em práticas pedagógicas que favoreçam o desenvolvimento do pensamento geométrico. Mais do que isso, pretende-se destacar a importância de um ensino que vá além da transmissão de conteúdos teóricos e do uso exclusivo de recursos bidimensionais, promovendo uma aprendizagem ativa, investigativa e envolvente, na qual o aluno possa ver, tocar, manipular e experimentar objetos tridimensionais, consolidando de maneira mais eficaz os conceitos geométricos fundamentais.

Para apresentar nosso trabalho, nossa dissertação está estruturada em seis capítulos, além desta introdução que figura como primeiro capítulo, e das referências. A seguir, apresenta-se um breve resumo do conteúdo abordado em cada um deles, visando orientar o leitor sobre o percurso da pesquisa.

O Capítulo 2, “Referencial Teórico”, estabelece as bases conceituais que sustentam a pesquisa. Discute-se a importância fundamental da Geometria Espacial para o desenvolvimento do pensamento matemático e suas conexões com a BNCC. Abordam-se as principais dificuldades enfrentadas no seu ensino e aprendizagem, e exploram-se as contribuições de teorias da aprendizagem como as de Piaget, Van Hiele e Ausubel. Ademais, aprofunda-se a discussão sobre o papel dos materiais manipuláveis e apresenta-se a Relação de Euler como foco temático relevante para a oficina proposta.

O Capítulo 3, “Aspectos Relevantes Relacionados ao Ensino de Geometria no Contexto Educacional Brasileiro”, discute aspectos centrais relacionados ao ensino de Geometria no contexto educacional brasileiro, abordando sua relevância na formação do estudante, seu desenvolvimento histórico, as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e recomendações metodológicas para a prática docente. Destaca-se neste capítulo, a importância da Geometria na construção do pensamento espacial, do raciocínio lógico e da capacidade de abstração, evidenciando seu papel interdisciplinar e sua aplicabilidade em contextos cotidianos e profissionais. Aponta-se, ainda, que o ensino tradicional baseado em abordagens expositivas e bidimensionais contribuiu para desinteresse e dificuldades de aprendizagem. Em contraponto, discute-se a emergência de metodologias ativas e o uso de tecnologias digitais e materiais manipuláveis como alternativas mais eficazes. A BNCC é apresentada como um marco importante na valorização do ensino geométrico contextualizado e significativo. Por fim, o texto ressalta a necessidade da formação continuada de professores como condição essencial para a implementação de práticas pedagógicas inovadoras e eficazes.

O Capítulo 4, “Considerações Sobre a Oficina”, apresenta a estruturação da oficina pedagógica proposta neste trabalho, cujo objetivo central é investigar a eficácia do uso de oficinas educativas no processo de ensino-aprendizagem da Geometria Espacial no contexto escolar, com foco especial em estudantes da rede pública municipal e estadual da cidade de Goiânia, e pode ser usada como produto educacional por outros colegas professores que assim desejarem.

O Capítulo 5, “Entrelaçando História, Matemática e Prática Docente na Geometria Espacial”, procura apresentar os conceitos matemáticos abordados na oficina de forma simples, da forma mesmo em que são apresentados aos alunos, com definições curtas e diretas, bem como uma contextualização histórica, sendo dada uma atenção especial para Leonard Euler, autor da famosa equação V+F-A=2, bem como reflexões sobre prática pedagógica.

O capítulo 6, “Relato de Experiência”, apresenta uma reflexão crítica sobre a aplicação prática da oficina pedagógica desenvolvida no âmbito desta dissertação, cuja temática central foi o estudo dos poliedros e a relação de Euler. Nesse capítulo, procuramos fazer uma exposição prática e pormenorizada do fatos vivenciados no dia da oficina. Embora haja valores percentuais na análise dos dados coletados, estes nos serviram apenas como um norte para nossa análise, pois nossa pesquisa tem caráter eminentemente qualitativo.

Finalmente, o Capítulo 7, “Conclusões e Considerações Finais”, sintetiza os principais resultados e contribuições do estudo, reiterando o potencial das oficinas educativas para o ensino da Geometria Espacial. Reflete-se criticamente sobre as limitações da pesquisa realizada e apontam-se possibilidades promissoras para a expansão da metodologia e para futuras investigações na área, reforçando a relevância de práticas pedagógicas inovadoras ou diferenciadas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO FUNDAMENTAL II

A Geometria Espacial desempenha um papel fundamental na formação matemática dos alunos, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio espacial, da percepção tridimensional e da capacidade de resolução de problemas (VAN HIELE, 1957). Essas habilidades são essenciais não apenas no âmbito da matemática, mas também em diversas áreas do conhecimento, como arquitetura, engenharia, design, física e computação gráfica. No entanto, apesar de sua relevância, o ensino dessa disciplina ainda enfrenta desafios, sobretudo no que diz respeito à abordagem pedagógica utilizada para torná-la acessível e significativa aos estudantes.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça a importância do ensino da Geometria Espacial ao estabelecer que os estudantes devem ser incentivados a desenvolver habilidades geométricas por meio da visualização, manipulação e construção de sólidos geométricos (BRASIL, 2018). Essa abordagem visa propiciar uma aprendizagem mais concreta e interativa, reduzindo as dificuldades normalmente associadas à abstração dos conceitos espaciais. Entretanto, observa-se que, na prática, o ensino de Geometria Espacial permanece majoritariamente baseado em representações bidimensionais nos livros didáticos e no uso de lousas, sem a devida exploração de materiais tridimensionais que favoreçam a compreensão dos conceitos.

D'Ambrosio (1996) enfatiza que a matemática deve estar vinculada ao cotidiano dos alunos para que se torne um conhecimento significativo e aplicável. Dessa forma, o ensino da Geometria Espacial precisa ir além das abordagens tradicionais, promovendo experiências práticas e interativas. A interação com modelos tridimensionais, como por exemplo sólidos geométricos manipuláveis, permite que os estudantes visualizem melhor suas propriedades e relações, favorecendo o desenvolvimento da intuição espacial.

Nesse contexto, Van Hiele (1986) propõe que o aprendizado da geometria ocorre em níveis de desenvolvimento, nos quais os estudantes progridem desde a simples identificação de formas até uma compreensão mais avançada de suas relações e propriedades. A transição entre esses níveis depende fortemente do contato do aluno com materiais concretos e de atividades que estimulem sua percepção visual e manipulação de objetos tridimensionais.

A falta de experiências concretas no ensino da Geometria Espacial é um dos principais fatores que dificultam a compreensão dos estudantes. Estudos apontam que muitos alunos apresentam dificuldades em visualizar sólidos geométricos em diferentes perspectivas e compreender conceitos como vértices, arestas e faces, além da relação de Euler (DUVAL, 1995). Para minimizar essas dificuldades, torna-se essencial a adoção de estratégias pedagógicas que priorizem a manipulação de materiais concretos (VAN HIELE, 1957), a exemplo de sólidos de madeira, papelão, entre outros, até mesmo construídos pelos próprios alunos em sala de aula. Nesse último caso, tem se observado um grande engajamento dos alunos nessas atividades, comumente chamadas de “oficinas educativas” (FIORENTINI; MIORIM, 1990), em que os estudantes constroem e manipulam objetos que formarão uma base conceitual firme para aquisição de novos conhecimentos.

A importância da Geometria Espacial vai além do conteúdo matemático em si. Habilidades espaciais bem desenvolvidas estão diretamente relacionadas ao desempenho dos alunos em diversas áreas do conhecimento e na solução de problemas cotidianos. Dienes (1970) ressalta que a interação física com objetos geométricos fortalece a compreensão dos princípios matemáticos, pois permite aos estudantes criarem imagens mentais mais precisas e construírem uma base sólida para a abstração futura.

Portanto, garantir que os alunos do Ensino Fundamental II tenham uma formação sólida em Geometria Espacial é essencial para seu desenvolvimento matemático e intelectual. Para isso, faz-se necessária uma abordagem pedagógica que valorize a visualização e manipulação de objetos tridimensionais, tornando o aprendizado mais dinâmico, significativo e acessível a todos os estudantes.

2.2. DIFICULDADES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL

O ensino da Geometria Espacial no Ensino Fundamental II enfrenta desafios significativos que comprometem a aprendizagem efetiva dos alunos. Embora essa área da matemática seja essencial para o desenvolvimento do raciocínio espacial e da percepção tridimensional (VAN HIELE, 1957), sua abordagem em sala de aula ainda apresenta diversas limitações. Entre os principais obstáculos encontrados no ensino da Geometria Espacial, destacam-se a falta de materiais manipuláveis, a inadequação do ambiente escolar para a exploração desse conteúdo, a restrição de tempo devido à carga curricular extensa e a predominância de métodos tradicionais de ensino.

O aprendizado da Geometria Espacial está intrinsecamente ligado à capacidade do aluno de visualizar e manipular objetos tridimensionais. No entanto, a realidade de muitas escolas brasileiras é marcada pela escassez de recursos didáticos que favoreçam esse processo. Dienes (1970) enfatiza que a aprendizagem matemática é mais eficaz quando os estudantes podem interagir fisicamente com os conceitos estudados. Entretanto, grande parte das escolas não dispõe de materiais manipuláveis adequados, como modelos geométricos em madeira, plástico ou imantados, que possibilitariam a construção concreta do conhecimento espacial. Em repetidas vezes a experiência tem mostrado que nós, que atuamos como professores do ensino básico em rede pública, acabamos por adquirir materiais didáticos com nossos próprios recursos, devido à falta de uma atenção mais cuidadosa dos órgãos governamentais responsáveis pela educação em nosso país. Não vemos políticas públicas voltadas a refletir e planejar uma educação que rompa com o modelo tradicional de ensino, de alunos sentados a ouvir explicações teóricas, copiando observações e respondendo atividades em seus cadernos, o que tem sido pouco atrativo para estudantes do século XXI. Em mais de 20 anos atuando em sala de aula, desconheço uma política voltada para modernizar o ambiente de estudos em sala de aula, prevalecendo turmas cheias, e uma sala sem novidades que despertem o raciocínio de nossos estudantes. Percebe-se que o mundo tem evoluído de maneira muito veloz, a sala de aula, no entanto, ainda permanece no século passado, recaindo sobre o professor os esforços para “maquiar” esse velho ambiente, buscando, de forma independente, dar algum ar de novidade à tão tradicional sala de aula.

Lorenzato (2006) argumenta que a falta de materiais geométricos nas escolas limita a experiência de aprendizagem dos alunos, exigindo que desenvolvam imagens mentais de sólidos tridimensionais a partir de representações bidimensionais nos livros didáticos. Esse déficit de recursos torna a compreensão de conceitos como vértices, arestas, faces e a relação de Euler um desafio maior para os estudantes. Além disso, Duval (1995) destaca que a interpretação de figuras geométricas requer a articulação entre diferentes registros de representação, algo que se torna mais difícil sem o suporte de materiais concretos.

Outro fator agravante, já explorado de certa forma no parágrafo anterior, é a inadequação do ambiente escolar para a exploração da Geometria Espacial. Muitas salas de aula são organizadas de forma tradicional, com carteiras fixas voltadas para uma lousa, o que não favorece atividades práticas ou interativas. A ausência de espaços adequados para a realização de oficinas ou manipulação de sólidos geométricos restringe ainda mais a possibilidade de um ensino mais dinâmico e eficiente.

Outro obstáculo significativo para o ensino da Geometria Espacial é o tempo reduzido disponível para sua abordagem no currículo escolar. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) estabelece uma série de competências matemáticas a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, mas a ampla gama de conteúdos a serem trabalhados muitas vezes resulta na fragmentação do ensino da geometria. Dessa forma, conceitos espaciais fundamentais acabam sendo abordados de maneira superficial, sem a profundidade necessária para garantir uma aprendizagem significativa.

D'Ambrosio (1996) ressalta que a matemática deve ser ensinada de forma contextualizada e significativa para os alunos. No entanto, a necessidade de cumprir um currículo extenso acaba levando os professores a priorizarem conteúdos mais voltados para aritmética e álgebra, relegando a Geometria Espacial a um papel secundário. Essa abordagem reduz as oportunidades de os estudantes explorarem conceitos geométricos por meio da experimentação, resultando em dificuldades na internalização dos princípios espaciais.

Piaget (1976) aponta que a aprendizagem ocorre de forma mais eficaz quando os alunos têm tempo suficiente para explorar conceitos e construir seu conhecimento gradativamente. No entanto, na realidade escolar, os professores frequentemente precisam seguir um cronograma rígido, o que impossibilita a realização de atividades mais aprofundadas e interativas. Assim, a falta de tempo disponível para o ensino da Geometria Espacial compromete a assimilação dos conteúdos e dificulta a progressão dos estudantes nos níveis de desenvolvimento propostos por Van Hiele (1986).

Além dos fatores estruturais e curriculares, a forma como a Geometria

Espacial é ensinada também contribui para as dificuldades de aprendizagem dos alunos. Muitos professores ainda adotam métodos de ensino predominantemente expositivos, nos quais os conceitos geométricos são apresentados de maneira abstrata, sem a devida conexão com experiências concretas. Duval (1995) enfatiza que a aprendizagem da geometria depende de processos perceptivos e cognitivos, e que a simples exposição de definições e propriedades geométricas em livros e lousas não é suficiente para garantir a compreensão dos alunos.

Battista (1990) destaca que a visualização espacial é uma habilidade fundamental para o aprendizado da Geometria Espacial, mas que muitos alunos apresentam dificuldades nesse aspecto. Sem o suporte de materiais concretos e sem atividades que incentivem a experimentação, os estudantes encontram obstáculos para desenvolver imagens mentais coerentes de sólidos geométricos e suas transformações. A falta dessa habilidade impacta negativamente a compreensão de conceitos como planificações, secções e rotações de sólidos.

Além disso, Fiorentini e Miorim (1990) argumentam que a aprendizagem geométrica deve ser baseada na resolução de problemas e na exploração ativa dos conceitos, permitindo que os alunos construam seu próprio conhecimento. No entanto, a predominância de exercícios mecânicos e a ausência de atividades exploratórias limitam a capacidade dos estudantes de estabelecer conexões significativas entre os conteúdos geométricos e sua aplicação no mundo real.

As dificuldades no ensino e na aprendizagem da Geometria Espacial são resultado de uma combinação de fatores, incluindo a escassez de materiais manipuláveis, a inadequação do ambiente escolar, a limitação de tempo devido ao excesso de conteúdos curriculares e a predominância de abordagens pedagógicas tradicionais. Para superar esses desafios, especialmente no ensino de Geometria, é fundamental adotar estratégias que valorizem a manipulação de sólidos geométricos, a visualização espacial e a experimentação prática.

Diante desse cenário, a implementação de oficinas pedagógicas e o uso de materiais concretos, como os sugeridos por Dienes (1970), podem proporcionar uma abordagem mais eficaz para o ensino da Geometria Espacial. Além disso, a reformulação dos currículos escolares e a valorização de metodologias ativas podem contribuir significativamente para tornar o aprendizado da geometria mais acessível e significativo para os alunos.

Portanto, faz-se necessário um esforço conjunto entre professores, gestores e formuladores de políticas educacionais para que a Geometria Espacial seja ensinada de forma mais dinâmica e envolvente, garantindo que os estudantes desenvolvam habilidades espaciais essenciais para sua formação acadêmica e profissional.

2.3. A VISUALIZAÇÃO NA GEOMETRIA ESPACIAL

A visualização ocupa um papel central no processo de ensino-aprendizagem da Geometria Espacial, constituindo um dos aspectos mais relevantes para que os estudantes desenvolvam o raciocínio espacial e uma compreensão eficaz das figuras tridimensionais. De acordo com diversos pesquisadores em educação matemática, dentre eles Duval (1995), Battista (1990) e Van Hiele (1986), a visualização consiste em uma habilidade cognitiva que permite aos estudantes identificar, interpretar e construir representações mentais precisas das formas geométricas, além de compreender suas transformações espaciais, tais como rotações, reflexões e mudanças de perspectiva.

Duval (1995) destaca dois processos essenciais associados à visualização geométrica: a apreensão perceptiva e a construção cognitiva. A apreensão perceptiva refere-se à capacidade do aluno em reconhecer, identificar e diferenciar formas geométricas a partir de representações visuais concretas ou gráficas. A construção cognitiva, por sua vez, está relacionada à habilidade de imaginar mentalmente as transformações e operações com os sólidos geométricos, possibilitando que os alunos antecipem resultados e identifiquem propriedades geométricas mesmo na ausência dos objetos reais.

No entanto, esses processos não são espontâneos nem imediatos. Como destacam Fiorentini e Miorim (1990), o desenvolvimento efetivo da visualização espacial requer atividades práticas e interativas que incentivem os alunos a manipular objetos tridimensionais reais, permitindo-lhes construir e consolidar representações visuais mais completas e concretas. Quando os estudantes manipulam diretamente sólidos geométricos, eles ampliam suas percepções espaciais, constroem relações mais significativas e desenvolvem uma intuição geométrica mais aguçada.

Battista (1990) reforça essa perspectiva ao afirmar que as dificuldades que muitos estudantes encontram na Geometria Espacial frequentemente decorrem de uma insuficiente estimulação visual-espacial. A ausência de experiências concretas pode levar os alunos a desenvolverem concepções equivocadas ou incompletas sobre os conceitos geométricos, tornando-os incapazes de generalizar ou aplicar os conteúdos aprendidos em novos contextos ou problemas.

Lorenzato (2006), de forma semelhante, argumenta que a visualização adequada é potencializada pelo uso constante e variado de materiais manipuláveis. Modelos físicos e ferramentas pedagógicas adequadas permitem que os alunos examinem as figuras geométricas sob diferentes perspectivas, identificando relações entre vértices, arestas e faces com maior clareza. Esse contato direto com sólidos reais reduz o nível de abstração e facilita a compreensão conceitual, tornando o processo de aprendizagem mais efetivo e duradouro.

Além disso, Ausubel (2003) destaca a importância da visualização no contexto da aprendizagem significativa. Segundo esse autor, para que um conceito matemático seja internalizado com profundidade, é imprescindível que ele esteja conectado a representações cognitivas claras e relevantes para o aluno. Nesse sentido, a visualização espacial cumpre o papel fundamental de criar essas conexões mentais, permitindo que a aprendizagem deixe de ser meramente mecânica e passe a ser integrada ao conjunto de conhecimentos já estabelecidos pelo estudante.

Dessa forma, compreende-se que incentivar o desenvolvimento das habilidades visuais espaciais não se trata de uma tarefa secundária ou acessória no ensino de matemática, mas sim de um objetivo central e fundamental para o ensino da Geometria Espacial no Ensino Fundamental II. Assim, na ausência de políticas públicas voltadas para modernizar o ambiente escolar, entendemos que cabe ao professor reconhecer esse aspecto, planejando e implementando estratégias metodológicas que privilegiem atividades visuais e manipulativas, investindo tempo na construção de um ambiente educativo que potencialize a visualização e, consequentemente, promova uma aprendizagem sólida e significativa dessa importante área da matemática escolar.

2.4. O USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

O uso de materiais manipuláveis no ensino da matemática tem sido amplamente discutido e recomendado por pesquisadores da área da educação matemática, principalmente devido à sua eficácia na promoção de uma aprendizagem significativa e duradoura. A manipulação direta de materiais concretos permite que o aluno estabeleça relações entre os conceitos matemáticos abstratos e a experiência prática, favorecendo a construção de significados claros e precisos.

Um dos principais defensores da utilização de materiais manipuláveis é Zoltan Paul Dienes (1970), que, em seus estudos, argumenta fortemente em favor do uso desses recursos como elementos fundamentais no desenvolvimento da compreensão matemática. Segundo Dienes, os materiais manipuláveis proporcionam experiências concretas essenciais para que os estudantes possam criar imagens mentais adequadas dos conceitos abstratos estudados. Por meio da manipulação direta de objetos, os alunos têm a oportunidade de descobrir propriedades matemáticas, realizar generalizações e compreender profundamente os princípios subjacentes às operações e conceitos matemáticos mais complexos. Esse processo investigativo, possibilitado pela interação com materiais concretos, permite que a aprendizagem matemática ocorra por meio da descoberta, tornando-se mais significativa e menos mecânica.

Lorenzato (2006) complementa essa visão, enfatizando que o uso regular de materiais manipuláveis contribui significativamente para a construção de uma intuição matemática mais sólida. Segundo o autor, a matemática escolar frequentemente é ensinada de forma excessivamente abstrata, desvinculada da realidade prática dos estudantes. A inclusão sistemática de recursos manipuláveis, tais como sólidos geométricos, modelos em madeira ou plástico, e materiais estruturados, possibilita que o aluno construa, visualize e perceba fisicamente relações matemáticas que seriam difíceis ou impossíveis de entender plenamente apenas por meio de representações simbólicas ou verbais. Essa abordagem possibilita ainda que os estudantes percebam com clareza as conexões entre os conceitos matemáticos e suas aplicações práticas no cotidiano.

A perspectiva teórica construtivista apresentada por Jean Piaget (1976) também fornece uma importante base epistemológica para justificar o uso de materiais manipuláveis na matemática. De acordo com Piaget, a aprendizagem é um processo ativo de construção do conhecimento, em que o estudante precisa interagir diretamente com o meio ambiente para desenvolver suas estruturas cognitivas. O contato direto com materiais manipuláveis permite justamente essa interação, proporcionando experiências práticas que desafiam o aluno a construir ativamente o seu entendimento dos conceitos matemáticos. Dessa forma, a manipulação de materiais concretos é não apenas um recurso didático, mas uma condição necessária para que ocorra o desenvolvimento cognitivo pleno dos alunos em contextos matemáticos, especialmente em níveis escolares iniciais e intermediários, como o Ensino Fundamental I e II, como é dividido no Brasil.

Esses pressupostos evidenciam que a utilização de materiais manipuláveis não deve ser vista como algo complementar ou ocasional nas práticas pedagógicas, mas sim como um elemento central e essencial para o desenvolvimento eficaz dos conceitos matemáticos em sala de aula. Os professores devem, portanto, planejar e implementar rotineiramente atividades que integrem esses recursos concretos, garantindo que a experiência matemática dos estudantes seja completa, significativa e orientada para a compreensão real dos conceitos trabalhados.

Diante disso, conclui-se que o uso sistemático de materiais manipuláveis contribui decisivamente para uma aprendizagem matemática sólida, profunda e duradoura. Os estudantes, ao manipularem objetos concretos, têm melhores condições para compreender e internalizar conceitos matemáticos complexos, construindo uma base sólida para aprendizagens futuras e desenvolvendo uma visão clara e crítica da matemática como disciplina viva e relevante para o cotidiano.

2.5 OFICINAS PEDAGÓGICAS COMO ESTRATÉGIAS DE ENSINO

As oficinas pedagógicas têm emergido como uma metodologia inovadora e eficaz no contexto educacional, especialmente no ensino da Geometria Espacial. Fundamentadas em princípios construtivistas e dialógicos, essas oficinas proporcionam ambientes ricos em interações sociais e cognitivas, favorecendo uma aprendizagem significativa por meio de atividades práticas e colaborativas. A hipótese central desta pesquisa é que as oficinas pedagógicas, ao proporcionarem experiências diretas e manipulativas, são altamente eficazes para o desenvolvimento de conceitos geométricos tridimensionais.

Paulo Freire (1996) defende uma educação pautada no diálogo e na interação constante entre educador e educando. Dentro dessa perspectiva, as oficinas pedagógicas permitem a prática educativa libertadora e ativa, em que o aluno se torna o protagonista da sua própria aprendizagem. O ambiente colaborativo das oficinas proporciona momentos de reflexão, debate, e compartilhamento de ideias, criando condições para que os alunos construam seus próprios conhecimentos a partir da experiência prática e interativa.

Além disso, segundo Ubiratan D'Ambrosio (1996), é crucial que o ensino de matemática esteja conectado ao cotidiano dos estudantes. As oficinas pedagógicas respondem a essa necessidade ao criar cenários reais ou simulados em que os alunos possam reconhecer a utilidade e relevância dos conteúdos aprendidos, promovendo uma aprendizagem que transcende a memorização e alcança a compreensão profunda e significativa dos conceitos matemáticos.

Van Hiele (1986) propõe que o aprendizado da geometria ocorre em estágios progressivos, desde o reconhecimento visual até a compreensão analítica e abstrata. As oficinas pedagógicas são especialmente adequadas para promover essa evolução conceitual, oferecendo oportunidades de experiências visuais, manipulação direta e exploração ativa de sólidos geométricos. Através dessas atividades, os estudantes têm condições de progredir naturalmente entre os níveis descritos por Van Hiele, desenvolvendo sua capacidade de raciocínio espacial e entendimento de conceitos complexos como por exemplo vértices, faces, arestas, e assim, proporcionando base adequada para dedução e análise de outros conceitos, como por exemplo um em especial que pretendemos utilizar como objeto de estudo em nossa pesquisa: O ensino da Relação de Euler por meio de oficinas.

Jean Piaget (1976) enfatiza que o desenvolvimento cognitivo dos estudantes ocorre fortemente mediado pelas interações sociais. As oficinas pedagógicas, ao serem estruturadas em atividades grupais, oferecem um espaço favorável para que os estudantes colaborem uns com os outros, discutam hipóteses, testem soluções e negociem significados. Esse processo não apenas amplia a compreensão individual dos conteúdos, mas fortalece o desenvolvimento social e emocional dos participantes, criando um ambiente educacional integral e formativo.

O uso de materiais concretos é um dos pilares das oficinas pedagógicas, contribuindo significativamente para o aprendizado de Geometria Espacial. Dienes (1970) defende que a manipulação ativa de materiais reais facilita a descoberta de propriedades matemáticas e o estabelecimento de conexões conceituais profundas. Em oficinas pedagógicas, os alunos têm a oportunidade de experimentar, trabalhando diretamente com sólidos geométricos reais, planificações e outros modelos tridimensionais, o que facilita uma aprendizagem duradoura e significativa.

Lorenzato (2006) complementa essa perspectiva ao argumentar que o manuseio frequente de materiais concretos é essencial para que os estudantes desenvolvam uma intuição matemática robusta. As oficinas proporcionam justamente esse contato direto e frequente com objetos matemáticos concretos, permitindo uma exploração ativa e contínua que fortalece e sedimenta os conhecimentos adquiridos.

Outro aspecto importante é a avaliação formativa que ocorre naturalmente durante as oficinas. Por meio da observação direta e contínua das atividades realizadas pelos estudantes, o professor pode oferecer feedback imediato e personalizado, favorecendo ajustes e esclarecimentos no próprio processo de ensino-aprendizagem. Essa abordagem avaliativa contribui significativamente para a melhoria da aprendizagem dos estudantes, permitindo-lhes reconhecer seus próprios avanços e dificuldades de maneira clara e imediata.

As oficinas pedagógicas destacam-se como estratégias eficazes para o ensino da Geometria Espacial, contribuindo decisivamente para a superação das limitações dos métodos tradicionais. Ao promoverem ambientes colaborativos, atividades práticas e interativas, e uma avaliação contínua e formativa, essas oficinas possibilitam um aprendizado mais profundo e significativo, alinhado às necessidades educacionais contemporâneas.

2.6 RELAÇÃO ENTRE A CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS E CONCEITOS MATEMÁTICOS FUNDAMENTAIS

A construção de sólidos geométricos pelos estudantes desempenha um papel essencial na compreensão e no aprofundamento de conceitos matemáticos fundamentais no ensino da Geometria Plana e Espacial. Ao proporcionar a construção e manipulação direta de objetos tridimensionais, essa prática pedagógica auxilia os estudantes a estabelecerem conexões claras entre teoria e prática, contribuindo significativamente para uma aprendizagem mais consistente e, principalmente, envolvente e significativa, já que percebemos um forte desinteresse dos estudantes pelos métodos de ensino tradicionais.

Um dos conceitos fundamentais da Geometria, diretamente relacionados à construção e manipulação de sólidos geométricos é a Equação ou Relação de Euler, proposta pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) e expressa pela fórmula $V + F = A + 2$, que relaciona vértices (V), faces (F) e arestas (A) em poliedros convexos. Apresentada pela primeira vez em 1758, essa equação – conhecida como característica de Euler – não apenas sintetiza a regularidade dos poliedros, mas também antecipa conceitos que seriam fundamentais para o desenvolvimento da topologia e da teoria dos grafos (EULER, 1758). Temas como esses são de difícil assimilação por parte dos alunos de ensino fundamental II quando são abordados exclusivamente de forma teórica, tradicional, apenas verbalizada ou representados em lousa, figuras nos livros, etc. A manipulação direta de sólidos permite aos alunos perceberem essa relação de forma concreta e intuitiva, compreendendo-a não apenas como uma fórmula matemática abstrata, mas como uma propriedade estrutural dos objetos geométricos tridimensionais. Esse tipo de experiência prática fortalece a capacidade de abstração matemática dos estudantes, facilitando o entendimento de conceitos complexos a partir de experiências tangíveis.

Além disso, a construção e manipulação física de sólidos geométricos está diretamente relacionada ao desenvolvimento de conceitos como simetria, congruência e similaridade. A partir da manipulação desses sólidos, os alunos podem observar e experimentar fenômenos geométricos como rotações, reflexões e translações, compreendendo com maior profundidade as propriedades intrínsecas dos objetos tridimensionais. Conforme destacado por Van Hiele (1986), essas atividades práticas e manipulativas são fundamentais para que os estudantes avancem progressivamente em níveis mais sofisticados de raciocínio geométrico.

Outro conceito matemático fundamental beneficiado pela construção e manipulação de sólidos geométricos é o entendimento de volume e área superficial. Através de atividades que envolvem o manuseio de sólidos geométricos concretos, os estudantes são capazes de relacionar diretamente as fórmulas matemáticas às medidas e propriedades concretas dos objetos, promovendo uma aprendizagem mais efetiva e contextualizada desses conceitos. Segundo Dienes (1970), essa experiência direta favorece uma compreensão mais profunda e duradoura, permitindo aos estudantes não apenas decorar fórmulas, mas compreender os fundamentos matemáticos que as sustentam.

Cabe destacar que o uso constante da construção e manipulação de sólidos geométricos auxilia também na compreensão de conceitos matemáticos relacionados a proporcionalidade, razão e escalas. Ao construir modelos em diferentes escalas, os estudantes têm a oportunidade de experimentar e perceber na prática como as dimensões dos objetos influenciam suas propriedades geométricas, como por exemplo os acréscimos nas arestas de um cubo e o consequente incremento no seu volume, possibilitando uma compreensão mais intuitiva e sólida desses conceitos matemáticos fundamentais.

Dessa forma, a prática pedagógica da construção e/ou manipulação de sólidos geométricos emerge não apenas como uma estratégia didática adicional, mas como uma abordagem essencial para a compreensão profunda de conceitos matemáticos centrais da Geometria Espacial.

2.7 O USO DE OFICINAS EDUCATIVAS NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL E A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Ausubel (1968) afirma que a aprendizagem significativa ocorre quando novos conhecimentos são incorporados de forma clara e relevante à estrutura cognitiva preexistente do aprendiz. Tal processo é favorecido quando o aluno tem a oportunidade de associar o novo conhecimento a situações práticas e concretas. Nessa perspectiva, Novak (1981) corrobora que a utilização de recursos didáticos concretos amplia as conexões cognitivas, facilitando assim o entendimento conceitual e tornando o aprendizado mais profundo e duradouro.

Oficinas educativas, especialmente aquelas direcionadas ao ensino de Geometria Espacial, fornecem ao aluno a oportunidade de manipular diretamente objetos tridimensionais, tais como poliedros, prismas e pirâmides, permitindo explorar conceitos abstratos de maneira concreta e palpável. Essa abordagem interativa auxilia na formação de conceitos fundamentais como vértices, faces e arestas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial e de raciocínio geométrico, medidas e proporções.

Além disso, as oficinas contribuem para superar limitações das representações bidimensionais comumente apresentadas nos materiais tradicionais usando-se de recursos que podem parecer bem simples para alguns, mas não para todos. Cito como exemplo algo que, em minha experiência, tenho notado repetidas vezes: Nas figuras espaciais representadas nos livros didáticos, frequentemente vemos as arestas “de trás” ou “do fundo”, representadas por uma linha pontilhada. Percebi com o tempo, que por mais que seja simples para alguns compreenderem isso, para outros no entanto, só mesmo visualizando com objetos tridimensionais é que conseguem compreender a intenção da ilustração no material. Daí ser tão relevante a utilização desse tipo de recurso para proporcionar uma aprendizagem mais significativa e dinâmica. Como defende Moreira (1999), atividades que promovem a exploração ativa do conhecimento potencializam significativamente a retenção e a compreensão dos conteúdos trabalhados.

A aplicação das oficinas educativas no ensino básico, alinhada aos princípios da aprendizagem significativa de Ausubel, demonstra-se uma alternativa eficaz às tradicionais práticas educativas no contexto da Geometria Espacial. Tal metodologia não apenas melhora a compreensão dos conceitos, mas também estimula a motivação e o interesse dos estudantes pela Matemática. Nesse sentido, a adoção sistemática dessas oficinas constitui um recurso valioso na promoção de uma educação matemática mais significativa e envolvente.

3 ASPECTOS RELEVANTES RELACIONADOS AO ENSINO DE GEOMETRIA NO CONTEXTO EDUCACIONAL BRASILEIRO

3.1 A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA NA FORMAÇÃO DO ESTUDANTE

A Geometria ocupa papel central na formação integral do estudante, sendo essencial para o desenvolvimento do pensamento espacial e raciocínio geométrico, habilidades imprescindíveis tanto para a vida cotidiana quanto para a vida acadêmica. Van Hiele (1986) afirma que o desenvolvimento do pensamento espacial permite aos estudantes interpretarem e representarem o mundo ao seu redor com maior precisão e clareza. Lorenzato (2006) reforça que a construção do raciocínio geométrico potencializa o desenvolvimento de habilidades cognitivas complexas, tais como percepção visual, memória espacial, raciocínio lógico-dedutivo e capacidade de abstração.

Através da exploração geométrica, os estudantes ampliam suas competências matemáticas gerais, o que se reflete no desempenho acadêmico global, pois facilita a compreensão de conteúdos abstratos presentes em outras áreas da Matemática, como álgebra e cálculo. Além disso, proporciona a habilidade de resolver problemas, permitindo uma melhor tomada de decisões baseadas na interpretação e análise de situações concretas.

O ensino da Geometria transcende os limites da disciplina matemática tradicional, estabelecendo importantes conexões interdisciplinares com diversas áreas do conhecimento. A Geometria está fortemente presente em campos como arquitetura, engenharia, design gráfico, arte, física e informática, mostrando-se indispensável para o desenvolvimento científico e tecnológico. D'Ambrosio (2001) destaca que a capacidade de visualizar e interpretar formas e espaços geometricamente é uma competência essencial na formação cidadã e profissional.

Além disso, a Geometria prepara o estudante para desafios do cotidiano, capacitando-o a interpretar mapas, projetar ambientes, compreender e produzir representações gráficas, e resolver problemas que exigem percepção espacial e análise geométrica crítica e criativa. Essa aplicabilidade realça sua relevância educativa, proporcionando um ensino mais significativo e contextualizado.

3.2 UM BREVE HISTÓRICO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

Historicamente, o ensino de Geometria no Brasil caracterizou-se por métodos tradicionais e predominantemente expositivos, centrados no uso de representações gráficas bidimensionais, como desenhos em livros e na lousa. Este modelo didático predominou durante todo o século XX, limitando as experiências dos estudantes e tornando o aprendizado mecanizado, distante da realidade prática e concreta vivenciada pelos alunos (Valente, 2007).

Lorenzato (2006) critica essa abordagem tradicional por gerar dificuldades significativas no processo de aprendizagem, especialmente em relação à capacidade dos estudantes de compreender e aplicar conceitos geométricos de maneira eficaz. Além disso, a falta de experiências concretas contribuiu para desmotivar os alunos, afastando-os do interesse genuíno pela Geometria.

Nas últimas décadas, tem ocorrido uma significativa mudança no panorama educacional brasileiro, com a introdução gradual de metodologias mais dinâmicas e centradas na atividade prática e manipulativa. Borba e Penteado (2007) descrevem essa transição como uma resposta às demandas contemporâneas, enfatizando que o uso de materiais manipuláveis e tecnologias digitais contribui para o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos geométricos.

Essas mudanças pedagógicas visam superar as limitações dos métodos tradicionais, promovendo uma aprendizagem mais ativa, onde o estudante é protagonista na construção de seu próprio conhecimento. Essa nova perspectiva tem gerado resultados promissores, aumentando o interesse e a motivação dos estudantes pelo estudo da Geometria.

3.3 O ENSINO DE GEOMETRIA E A NOVA BNCC

A publicação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2018 representou uma importante conquista para a educação básica brasileira. Ao delinear competências e habilidades específicas para o ensino da Geometria, a BNCC reforça a necessidade de uma abordagem mais ativa e contextualizada, propondo a resolução de problemas, argumentação matemática e modelagem como estratégias centrais no processo de ensino-aprendizagem (Brasil, 2018).

Entre as competências estabelecidas pela BNCC estão o reconhecimento das propriedades das figuras geométricas, habilidades em resolução de problemas geométricos, representação gráfica e espacial adequada e compreensão crítica das relações espaciais. A BNCC incentiva também a abordagem interdisciplinar e integradora, relacionando o ensino geométrico com contextos reais e cotidianos, fortalecendo sua aplicabilidade prática e relevância educativa (Brasil, 2018).

3.4 RECOMENDAÇÕES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

A literatura especializada recomenda fortemente o uso de metodologias ativas e práticas pedagógicas interativas, como oficinas educativas, atividades exploratórias e projetos investigativos. Lorenzato (2006) aponta que essas estratégias pedagógicas enriquecem significativamente o aprendizado ao permitir que o estudante vivencie e explore diretamente conceitos geométricos, resultando em uma compreensão mais sólida e duradoura.

É igualmente essencial a utilização sistemática de tecnologias digitais e materiais manipuláveis no ensino geométrico. Softwares educacionais como GeoGebra, SketchUp e CabriGeometry favorecem a visualização dinâmica e interativa dos conceitos geométricos, enquanto materiais manipuláveis físicos como kits geométricos e modelos tridimensionais proporcionam experiências concretas que fortalecem a compreensão conceitual (Borba; Penteado, 2007).

Finalmente, destaca-se a importância da formação continuada dos professores, fundamental para a implementação eficaz de novas abordagens metodológicas. A valorização profissional e a oferta de cursos específicos e comunidades de aprendizagem são estratégias que asseguram a qualidade e atualidade no ensino da Geometria (Valente, 2007).

4 CONSIDERAÇÕES SOBRE A OFICINA

4.1 OBJETIVOS DA OFICINA EDUCATIVA NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

O presente estudo tem como objetivo principal descrever a aplicação de oficinas educativas no processo de ensino-aprendizagem de Geometria Espacial no contexto escolar, por meio de um relato de experiência realizado com alunos do ensino básico de uma escola pública de Goiânia. Como professor atuante nas redes públicas municipal e estadual, percebo diariamente que o ensino tradicional de geometria, fortemente pautado pelo uso de representações bidimensionais em livros didáticos e lousas, apresenta limitações consideráveis quanto à compreensão efetiva dos objetos tridimensionais e dos conceitos a eles relacionados. Percebe-se uma grande dificuldade na visualização de elementos das formas geométricas trabalhadas, tais como arestas, vértices, faces, etc. Neste sentido, buscamos, com a aplicação dessas oficinas, superar as barreiras tradicionalmente impostas por uma abordagem exclusivamente teórica, possibilitando uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

As oficinas propostas têm como meta específica permitir que os alunos e construam manipulem modelos físicos de formas geométricas tridimensionais, especialmente poliedros, promovendo um aprendizado concreto através da interação direta com objetos concretos. Espera-se, com esta abordagem metodológica, que os estudantes consigam desenvolver habilidades cognitivas superiores, tais como a visualização espacial, a compreensão da relação entre faces, vértices e arestas, a chamada Equação de Euler, bem como uma internalização mais sólida e duradoura dos conceitos matemáticos envolvidos.

Além dos objetivos puramente pedagógicos, a oficina busca também proporcionar vantagens significativas no âmbito socioemocional dos estudantes. Acreditamos que a utilização de estratégias didáticas menos formais e mais interativas possa criar um ambiente de aprendizagem mais acolhedor, amigável e motivador, auxiliando na redução da ansiedade frequentemente associada ao aprendizado da matemática. Conforme destacam Silva et al. (2020), ambientes pedagógicos interativos e lúdicos contribuem para a redução da ansiedade matemática, aumentando a motivação e o engajamento dos alunos nas atividades propostas. Da mesma forma, Cursino (2023) ressalta que atividades práticas colaborativas não apenas fortalecem as competências matemáticas, mas também estimulam o desenvolvimento emocional e social dos estudantes.

Nesse contexto, a presente oficina se insere em um esforço profissional contínuo para romper com práticas pedagógicas tradicionais que, por vezes, reforçam a aversão ou dificuldade dos alunos em relação à matemática. Busca-se, assim, proporcionar não apenas o domínio conceitual dos conteúdos de Geometria Espacial, mas também favorecer o desenvolvimento emocional e social dos educandos, criando condições favoráveis para uma aprendizagem verdadeiramente significativa.

4.2 PÚBLICO-ALVO E FAIXA ETÁRIA RECOMENDADA

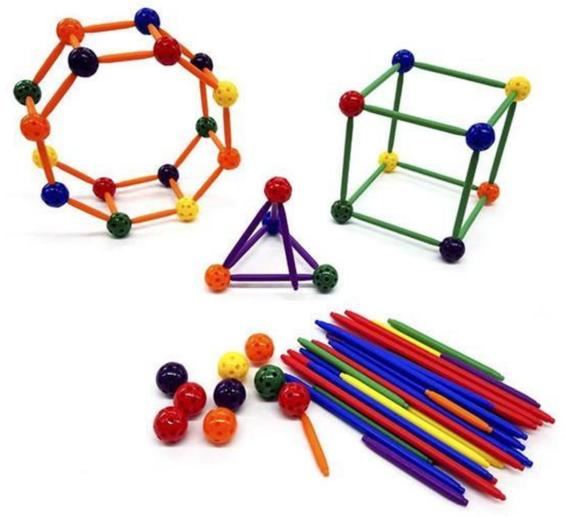
O público-alvo da oficina educativa são alunos dos anos finais do ensino fundamental, bem como estudantes do ensino médio, abrangendo tanto as modalidades tradicionais quanto a Educação de Jovens e Adultos (EJA). A faixa etária recomendada para a aplicação desta oficina compreende jovens e adultos entre aproximadamente 11 e 18 anos, podendo se estender aos adultos participantes da EJA, considerando as especificidades e adaptações metodológicas necessárias para atender adequadamente a diversidade dos grupos envolvidos. A escolha desse público visa contemplar um momento crítico no desenvolvimento das habilidades matemáticas e espaciais, oportunizando intervenções eficazes que contribuam para uma aprendizagem mais efetiva e significativa.

4.3 MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para a realização das atividades propostas nesta oficina educativa, serão utilizados materiais pedagógicos específicos que favorecem o aprendizado concreto e a interação direta dos estudantes com as formas geométricas espaciais. Os principais materiais utilizados são:

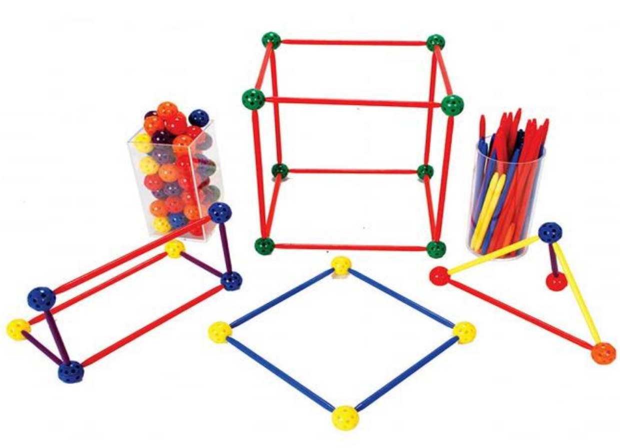
✓ Vertex: conjunto pedagógico composto por peças plásticas que se encaixam por meio de conexões, permitindo a construção e manipulação de diferentes modelos de poliedros e sólidos geométricos. Este material auxilia os alunos a visualizar de maneira prática os conceitos de faces, arestas e vértices, contribuindo significativamente para o desenvolvimento das habilidades espaciais.

Figura 1 – Formas geométricas montadas com o material Vertex



Fonte: Disponível em https://mmpmateriaispedagogicos.com.br. Acesso em 31/05/2025

Figura 2 – Formas geométricas montadas com o material Vertex



Fonte: Disponível em https://mmpmateriaispedagogicos.com.br Acesso em 31/05/2025

- ✓ Geomag: conjunto de peças magnéticas compostas por bastões e esferas metálicas, projetado especificamente para facilitar a construção tridimensional de diversas formas geométricas. Esse material é especialmente útil para proporcionar uma compreensão dinâmica das propriedades geométricas, explorando a criatividade e permitindo aos alunos experimentarem diferentes estruturas e configurações espaciais.

Figura 3 - Modelo montado com o material GEOMAG

Fonte: Disponível em https://mmpmateriaispedagogicos.com.br Acesso em 31/05/2025

Figura 4 - Modelo montado com o material GEOMAG

Fonte: Disponível em https://mmpmateriaispedagogicos.com.br Acesso em 31/05/2025

✓ Papel cartão, tesoura, cola, régua, etc. (Ou opcionalmente, sólidos geométricos já prontos, confeccionados com papelão ou papel cartão): modelos físicos feitos com papelão, que possibilitam um contato ainda mais próximo dos alunos com as figuras geométricas. Por serem confeccionados previamente ou durante a própria oficina, esses sólidos proporcionam uma experiência tátil direta e colaboram para reforçar o aprendizado, além de serem de fácil acesso e baixo custo.

Figura 5 - Modelo montado com o material Sólidos de Papel Cartão

Fonte: Disponível em https://mmpmateriaispedagogicos.com.br Acesso em 31/05/2025

Esses materiais combinados têm por objetivo tornar as aulas mais dinâmicas, práticas e envolventes, possibilitando que os estudantes possam perceber os conceitos abstratos da Geometria Espacial através da manipulação direta, o que favorece tanto a aprendizagem cognitiva quanto a motivação dos participantes.

4.4. ESTRUTURA E ETAPAS PRÁTICAS DA OFICINA

A oficina será organizada em três momentos: uma exposição teórica inicial, abordando conceitos como poliedros, vértices, arestas, faces e a relação de Euler; em seguida, atividades práticas de manipulação com foco na construção e análise de poliedros; por fim, uma etapa de reflexão e fechamento.

A seguir, apresentamos um roteiro detalhado da oficina, que poderá servir como sugestão para educadores interessados em aplicá-la futuramente. Buscamos conciliar objetividade com a organização de um passo a passo completo e claro.

4.4.1 ROTEIRO DA OFICINA PEDAGÓGICA “"Explorando a Relação de Euler"

Tema: Explorando a Relação de Euler por meio da Construção e Análise de Poliedros.

Público-alvo: Alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

Número de alunos: 20.
Duração total: 90 minutos.

4.4.1.1 OBJETIVOS DA OFICINA:

- ✓ Introduzir os conceitos fundamentais de poliedros, vértices, arestas e faces.
- ✓ Explorar a relação de Euler (V + F - A = 2) na prática, por meio da construção e manipulação de poliedros.
- ✓ Estimular a visualização espacial, o pensamento crítico e a aprendizagem significativa através do contato direto com sólidos geométricos.

4.4.1.2 ACOLHIDA E SENSIBILIZAÇÃO (Tempo estimado: 10 minutos)

4.4.1.2.1 ORGANIZAÇÃO INICIAL:

- ✓ Receber os alunos, organize-os em grupos de 4 ou 5 alunos.
- ✓ Dispor os materiais sobre as mesas (Geomag, Vertex, modelos prontos de sólidos geométricos).

4.4.1.2.2 QUEBRANDO O GELO:

- ✓ Inicie com perguntas e comentários instigantes:

Exemplos:
"Vocês já pararam para pensar quantos "bicos" tem um dado de seis faces? E quantas quinas? Você sabia que cada um desses elementos recebe um nome específico quando estamos estudando geometria espacial? Você sabia que nossa sala de aula tem um formato de um poliedro? Sim, estamos todos dentro de um grande poliedro."
Objetivo dessa etapa:

✓ Criar um ambiente acolhedor e participativo, incentivando os alunos a falarem e a interagirem entre si para que possam estar rapidamente em sintonia com o tema.

✓ Despertar curiosidade para o tema. Inclusive, a entrega antecipada dos modelos prontos de sólidos tem exatamente esse mesmo objetivo, de tal forma que os alunos possam estar motivados para a realização da atividade.

4.4.1.2 EXPOSIÇÃO DIALOGADA SOBRE CONCEITOS-CHAVE (Tempo estimado: 10 minutos)

Nessa parte da oficina lançaremos mão dos seguintes recursos: Quadro e/ou apresentação de slides com imagens de poliedros (Para o caso em específico, recomendamos utilizar um projetor datashow com imagens para auxiliar na exposição e visualização do conteúdo). Sólidos geométricos de madeira ou papel cartão já prontos para a manipulação dos alunos.

Os conceitos selecionados para essa etapa são os seguintes:

✓ O que são poliedros? (Sólidos limitados por polígonos planos).

✓ O que não pode seria considerado um poliedro, levando para a visualização alguns modelos de corpos redondos, tais como cones, cilindros, esferas, etc.

✓ Elementos dos poliedros, definindo vértices como pontos onde as arestas se encontram, arestas como segmentos de reta que ligam dois vértices e faces como superfícies planas que formam o poliedro.

Neste momento, sugiro evitar o uso de exemplos visuais planares, como figuras representando cubos, tetraedros, pirâmides, prismas, entre outros. O mais adequado é utilizar modelos físicos; alternativamente, recorrer a imagens tridimensionais interativas. Esses recursos devem ser explorados para evidenciar os conceitos de faces, vértices e arestas, preparando os estudantes para a etapa seguinte da oficina.

O próximo passo da oficina é a introdução da relação de Euler. Inicia-se com a apresentação da fórmula $V + F - A = 2$, que expressa a conexão entre o número de vértices (V), faces (F) e arestas (A) de qualquer poliedro convexo. Em seguida, são mostrados exemplos simples, como o cubo (8 vértices, 12 arestas e 6 faces), realizando-se o cálculo no quadro: 8 + 6 – 12 = 28 + 6 – 12 = 2. Outros exemplos também são trabalhados, escolhidos conforme a familiaridade dos alunos, e analisados passo a passo, identificando cuidadosamente o número de vértices, arestas e faces. Cada caso é resolvido coletivamente na lousa, reforçando o entendimento da fórmula. O objetivo desta etapa é preparar o terreno conceitual, assegurando que os alunos compreendam os termos antes de manipulá-los na prática.

4.4.1.4 ATIVIDADE PRÁTICA: CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE POLIEDROS (50 MINUTOS)

A seguir, inicia-se a etapa prática, que deverá seguir as etapas descritas a seguir:

Distribuir os materiais (Geomag ou Vertex) e as tabelas para cada grupo, acompanhados de uma orientação geral. Cada grupo deverá construir pelo menos três poliedros diferentes, como um tetraedro, um cubo e um prisma de base pentagonal. Após a construção, os alunos contarão e registrarão o número de vértices, arestas e faces de cada sólido na tabela fornecida, que inclui o nome do sólido e os respectivos valores. (Tempo estimado: 10 minutos.)

Tempo estimado para construção dos poliedros: 20 minutos.

Circular entre os grupos, auxiliando com dúvidas e incentivando discussões sobre os elementos dos poliedros.

Aplicação da relação de Euler após preenchidas as tabelas: (10 minutos).

Após construírem os sólidos e preencherem as tabelas, orientar os grupos a testarem a fórmula de Euler em cada um dos poliedros construídos.

Registro das descobertas (10 minutos).

Cada grupo deve preparar uma pequena síntese, anotando em quais sólidos a relação de Euler foi confirmada, e se houve dúvidas ou dificuldades.

4.4.1.5 REFLEXÃO FINAL E FECHAMENTO COLETIVO (20 MINUTOS)

Promova uma discussão orientada. Peça para alguns grupos compartilharem suas descobertas. Questione, por exemplo, se a relação de Euler foi válida para todos os poliedros. Questione também por que essa relação pode ser importante, e como manipular os sólidos ajudou a compreender os conceitos.

Encerramento motivacional: Parabenize os alunos pelo empenho e encerre com uma reflexão: “Será que todos os sólidos obedecem à relação de Euler?” Também é importante verificar se ficou alguma dúvida a sanar ou outro questionamento. Questionar os estudantes sobre suas impressões acerca da aula realizada, sobre o nível de dificuldade enfrentado por eles na assimilação dos assuntos, bem como sobre ter sido positiva ou não a proposta escolhida para a aula na visão deles.

4.4.1.6 SUGESTÕES PARA OBSERVAÇÃO E REGISTRO DURANTE A APLICAÇÃO:

Durante a realização da oficina, é importante anotar reações espontâneas dos alunos — como expressões de surpresa, dúvidas ou entusiasmo — bem como observar a dinâmica de interação nos grupos, identificando, por exemplo, quem assume a liderança ou demonstra maior dificuldade. Comentários que evidenciem a conexão entre teoria e prática (como “Ah, agora entendi o que são as arestas!”) devem ser registrados, assim como as dúvidas mais recorrentes, pois esses elementos enriquecerão a reflexão crítica e ampliarão o repertório para futuras propostas pedagógicas.

Na sequência, será apresentado o questionário que será utilizado para registrar as impressões dos alunos sobre a oficina aplicada. O objetivo é subsidiar o processo reflexivo que comporá o relato de experiência, previsto como um capítulo específico desta dissertação de mestrado.

O questionário será aplicado aos alunos de forma colaborativa, destacando que será algo opcional, mas ao mesmo tempo de grande importância para o desenvolvimento da reflexão em nosso trabalho.

4.5 QUESTIONÁRIO PARA REFLEXÃO A SER APLICADO AO FINAL DA OFICINA

QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DA OFICINA – RELAÇÃO DE EULER

Aluno(a): ____

Turma: _______ Data: ______

Prezado(a) aluno(a), este questionário tem como objetivo compreender como foi sua experiência durante a oficina sobre poliedros e a relação de Euler. Suas respostas ajudarão o professor a refletir sobre a prática pedagógica e contribuirão para um trabalho de conclusão de mestrado. Responda com sinceridade!

1. Antes da oficina, você já conhecia a relação entre vértices, arestas e faces nos sólidos geométricos?

( ) Sim

( ) Não

( ) Já ouvi falar, mas não compreendia bem.

2. Após a oficina, você acredita que conseguiu compreender o que é a relação de Euler e como ela se aplica aos poliedros?

( ) Compreendi bem.

( ) Compreendi em parte, mas ainda tenho algumas dúvidas.

( ) Não compreendi.

3. O que mais ajudou você a entender os conceitos trabalhados (vértices, arestas, faces e a relação de Euler)?

( ) A explicação inicial do professor.

( ) A construção dos sólidos geométricos (poliedros).

( ) A aplicação da fórmula de Euler nos modelos construídos.

( ) As discussões em grupo.

( ) Outro: ______________________

4. O que você mais gostou na oficina? Por quê?

____

____

____

5. O que você menos gostou ou achou mais difícil durante a atividade?

____

____

____

6. Durante a oficina, em algum momento você sentiu ansiedade ou nervosismo por estar aprendendo Matemática?

( ) Não, me senti tranquilo(a) o tempo todo.

( ) Um pouco, mas consegui lidar bem.

( ) Sim, fiquei ansioso(a) em alguns momentos.

( ) Sim, senti bastante ansiedade.

7. Comparando com outras aulas de Matemática, como você se sentiu nesta oficina?

( ) Mais relaxado(a) e motivado(a).

( ) Da mesma forma que em outras aulas.

( ) Mais ansioso(a) ou desconfortável.

( ) Outro: ______________________

8. Você considera que aprender construindo e manipulando os sólidos foi mais interessante e produtivo do que apenas ver esses conteúdos em livros ou no quadro?

( ) Sim, muito mais interessante.

( ) Sim, mas prefiro uma combinação entre manipulação e explicação teórica.

( ) Não, prefiro só o método tradicional.

( ) Não tenho certeza.

9. Em relação ao trabalho em grupo, como você se sentiu?

( ) Consegui participar ativamente e colaborar com meus colegas.

( ) Tive dificuldades em colaborar ou me expressar no grupo.

( ) Preferiria ter feito a atividade sozinho(a).

( ) Outro: ______________________

10. Você gostaria que outras aulas de Matemática fossem feitas nesse estilo, com atividades práticas e manipulativas? Por quê?

____

____

____

11. Que sugestão você daria para melhorar essa oficina no futuro?

____

____

____

12. Para finalizar, escreva com suas palavras o que aprendeu hoje ou algo que achou interessante sobre poliedros ou sobre a relação de Euler.

____

____

____

4.6 SUGESTÕES DE ADAPTAÇÕES PARA DIFERENTES CONTEXTOS ESCOLARES

A presente oficina educativa foi projetada para ser flexível e adaptável a diferentes realidades escolares, visando atender às necessidades específicas de cada contexto educacional. A seguir são apresentadas algumas sugestões de adaptações:

✓ Escolas com recursos limitados: Para escolas com recursos financeiros limitados ou dificuldades de acesso aos materiais pedagógicos comerciais (Vertex e Geomag), recomenda-se a utilização de materiais alternativos de baixo custo. Varetas de madeira ou palitos de churrasco combinados com massinha caseira ou massa de biscuit podem substituir satisfatoriamente os kits comerciais. Além disso, o uso de papelão reciclado na confecção dos sólidos geométricos amplia as possibilidades de realização prática sem a necessidade de grandes investimentos.

✓ Turmas grandes: Em escolas com turmas numerosas, a organização de pequenos grupos é especialmente recomendada, permitindo melhor gestão da atividade e maior envolvimento individual dos estudantes. Neste caso, é essencial definir previamente os papéis de cada aluno dentro dos grupos (recorte e organização das peças, montagem, observação, análise e registro), garantindo que todos participem ativamente das atividades.

✓ Educação de Jovens e Adultos (EJA): Para estudantes adultos, é importante adaptar a linguagem utilizada durante a oficina, tornando-a mais direta e contextualizada com situações cotidianas ou profissionais vivenciadas pelos alunos. Deve-se explorar o uso prático da Geometria Espacial em profissões específicas, como construção civil, artesanato, arquitetura e marcenaria, criando assim um vínculo mais significativo e relevante com o conteúdo abordado.

✓ Alunos com necessidades educacionais especiais: Neste contexto, sugere-se realizar adaptações adicionais, tais como o uso de modelos táteis com relevos marcados, sólidos geométricos ampliados e material de apoio visual ou auditivo específico. Os professores podem ainda incluir práticas inclusivas, assegurando maior acessibilidade e compreensão para todos os estudantes, fortalecendo o caráter inclusivo da atividade.

4.7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA PROFESSORES

Ao concluir esta proposta de oficina educativa sobre Geometria Espacial, é importante ressaltar que sua efetividade depende significativamente do comprometimento e da criatividade dos professores em seu planejamento e execução. A aplicação prática procura demonstrar que a manipulação direta dos materiais facilita não somente a compreensão conceitual, mas também promove um ambiente acolhedor e estimulante, o que reduz ansiedades relacionadas ao aprendizado da Matemática.

Para maximizar os resultados desta abordagem, destacam-se as seguintes recomendações:

✓ Preparação antecipada: Recomenda-se que o professor familiarize-se previamente com os materiais e construa antecipadamente alguns modelos que servirão como exemplo, facilitando explicações claras e aumentando a confiança dos alunos ao iniciarem suas próprias construções.

✓ Interação constante: É essencial promover o diálogo constante com os estudantes, incentivando-os a expressar dúvidas e reflexões. Perguntas direcionadas são fundamentais para guiar o raciocínio dos alunos e ajudá-los a chegar autonomamente às conclusões matemáticas desejadas.

✓ Incentivo à cooperação: Valorizar o trabalho colaborativo e enfatizar que o sucesso das atividades depende da participação ativa e conjunta de todos os alunos fortalece não apenas as competências matemáticas, mas também habilidades sociais importantes, como a comunicação e o trabalho em equipe.

✓ Avaliação formativa: Recomenda-se que o professor utilize métodos avaliativos contínuos e qualitativos ao longo das oficinas, valorizando os processos e não apenas os resultados finais. Dessa forma, é possível reconhecer avanços individuais e identificar pontos que necessitam de intervenções adicionais.

Por fim, espera-se que os professores possam adaptar e expandir estas propostas, ajustando-as conforme suas realidades escolares específicas e as necessidades dos seus alunos, enriquecendo continuamente sua prática pedagógica e contribuindo para uma aprendizagem efetiva e duradoura.

5 ENTRELAÇANDO HISTÓRIA, MATEMÁTICA E PRÁTICA DOCENTE NA GEOMETRIA ESPACIAL

O ensino da Matemática, e em particular da Geometria Espacial, no cenário educacional brasileiro contemporâneo, apresenta-se como um campo repleto de desafios, mas igualmente permeado por oportunidades de inovação e transformação pedagógica. Conforme discutido nos capítulos anteriores desta dissertação, a abordagem tradicional, frequentemente ancorada em representações bidimensionais e na exposição teórica descontextualizada, muitas vezes falha em promover uma compreensão profunda e significativa dos conceitos tridimensionais (FIORENTINI; MIORIM, 1990). Essa lacuna metodológica, como aponta a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), contribui para a construção de uma imagem árida e distante da Matemática, gerando desmotivação (SILVA; OLIVEIRA; SANTOS, 2020) e dificultando o desenvolvimento do pensamento espacial nos estudantes do Ensino Fundamental, uma etapa crucial na formação de suas estruturas cognitivas (VAN HIELE, 1986).

Neste contexto desafiador, onde a busca por metodologias ativas, pela aprendizagem significativa (MOREIRA; MASINI, 2009) e pelo uso de materiais manipuláveis se torna premente – como defendido e explorado nesta pesquisa através das oficinas educativas –, emerge a necessidade de revisitar conceitos matemáticos fundamentais não apenas por seu valor intrínseco, mas também por seu potencial pedagógico transformador. A utilização de materiais concretos e laboratórios de ensino de matemática, como advoga Lorenzato (2006), permite uma exploração mais rica e engajadora. Um desses pilares da geometria, que conecta a beleza da estrutura matemática à possibilidade de exploração concreta e investigativa, é a célebre Relação de Euler para poliedros.

Este capítulo dedica-se a mergulhar no universo da Relação de Euler ($V - A + F = 2$), explorando suas raízes históricas, a genialidade de seu proponente, Leonhard Euler, e os conceitos geométricos essenciais que a fundamentam – vértices, arestas, faces, poliedros, prismas e pirâmides (DANTE, 2013). Contudo, nossa jornada não se limitará à exposição formal. Buscaremos, em consonância com a filosofia desta dissertação, que valoriza a autonomia e a construção do conhecimento pelo aluno (FREIRE, 1996), conectar a elegância dessa fórmula matemática com as práticas pedagógicas inovadoras discutidas. Investigaremos como a Relação de Euler, quando abordada de forma dinâmica e interativa, utilizando a manipulação e a construção de sólidos geométricos (LORENZATO, 2006), pode se tornar uma ferramenta poderosa para superar as dificuldades tradicionalmente associadas ao ensino da Geometria Espacial (FIORENTINI; MIORIM, 1990).

Ao entrelaçar a história da matemática, a precisão das definições geométricas e as reflexões sobre o ensino e a aprendizagem, pretendemos não apenas apresentar um conteúdo matemático relevante, mas também reforçar a tese central deste trabalho: a de que a matemática, quando vivenciada e explorada ativamente pelos alunos revela-se uma disciplina fascinante, acessível e fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da percepção espacial (BRASIL, 2018). A história de Euler e sua famosa relação servirão como fio condutor para demonstrar como um conceito, nascido da mais pura investigação matemática, pode iluminar caminhos para uma prática pedagógica mais rica, envolvente e eficaz no contexto do Ensino Fundamental, promovendo uma mentalidade de crescimento nos estudantes (CURSINO, 2023).

5.1 LEONHARD EULER: UM GIGANTE DA MATEMÁTICA NO SÉCULO DAS LUZES

Para compreendermos a profundidade e o alcance da Relação de Euler, é fundamental situá-la no contexto histórico e intelectual de seu criador, Leonhard Euler (1707-1783). Nascido na Basileia, Suíça, em pleno Século das Luzes – um período de efervescência intelectual e científica na Europa –, Euler emergiu como uma das mentes mais brilhantes e, sem dúvida, o matemático mais prolífico de todos os tempos (EBIOGRAFIA, 2025). Sua obra colossal, composta por centenas de publicações entre livros e artigos, abrangeu praticamente todos os ramos da matemática e da física conhecidos em sua época, estabelecendo fundamentos e abrindo novos caminhos que influenciam o pensamento científico até os dias atuais (BOYER, 1974).

A trajetória de Euler foi marcada por uma dedicação incansável à pesquisa e uma capacidade extraordinária de produção intelectual. Desde cedo, seu talento matemático chamou a atenção de figuras proeminentes como Johann Bernoulli, um dos principais matemáticos europeus da época (EBIOGRAFIA, 2025). Essa conexão foi crucial, abrindo portas para Euler na prestigiosa Academia de Ciências de São Petersburgo, na Rússia, para onde se mudou em 1727. Lá, ele rapidamente ascendeu, sucedendo Daniel Bernoulli na cátedra de matemática em 1733. Foi nesse período inicial em São Petersburgo que Euler consolidou sua reputação, publicando trabalhos que levaram o cálculo integral a novos patamares, desenvolveram a teoria das funções trigonométricas e logarítmicas e simplificaram operações analíticas (BOYER, 1974).

O ritmo intenso de trabalho, contudo, cobrou seu preço. Em 1735, Euler perdeu a visão de um olho, um prenúncio das dificuldades que enfrentaria mais tarde (EBIOGRAFIA, 2025). Apesar disso, sua produtividade não diminuiu. Em 1741, aceitou o convite de Frederico, o Grande, e mudou-se para Berlim, tornando-se membro da Academia local. Durante os 25 anos que passou em Berlim, Euler continuou sua produção incessante, contribuindo significativamente tanto para a academia prussiana quanto para a de São Petersburgo, que lhe concedeu uma pensão (BOYER, 1974).

Foi nesse período que Euler publicou obras seminais como a Introductio in analisem infinitorum (1748), onde solidificou o conceito de função como central na análise matemática e avançou no uso de infinitesimais. Seus textos sobre cálculo, Institutiones calculi differentialis (1755) e Institutiones calculi integralis (1768–70), tornaram-se modelos para o ensino da disciplina, repletos de novas fórmulas, métodos de integração e avanços na teoria das equações diferenciais, essenciais para a física e a engenharia (BOYER, 1974). Euler também foi um mestre da notação, introduzindo ou popularizando símbolos que hoje são onipresentes na linguagem matemática, como “Σ” para somatório, “e” para a base dos logaritmos naturais, “i” para a unidade imaginária ($\sqrt{-1}$), e “π” para a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo (BOYER, 1974; D’AMBROSIO, 2021).

Sua influência estendeu-se à geometria, onde, para além da famosa relação para poliedros, descobriu a linha que leva seu nome, “A RETA DE EULER” (conectando ortocentro, circuncentro e baricentro de um triângulo, mostrando serem esses colineares) e revolucionou a trigonometria ao tratá-la em termos de razões numéricas e conectá-la aos números complexos através da identidade de Euler ($e^{i\pi} + 1 = 0$), considerada por muitos uma das mais belas equações da matemática

(BOYER, 1974).

Em 1766, com o relacionamento com Frederico, o Grande, desgastado, Euler aceitou o convite de Catarina II e retornou a São Petersburgo. Pouco tempo depois, uma catarata no olho restante levou-o à cegueira total (EBIOGRAFIA, 2025). Surpreendentemente, mesmo privado da visão, sua produção matemática continuou vigorosa nos últimos 17 anos de sua vida, sustentada por uma memória prodigiosa e uma capacidade mental de cálculo fora do comum. Foi nesse período final que ele realizou, por exemplo, todos os complexos cálculos de cabeça para sua segunda teoria do movimento lunar e fez sua maior descoberta na teoria dos números: a lei da reciprocidade quadrática (1783) (BOYER, 1974).

A vida e a obra de Euler exemplificam a paixão pela descoberta e a capacidade humana de superar adversidades. Embora não fosse um professor de sala de aula no sentido tradicional, seu legado pedagógico é imenso. Seus livros didáticos estabeleceram padrões e sua clareza expositiva, como demonstrada em Lettres à une princesse d'Allemagne (Cartas a uma Princesa Alemã), tornou princípios complexos de mecânica, óptica e astronomia acessíveis (D'AMBROSIO, 2021). Ele ajudou a consolidar a educação matemática na Rússia e sua influência permeou gerações de matemáticos.

A história de Euler nos lembra que a matemática é uma construção humana, impulsionada pela curiosidade, pela busca de padrões e pela resolução de problemas (D'AMBROSIO, 1996). Sua Relação para poliedros, que exploraremos em detalhe a seguir, não é apenas uma fórmula elegante, mas um testemunho da profunda estrutura e ordem que podem ser descobertas no universo das formas geométricas – uma descoberta que, como veremos, ressoa com os desafios e objetivos do ensino contemporâneo da Geometria Espacial.

5.2 DESVENDANDO AS FORMAS TRIDIMENSIONAIS: CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA GEOMETRIA ESPACIAL

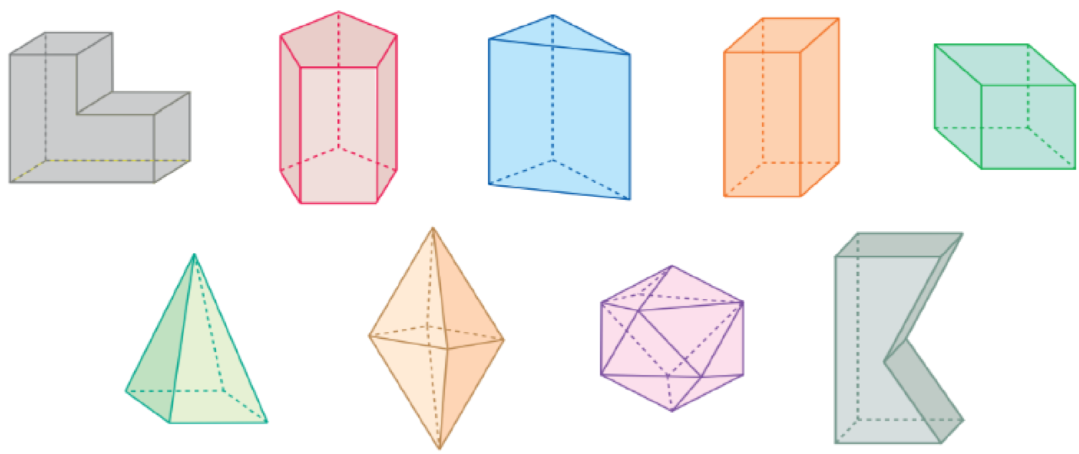
Antes de nos aprofundarmos na Relação de Euler e em suas implicações, é essencial estabelecermos uma base conceitual sólida sobre os objetos geométricos aos quais ela se aplica. Faremos constante uso nessa sessão dos ensinamentos do professor Luiz Roberto Dante, em sua obra "Matemática, Contexto e Aplicações", volume 2. A Geometria Espacial lida com formas que existem em três dimensões – possuindo largura, comprimento e altura –, e a compreensão de seus elementos constituintes é o primeiro passo para desvendar suas propriedades e relações.

No vasto universo dos sólidos geométricos, destacam-se duas categorias principais: os poliedros e os não poliedros (também conhecidos como corpos redondos). Os corpos redondos, como a esfera, o cilindro e o cone, caracterizam-se por possuírem ao menos uma superfície curva. Embora importantes no estudo da geometria, nosso foco neste capítulo recairá sobre os poliedros, que são o palco onde a Relação de Euler se manifesta de forma mais proeminente.

5.3 POLIEDROS: SÓLIDOS DE MÚLTIPLAS FACES

Um poliedro (do grego polis, "muitos", e hedra, "face") é um sólido geométrico tridimensional limitado por um número finito de polígonos planos (DANTE, 2013). Esses polígonos formam as "cascas" ou superfícies do sólido. Pense em um dado, uma caixa de sapatos ou uma pirâmide – todos são exemplos de poliedros.

Figura 6 – Alguns poliedros



Fonte: Dante, Luiz Roberto Matemática: contexto & aplicações – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2013. (Página 183)

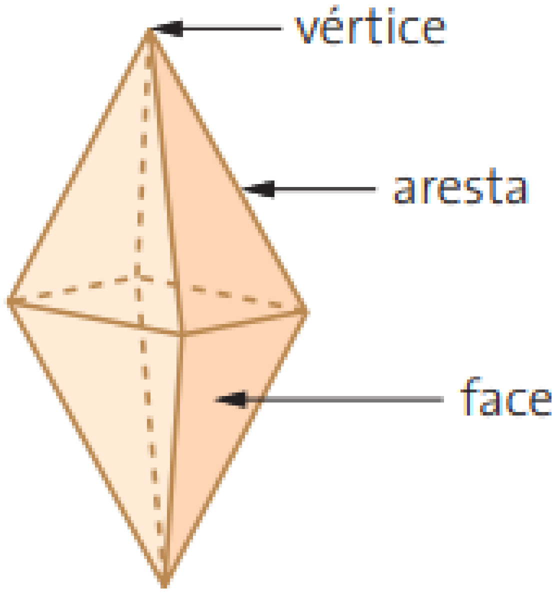
Para descrever e analisar os poliedros de maneira precisa, utilizamos três elementos fundamentais:

Faces (F): São os próprios polígonos planos que limitam o poliedro. Cada “lado” plano de um poliedro é uma face. Um cubo, por exemplo, possui 6 faces quadradas.

Arestas (A): São os segmentos de reta formados onde duas faces do poliedro se encontram. Correspondem às “linhas” ou “dobras” que contornam o sólido. Um cubo possui 12 arestas.

Vértices (V): São os pontos onde três ou mais arestas (e, consequentemente, três ou mais faces) se encontram. Correspondem aos “cantos” ou “pontas” do poliedro. Um cubo possui 8 vértices.

Figura 7 – Octaedro com destaque para vértices, faces e arestas.



Fonte: Dante, Luiz Roberto Matemática: contexto & aplicações – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2013. (Página 183)

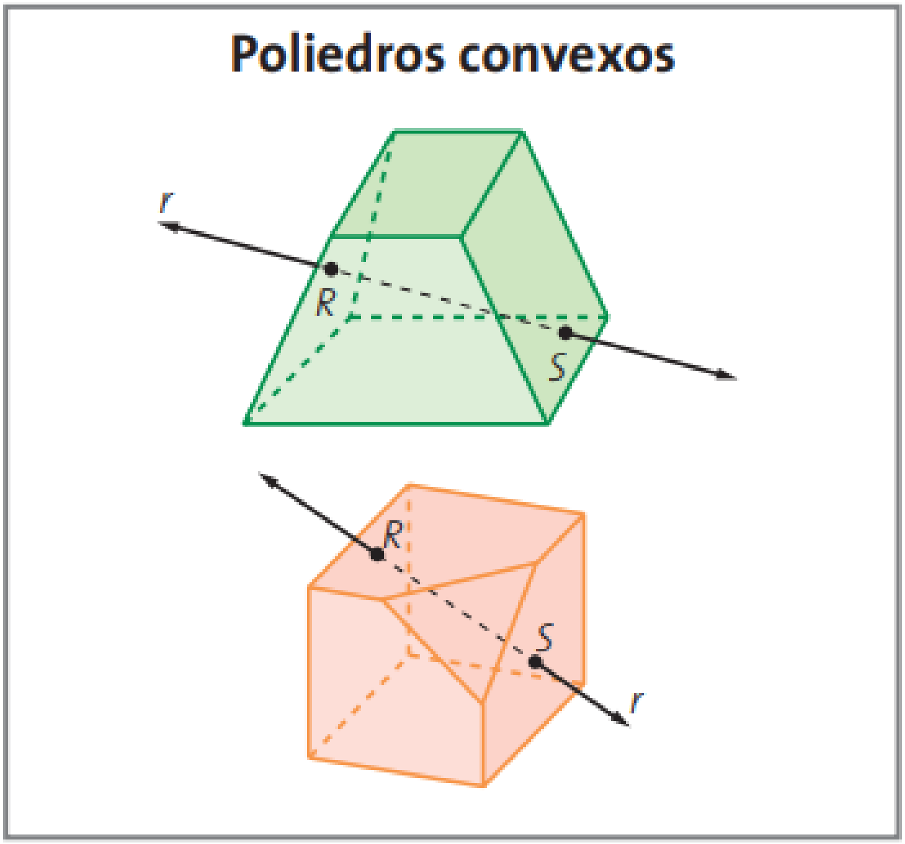
A compreensão clara desses três elementos é crucial, pois são justamente as quantidades de vértices, arestas e faces que a Relação de Euler conecta.

5.4 A CONVEXIDADE: UMA PROPRIEDADE IMPORTANTE

Dentro do conjunto dos poliedros, uma distinção importante é feita entre poliedros convexos e não convexos (côncavos). Essa distinção é particularmente relevante porque a Relação de Euler, em sua forma mais conhecida (V-A+F=2), aplica-se diretamente aos poliedros convexos.

Poliedro Convexo: Um poliedro é considerado convexo se, para qualquer uma de suas faces, o plano que a contém deixa todas as outras faces inteiramente situadas em um mesmo lado (semiespaço) desse plano. Uma maneira mais intuitiva de pensar nisso é que um poliedro convexo não possui “reentrâncias”, “buracos” ou “depressões” em sua superfície. Além disso, qualquer segmento de reta que conecte dois pontos quaisquer no interior do poliedro estará totalmente contido dentro dele. Os sólidos platônicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro), prismas e pirâmides regulares são exemplos clássicos de poliedros convexos.

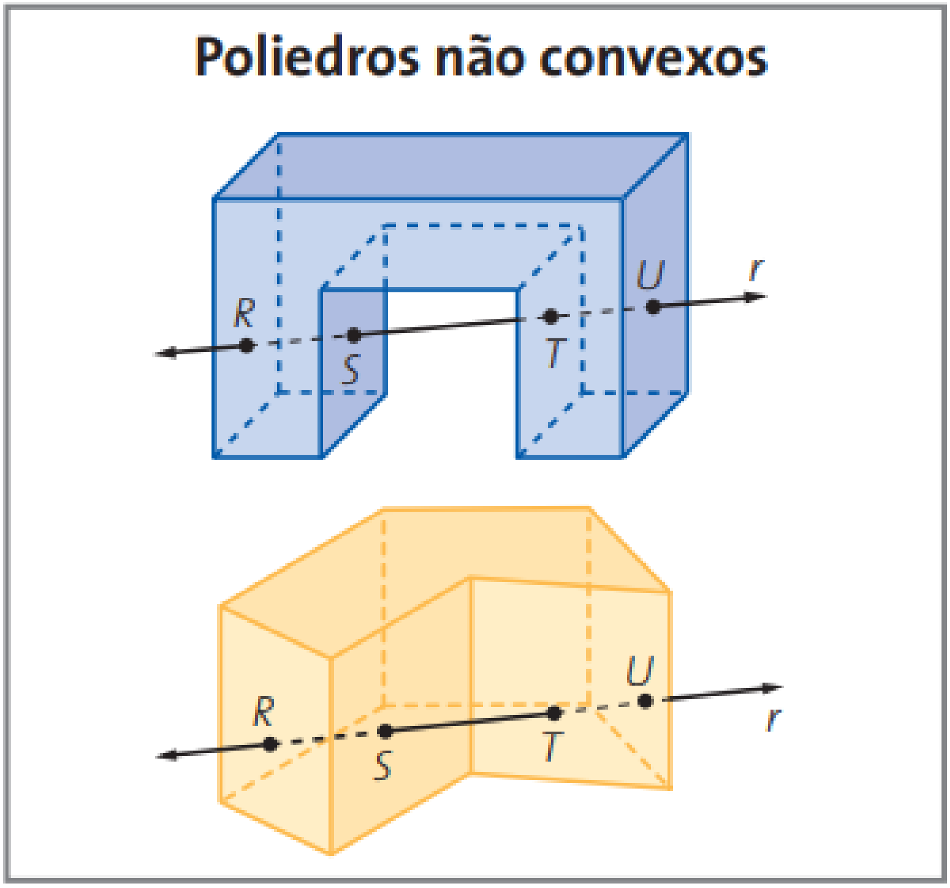
Figura 8 – Poliedros convexos



Fonte: Dante, Luiz Roberto Matemática: contexto & aplicações – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2013. (Página 185)

Poliedro Não Convexo (Côncavo): É um poliedro que não satisfaz a condição de convexidade. Ele possui pelo menos uma face cujo plano que a contém divide as outras faces do poliedro. Visualmente, eles apresentam “entradas” ou “concavidades”. Um exemplo seria um poliedro em forma de estrela.

Figura 9 – Poliedros não convexos



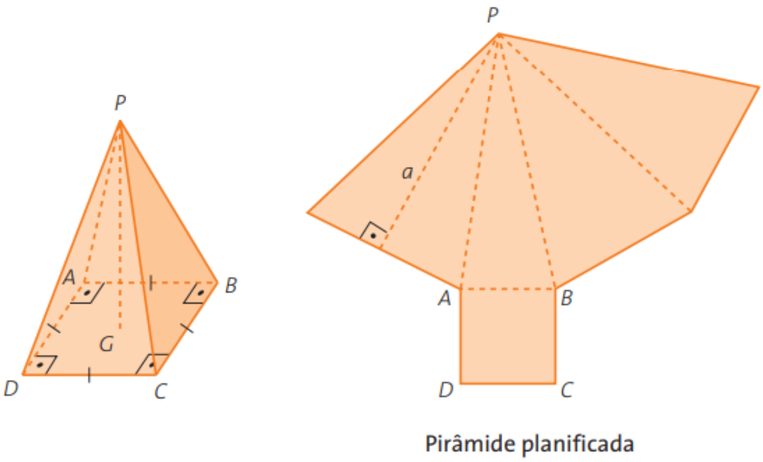
Fonte: Dante, Luiz Roberto Matemática: contexto & aplicações – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2013. (Página 185)

5.5 FAMÍLIAS NOTÁVEIS DE POLIEDROS: PRISMAS E PIRÂMIDES

Duas famílias de poliedros são frequentemente estudadas e servem como excelentes exemplos para a exploração da Geometria Espacial e da Relação de Euler:

Pirâmides: Como mencionado, uma pirâmide é um poliedro formado por uma base poligonal (que pode ser um triângulo, quadrado, pentágono etc.) e um ponto fora do plano da base, chamado ápice ou vértice da pirâmide. Todas as faces laterais de uma pirâmide são triângulos que conectam os lados da base ao ápice. O nome da pirâmide deriva da forma de sua base (exemplo: pirâmide de base quadrada, pirâmide de base hexagonal).

Figura 10 – Pirâmide de base quadrada

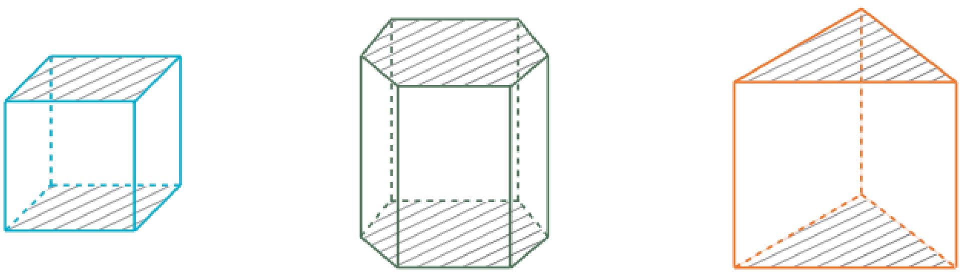


Fonte: Dante, Luiz Roberto Matemática: contexto & aplicações – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2013. (Página 205)

Prismas: Um prisma é um poliedro caracterizado por ter duas bases poligonais que são idênticas (congruentes) e paralelas entre si. As faces laterais de um prisma são sempre paralelogramos (em prismas retos, essas faces são retângulos) que conectam os lados correspondentes das duas bases. Assim como nas pirâmides, o nome do prisma é determinado pela forma de suas bases (ex: prisma de base triangular, prisma de base pentagonal).

Com essas definições em mente, estamos preparados para explorar a relação matemática que conecta os vértices, arestas e faces desses fascinantes objetos tridimensionais – a Relação de Euler.

Figura 11 – Alguns prismas com bases destacadas

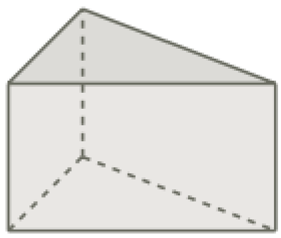


Fonte: Dante, Luiz Roberto Matemática: contexto & aplicações – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2013. (Página 190)

5.6 A RELAÇÃO DE EULER: DESVENDANDO A FÓRMULA V - A + F = 2

Após estabelecermos as bases conceituais sobre poliedros e seus elementos, e conhecermos um pouco da trajetória de seu descobridor, Leonhard Euler, podemos agora mergulhar na relação matemática que imortalizou seu nome no estudo das formas tridimensionais. A Relação de Euler, expressa pela fórmula concisa e elegante V - A + F = 2, representa uma das joias da geometria e da topologia, revelando uma propriedade fundamental e, à primeira vista, surpreendente sobre a estrutura dos poliedros.

Figura 12 – Prisma triangular e aplicação da relação de Euler



$V = 6$
$F = 5$
$A = 9$

$$V - A + F = 2$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$6 - 9 + 5 = 2$$

Fonte: Dante, Luiz Roberto Matemática: contexto & aplicações – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2013. (Página 186)

5.6 O SIGNIFICADO INTRÍNSECO DA FÓRMULA

A fórmula de Euler estabelece, que para uma vasta classe de poliedros, existe uma relação invariante entre o número de seus Vértices (V), Arestas (A) e Faces (F). Se subtrairmos o número de arestas da soma do número de vértices e faces, o resultado será sempre 2. Essa constância numérica, independentemente do tamanho do poliedro, do número específico de lados de suas faces ou da medida de seus ângulos (desde que certas condições sejam satisfeitas), aponta para uma característica estrutural profunda, de natureza topológica.

A topologia é um ramo da matemática que estuda as propriedades dos espaços que são preservadas sob deformações contínuas, como esticar, encolher ou dobrar, sem rasgar ou colar partes. A Relação de Euler é, em essência, uma propriedade topológica. O número 2, conhecido como a Característica de Euler-Poincaré, é a característica associada a qualquer superfície fechada e simples que pode ser deformada continuamente até se tornar uma esfera. Isso significa que, do ponto de vista topológico, todos os poliedros que satisfazem a relação V-A+F=2 compartilham uma estrutura fundamental similar à de uma esfera.

5.7 AS CONDIÇÕES DE VALIDADE: QUANDO A MÁGICA ACONTECE

É crucial entender que a Relação de Euler, na sua forma clássica V-A+F=2, não é universalmente válida para qualquer objeto tridimensional com faces planas. Sua aplicabilidade está condicionada, principalmente, a duas propriedades do poliedro:

Convexidade: Conforme definido anteriormente, um poliedro convexo não possui “reentrâncias”. O plano de qualquer face deixa todas as outras faces no mesmo semiespaço. Esta é a condição mais comumente citada em contextos introdutórios, pois garante a validade da fórmula.

Simplicidade Topológica (Homeomorfismo à Esfera): De forma mais rigorosa, a relação V-A+F=2 vale para poliedros ditos simples, ou seja, aqueles cuja superfície pode ser continuamente deformada até formar uma esfera. Isso implica que o poliedro não pode ter “furos” ou “túneis” que o atravessem. Todos os poliedros convexos são topologicamente simples.

É importante notar que a convexidade é uma condição suficiente, mas não estritamente necessária. Existem poliedros não convexos que ainda são topologicamente simples (homeomorfos a uma esfera) e, portanto, satisfazem V-A+F=2. Tais poliedros são chamados Eulerianos. Contudo, para garantir a validade sem ambiguidades, especialmente no contexto do Ensino Fundamental, focar nos poliedros convexos é uma abordagem segura e eficaz.

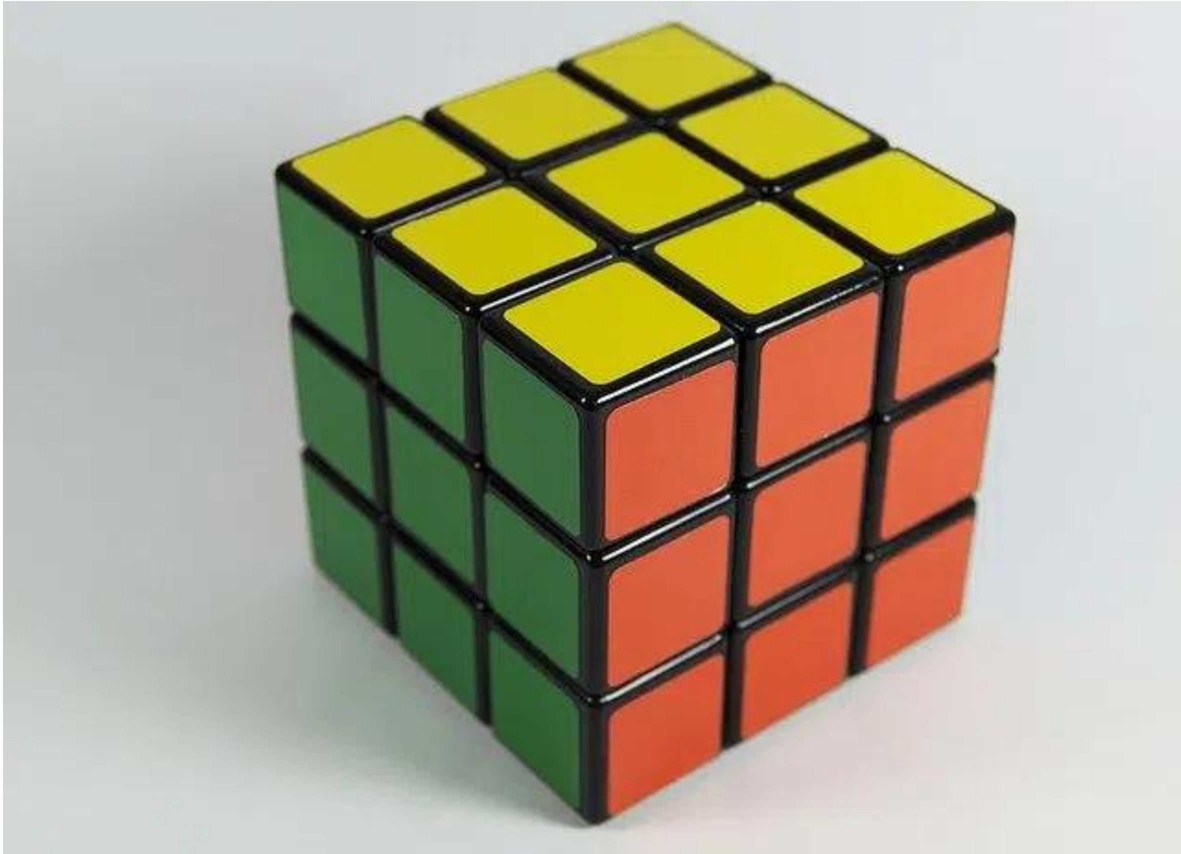
5.8 VERIFICANDO A RELAÇÃO NA PRÁTICA: EXEMPLOS CLÁSSICOS

Uma das formas mais eficazes de compreender a Relação de Euler é observá-la em ação. Para isso, propomos a verificação da fórmula em alguns poliedros convexos conhecidos, muitos dos quais podem ser facilmente construídos ou manipulados em sala de aula.

O Cubo (Hexaedro): Um velho conhecido das aulas de geometria. Vértices

(V): 8 (os cantos). Arestas (A): 12 (as linhas onde as faces se encontram). Faces (F): 6 (os quadrados que formam a superfície). Verificação: V - A + F = 8 - 12 + 6 = - 4 + 6 = 2. A relação se confirma!

Figura 13: Imagem de um "cubo mágico", forma de hexaedro regular ou cubo.



Fonte: Disponível em https://definicion.de/cubo/. Acesso em 17 jun. 2025.

O Tetraedro: Uma pirâmide com todas as faces sendo triângulos equiláteros. Vértices (V): 4. Arestas (A): 6. Faces (F): 4. Verificação: V - A + F = 4 - 6 + 4 = -2 + 4 = 2. Confirmado!

Figura 14: Piraminx é um quebra-cabeça em formato de tetraedro regular.

Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/tetraedro-regular-1.htm. Acesso em 17 jun. 2025

A Pirâmide de Base Quadrangular: Um exemplo comum em livros didáticos. Vértices (V): 5 (4 na base + 1 no topo/ápice). Arestas (A): 8 (4 na base + 4 subindo para o ápice). Faces (F): 5 (1 base quadrada + 4 faces laterais triangulares). Verificação: V - A + F = 5 - 8 + 5 = -3 + 5 = 2. Funciona!

Figura 15: As pirâmides do Egito são as construções mais conhecidas que possuem o formato piramidal.

Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/piramides.htm. Acesso em 17 jun. 2025

O Prisma de Base Triangular: Uma “fatia de Toblerone”, por exemplo. Vértices (V): 6 (3 em cada base triangular). Arestas (A): 9 (3 em cada base + 3 conectando as bases). Faces (F): 5 (2 bases triangulares + 3 faces laterais retangulares). Verificação: V - A + F = 6 - 9 + 5 = -3 + 5 = 2. Perfeito!

Figura 16 – Chocolate “Toblerone em formato de prisma triangular”

Fonte: Disponível em: https://www.manuflores.com.br/chocolate-toblerone-100gr. Acesso em: 4 mai. 2025.

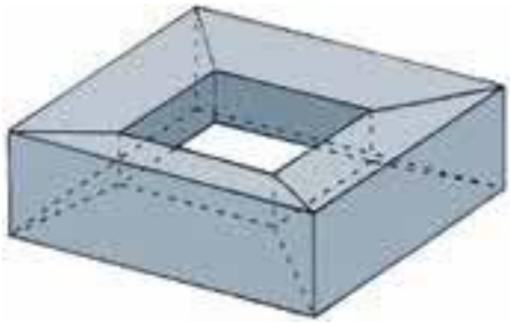
Esses exemplos demonstram a consistência da relação para diferentes tipos de poliedros convexos. A fórmula oferece uma ferramenta poderosa para verificar a contagem dos elementos de um poliedro ou até mesmo para determinar o número de um dos elementos se os outros dois forem conhecidos.

5.9 LIMITES DA FÓRMULA: ONDE A RELAÇÃO NÃO SE APLICA

Compreender onde a fórmula não se aplica é tão importante quanto saber onde ela funciona. A Relação V - A + F = 2 falha quando as condições de convexidade e/ou simplicidade topológica são violadas:

Poliedros com Furos (Não Simples): Se um poliedro possui um ou mais “túneis” que o atravessam, ele não é mais topologicamente equivalente a uma esfera. Sua característica de Euler muda. Por exemplo, um poliedro com um furo (como uma moldura de quadro tridimensional ou um cubo vazado) tem característica de Euler igual a 0, e a relação se torna V - A + F = 2.

Figura 17: Poliedro vazado.



Disponível em: https://mathmonks.com/frustum/truncated-pyramid?utm_source.com. Acesso em 18 jun. 2025.

Notem que no poliedro acima temos V=16, F=16 e A=32. Aplicando a Relação de Euler temos $V + F – A = 16 + 16 – 32 = 0 \neq 2$ (a relação falha).

Poliedros Não Convexos: Como mencionado, nem todo poliedro não convexo é Euleriano. A validade da fórmula V - A + F = 2 dependerá da estrutura topológica específica do poliedro não convexo em questão. Alguns podem satisfazê-la, outros não.

Figura 18: Pequeno dodecaedro estrelado

Fonte: Disponível em: https://www.polyhedra.net/pt/model.php?name-en=small-stellated-dodecahedron. Acesso em 18 jun. 2025.

A figura anterior é chamada de “pequeno dodecaedro estrelado”. Nela temos F = 12, V = 12 e A = 30. Aplicando a relação de Euler temos: 12 + 12 – 30 = - 6. (A relação falha).

Outras Estruturas: A fórmula também não se aplica a arranjos como dois cubos que se tocam apenas por um vértice ou uma aresta, ou a figuras que não sejam poliedros fechados e limitados.

Essas limitações não diminuem a importância da Relação de Euler; pelo contrário, elas destacam a profundidade da conexão entre a geometria e a topologia, mostrando que a fórmula captura uma propriedade específica de uma classe bem definida de objetos.

5.10 CONEXÕES PEDAGÓGICAS E CONSIDERAÇÕES FINAIS: A RELAÇÃO DE EULER COMO FERRAMENTA PARA UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A jornada pela vida de Leonhard Euler e pela descoberta de sua célebre relação para poliedros nos oferece mais do que um vislumbre da beleza e da estrutura inerentes à matemática. Ela nos convida a refletir sobre como esses conceitos, aparentemente abstratos, podem ser transpostos para a sala de aula de forma a engajar os alunos, promover o pensamento crítico e superar as barreiras frequentemente encontradas no ensino tradicional da Geometria Espacial, conforme amplamente discutido nesta dissertação.

A Relação de Euler ($V - A + F = 2$) encapsula, de maneira exemplar, o potencial pedagógico que reside na exploração ativa e investigativa da matemática. Longe de ser apenas mais uma fórmula a ser memorizada e aplicada mecanicamente em exercícios repetitivos, ela pode se tornar um catalisador para uma aprendizagem verdadeiramente significativa, alinhada aos princípios defendidos por teóricos como Piaget, Van Hiele e Ausubel, e em consonância com as diretrizes da BNCC que enfatizam a visualização e a manipulação.

Como evidenciado pela experiência docente relatada neste trabalho e pelas oficinas educativas propostas, a abordagem tradicional, limitada a representações bidimensionais em lousas e livros, frequentemente falha em construir uma intuição espacial sólida nos estudantes. A dificuldade em visualizar vértices, arestas e faces em desenhos planos, e em compreender suas interconexões, é um obstáculo real. É precisamente neste ponto que a exploração prática da Relação de Euler, através da construção e manipulação de modelos poliédricos, revela seu valor inestimável.

Ao permitir que os alunos montem seus próprios cubos, pirâmides, prismas e outros poliedros – utilizando materiais concretos como varetas e conectores (semelhantes ao Vertex ou Geomag mencionados), dobraduras de papel (planificações) ou até mesmo materiais reciclados –, o professor cria um ambiente tridimensional de aprendizagem. Nesse ambiente, os conceitos de vértice, aresta e face deixam de ser abstrações distantes e tornam-se elementos tangíveis, passíveis de contagem e verificação direta. A atividade de contar V, A e F em diferentes sólidos construídos e, em seguida, testar a validade da fórmula $V - A + F = 2$ transforma-se em um processo de descoberta guiada. Os alunos não recebem a fórmula pronta, mas são incentivados a procurar padrões, a formular hipóteses e a validar suas descobertas, assumindo um papel ativo na construção do próprio conhecimento.

A Relação de Euler serve, ainda, como uma excelente ferramenta de verificação e investigação. Quando um aluno, ao contar os elementos de um poliedro construído, chega a um resultado diferente de 2, abre-se uma oportunidade rica para a discussão. O erro está na contagem? O poliedro construído é realmente convexo e simples? Essa investigação sobre as condições de validade da fórmula aprofunda a compreensão e estimula o raciocínio lógico, indo muito além da simples aplicação de uma regra.

Ademais, conectar a fórmula ao seu contexto histórico, apresentando a figura de Euler, suas contribuições e até mesmo suas dificuldades (como a perda da visão), humaniza a matemática. Mostra que ela é fruto do esforço intelectual humano, sujeita a um processo histórico de desenvolvimento, e não um corpo de conhecimento estático e inatingível. Isso pode contribuir significativamente para desmistificar a disciplina e aumentar o interesse dos alunos, combatendo a percepção negativa frequentemente associada a ela.

Integrar a exploração da Relação de Euler às práticas pedagógicas, especialmente em oficinas educativas como as propostas nesta dissertação, representa um passo concreto para romper com o ciclo vicioso do ensino tradicional criticado ao longo deste trabalho. Significa oferecer aos alunos a oportunidade de “ver, tocar, manipular e experimentar objetos tridimensionais”, como defendido nos objetivos desta pesquisa, consolidando conceitos fundamentais de forma mais eficaz e duradoura. A beleza matemática da fórmula de Euler encontra, assim, um propósito pedagógico poderoso: o de tornar a Geometria Espacial mais acessível, compreensível e, acima de tudo, fascinante para os estudantes do Ensino Fundamental.

Este capítulo, ao tecer os fios entre a história da matemática, os conceitos geométricos e as práticas pedagógicas inovadoras, busca reforçar a ideia de que é possível, e necessário, transformar o ensino da matemática, tornando-o uma experiência mais rica e significativa para todos os envolvidos no processo educativo.

6. RELATO DE EXPERIÊNCIA

6.1 INTRODUÇÃO E CONTEXTUALIZAÇÃO

Nesse capítulo, tenho como objetivo expor e fazer uma reflexão crítica sobre a aplicação prática da oficina que temos descrito no capítulo 4. No dia 25 de abril de 2025, colocamos em prática a oficina que propomos nas páginas anteriores em uma das escolas da rede pública na qual ministro aulas. A escola em questão pertence à Rede Municipal de Ensino de Goiânia e está localizada na região norte, regional Maria Helena Bretas. Trata-se da Escola Municipal Professora Dalka Leles. A turma selecionada foi uma das três turmas de 8º ano do Ensino Fundamental, nas quais ministro quatro aulas semanais — por questões éticas, a identificação específica da turma não será divulgada.

A turma em questão é composta por 20 alunos frequentes, com idades entre 12 e 14 anos. Trata-se de uma turma relativamente tranquila, sem grandes problemas de indisciplina, mas que apresenta participação moderada durante as aulas. O desempenho geral é mediano, tanto nas atividades em sala quanto nas tarefas de casa, provas e demais instrumentos avaliativos. De modo geral, os alunos demonstram pouco engajamento com a exposição dos conteúdos, revelando baixa motivação, ainda que mantenham uma postura respeitosa e colaborativa.

A oficina foi aplicada em uma sexta-feira, durante a segunda e a terceira aulas do turno matutino, observando que cada aula tem duração de 50 minutos. Inicialmente, pretendíamos utilizar as três primeiras aulas do dia; no entanto, devido à dinâmica escolar naquele momento — marcada pela ausência de professores — não foi possível estender a atividade até o intervalo. Inclusive, para viabilizar sua realização, contamos com a colaboração de uma professora, que gentilmente concordou com trocar de aulas.

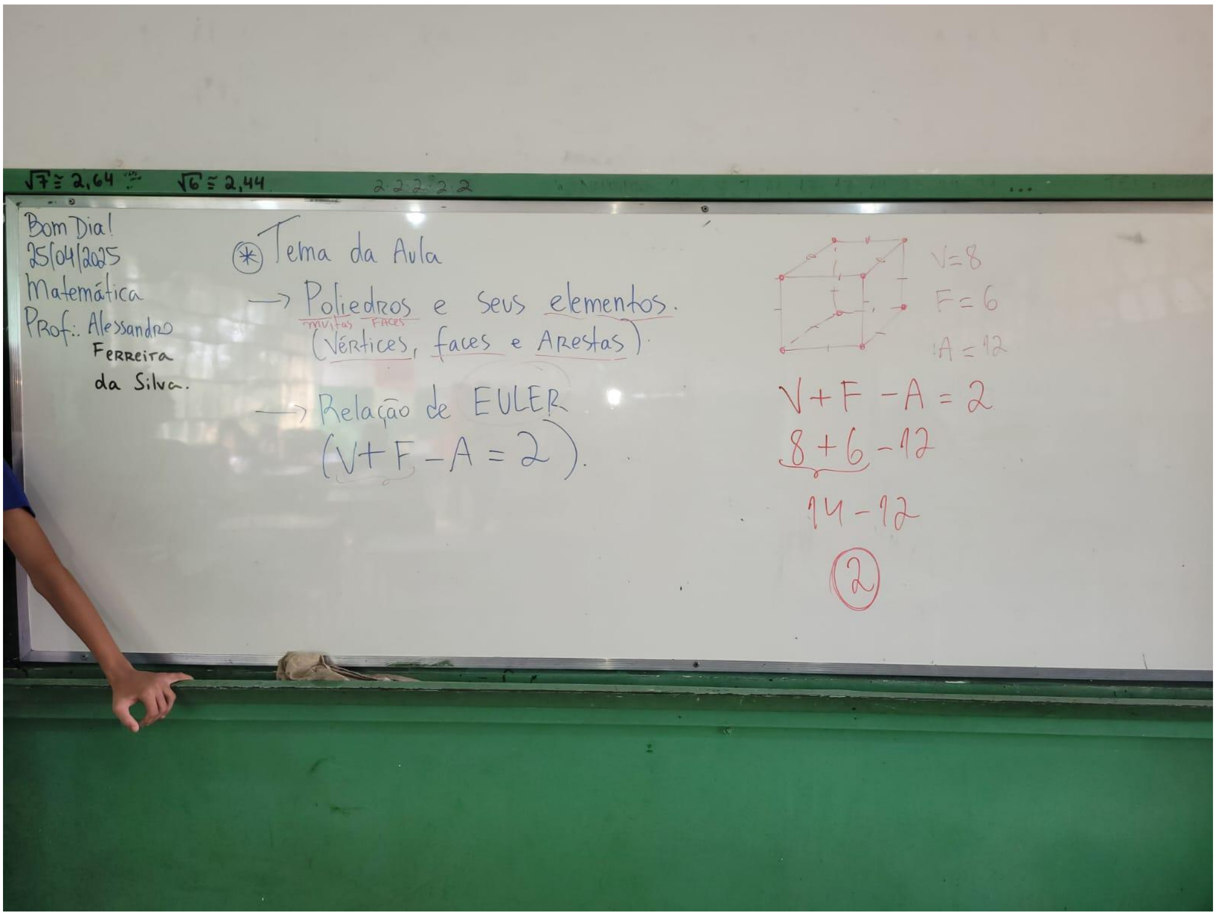
O tema trabalhado na oficina foi o estudo dos poliedros e a Relação de Euler, que conecta o número de vértices, faces e arestas de qualquer poliedro convexo. Para as atividades práticas, utilizamos materiais manipuláveis e montáveis, Vertex e Geomag, adquiridos com recursos próprios, especificamente para essa proposta. Também utilizamos sólidos geométricos confeccionados em madeira, gentilmente cedidos por um colega professor de matemática da mesma instituição, igualmente adquiridos com recursos pessoais.

6.2 APLICAÇÃO PRÁTICA DA OFICINA

Superada essa primeira situação — que faço questão de registrar —, é importante destacar que a dinâmica cotidiana das escolas públicas, conforme pude perceber empiricamente nas unidades em que atuo, apresenta um grau considerável de imprevisibilidade. Esse aspecto deve ser levado em conta no planejamento de qualquer atividade pedagógica voltada aos estudantes. Essa característica do cotidiano escolar já foi destacada por Tardif e Lessard (2005), ao afirmarem que "o cotidiano da escola pública é marcado por imprevistos, interrupções e múltiplas demandas que desafiam a organização do trabalho pedagógico. O professor precisa constantemente adaptar-se às condições reais da escola, que muitas vezes não correspondem ao planejamento idealizado" (TARDIF; LESSARD, 2005, p. 45). Dessa forma, torna-se necessário que o planejamento docente seja flexível e sensível às condições concretas do ambiente escolar.

Finalmente em sala de aula, no início do 2º horário, iniciamos nossa oficina. Ao chegar em sala, havia 20 alunos presentes. Fizemos uma acolhida e solicitamos que eles se sentassem em 4 grupos de 5 alunos cada. Foi solicitado aos alunos que mantivessem os estojos com lápis, borracha etc. em cima de suas mesas. Primeiramente conversamos com os alunos e explicamos que se tratava de uma aula que seria utilizada para contribuir com um trabalho de pesquisa referente à uma dissertação de mestrado, fato que já havia comentado com eles durante a semana. Em seguida, curiosamente me senti um pouco ansioso e preocupado, mesmo sendo professor desde o ano de 2003 e me considerar experiente na profissão, mas ainda assim, prosseguimos.

Confesso que tive que me ater ao roteiro escrito, que mesmo tendo sido planejado e refletido com antecedência, teve de ser consultado no momento da aplicação; seguindo o cronograma, iniciamos com uma exposição teórica inicial dos conceitos, em que explicamos os conceitos relacionados às figuras geométricas planas, diferenciando os polígonos dos não polígonos e em seguida falamos dos sólidos geométricos. Desenhamos no quadro um bloco retangular e destacamos para os alunos os conceitos de faces, vértices e arestas. Com a participação dos alunos, fizemos a contagem da quantidade de faces, vértices e arestas, anotando os valores em uma tabela na lousa, passando então para a relação de Euler, que foi apresentada e testada com os dados do bloco retangular. Apresentei alguns outros poliedros simples também e fizemos de modo semelhante a verificação dos números de faces, vértices e arestas e aplicamos a relação de Euler.



Fonte: Fotografia de autoria própria. Goiânia, 2025

Figura 19 – Foto do quadro com explicações e orientações na parte inicial da oficina

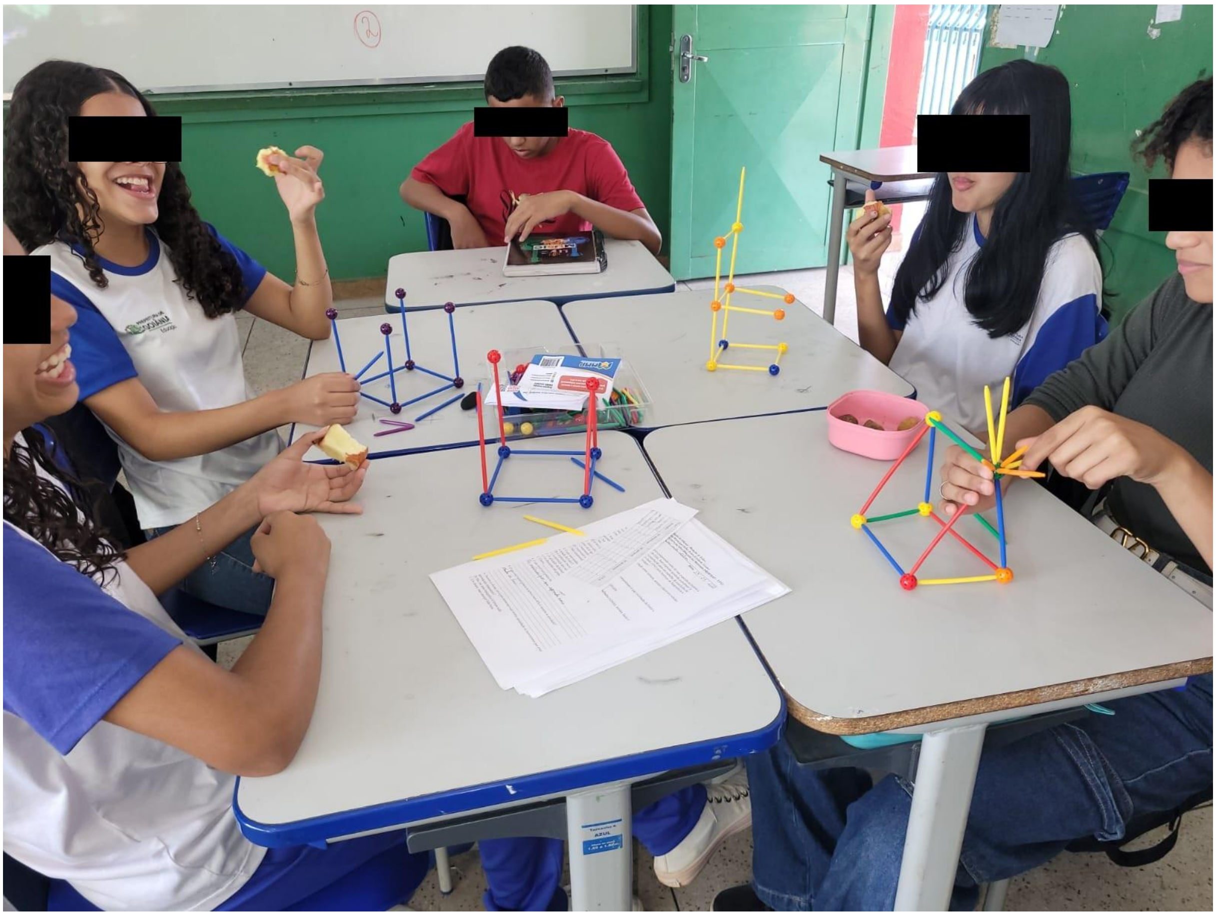
Nesse momento eu nem me lembrei direito de conferir o quanto tempo foi gasto nessa parte, mas preocupado que estava com o andamento da oficina, e lembrando-me de que em escolas de ensino básico potencialmente ocorrem muitas coisas imprevisíveis, passei logo para a distribuição dos kits pedagógicos para os alunos, dividindo as peças do Vertex (que são em maior quantidade que o Geomag) entre dois grupos e deixando os outros dois grupos, um com as peças magnéticas do Geomag e outro com os sólidos de madeira.

Figura 20 - Foto logo após a distribuição dos kits e início das manipulações e construções por parte dos alunos, ainda curiosos e tentando compreender como as peças se encaixavam.

Fonte: Fotografia de autoria própria. Goiânia, 2025

Foi orientado que os alunos montassem poliedros convexos, isso para os grupos que manipulavam o Vertex e o Geomag. Já para o grupo que manipulava os sólidos de madeira, foi orientado que escolhessem alguns para que pudéssemos analisar os seus elementos. Distribuímos também uma tabela para cada grupo, para que colocassem os nomes das formas geométricas montadas ou analisadas e em seguida registrassem o número de vértices, faces e arestas. Orientei para que deixassem o campo para aplicação da Relação de Euler por último, pois queria me certificar antes que o trabalho anterior havia sido feito corretamente.

Figura 21 - Foto de grupo da oficina em momento de descontração enquanto lanchavam. Brincando ou estudando?

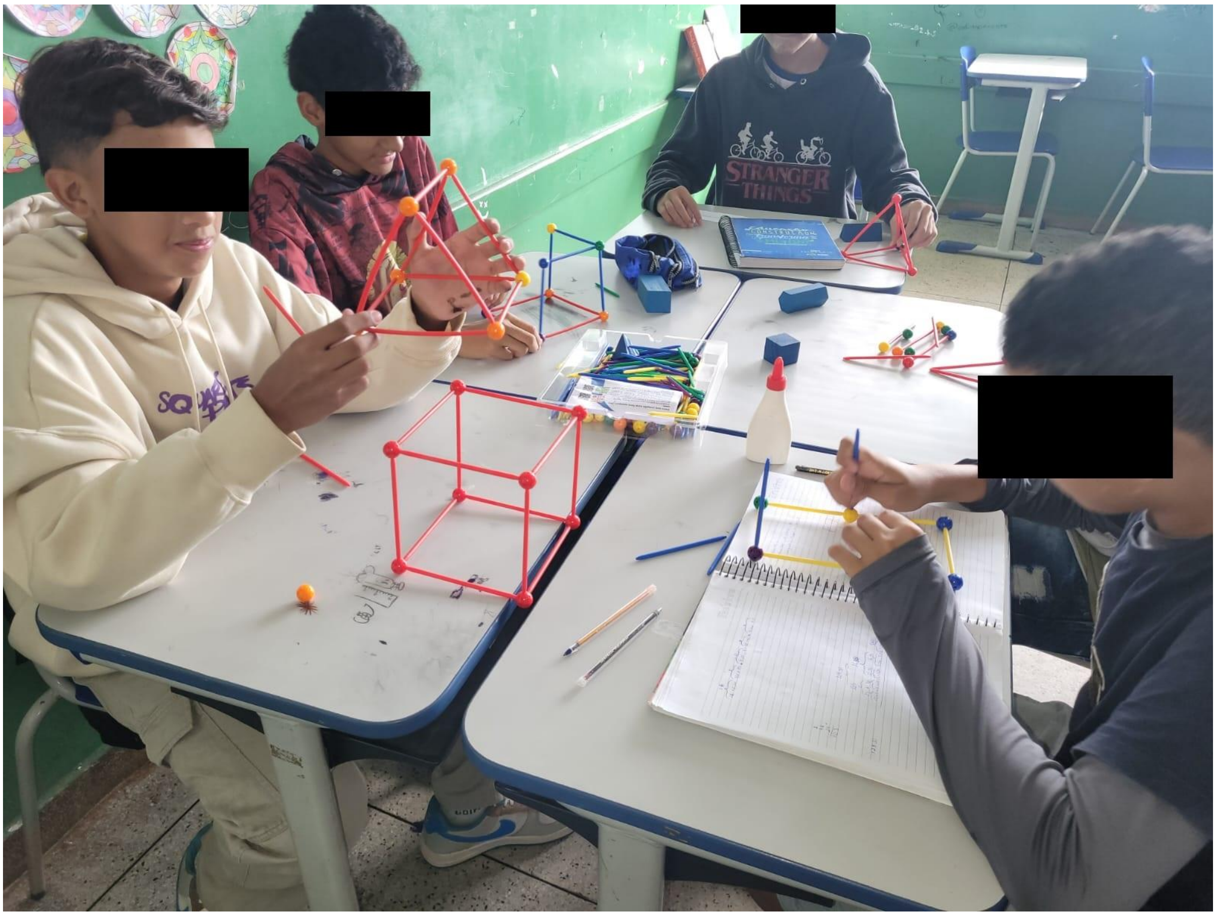


Fonte: Fotografia de autoria própria. Goiânia, 2025

A recepção dos alunos nesse ponto foi muito boa, e nesse momento, o clima que era até então de desconfiança, passou a ser mais descontraído e alegre por parte dos alunos, que interagiam muito entre si e demonstravam estar apreciando a atividade proposta. Quando cada grupo ficava em torno de uns 15 minutos com um dos materiais, nós providenciávamos a troca dos kits, e isso, de certa forma, foi muito bem aceito também. Percebi também muitas dúvidas dos alunos, especialmente pelos nomes dos sólidos que eles conseguiam montar e também em relação ao preenchimento da tabela distribuída.

Pude perceber o quanto algo que para quem explica pode parecer simples, pode ser algo que, para o aluno, só vai ficar mais claro num ambiente como esse, de interação direta com o material e com os alunos. Creio que outro fator importante que observamos é que, um ambiente mais leve e descontraído, quiçá divertido, é um fator que potencializa uma melhor aprendizagem, e nos aproxima mais dos alunos enquanto professor. Em determinado momento, um aluno comentou: “Nunca pensei que eu poderia me sentir tão feliz estudando. Acho que esse é o dia de aula mais feliz de toda a minha vida”. Confesso que essa fala dele me surpreendeu muito, despertando em mim sentimentos positivos de difícil apresentação em um texto científico, pois o referido aluno geralmente é apático em relação às aulas, embora não apresente muitas dificuldades com o conteúdo.

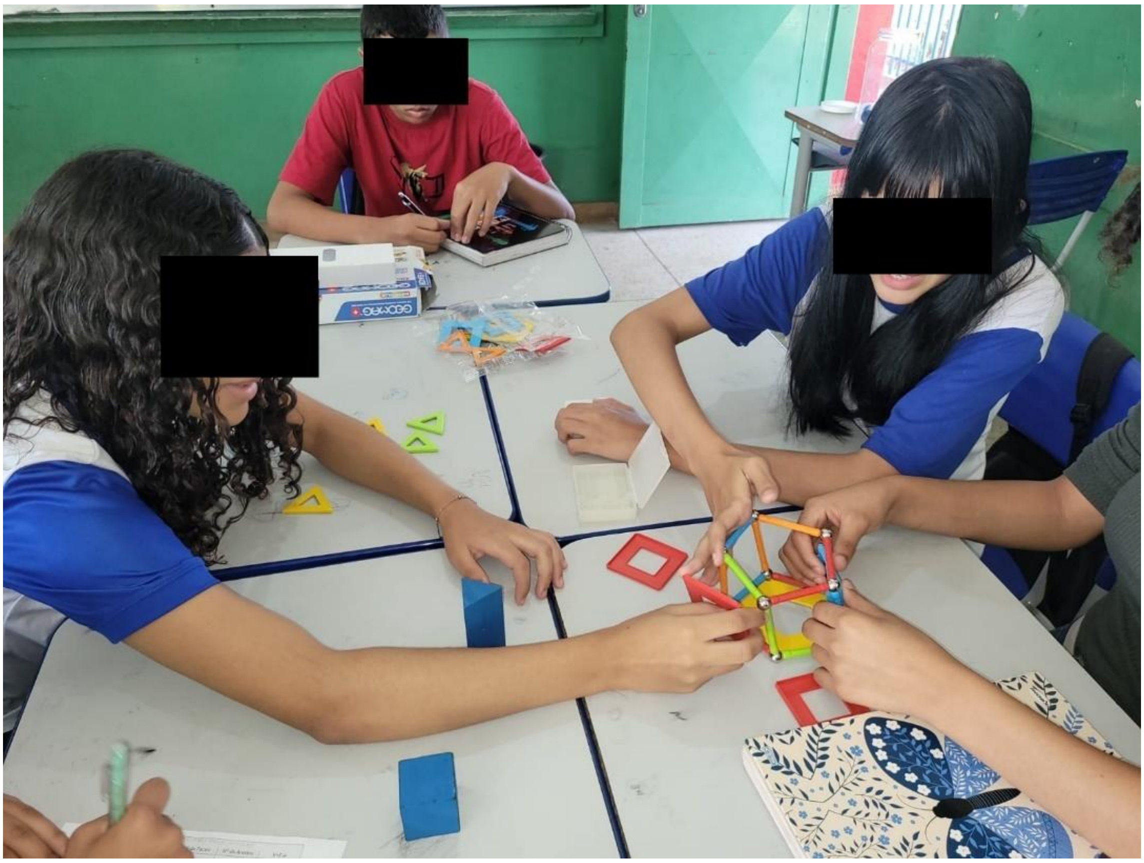
Figura 22 - Um dos grupos durante a oficina focados na construção dos sólidos.



Fonte: Fotografia de autoria própria. Goiânia, 2025

Outra coisa que também notamos durante a aula, é que em dado momento os alunos queriam montar também outras formas, que não poliedros, na verdade pareciam querer brincar, ou talvez explorar. Um aluno, em determinado momento, montou um poliedro não convexo, sem que soubesse que o estava fazendo, e me chamou querendo mostrar sua construção. Nesse momento achei muito interessante a oportunidade de explicar para ele e seu grupo, o conceito de poliedro convexo e não convexo, e perguntei a eles se nossa relação valeria ou não para aquele tipo de forma geométrica, afastando-me logo em seguida e indo atender a outro grupo, sem responder de pronto a eles a questão apresentada.

Figura 23 - Foto de grupo durante a oficina tentando montar um prisma pentagonal usando o Geomag.



Fonte: Fotografia de autoria própria. Goiânia, 2025

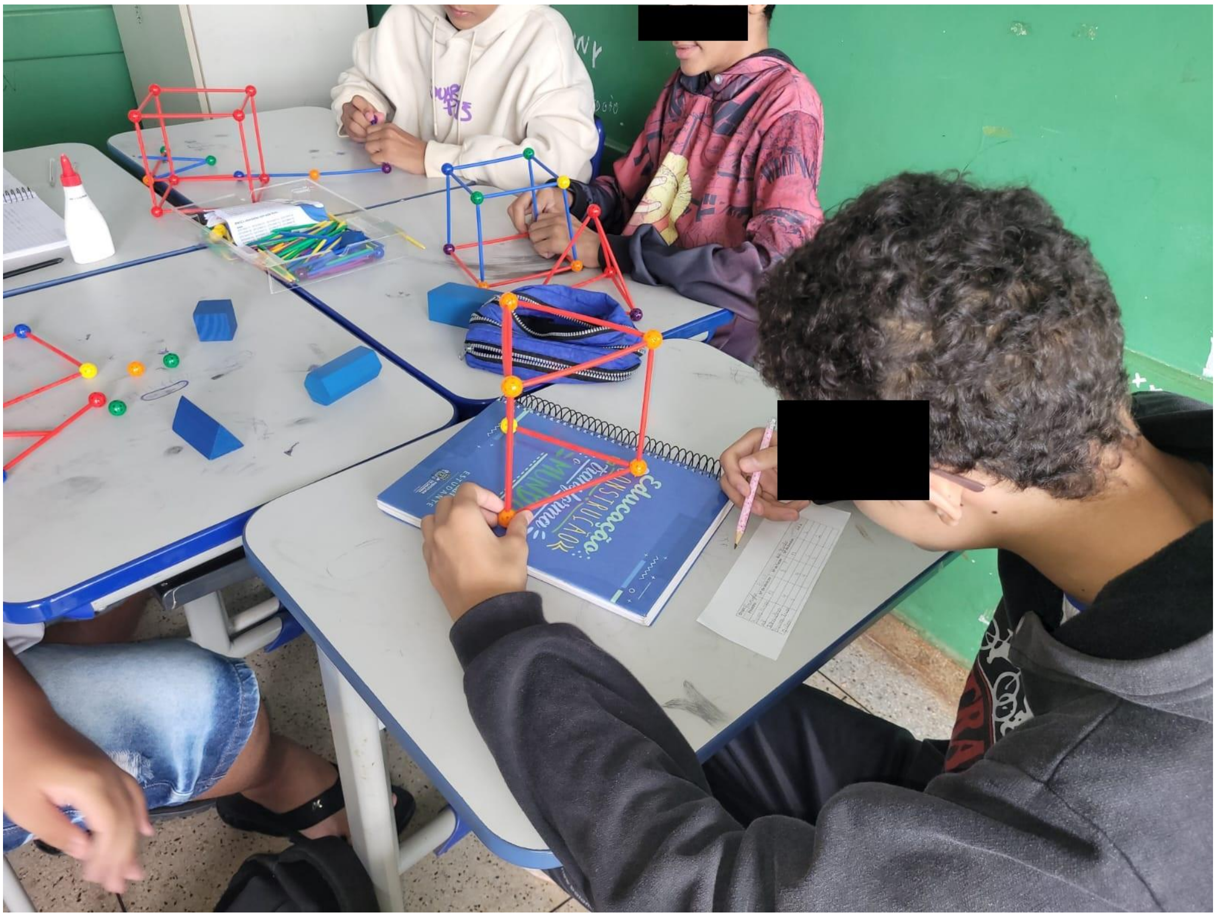
Figura 24 – Foto de um grupo de alunos utilizando os sólidos de madeira e fazendo os registros na tabela fornecida

Fonte: Fotografia de autoria própria. Goiânia, 2025

De forma geral, considero a experiência bastante produtiva e, ao mesmo tempo, agradável - não apenas para os alunos, mas também para mim, enquanto professor. Por volta de 8:50 fui surpreendido pela funcionária da cozinha que solicitava que os alunos fossem encaminhados à cozinha para buscarem o lanche, e isso acendeu novo alerta em nossa mente: Faltava ainda fazer o fechamento e distribuir o questionário para que os grupos pudessem responder. Foi gasto em torno de 10 minutos no processo de buscar o lanche e a alimentação dos alunos. Enquanto os alunos iam se alimentando, ao voltar para a sala de aula, fui adiantando algumas coisas, procurando fazer o fechamento das ideias, já reforçando assim os conceitos iniciais e destacando a aplicação prática da Relação de Euler, que fiz em cada grupo, pois caso contrário o tempo não seria suficiente, já que a aula terminaria às 9:30 horas. Percebi que a atenção nesse momento foi consideravelmente reduzida, o que já era de se imaginar devido ao contexto do momento. Assim, em seguida, distribuí os questionários para que os alunos dos grupos pudessem preencher. Orientei-os para que fossem sinceros, o máximo possível, explicando-lhes do que se tratava.

Essa parte final, repito e reforço, não saiu muito bem como planejei, pois o deslocamento dos alunos pela escola para buscar o lanche e a atenção deles em sala na última meia hora de aula caiu bastante. Creio que como muitos ainda estavam comendo enquanto eu falava, e outros assuntos acabaram surgindo naquele momento, isso acabou diminuindo um pouco a atenção pelo tema tratado. Coisas de escola. Outro fato é que nem todos os alunos preencheram os questionários. Dos 20 alunos presentes, 2 deles são portadores de necessidade especial (DI), não alfabetizados. Apenas 11 questionários foram devolvidos respondidos, embora alguns argumentaram que fizeram em grupo. Achei melhor não forçar os todos a responderem, já que deixei bem claro no início que a colaboração deles, nessa parte, seria voluntária.

Figura 25 – Aluno preenchendo a tabela para verificação da relação V+F-A=2.



Fonte: Foto produzida pelo autor

6.3 AVALIAÇÃO DA AULA

Nesta seção, propomos realizar uma avaliação da aula desenvolvida por meio da oficina, com base nas respostas obtidas no questionário aplicado aos alunos. A análise será predominantemente qualitativa, buscando compreender como os estudantes perceberam a atividade e quais impactos ela teve em sua aprendizagem e engajamento. Não é nosso objetivo fazer uma análise com exatidão matemática das respostas objetivas, mas sim mostrar a direção dos sentimentos dos alunos e o que isso afeta nos termos de aprendizagem dos temas abordados. Não se pretende realizar uma análise matemática rigorosa dos dados objetivos, mas sim identificar tendências e destacar percepções relevantes manifestadas pelos alunos. O foco está em compreender a direção geral dos sentimentos e impressões registrados, e como esses aspectos podem influenciar o processo de aprendizagem dos conteúdos abordados.

QUESTÃO 1. “ANTES DA OFICINA, VOCÊ JÁ CONHECIA A RELAÇÃO ENTRE VÉRTICES, ARESTAS E FACES NOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS?”

A essa primeira pergunta do questionário, que indagava acerca do conhecimento anterior do aluno ao conteúdo estudado teve sim como resposta para 36,4% dos alunos. Já 18,2% dos alunos disseram nunca terem estudado o tema e outros 45,5% responderam que já haviam ouvido falar, mas não compreendiam bem.

QUESTÃO 2. “APÓS A OFICINA, VOCÊ ACREDITA QUE CONSEGUIU COMPREENDER O QUE É A RELAÇÃO DE EULER E COMO ELA SE APLICA AOS POLIEDROS?”

Essa questão teve 63,6% dos alunos respondendo “compreendi bem” e outros 36,4% respondendo “compreendi em parte, mas ainda tenho algumas dúvidas. De forma bem interessante, nenhum dos alunos marcou a alternativa que continha o item “não compreendi”, o que nos parece ser um bom ponto de reflexão, pois geralmente os resultados que costumamos obter nas aulas em que ministramos não são assim tão positivos.

QUESTÃO 3. “O QUE MAIS AJUDOU VOCÊ A ENTENDER OS CONCEITOS TRABALHADOS?”

Aqui, mais uma surpresa para mim, pois para 45,5% dos alunos, o que mais ajudou foi “a explicação inicial do professor”, e para outros 45,5%, o que mais ajudou foi “a construção dos sólidos geométricos (poliedros)”. Apenas 1 aluno (9,1%) respondeu que, o que mais o ajudou a aprender os conceitos trabalhados foram “as discussões em grupo”.

QUESTÃO 4. “O QUE VOCÊ MAIS GOSTOU NA OFICINA?”

Essa questão tinha resposta aberta, e quisemos que fosse assim para não limitar as respostas que ouviríamos. Foi interessante notar que, mesmo sendo uma questão com resposta subjetiva, para 72,7% dos alunos, o “montar as formas” foi o que mais eles gostaram na oficina, confirmando nossa hipótese inicial, de que oficinas educativas tornam o aprendizado mais eficiente, pois despertam o interesse dos alunos pelo tema e tornam o ambiente mais agradável, um espaço de colaboração coletiva. Essa questão é assim, muito importante para nossas considerações.

QUESTÃO 5. “O QUE MENOS VOCÊ GOSTOU OU ACHOU DIFÍCIL DURANTE A ATIVIDADE?”

Outra questão aberta, forneceu respostas bem variadas. Para 9,1% o “montar as formas” foi o mais difícil. Outros 36,4% disseram que gostaram de todas as etapas da oficina, não tendo nada a observar. Para 18,2%, a parte mais difícil ou que não gostou, foi preencher a tabela e o questionário. Também para 18,2% a dificuldade foi citada, mas não foi especificada. Por último, 18,1% deram outras respostas não consideradas de relevância em nossa pesquisa.

QUESTÃO 6. “DURANTE A OFICINA, EM ALGUM MOMENTO VOCÊ SENTIU ANSIEDADE OU NERVOSISMO POR ESTAR APRENDENDO MATEMÁTICA?”

Essa questão teve 63,6% dos alunos respondendo de forma negativa, o que já era esperado pela observação inicial dos trabalhos. Outros 27,3% responderam: “um pouco, mas consegui lidar bem”. Apenas 9,1% responderam “sim, fiquei ansioso(a) em alguns momentos.” Isso corrobora também nossa hipótese de que o ambiente de estudos em oficinas educativas favorece a espontaneidade e diminui as barreiras entre alunos/professores ou alunos/conteúdos.

QUESTÃO 7. “COMPARANDO COM OUTRAS AULAS DE MATEMÁTICA, COMO VOCÊ SE SENTIU NESSA OFICINA?”

Essa questão, para mim, é uma das mais relevantes, pois é justamente nosso objetivo, criar um ambiente agradável e acolhedor para nossas aulas. Aqui, tivemos 63,6% respondendo que sim, que se sentiram “mais relaxados e motivados”. Apenas um aluno respondeu que se sentiu “da mesma forma que em outras aulas”. As outras respostas não foram consideradas relevantes para nossa pesquisa.

QUESTÃO 8. “VOCÊ CONSIDERA QUE APRENDER CONSTRUINDO E MANIPULANDO SÓLIDOS FOI MAIS INTERESSANTE E PRODUTIVO DO QUE APENAS VER ESSES CONTEÚDOS EM LIVROS OU NO QUADRO?”

Para 72,7% dos alunos a resposta foi “sim, muito mais interessante”, o que é algo animador em nossa visão por agregar valor às nossas aulas, e despertar assim o interesse pelo conhecimento. Já para 18,2%, a manipulação dos sólidos não pode vir sozinha, e deve ser mantida em conjunto com a explicação teórica, sendo esse, outro dado que consideramos muito relevantes, e talvez, contra sensual. Apenas 9,1% disseram “não ter certeza”. Embora essas questões possam parecer redundantes, elas reforçar, cada uma delas, os aspectos positivos da aplicação de oficinas pedagógicas no ensino de matemática.

QUESTÃO 9. “EM RELAÇÃO AO TRABALHO EM GRUPO, COMO VOCÊ SE SENTIU?”

Aqui, muito positivo observar que, 81,8% dos alunos responderam: “Consegui participar ativamente e colaborar com meus colegas”. Apenas 1 aluno disse ter encontrado dificuldades em trabalhar em grupo e um outro disse que preferiria ter feito a atividade sozinho. Os alunos trabalharam ativamente nos grupos, envolvendo-se com as atividades, ajudando-se uns aos outros, fazendo observações, críticas e ensinando uns aos outros, algo extremamente positivo.

QUESTÃO 10. “VOCÊ GOSTARIA QUE OUTRAS AULAS DE MATEMÁTICA FOSSEM FEITAS NESSE ESTILO, COM ATIVIDADES PRÁTICAS E MANIPULATIVAS? POR QUÊ?

Essa questão e as próximas duas e últimas, nós optamos em que as respostas fossem subjetivas, com o objetivo de enriquecer ainda mais as possíveis contribuições que os alunos pudessem nos dar. Creio que essa é uma pergunta simples e forte o bastante. Isso ao ponto de ela sozinha poder nos dar uma ótima noção do impacto desse tipo de trabalho, tanto no âmbito da aceitação e envolvimento dos alunos com a proposta, como também no aspecto pedagógico e interpessoal. Fizemos questão de resumir aqui todas as respostas obtidas pelos alunos e apresentá-las logo em seguida. Veja só, cada linha é a resposta resumida de um dado aluno(a):

- “Sim, para que as aulas não sejam entediantes;”
- “Sim, pois aumenta a minha disposição para participar;”
- “Sim, pois ajuda a compreender a atividade mais rápido;”
- “Sim, pois é mais interessante;”
- “Sim, pois ajuda no aprendizado, deixa a gente mais feliz e motivado;”
- “Sim, pois aprende-se de forma mais divertida;”
- “Sim, pois é mais fácil;”
- “Sim, pois ninguém fica com sono;”
- “Sim, pois é mais produtivo.”

De forma impressionante, foi unânime a preferência dos alunos por essa metodologia de ensino, fato que já confirmaria nossa hipótese inicial. Só não imaginávamos que a aceitação seria assim tão grande, chegando a incríveis 100% de preferência ou aceitação. Das respostas que aqui foram resumidas de forma a preservar a ideia básica de cada um, podemos perceber os vários benefícios dessa estratégia de ensino, dentre as quais destaco o envolvimento e motivação dos alunos.

Essas impressões vão ao encontro dos ensinamentos de Carl Rogers, que é um dos principais pesquisadores que defendem a ideia de que o aluno só aprende de fato aquilo que está disposto a aprender. Ele acreditava que a motivação interna do aluno é essencial para a aprendizagem significativa. Em sua visão, o papel do educador é criar um ambiente de empatia, aceitação e autenticidade para favorecer essa disposição natural de aprender.

Outro pesquisador importante nesse campo é Paulo Freire, que argumenta que a aprendizagem só acontece quando há diálogo, sentido e interesse para o educando. Para ele, a educação deve partir da realidade e da experiência do aluno, respeitando sua autonomia e participação ativa no processo de construção do conhecimento.

Além deles, MOREIRA, em sua obra "*Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*" discorrendo sobre a teoria da aprendizagem significativa do renomado autor, também afirma que o novo conhecimento só é assimilado quando o aluno está motivado e consegue relacionar o que aprende com o que já sabe, ou seja, quando o conteúdo faz sentido para ele.

Esses autores, cada um à sua maneira, destacam que a aprendizagem não pode ser imposta — ela depende da disposição e da motivação pessoal do aprendiz, e isso fez muito sentido para nós tanto durante a aplicação da oficina quanto durante o nosso período de interpretação e análise reflexiva sobre os dados observados, gerando em nós boas expectativas sobre os benefícios de uma maior dedicação ao estudo e aplicação desse método de forma mais frequente.

QUESTÃO 11: "QUE SUGESTÃO VOCÊ DARIA PARA MELHORAR ESSA OFICINA NO FUTURO?"

Essa questão, também de resposta aberta, nos dá uma percepção do quanto os alunos também estão atentos aos detalhes que a princípio, pensávamos que passaria despercebido; a quantidade insuficiente de materiais pedagógicos utilizados na realização da oficina.

Quando escolhemos nossa proposta de pesquisa, optamos por trabalhar com materiais pedagógicos montáveis disponíveis para venda no mercado. Optamos pelos que achamos que seriam mais adequados à nossa proposta, no caso, os materiais da empresa MNP Materiais Pedagógicos, sendo possível no momento adquirir um kit do material VERTEX e outro do material GEOMAG, ambos voltados para montagem de polígonos e sólidos geométricos, com vértices, faces e arestas que permitem encaixes e montagem criativa por parte do aluno, sendo um material colorido, de boa aparência, e que chama bastante a atenção dos alunos. Porém, destaco aqui a limitação que tivemos com relação à pequena quantidade de kits que foi possível adquirir, ficando os dois kits que compramos com os nossos próprios recursos em um valor próximo de 60% de um salário-mínimo vigente no ano de 2024. O outro kit, de sólidos geométricos de madeira, foi gentilmente cedido por um colega professor de matemática na mesma instituição, material também adquirido com recursos próprios.

Pois bem, como a quantidade de materiais não foi, como diríamos, a ideal, as respostas dos alunos à essa questão, relembramos; “Que sugestão você daria para melhorar essa oficina?”, tivemos como resposta para 54,5%, a sugestão trazer mais materiais pedagógicos. Fizemos, no dia da aplicação da oficina, uma espécie de “rotação por estações”, de forma que, enquanto um grupo usava um tipo de kit, os outros grupos usavam outros materiais, até que vencesse um período de tempo pudéssemos fazer as rotações do material.

Outras respostas que tivemos como sugestão de melhoria, foram, para 9,1%, “realizar essa oficina 2 vezes por semana”. Para outros 18,2%, para melhoria deveríamos “fazer mais atividades como essa”, e para outros 9,1% a resposta foi “nenhuma, pois está bom assim”, e 9,1% classificamos como “outros” pela não relevância da resposta para nossa pesquisa. Vimos então, de forma muito positiva a aplicação de nossa oficina, pois as sugestões, ou vieram nessa direção de pedir a ampliação das quantidades de materiais disponíveis, ou em forma de “elogio”, para que as oficinas fossem aplicadas com mais frequência.

QUESTÃO 12: “PARA FINALIZAR, ESCREVA COM SUAS PALAVRAS O QUE APRENDEU HOJE OU ALGO QUE ACHOU INTERESSANTE SOBRE POLIEDROS OU SOBRE A RELAÇÃO DE EULER.”

Classificamos aqui as respostas em quatro itens, sendo que, a maioria, 54,5%

responderam: “Compreender mais sobre o assunto”. Já para 18,2% temos como resposta: “Achei a aula superlegal e fácil”. Para 9,1% a resposta foi: “Gostei dos materiais e de construir os poliedros”. E classificamos como outros as respostas de 18,2% dos alunos, por não serem relevantes para nossa pesquisa.

6.4 CONCLUSÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA OFICINA E ALGUMAS REFLEXÕES

A experiência vivenciada na aplicação da oficina pedagógica revelou, com clareza, o potencial transformador que estratégias metodológicas ativas, como as oficinas educativas, possuem no ensino de Matemática, especialmente no que se refere à Geometria Espacial. A utilização de materiais concretos e a construção colaborativa de poliedros proporcionaram aos alunos não apenas uma maior compreensão da relação de Euler, mas também um engajamento genuíno com o conteúdo trabalhado. O interesse e a motivação observados ao longo da atividade reforçaram a importância de práticas que rompem com a rigidez do ensino tradicional, abrindo espaço para a curiosidade, a experimentação e o protagonismo discente.

Esse tipo de metodologia encontra respaldo em autores como Lorenzato (2006), que defende a criação de ambientes de aprendizagem mais investigativos, onde o aluno possa manipular, testar e construir significados matemáticos a partir da própria experiência. Ao permitir a vivência prática dos conceitos, a oficina possibilitou que os estudantes estabelecessem conexões cognitivas significativas, conforme proposto por Ausubel (2003), cuja teoria da aprendizagem significativa destaca a importância de novos conhecimentos serem ancorados em estruturas cognitivas previamente existentes, desde que devidamente organizadas e integradas.

Adicionalmente, o trabalho com a visualização espacial e com o raciocínio geométrico concretizou as ideias de Van Hiele (1986), para quem a aprendizagem da geometria passa por níveis de desenvolvimento do pensamento espacial, que só podem ser alcançados mediante experiências didáticas adequadas. A manipulação dos materiais e a observação direta das formas permitiram que os alunos transitassem da simples percepção visual das figuras para uma compreensão mais estruturada das relações entre vértices, arestas e faces.

Importante destacar, ainda, o papel fundamental da mediação docente. Embora a oficina tenha se pautado em ações práticas, a intervenção do professor na organização dos saberes, por meio de momentos de sistematização teórica, mostrou-se indispensável para a consolidação do aprendizado. Como observa Fiorentini e Miorim (1990), o professor, ao propor desafios e intervir com questionamentos significativos, promove a reflexão e ajuda os estudantes a atribuírem sentido às suas ações. A combinação entre ação concreta e sistematização teórica foi, inclusive, valorizada pelos próprios alunos, que relataram maior clareza conceitual após a atividade.

Além dos ganhos conceituais, a oficina evidenciou também benefícios de ordem socioemocional. Houve expressiva melhora na participação, na cooperação entre os colegas e na segurança dos alunos ao exporem suas ideias. Tal constatação encontra eco nas reflexões de Freire (1996), ao afirmar que ensinar não é apenas transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a construção do saber, em uma relação dialógica que valoriza a escuta, a crítica e a afetividade.

Por fim, esta experiência reforça a pertinência de práticas pedagógicas que promovam um ambiente de aprendizagem ativo, reflexivo e significativo. As oficinas pedagógicas se mostraram não apenas como uma alternativa didática viável, mas como uma estratégia potente na construção de saberes matemáticos relevantes, acessíveis e duradouros. Ressalta-se, portanto, a necessidade de sua incorporação sistemática nas práticas escolares, sobretudo em temas que exigem abstração, visualização e construção de sentido, como é o caso da Geometria Espacial.

A aplicação da oficina pedagógica, embora tenha revelado resultados bastante positivos no que diz respeito à motivação e à aprendizagem dos alunos, também evidenciou importantes desafios, tanto de ordem prática quanto estrutural, os quais merecem reflexão cuidadosa, especialmente caso se pretenda tornar essa metodologia parte integrante e sistemática do cotidiano escolar.

Um dos principais obstáculos observados foi a gestão do tempo em sala de aula. Em ambientes escolares dinâmicos e, por vezes, imprevisíveis, como os da educação básica, a administração eficaz do tempo torna-se um desafio recorrente. Durante a aplicação da oficina, constatamos que imprevistos como a pausa para o lanche e o tempo necessário para reorganizar os alunos após essa interrupção comprometeram significativamente a etapa final da atividade — justamente aquela dedicada à sistematização dos conteúdos e à reflexão por meio dos questionários.

Tal situação corrobora a constatação de Lorenzato (2006), para quem o tempo didático precisa ser planejado com margem para imprevistos, sobretudo quando se trabalha com propostas metodológicas diferenciadas, mais dependentes da participação ativa dos alunos.

Além das dificuldades pontuais com a organização temporal, emergiram questões estruturais mais amplas, ligadas às condições institucionais para a realização de propostas como essa. Percebe-se, de forma evidente, a carência de recursos materiais adequados para a implementação regular de metodologias que envolvam materiais manipuláveis, experimentações e trabalho em grupo. Ainda que iniciativas como essa oficina demonstrem o quanto esses recursos são significativos para o desenvolvimento da compreensão matemática — como defende Dienes (1970) ao valorizar a aprendizagem baseada na manipulação concreta e na construção ativa do conhecimento —, é notável a ausência de uma política educacional eficaz que garanta sua disponibilização de forma sistemática às escolas públicas.

A lacuna deixada pelas políticas públicas frequentemente recai sobre os próprios professores, que, muitas vezes, precisam investir recursos pessoais para proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem mais ricas e significativas. Essa realidade, no entanto, revela uma injustiça estrutural: a responsabilidade de ofertar educação de qualidade não pode ser transferida ao esforço isolado dos docentes, mas deve ser assumida como uma obrigação do Estado. Como afirma Tardif e Lessard (2005), o trabalho docente se desenvolve em meio a condições institucionais frequentemente adversas, que impõem obstáculos à autonomia profissional e à inovação pedagógica.

Outro fator que impacta diretamente a viabilidade da aplicação sistemática de oficinas é a própria organização da rotina escolar e a sobrecarga de trabalho docente. Os horários rígidos, a fragmentação do tempo escolar em períodos curtos e a grande carga horária atribuída aos professores dificultam não apenas a realização das oficinas, mas também o tempo necessário para seu planejamento, confecção de materiais, reflexão e avaliação das atividades. Trata-se, portanto, de um contexto que pouco favorece a experimentação e o desenvolvimento profissional docente, em oposição àquilo que Freire (1996) defende como prática educativa crítica e reflexiva.

Ademais, a estrutura escolar — desde os currículos até os espaços físicos — parece ainda estar organizada com base em um modelo tradicional de ensino, o que se mostra incompatível com as exigências de metodologias ativas. Como bem observa Fiorentini e Miorim (1990), a superação do ensino transmissivo requer não apenas mudanças metodológicas, mas também condições institucionais e políticas que sustentem essas mudanças. Sem esse apoio, corre-se o risco de que experiências inovadoras permaneçam restritas a esforços pontuais, sem continuidade ou integração efetiva ao projeto pedagógico da escola.

Diante disso, é possível concluir que, apesar do sucesso da oficina no contexto específico em que foi aplicada, há barreiras importantes que limitam sua replicação em escala mais ampla, sobretudo no interior das escolas públicas. É necessário, portanto, que os gestores educacionais e os formuladores de políticas públicas estejam atentos às demandas concretas dos professores e das escolas, de modo que a inovação pedagógica não dependa exclusivamente da boa vontade e da dedicação dos educadores, mas seja reconhecida, incentivada e estruturada como parte do direito à educação de qualidade para todos.

CAPÍTULO 7: CONCLUSÕES, CONSIDERAÇÕES FINAIS, DESAFIOS E SUGESTÕES PARA PESQUISA

A presente dissertação dedicou-se a investigar o impacto da implementação de oficinas educativas como estratégia pedagógica para o ensino de Geometria Espacial em turmas do 8º ano do Ensino Fundamental na Escola Municipal Dalka Leles, em Goiânia. O estudo partiu da constatação das dificuldades recorrentes enfrentadas no ensino tradicional desta disciplina, frequentemente marcado pela abstração excessiva e pela dependência de representações bidimensionais que limitam a visualização e a interação com objetos tridimensionais. Buscou-se, por meio de uma abordagem qualitativa e da aplicação de atividades práticas com materiais manipuláveis, criar um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, interativo e significativo, alinhado às teorias construtivistas da aprendizagem e às diretrizes curriculares contemporâneas.

Ao longo do desenvolvimento da pesquisa, explorou-se como a manipulação direta de sólidos geométricos, utilizando recursos como Vertex, Geomag e modelos construídos, poderia facilitar a compreensão de conceitos fundamentais, estimular o engajamento dos alunos e desenvolver habilidades espaciais essenciais. A análise da experiência vivenciada permitiu extrair conclusões relevantes sobre as potencialidades dessa abordagem, bem como identificar suas limitações e vislumbrar caminhos para futuras investigações e aplicações.

Este capítulo final consolida as principais descobertas do estudo, discutindo as contribuições efetivas das oficinas para o processo de ensino-aprendizagem da Geometria Espacial. Adicionalmente, apresenta uma reflexão crítica sobre as limitações inerentes à pesquisa realizada e, por fim, aponta possibilidades promissoras para a expansão da metodologia e o aprofundamento dos conhecimentos na área, reforçando a importância de práticas pedagógicas inovadoras para a Educação Matemática.

7.1 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DA OFICINA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

A implementação das oficinas educativas demonstrou ser uma estratégia pedagógica de considerável valor para o ensino da Geometria Espacial no contexto investigado. As observações realizadas e a análise da dinâmica estabelecida durante as atividades práticas permitiram identificar um conjunto de contribuições significativas, que corroboram a hipótese inicial sobre o potencial dos materiais manipuláveis e das metodologias ativas para superar as barreiras tradicionalmente associadas a esta área do conhecimento matemático.

Uma das contribuições mais evidentes reside na melhora da compreensão conceitual por parte dos alunos. A transição de um modelo de ensino predominantemente baseado em representações planas (lousa, livro didático) para um ambiente onde os estudantes puderam construir, tocar, desmontar e analisar objetos tridimensionais concretos mostrou-se fundamental. Conceitos como vértices, arestas e faces, frequentemente abstratos e de difícil visualização em desenhos bidimensionais, tornaram-se tangíveis. A exploração prática de planificações, permitindo aos alunos verificarem empiricamente como construir um sólido a partir de uma figura plana, e vice-versa, fortaleceu a conexão entre as representações 2D e 3D. Da mesma forma, a verificação da Relação de Euler ($V - A + F = 2$) por meio da contagem direta nos poliedros manipulados conferiu um caráter investigativo e de descoberta ao aprendizado, distanciando-se da mera memorização de fórmulas. Essa abordagem está em consonância com as ideias de Piaget (1976), que enfatiza a importância da ação sobre o objeto para a construção do conhecimento, e com os níveis de pensamento geométrico de Van Hiele (1986), que postulam a necessidade da visualização e manipulação na fase inicial do desenvolvimento do raciocínio geométrico, especialmente nos níveis de 1 a 3 (visualização, análise e dedução informal), que são aqueles que esperávamos e que foi possível observar em nossa oficina.

Outro impacto positivo notável foi o aumento da motivação e do engajamento dos estudantes. A natureza lúdica e interativa das oficinas, contrastando com a passividade muitas vezes associada às aulas expositivas tradicionais, despertou maior interesse pela disciplina. A possibilidade de construir os próprios modelos, experimentar livremente com os materiais (como Vertex e Geomag) e trabalhar colaborativamente em desafios propostos transformou a relação dos alunos com o conteúdo. O ambiente de oficina proporcionou uma experiência de aprendizado mais prazerosa e menos intimidante, o que pode ser um fator crucial para reverter percepções negativas sobre a Matemática e, especificamente, sobre a Geometria. A aprendizagem significativa, defendida por Ausubel (2003), foi favorecida, uma vez que os novos conhecimentos foram ancorados em experiências concretas e relevantes para os alunos.

Adicionalmente, as oficinas contribuíram para o desenvolvimento de habilidades essenciais que transcendem o conteúdo específico da Geometria Espacial. A manipulação dos sólidos, a análise de suas propriedades e a busca por soluções para os desafios propostos estimularam o pensamento espacial, a capacidade de visualização tridimensional e o raciocínio lógico-dedutivo. A necessidade de descrever os objetos, justificar suas classificações e explicar as relações observadas (como a de Euler) fomentou também habilidades de comunicação e argumentação matemática. O trabalho em grupo, inerente à dinâmica das oficinas, promoveu a colaboração, a troca de ideias e a resolução conjunta de problemas, competências valiosas para a formação integral dos estudantes, conforme preconizado pela BNCC (BRASIL, 2018).

A experiência relatada também serve como validação da metodologia de oficinas como uma alternativa viável e eficaz para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Fundamental. A pesquisa demonstrou que é possível criar um ambiente tridimensional de aprendizagem dentro da escola pública, utilizando tanto materiais comerciais quanto recursos de baixo custo ou construídos pelos próprios alunos. A descrição detalhada da metodologia empregada, incluindo o planejamento das atividades e as estratégias didáticas, oferece um referencial prático para outros educadores que desejem implementar abordagens similares, contribuindo para a disseminação de práticas pedagógicas inovadoras.

Por fim, a abordagem adotada nas oficinas permitiu superar algumas das dificuldades tradicionalmente associadas ao ensino da Geometria Espacial. Ao oferecer experiências concretas e táteis, a metodologia ajudou a reduzir o nível de abstração, tornando os conceitos mais acessíveis. A ênfase na visualização e manipulação direta contrapõe-se à dependência excessiva de representações planas, que, como aponta Duval (1995), podem gerar conflitos cognitivos e dificultar a apreensão das propriedades espaciais. As oficinas, portanto, representam um caminho promissor para tornar o ensino da Geometria Espacial mais intuitivo, eficaz e alinhado às necessidades cognitivas dos alunos nesta faixa etária.

7.2 LIMITAÇÕES DE NOSSA PESQUISA

Apesar dos resultados promissores e das contribuições significativas apontadas, é fundamental reconhecer as limitações inerentes a este estudo, que devem ser consideradas na interpretação dos achados e na sua eventual generalização. A identificação dessas limitações não diminui o valor da pesquisa, mas oferece um panorama mais realista de seu alcance e direciona futuras investigações.

Uma primeira limitação refere-se ao escopo da pesquisa. O estudo foi realizado em um contexto específico: uma única escola da rede pública municipal de Goiânia (Escola Municipal Dalka Leles) e com um grupo particular de alunos (turmas do 8º ano, embora o 9º ano tenha sido mencionado inicialmente). As características socioculturais e educacionais dessa escola e desses alunos podem ter influenciado os resultados observados. Portanto, a generalização direta dos achados para outras escolas, redes de ensino, níveis socioeconômicos ou mesmo outras séries/anos escolares deve ser feita com cautela. Seria necessário replicar a experiência em contextos diversificados para verificar a consistência dos resultados.

A duração da intervenção pedagógica (as oficinas) constitui outra limitação. Embora o período de aplicação tenha permitido observar mudanças na compreensão e no engajamento dos alunos, não foi possível avaliar os efeitos a longo prazo dessa abordagem. Questões sobre a consolidação da aprendizagem e a retenção dos conhecimentos e habilidades adquiridos para além do período das oficinas permanecem em aberto. Estudos longitudinais seriam necessários para acompanhar os alunos por mais tempo e verificar a sustentabilidade dos impactos observados.

As ferramentas e métodos de avaliação empregados também apresentam limitações. Sendo uma pesquisa de natureza predominantemente qualitativa, a avaliação baseou-se largamente em observações da participação dos alunos, análise de suas produções durante as oficinas, bem como relatos e percepções (embora os instrumentos específicos de coleta de dados sobre percepções não tenham sido detalhados no extrato fornecido). Embora ricas em detalhes, essas abordagens podem conter um grau de subjetividade. A ausência de avaliações quantitativas padronizadas (pré e pós-teste, por exemplo) dificulta a mensuração objetiva da magnitude do ganho de aprendizagem e a comparação rigorosa com grupos de controle que não participaram das oficinas.

Outro ponto a considerar são os materiais didáticos específicos utilizados (Vertex, Geomag etc.). Embora a pesquisa sugira o uso de materiais diversos, incluindo os de baixo custo, a disponibilidade e o custo de alguns recursos comerciais podem representar uma barreira para a replicação da metodologia em escolas com menos recursos financeiros. Além disso, o estudo não realizou uma comparação sistemática da eficácia relativa dos diferentes tipos de materiais manipuláveis, o que poderia ser um foco interessante para investigações futuras.

Finalmente, é preciso reconhecer a possível influência de fatores intervenientes não totalmente controlados. O entusiasmo e a habilidade do professor condutor das oficinas, o clima da sala de aula, os conhecimentos prévios heterogêneos dos alunos e o próprio currículo escolar mais amplo são variáveis que podem ter interagido com a intervenção e influenciado os resultados. Isolar o efeito puro das oficinas dessas outras variáveis é um desafio metodológico complexo.

O reconhecimento dessas limitações é crucial para uma interpretação equilibrada dos resultados e serve como ponto de partida para o aprimoramento de futuras pesquisas e intervenções na área.

7.3 POSSIBILIDADES DE EXPANSÃO E NOVAS APLICAÇÕES DA METODOLOGIA

As conclusões e as limitações identificadas neste estudo abrem um leque de possibilidades promissoras para a expansão da metodologia de oficinas educativas e para o desenvolvimento de novas pesquisas no campo do ensino da Geometria Espacial. As contribuições observadas sugerem que investir em abordagens práticas e manipulativas é um caminho fértil, e as lacunas apontadas indicam direções para investigações futuras que podem refinar e ampliar o conhecimento sobre o tema.

Uma primeira vertente de expansão seria a ampliação da aplicação da metodologia. Seria relevante investigar a implementação das oficinas em diferentes contextos educacionais, incluindo outras séries do Ensino Fundamental e também no Ensino Médio, adaptando as atividades e os materiais às especificidades de cada nível. A aplicação em escolas com perfis socioeconômicos e culturais distintos, tanto em áreas urbanas quanto rurais, permitiria verificar a adaptabilidade e a eficácia da abordagem em realidades diversas. Além disso, a metodologia poderia ser explorada em outras disciplinas que demandam raciocínio espacial, como Artes, Física ou Geografia.

Estudos longitudinais representam outra possibilidade importante. Acompanhar os mesmos alunos por um período mais extenso (um ano letivo completo ou mais) permitiria avaliar não apenas a aquisição inicial de conceitos, mas também a sua consolidação, a capacidade de transferência do conhecimento para novas situações e o impacto a longo prazo na trajetória escolar e no interesse pela Matemática e áreas afins.

No que diz respeito aos materiais didáticos, há espaço para pesquisas que comparem sistematicamente a eficácia de diferentes tipos de recursos manipuláveis. Estudos poderiam investigar, por exemplo, se materiais mais estruturados (como Vertex ou Geomag) levam a resultados diferentes daqueles obtidos com materiais de baixo custo (canudos, palitos, massinha) ou modelos construídos pelos próprios alunos. O desenvolvimento e a avaliação de novos materiais manipuláveis, talvez integrando elementos tecnológicos simples, também constituem uma linha de pesquisa promissora.

A formação de professores emerge como um campo de atuação crucial. Para que metodologias ativas como as oficinas se disseminem, é fundamental investir em programas de formação continuada que capacitem os educadores a planejar, conduzir e avaliar esse tipo de atividade. Pesquisas poderiam investigar os modelos mais eficazes de formação docente para o uso de materiais manipuláveis e metodologias ativas no ensino de Geometria, bem como os desafios enfrentados pelos professores nesse processo.

A integração de tecnologias digitais às oficinas representa uma fronteira interessante a ser explorada. Softwares de modelagem 3D, aplicativos de realidade aumentada ou plataformas interativas poderiam complementar o uso de materiais físicos, oferecendo novas formas de visualização, exploração e interação com os objetos geométricos. Pesquisas futuras poderiam investigar como combinar eficazmente o mundo físico e o digital para potencializar a aprendizagem da Geometria Espacial.

Por fim, há necessidade de investigações mais aprofundadas sobre aspectos específicos do processo de aprendizagem. Estudos poderiam focar em como as oficinas impactam alunos com diferentes estilos de aprendizagem, níveis de habilidade inicial ou dificuldades específicas (como discalculia ou TDAH). Compreender as percepções e experiências dos alunos de forma mais detalhada, talvez por meio de entrevistas ou grupos focais, também enriqueceria a compreensão dos mecanismos pelos quais as oficinas promovem a aprendizagem e o engajamento.

Em suma, a experiência relatada nesta dissertação, apesar de suas limitações, aponta para um caminho pedagógico rico em potencialidades. A continuidade da pesquisa e a exploração das possibilidades de expansão aqui delineadas podem contribuir significativamente para a construção de um ensino de Geometria Espacial mais eficaz, inclusivo e estimulante para todos os estudantes.

7.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final desta jornada investigativa, reafirma-se a convicção sobre a importância de repensar as práticas pedagógicas no ensino da Matemática, em particular da Geometria Espacial. A experiência com as oficinas educativas na Escola Municipal Dalka Leles evidenciou que é possível, e desejável, transcender os limites do ensino tradicional, pautado excessivamente na abstração e em recursos bidimensionais.

A adoção de metodologias ativas, centradas na exploração, na manipulação e na construção do conhecimento pelo próprio aluno, demonstrou ser um caminho eficaz para tornar a aprendizagem mais significativa, engajadora e conectada com a intuição espacial dos estudantes. Os materiais manipuláveis, sejam eles comerciais ou de baixo custo, revelaram-se ferramentas poderosas para concretizar conceitos abstratos e facilitar a visualização de relações espaciais complexas.

Este estudo, embora circunscrito a um contexto específico, oferece subsídios relevantes para educadores, gestores e pesquisadores comprometidos com a melhoria da qualidade da Educação Matemática. As contribuições observadas reforçam a necessidade de se investir em abordagens que valorizem a experiência concreta, o raciocínio investigativo e a colaboração, em linha com as teorias de aprendizagem mais contemporâneas e com as diretrizes da BNCC.

Reconhecendo as limitações da pesquisa, espera-se que as discussões aqui apresentadas e as sugestões para trabalhos futuros inspirem novas investigações e práticas pedagógicas inovadoras. O desafio de tornar a Geometria Espacial acessível e estimulante para todos os alunos permanece, mas estudos como este indicam que, por meio de estratégias criativas e centradas no estudante, é possível avançar significativamente nesse propósito. Acredita-se que a promoção de um ambiente tridimensional de aprendizagem, onde os alunos possam ver, tocar e interagir com as formas geométricas, é fundamental para despertar o interesse pela Matemática e desenvolver plenamente o pensamento espacial, habilidade essencial para a vida e para diversas áreas do saber no século XXI.

Esperamos que a investigação aqui apresentada incentive mais discussões sobre as contribuições das oficinas educativas para o ensino e a aprendizagem de matemática, despertando, em outros pesquisadores, o interesse por essa temática e pela possibilidade de novas pesquisas nesse campo. Também esperamos contribuir para com os nossos colegas professores de matemática e para a aprendizagem de matemática pelos nossos alunos em geral.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva.** Lisboa: Plátano, 2003.

AUSUBEL, D. P. **Educational Psychology: A cognitive view.** New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

BATTISTA, M. T. **Spatial visualization and gender differences in high school geometry.** Journal for Research in Mathematics Education, v. 21, n. 1, p. 47-60, 1990.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação matemática: pesquisa e prática**. São Paulo: Cortez, 2006.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BOYER, C. B. **História da matemática. Tradução de Elza F. Gomide.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 19 mar. 2025.

CURSINO, André Geraldo. **A prática da matemática no ambiente escolar e seu potencial no desenvolvimento de uma mentalidade de crescimento.** Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação, v. 6, n. 2, 2023. Disponível em: https://ojs.novapaideia.org/index.php/RIEP/article/view/423. Acesso em: 26 mar. 2025.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **EULER, UM MATEMÁTICO MULTIFACETADO.** Revista de História da Matemática para Professores, v. 7, n. 7, p. 1-12, 2021. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/69. Acesso em: 02 mai. 2025.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações. Volume 2**. 7ed. São Paulo: Ática, 2013.

DIENES, Z. P. **Building up mathematics.** London: Hutchinson Educational, 1970.

DUVAL, R. **Semiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Paris: Peter Lang, 1995.

EBIOGRAFIA. **Biografia de Leonhard Euler.** [S.l.]: Ebiografia, 2020. Disponível em: https://www.ebiografia.com/leonhard_euler/. Acesso em: 02 mai. 2025.

EULER, L. **Elementa Doctrinae Solidorum.** Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, São Petersburgo, v. 4, p. 109-140, 1758.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. (Org.). **Práticas de ensino de matemática: reflexões, propostas e experiências.** Campinas: Papirus, 1990.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** São Paulo: Paz e Terra, 1996.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações. Volume 2. 3ed.** São Paulo: Atual, 2005.

LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas: Autores Associados, 2006.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem.** São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1999.

NOVAK, J. D. **Aplicação da teoria de Ausubel na educação.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1981.

PIAGET, J. **A Psicologia da Criança.** Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1976.

ROGERS, Carl R. ***Tornar-se pessoa: um ensaio sobre psicoterapia*.** São Paulo: Martins Fontes, 2009.

SILVA, João Paulo; OLIVEIRA, Márcia Cristina; SANTOS, Ana Clara. **Ansiedade Matemática: Pressupostos para a Melhora de Fatores Cognitivos, Emocionais e Ambientais nos Processos de Ensino e Aprendizagem.** Revista FT, 2020. Disponível em: https://revistaft.com.br/ansiedade-matematica-pressupostos-para-a-melhora-de-fatores-cognitivos-emocionais-e-ambientais-nos-processos-de-ensino-e-aprendizagem/. Acesso em: 26 mar. 2025.

TARDIF, Maurice; LESSARD, Claude. **O trabalho docente: elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas.** Petrópolis: Vozes, 2005.

VALENTE, José Armando (Org.). **Formação de educadores para o uso das tecnologias da informação e comunicação.** São Paulo: Avercamp, 2007.

VAN HIELE, P. M. **Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education.** New York: Academic Press, 1986.

VAN HIELE, P. M. ***The Child's Thought and Geometry.*** Rotterdam: Utrecht University, 1957.