



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA (IME)
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)



LUCAS SOUZA DE ABREU

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA: Uma proposta para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra

GOIÂNIA

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

☒ Dissertação ☐ Tese ☐ Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Lucas Souza de Abreu

3. Título do trabalho

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA: Uma proposta para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Alacyr Jose Gomes, Professor do Magistério Superior**, em 29/09/2025, às 17:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lucas Souza De Abreu, Discente**, em 07/10/2025, às 15:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5685570** e o código CRC **9D414DF8**.

Referência: Processo nº 23070.046178/2025-35

SEI nº 5685570

LUCAS SOUZA DE ABREU

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA: Uma proposta para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística(IME), da Universidade Federal de Goiás(UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Alacyr José Gomes

GOIÂNIA
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Abreu, Lucas Souza de

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA: Uma proposta para o Ensino
Médio com o uso do GeoGebra [manuscrito] / Lucas Souza de
Abreu. - 2025.

133 f.

Orientador: Prof. Dr. Alacyr José Gomes.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto
de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós
graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira
de Matemática (RG), Goiânia, 2025.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui algoritmos, lista de figuras.

1. Trigonometria. 2. GeoGebra. 3. Geometria Dinâmica. I. Gomes,
Alacyr José, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 35 da sessão de Defesa de Dissertação de **Lucas Souza de Abreu**, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.

Aos vinte e cinco dias do mês de setembro de dois mil e vinte e cinco, a partir das 8:30h, na **sala Geraldo Ávila do IME/UFG**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“O ENSINO DE TRIGONOMETRIA: Uma proposta para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra”**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Alacyr José Gomes (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: O Professor Doutor Geci José Pereira da Silva (IME/UFG), membro titular interno e o Professor Doutor Hugo Leonardo da Silva Belisário (IFG), membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Alacyr José Gomes, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte e cinco dias do mês de setembro de dois mil e vinte e cinco.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Alacyr Jose Gomes, Professor do Magistério Superior**, em 27/09/2025, às 09:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Geci Jose Pereira Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 27/09/2025, às 13:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Hugo Leonardo da Silva Belisário, Usuário Externo**, em 29/09/2025, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5623985** e o código CRC **7F109F87**.

Dedico este trabalho à minha querida esposa, Kamila Martins, pelo incentivo, amor e força durante esse árduo processo de aprendizado. À minha pequena filha, Lívia Maria, por ser o mais sincero sentimento que, a cada dia, cresce, me inspira e me faz querer ir sempre além. Aos meus alunos, que são os elementos principais para que eu busque constantemente o aperfeiçoamento e o crescimento profissional.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela oportunidade de concluir meus desafios e pela força para vencer, a cada dia, minhas batalhas.

Agradeço à Universidade Federal de Goiás, ao Instituto de Matemática e Estatística e ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROF-MAT), pela grande oportunidade de me qualificar melhor e crescer academicamente. Ao corpo docente do PROFMAT, em especial aos professores Alacyr, Ana Paula, Geci, Hiuri, Jhone, Kamila, Márcio, Marcelo Bezerra, Ole e Paulo Henrique, meus sinceros cumprimentos por todo o conhecimento proporcionado ao longo do curso.

Quero agradecer, em especial, ao Professor Dr. Alacyr, meu orientador, que, por meio de muitos embates construtivos, me fez crescer e desenvolver com maestria este trabalho. Agradeço imensamente por me conduzir pelos caminhos corretos, assertivos e necessários. Seu profissionalismo é um grande exemplo que inspira a melhoria dos meus caminhos pedagógicos e o meu crescimento profissional.

Agradeço às instituições Colégio Estadual Porfírio de Souza França, e às gestoras Simone Lopes e Jacqueline Magela, por flexibilizarem minha rotina e me proporcionarem a oportunidade de voltar a estudar. À Escola Municipal Espírita André Luiz, e a todo o grupo gestor, minha gratidão pela compreensão, humanidade e apoio ao me liberarem para buscar uma melhor qualificação. Agradeço a todos com imenso carinho e satisfação.

Por fim, agradeço a todos que participaram, direta ou indiretamente. A contribuição de cada um foi, sem sombra de dúvidas, fundamental para a minha trajetória profissional.

Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos.

Isaac Newton,
Observatorium: Revista Eletrônica De Geografia.

Resumo

Abreu, Lucas Souza de. **O ENSINO DE TRIGONOMETRIA: Uma proposta para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra**. Goiânia, 2025. 133p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O ensino de trigonometria é de grande importância para potencializar o desenvolvimento cognitivo dos alunos, e faz-se cada vez mais necessário buscarmos alternativas com a intenção de dirimir dúvidas e aumentar a compreensão dos conceitos trigonométricos pelos estudantes, os quais são extremamente valiosos na sociedade. Faz-se necessário a utilização de recursos computacionais no ensino da Matemática na educação básica. Tal fato deve-se a necessidade de adaptar as práticas educacionais às demandas da sociedade contemporânea. Daí a necessidade de aproveitar as oportunidades oferecidas pela tecnologia para potencializar o aprendizado dos alunos. De forma geral, observa-se que os alunos têm tido contato cada vez mais precoce com os meios digitais e ambientes interativos. Nesse contexto, discutir e inserir essas tecnologias no ambiente escolar torna-se fundamental, uma vez que tais recursos são naturalmente atraentes para o público jovem e podem contribuir de forma significativa para o processo de aprendizagem. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma pesquisa aplicada sobre os conceitos de trigonometria de forma dinâmica, de modo que essa área da matemática possa ser ensinada aos alunos por meio de aplicativos de matemática dinâmica e sequências didáticas. Para isso, o aplicativo adotado neste estudo é o GeoGebra, que oferece amplas possibilidades pedagógicas, proporcionando uma organização eficiente em sua plataforma online. Este trabalho é organizado em sua estrutura principal por meio de sequências didáticas, que devem ser desenvolvidas com o auxílio do GeoGebra. As sequências didáticas proporcionam uma melhor organização na escrita do trabalho de forma orientada e coerente.

Palavras-chave

Trigonometria, GeoGebra, Geometria dinâmica.

Abstract

Abreu, Lucas Souza de. **THE TEACHING OF TRIGONOMETRY: A work proposal for High School education using GeoGebra.** Goiânia, 2025. 133p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The teaching of trigonometry is highly significant for enhancing the cognitive development of students, and it is necessary to seek alternatives with the aim to clarify doubts and improve the comprehension of trigonometric concepts by the students, that are extremely valuable in society. It is Necessary to utilize computation tools in the teaching of mathematics in basic education, and adapt the educational practices in response to the demands of contemporary society. Thus, the necessity take advantage of the opportunities offered by the technology for enhancing the learning of students. In general, it is observed that the students have had progressively earlier contact with digital media and interactive environments. In this context, it is became essential to discuss and incorporate this technologies in the school environmental, given that such resources are naturally attractive for the young audience, and can contribute of meaning way for the learning process. The objective of this study is to present an applied research on the concepts of trigonometry in a dynamic way, so that this branch of mathematics can be taught for the students through dynamic mathematics applications and didactic sequences. For this purpose, the application implemented in this study is GeoGebra, that provides extensive pedagogical possibilities, providing a well-structured organization on its online platform. This work is organized in its main structure through didactics sequences with should be developed with the support of GeoGebra. These instructions sequences offer better organization in the writing of the work, in a structured and coherent way.

Keywords

Trigonometry, GeoGebra, Dynamic geometry.

Sumário

Lista de Figuras	14
Introdução	17
1 Ideias iniciais e as tecnologias na educação	20
1.1 Ideias Iniciais	20
1.2 As tecnologias na educação	22
1.3 O GeoGebra como ferramenta educacional	24
2 Trigonometria	26
2.1 Conceitos Básicos	26
2.2 Teorema de Pitágoras	34
2.3 Razões Trigonométricas	35
2.4 Lei dos Cossenos	41
2.5 Lei dos Senos	45
2.6 Ciclo Trigonométrico	47
2.7 Fórmulas de adição e subtração	57
2.8 Funções Trigonométricas	60
3 Sequência didática: Uma proposta de trabalho	70
3.1 Sequência didática para o Ensino Médio	70
3.1.1 Sequência 1 – Familiaridade com GeoGebra	71
3.1.2 Sequência 2 – Definição das relações trigonométricas fundamentais	75
3.1.3 Sequência 3 - Lei dos Cossenos	80
3.1.4 Sequência 4 - Lei dos Senos	83
3.1.5 Sequência 5 - Ciclo Trigonométrico	84
3.1.6 Sequência 6 - Razões trigonométricas na circunferência unitária	89
3.1.7 Sequência 7 - Funções Trigonométricas	94
3.1.8 Sequência 8 - Soma e Subtração de arcos	99
3.2 Avaliação das sequências didáticas	101
4 Considerações Finais	102
Referências Bibliográficas	104
A Atividades desenvolvidas no <i>GeoGebra</i>	107
A.1 Atividade - Teorema de Pitágoras	107
A.2 Atividade - Aplicando as ideias de razões trigonométricas	110
A.3 Atividade - Aplicações Lei dos Cossenos	115

A.4	Atividade - Aplicações Lei dos Senos	118
A.5	Atividade - Aplicações de trigonometria e simetrias	122
A.6	Atividade - Aplicações de trigonometria no ciclo trigonométrico	124
A.7	Atividade - Funções trigonométricas e suas aplicações	128
A.8	Atividade - Adição e Subtração de Arcos	131

Lista de Figuras

1.1	Desempenho dos estudantes brasileiros. Fonte: OCDE, Banco de dados do Pisa 2022.	21
1.2	Fonte de dados: OCDE (2023) - Desempenho médio de meninas e meninos de 15 anos em matemática - disponível em:	21
2.1	Ponto A , B e C .	27
2.2	Reta r .	27
2.3	Representação do plano α .	27
2.4	Exemplificação do Axioma 1 e Axioma 2.	28
2.5	Exemplificação do Axioma 3.	28
2.6	Formação de duas figuras geométricas: triângulo e um quadrilátero.	29
2.7	Ilustração da semirreta.	29
2.8	Ilustração da semirreta.	29
2.9	Ângulo $\widehat{BAC}$, definidos pelos pontos B , A e C , sendo o ponto A o vértice.	30
2.10	Medida de um ângulo de 90° com o transferidor.	30
2.11	Primeiro um ângulo reto representado e na sequência um ângulo agudo.	31
2.12	Primeiro um ângulo raso representado e logo depois um obtuso.	31
2.13	Notação a ser usada para triângulos.	32
2.14	Ilustração do Teorema 2.1 .	32
2.15	$\triangle ABC$ é equilátero, $\triangle DEF$ é isósceles e $\triangle GHI$ é escaleno.	33
2.16	$\triangle ABC$ é acutângulo, $\triangle DEF$ é retângulo e $\triangle GHI$ é acutângulo.	33
2.17	Imagem Na Folha de S.Paulo, Marcelo Viana fala da Plimpton 322.	34
2.18	Ilustração animada do Teorema de Pitágoras.	35
2.19	Representação das figura com as semirretas. Criado pelo autor com <i>Geogebra</i> .	36
2.20	Triângulo retângulo $\triangle ABC$ criado pelo autor no GeoGebra.	37
2.21	Triângulo retângulo $\triangle ABC$.	38
2.22	Triângulo equilátero de lado medindo x .	39
2.23	Representação do triângulo equilátero $\triangle ABC$ e do triângulo retângulo $\triangle CDB$.	39
2.24	Triângulo com valor da altura dependendo de x .	40
2.25	Triângulo retângulo isósceles de lados medindo x e hipotenusa a .	41
2.26	Organização dos valores de $\sin$, $\cos$, e $\tan$.	41
2.27	Lei dos cossenos.	42
2.28	Lei dos cossenos para $\alpha = 90^\circ$.	42
2.29	Lei dos cossenos para $\alpha > 90^\circ$.	43
2.30	Lei dos cossenos para $\alpha < 90^\circ$.	44
2.31	Teorema de Pitágoras e Lei dos Cossenos.	45
2.32	Representação para Lei dos Senos 2.6.	46
2.33	Segunda representação para Lei dos Senos 2.6.	46
2.34	Terceira representação para Lei dos Senos 2.6.	47

2.35	Representação dos arcos $\widehat{AEB}$ e $\widehat{AFB}$.	48
2.36	Arcos semelhante.	49
2.37	Sentido anti-horário e horário do ciclo orientado.	50
2.38	Representação dos arcos nos dois sentidos.	51
2.39	Arco congruente aos arcos dados.	51
2.40	Representação dos arcos definidos para $0^\circ < \theta < 360^\circ$.	52
2.41	Representação da tangente para os arcos definidos para $0^\circ < \theta < 360^\circ$.	52
2.42	Representação da secante, cossecante e cotangente definidos de $0^\circ < \theta < 360^\circ$.	53
2.43	Redução do segundo quadrante para o primeiro.	55
2.44	Redução do terceiro quadrante para o primeiro.	56
2.45	Redução do quarto quadrante para o primeiro.	57
2.46	Representação para soma dos ângulos θ e β .	59
2.47	Representação gráfica da função $f(x) = 3$.	61
2.48	Representação da função do Exemplo 3.12.	61
2.49	Ordenada de B dado pelo valor OD .	62
2.50	Gráfico da função seno.	62
2.51	Abscissa de B dada pelo valor de OC .	63
2.52	Gráfico da função cosseno.	63
2.53	Projeção da reta que forma o segmento AE (Representação da tangente).	65
2.54	Gráfico da função tangente.	66
2.55	Gráfico da função secante.	66
2.56	Gráfico da função cossecante.	67
2.57	Gráfico da função cotangente.	67
2.58	Modelo referente a $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$.	68
2.59	Modelo referente a $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$.	69
3.1	Ícone do <i>GeoGebra</i> para clicar.	72
3.2	Janela inicial do <i>GeoGebra</i> .	72
3.3	Ferramentas oferecidas pelo <i>GeoGebra</i> .	73
3.4	Ferramenta de "Ponto".	73
3.5	Selecionando a ferramenta segmento para criar um seguimento definido pelos pontos $\overline{AB}$.	74
3.6	Marcação dos pontos A , B e C na janela de visualização.	74
3.7	Utilização da ferramenta segmento de reta para os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.	74
3.8	Verificação dos valores apresentado na criação do triângulo retângulo.	75
3.9	Representação da distância do rio com auxílio do <i>GeoGebra</i> .	76
3.10	Criação do autor para definir a relação trigonométrica Seno.	77
3.11	Relações trigonométricas no triângulo $\triangle ABC$	79
3.12	Referência do argumento do ângulo menor.	80
3.13	Criação de um triângulo qualquer $\triangle ABC$ - elaborada pelo autor.	81
3.14	Habilitação dos valores de cada lado do triângulo $\triangle ABC$ - elaborado pelo autor.	81
3.15	Verificação do 1º Caso em que desejamos para o ângulo α .	82
3.16	Construção do triângulo inscrito na circunferência - Lei dos Senos.	83
3.17	Ciclo trigonométrico unitário.	85
3.18	Ciclo trigonométrico com definição do ângulo medido em Radianos.	85
3.19	Construção dos arcos congruentes no 1ºQ e 2ºQ.	86
3.20	Verificando a configuração $\theta = \pi - \beta$ ou $\theta = 180^\circ - \beta$.	87

3.21	Construção dos arcos congruentes no 1ºQ e 3ºQ e verificação da configuração $\theta = \pi + \beta$ ou $\theta = 180^\circ + \beta$	88
3.22	Construção dos arcos congruentes no 1ºQ e 4ºQ e verificação da configuração $\theta = 2\pi - \beta$ ou $\theta = 360^\circ - \beta$.	89
3.23	Ilustração da construção dos passos.	91
3.24	Edição do texto em linguagem Tex.	92
3.25	Exibição do seno do argumento junto ao seu valor.	92
3.26	Esquema dos valores dos Senos, cossenos e tangentes.	93
3.27	Esquema de valores: Secante, cossecante e cotangente.	94
3.28	Exemplo de função seno que representa essa ideia (Criada pelo autor).	95
3.29	Elaboração e edição do autor. Função seno sendo criada de forma interativa.	96
3.30	Elaboração e edição do autor. Função cosseno sendo criada de forma interativa.	96
3.31	Elaboração e edição do autor. Função cosseno sendo criada de forma interativa.	97
3.32	Função secante sendo criada de forma interativa.	97
3.33	Função cossecante sendo criada de forma interativa.	98
3.34	Função cotangente sendo criada de forma interativa.	98
3.35	Representação dos modelos das funções $f(x)$ e $g(x)$.	99
3.36	Construção para demonstração da soma de arcos.	100
A.1	Animação criada com Geogebra. Edição do autor. disponível em: https://www.geogebra.org/m/uwhe43sn	107
A.2	Figura para utilizar nas questões subsequentes. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/nddrmts3 .	110
A.3	Animação suporte para realizar as atividades desse conjunto 1.	125
A.4	Animação suporte para realizar as atividades desse conjunto 2.	125
A.5	Modelo para aplicar nos exercícios da sequência didática.	128
A.6	Alternativas da questão 4.	130
A.7	Alternativas para questão 5.	131
A.8	Representação do cosseno da soma de arcos.	132
A.9	Representação do seno da soma de arcos.	132
A.10	Representação do cosseno da diferença de arcos.	133
A.11	Representação do seno da diferença de arcos.	133

Introdução

Atualmente compreender e entender as relações trigonométricas é de extrema importância no campo teórico e prático da matemática, sendo que seu contexto nasce da necessidade de estudos baseados em astronomia e navegação dos povos Babilônicos cerca de 1900 a.C – 1600 a.C. Como todos os conhecimentos que podem ser adquiridos, o ensino de trigonometria é uma forte linha que contribui para o desenvolvimento do pensamento lógico e há uma necessidade de inserirmos metodologias para a construção desses significados. De acordo com [Carvalho e Penteado 2021], a inserção de métodos inovadores, baseados em tecnologias, cria oportunidades de contribuição significativa para o aprendizado. Dessa maneira, ensinar trigonometria com aparatos tecnológico, influencia a ampliação desses conceitos para extrapolar além da sala de aula.

Em seu livro [Boyer 1974] e seu artigo [Costa 2003], são debatidos de maneira geral a origem das ideias trigonométricas. No entanto, não há uma precisão concisa sobre seu surgimento. Fica evidente que as civilizações antigas, já apresentavam compreensão prática de conceitos que usamos atualmente, como por exemplo, as ternas pitagóricas e a base sexagesimal na “Tábua Plimpton 322”, desenvolvidos pelos babilônicos e que são de grande importância para medição de ângulos e tempo.

Com o passar dos tempos, e em todas as literaturas aqui abordadas verificou-se que os conceitos de trigonométricos foram influenciados historicamente. É possível destacar alguns importantes como, Eratóstenes (276–195 a.C.), Hiparco de Niceia (190–120 a.C.), Ptolomeu (90–168 d.C.) e Johann Müller (1436–1476 d.C.). Dentre eles podemos destacar Hiparco e Ptolomeu. Seus estudos baseados respectivamente em “tabela de cordas – primeiras ideias dos senos” e uso da trigonometria para motivar os estudos de movimento de astros.

De maneira fatual, [Boyer 1974] e [Costa 2003] apontam em seus estudos que o período Grego, é de grande contribuição para a história e desenvolvimento dos conceitos trigonométricos. Não deixando de observar que esses estudos são influenciados pelos povos babilônicos e egípcios. Segundo eles, a geometria e trigonometria prática exercida por esses povos, corrobora para a maior rigorosidade e construção pelos Gregos.

Segundo [Boyer 1974], Ptolomeu escreveu sua obra “*Almagest*” (Nomeado por estudiosos árabes mais tarde), onde apontou em seu estudo a terra no centro do universo e os demais planetas, sol e estrelas girando em torno dela. No entanto, o mais importante aqui é o estudo de tabela de cordas, iniciado por Hiparco e aperfeiçoado por Ptolomeu. Na obra, Ptolomeu apresenta os senos de 0° a 90° , dividindo cordas em comprimentos sexagesimais e segundo as literaturas, versava em calcular ângulos entre estrelas, distâncias entre planetas e fazer previsões de astronomia.

Durante minha experiência pedagógica, observei que alunos do Ensino Básico têm dificuldades em aprender trigonometria. Para tornar o ensino mais simples e dinâmico, estruturei o trabalho com o uso de TICDs (Tecnologias da Informação e Comunicação Digitais), utilizando aplicativos de geometria dinâmica¹. Segundo [Silva, Sousa e Carvalho 2022], o uso de computadores e programas digitais facilita a interação dos estudantes com representações geométricas virtuais, promovendo melhor assimilação dos conceitos matemáticos.

O aplicativo utilizado neste estudo foi o GeoGebra, nele encontram-se recursos pedagógicos variados e permitem a organização de sua plataforma conforme as necessidades dos conceitos envolvidos. O GeoGebra é um *software* livre disponível para computadores, *tablets* e celulares, funcionando tanto off-line quanto on-line [Hohenwarter e Fuchs 2005]. Assim, a abordagem do aplicativo motiva a inserção das regras de geometria básica, oportunizando a efetividade e o desenvolvimento dessa pesquisa.

Em [Brasil 2018], a Competência Geral 5 aponta a importância de incentivar diferentes conjecturas e estratégias, incluindo o uso de tecnologias, pois esses recursos ampliam as formas de validação dos conhecimentos matemáticos.

Outro ponto que motiva nosso estudo, refere-se à transformação do comportamento da sociedade em geral, principalmente dos mais novos. É possível notar no contexto em que estamos inseridos, cada vez mais crianças tendo contato precoce com os meios digitais desde os primeiros anos de vida, e mudar o foco para inserir recursos digitais no planejamento pedagógico se apresentam com uma necessidade educacional. Para [Kenski 2012], a presença constante das tecnologias no cotidiano impõe à educação a necessidade de reformular metodologias, considerando os novos modos de aprender e interagir que emerge na cultura digital.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos: o Capítulo 1 discute a importância das tecnologias na educação e apresenta o GeoGebra, com o objetivo

¹Geometria Dinâmica está alinhada à concepção construcionista de [Papert 1980], que defende a aprendizagem por meio da experimentação e manipulação de objetos digitais, como acontece em *softwares* de geometria dinâmica. Essa perspectiva busca tornar o ensino da matemática mais ativo, investigativo e significativo, favorecendo a construção do conhecimento pelo aluno.

de discutir e inserir essas tecnologias no ambiente escolar, uma vez que tais recursos são naturalmente atraentes para o público jovem e podem contribuir de forma significativa para o processo de ensino/aprendizagem; o Capítulo 2 traz o contexto teórico da trigonometria, delimitados por conceitos dos mais básicos como medição de ângulos, definição de ângulos, conceitos primitivos como ponto, reta e plano, segmento de reta, semirreta, classificação de ângulos, e entre outras, aos mais complexos como, funções trigonométricas, lei dos senos, lei dos cossenos e etc; o Capítulo 3 detalha as sequências didáticas, que estão organizadas de forma a mostrar os conceitos sendo construídos progressivamente, com a apresentação das estruturas trigonométricas/geométricas para sua criação e exibição no processo de ensino; e o Capítulo 4 propõe discussões e possíveis aplicações do material desenvolvido objetivando o desenvolvimento de habilidades importantes, como resolução de problemas, pensamento crítico e investigação matemática.

Ideias iniciais e as tecnologias na educação

Neste capítulo, discutiremos, de forma geral, a proposta do trabalho, abordando sua fundamentação no contexto educacional amplo, destacando pontos relevantes sobre o uso da tecnologia no ensino de Matemática e considerações relevantes sobre o GeoGebra¹.

1.1 Ideias Iniciais

Os avanços tecnológicos em suas diversificadas vertentes, vem promovendo grandes melhorias em tudo que são implementados. Na educação, não é e, não será diferente. A inserção dos meios digitais, historicamente vem ganhando território e cada vez mais é notório como essas contribuições vem crescendo e proporcionando uma visão que acompanha o desenvolvimento da sociedade. Segundo [Moran 2007], [Valente 2011] e [Papert 1980], as metodologias baseadas em uso de tecnologias, devem ir de encontro a necessidade e transformação social ascendente.

Como aponta, [Valente 2011] e [Moran 2007], desde pequenos os jovens da atualidade, apresentam contato precoce com as novas tecnologias, e ainda aponta que isso pode ocorrer muito mesmo antes de entrar na escola. Diante dessa mudança que vem sendo apresentada pela sociedade, inserir e promover o uso consciente pelos jovens podem desenvolver papel crucial de facilitador do processo de ensino aprendizagem e força motriz para motivar cada vez mais essa geração que tem seu berço na sociedade da tecnologia.

Por outro viés, a Matemática é frequentemente vista como uma disciplina de elevada complexidade, apresentando diversas lacunas no processo de ensino-aprendizagem na educação básica. De acordo com o relatório do PISA² [Brasil. 2023],

¹GeoGebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma.

²*Programme for International Student Assessment* é uma avaliação internacional, realizada a cada três anos pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico), que avalia as competências e conhecimentos de estudantes de 15 anos em leitura, matemática e ciências.

73% dos alunos brasileiros não alcançaram o nível básico de proficiência em Matemática. Os níveis de desempenho, conforme apresentados na Figura 1.1 e 1.2 e nos documentos oficiais, variam do Nível 1 ao Nível 6. Esses dados são corroborados também pelo relatório do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) [Brasil. 2024], reforçando a necessidade de melhorias significativas na abordagem pedagógica da disciplina.

Considerando a necessidade de aprimorar o ensino e os resultados em Matemática, recomenda-se a introdução gradual de ferramentas digitais no ambiente escolar, a fim de promover impactos positivos de curto, médio e longo prazo na educação fundamental. Essa perspectiva está alinhada a propostas de uso pedagógico das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TICDs), conforme defendido por autores como [Valente 2011] e [Moran 2007].

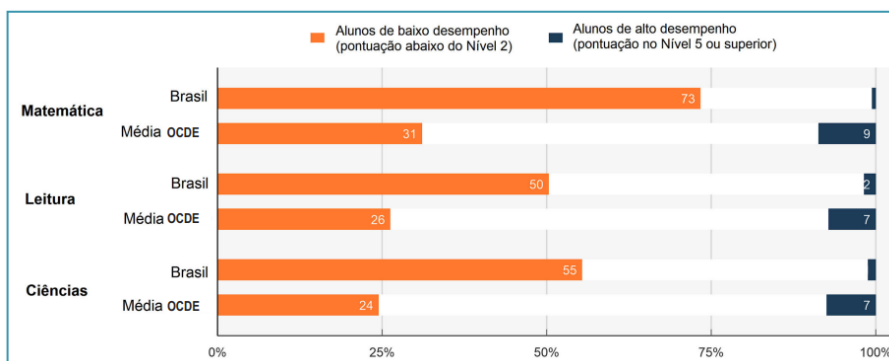


Figura 1.1: Desempenho dos estudantes brasileiros. Fonte: OCDE, Banco de dados do Pisa 2022.

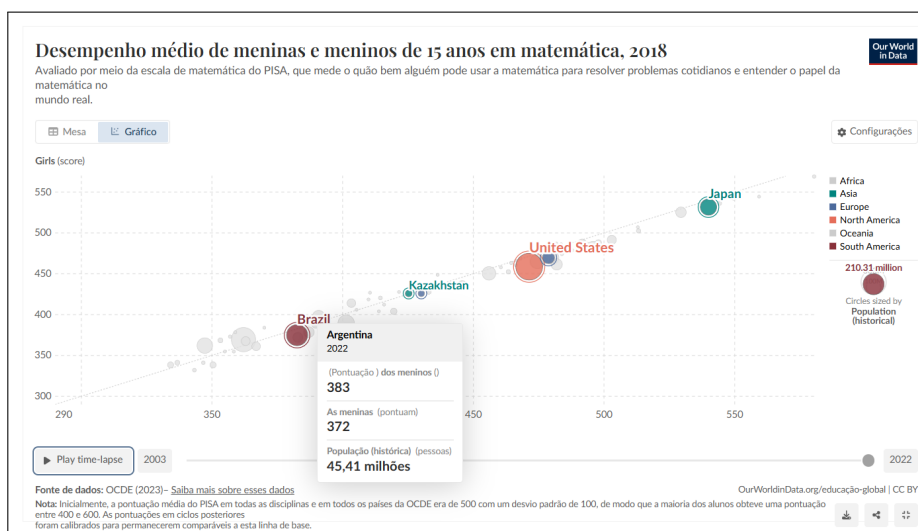


Figura 1.2: Fonte de dados: OCDE (2023) - Desempenho médio de meninas e meninos de 15 anos em matemática - disponível em:

<https://ourworldindata.org/grapher/pisa-mean-performance-on-the-mathematics-scale-by-sex?time=latest&country=BRA~USA~JPN~ROU~KAZ~FRA>.

A incorporação de plataformas e ferramentas digitais tem se mostrado uma estratégia eficaz para potencializar a comunicação pedagógica e enfrentar desafios no processo de ensino-aprendizagem. Diversas pesquisas nacionais e internacionais destacam a relevância de introduzir tais tecnologias no ambiente escolar desde os primeiros anos, como forma de alinhar a educação às demandas contemporâneas [UNESCO 2019] e [Valente 2011].

1.2 As tecnologias na educação

A crescente presença de tecnologias digitais no ensino básico tem gerado impactos significativos na forma como se ensina e aprende. O computador, enquanto ferramenta pedagógica, destaca-se por seu potencial em ampliar o engajamento dos estudantes e tornar o processo de aprendizagem mais dinâmico e eficaz como apontam [Valente 2011] e [Moran 2007].

Essa constante transformação ocasionada pelas tecnologias, bem como sua repercussão na forma como as pessoas se comunicam, impacta diretamente no funcionamento da sociedade e, portanto, no mundo do trabalho. A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais. [Brasil 2018](p. 473).

De forma efetiva, é possível observar que as tecnologias contribuem para promover um processo de aprendizagem dinâmico, personalizado e eficiente. Como os Parâmetros Curriculares Nacionais [Brasil. 1997] apontam, as novas tecnologias têm grande importância no desenvolvimento corrente de competências, e para os autores [Moran 2007] e [Belloni 2009], reforçar a necessidade de integrar essas inovações de forma crítica e pedagógica para o bom desenvolvimento do ensino aprendizagem.

A integração do computador como ferramenta pedagógica na educação básica fundamenta-se na teoria construtivista, que destaca a importância do aluno na construção ativa do seu conhecimento. A interatividade oferecida pelos recursos digitais possibilita a exploração autônoma e a construção de significados, alinhando-se a abordagens pedagógicas que valorizam o protagonismo do estudante no processo de aprendizagem [Piaget 1976]; [Papert 1980].

O desenvolvimento na vertente piagetiana é um processo conduzido por meio das assimilações, acomodações e equilibrações, ações cada vez mais complexas e elaboradas. O processo chamado por Piaget de

assimilação se dá quando o indivíduo organiza e estrutura as experiências em um sistema de relações para terem algum significado, havendo assim uma incorporação pelo sujeito, trazendo novos aprendizados. Ao mesmo tempo em que o indivíduo adquire novos aprendizados as antigas estruturas do pensamento são modificadas e a esse processo se dá o nome de acomodação. A equilibração é um processo de auto regulação que o sujeito deve manter entre suas necessidades de sobrevivência e as dificuldades impostas pelo meio, sendo possível a partir dos processos de acomodação e assimilação. (MARINHO, 2016, p. 21).

As vastas possibilidades de inserir os recursos digitais na educação, proporcionam a seleção e cumprimento eficiente das demandas impostas pelos documentos regulamentares oficiais. Diante de todos os aparatos/ferramentas tecnológicas em consonância com o modelo tradicional de ensino, verbal e escrito, a implementação das TICDs propõe grandes desafios aos professores e apontam para o que [Silva, Sousa e Carvalho 2022](p. 20) afirma, proporciona suporte personalizado e melhora a visão pedagógica no contexto educacional.

A avaliação do impacto do uso de computadores no aprendizado e na motivação dos alunos requer a análise do desempenho acadêmico, o *feedback* dos professores e a observação das atitudes e comportamentos dos estudantes em sala de aula. Segundo [Valente 2011] e [Moran 2007] esse impacto se reflete na capacidade ampliada dos alunos compreender, utilizar e aprimorar ferramentas digitais de forma crítica, consciente e responsável.

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. [Brasil 2018](p. 9).

De modo geral, a incorporação do computador como ferramenta pedagógica no ensino fundamental configura-se como uma área promissora para investigação e prática educativa, capaz de transformar o contexto escolar. Para [Moran 2007] e [Valente 2011] ao explorar as inter-relações entre tecnologia, motivação e aprendizagem, torna-se possível desenvolver estratégias voltadas para a criação de ambientes educacionais que atendam às demandas dos estudantes contemporâneos.

É imprescindível reconhecer que as tecnologias educacionais trazem desafios significativos, tais como assegurar a acessibilidade universal, administrar o grande volume de informações digitais e desenvolver competências essenciais como o pensamento crítico e a resolução de problemas em um contexto digital em constante evolução [Valente 2011]; [Moran 2007].

Segundo [Tezani 2009], a escola é um ambiente educativo que amplia a aprendizagem humana e incentiva a construção de conhecimentos, reconhecendo

diferentes agentes e perspectivas no currículo escolar. Diante disso, é necessário incluir as TICDs para fortalecer o desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

A inserção na sociedade da informação exige que o profissional da educação esteja em constante atualização para aprimorar sua prática pedagógica. O professor assume um duplo papel: como aprendiz, que inova e se adapta, e como mediador, articulando a tecnologia aos conceitos matemáticos para facilitar a compreensão dos alunos [Moran 2007]; [Tardif 2002].

1.3 O GeoGebra como ferramenta educacional

O GeoGebra, no que diz respeito as suas intencionalidades pedagógicas, é possível notar que ele oferece ampla aplicabilidade de conceitos e vertentes carregadas de definições da geometria plana. É importante ressaltar que ao utilizar o aplicativo, ele fornece possibilidades metodológicas e apresenta organização coerente para incentivar o ensino aprendizagem. Ele, permite visualizar o comportamento geométrico de conceitos e entender melhor sua aplicabilidade. De acordo com [Hohenwarter e Fuchs 2005], trata-se de um programa de computador com o objetivo de estudar Matemática, especialmente voltado para o aprendizado de geometria e álgebra.

Para [Cordelina G. Pavanelo 2024], fica evidente que o aplicativo está consolidado na comunidade educacional de Matemática. Sua versatilidade demonstra, de forma eficiente, como o professor pode otimizar o tempo de suas aulas. Dessa forma, cria-se um ambiente propício aos aprendizes e motivam-se diversas novas hipóteses.

Ao utilizar o aplicativo nas aulas de Matemática:

- 1) O aprendizado torna-se mais envolvente com a manipulação ágil de figuras;
- 2) A exploração favorece a assimilação;
- 3) Há um estímulo à criatividade com criações originais dos alunos;
- 4) A resolução de problemas é incentivada pela interação intuitiva com os objetos [Papert 1980].

Assim, o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica proporciona ampliar as possibilidades de ensino e aprendizagem, favorecendo práticas que motivem o interesse, a interatividade e a investigação matemática. Segundo [Papert 1980], a intenção de tornar a aprendizagem significativa é uma necessidade que possibilita os estudantes engajamento na construção de aparatos e meios digitais. Nessa mesma

direção, [Carvalho e Penteado 2021] destaca que o uso de tecnologias digitais cria grandes possibilidades na reconfiguração do conhecimento matemático e cria novas formas de representação, experimentação e comunicação entre professores e alunos.

Trigonometria

De acordo com [Boyer 1974], muito antes de uma conceituação formal trigonométrica, progressos desenvolvidos pelos povos egípcios e babilônios desenvolviam uma trigonometria na prática, eles conheciam informalmente as relações entre os lados de triângulos sem terem conceituado ângulo. Tais conceitos foram aplicados na construção de monumentos, medição de terras e astronomia.

O primeiro trabalho formal sobre trigonometria surge quando Ptolomeu publicou seu trabalho “*Almagest*” sobre astronomia em 13 volumes, onde segundo [Boyer 1974] e [Barbosa 1995], apresentou uma tabela de cordas. Essa tabela de cordas mostrava uma sequência de ângulos. Uma das primeiras ideias datadas e que também apresentavam teoremas relativos as cordas.

Entendemos que suas ideias fundamentais estão baseadas na Geometria Euclidiana. Definições simples como ponto, reta e plano permeiam a importância de serem enunciadas e discutidas. Portanto, neste capítulo, abordaremos os conceitos básicos e definiremos os instrumentos teóricos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Consideramos que esses elementos são fundamentais e merecem ser apresentados de forma clara e objetiva.

2.1 Conceitos Básicos

Os conceitos da trigonometria baseiam-se na medição de aberturas, conhecidas como ângulos. No entanto, para definir um ângulo, é necessário compreender alguns conceitos fundamentais que fazem parte das definições gerais.

Vamos considerar três conceitos primitivos¹:

¹Baseado nas ideias de [Barbosa 1995], entendemos a Geometria como um jogo e os axiomas são mostrados como regras básicas. Dessa forma, aceitaremos como uma sentença matemática que não é uma definição e é aceita sem precisar de justificativa.

- 1) Ponto - pode ser compreendido como uma marca feita com a ponta de uma caneta ou lápis. Indicaremos a representação de pontos por meio de letras maiúsculas como na Figura 2.1

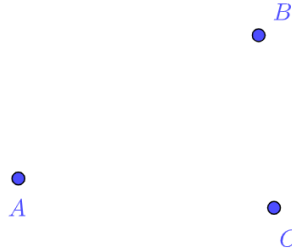


Figura 2.1: Ponto A , B e C .

- 2) Reta - pode ser visualizada ao posicionar uma régua sobre o papel e traçar um risco. Representaremos retas por letras minúsculas e ressaltando que uma reta possui infinitos pontos que podem ser marcados sobre ela como na Figura 2.2.

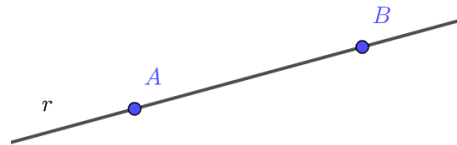


Figura 2.2: Reta r .

- 3) Plano - imaginaremos ele, como uma região ilimitada que possamos escrever pontos e retas. Planos serão representados por letras gregas (Ver Figura 2.3).

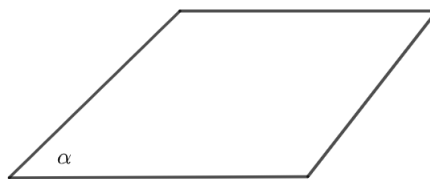


Figura 2.3: Representação do plano α .

Feitas tais colocações agora podemos desenvolver algumas ideias sobre geometria que usaremos mais a frente.

Axioma 1. Em qualquer reta existem pontos que pertencem a reta e pontos que não pertencem a reta.

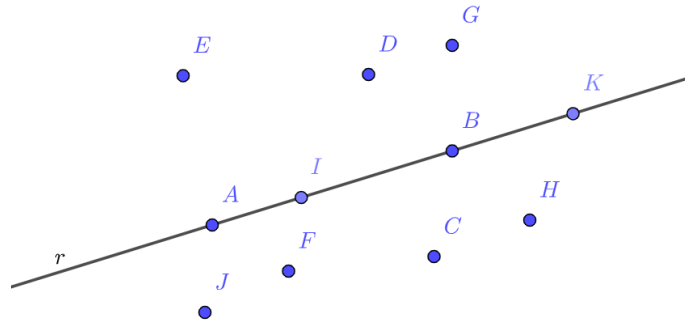


Figura 2.4: Exemplificação do Axioma 1 e Axioma 2.

Axioma 2. Em um plano existem infinitos pontos.

Podemos observar a Figura 2.4 justifica os dois axiomas que são de extrema importância. Podendo ainda, considera que os axiomas são de existência como são postos em muitas literaturas como (Citar). É possível observar que os pontos $A, B, I, K \in r$, já os pontos $C, D, E, F, G, H, J \notin r$ e todos os pontos junto com a reta r estão contidos no mesmo plano.

Axioma 3. Dados dois pontos existem uma única reta que passam por eles. (Veja Figura 2.5)

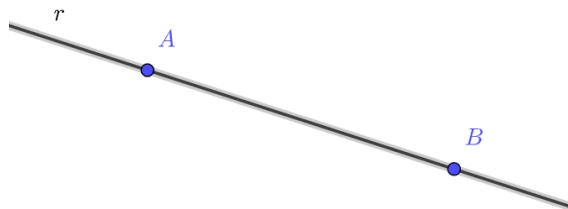


Figura 2.5: Exemplificação do Axioma 3.

Definição 1. Ao conjunto de todos os pontos entre A e B , inclusive eles, damos o nome de segmento AB . A e B são considerados extremidades.

Nos nossos estudos usaremos bastante a definição 1. Devido a ela podemos formar o objetivo principal que são os triângulos. Como esta destacado na Figura 2.6, pode-se ver que para formação de figuras geométricas fechadas precisamos ligar no mínimo 3 segmentos de retas. Ressaltando que os segmentos serão considerados os lados e os pontos vértices.

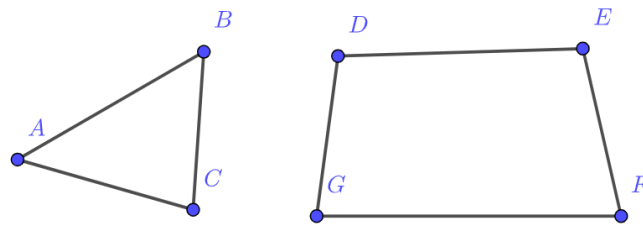


Figura 2.6: Formação de duas figuras geométricas: triângulo e um quadrilátero.

Definição 2. Uma Semirreta $\overrightarrow{AB}$, é definida por uma pedaço da reta que começa em A e passa por B se estendendo infinitamente na direção de B .



Figura 2.7: Ilustração da semirreta.

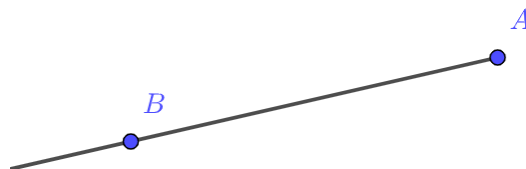


Figura 2.8: Ilustração da semirreta.

Definição 3. Chamaremos de ângulo a abertura definidas por duas semirretas de mesma origem.

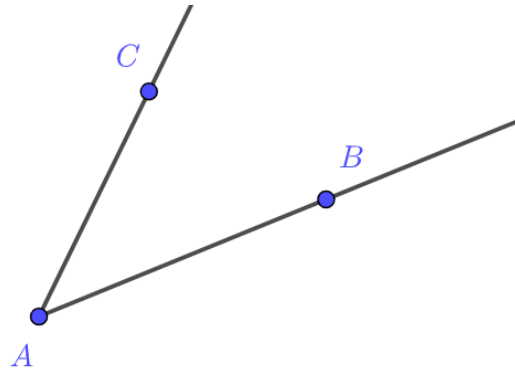


Figura 2.9: Ângulo $B\hat{A}C$, definidos pelos pontos B , A e C , sendo o ponto A o vértice.

Para que possamos medir um ângulo, utilizaremos a ferramenta chamada transferidor, no qual é a representação de um círculo graduado dividido em 360 partes iguais com o grau representando a medida da fração $\frac{1}{360}^\circ$. Essa é a unidade básica em que mediremos um ângulo. Veja a Figura 2.10 onde podemos realizar a medida angular.

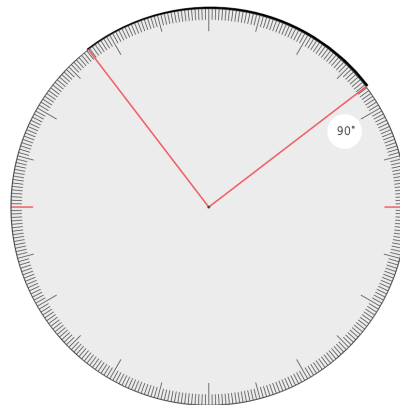


Figura 2.10: Medida de um ângulo de 90° com o transferidor.

Nesse ponto já temos ferramentas para podermos discutir algumas relações referentes entre ângulos e mais adiante relacionar essas noções com triângulos.

Definição 4. Nas medidas dos ângulos podemos considerar 4 casos particulares de medidas:

- i) Um ângulo medindo 90° , chamaremos de ângulo reto;
- ii) Um ângulo com medida maior que 0° e menor que 90° é chamado de ângulo agudo;
- iii) Um ângulo com medida de 180° é considerado ângulo raso;
- iv) Um ângulo com medida maior que 90° e menor que 180° é chamando de ângulo obtuso.

As Figuras 2.11 e 2.12 a seguir retratam essa determinação da Definição 4, mostrando a configuração desses ângulos para que possamos dar prosseguimento aos estudos aqui correlacionados.

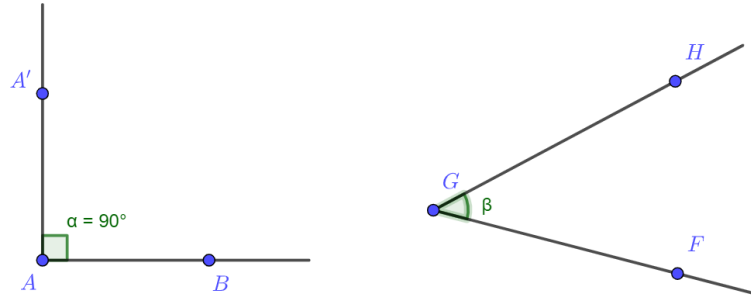


Figura 2.11: Primeiro um ângulo reto representado e na sequência um ângulo agudo.

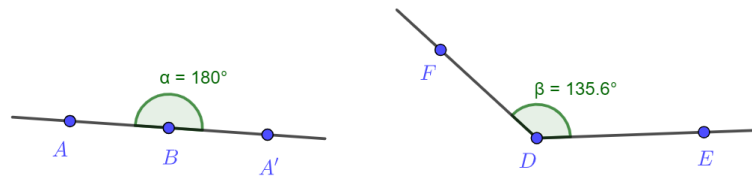


Figura 2.12: Primeiro um ângulo raso representado e logo depois um obtuso.

Dadas as definições anteriores agora podemos falar sobre os triângulos.

Definição 5. O triângulo é uma figura geométrica formado por três pontos não colineares² e pelos três segmentos determinados por estes três pontos. Esses três pontos são denominados de vértices do triângulo e os segmentos são os lados do triângulo.

A Figura 2.13 representa um triângulo de vértices A , B , C e segmentos AB , AC e BC , que denotaremos por $\triangle ABC$.

²Quando três pontos são não colineares, eles determinam um plano único e formam um triângulo, configurando a estrutura bidimensional mais simples da geometria euclidiana. O conceito de não colinearidade exerce um papel essencial na formulação dos axiomas de incidência, pois é a partir dessa propriedade que se define a existência e a unicidade do plano. Além disso, constitui a base para a definição de entidades geométricas superiores, como planos e polígonos, sendo, portanto, um elemento estrutural central na organização lógica da geometria clássica. Para maior aprofundamento veja a referência de [Barbosa 1995].

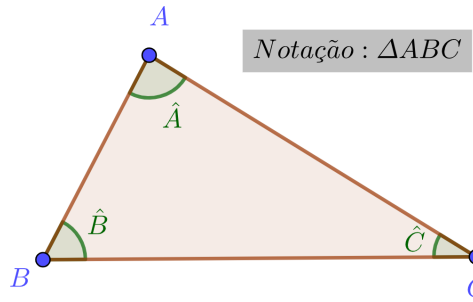


Figura 2.13: Notação a ser usada para triângulos.

Por conveniência em si tratando de ângulos internos de um triângulo iremos considerar a representação dos ângulos $B\hat{A}C = \hat{A}$, $A\hat{C}B = \hat{C}$ e $C\hat{B}A = \hat{B}$ (Ver Figura 2.13).

Teorema 2.1. Em todo triângulo a soma dos seus ângulos internos é 180° .

Demonstração. Seja um triângulo ABC qualquer (Ver Figura 2.14). Seja uma reta r que passa pelo ponto C e paralela ao segmento de reta AB . Considere os pontos D e E na reta r . Como a reta $r \parallel AB$, temos que $\hat{A} = \hat{A}\hat{C}E$ (Ângulos alternos internos - Ver Proposição A - página 60 [Barbosa 1995]) e pelo mesmo fato $\hat{B} = \hat{B}\hat{C}D$. Logo,

$$\hat{A}\hat{C}E + \hat{C} + \hat{B}\hat{C}D = \hat{A} + \hat{C} + \hat{B} = 180^\circ$$

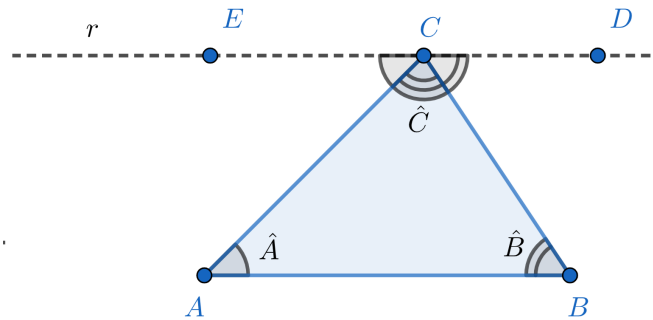


Figura 2.14: Ilustração do Teorema 2.1.

□

Teorema 2.2. (Caso LLL de congruência de triângulos) Quando dois triângulos tem três lados correspondente congruentes então eles são congruentes.

Vamos apenas enunciar o Teorema 2.2 e deixamos como referência [Barbosa 1995]. Cabe ressaltar que os Teoremas 2.1 e 2.2 garantem a rigidez dos triângulos e impedem deformações da estrutura triangular.

Os triângulos podem ser classificadas de acordo aos seus lados ou ângulos internos. A seguir descreveremos essas classificações.

Definição 6. Os triângulos podem ser classificados quantos aos seus lados em três caso:

- i) Triângulo equilátero: Possui três lados congruentes;
- ii) Triângulo Isósceles: Possui dois lados congruentes;
- iii) Triângulo Escaleno: Possui os três lados distintos.

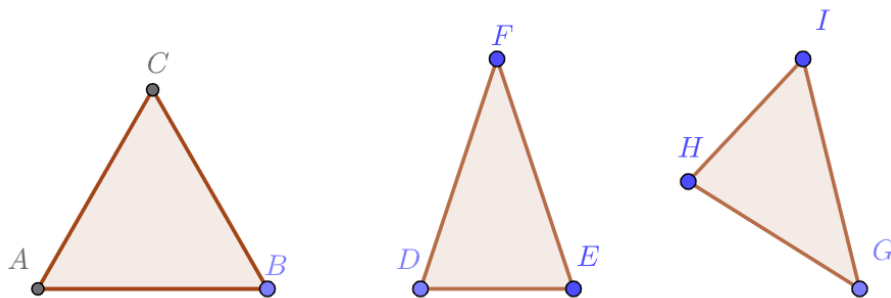


Figura 2.15: ΔABC é equilátero, ΔDEF é isósceles e ΔGHI é escaleno.

Definição 7. Os triângulos podem ser classificados segundos seus ângulos:

- i) Triângulo Acutângulo: Quando seus ângulos são agudos;
- ii) Triângulo Retângulo: Possui um ângulo medindo exatamente 90° (ângulo reto);
- iii) Triângulo Obtusângulo: Possui um ângulo obtuso.

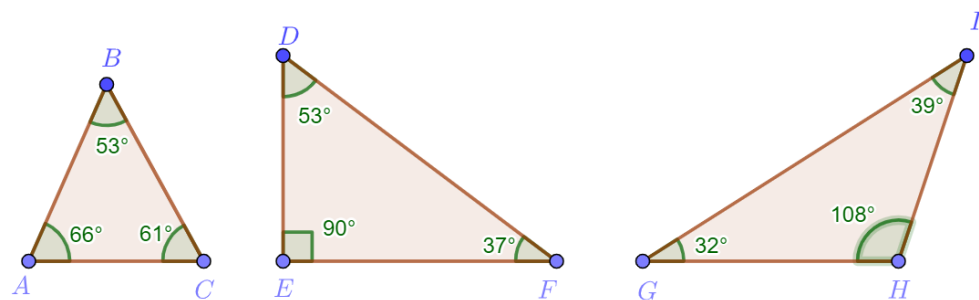


Figura 2.16: ΔABC é acutângulo, ΔDEF é retângulo e ΔGHI é acutângulo.

Uma observação importante que vamos fazer aqui, faz referência ao triângulo retângulo. Considere a Figura 2.16, em especial o ΔDEF , nele as medidas adjacentes ao ângulo de 90° são chamadas de catetos e o lado que se opõe ao ângulo reto é a hipotenusa.

2.2 Teorema de Pitágoras

Desde sua sistematização, muito se tem falado sobre esse importante resultado matemático. Suas inúmeras aplicações na sociedade justificam o destaque dado a seguir.

O Teorema de Pitágoras é um dos mais célebres e relevantes teoremas da história da matemática, desde os seus primórdios. De acordo com autores como [Boyer 1974] e [Costa 2003], registros da antiga Babilônia (ver Figura 2.17) já demonstravam o conhecimento de ternos pitagóricos, registrados na tábua Plimpton 322, indicando uma noção de triângulos retângulos entre 1800 e 1600 a.C.



Figura 2.17: Imagem Na Folha de S.Paulo, Marcelo Viana fala da Plimpton 322.

Disponível em: <https://impa.br/noticias/na-folha-de-s-paulo-marcelo-viana-fala-da-plimpton-322/>.

Teorema 2.3. (Teorema de Pitágoras) Em qualquer triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Uma interpretação geométrica para o **Teorema 2.3** pode ser vista na ilustração da Figura 2.18.

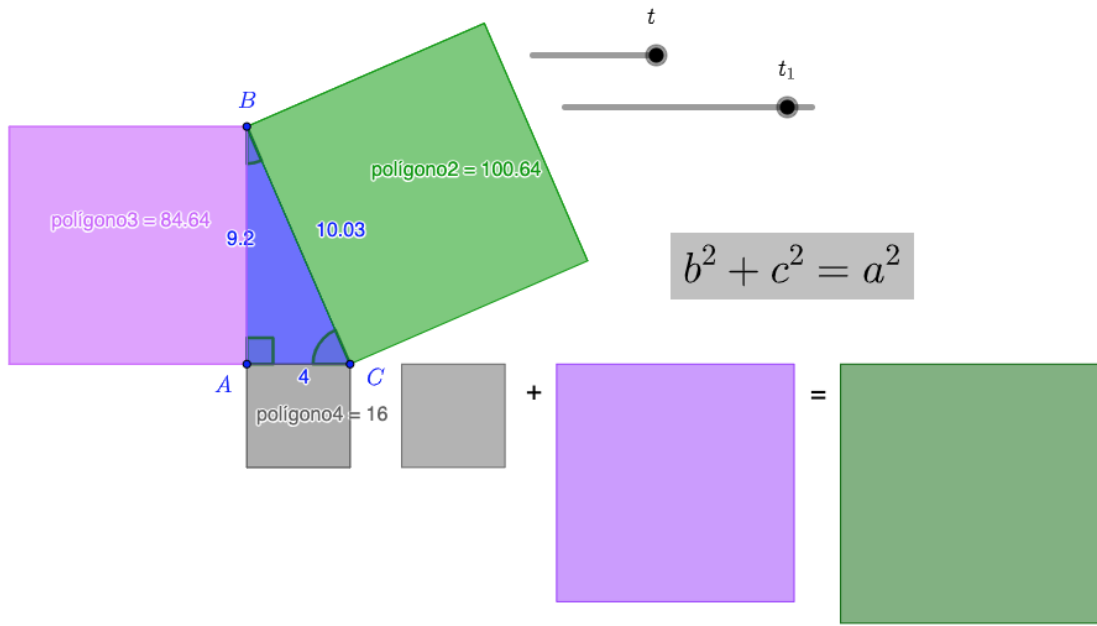


Figura 2.18: Ilustração animada do Teorema de Pitágoras.
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/rrw9mhqb>

Ressaltamos que a Figura 2.18 é uma adaptação dos autores Esteban Muñoz e Yela Laura (disponível em: <https://www.geogebra.org/m/vubbf7km>) que consideramos pertinentes.

Caso o leitor deseje se aprofundar no assunto, recomenda-se a leitura do material de [Alencar et al. 2022], no qual, junto a seus colaboradores, são apresentadas diversas situações em que o teorema é demonstrado de forma teórica e concisa. Apontamos aqui a importância de enunciar esse teorema, pelo fato de necessitarmos dos triângulos retângulos para definirmos as razões trigonométricas, principal objetivo desse trabalho.

2.3 Razões Trigonômétricas

Vamos considerar duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ de origem no ponto A . Tomemos um ponto B em $\overrightarrow{AB}$ de maneira que passe um segmento de reta perpendicular por B e cortando a semirreta $\overrightarrow{AC}$ em um ponto C . E sucessivamente consideremos segmentos de retas paralelos a $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{B_1C_1} \parallel \overrightarrow{B_2C_2}$.

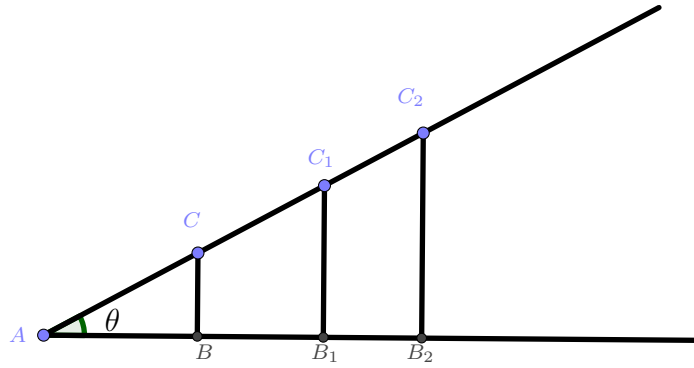


Figura 2.19: Representação da figura com as semirretas. Criado pelo autor com *Geogebra*.

Segundo a Figura 2.19 podemos observar os triângulos ABC , AB_1C_1 e AB_2C_2 que são semelhantes pelo Teorema de Tales³. Consequentemente podemos escrever as seguintes igualdades entre as razões

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \dots \quad (2.1)$$

Observe que as razões em (2.1) não dependem exclusivamente dos lados de cada triângulo e sim do ângulo θ . Portanto, podemos definir a relação trigonométrica seno do ângulo θ :

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \dots \quad (2.2)$$

É importante também observar que as igualdades em (2.2) se verificam apenas no intervalo $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

Aproveitando a mesma representação da Figura 2.19 vamos definir as próximas duas relações trigonométricas definida para $0^\circ < \theta < 90^\circ$: cosseno e tangente.

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}} = \dots \quad (2.3)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \dots \quad (2.4)$$

³O Teorema de Tales é um dos resultados fundamentais da geometria euclidiana e estabelece uma relação de proporcionalidade entre segmentos determinados por retas paralelas que interceptam duas ou mais transversais. Em sua forma clássica, o teorema afirma que: Se um feixe de retas paralelas intercepta duas transversais, então os segmentos determinados sobre essas transversais são proporcionais. Para maior aprofundamento veja a referência [Barbosa 1995]

Das relações apontadas anteriormente, decorrem duas identidades que são importante de discutir

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (2.5)$$

e

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}. \quad (2.6)$$

Para justificar (2.5) e (2.6), vamos considerar um triângulo retângulo $\triangle ABC$, como representado na figura 2.20.

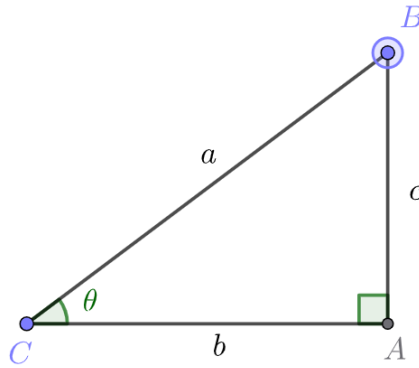


Figura 2.20: Triângulo retângulo $\triangle ABC$ criado pelo autor no GeoGebra.

Na Figura 2.20 podemos observar que $\operatorname{sen} \theta = \frac{c}{a}$, $\cos \theta = \frac{b}{a}$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{c}{b}$, substituindo essas igualdades no lado esquerdo da igualdade (2.5) e usando o teorema de Pitágoras que referente a Figura 2.20 diz que $a^2 = b^2 + c^2$, concluimos que

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Por outro lado,

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = \operatorname{tg} \theta$$

Apontamos elas como importantes devido a poder expressar o seno em função do cosseno e seno (vice versa) e expressar a tangente em função do seno e cosseno [Carmo, Morgado e Wagner 2001].

Proposição 2.4. Quando dois ângulos de medidas α e β são complementares ou seja $\alpha + \beta = 90^\circ$, então:

i) $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$;

ii) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$.

Demonstração. Para mostrar os dois itens, vamos primeiro considerar um triângulo retângulo $\triangle ABC$ apresentado na figura 2.21. Como $\hat{B}\hat{A}\hat{C} = 90^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$, logo os dois ângulos são complementares.

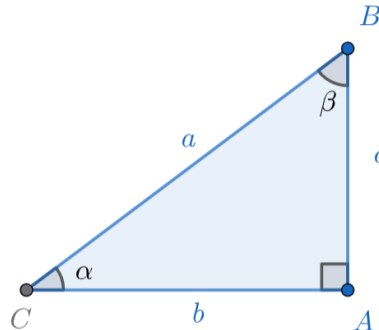


Figura 2.21: Triângulo retângulo $\triangle ABC$.

Por definição, temos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{a} \text{ e } \cos \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$$

e

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{b} \text{ e } \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

□

Esse resultado possui grande relevância, pois, ao conhecermos essa relação, torna-se possível determinar os valores das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, para ângulos no intervalo de 0° a 90° . Ademais, uma vez calculadas as razões trigonométricas para os ângulos situados entre $(0^\circ, 45^\circ)$, é possível estender esses cálculos aos ângulos complementares, localizados no intervalo de $(45^\circ, 90^\circ)$, garantindo assim a completa determinação das funções trigonométricas nesse domínio.

Vamos agora, mostrar os valores das relações trigonométricas de alguns ângulos que são importantes e facilitam cálculos de outros. Eles são conhecidos com ângulos notáveis e baseamos sua demonstração em triângulos que são conhecidos.

Seja um triângulo $\triangle ABC$ equilátero de lado medindo x , pois pela **Definição 6**, um triângulo equilátero possui três lados iguais e três ângulos internos de mesma medida ou seja cada ângulo mede 60° .

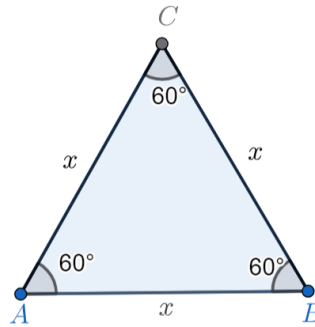


Figura 2.22: Triângulo equilátero de lado medindo x .

Tomemos o ponto D , como ponto médio do segmento AB e baixemos a perpendicular por C até D para forma o segmento CD . É possível observar que iremos formar dois triângulos retângulos, $\triangle CDA$ e $\triangle CDB$ como mostra a Figura 2.23.

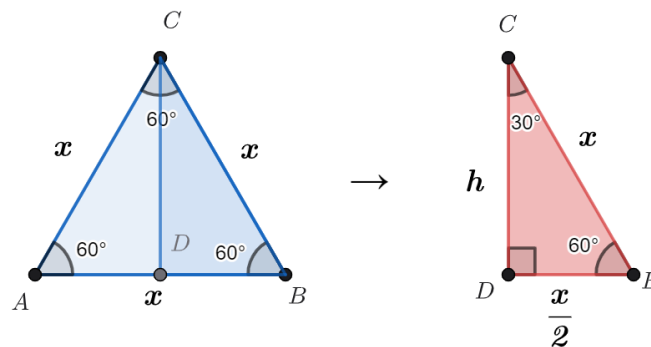


Figura 2.23: Representação do triângulo equilátero $\triangle ABC$ e do triângulo retângulo $\triangle CDB$.

Observando a Figura 2.23, podemos determinar h em função de x . Considere o teorema de Pitágoras em 2.3

$$\begin{aligned}
 x^2 &= h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\
 \Rightarrow h^2 &= x^2 - \frac{x^2}{4} \\
 \Rightarrow h^2 &= \frac{4x^2 - x^2}{4} \\
 \Rightarrow h^2 &= \frac{3x^2}{4} \\
 \Rightarrow h &= \sqrt{\frac{3x^2}{4}} \\
 \Rightarrow h &= \frac{x\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

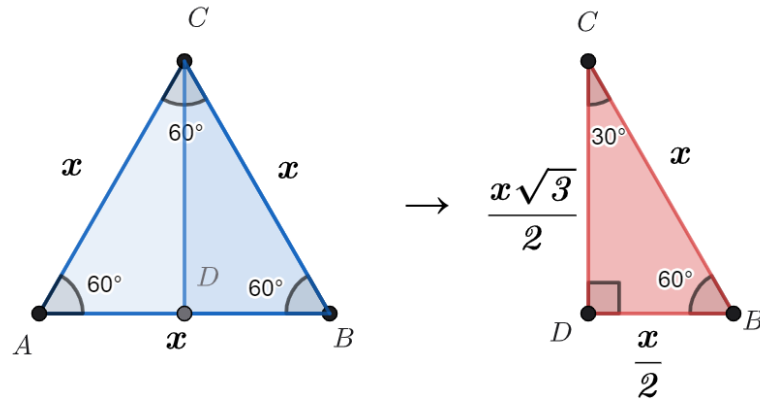


Figura 2.24: Triângulo com valor da altura dependendo de x .

Observando o ângulo de 30° na Figura 2.24, verificamos, respectivamente, pelas equações (2.2), (2.3) e (2.4) que:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}}}{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Analogamente observando o ângulo de 60° na Figura 2.24 concluimos que:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Logo para os ângulo de 30° e 60° os valores estão muito bem determinados.

Considere agora um triângulo $\triangle ABC$ retângulo isósceles de catetos medidos x . Observando a Figura 2.25 e aplicando o **Teorema 2.3** é possível calcular o valor de sua Hipotenusa.

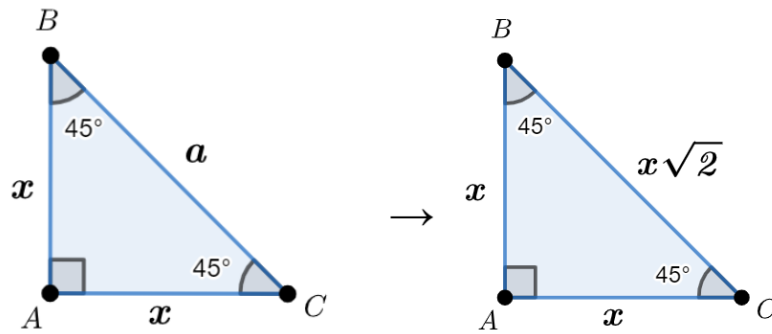


Figura 2.25: Triângulo retângulo isósceles de lados medindo x e hipotenusa a .

Por meio da representação na Figura 2.25 obtemos os respectivos valores dos sen , cos e tg para o ângulo notável de 45° :

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \text{tg } 45^\circ = 1.$$

Todos esses valores foram reunidos em uma tabela que apresenta os ângulos notáveis de 30° , 45° e 60° , ressaltando que também incluímos os valores correspondentes a 0° e 90° , da seguinte forma:

Ângulos notáveis					
	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\neq$

Figura 2.26: Organização dos valores de sen , cos , e tg .

2.4 Lei dos Cossenos

Teorema 2.5. (Lei dos Cossenos) Seja um triângulo $\triangle ABC$, onde $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e a medida do ângulo $\hat{BAC}$ sendo α . Então,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \quad (2.7)$$

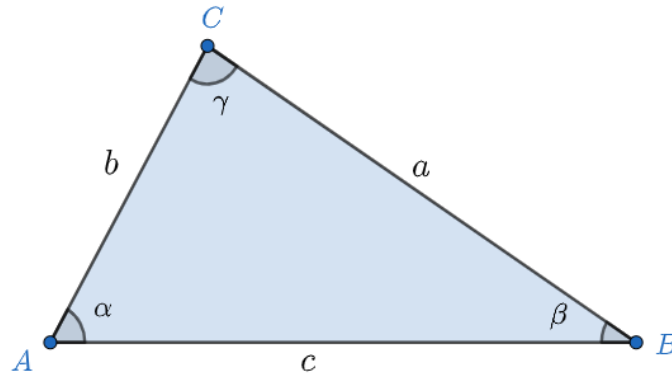
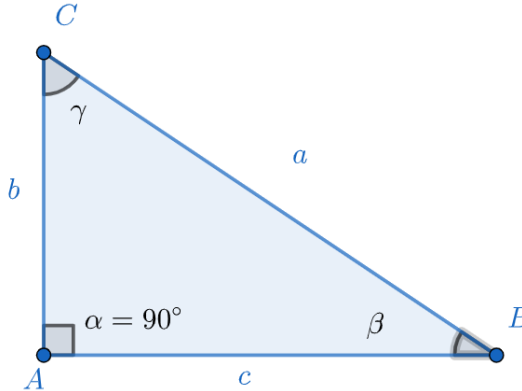


Figura 2.27: Lei dos cossenos.

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer. Vamos considerar 3 casos: 1) α é um ângulo reto; 2) α é um ângulo agudo; 3) α é um ângulo obtuso.

1º caso: Inicialmente se $\alpha = 90^\circ$ (Ver Figura 2.28), temos que $\cos 90^\circ = 0$, logo

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha &= a^2 \\ b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0 &= a^2 \\ b^2 + c^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Figura 2.28: Lei dos cossenos para $\alpha = 90^\circ$.

Por outro lado, como $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo em α , o **Teorema 2.3** garante que $b^2 + c^2 = a^2$.

2º caso: Seja agora, $\alpha > 90^\circ$ e D como pé da perpendicular baixada por C relativo ao seguimento AB e prolonguemos o segmento AB até D , como na Figura 2.29. Temos que $\overline{AD} = x$ e $\overline{CD} = h$ e aplicando o **Teorema 2.3** nos $\triangle DCA$ e $\triangle DBC$, temos

$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (x + c)^2$$

por meio das duas igualdades podemos isolar h^2 nas duas equações

$$h^2 = b^2 - x^2 \text{ e } h^2 = a^2 - (x + c)^2$$

logo pelas duas igualdades obtemos

$$\begin{aligned} a^2 - (x + c)^2 &= b^2 - x^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 - x^2 + (x + c)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 - x^2 + x^2 + 2xc + c^2. \end{aligned}$$

ou seja

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2xc \quad (2.8)$$

Como pela nossa representação $\alpha > 90^\circ$, $\cos \widehat{CAB} = -\cos(180^\circ - \widehat{CAB}) = -\cos \widehat{DAC} = -\cos \alpha$. Por outro lado, no $\triangle DCA$, note que $\cos \widehat{DAC} = \frac{x}{b}$, donde $x = b \cos \widehat{DAC}$ ou seja

$$x = -b \cos \alpha. \quad (2.9)$$

E por fim, substituindo x obtido em (2.9) em (2.8) teremos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (2.10)$$

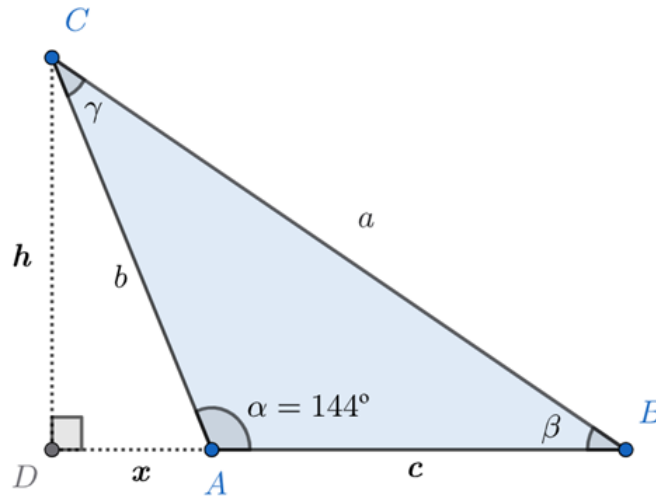


Figura 2.29: Lei dos cossenos para $\alpha > 90^\circ$.

3º caso: Seja agora, $\alpha < 90^\circ$ e D o pé da perpendicular relativa ao lado AB passando por C , onde $\overline{CD} = h$ e $\overline{AD} = x$.

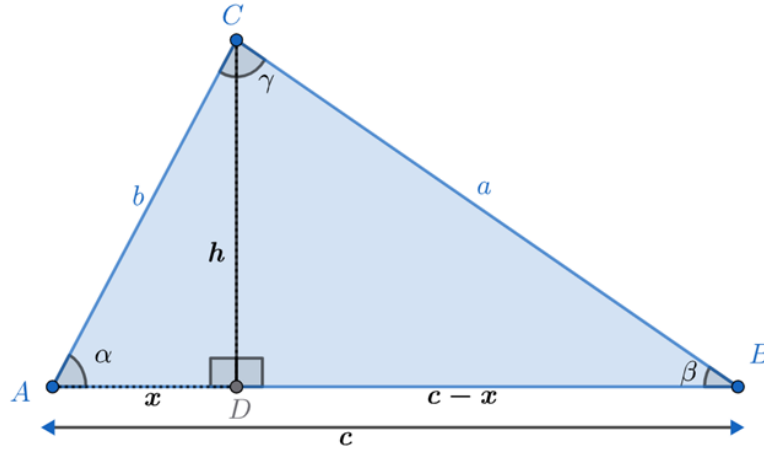


Figura 2.30: Lei dos cossenos para $\alpha < 90^\circ$.

Como $\overline{HB} = c - x$, vamos aplicar o **Teorema 2.3** nos triângulos $\triangle DCA$ e $\triangle DBC$, respectivamente é possível observar as duas situações

$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

novamente vamos isolar h^2 nas duas igualdades

$$h^2 = b^2 - x^2 \text{ e } h^2 = a^2 - (c - x)^2$$

e portanto, pelas duas igualdades obtemos

$$\begin{aligned} a^2 - (c - x)^2 &= b^2 - x^2 \Leftrightarrow a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como o $\triangle DCA$ é retângulo, temos que $\cos \alpha = \frac{x}{b}$, portanto

$$x = b \cos \alpha. \quad (2.12)$$

Pela igualdade (2.12), podemos substituir o valor de x em (2.11) concluimos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. $\square$

Podemos ainda, verificar todas essas casos reunidos no material elaborado no GeoGebra cujo link se encontra na Figura 2.31. Deslizando o controle k é possível identificar os casos aqui apontados e demonstrados para a Lei dos Cossenos.

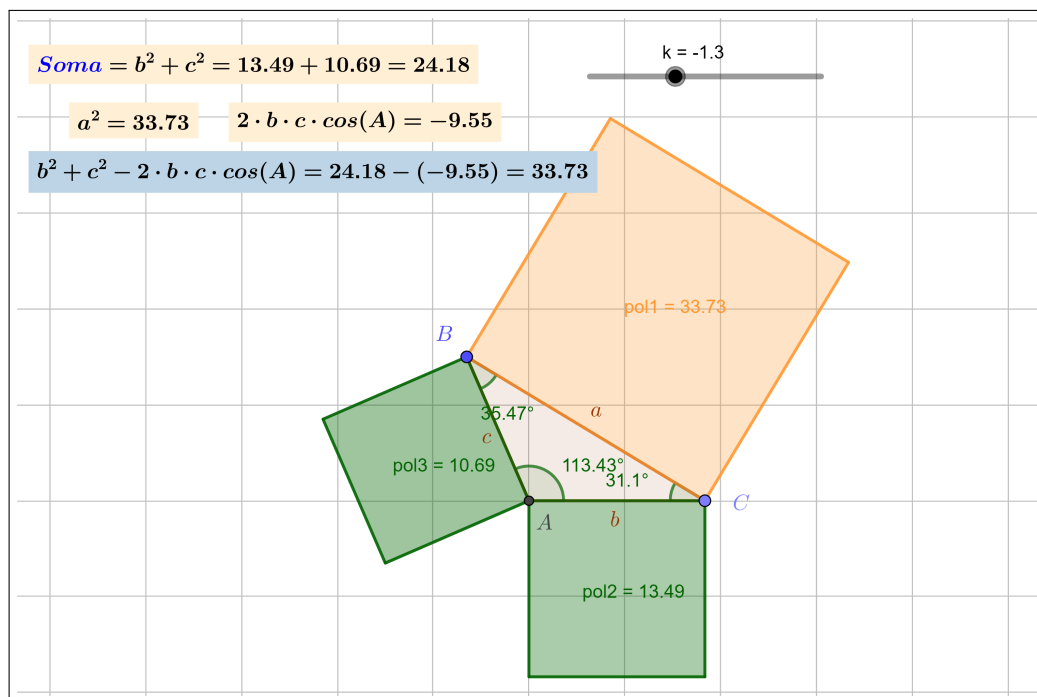


Figura 2.31: Teorema de Pitágoras e Lei dos Cossenos.
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/uct2bqf>

2.5 Lei dos Senos

Teorema 2.6. (Lei dos Senos) Considere um triângulo $\triangle ABC$ com lados AB , AC e BC de medidas, respectivamente, c , b e a . Se R é a medida do raio do círculo circunscrito a ABC , então:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \theta} = 2R. \quad (2.13)$$

Demonstração. Seja uma circunferência qualquer de centro O e um $\triangle ABC$ inscrito. Seja o Ponto D sobre a circunferência, de forma que BD seja diâmetro conforme descrito na Figura 2.32.

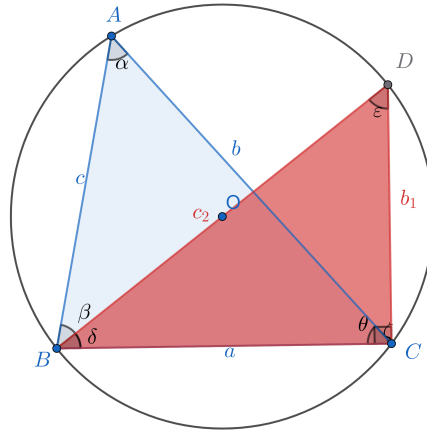


Figura 2.32: Representação para Lei dos Senos 2.6.

Observe que $D \neq A$ e $C \neq C$, pois caso contrário o $\triangle ABC$ seria retângulo por um de seus lados ser diâmetro na circunferência. Dessa forma, $\triangle DBC$ é retângulo em C , logo podemos obter:

$$\text{sen } \varepsilon = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \varepsilon} = 2R.$$

Note que, $\alpha = \varepsilon$, devido a serem ângulos inscritos na mesma circunferência, subentendem o mesmo arco BC . Portanto temos:

$$\alpha = \frac{1}{2}B\hat{O}C \text{ e } \varepsilon = \frac{1}{2}B\hat{O}C \Rightarrow \alpha = \varepsilon$$

Logo

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{a}{\text{sen } \varepsilon} = 2R. \quad (2.14)$$

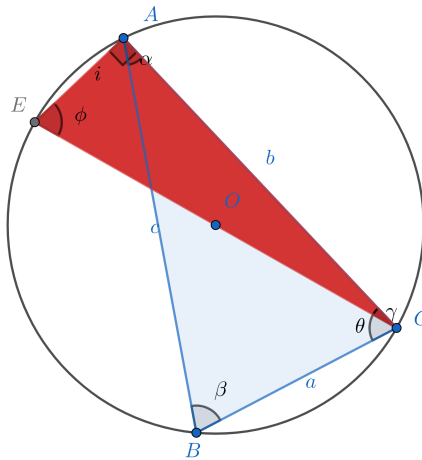


Figura 2.33: Segunda representação para Lei dos Senos 2.6.

Da mesma forma que apontamos anteriormente em 2.14, vamos verificar agora para o ângulo β na Figura 2.33. Desenvolvendo raciocínio análogo como em θ , é trivial notar que

$$\sin \phi = \frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin \phi} = 2R.$$

Como $\phi = \beta$, observe que o mesmo segmento de reta AC pertence aos $\triangle ABC$ e $\triangle CEA$, logo subentendem o mesmo arco e temos

$$\frac{a}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \phi} = 2R. \quad (2.15)$$

Observe a Figura 2.34 e desenvolvendo o mesmo raciocínio feito em 2.14 e 2.15, concluímos que

$$\frac{c}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \rho} = 2R. \quad (2.16)$$

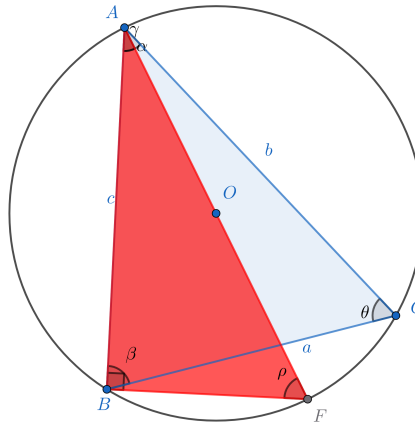


Figura 2.34: Terceira representação para Lei dos Senos 2.6.

E por fim, das igualdades (2.14), (2.15) e (2.16), podemos concluir que

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \theta} = 2R.$$

□

2.6 Ciclo Trigonométrico

Para falarmos do ciclo trigonométrico precisamos primeiro de alguns conceitos básicos para sustentar nossas colocações.

Definição 8. Seja uma circunferência de centro O e um ângulo central $\widehat{AOB}$, com A e B , pontos que pertencem ao ângulo e a circunferência.

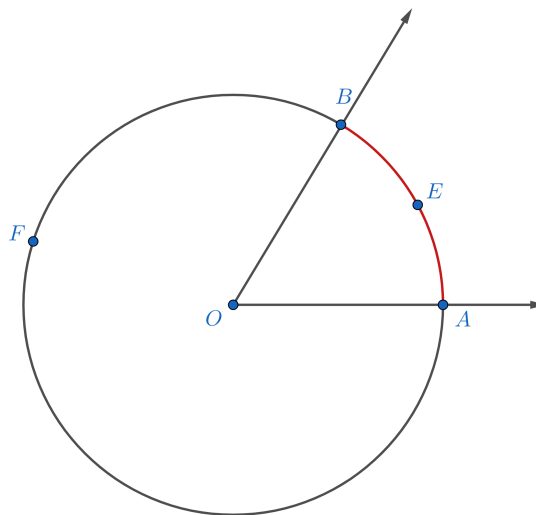


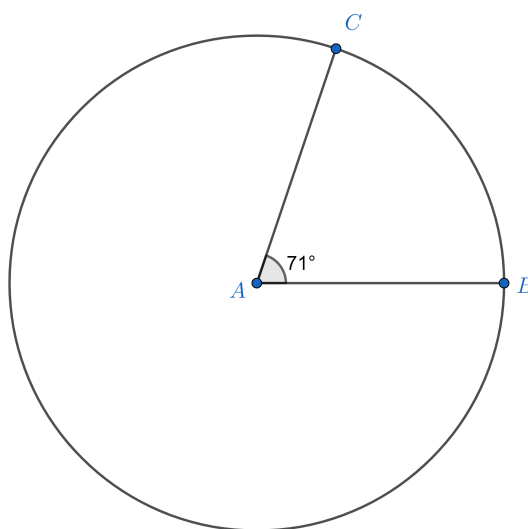
Figura 2.35: Representação dos arcos $\widehat{AEB}$ e $\widehat{AFB}$.

Como é possível observar na Figura 2.35 ficam subentendido dois arcos, $\widehat{AEB}$ e $\widehat{AFB}$. O menor e o maior arco respectivamente.

Os arcos para não ficarem confusos suas medidas, vamos adotar aqui duas unidades básicas: O **Grau** e o **Radiano**.

Definição 9. O grau é um arco unitário que representa $\frac{1}{360}$ da circunferência contém o arco a ser mensurado. Usamos o símbolo $^\circ$ para representar um arco.

Exemplo 2.7. Observe o arco $\widehat{AB}$ cuja sua medida é dada por $m \widehat{BC} = 71^\circ$



É interessante ressaltar que a medida de um arco não depende do raio da circunferência, fator que possibilita entender arcos semelhantes subentendem o mesmo ângulo central.

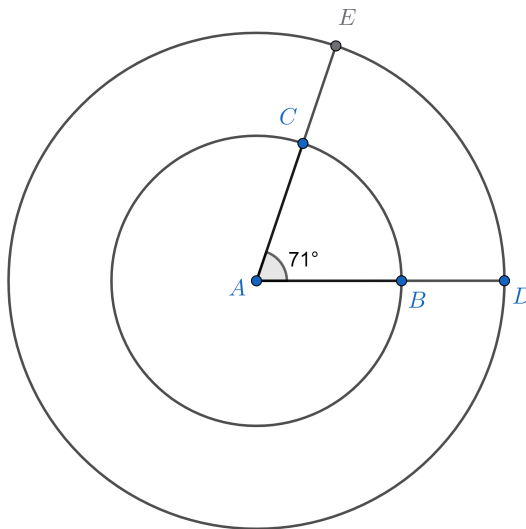
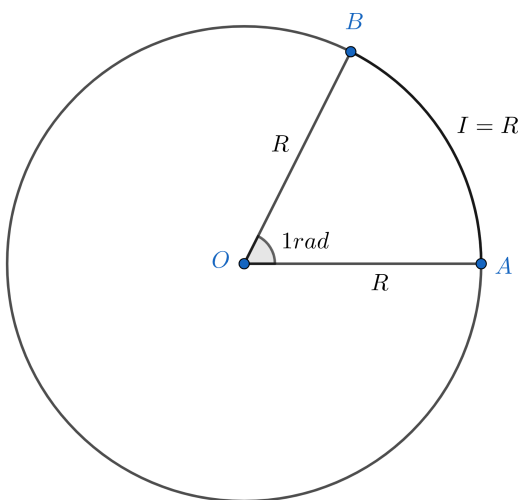


Figura 2.36: Arcos semelhante.

Como pode-se ver, na Figura 2.36 os arcos $(\widehat{BC})$ e $(\widehat{DE})$ subtendem o mesmo ângulo 71° .

Definição 10. vamos definir aqui o radiano como o arco cujo comprimento é igual ao raio da própria circunferência.



Podemos observar que como $1rad = R$ e $C = 2\pi R$, então

$$360^\circ = 2\pi rad \quad (2.17)$$

ou ainda

$$180^\circ = \pi rad \quad (2.18)$$

Exemplo 2.8. Converta 30° e 60° em radianos.

1^o) Sabemos que por definição $360^\circ = 2\pi rad$, então

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} rad \Rightarrow 30^\circ = \frac{30\pi}{180} rad = \frac{\pi}{6} rad$$

2^o) Da mesma forma que no anterior, temos por definição $360^\circ = 2\pi rad$, então

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} rad \Rightarrow 60^\circ = \frac{60\pi}{180} rad = \frac{\pi}{3} rad$$

Exemplo 2.9. Converta $\frac{\pi}{6} rad$ e $\frac{\pi}{3} rad$ em graus.

1^o) Sabemos que $180^\circ = \pi rad$, logo

$$\frac{\pi}{6} rad = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

2^o) E por fim, sabemos que $180^\circ = \pi rad$, logo

$$\frac{\pi}{3} rad = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Definição 2.10. (Ciclo Trigonométrico) Definiremos como um círculo unitário, onde temos definido a origem A que será comum para todos os arcos. Na trigonometria, adotaremos a convenção orientada no sentido anti-horário para positiva e horário para negativo (Veja Figura 2.37).

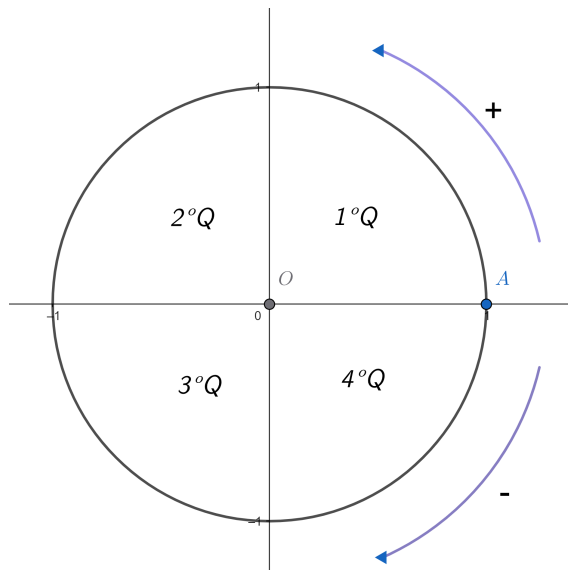


Figura 2.37: Sentido anti-horário e horário do ciclo orientado.

Exemplo 2.11. Sejam os arcos de 148° e -60° (Ver Figura 2.38). O primeiro está representado na orientação anti-horária (Positiva) e o segundo está no sentido horário (Negativo).

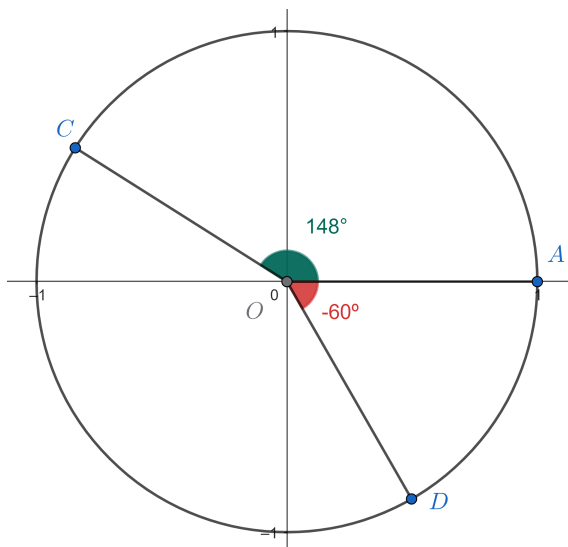


Figura 2.38: Representação dos arcos nos dois sentidos.

Definição 2.12. (Arcos côngruos) Dois arcos são côngruos se suas medidas diferem um do outro por um múltiplo de 360° . Ressaltado que, no círculo trigonométrico arcos que são côngruos possuem a mesma extremidade, devido a origem ser a mesma para todos.

Observe que $\alpha \equiv \theta$, se e somente se, $\alpha - \theta = 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ ou de forma equivalente $\alpha \equiv \theta$, se e somente se, $\alpha - \theta = 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$

Exemplo 2.13. Consideremos os arcos $\alpha = 60^\circ$, $\theta = 420^\circ$, $\delta = 780^\circ$ e $\beta = -300^\circ$

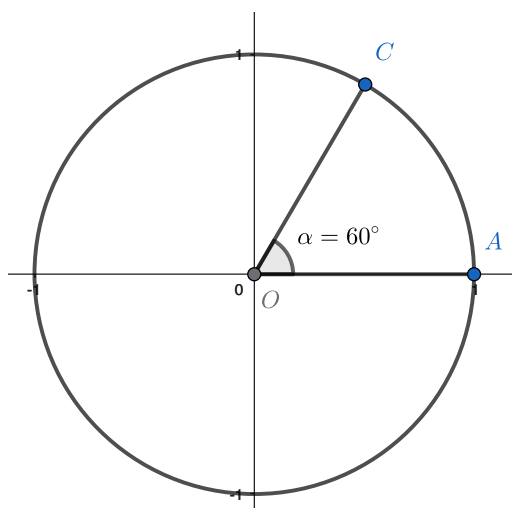


Figura 2.39: Arco côngruo aos arcos dados.

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\theta = 420^\circ = 60^\circ + 360^\circ$$

$$\delta = 780^\circ = 60^\circ + 2 \cdot 360^\circ$$

$$\beta = -300^\circ = 60^\circ - 1 \cdot 360^\circ.$$

Logo, todos os arcos α , θ , δ e β , possuem a mesma extremidade C e origem A . Todos diferindo pela quantidade de voltas positivas ou negativas.

Baseado nas ideias de arcos, vamos agora definir relações trigonométricas no ciclo trigonométrico.

Definição 2.14. Dado um ciclo unitário e um arco $\widehat{AB}$ cuja medida é θ , denominaremos de cosseno e seno de θ a abscissa e ordenada de B , respectivamente. (Veja a Figura 2.40)

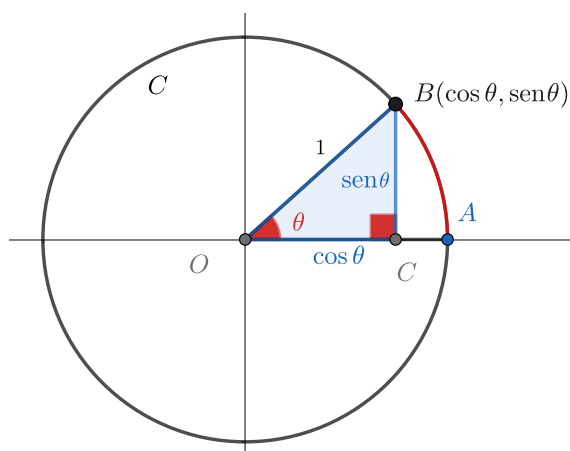


Figura 2.40: Representação dos arcos definidos para $0^\circ < \theta < 360^\circ$.

Definição 2.15. Dado um ciclo unitário e um arco $\widehat{AB}$ cuja medida é θ , denominaremos de tangente de θ a razão entre a abscissa OC e a ordenada OD , resultante do prolongamento do segmento OB , de forma que este intersecte o segmento AE . O segmento AE representa geometricamente essa construção. (Veja a Figura 2.41)

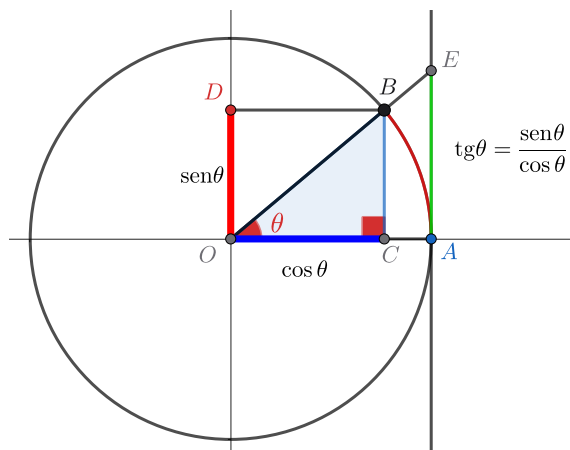


Figura 2.41: Representação da tangente para os arcos definidos para $0^\circ < \theta < 360^\circ$.

Uma observação importante, apresentada na Figura 2.41, é que também podemos considerar a tangente sendo a razão entre as medidas do seno e do cosseno do ângulo, pois os triângulos $\triangle OCB$ e $\triangle OAE$.

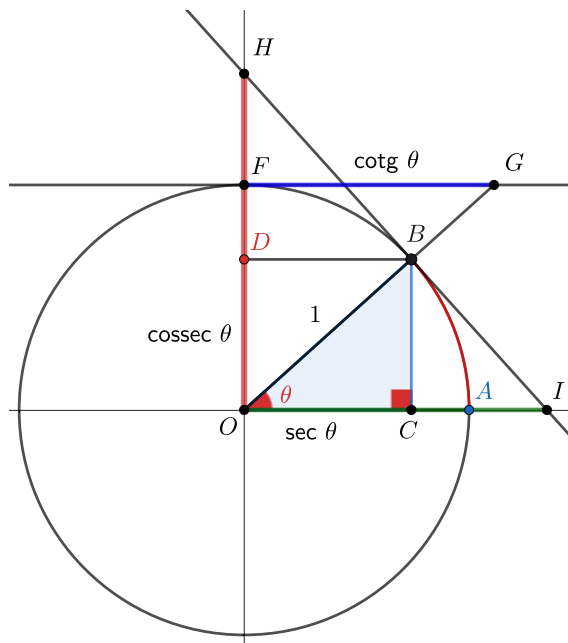


Figura 2.42: Representação da secante, cossecante e cotangente definidos de $0^\circ < \theta < 360^\circ$.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/dw9qetns>

Observação 2.16. Observando a Figura 2.42 concluímos que:

A) O triângulo $\triangle OIB$ é semelhante ao triângulo $\triangle OBC$, logo

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}},$$

como $\overline{OB} = 1$ e $\overline{OC} = \cos \theta$, concluímos que

$$\overline{AI} = \frac{1}{\cos \theta}.$$

B) Novamente temos que triângulo $\triangle OBH$ é semelhante ao triângulo $\triangle OCB$, assim

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{CB}},$$

ou seja

$$\overline{OH} = \frac{1}{\sin \theta}.$$

C) Analogamente como o triângulo $\triangle OGF$ é semelhante ao triângulo $\triangle OCB$ segue que

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CB}},$$

portanto

$$\overline{FG} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Os itens A) B) e C) da Observação 2.16 nos motiva dar a seguinte definição.

Definição 2.17. Dado um circo unitário e um arco $\widehat{AB}$ cuja medida é θ , Definimos:

- i) $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, com $\theta \neq 90^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$.
- ii) $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, com $\theta \neq 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$.
- iii) $\cotg \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, com $\theta \neq 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$.

Como apresentado na **Definição 2.17** e Figura 2.42, podemos notar que a secante é o segmento de reta que esta representado em verde, a cossecante em vermelho e a cotangente em cor azul.

Motivados pela **Definição 2.12**, iremos abordar sucintamente como os valores das relações trigonométricas seno, cosseno e tangente se comportam no 2º, 3º e 4º quadrantes.

1º caso: θ pertence ao segundo quadrante, ou seja, $90^\circ < \theta < 180^\circ$ / $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$: Para ilustrar a ideia geral, vamos considerar um arco com extremidade no segundo quadrante, conforme mostrado na Figura 2.43. Considere uma reta qualquer passando por B e paralela ao eixo x , e a construção de dois triângulos $\triangle COB$ e $\triangle C'OB'$. Nessa representação, é possível observar que foram criados dois arcos: arco AB , com medida d , e o arco $A'B'$ medindo e . Por construção e pela congruência de triângulos, ambos os arcos possuem a mesma medida. Logo, podemos calcular qualquer valor das relações trigonométricas definidas, observando que a projeção do arco no segundo quadrante para o primeiro será dada por $180^\circ - \theta$ ou, equivalentemente, $\pi - \theta$.

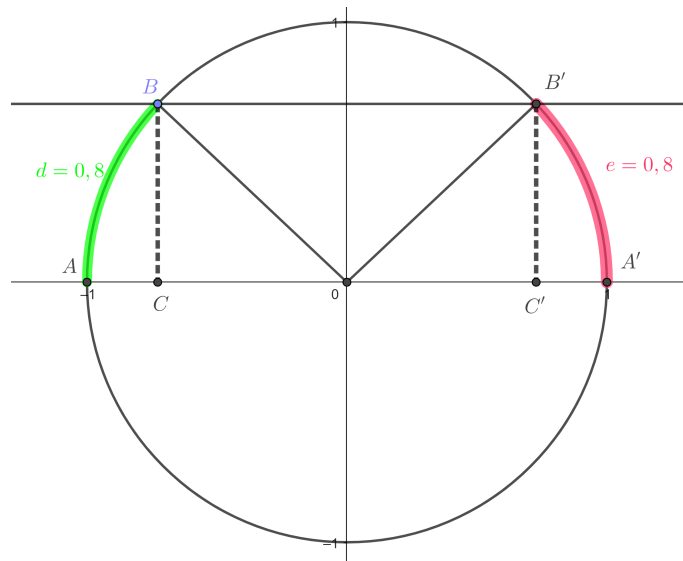


Figura 2.43: Redução do segundo quadrante para o primeiro.

Exemplo 2.18. Consideremos o arco θ de forma que $90^\circ < \theta < 180^\circ$. Determine uma expressão para podemos calcular sen , cos e tg de θ .

Solução: Vamos observar a princípio que foi exposto anteriormente que a projeção de θ pelo eixo das ordenadas no primeiro quadrante é dada por $180^\circ - \theta$, logo teremos
a) $\text{sen}(\theta) = \text{sen}(180^\circ - \theta)$ (Observando que o eixo dos senos é positivo no segundo quadrante)

b) $\text{cos}(\theta) = -\text{cos}(180^\circ - \theta)$ (Observando que o eixo dos cossenos é negativo no segundo quadrante).

c) Por fim, $\text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)} = \frac{\text{sen}(180^\circ - \theta)}{-\text{cos}(180^\circ - \theta)} = -\text{tg}(180^\circ - \theta)$

No **Exemplo 2.18**, junto as representações das Figuras 2.42 e 2.43 fica evidente que o valores no segundo quadrante estão bem definidos e acessíveis de serem todos calculados.

As mesmas ideias podem ser definidas para quando θ estiver no terceiro quadrante e para o quarto.

2º caso: θ pertence ao terceiro quadrante, ou seja, $180^\circ < \theta < 270^\circ$ / $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Observando a Figura 2.44, podemos inferir que para o cálculo de qualquer relação trigonométrica nesse quadrante será dada por $\theta - 180^\circ$ ou, equivalentemente, $\theta - \pi$ que resultará na projeção do arco no primeiro

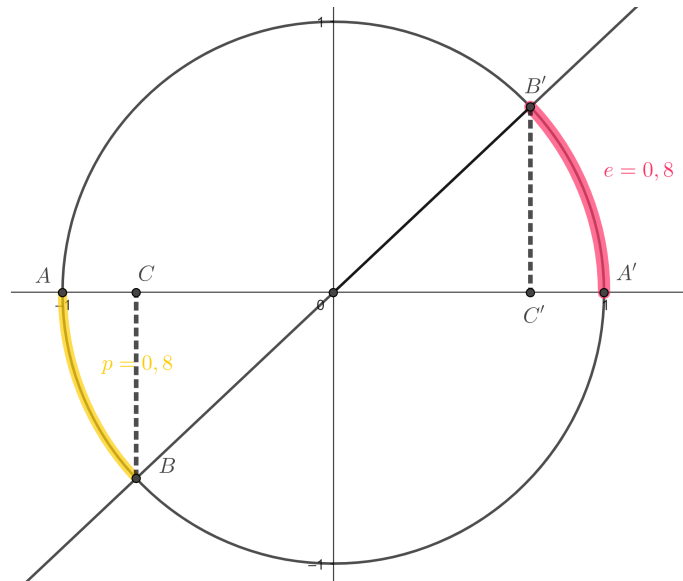


Figura 2.44: Redução do terceiro quadrante para o primeiro.

Exemplo 2.19. Consideremos o arco $\theta = 225^\circ$. Determine o valor de sen , cos e tg de θ .

Solução: Vamos observar a princípio que foi exposto anteriormente que a projeção de θ pela origem no primeiro quadrante é dada por $\theta - 180^\circ$ e que segundo a Figura 2.44, os valores do seno e cosseno são negativos, logo teremos

$$\text{a) } \text{sen}(225^\circ) = -\text{sen}(225^\circ - 180^\circ) = -\text{sen}(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{b) } \text{cos}(225^\circ) = -\text{cos}(225^\circ - 180^\circ) = -\text{cos}(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) Por fim, } \text{tg}(225^\circ) = \frac{\text{sen}(225^\circ)}{\text{cos}(225^\circ)} = \frac{-\text{sen}(225^\circ - 180^\circ)}{-\text{cos}(225^\circ - 180^\circ)} = \frac{-\text{sen}(45^\circ)}{-\text{cos}(45^\circ)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

É importante ressaltar que, no terceiro quadrante, os valores das razões trigonométricas calculadas apresentam seno e cosseno negativos, enquanto a tangente é positiva, assim como ocorre no primeiro quadrante.

3º caso: θ pertence ao quarto quadrante, ou seja, $270^\circ < \theta < 360^\circ$ / $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$. Analogamente, como nos casos anteriores e baseado na Figura 2.45, é fácil notar que, o cálculo de qualquer valor das funções trigonométricas será fornecido por $360^\circ - \theta$ ou $2\pi - \theta$.

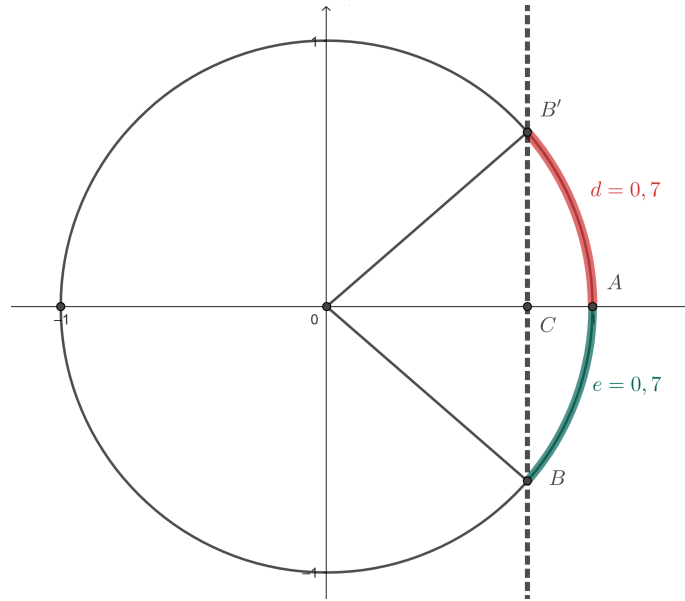


Figura 2.45: Redução do quarto quadrante para o primeiro.

Exemplo 2.20. Consideremos o arco $\theta = 330^\circ$. Qual o valor de sen , cos e tg de θ ?

Solução: Vamos observar a princípio que foi exposto anteriormente que a projeção de θ no primeiro quadrante é dada por $360^\circ - \theta$ e que segundo a Figura 2.45, o valor do seno é negativo e cosseno positivo, logo teremos

$$\text{a) } \text{sen}(330^\circ) = -\text{sen}(360^\circ - 330^\circ) = -\text{sen}(30^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \text{cos}(330^\circ) = \text{cos}(360^\circ - 330^\circ) = \text{cos}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Por fim, } \text{tg}(330^\circ) &= \frac{\text{sen}(330^\circ)}{\text{cos}(330^\circ)} = \frac{-\text{sen}(360^\circ - 330^\circ)}{\text{cos}(360^\circ - 330^\circ)} = \frac{-\text{sen}(30^\circ)}{\text{cos}(30^\circ)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

2.7 Fórmulas de adição e subtração

Vamos inicialmente definir a fórmula para seno, cosseno e tangente da soma. Vamos tomar uma circunferência unitária e a construção a inicial dos triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle AGE$, retângulos em D e G . No triângulo $\triangle AFE$ podemos observar que estão representadas $AF = \text{cos}(\theta + \beta)$ e $FE = \text{sen}(\theta + \beta)$ e por fim, $AE = 1$. Por construção vamos considerar convenientemente três triângulos semelhantes $\triangle AIG \sim \triangle ADC \sim \triangle EKG$ (Ver Figura 2.46) e vamos tentar mostrar o que desejamos.

i) Considere os triângulo $\triangle AIG \sim \triangle ADC$

$$\frac{AI}{AG} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{AI}{\cos \beta} = \frac{\cos \theta}{1} \Rightarrow AI = \cos \theta \cdot \cos \beta \quad (2.19)$$

$$\frac{AG}{IG} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{\cos \beta}{FK} = \frac{1}{\sin \theta} \Rightarrow FK = \sin \theta \cdot \cos \beta \quad (2.20)$$

ii) Considere agora os triângulo $\triangle ADC \sim \triangle EKG$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{EK}{EG} \Rightarrow \frac{\cos \theta}{1} = \frac{EK}{\sin \beta} \Rightarrow EK = \cos \theta \cdot \sin \beta \quad (2.21)$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{EG}{KG} \Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \beta}{FI} \Rightarrow FI = \sin \theta \cdot \sin \beta \quad (2.22)$$

1) Seno da Soma: das afirmações baseadas na Figura 2.46, afirmamos que

$$\sin(\theta + \beta) = FE \Rightarrow$$

Por (2.20) e (2.21) temos que

$$FE = FK + EK \Rightarrow$$

$$\sin(\theta + \beta) = \sin \theta \cdot \cos \beta + \cos \theta \cdot \sin \beta \quad (2.23)$$

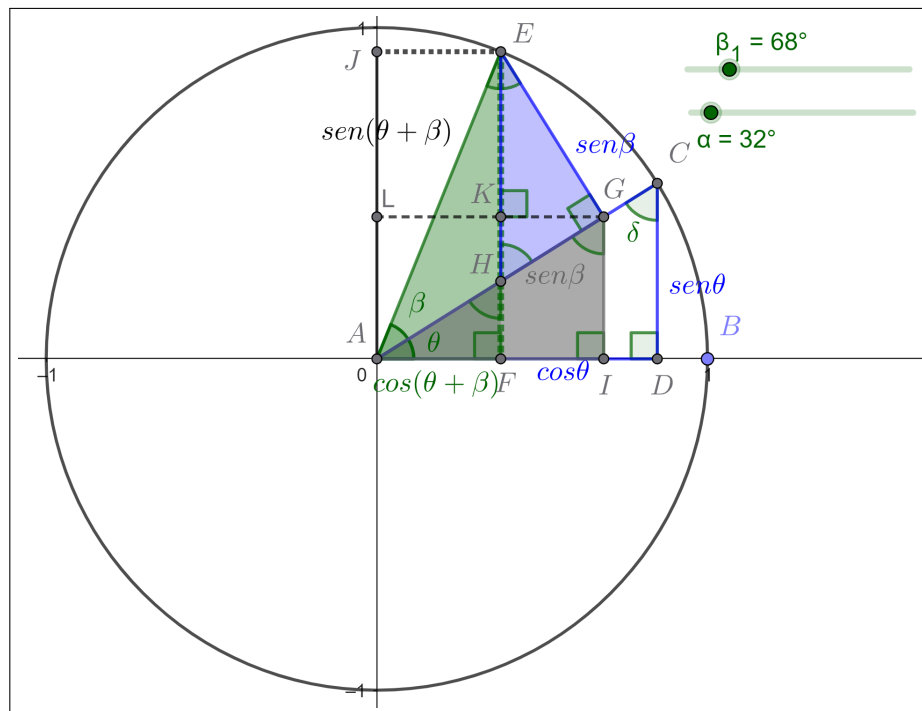
2) Cosseno da soma: por outro lado temos que

$$\cos(\theta + \beta) = AF \Rightarrow$$

Por (2.19) e (2.22), podemos afirmar que

$$AF = AI - FI \Rightarrow$$

$$\cos(\theta + \beta) = \cos \theta \cdot \cos \beta - \sin \theta \cdot \sin \beta \quad (2.24)$$

Figura 2.46: Representação para soma dos ângulos θ e β .

Para subtração, vamos tomar um atalho considerando para os dois casos anteriores a colocação de $\theta - \beta$ ou melhor $[\theta + (-\beta)]$. Logo, teremos

3) Seno da diferença

$$\text{sen}[\theta + (-\beta)] = \text{sen} \theta \cdot \cos(-\beta) + \cos \theta \cdot \text{sen}(-\beta) \Rightarrow$$

$$\cos(-\beta) = \cos \beta \text{ e } \text{sen}(-\beta) = -\text{sen} \beta \Rightarrow$$

$$\text{sen}(\theta - \beta) = \text{sen} \theta \cdot \cos \beta - \cos \theta \cdot \text{sen} \beta \quad (2.25)$$

4) Cosseno da diferença

$$\cos[\theta + (-\beta)] = \cos \theta \cdot (-\cos \beta) - \text{sen} \theta \cdot (-\text{sen} \beta) \Rightarrow$$

$$\cos(-\beta) = \cos \beta \text{ e } \text{sen}(-\beta) = -\text{sen} \beta \Rightarrow$$

$$\cos(\theta - \beta) = \cos \theta \cdot \cos \beta + \text{sen} \theta \cdot \text{sen} \beta \quad (2.26$$

Dividindo essa última igualdade por $\cos \theta \cdot \cos \beta$ ($\cos \theta \neq 0$ e $\cos \beta \neq 0$), ficaremos com

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta + \beta) &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \theta \cdot \cos \beta}{\cos \theta \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \theta \cdot \operatorname{sen} \beta}{\cos \theta \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \theta \cdot \cos \beta}{\cos \theta \cdot \cos \beta} - \frac{\operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \beta}{\cos \theta \cdot \cos \beta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta}{\cos \theta \cos \beta}} \Rightarrow \\ \operatorname{tg}(\theta + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} \beta} \end{aligned} \quad (2.27)$$

6) Tangente da diferença: analogamente se fizermos o mesmo processo para $\theta - \beta$, $\cos(\theta - \beta) \neq 0$ e $\cos \theta \cdot \cos \beta$ ($\cos \theta \neq 0$ e $\cos \beta \neq 0$), chegaremos depois de desenvolver todas as operações em

$$\operatorname{tg}(\theta - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (2.28)$$

2.8 Funções Trigonométricas

Seguindo as ideias anteriores, vamos falar um pouco sobre as funções periódicas antes de definir as trigonométricas. Iremos priorizar nesse momento essa característica por considerar necessária sua apresentação, devido as funções trigonométricas possuírem comportamentos que são periódicos.

Definição 2.21. Seja uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é periódica se existir um número real T não nulo tal que, para $x \in \mathbb{R}$, temos $x + T \in \mathbb{R}$ e

$$f(x + T) = f(x)$$

Cabe ressaltar da definição acima, sendo satisfeita a igualdade, há a necessidade $x \in \mathbb{R}$. E quando um valor mínimo positivo existir para T , diremos que ele representa o período dessa função.

Exemplo 2.22. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Onde $f(x) = 3$. É possível notar que para quaisquer valores de x e T a condição é satisfeita. De fato, como f é constante temos que $f(x + T) = f(x)$ é satisfeita. Apesar de não ser possível determinar seu período T , sua lei de formação mostra que ela é periódica.



Figura 2.47: Representação gráfica da função $f(x) = 3$.

Uma observação que deixamos aqui é, nem toda função periódica possui período, como é o caso apresentado no exemplo e representada na Figura 2.47.

Exemplo 2.23. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica. Determine seu período. (Ver Figura 2.48)

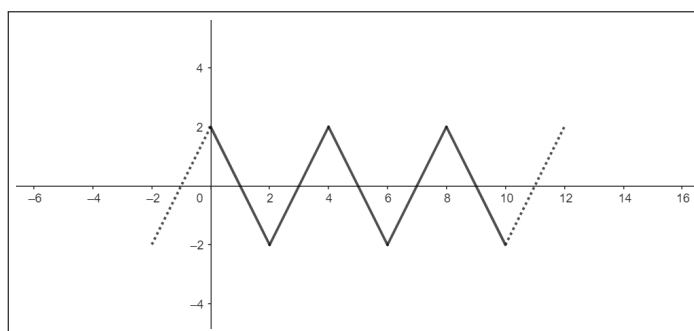


Figura 2.48: Representação da função do Exemplo 3.12.

Note que a função ela está se repetindo o mesmo comportamento de 4 em 4 em seu domínio. É fácil observar que $f(x + 4) = f(x)$, pelo fato de que

$$f(0) = f(4) = 2$$

$$f(1) = f(5) = 0$$

$$f(2) = f(6) = -2$$

Observando as três igualdades acima e a representação da Figura 2.48, deixa evidente que a função apresentada no exemplo é periódica e que seu período $T = 4$.

Definição 2.24. (Função Seno) Dado um número real x , e seja sua imagem no ciclo trigonométrico. Determinamos seno de x como a ordenada do ponto B ou seja, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a função como $f(x) = \text{sen}(x) = OD$ (veja Figura 2.49).

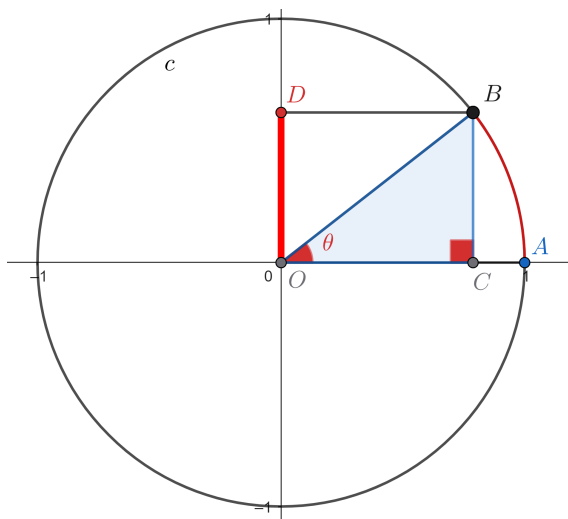


Figura 2.49: Ordenada de B dado pelo valor OD .

O gráfico da função seno é chamado de senoide. Para mostrar sua caracterização temos a Figura 2.50 mostra a relação existente entre o arco e o valor aplicado na função. Na figura, também é possível caso o leitor queira e ache interessante verificar a representação da senoide definida de $0^\circ < x < 360^\circ$.

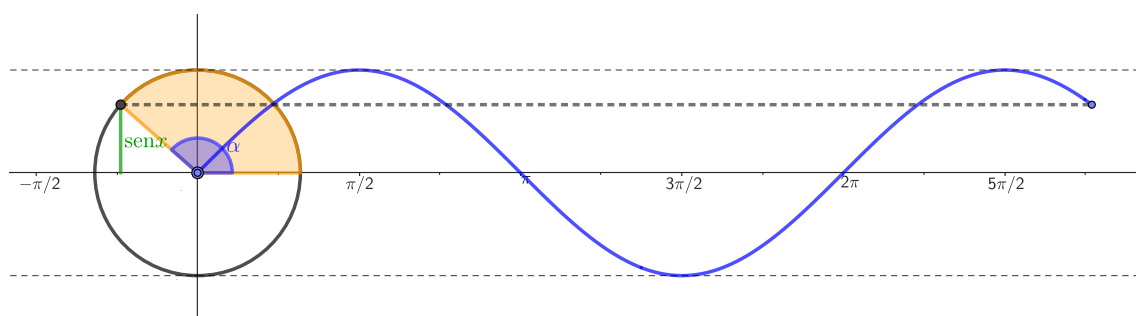


Figura 2.50: Gráfico da função seno.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/aehsfcg3>

Como vimos na **Definição 2.21** a função seno é periódica e portanto, existe pelo menos um valor real que satisfaça a expressão $\sin(x + T) = \sin(x)$, então $T = 2\pi$.

Definição 2.25. (Função Cosseno) Dado um número real x , e seja sua imagem no ciclo trigonométrico. Determinamos cosseno de x como a abscissa do ponto B ou seja, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a função como $f(x) = \cos(x) = OC$ (Veja Figura 2.51).

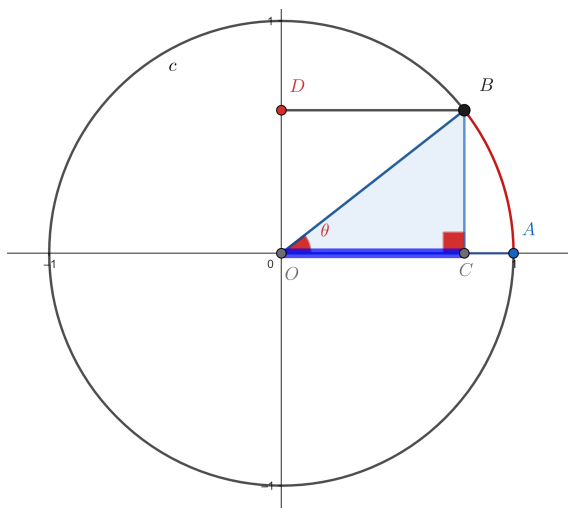


Figura 2.51: Abscissa de B dada pelo valor de OC .

Da mesma forma como mostramos o gráfico da função seno, vamos aqui o verificar o cosseno na Figura 2.52 seguido de sua animação.

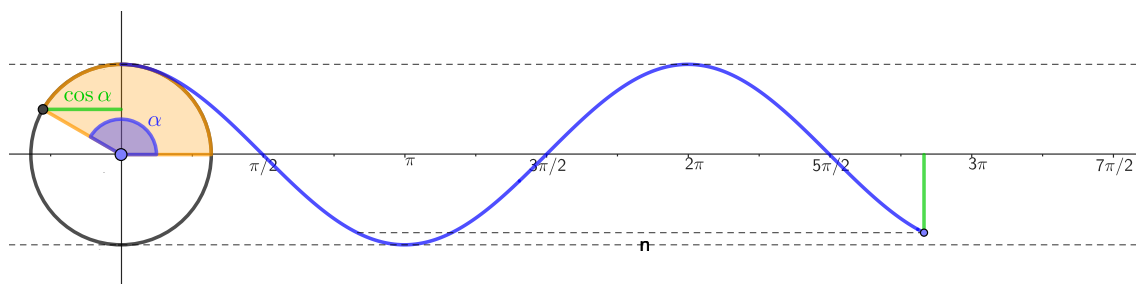


Figura 2.52: Gráfico da função cosseno.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/ttvztysh>

Ao observarmos as definições das funções seno e cosseno podemos discutir algumas particularidade que merecem atenção.

A primeira característica que pode ser notada é relativo ao valor máximo e mínimo que elas assumem. Quando calculamos alguns valores para a função $f(x) = \sin(x)$, temos:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin(0) = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ f(\pi) &= \sin(\pi) = 0 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \\ f(2\pi) &= \sin(2\pi) = 0 \end{aligned}$$

O ciclo trigonométrico nos permite perceber que o maior valor que a função assume é 1 e o menor valor é -1 . Da mesma forma que se considerarmos a função $f(x) = \cos(x)$, temos:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \cos(0) = 1 \\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
f(\pi) &= \cos(\pi) = -1 \\
f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \\
f(2\pi) &= \cos(2\pi) = 1
\end{aligned}$$

E também para a função cosseno, o mesmo ocorre dentro do período de $[0, 2\pi]$, como as funções são periódicas essas considerações permitem dizer que elas limitadas, logo:

$$\begin{aligned}
f(x) = \sin(x) &\Rightarrow -1 < \sin(x) < 1 \\
&\text{e} \\
f(x) = \cos(x) &\Rightarrow -1 < \cos(x) < 1
\end{aligned}$$

Nas animações das Figuras 2.51 e 2.52 a construção do gráfico é sugestiva e sustentamos como uma comprovação experimental para essa conjectura.

Para segunda característica vamos definir o conceito de função par e ímpar.

Definição 2.26. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada par se, e somente se, $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.27. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2$. Ela é uma função par. Observe que

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

Logo a função f é par.

Exemplo 2.28. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = \cos(x)$. Ela é uma função par. Algebricamente, podemos demonstrar isso usando a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos(0) \cdot \cos(x) - \sin(0) \cdot \sin(x) \\
f(-x) &= 1 \cdot \cos(x) - 0 \cdot \sin(x) \Rightarrow f(-x) = \cos(x)
\end{aligned}$$

E se observar a Figura 2.52, onde os valores do $\cos(x)$ são simétricos em relação ao eixo y , é possível comprovar geometricamente o que foi posto pela fórmula da soma.

Definição 2.29. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada ímpar se, e somente se, $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.30. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = 3x$. Ela é uma função ímpar. Observe que

$$f(-x) = 3 \cdot (-x) = -2 \cdot x \text{ e } \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Logo a função f é ímpar.

Exemplo 2.31. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = \sin(x)$. Ela é uma função ímpar. Algebricamente, podemos demonstrar isso usando a fórmula do seno da soma de dois ângulos

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin(-x) = \sin(0 - x) = \sin(0) \cdot \cos(x) - \cos(0) \cdot \sin(x) \\ f(-x) &= 0 \cdot \cos(x) - 1 \cdot \sin(x) \Rightarrow f(-x) = -\sin(x) \end{aligned}$$

E se observar a Figura 2.50, onde os valores do $\sin(x)$ são assimétricos em relação a origem, é possível comprovar geometricamente o que foi mostrado no exemplo acima.

Definição 2.32. (Função Tangente) Dado um número real x . Determinamos tangente de x como a medida do seguimento de reta AE ou ainda como a razão entre o seno e cosseno de θ (Relação fundamental), ou seja, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a função como $f(x) = \operatorname{tg}(x) = AE$ de forma que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ (Veja Figura 2.53).

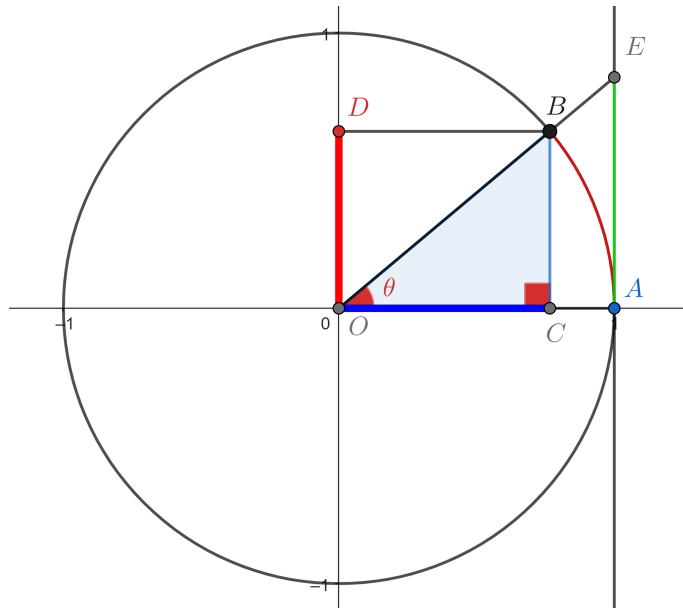


Figura 2.53: Projeção da reta que forma o segmento AE (Representação da tangente).

O gráfico da função tangente é apresentado na Figura 2.54, nele estão relacionados os arcos (domínio) aos seus respectivos valores (imagens).

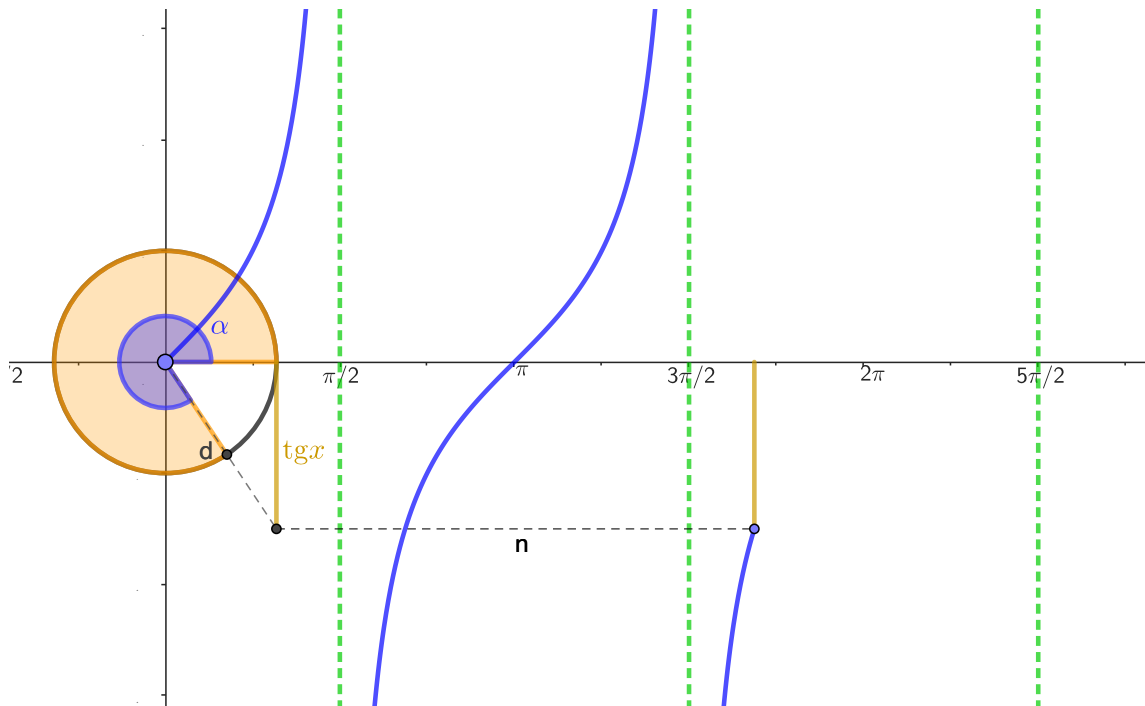


Figura 2.54: Gráfico da função tangente.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/q3hxr9nb>

Definição 2.33. (Função Secante) Dado um número real x . Determinamos secante de x como a medida do seguimento de reta OI ou ainda como o inverso do cosseno de θ , ou seja, dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a função como $f(x) = \sec(x) = OI$ de forma que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ (Veja Figura 2.42).

Seguindo as mesmas ideias definidas anteriormente, o gráfico da função esta representado abaixo na Figura 2.55.

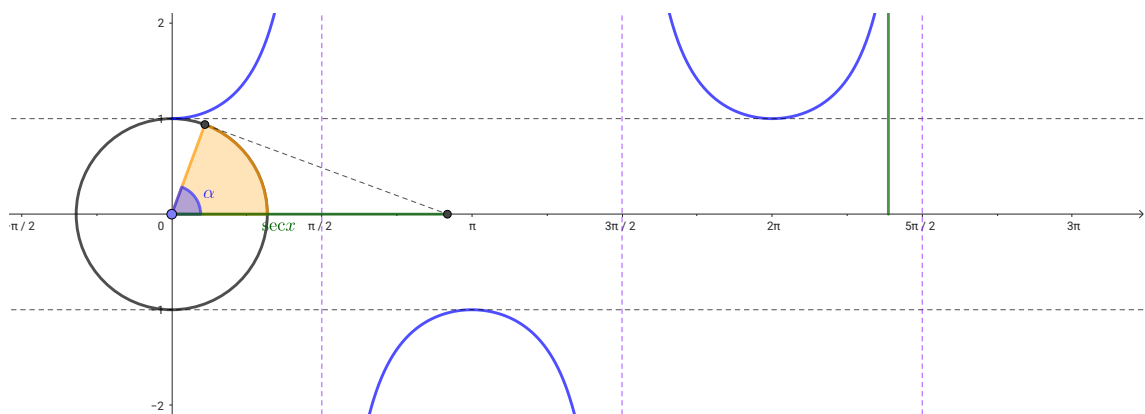


Figura 2.55: Gráfico da função secante.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/tnugkcxcv>

Definição 2.34. (Função Cossecante) Dado um número real x . Determinamos cossecante de x como a medida do seguimento de reta OH ou ainda como o

inverso do seno de θ , ou seja, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a função como $f(x) = \operatorname{cosec}(x) = OH$ de forma que $x \neq k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ (Veja Figura 2.42).

Seu gráfico pode ser observado na seguinte Figura 2.56. Nele podemos verificar uma pequena diferença para o gráfico da função secante, onde suas diferenças destoam aonde as funções não estão definidas.

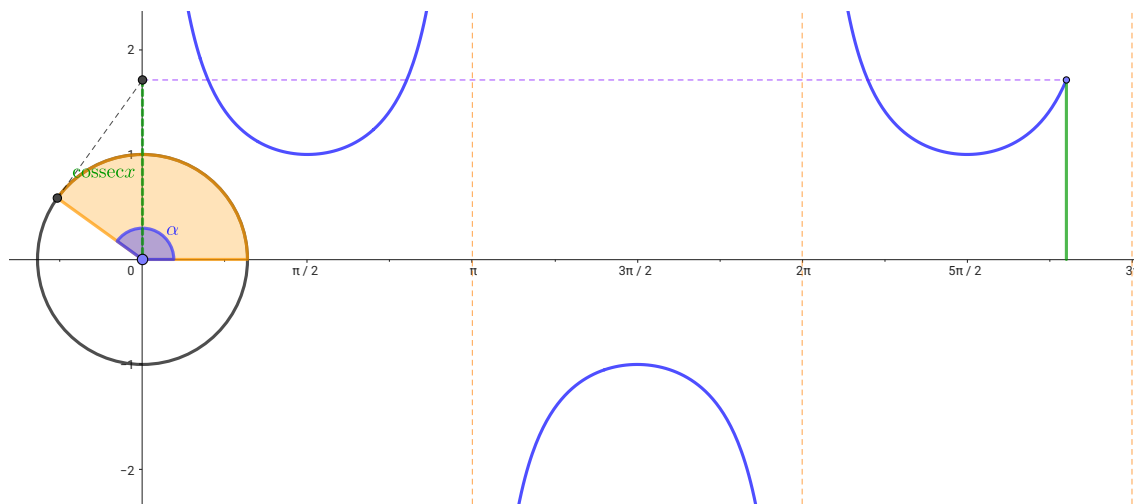


Figura 2.56: Gráfico da função cossecante.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/fv72gcrv>

Enquanto a função cossecante não está definida para $x \neq k\pi$, a função secante não está definida em $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.35. (Função Cotangente) Dado um número real x . Determinamos cotangente de x como a medida do seguimento de reta FG ou ainda como o inverso da tangente de θ , ou seja, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a função como $f(x) = \cotg(x) = FG$ de forma que $x \neq k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ (Veja Figura 2.42).

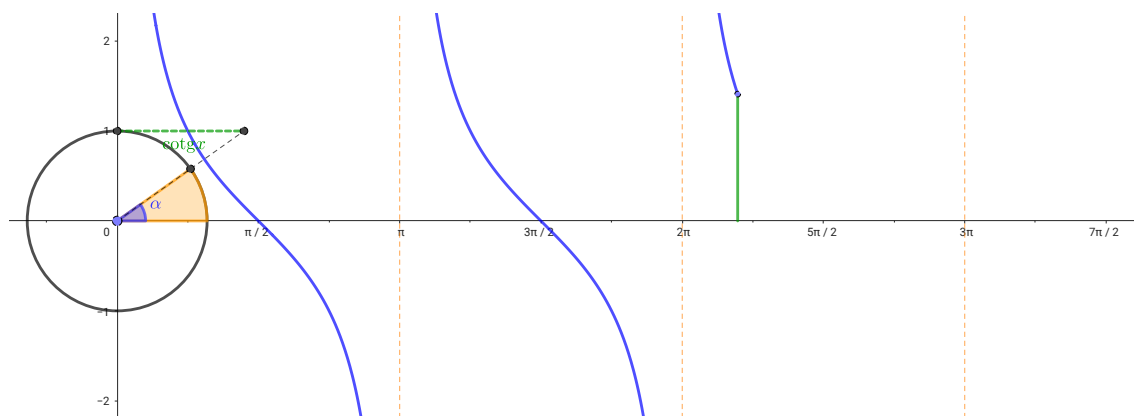


Figura 2.57: Gráfico da função cotangente.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/ungc24fk>

Na Figura 2.57 é possível verificar a representação do gráfico da função cotangente. Nessa verificamos que apesar das mesmas assintotas verticais, ela difere da tangente pelos valores inversos para cada ângulo.

Outro aspecto a ser pontuado aqui, surgem da necessidade da modelagem de muitos fenômenos e comportamentos periódicos para analisar e estudar funções trigonométricas. Vamos apresentar aqui, uma breve discussão sobre os modelos:

$$f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d) \quad (2.29)$$

e

$$g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d) \quad (2.30)$$

Podemos aferir que surgiram a partir da combinação de conceitos matemáticos e físicos. Eles são explorados demasiadamente em modelagem de fenômenos periódicos, movimentos harmônicos simples e no estudo de ondas.

Os modelos apresentados nas Figuras 2.58 e 2.59, mostram bem como cada parâmetro modifica o comportamento delas.

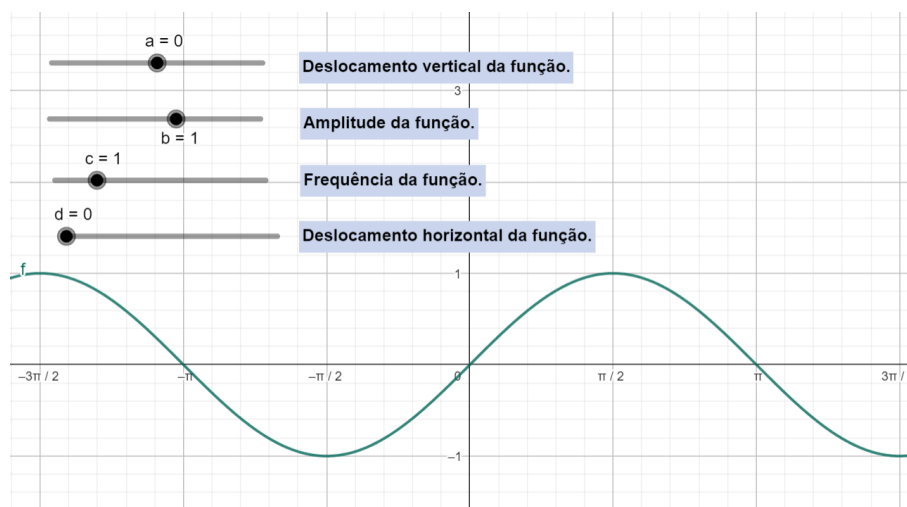


Figura 2.58: Modelo referente a $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$.
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/kuqdxzzz>

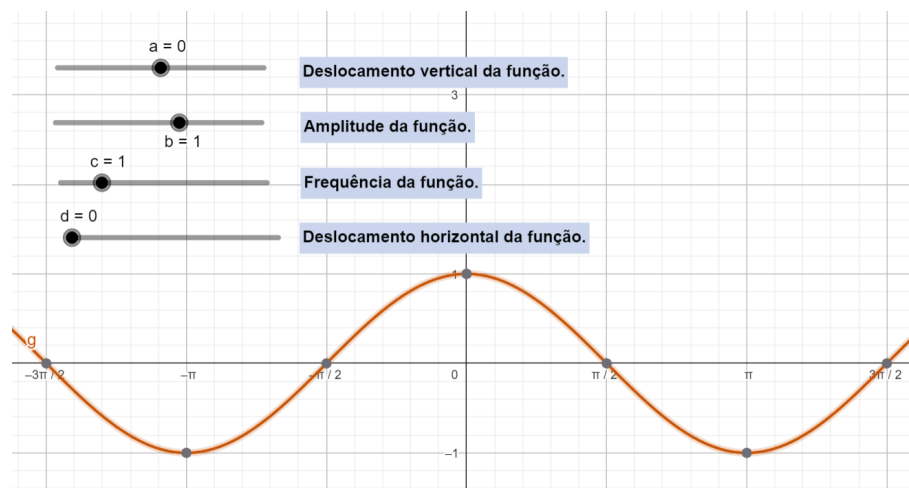


Figura 2.59: Modelo referente a $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$.
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/vc9yjbsc>

Observando alguns pontos especiais nas fórmulas (2.29) e (2.30) junto as Figuras 2.58 e 2.59, temos:

- 1) (Deslocamento vertical) A constante a representa a translação do gráfico. Se $a > 0$, a função deslocará no sentido positivo de y e se $a < 0$ o deslocamento será no sentido negativo.
- 2) (Amplitude da função) A constante b representa uma dilatação vertical, onde a função fica maior verticalmente quando aumentamos o seu valor e menor ao ser diminuído.
- 3) (Frequência/período da função) A constante c influencia no período do gráfico. Quanto o valor de $0 < c < 1$, a função será comprimida horizontalmente e quanto $c > 1$ será dilatada.
- 4) (Deslocamento horizontal) A constante d translada o gráfico horizontalmente. Se aumentar o valor de d a função será deslocada para esquerda e caso contrário para direita.

O leitor pode verificar as os quatro pontos levantados no links das Figuras 2.58 e 2.59.

Sequência didática: Uma proposta de trabalho

Neste capítulo, serão abordados aspectos relevantes sobre as sequências didáticas e bem como uma possibilidade de orientação para aplicabilidade no contexto da sala de aula. É interessante observar que essa abordagem permeia a prática pedagógica e incentiva inovações.

3.1 Sequência didática para o Ensino Médio

A sequência didática corresponde a uma forma organizada e intencional de planejar o ensino em etapas articuladas, visando promover a aprendizagem de maneira progressiva e significativa. Esse tipo de organização contribui para o avanço qualitativo do processo pedagógico, ao favorecer a compreensão ativa e a construção de conhecimentos pelos estudantes [Dolz, Noverraz e Schneuwly 2004].

Além disso, [Zabala 1998] concebe em sua visão as sequências didáticas como roteiros cuidadosamente planejados, capazes de favorecer a compreensão e a construção dos conhecimentos, inclusive no campo da matemática. Assim, espera-se que esse conjunto de sequências, possa contribuir de maneira significativa para atender os objetivos educacionais propostos nos documentos oficiais e principalmente na BNCC [Brasil 2018].

Ressaltamos que a definição da quantidade de aulas foi baseada unicamente na experiência em sala de aula, podendo ser ajustada conforme as particularidades e necessidades de cada contexto educacional. Além disso, sugerimos que o trabalho seja realizado de forma colaborativa, permitindo que os alunos contribuam uns com os outros no processo de aprendizagem.

3.1.1 Sequência 1 – Familiaridade com GeoGebra

Tema: Conhecendo as funcionalidades básicas do GeoGebra.

Componente curricular: Matemática

Série: 2º Ano (EM)

Quantidade de aulas: 3.

Objeto de conhecimento (Conteúdo): Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração / Propriedades de Geometria.

Habilidades:

- (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares.

- (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

- (EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Desenvolvimento da sequência

Comece a sequência motivando os alunos e questionando-os: O que é o GeoGebra?

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica voltado para todos os níveis de ensino, integrando recursos de geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo. Além disso, oferece uma plataforma online com mais de um milhão de recursos educacionais gratuitos, desenvolvidos por uma comunidade ativa que cria objetos e materiais voltados às demandas do ensino de matemática.

Para o desenvolvimento das atividades propostas nas sequências didáticas, será apresentada, a seguir, uma visão geral dos principais recursos que podem ser explorados por meio dessa ferramenta educacional.

1º Momento: Conhecendo o GeoGebra

Abra o aplicativo GeoGebra no computador por meio do ícone apresentado na Figura 3.1 e oriente os alunos a explorarem as funcionalidades da ferramenta. Apresente os principais menus e recursos disponíveis, conforme ilustrado nas Figuras 3.2 e 3.3.

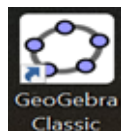


Figura 3.1: Ícone do *GeoGebra* para clicar.

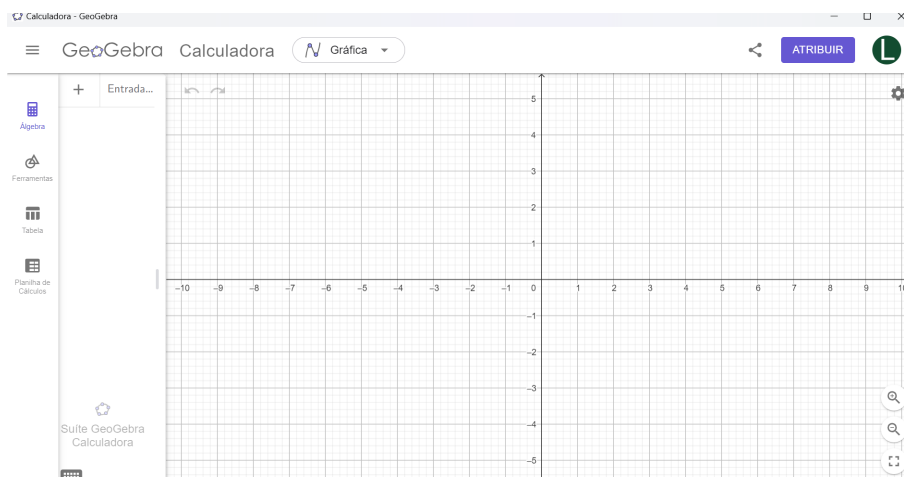


Figura 3.2: Janela inicial do GeoGebra.

Em seguida, observa-se as ferramentas, conforme representada na Figura 3.3. Essas ferramentas estão distribuídas em 12 categorias, cada uma das quais oferece uma variedade de opções. Esses recursos possibilitam uma ampla gama de aplicações voltadas à exploração e análise de propriedades geométricas.

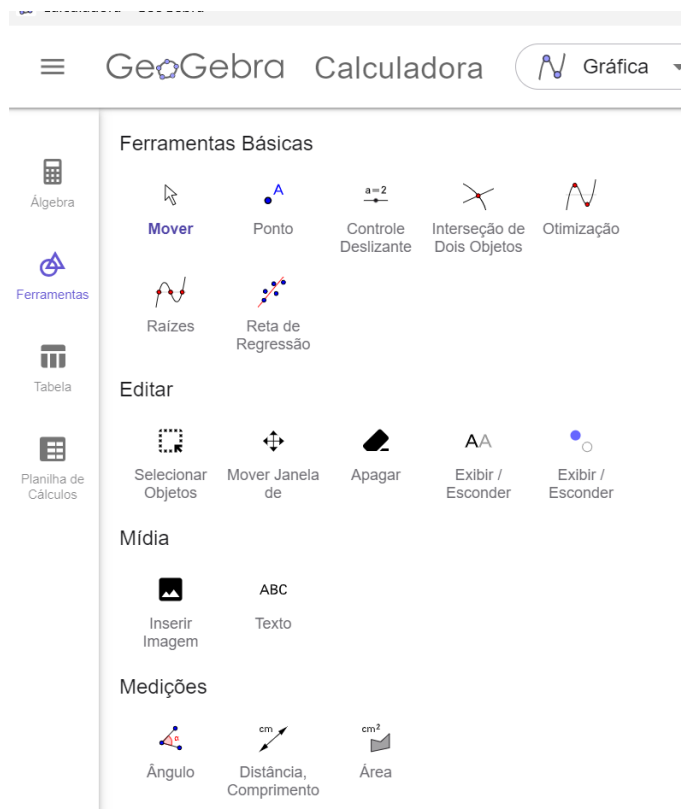


Figura 3.3: Ferramentas oferecidas pelo GeoGebra.

Cabe ressaltar que estamos aqui fazendo o uso da Versão 6.0.894.3, por ser mais recente e oferecer melhor performance de aplicabilidade.

2º Momento: Atividade 1

- 1) Observando a Figura 3.3, selecione a ferramenta “Ponto” (Figura 3.4), e marque dois pontos quaisquer na janela de visualização (Ver Figura 3.2).

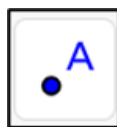


Figura 3.4: Ferramenta de "Ponto".

- 2) Em seguida, utilize a ferramenta “Segmento” para ligar os dois pontos, conforme representado na Figura 3.5. Ressalte a importância dessa ferramenta para a etapa seguinte da atividade.

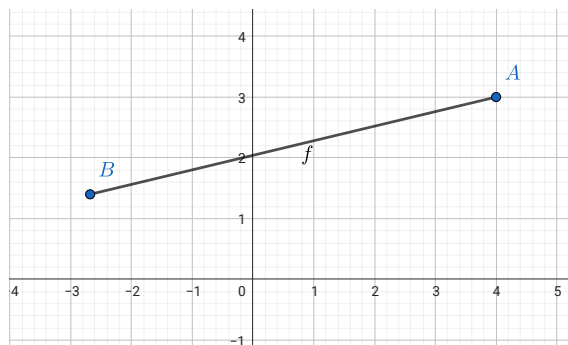


Figura 3.5: Selecionando a ferramenta segmento para criar um seguimento definido pelos pontos $\overline{AB}$.

3º Momento: Atividade 2

- 1) Utilizando a ferramenta “Ponto”, marque na janela de visualização os três pontos $A = (6, 1)$, $B = (1, 1)$ e $C = (6, 5)$, conforme ilustrado na Figura 3.6.

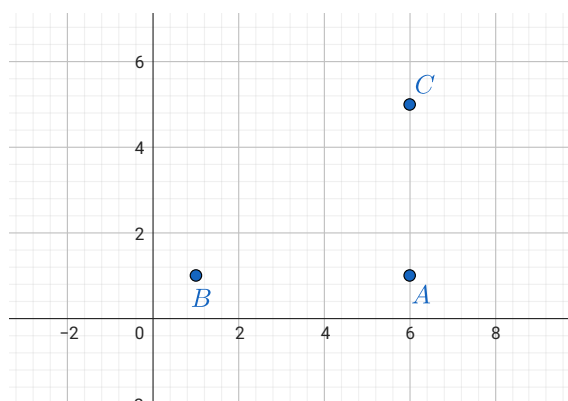


Figura 3.6: Marcação dos pontos A , B e C na janela de visualização.

- 2) Em seguida, marque os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, conforme ilustrado na Figura 3.7.

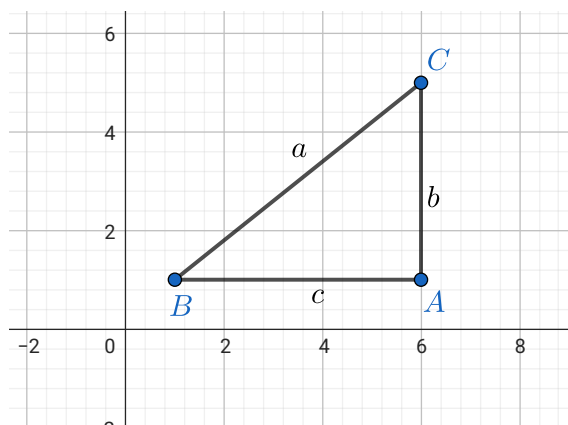


Figura 3.7: Utilização da ferramenta segmento de reta para os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

- 3) Questione os alunos: a figura formada representa um triângulo retângulo? Verifique, com eles, se é possível aplicar o Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, conforme representado na Figura 3.8.

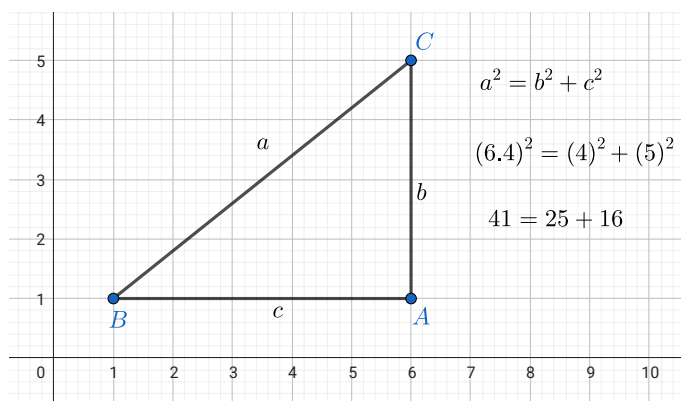


Figura 3.8: Verificação dos valores apresentado na criação do triângulo retângulo.

- 4) Para finalizar, solicite que os alunos pratiquem por meio da atividade “Sobre o Teorema de Pitágoras”, disponível em: <https://www.geogebra.org/m/uwhe43sn> (Veja no Apêndice A - A.1).

3.1.2 Sequência 2 – Definição das relações trigonométricas fundamentais

Tema: Definição das relações trigonométricas fundamentais.

Componente curricular: Matemática.

Série: 2º Ano (EM).

Quantidade de aulas: 5.

Objeto de conhecimento (Conteúdo): Razões trigonométricas no Triângulo Retângulo.

Habilidades:

- (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares.

- (EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Desenvolvimento da sequência

1º Momento: Problematizando

Para iniciarmos a sequência, vamos considerar uma situação problematizadora: suponha que, em determinado rio, seja necessário calcular a distância entre uma margem e outra, a fim de construir uma ponte que as conecte. Como podemos determinar o comprimento dessa ponte? Seria possível medir ângulos e, a partir deles, encontrar a medida desejada?

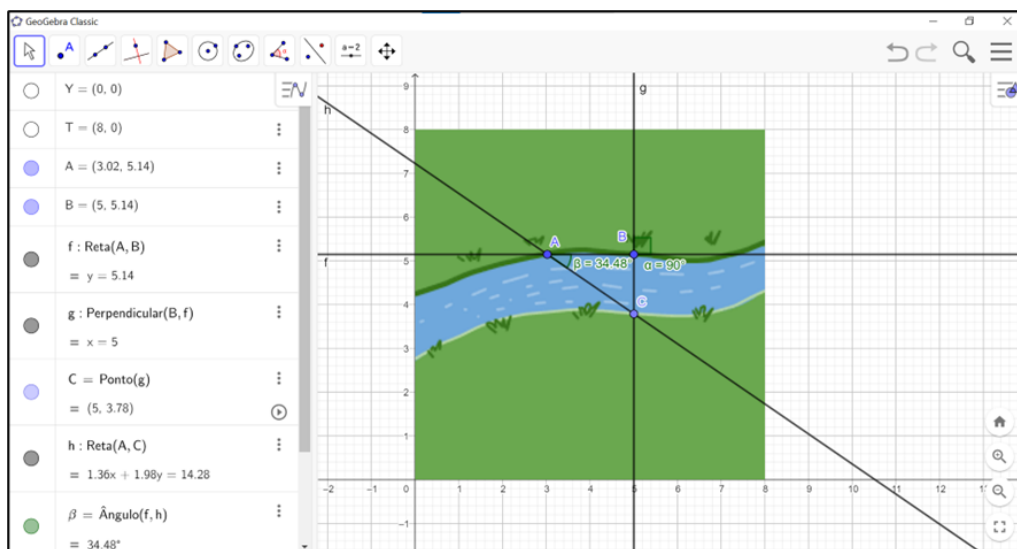


Figura 3.9: Representação da distância do rio com auxílio do GeoGebra.

Solicite que os alunos por meio da janela de visualização possam realizar a mesma criação. Tomem uma figura como a representada na Figura 3.9 e realizem os mesmos passos a seguir:

- 1) Tomem a ferramenta “ponto” e marquem os pontos A e B . Em seguida selecione a ferramenta “reta” passando por A e B ;
- 2) Selecione a ferramenta “Reta Perpendicular” e clique no ponto B e na reta passando por AB . Quando a reta for apresentada marque o ponto C de maneira que passe uma reta perpendicular por BC . E para finalizar e mostrar o triângulo selecione novamente a ferramenta “reta” e trace a reta AC ;
- 3) Para verificar que o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo, selecione a ferramenta “Ângulo” e clique nas duas retas passando por AB e BC e verifique o ângulo de 90° ;
- 4) Clicando na ferramenta “Ângulo” nas retas que passam por AB e AC para marcar o ângulo entre elas;

Por meio desses passos executados na janela de visualização, ocorre a necessidade de resolver problemas que relacionam ângulos e medidas, e essa relação é desenvolvida pela Trigonometria. Essa parte será desenvolvida agora com o auxílio do aplicativo para que possamos realizar toda as propriedades pertinentes.

2º Momento: Definição de Seno de um ângulo agudo

A princípio vamos considerar a construção de um triângulo retângulo $\triangle ABC$, retângulo em B .

- 1) Selecione a ferramenta “ponto” e marque os pontos $A = (1, 1)$, $B = (5, 1)$ e $C = (5, 4)$. Selecione a ferramenta “reta” e ligue os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ formando duas retas;
- 2) Para a formação de $\overline{BC}$, ligue esses pontos pela ferramenta “segmento de reta”;
- 3) Selecione a ferramenta de “ângulo” e marque os ângulos entre AB e AC e o ângulo reto;
- 4) Selecione a ferramenta “reta perpendicular” e clique na reta que passa por AB para marcar a primeira reta perpendicular por $D = (7, 1)$ e Marcar o ponto $E = (7, 5, 5)$ passando por AC .
- 5) Novamente selecione a ferramenta “reta perpendicular” e clicar na reta AB e marcar a segunda reta perpendicular $F = (9, 1)$ e marcar o ponto $G = (9, 7)$ passando por AC . Verifique como pode ser desenvolvido na Figura 3.10 a seguir:

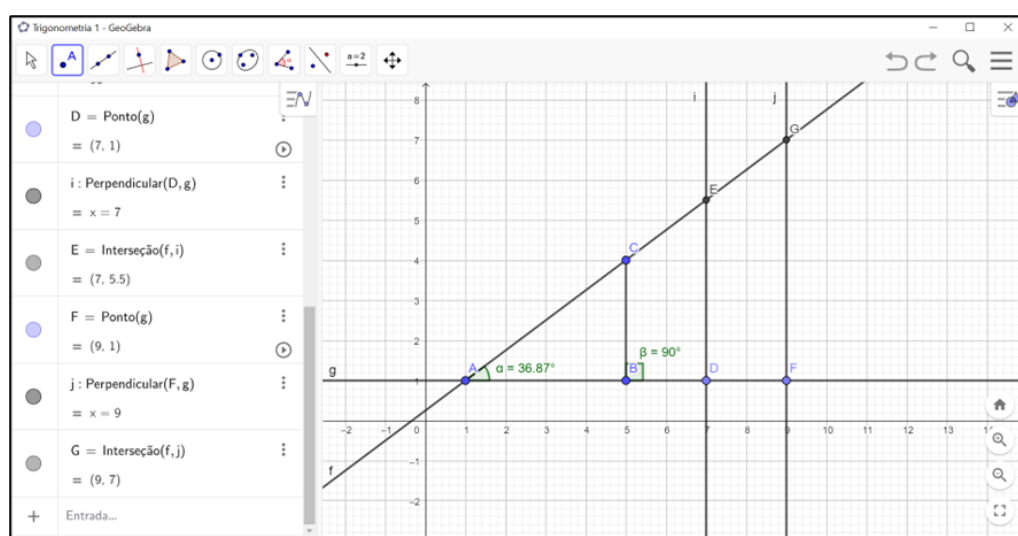


Figura 3.10: Criação do autor para definir a relação trigonométrica Seno.

- 6) Definir o seno do ângulo α como a primeira relação trigonométrica dada por

$$\text{sen } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG}$$

3º Momento: Definição de Cosseno e tangente de um ângulo agudo

Vamos considerar os mesmos passos realizados no **2º Momento**, incluindo agora a definição de cosseno e tangente.

- 1) Selecione a ferramenta “ponto” e marque os pontos $A = (1, 1)$, $B = (5, 1)$ e $C = (5, 4)$. Selecione a ferramenta “reta” e ligue os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ formando duas retas;
- 2) Para a formação de $\overline{BC}$, ligue esses pontos pela ferramenta “segmento de reta”;
- 3) Selecione a ferramenta de “ângulo” e marque os ângulos entre AB e AC e o ângulo reto;
- 4) Selecione a ferramenta “reta perpendicular” e clique na reta que passa por AB para marcar a primeira reta perpendicular por $D = (7, 1)$ e Marcar o ponto $E = (7, \frac{11}{2})$ passando por AC .
- 5) Novamente selecione a ferramenta “reta perpendicular” e clicar na reta AB e marcar a segunda reta perpendicular $F = (9, 1)$ e marcar o ponto $G = (9, 7)$ passando por AC . Verifique como pode ser desenvolvido na Figura 3.10.
- 6) Definir o cosseno e a tangente do ângulo α como da mesma forma que definimos na primeira relação trigonométrica seno dada por

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG} \text{ e } \tan \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF}$$

4º Momento: Atividade

Nesse momento nosso objetivo é realizar a construção de um triângulos retângulo qualquer das relações trigonométricas por meio dos segmentos de retas criados.

- 1) Para construir um triângulo qualquer, vamos tomar um semicírculo utilizando a ferramenta "Semicírculo" por dois pontos. Consideremos B e C de maneira que sejam o diâmetro BC . Marque um ponto A qualquer pelo semicírculo e usando a ferramenta "Segmento de reta" definir $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.
- 2) Nomeie $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, clicando em nome do segmento e depois acessar a configuração no menu "Básico" para renomear os nomes como colocados nesse item.

- 3) Selecione a ferramenta "Ângulo por duas retas" e no triângulo retângulo exibir a medida de todos os três. Observe que temos um resultado que garante dado um ponto A do semicírculo e BC o diâmetro, implica que qualquer triângulo por esses pontos formam um triângulo retângulo. Observe a Figura 3.11 a seguir.
- 4) Na janela de "Álgebra" clique no campo entrada e defina o valor da função seno, cosseno e tangente, para aplicar nos próximos passos. Na construção os pontos podem ser movimentados e a animação possibilitará verificar os valores das relações trigonométricas variáveis de 0° a 90° .

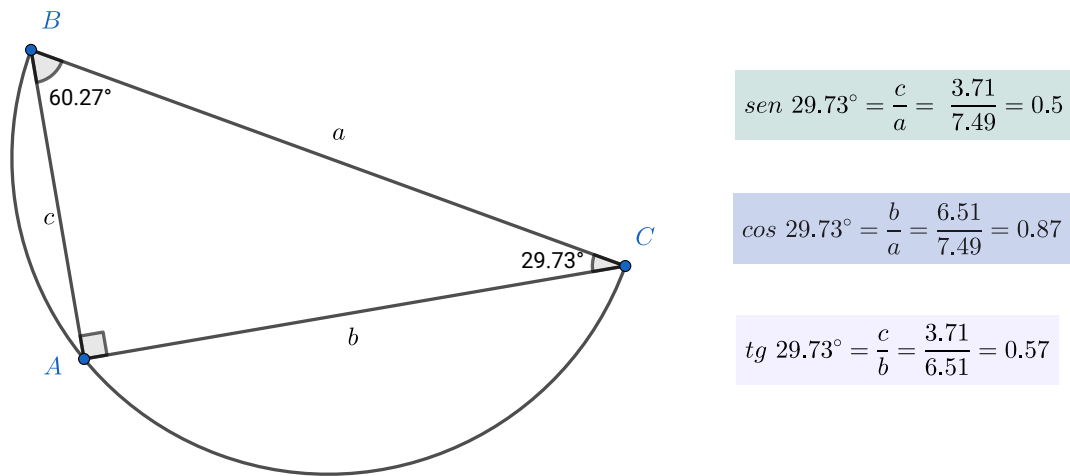


Figura 3.11: Relações trigonométricas no triângulo $\triangle ABC$
 Animação: <https://www.geogebra.org/m/jzc9ukmq>

- 5) Selecione a ferramenta "ABC texto" para podermos exibir as relações trigonométricas com seus respectivos valores. Digite Seno do menor ângulo clicando no símbolo do aplicativo GeoGebra como na Figura 3.12 para selecionar a referência do argumento e apresentar a configuração como listadas nos quadros em azul da Figura 3.11.

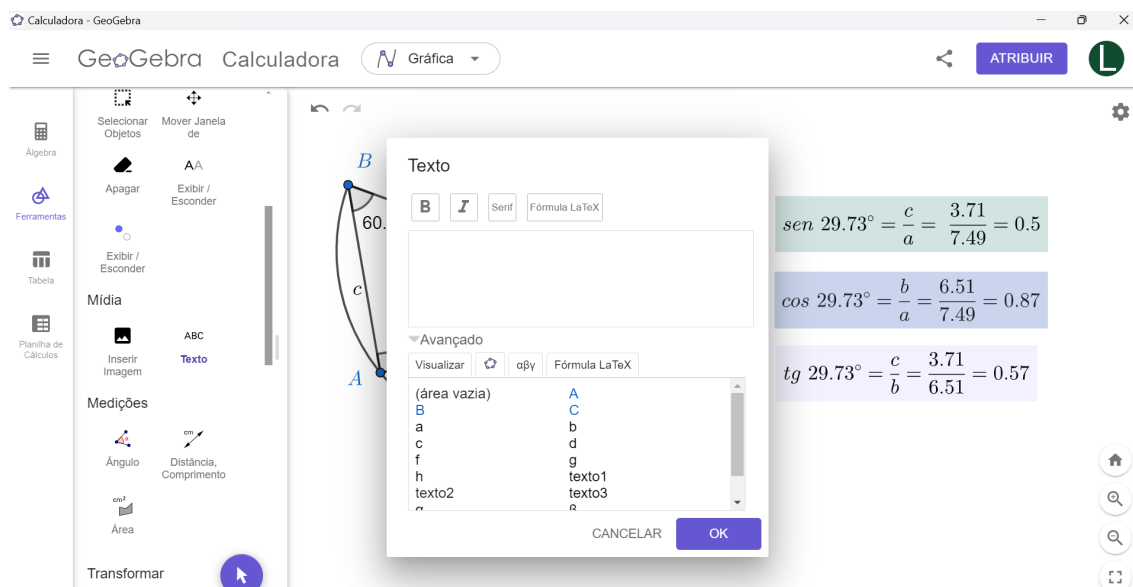


Figura 3.12: Referência do argumento do ângulo menor.

- 6) Definir as funções seno, cosseno e tangente do ângulo menor da mesma forma feita com a referência da Figura 3.12 para indexar a referência do LaTeX disponível no GeoGebra.
- 7) Ao finalizar solicite que os alunos realizem a "Atividade - Aplicando as ideias de razões trigonométricas" desenvolvida com auxílio do GeoGebra, no link: <https://www.geogebra.org/m/nddrmts3> (Veja no Apêndice A - A.2).

3.1.3 Sequência 3 - Lei dos Cossenos

Tema: Lei dos Cossenos.

Componente curricular: Matemática.

Série: 2º Ano (EM).

Quantidade de aulas: 2.

Objeto de conhecimento (Conteúdo): Lei dos Cossenos.

Habilidades:

- (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Desenvolvimento da sequência

Motive os alunos apresentando a Lei dos Cossenos e apontando como podemos fazer uma criação para sua representação criando os passos a seguir:

- 1) Apresente o teorema de que trata sobre a Lei dos cossenos: "Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles."
- 2) Vamos abrir o ambiente do GeoGebra, para criar a representação lógica. Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e marquemos os pontos A , B e C quaisquer como na figura 3.13 a seguir.

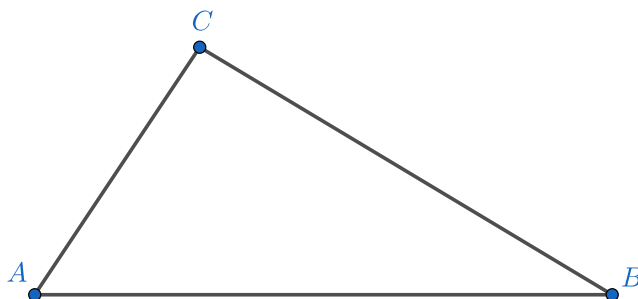


Figura 3.13: Criação de um triângulo qualquer $\triangle ABC$ - elaborada pelo autor.

- 3) Utilize a ferramenta "Ângulo" para marcar os ângulos α , β e θ , configurando-os de forma que seja exibido apenas o valor do angular.
- 4) Clique nos segmentos de reta e em seguida habilite para exibir o valor dos segmentos referentes a cada lado do triângulo como na figura 3.14.

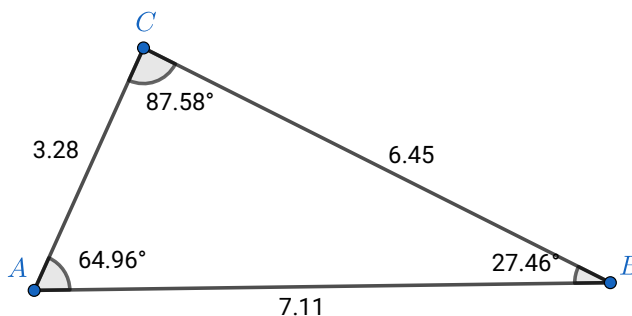


Figura 3.14: Habilitação dos valores de cada lado do triângulo $\triangle ABC$ - elaborado pelo autor.

- 5) Segundo a Lei dos cossenos temos três casos:

$$1^{\text{o}} \text{ caso: } a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$2^{\text{o}} \text{ caso: } b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$3^{\text{o}} \text{ caso: } c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)$$

Vamos a princípio verificar o primeiro caso no próximo passo.

- 6) Vamos habilitar a ferramenta "polígono regular" para verificar a criar as figuras regulares suporte do triângulo $\triangle ABC$.
- 7) Para ficar didático, vamos selecionar a ferramenta "Área" e mostrar a área ocupada por cada polígono suporte junto com a coloração para cada uma delas (Ver figura 3.15).
- 8) Selecione a ferramenta "Texto" para desenvolvermos o raciocínio demonstrativos dos cálculos. Digite usando a ferramenta LaTeX que está disponível no GeoGebra, como apresentado na figura 3.15.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A}) \Rightarrow a^2 = 2.56^2 + 5.43^2 - 2 \cdot 2.56 \cdot 5.43 \cdot \cos(56.54^\circ)$$

$$\Rightarrow a^2 = 6.53 + 29.48 - 2 \cdot 2.56 \cdot 5.43 \cdot (0.55)$$

$$\Rightarrow a^2 = 6.53 + 29.48 - (15.31)$$

$$\Rightarrow a^2 = 20.71$$

$$\Rightarrow a^2 = \sqrt{20.71}$$

$$\Rightarrow a = 4.55$$

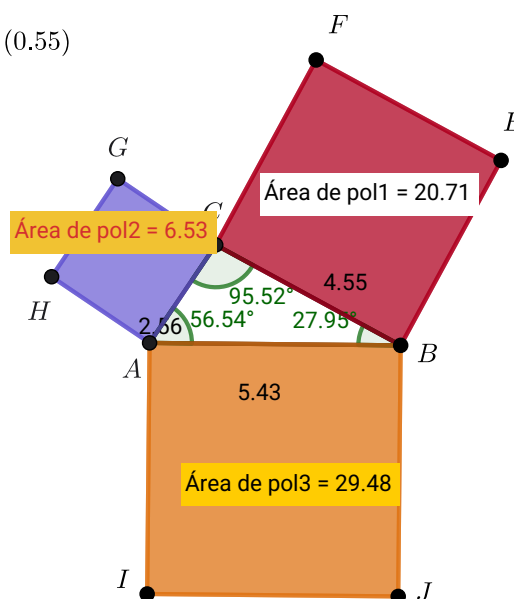


Figura 3.15: Verificação do 1º Caso em que desejamos para o ângulo α .

Animação: <https://www.geogebra.org/m/dc9hvqtc>

Ressaltando que o processo apresentado na figura 3.15 foi desenvolvido no ambiente do GeoGebra, seguindo todos os passos apontados anteriormente e sua intenção é movimentar os vértices A , B e C para verificar o comportamento do triângulo em variadas posições.

- 9) Por fim solicitar que os alunos abram a "Atividade Lei dos Cossenos" disponível em <https://www.geogebra.org/m/khytyrrs> (Veja no Apêndice A - A.3).

3.1.4 Sequência 4 - Lei dos Senos

Tema: Lei dos Cossenos.

Componente curricular: Matemática.

Série: 2º Ano (EM).

Quantidade de aulas: 2.

Objeto de conhecimento (Conteúdo): Lei dos Senos.

Habilidades:

•(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Desenvolvimento da sequência

Apresente a Lei dos Senos fazendo as motivações necessárias. Mostre o teorema e ressalte a importância de discutir e criar essa noção.

- 1) Vamos considerar uma circunferência de centro O e raio $\overline{OR} = R$ qualquer. Tome-mos três pontos A , B e C sobre a ela e com a ferramenta "polígono" selecionamos eles para formar o triângulo $\triangle ABC$ qualquer, inscrito como na figura 3.16.

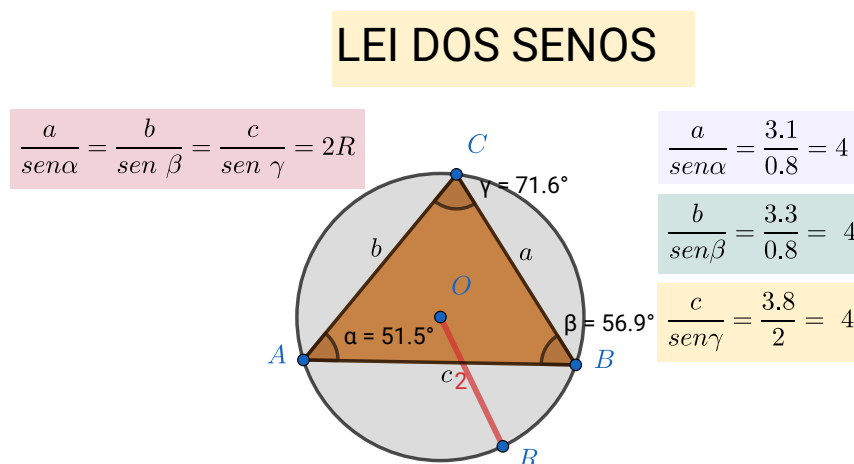


Figura 3.16: Construção do triângulo inscrito na circunferência - Lei dos Senos.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/mdjvsvxm>

- 2) Selecione a ferramenta de "segmento de reta" e por $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, e $\overline{BC}$ construa respectivamente de forma auxiliar os segmentos c , b e a , habilitando apenas a o seu nome. Junto a isso, determine o segmento $\overline{OR}$ que será o raio e habilite o modo valor para contrastar com a criação da figura 3.16.

- 3) Para mostrar a parte final, selecione a ferramenta "texto" e construa todos os links baseados na figura construída para mostrar de forma didática a validade da Lei dos Senos.
- 4) Para aplicação peça aos alunos que acessem o link <https://www.geogebra.org/m/y67y2w7e> da atividade para aplicação do conceito (Veja no Apêndice A - A.4).

3.1.5 Sequência 5 - Ciclo Trigonométrico

Tema: Ciclo Trigonométrico de Raio Medindo 1 u.m..

Componente curricular: Matemática.

Série: 2º Ano (EM).

Quantidade de aulas: 5.

Objeto de conhecimento (Conteúdo): Ciclo Trigonométrico.

Habilidades:

- (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Desenvolvimento da sequência

1º Momento: Criando um círculo de raio unitário.

- 1) Vamos considerar o ambiente do GeoGebra, os eixos cartesianos e malha quadriculada para começar a construção como na Figura 3.17.
- 2) Selecione a ferramenta "Círculo dado Centro e um de seus pontos" marcando o Ponto $O = (0, 0)$ no centro do sistema cartesiano e em sequência marque o ponto $A = (1, 0)$ na configuração fixa. Criando dessa forma um círculo unitário.
- 3) Defina um controle deslizante α de forma que ele varie de 0° a 360° . Para criar o próximo ponto, vamos usar as coordenadas paramétricas $B = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

Selecione por fim nesse passo a ferramenta "segmento de reta" e determine $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$.

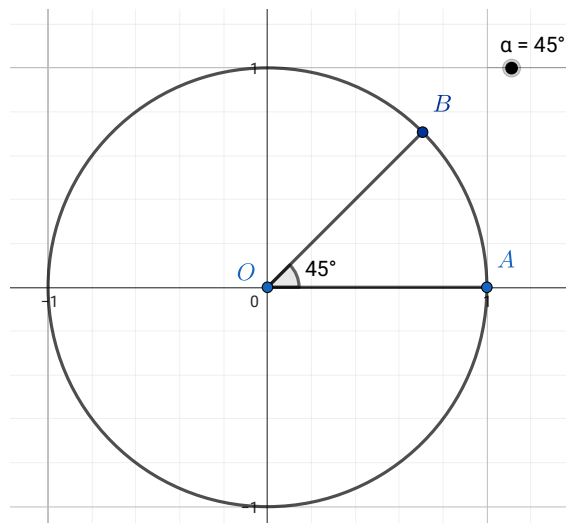


Figura 3.17: Ciclo trigonométrico unitário.

- 4) Selecionada a ferramenta "Ângulo", para mostrar a abertura formada pelos pontos AOB como na figura 3.17.
- 5) Para finalizar, vamos definir um outro ângulo β de modo que seu valor seja $\alpha/180^\circ$. Selecionando a ferramenta "ABC Texto" vamos escrever a expressão $\alpha = \frac{\alpha}{180^\circ} = \beta\pi$ de modo que seja possível vermos o ângulo definido em Graus e convertido em Radianos (Ver figura 3.18).

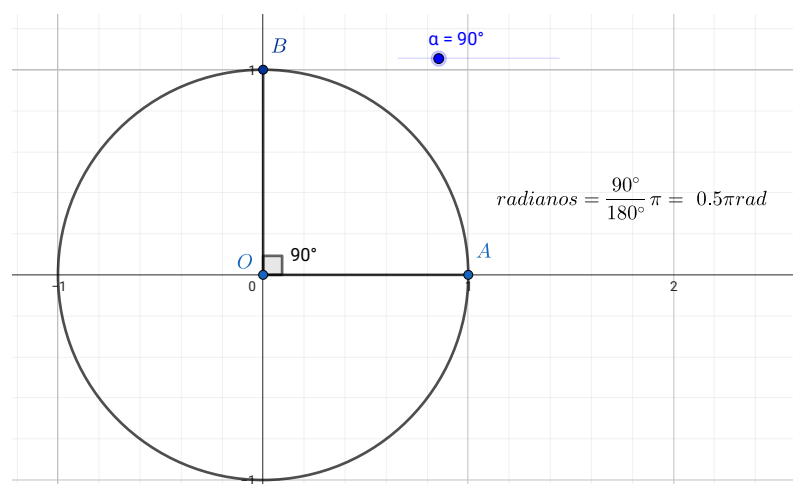


Figura 3.18: Ciclo trigonométrico com definição do ângulo medido em Radianos.

Observação: Cabe ressaltar que essa conversão deve ser atrelada a representação dos casos particulares de arcos, como por exemplo, Arco de meia volta, nulo e uma volta com ênfase em suas respectivas medidas.

2º Momento: Simetrias no Ciclo unitário.

Nesse momento vamos mostrar os três tipos de simetrias, em relação ao eixo vertical, ao eixo horizontal e ao centro da circunferência.

- 1) Simetria no 2º Quadrante: Tomaremos um arco qualquer com extremidade marcada no 1º Quadrante como na Figura 3.17.
- 2) Selecionando a ferramenta "Reflexão em relação a uma reta", clique primeiro no ponto B e posteriormente no "Eixo y " para gerar o ponto B' simétrico em relação ao eixo. Desenvolva a construção do segmento de reta OB' e o ponto C , com seu respectivo ângulo construído e definido entre 0° e 90° para apresentar a relação esperada (Ver Figura 3.19).

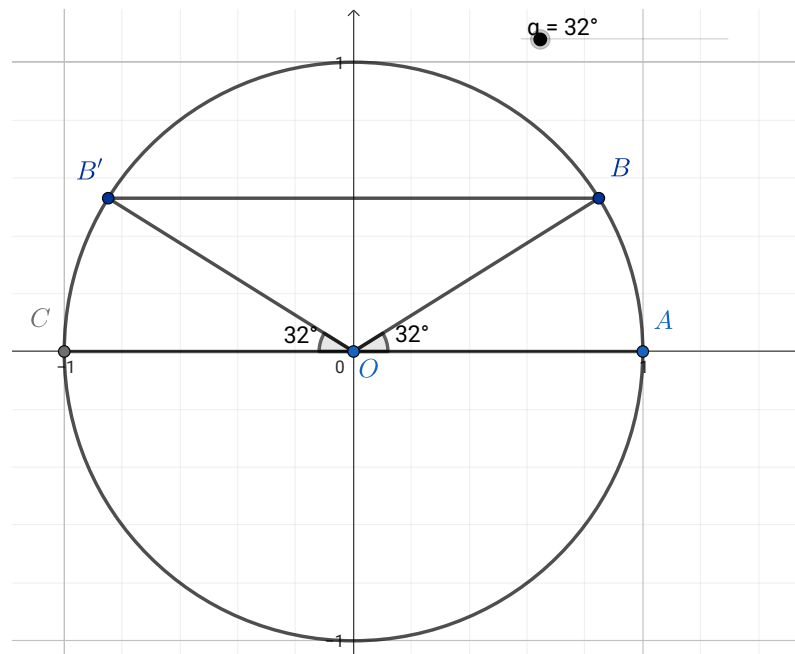


Figura 3.19: Construção dos arcos congruentes no 1ºQ e 2ºQ.

- 3) Ligue na sequência também os pontos BB' e verifique que a medida do arco α e β são arcos congruentes. Logo, pode-se verificar que para os arcos medidos no 2º Quadrante possuem a configuração dada por $\theta = \pi - \beta$ ou $\theta = 180^\circ - \beta$, como na Figura 3.20.

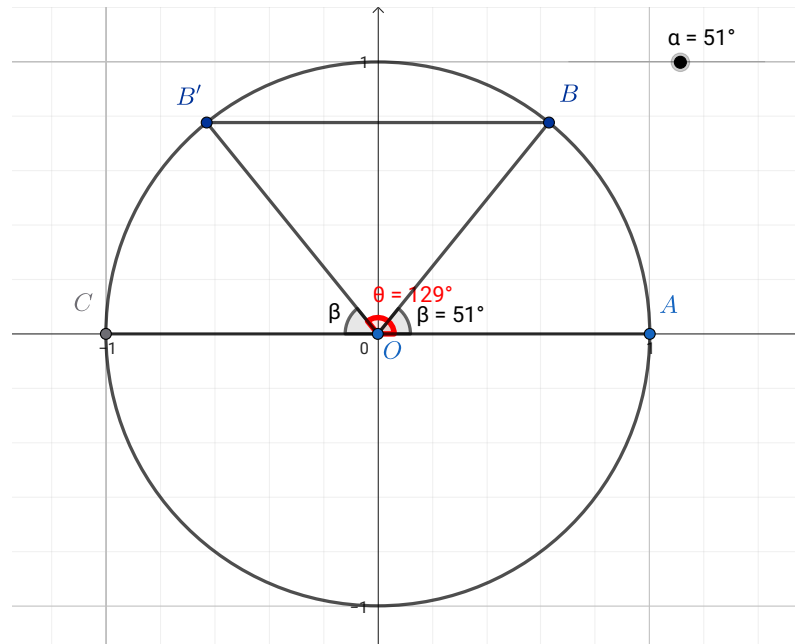


Figura 3.20: Verificando a configuração $\theta = \pi - \beta$ ou $\theta = 180^\circ - \beta$.

- 4) Ressaltando que $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Logo, todos os arcos simétricos no 2º Quadrante possuem correspondentes garantidos e visíveis no 1º Quadrante. Mostre nesse ponto aos alunos a importância de visualizar e compreender essa propriedade dentro desse intervalo delimitado e solicite que todos verifique esses valores de 0° à 90° .
- 5) Simetria no 3º Quadrante: Tomaremos novamente um arco qualquer com extremidade marcada no 1º Quadrante como na Figura 3.17.
- 6) Selecionando a ferramenta "Reflexão em relação um ponto", clique primeiro no ponto C e posteriormente no ponto A para gerar o ponto C' diametralmente oposto. Desenvolva a construção do segmento de reta AC' e o ponto D , com seu respectivo ângulo construído e definido entre 0° e 90° para apresentar a relação esperada (Ver Figura 3.21).

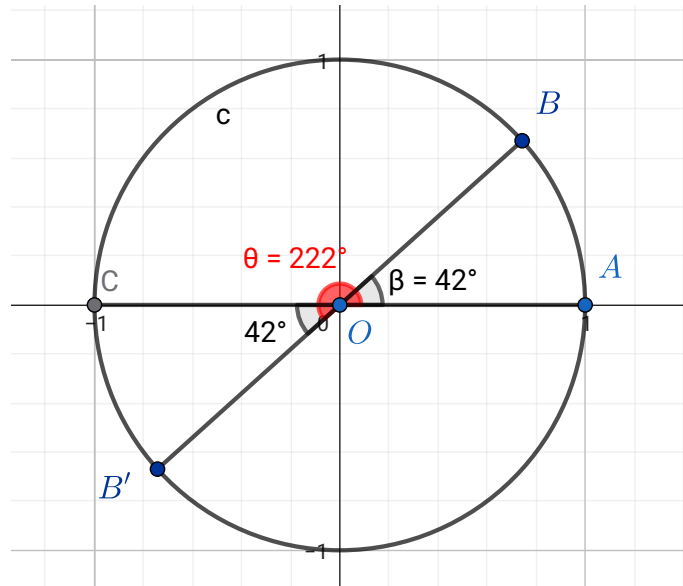


Figura 3.21: Construção dos arcos congruentes no 1ºQ e 3ºQ e verificação da configuração $\theta = \pi + \beta$ ou $\theta = 180^\circ + \beta$

- 7) Na Figura 3.21 é fácil verificar pela construção que a medida do arco α e β são arcos congruentes. Logo, pode-se verificar que para os arcos medidos no 3º Quadrante possuem a configuração dada por $\theta = \pi + \beta$ ou $\theta = 180^\circ + \beta$.
- 8) Simetria no 4º Quadrante: Tomaremos um arco qualquer com extremidade marcada no 1º Quadrante como na Figura 3.21.
- 9) Selecionando a ferramenta "Reflexão em relação a uma reta", clique primeiro no ponto C e posteriormente no "eixo x " para gerar o ponto C' simétrico em relação ao eixo. Desenvolva a construção do segmento de reta AC' e o ponto B , com seu respectivo ângulo construído e definido entre 0° e 90° para apresentar a relação esperada (Ver Figura 3.22).

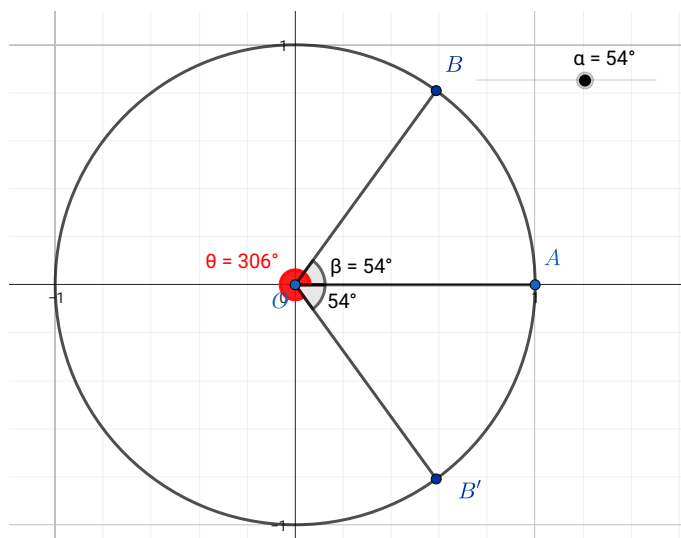


Figura 3.22: Construção dos arcos congruentes no 1ºQ e 4ºQ e verificação da configuração $\theta = 2\pi - \beta$ ou $\theta = 360^\circ - \beta$.

- 10) Como nas outras duas simetrias é fácil verificar pela construção que a medida do arco α e β são arcos congruentes. Logo, pode-se verificar que para os arcos medidos no 4º Quadrante possuem a configuração dada por $\theta = 2\pi - \beta$ ou $\theta = 360^\circ - \beta$, como na Figura 3.22.
- 11) Para finalizar, solicite que os alunos verifiquem alguns ângulos realizando as mesmas construções e observando as medidas definidas dentro de cada quadrante: 2ºQ, 3ºQ e 4ºQ: <https://www.geogebra.org/m/g7benvdk> (Veja no Apêndice A - A.5).

3.1.6 Sequência 6 - Razões trigonométricas na circunferência unitária

Tema: Razões trigonométricas na circunferência unitária.

Componente curricular: Matemática.

Série: 2º Ano (EM).

Quantidade de aulas: 3.

Objeto de conhecimento (Conteúdo): Ciclo Trigonométrico.

Habilidades:

- (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Desenvolvimento da sequência

Vamos definir agora o "SENO" de um ângulo a princípio para $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ e posteriormente estender para $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. E na sequência definiremos o "COSSENO" e a "TANGENTE".

- 1) Determinemos uma circunferência de raio unitária, marcando primeiro dois pontos $O = (0, 0)$ e $A = (1, 0)$, e selecionando a ferramenta "Círculo dados o centro e um de seus pontos". Tome outro ponto C qualquer no 1º Quadrante.
- 2) Defina o "Controle deslizante" no formato de ângulo definido $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.
- 3) Pelo ponto B , selecione a ferramenta "Reta perpendicular" para passar uma reta perpendicular ao eixo x e passando por B . Marque o ponto C como a intersecção dos segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{BC}$ (Utilizar a ferramenta "Segmento" para traçar os segmentos de retas).

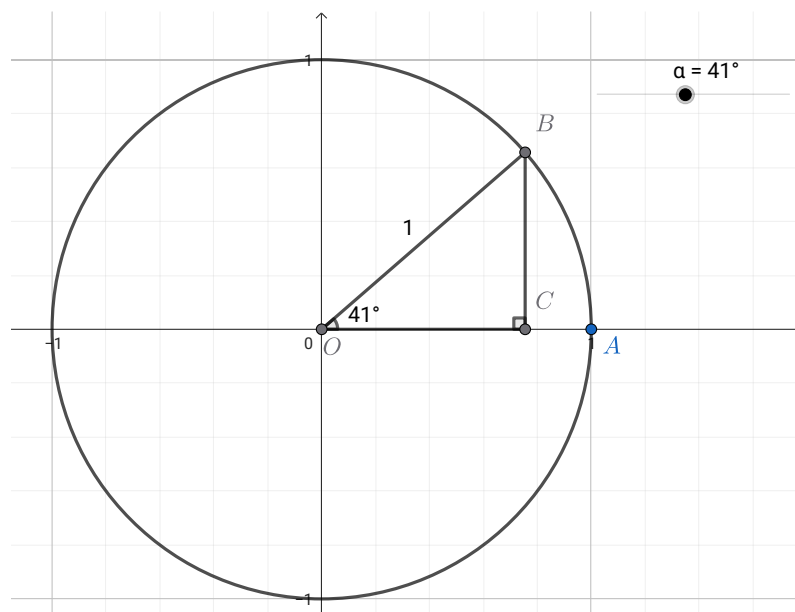


Figura 3.23: Ilustração da construção dos passos.

- 4) Selecione a ferramenta "Ângulo" e clique nos pontos C , O e B nessa sequência para exibir o ângulo α e depois clique nos pontos B , C e O nessa sequência para exibir o ângulo reto e por conseguinte mostrar o triângulo retângulo (Ver Figura 3.23).
- 5) Nesse passo vamos utilizar a função "SENO" definida no banco de dados do GeoGebra. No campo de entrada basta escrever $\sin(\alpha)$ que definirá o valor a para ser usado posteriormente.
- 6) Selecione a ferramenta "TEXTO ABC" para exibir interativamente o valor da função desejada como na Figura 3.24 e 3.25.

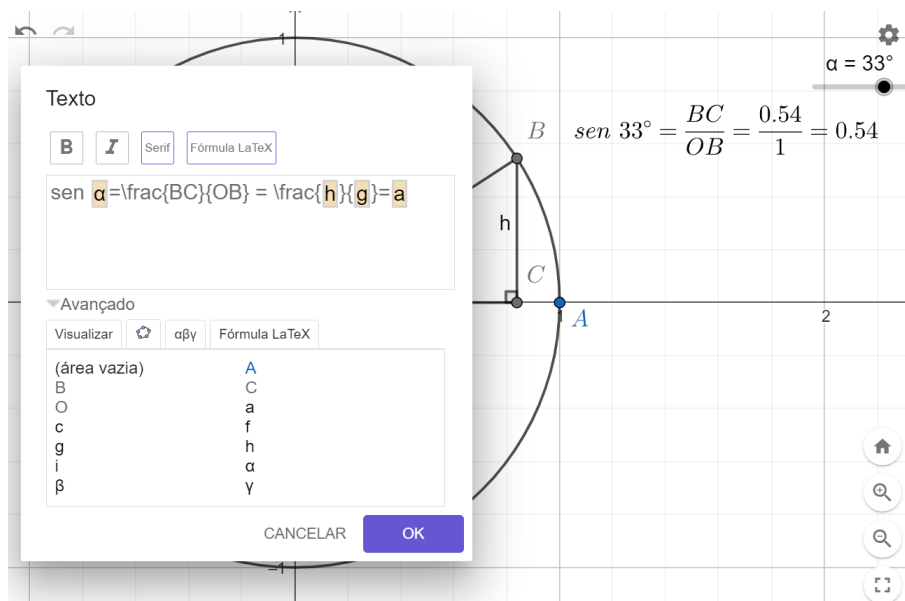


Figura 3.24: Edição do texto em linguagem Tex.

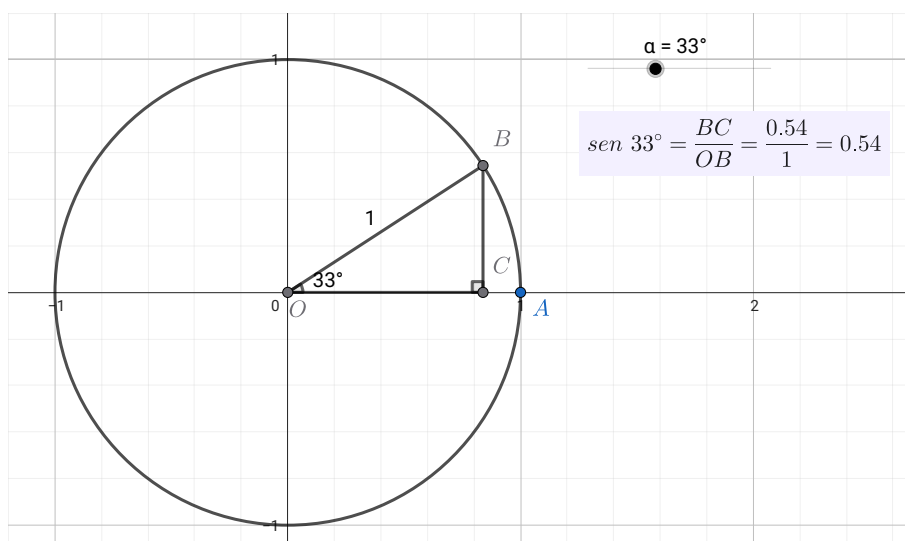


Figura 3.25: Exibição do seno do argumento junto ao seu valor.

- 7) Para a o cosseno, basta seguir os mesmos passos para definir a escrita e apresentar o valor como na Figura 3.26.
- 8) Para escrever o valor da Tangente, vamos inicialmente prolongar o segmento de reta $\overline{OB}$, até a reta perpendicular a circunferência passando por A .
- 9) Selecione a ferramenta "Reta Tangente" e clique no ponto A e na circunferência. Use a ferramenta "Interseção" e clique nas retas que passam por OB e AD , para marcar o ponto D .

- 10) Modifique a configuração do ponto para ver o valor do segmento de reta $\overline{AD}$. Lembrando que esse valor representa a tangente do ângulo definido (Ver Figura 3.26).
- 11) Vamos escrever a função " $d = \tan(\alpha)$ " para retornar o valor d desejado para podermos escrever seus valores como fizemos no seno e cosseno anteriormente. Definiremos também um segmento de reta $\overline{AD}$ para mostrar o valor da tangente como na Figura 3.26.

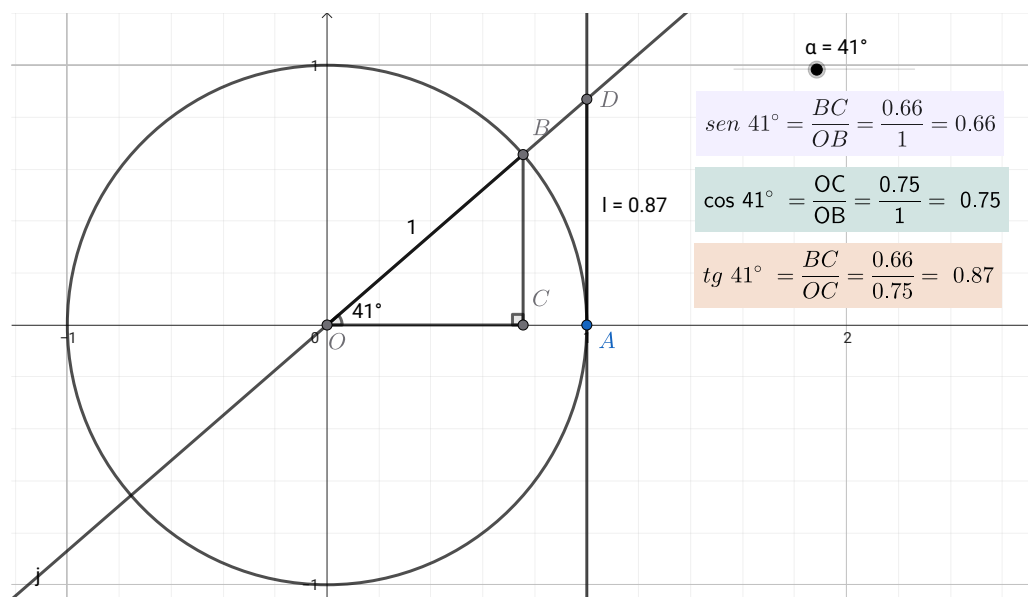


Figura 3.26: Esquema dos valores dos Senos, cossenos e tangentes.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/axbkwxwa>

- 12) De maneira análoga definir as relações trigonométricas inversas secante, cossecante e cotangente (Ver figura 3.27).

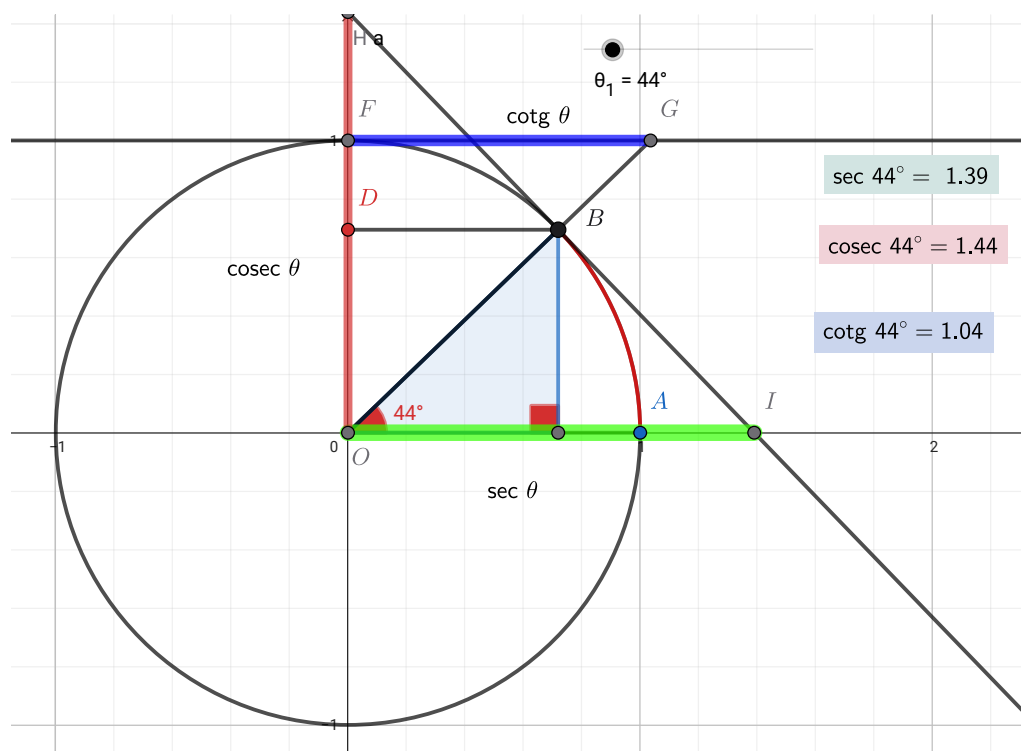


Figura 3.27: Esquema de valores: Secante, cossecante e cotangente.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/vzhxnchm>

- 13) Para finalizar solicite que os alunos façam a atividade <https://www.geogebra.org/m/n99ybbrg> (Veja no Apêndice A - A.6).

3.1.7 Sequência 7 - Funções Trigonômétricas

Tema: Trigonometria.

Componente curricular: Matemática.

Série: 2º Ano (EM).

Quantidade de aulas: 5.

Objeto de conhecimento (Conteúdo): Funções trigonométricas.

Habilidades:

- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no

plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Desenvolvimento da sequência

As funções trigonométricas tem uma vasta aplicação em nosso cotidiano. Sabemos que o som viaja por meio de ondas e que permite nossos ouvidos receberem a sonoridade não tão regular por meio das funções seno e cosseno.

Exemplo 3.1. A matemática desempenha um papel essencial no processamento de som e música pelos computadores. Embora os computadores não "ouçam" como nós, eles conseguem representar e manipular as ondas sonoras de maneira matemática, utilizando funções trigonométricas.

Tal colocação é um exemplo clássico de funções trigonométricas, nas quais, nos possibilitam entender e compreender os comportamentos desses conceitos valiosos presente em nossa cotidiano. Observe a Figura 3.28, onde é apontado o comportamento constante e oscilante da função seno.

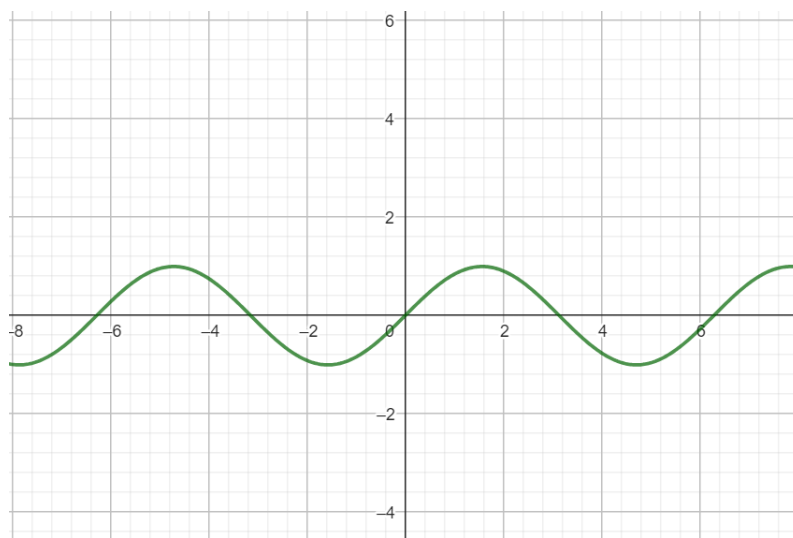


Figura 3.28: Exemplo de função seno que representa essa ideia (Criada pelo autor).

- 1) Vamos em primeiro lugar definir a função seno. Na Janela de visualização vamos construir uma circunferência unitária centrada em $O = (0, 0)$. E nesse mesmo passo vamos definir um controle deslizante α de 0° a 360° .
- 2) Vamos criar um ponto $B = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ e vamos definir o setor OAB clicando na ferramenta "Setor Circular". Clique na "Ângulo" para escrever o α .
- 3) Vamos definir agora uma curva com os parâmetros $b = (u, \sin(u), u, 0, \alpha)$ sendo na sequência uma curva definida em função de u , baseado na variável u e

iniciando em $0 < u < \alpha$. Vamos criar nesse passo o ponto $C = (\alpha, \sin \alpha)$, que será animado para percorrer a curva b .

- 4) Vamos demarcar duas retas perpendiculares uma passando por B e o eixo x e outra por C e o eixo x , na sequência usar a ferramenta "interseção entre dois objetos" para marcar os pontos D e E respectivamente. Finalize esse passo traçando os segmentos de reta $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ e $\overline{BC}$.
- 5) Finalize a construção mostrando as retas $y = 1$ e $y = -1$, para mostrar o ponto máximo e mínimo que a função atinge em sua imagem (Veja Figura 3.29).

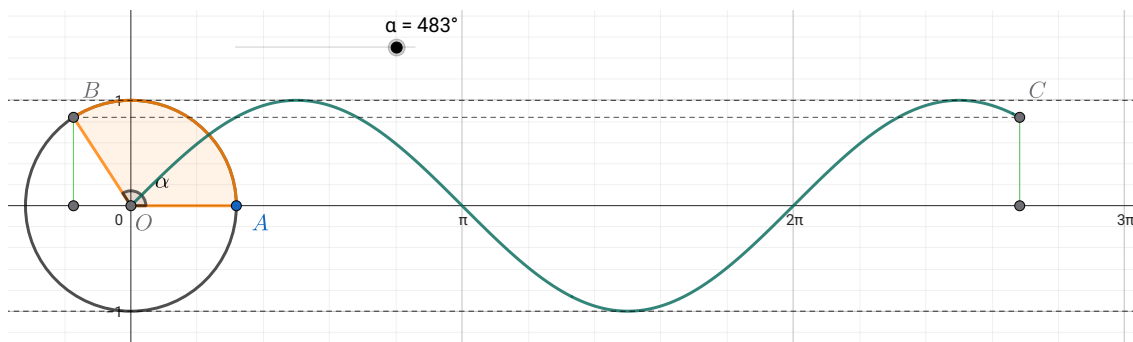


Figura 3.29: Elaboração e edição do autor. Função seno sendo criada de forma interativa.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/kazpyw7k>

- 6) Analogamente podemos fazer o mesmo processo para função cosseno. Como é possível ver na Figura 3.30.

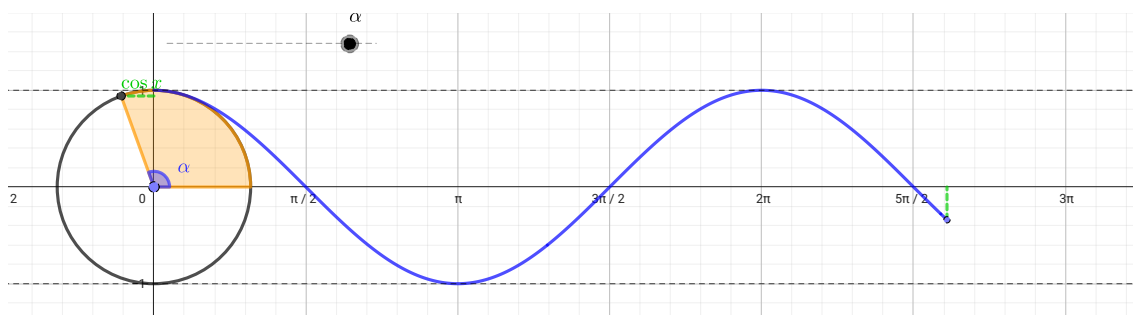


Figura 3.30: Elaboração e edição do autor. Função cosseno sendo criada de forma interativa.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/apjg5u7a>

- 7) Para Função tangente, vamos trocar a curvatura $b = (u, \operatorname{tg}(u), u, 0, \alpha)$ e $C = (\alpha, \operatorname{tg} \alpha)$. Utilizando a ferramenta "reta tangente", clique na circunferência e no ponto A , prolongue o segmento de reta $\overline{OB}$ por meio da ferramenta "reta" e marque a interseção entre ela e a tangente.

- 8) Pelo ponto C , traçar uma reta perpendicular passando pelo eixo x e pelos pontos o segmento de reta $\overline{AD}$.
- 9) Por fim para essa ilustração vamos definir, as assintotas: 1) $x = \frac{\pi}{2}$; 2) $x = \frac{3\pi}{2}$; e 3) $x = \frac{5\pi}{2}$. Ressaltando que essas retas são onde a tangente não se encontra definida.

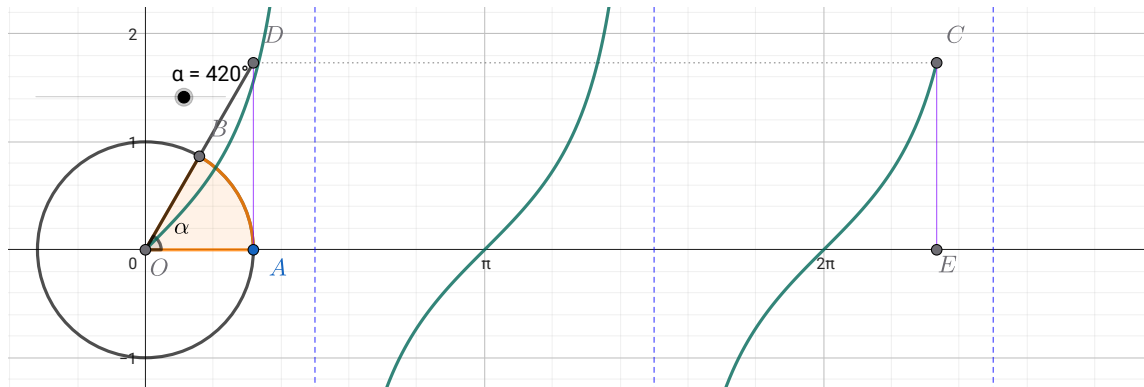


Figura 3.31: Elaboração e edição do autor. Função cosseno sendo criada de forma interativa.

Animção: <https://www.geogebra.org/m/xzxxjxtb>

- 10) Analogamente podemos definir as funções trigonométricas inversas secante, cossecante e cotangente (Veja as Figuras 3.32, 3.33 e 3.34).

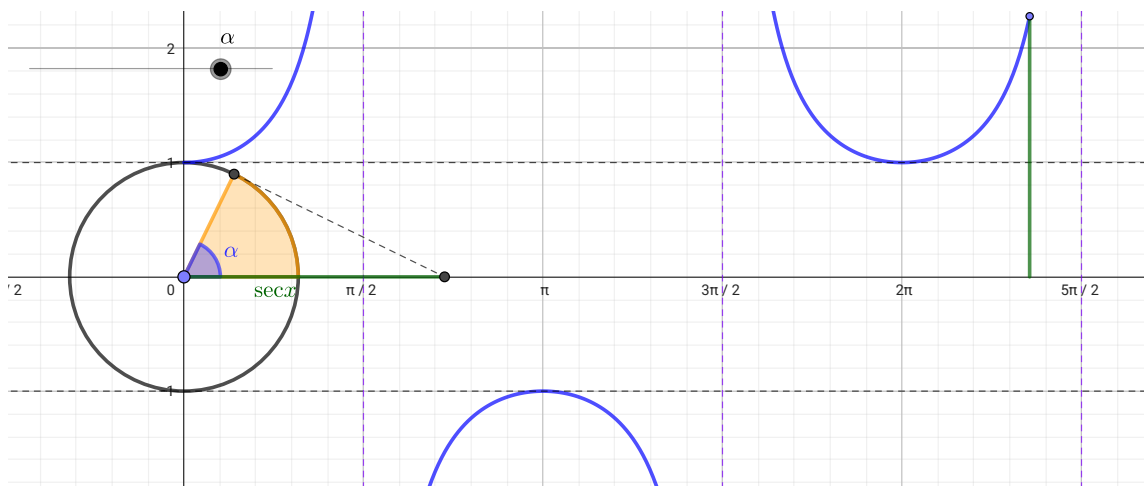


Figura 3.32: Função secante sendo criada de forma interativa.

Animção: <https://www.geogebra.org/m/xzxxjxtb>

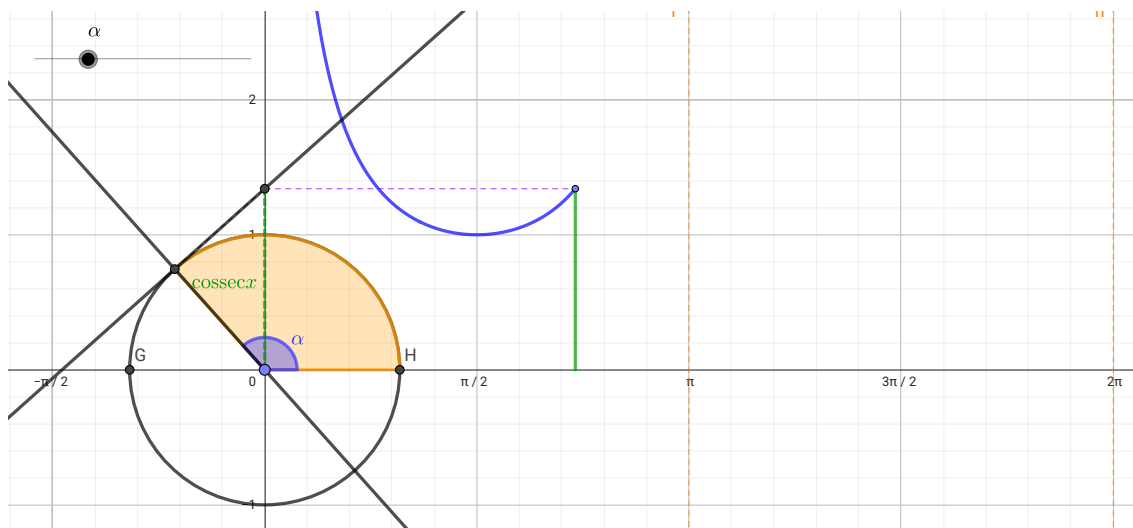


Figura 3.33: Função cossecante sendo criada de forma interativa.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/rge2jppk>

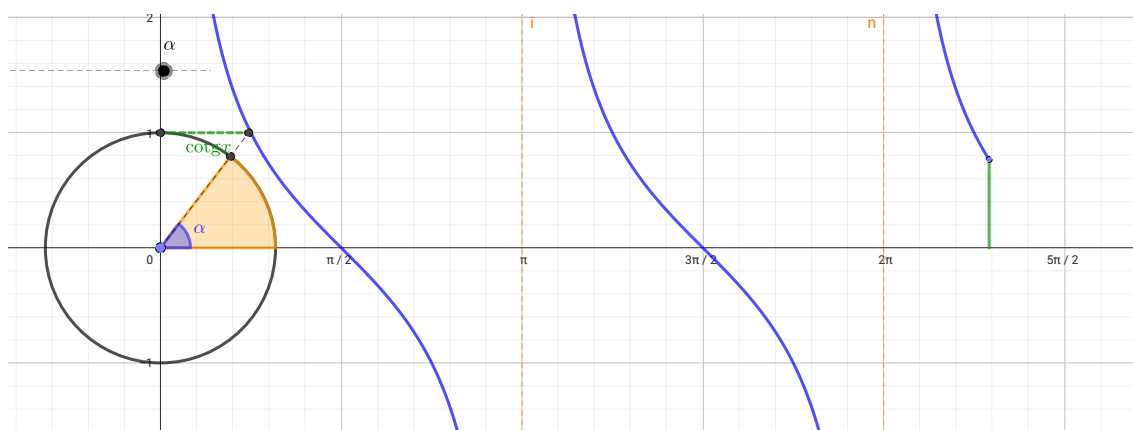


Figura 3.34: Função cotangente sendo criada de forma interativa.

Animação: <https://www.geogebra.org/m/caqjwwnc>

- 11) Para finalizar vamos definir os modelos $f(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ com a intenção de verificar como são os comportamentos das funções, observando suas propriedades fundamentais.
- 12) Selecione um arquivo novo no GeoGebra, em sequência defina 4 controles deslizantes: a - será o deslocamento vertical da função; b - será a amplitude; c - frequência da função; d - deslocamento horizontal.
- 13) Digite exatamente no campo de entrada a primeira função $f(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$.
- 14) Digite exatamente no campo de entrada a segunda função $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$.
A representação destes dois passos dever ficar expostos como na Figura a seguir.

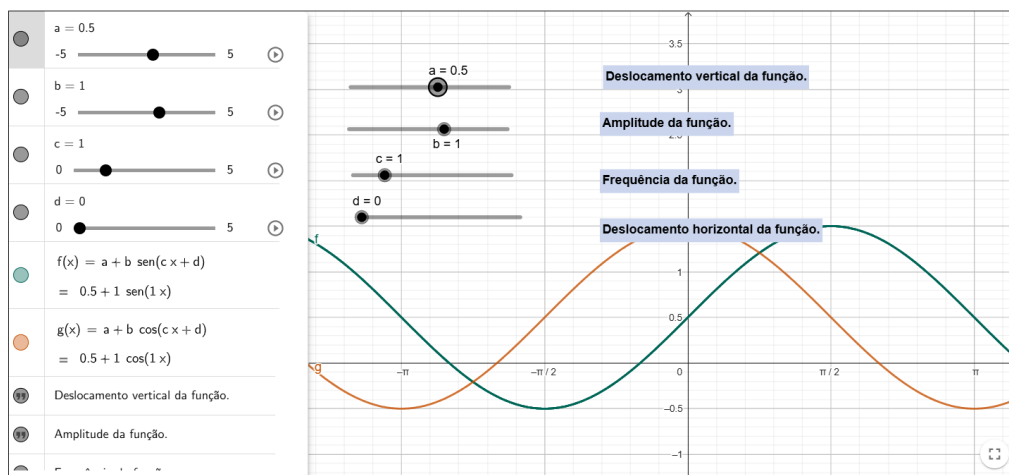


Figura 3.35: Representação dos modelos das funções $f(x)$ e $g(x)$.

Animção: <https://www.geogebra.org/m/vc9yjbbsc>

- 15) Cabe ressaltar que a escrita dessas funções possibilita a visualização de muitas propriedades. As principais são: Deslocamento vertical e horizontal, Frequência e amplitude. Para finalizar solicite que os alunos façam a atividade no link <https://www.geogebra.org/m/jmhdu3ew> (Veja no Apêndice A - A.7).

3.1.8 Sequência 8 - Soma e Subtração de arcos

Tema: Trigonometria.

Componente curricular: Matemática.

Série: 2º Ano (EM).

Quantidade de aulas: 3.

Objeto de conhecimento (Conteúdo): Soma e Subtração de arcos.

Habilidades:

- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Desenvolvimento da sequência

Introduza a ideia de que podemos somar e subtrair arcos, assim como somamos e subtraímos números, enfatizando a analogia entre operações numéricas e geométricas. Demonstre essas primeiras ideias explicando dialogicamente como podemos fazer a representação por meio da demonstração e mostrando exemplos.

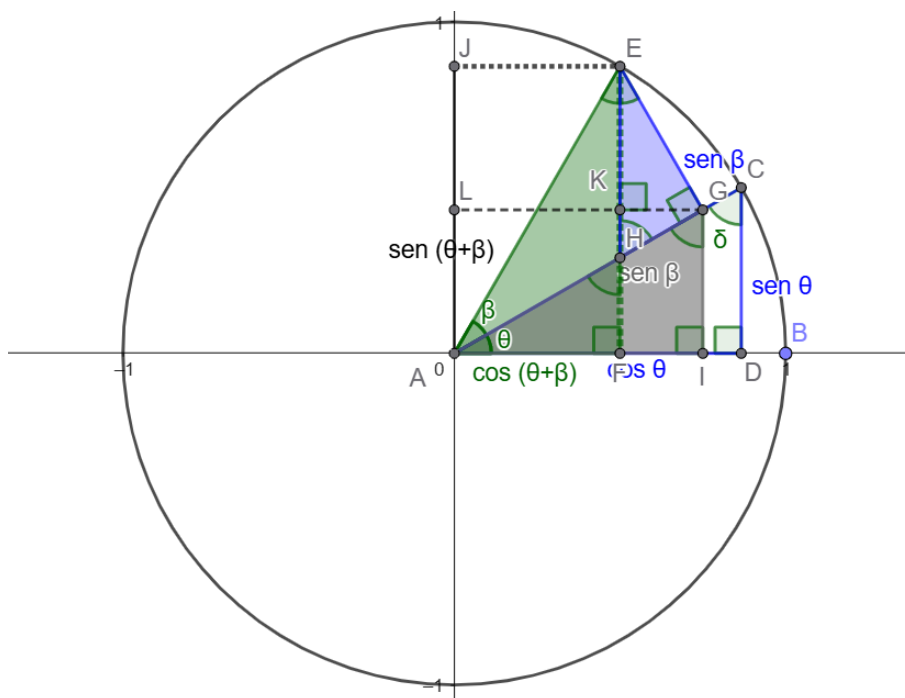


Figura 3.36: Construção para demonstração da soma de arcos.

Utilize como exemplo a construção da Figura 3.36. Demonstre as fórmulas de adição e subtração para seno, cosseno e tangente. Posteriormente a apresentação das fórmulas de arcos, solicite que os alunos sigam os passos para elaborar a ferramenta.

- 1) No GeoGebra, crie um círculo trigonométrico unitário. Marque um ponto C para formar o $\widehat{BC}$. Em seguida, utilize a ferramenta "Reta perpendicular" e clicando no ponto C e, depois no eixo x , marque o ponto D na interseção obtida e finalize aplicando a ferramenta "Polígono" para desenhar o triângulo $\triangle ADC$.
- 2) Marque o ponto E , para formar o arco $\widehat{CE}$. Novamente, utilize a ferramenta "Reta perpendicular" e clicando no ponto E e, depois no eixo x , marque o ponto F na interseção obtida e finalize aplicando a ferramenta "Polígono" para desenhar o triângulo $\triangle AFE$.
- 3) Utilize a ferramenta "Reta perpendicular" clique no ponto E e no segmento de reta $\overline{AC}$. Marque o ponto G , por fim utilize a ferramenta "Polígono" para desenhar o triângulo $\triangle AGE$.

- 4) No ponto G , utilize a ferramenta "Reta perpendicular" e clicando no ponto e , depois no eixo x . Marque o ponto I para formar o triângulo $\triangle AIG$ utilize a ferramenta "Polígono".
- 5) Ressalte aos alunos a importância de compreender esse processo para realizar a atividade posteriormente. Cabe ressaltar que ficaremos com a elaboração junto aos alunos nesse ponto, devido ao acessarem a atividade essa mesma elaboração estar disponível em: <https://www.geogebra.org/m/vb29kchp> (Veja no Apêndice A - A.8).

3.2 Avaliação das sequências didáticas

Nesse aspecto, a avaliação contempla três vertentes. A primeira, diagnóstica, tem como objetivo identificar os pontos fortes e fracos do aluno em determinada área de conhecimento, permitindo um levantamento inicial das dificuldades e habilidades. A segunda, formativa, corresponde à evolução da avaliação diagnóstica, na qual o processo de descoberta conduz a novas elaborações de aprendizagem, sempre mediadas pelo professor. Por fim, a avaliação somativa busca, por meio da média de trabalhos individuais e em grupo, debates, provas e análise das atividades realizadas, atribuir uma nota conceitual que reflita o percentual de objetivos de aprendizagem alcançados, desenvolvidos ou demonstrados pelo aluno.

A quantidade de aulas pode ser ajustada conforme o ritmo da turma e o nível de familiaridade com o GeoGebra. As atividades devem ser flexíveis, permitindo diferentes níveis de exploração, desafios extras ou simplificações. Recomenda-se registrar as dificuldades mais comuns para possibilitar ajustes em futuras aulas.

Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo apresentar uma pesquisa aplicada sobre os conceitos de trigonometria de forma dinâmica, de modo que essa área da matemática possa ser ensinada aos alunos por meio de aplicativos de geometria dinâmica e sequências didáticas. Nesse aspecto, foi discutido a importância da integração dos recursos tecnológicos e a trigonometria, vislumbrando as formas como tais aparatos influenciam no mundo moderno e como são exercidos o poder de contribuição educativo.

Realizando uma breve reflexão sobre o trabalho, é interessante elencar alguns pontos pertinentes. Primeiro, as sequências elaboradas visam oferecer um apoio pedagógico complementar, de forma que o professor possa experimentar geometria dinâmica e promover maior interatividade em sala de aula [Moran 2007]. Segundo, busca-se incentivar a criação de materiais pedagógicos utilizando as novas tecnologias [Valente 2011]. Terceiro, pretende-se proporcionar uma melhor compreensão da visualização dos conceitos trigonométricos construídos historicamente.

Diante dos conceitos expostos no referencial teórico, tratando de documentos oficiais como a BNCC [Brasil 2018] e diretrizes inerentes ao sistema educacional, o trabalho buscou agregar tais demandas organizadas para boa compreensão dos interesses pedagógicos e com objetivos bem definidos.

Apesar das contribuições apresentadas, este trabalho possui algumas limitações que devem ser consideradas. Primeiramente, as sequências didáticas propostas não foram aplicadas ou avaliadas empiricamente em sala de aula, o que impede a verificação prática de sua eficácia no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, a pesquisa se restringe a um recorte teórico e metodológico voltado ao uso de aplicativos de geometria dinâmica, sem explorar comparações com outras abordagens pedagógicas ou ferramentas digitais. Outra limitação refere-se à ausência de uma análise quantitativa ou qualitativa sobre o impacto real das tecnologias no desempenho dos alunos, o que abre espaço para futuras investigações. Por fim, o trabalho está delimitado a um contexto educacional específico, podendo apresentar resultados diferentes em outras realidades escolares ou níveis de ensino.

Como continuidade deste estudo, sugerem-se futuras pesquisas que possam aprofundar e ampliar os resultados aqui apresentados. Um caminho importante é a aplicação prática das sequências didáticas propostas em turmas reais da Educação Básica, analisando o impacto do uso de aplicativos de geometria dinâmica no desempenho e na motivação dos alunos. Outra possibilidade é a avaliação comparativa entre diferentes plataformas digitais, verificando quais recursos favorecem melhor a aprendizagem dos conceitos trigonométricos. Também se recomenda investigar a formação continuada de professores voltada ao uso de tecnologias educacionais, a fim de compreender como esses profissionais integram tais ferramentas em sua prática docente.

Esperamos que este estudo possa contribuir com a formação e pesquisa para professores na Educação Básica. Dessa forma, acreditamos promover por meio da geometria dinâmica, a elaboração de novos materiais pedagógicos com motivação na pesquisa científica, promover inovação com as novas tecnologias e principalmente corroborar para educação pública de qualidade.

As discussões sobre melhorias na educação são antigas, e observa-se esse debate se resumir sempre em melhorias na qualidade de ensino e aprendizagem. Cabe apontar ainda, inovação tecnológica não substitui o papel do professor, pelo contrário, motiva novos papéis na seleção e aplicação delas no ambiente educacional de forma eficaz alinhadas as necessidades da evolução social.

Por fim, defendemos que as propostas educacionais com tecnologia procuram criar possibilidades e agregar no desenvolvimento educacional com recursos capazes e eficientes, para tornar o ensino motivador, desafiador e acessível para alunos e professores.

Referências Bibliográficas

- [Alencar et al. 2022]ALENCAR, H. et al. **O GeoGebra como ferramenta de apoio ao entendimento de demonstrações em Geometria**. *Professor de Matemática Online (PMO)*, v. 10, n. 4, p. 483–501, 2022. ISSN 2319-023X. Disponível em: <<https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1033>>.
- [Barbosa 1995]BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (Coleção do Professor de Matemática), 1995.
- [Belloni 2009]BELLONI, M. L. **História da Matemática**. *Autores Associados*, Campinas, 2009.
- [Boyer 1974]BOYER, C. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 1974.
- [Brasil 2018]BRASIL. **BNCC - Base Nacional Comum Curricular**. [S.l.], 2018. Único.
- [Brasil. 2023]BRASIL. **Nota sobre o Brasil no PISA 2022**. Brasília, 2023. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa>>.
- [Brasil. 2024]BRASIL. **Relatório de resultados do SAEB 2021 - Volume 1**. Brasília, 2024. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2021/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2021_volume_1.pdf>.
- [Brasil. 1997]BRASIL., S. de E. F. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília, 1997. Disponível em: <<https://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>.
- [Carmo, Morgado e Wagner 2001]CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria Números Complexos**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (Coleção do Professor de Matemática), 2001.
- [Carvalho e Penteado 2021]CARVALHO, M. B.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. *Autêntica*, Belo Horizonte, 2021. Disponível

- em: <<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10533/6939>>.
- [Cordelina G. Pavanelo 2024]CORDELINA G. PAVANELO, E. **Uma possibilidade de programação no GeoGebra: primeiros passos.** *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 085–103, 2024. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/66910/46227>>.
- [Costa 2003]COSTA, N. M. L. d. **A história da trigonometria.** *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, n. 13, 2003. Disponível em: <<https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/1657/1150>>.
- [Dolz, Noverraz e Schneuwly 2004]DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. **Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de uma procedência didática.** *Tradução e organização de Roxane Rojo e Gláís Sales Cordeiro*, Mercado de Letras, Campinas, 2004. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/360334085/Dolz-Noverraz-Schneuly-Sequencias-Didaticas-Para-o-Oral-e-a-Escrita-Apresentacao-de-Um-Procedimento>>.
- [Hohenwarter e Fuchs 2005]HOHENWARTER, M.; FUCHS, K. **Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra.** In: *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching, Proceedings of Sprout-Selecting Conference (Sarvari, Cs. Hrsg.)*. [S.l.]: Bornus Nyomda, 2005. p. 128–133.
- [Kenski 2012]KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância.** Campinas: Papirus, 2012.
- [Ministério da Educação 2018]MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **BNCC:Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, jan. 2018. 600 p.
- [Moran 2007]MORAN, J. M. **A educação que desejamos: Novos desafios e como chegar lá.** Campinas-SP: Papirus, 2007.
- [Papert 1980]PAPERT, S. **Mindstorms: children, computers, and powerful ideas.** New York: Basic Books, 1980.
- [Piaget 1976]PIAGET, J. **A psicologia da criança.** Rio de Janeiro: Zahar, 1976.
- [Silva, Sousa e Carvalho 2022]SILVA, L. F. d.; SOUSA, E. P. d.; CARVALHO, R. L. **A GEOMETRIA DINÂMICA NA SALA DE AULA: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO.** *Revista Cearense de Educação Matemática*, v. 1,

n. 1, 2022. Disponível em: <<https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/rceem/article/view/3192/2170>>.

[Tardif 2002]TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes, 2002.

[Tezani 2009]TEZANI, T. C. R. **A relação entre gestão escolar e educação inclusiva: o que dizem os documentos oficiais?** *Revista online de Política e Gestão Educacional*, Araraquara, n. 6, p. 41–61, 2009. Acesso em: 7 jun. 2025. Disponível em: <<https://periodicos.fclar.unesp.br/rpge/article/view/9249/6131>>.

[UNESCO 2019]UNESCO. **Educação a distância**. UNESCO, Brasília, 2019.

[Valente 2011]VALENTE, J. A. **Diferentes usos do computador na educação**. In:PRETTO, N.; VALENTE, J. A. (Org.). *Tecnologias e educação: o novoritmo da informação*. Salvador, 2011.

[Zabala 1998]ZABALA, A. **As sequências didáticas e as sequências de conteúdo**. In: *Aprática educativa - Como ensinar*. Artmed, Porto Alegre, p. 53–87, 1998.

Atividades desenvolvidas no *GeoGebra*

A.1 Atividade - Teorema de Pitágoras

- Objetivo: Verificar o teorema de Pitágoras e suas aplicações.

O teorema diz: Em um triângulo retângulo qualquer,o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Ou seja, se os catetos medem b e c e a hipotenusa mede a, então $a^2 = b^2 + c^2$.

Exemplo A.1. Observe o comportamento de como o Teorema se comporta com as áreas suportes dos quadrados criados nos lados do triângulo ABC.

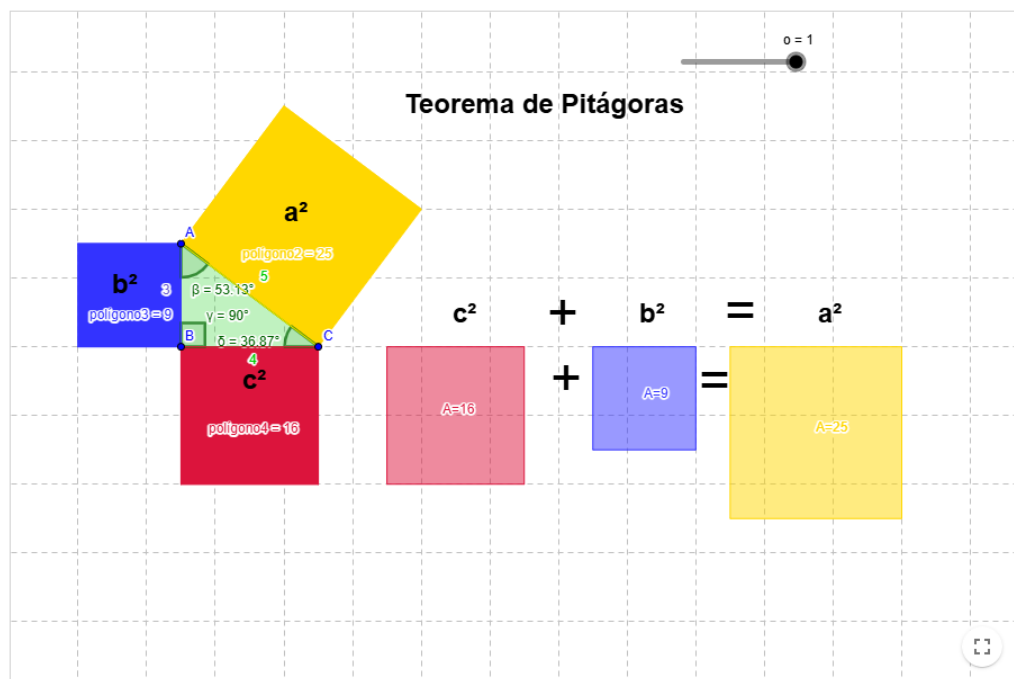
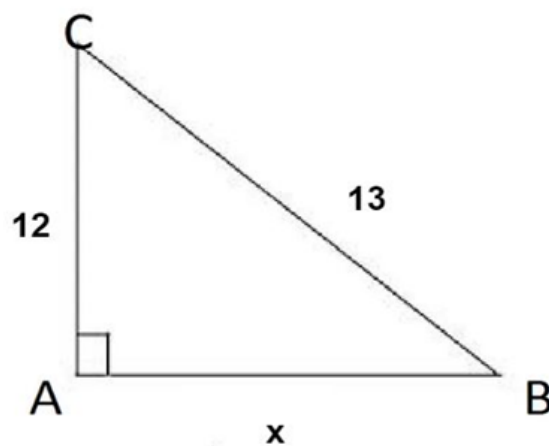


Figura A.1: Animação criada com Geogebra. Edição do autor. disponível em:<https://www.geogebra.org/m/uwhe43sn>

Questão 1: Qual é o valor da hipotenusa de um triângulo retângulo, sabendo-se que os catetos medem 8 e 15 unidades?

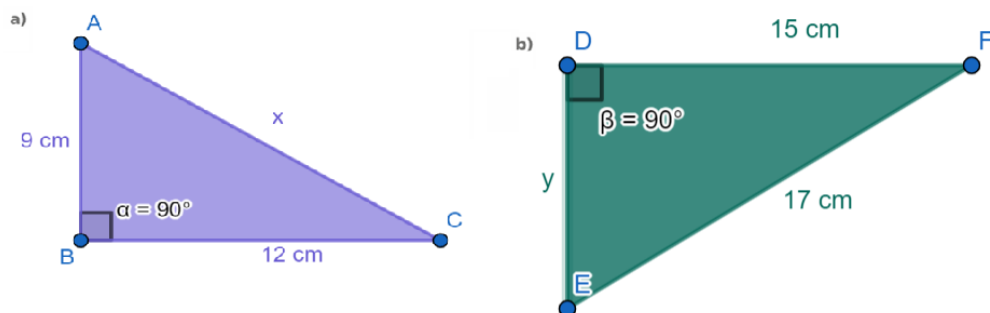
- A) 12
- B) 17
- C) 14
- D) 23
- E) 20

Questão 2: Qual é o valor de x na figura abaixo?



- A) 5
- B) 10
- C) 12
- D) 13
- E) 7

Questão 3: Determine o valor de x e y respectivamente na figura a seguir:



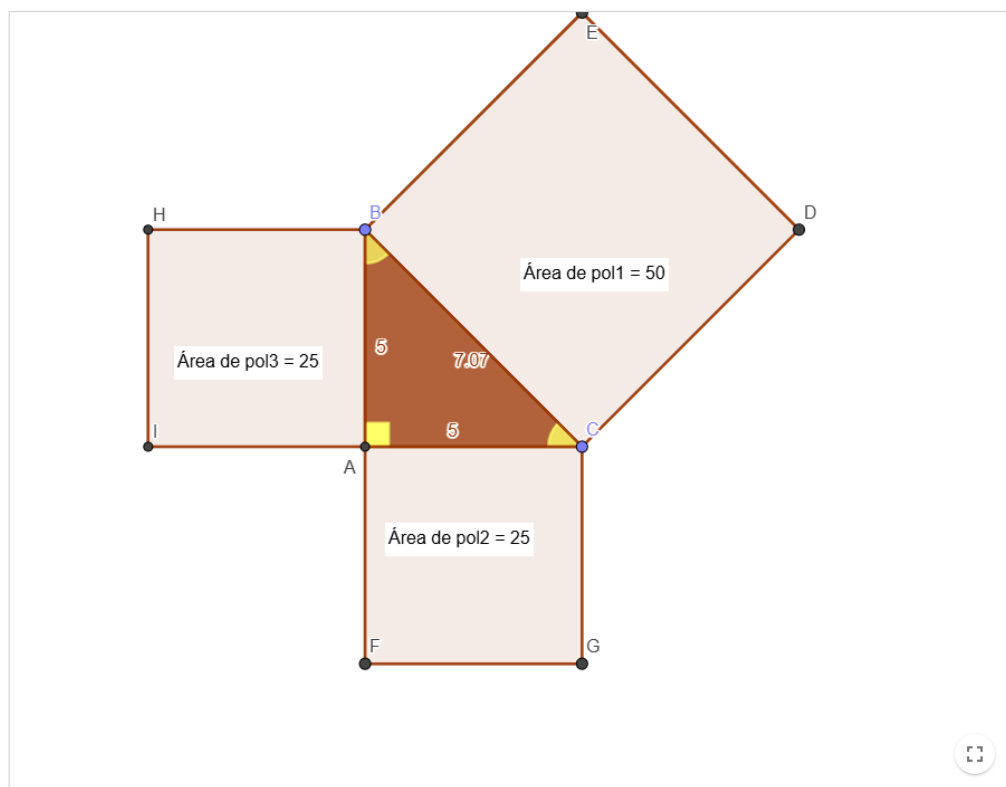
- A) 15 cm e 64 cm.
- B) 8 cm e 12 cm.
- C) 15 cm e 8 cm.

- D) 225 cm e 8 cm.
E) 225 cm e 64 cm.

Questão 4: Qual das alternativas apresenta um triângulo retângulo?

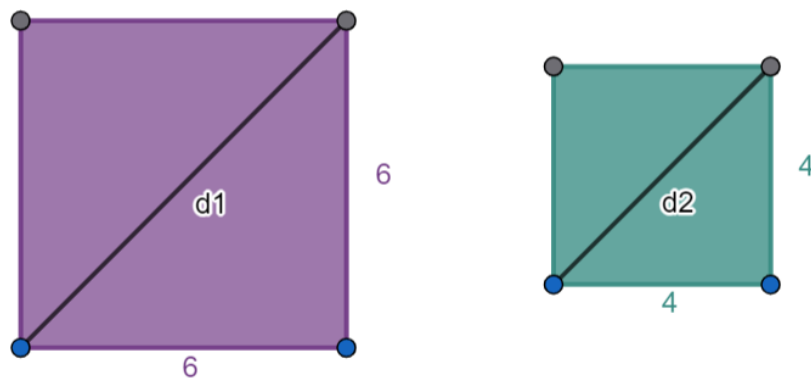
- A) 4 cm, 5 cm e 12 cm.
B) 8 cm, 6 cm e 10 cm.
C) 2 cm, 5 cm e 9 cm.
D) 5 cm, 12 cm e 7 cm.
E) 10 cm, 6 cm e 5cm.

Para ajudar na "Questão 4" clique no ponto B e C para selecionar um por vez e em seguida utilize a seta para cima ou para baixo no ponto B e seta para direita ou esquerda no botão C. Ao fazer isso você pode verificar as medidas dos lados dos triângulos com suas respectivas medidas de forma interativa.



Questão 5: Qual das alternativas representa a diagonal d1 e d2 de cada quadrado respectivamente?

- A) $4\sqrt{2}$ e 6.
B) 4 e $6\sqrt{2}$.
C) $4\sqrt{2}$ e $6\sqrt{2}$.
D) $6\sqrt{2}$ e $4\sqrt{2}$.



E) 6 e 4.

A.2 Atividade - Aplicando as ideias de razões trigonométricas

- Objetivo: Exibir e calcular o seno, cosseno e tangente de ângulos quaisquer sabendo a medida dos lados de um triângulo retângulo.

Consideremos um triângulo retângulo ABC a seguir:

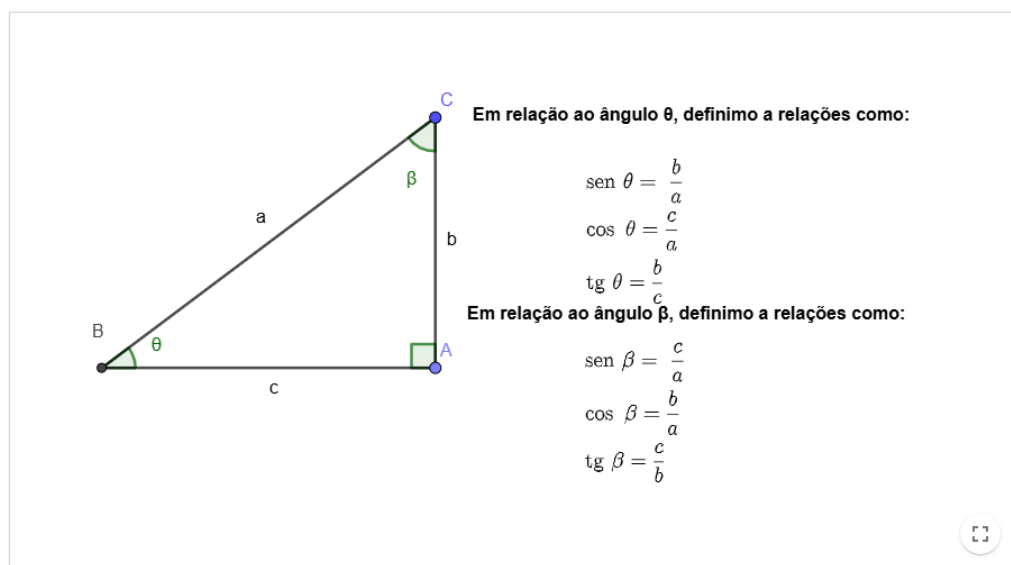
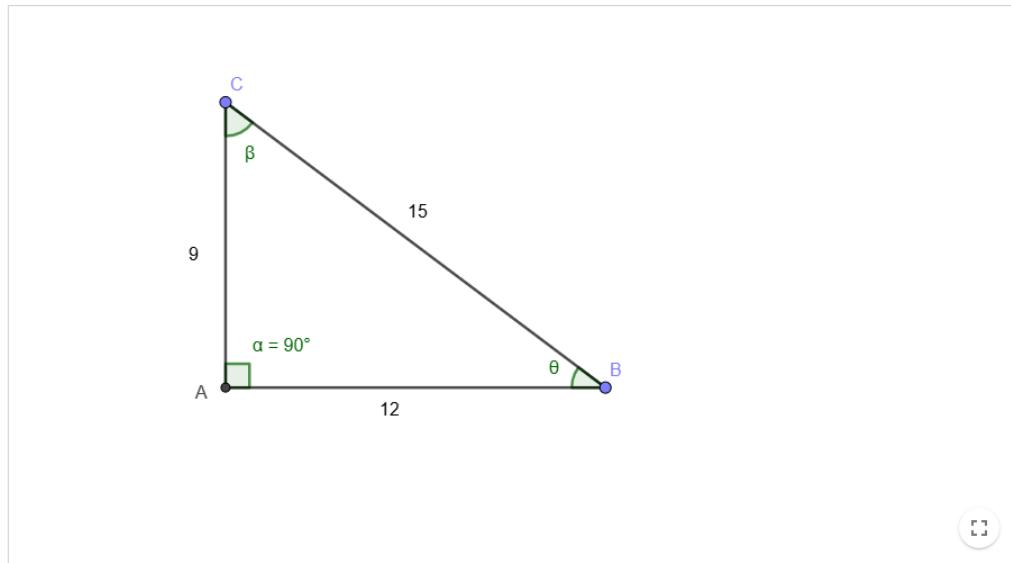


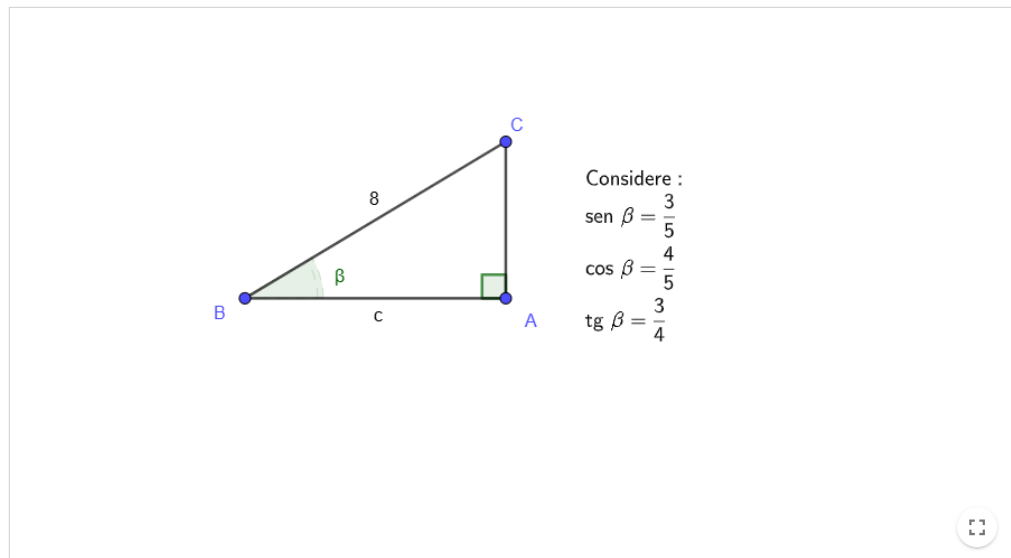
Figura A.2: Figura para utilizar nas questões subsequentes. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/nddrmts3>.

Questão 1: Observe o triângulo retângulo abaixo e determine o valor das razões trigonométricas que estão corretas.



- A) $\sin \theta = \frac{9}{15}$ e $\tan \theta = \frac{4}{3}$.
 B) $\cos \theta = \frac{5}{3}$ e $\sin \theta = \frac{4}{5}$.
 C) $\tan \theta = \frac{3}{4}$ e $\sin \theta = \frac{5}{4}$.
 D) $\cos \theta = \frac{3}{4}$ e $\sin \theta = \frac{4}{5}$.
 E) $\tan \theta = \frac{5}{4}$ e $\cos \theta = \frac{5}{4}$.

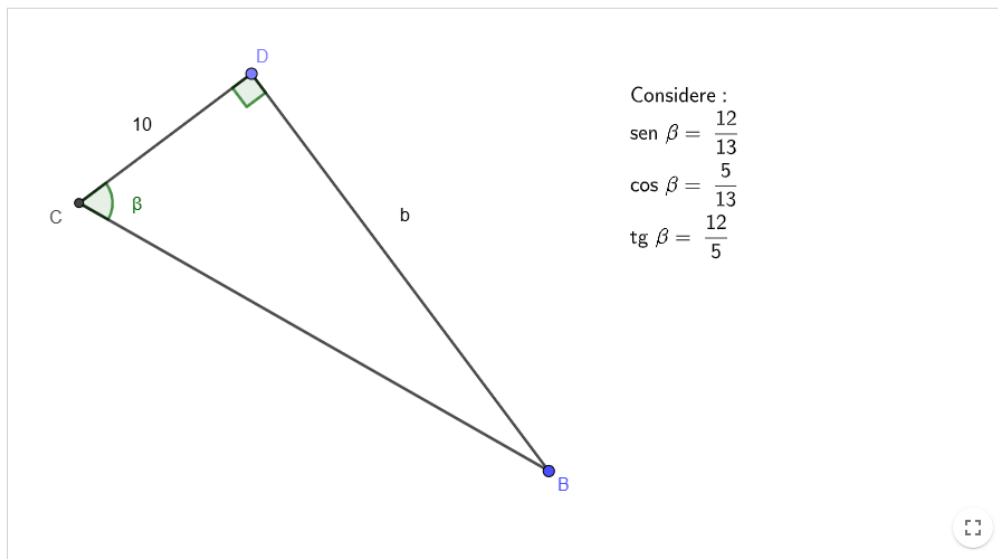
Questão 2: Calcule o valor de c no triângulo retângulo abaixo.



- A) 640.
 B) 64.
 C) 6,4.
 D) 0,64.

E) 0,064.

Questão 3: Calcule o valor de b no triângulo retângulo abaixo.



A) 240.

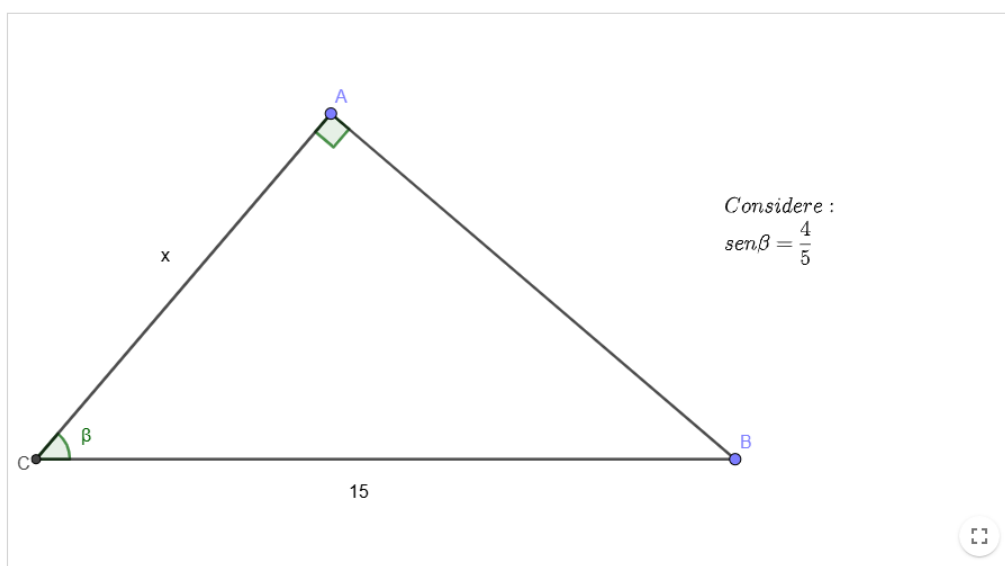
B) 12.

C) 5.

D) 120.

E) 24.

Questão 4: Sabendo que o triângulo ABC é retângulo e que $\text{sen } \theta = \frac{4}{5}$, determine o valor de h.



- A) 12.
- B) 9.
- C) $\frac{3}{5}$.
- D) 5.
- E) 3.

•ÂNGULOS NOTÁVEIS

Os ângulos notáveis são os ângulos de 30° , 45° e 60° , que são importantes na Trigonometria e em cálculos que envolvem razões trigonométricas como seno, cosseno e tangente. A denominação "notáveis" se deve à sua importância e frequência de uso em problemas de matemática, principalmente na Trigonometria. Os valores do seno, cosseno e tangente para esses ângulos são conhecidos e podem ser encontrados em tabelas trigonométricas, demonstrados com maior facilidade ou memorizados.

Razões Trigonômicas dos ângulos de 30° e 60°

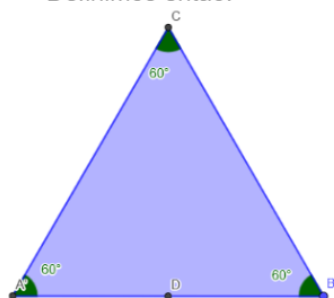
No triângulo equilátero ABC de lado a vamos traçar a altura AD.

Obtemos então $FG = \frac{a}{2}$ e se aplicarmos o teorema de

Pitágoras vamos Encontrar $EF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Temos dois ângulos definidos, $\angle FGE = 60^\circ$ e $\angle FEG = 30^\circ$.

Definimos então:



$$1) \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2};$$

$$2) \sin 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3}.$$

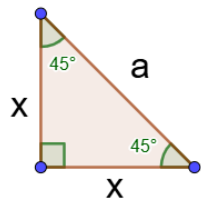
$$1) \sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2};$$

$$2) \cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Razões Trigonômétricas do ângulo de 45°

No triângulo isósceles ABC vamos considerar que ele possui dois ângulos de 45° e o terceiro medindo 90°.



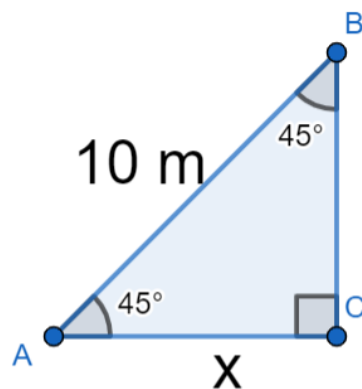
$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + x^2 \\ a^2 &= 2x^2 \\ a &= \sqrt{2x^2} \\ a &= x\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$1) \sin 45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) \cos 45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

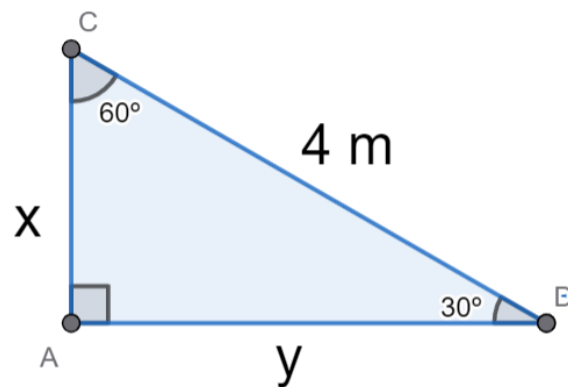
$$3) \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{x}{x} = 1$$

Questão 5: Determine o valor de x (Observe os ângulos notáveis acima):



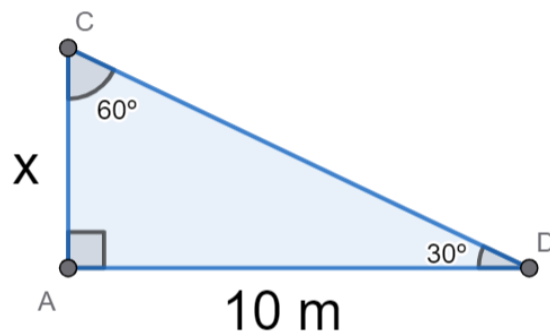
- A) 5 m.
- B) 10 m.
- C) $2\sqrt{5}$ m.
- D) $5\sqrt{2}$ m.
- E) $10\sqrt{2}$ m.

Questão 6: Determine o valor de x e y respectivamente (Observe os ângulos notáveis acima):



- A) 2 m e 2 m.
- B) $\sqrt{2}$ m e $4\sqrt{3}$ m.
- C) 2 m e $2\sqrt{3}$ m.
- D) $2\sqrt{3}$ m e 2 m.
- E) $2\sqrt{3}$ m e $2\sqrt{3}$ m.

Questão 7: Determine o valor de x (Observe os ângulos notáveis acima):



- A) $\sqrt{3}$ m.
- B) $10\sqrt{2}$ m.
- C) $3\sqrt{10}$ m.
- D) $\frac{10\sqrt{3}}{2}$ m.
- E) $\frac{10\sqrt{10}}{3}$ m.

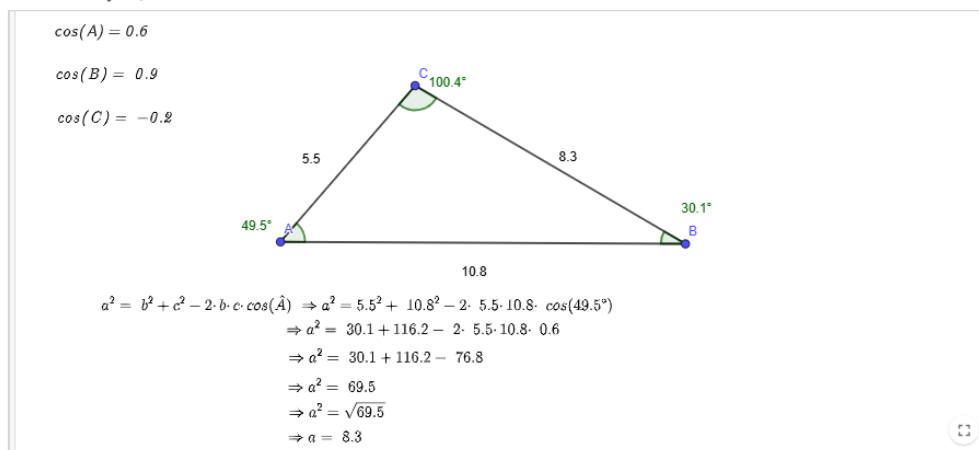
A.3 Atividade - Aplicações Lei dos Cossenos

- Objetivo: Verificar a Lei dos cossenos e testar em atividades semelhantes.

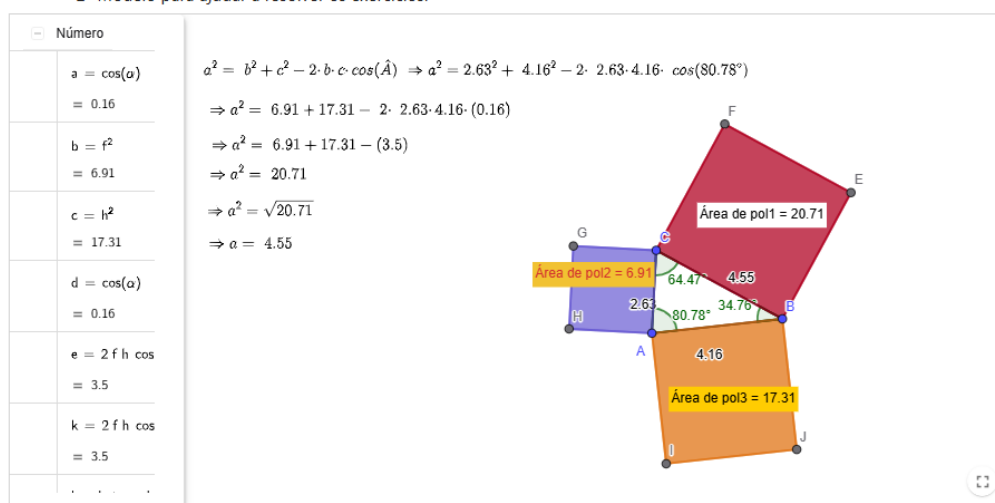
Teorema (Lei dos Cossenos) Seja um triângulo $\triangle ABC$, onde $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$. Então,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

1º Modelo para ajudar a resolver as questões (Clique nos pontos A, B ou C e ajuste para chegar a medida desejada).



2º Modelo para ajudar a resolver os exercícios.



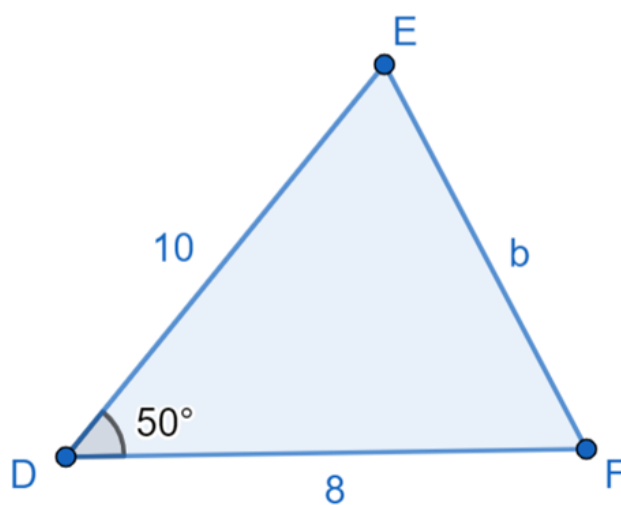
Questão 1: Qual o cosseno do maior ângulo do triângulo de lados medindo 5, 6 e 7?

- A) 0,1.
- B) 0,2.
- C) 0,3.
- D) 0,4.
- E) 0,5.

Questão 2: Qual o cosseno do menor ângulo do triângulo de lados medindo 7, 8 e 10?

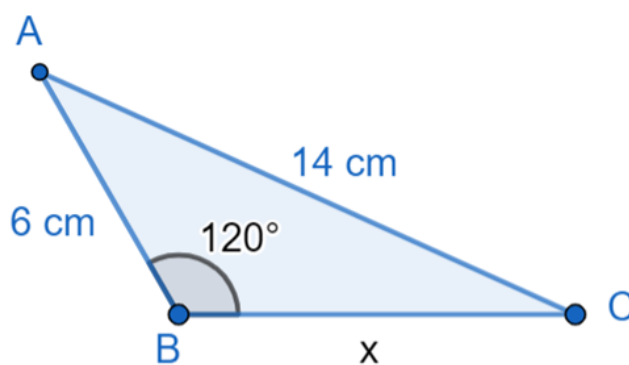
- A) 0,1.
- B) 0,2.
- C) 0,3.
- D) 0,4.
- E) 0,5.

Questão 3: Na figura a seguir, determine a medida do lado b.



- A) 5,5.
- B) 6,8.
- C) 7,8.
- D) 9,8.
- E) 6,82.

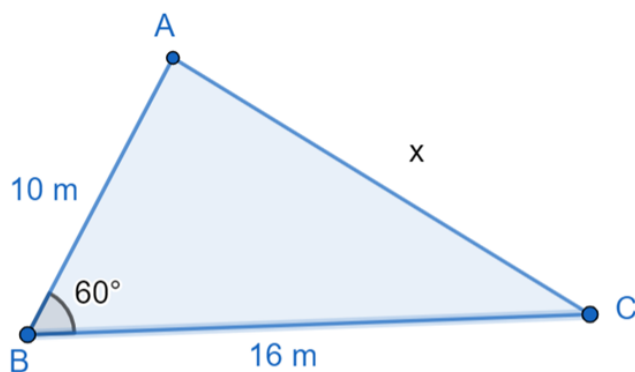
Questão 4: Determine x na figura abaixo:



- A) 5 cm.

- B) 7 cm.
- C) 9 cm.
- D) 10 cm.
- E) 11 cm.

Questão 5: Determine o valor de x :



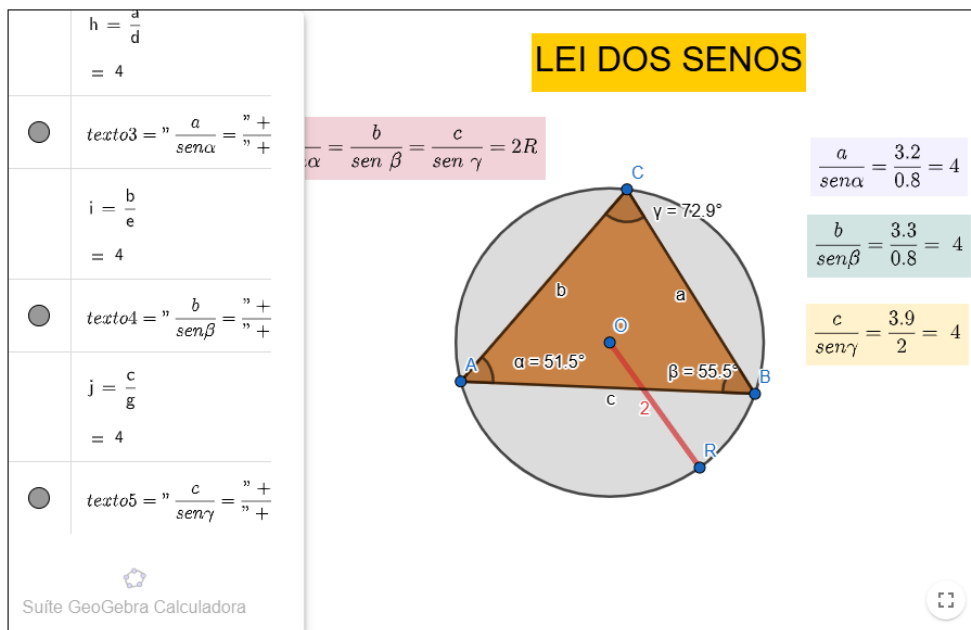
- A) 10 m.
- B) 11 m.
- C) 12 m.
- D) 13 m.
- E) 14 m.

A.4 Atividade - Aplicações Lei dos Senos

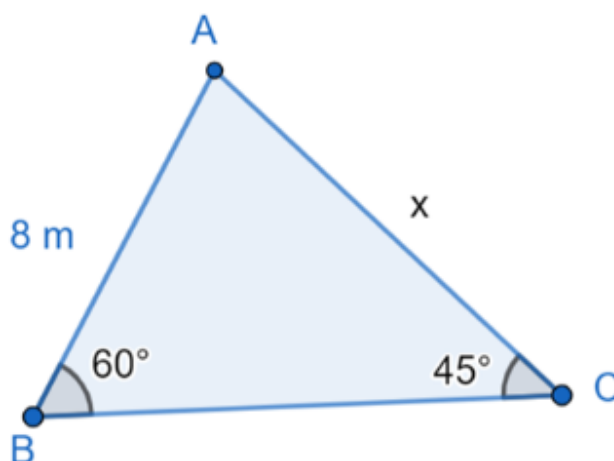
- Objetivo: Verificar a Lei dos senos e testar em atividades semelhantes.

Teorema (Lei dos Senos) Considere um triângulo $\triangle ABC$ com lados AB, AC e BC de medidas, respectivamente, c, b e a. Se R é a medida do raio do círculo circunscrito a ABC, então:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



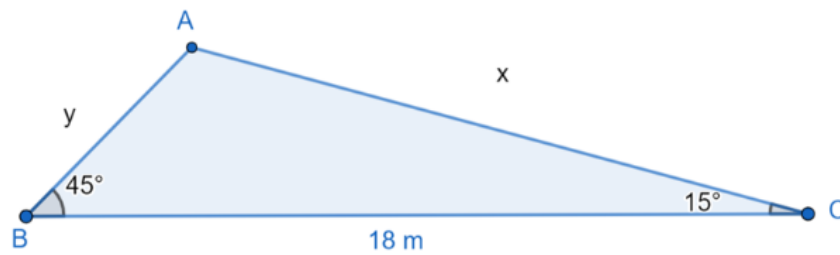
Questão 1: No triângulo ABC seguinte, determine o valor de x.)



- A) $4\sqrt{3}$.
- B) $4\sqrt{2}$.
- C) $4\sqrt{6}$.
- D) 4.

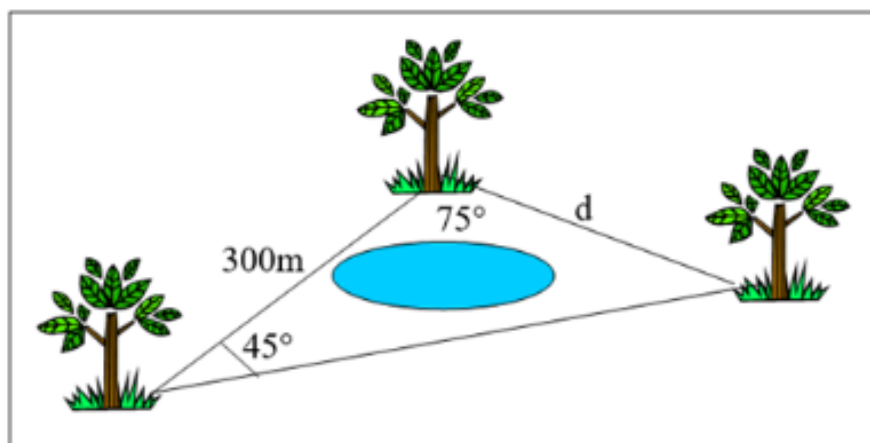
E) 12.

Questão 2: Dado o triângulo abaixo, e sabendo que dois de seus ângulos são de 15° e 45° respectivamente e que o lado em comum mede 18, quais são os valores aproximados dos lados x e y respectivamente? Dados: $\sin 15^\circ = 0,26$; $\sin 120^\circ = 0,86$ e $\sin 45^\circ = 0,70$



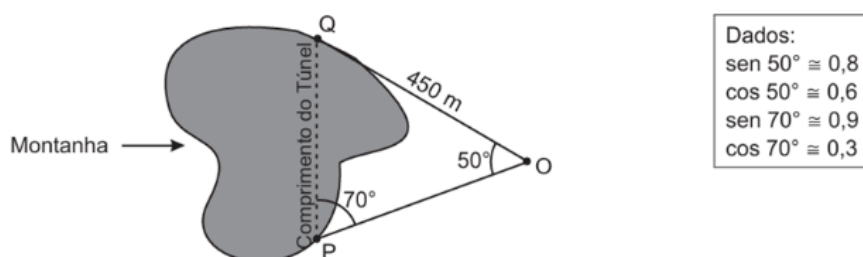
- A) 5,44 m e 14,65 m.
- B) 14,65 m e 5,44 m.
- C) 16 m e 6 m.
- D) 14,65 m e 20,65 m.
- E) 5,44 m e 20,65 m.

Questão 3: Determine a distância d indicada na figura (Utilize $\sqrt{6} \cong 2,45$).



- A) 220 m.
- B) 225 m.
- C) 235 m.
- D) 245 m.
- E) 250 m.

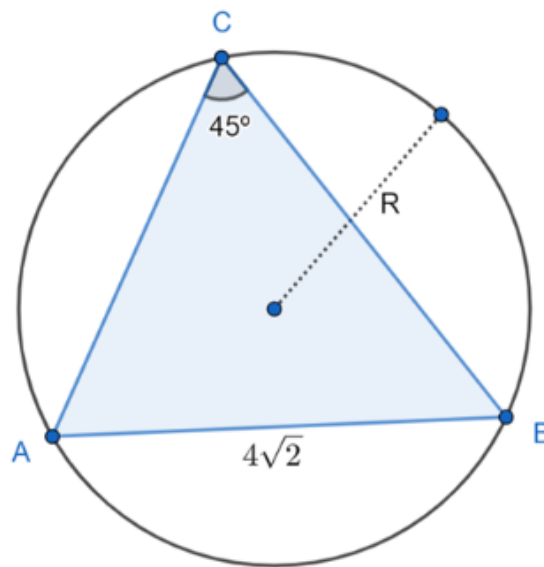
Questão 4: (Prova Diagnostica/GO – 2025) Um túnel será construído para atravessar uma montanha. Um estudante de engenharia preparou um esboço com algumas medidas para estimar o comprimento desse túnel. Nesse esboço, ele representou os pontos P e Q como a entrada e a saída desse túnel e utilizou um terceiro ponto de referência, denominado O, de modo que os segmentos OP segmento PQ e OQ formaram um ângulo de 50° e o representa o comprimento desse túnel. Observe abaixo o esboço feito por esse estudante no qual a figura em cinza representa a vista superior da montanha onde será construído esse túnel.



De acordo com esse esboço, qual será a medida do comprimento, em metros, desse túnel?

- A) 321,43 m.
- B) 400,00 m.
- C) 450,00 m.
- D) 506,25 m.
- E) 900,00 m.

Questão 5: (FUVEST – SP – Adaptada) Em um triângulo ABC o lado AB mede e o ângulo C, oposto ao lado AB, mede 45° . Determine o raio da circunferência que circunscreve o triângulo.

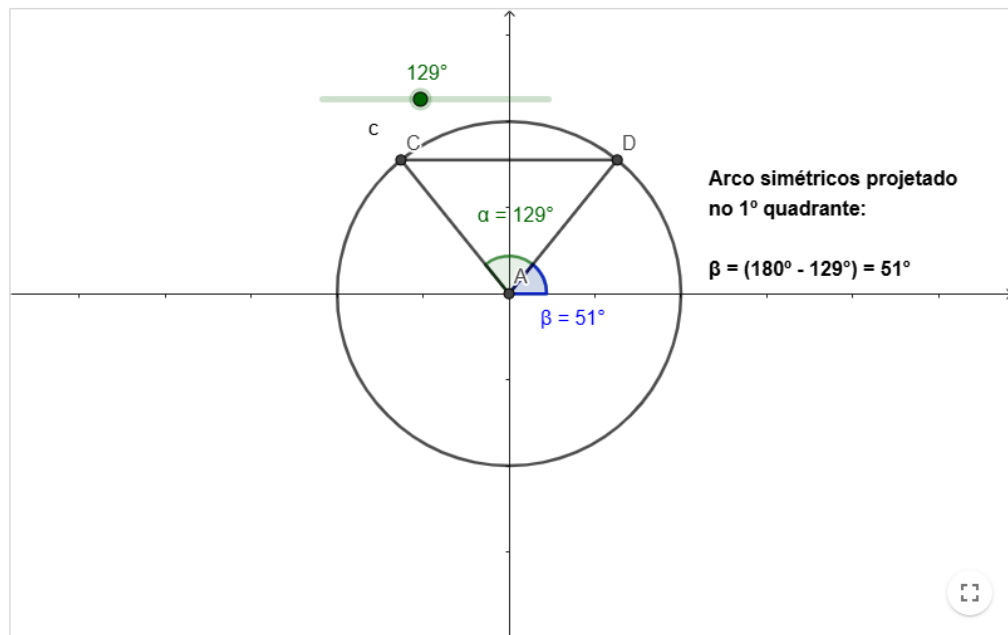


- A) 2 m.
- B) 4 m.
- C) 6 m.
- D) 8 m.
- E) 10 m.

A.5 Atividade - Aplicações de trigonometria e simetrias

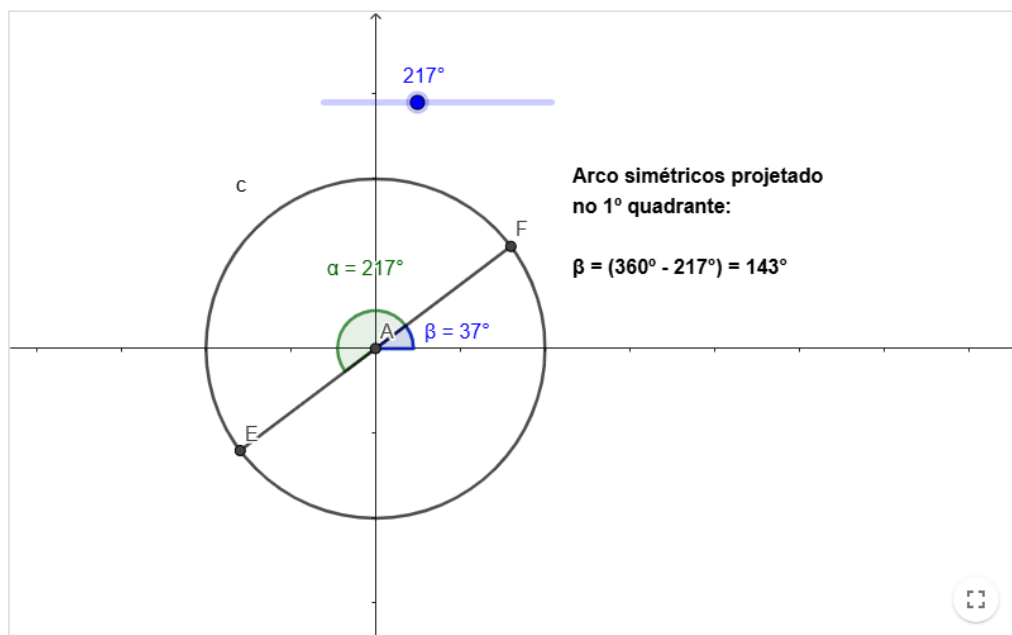
•Objetivo: Verificar arcos simétricos no 2º Q, 3º Q e 4º Q.

Questão 1: Verifique a simetria dos arcos de 150° , 135° , 120° respectivamente no 1º quadrante. (Observe a representação e movimento o controle deslizante para verificar o ângulo desejado.)



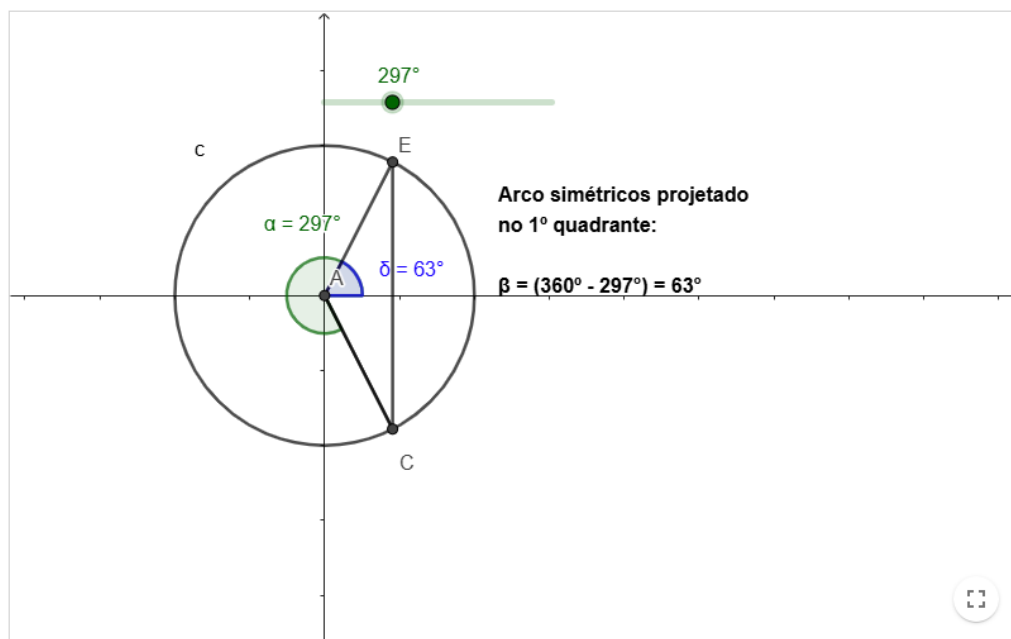
- A) 30° , 45° , 70° .
- B) 30° , 45° , 60° .
- C) 60° , 30° , 45° .
- D) 60° , 45° , 30° .
- E) 30° , 60° , 45° .

Questão 2: Verifique a simetria dos arcos de 240° , 225° , 210° respectivamente no 1º quadrante. (Observe a representação e movimento o controle deslizante para verificar o ângulo desejado).



- A) 30° , 45° , 70° .
- B) 30° , 45° , 60° .
- C) 60° , 30° , 45° .
- D) 60° , 45° , 30° .
- E) 60° , 45° , 30° .

Questão 3: Verifique a simetria dos arcos de 300° , 330° , 315° respectivamente no 1º quadrante. (Observe a representação e movimente o controle deslizante para verificar o ângulo desejado).



- A) 30° , 45° , 70° .
- B) 30° , 45° , 60° .
- C) 60° , 30° , 45° .
- D) 60° , 45° , 30° .
- E) 30° , 60° , 45° .

A.6 Atividade - Aplicações de trigonometria no ciclo trigonométrico

- Objetivo: Aplicar as relações trigonométricas no ciclo trigonométrico.

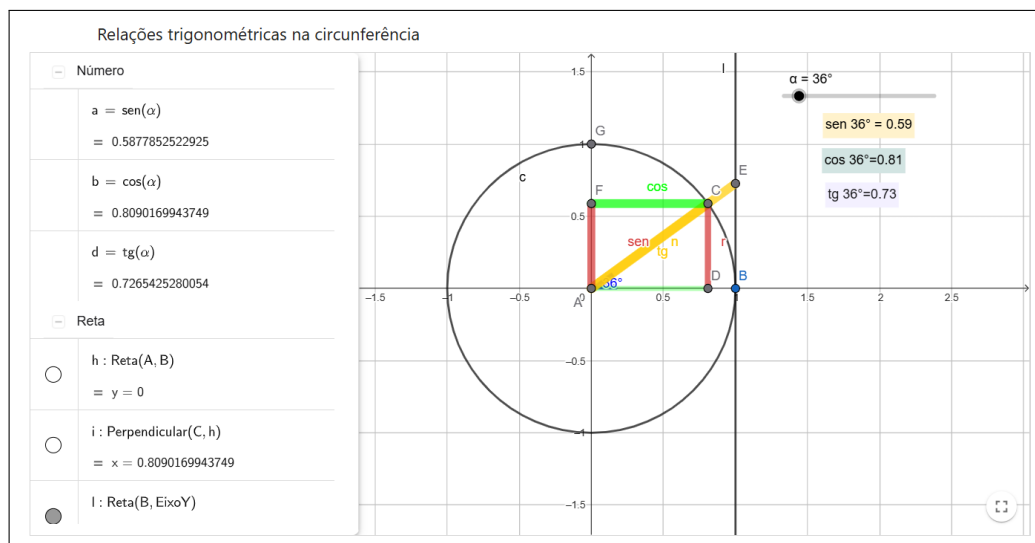


Figura A.3: Animação suporte para realizar as atividades desse conjunto 1.

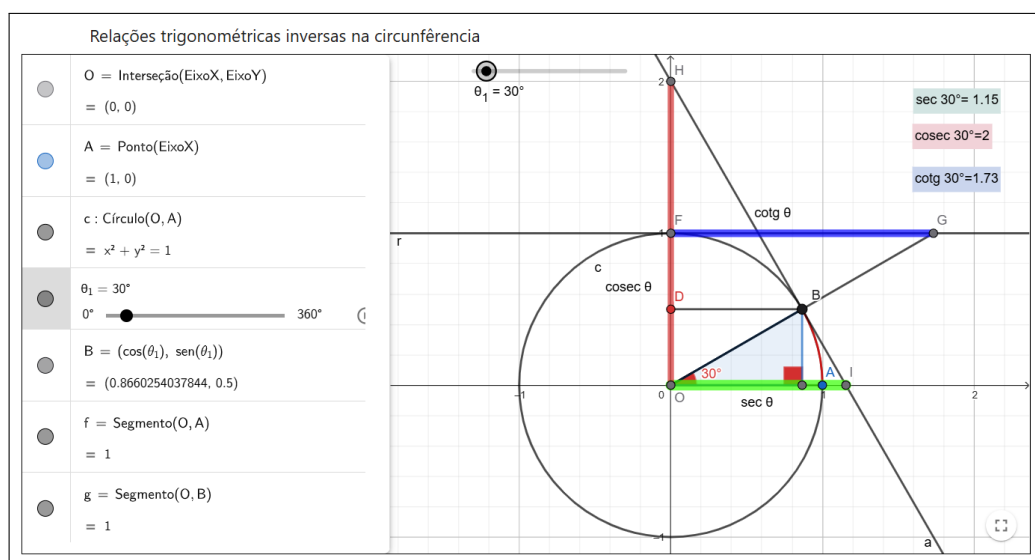


Figura A.4: Animação suporte para realizar as atividades desse conjunto 2.

Questão 1: Calcule o valor de $\cos 330^\circ$.

- A) 0,5.
- B) -0,5.
- C) 0,87.
- D) -0,87.
- E) 0,58.

Questão 2: Determine o valor de $\sin 16^\circ$.

- A) 0,86.
- B) 0,96.
- C) 0,28.
- D) 0,69.
- E) 0,68.

Questão 3: Qual a $\sec 45^\circ$?

- A) 0,41.
- B) -0,41.
- C) -1,41.
- D) 1,41.
- E) 4,11.

Questão 4: Qual o valor de $\cotg 30^\circ$?

- A) 0,58.
- B) -0,58.
- C) -1.
- D) 1,73.
- E) -1,73.

Questão 5: Sendo $\cos x = 0,6$, com x no 4º quadrante, determine o $\sin x$.

- A) -0,8.
- B) 0,8.
- C) 0,5.
- D) -0,36.
- E) -0,64.

Questão 6: Por meio das relações trigonométricas no início da atividade, determine a alternativa correta.

- A) $\sin 30^\circ > \sin 10^\circ$.
- B) $\sin 30^\circ < \sin 10^\circ$.
- C) $\sin 30^\circ > \sin 60^\circ$.
- D) $\sin 30^\circ = 0$.
- E) $\sin 30^\circ = \sin 60^\circ$.

Questão 7: Por meio das relações trigonométricas no início da atividade, determine a alternativa correta.

- A) $\cos 150^\circ > \sin 150^\circ$.
- B) $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$.
- C) $\cos 30^\circ = \cos 150^\circ$.
- D) $\cos 30^\circ < \cos 150^\circ$.
- E) $\cos 150^\circ = \sin 150^\circ$.

Questão 8: Resolva a equação $\sin x = \frac{1}{2}$, sabendo que $90^\circ < x < 180^\circ$.

- A) $x = 30^\circ$.
- B) $x = 90^\circ$.
- C) $x = 60^\circ$.
- D) $x = 120^\circ$.
- E) $x = 150^\circ$.

Questão 9: Determine os possíveis valores para $\cos x = \frac{1}{2}$, onde $0^\circ < x < 360^\circ$.

- A) 60° e 30° .
- B) 60° e 300° .
- C) 60° e 330° .
- D) 30° e 300° .
- E) 30° e 330° .

Questão 10: Por meio das relações trigonométricas no início da atividade, determine a alternativa correta.

- A) $\cotg 30^\circ < \tg 30^\circ$.
- B) $\operatorname{cosec} 30^\circ < \sin 30^\circ$.
- C) $\sin 30^\circ = \cos 30^\circ$.
- D) $\operatorname{cosec} 30^\circ = \sec 30^\circ$.
- E) $\cotg 30^\circ > \tg 30^\circ$.

A.7 Atividade - Funções trigonométricas e suas aplicações

- Objetivo: Analisar os conceitos dos modelos trigonométricos e verificar o comportamento das funções.

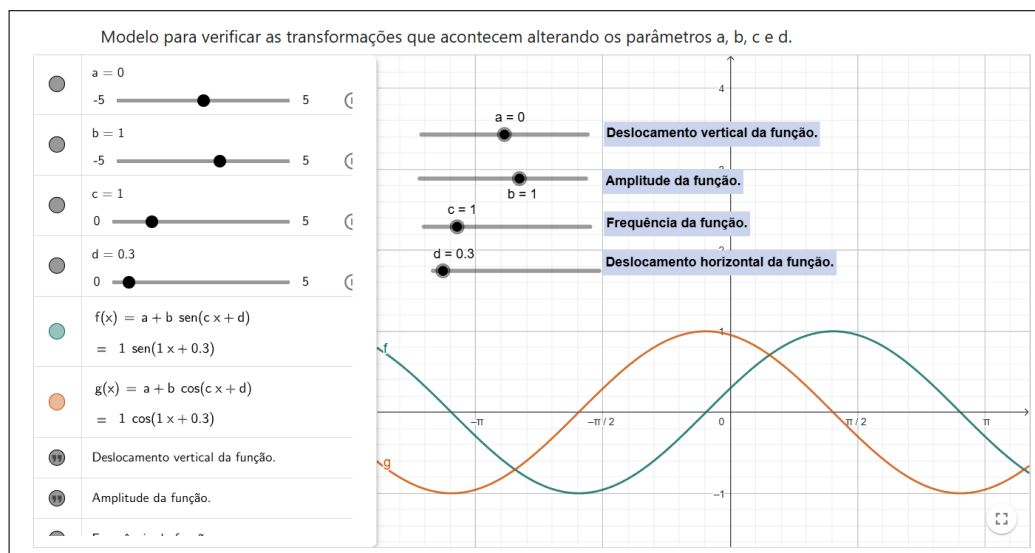


Figura A.5: Modelo para aplicar nos exercícios da sequência didática.

Questão 1: Seja $g(x) = a + \cos(x)$. O que acontece com o gráfico da função quando modificamos o parâmetro a ?

- A) O gráfico tem deslocamento horizontal.
- B) Não ocorre mudança da imagem da função.
- C) Muda a amplitude.
- D) O gráfico tem deslocamento vertical.
- E) Ocorre mudança do período da função.

Questão 2: Seja $f(x) = b \cdot \sin(x)$. O que acontece com o gráfico da função quando modificamos o parâmetro b ?

- A) O gráfico tem deslocamento horizontal.
- B) O gráfico tem deslocamento vertical mantendo a amplitude da onda.
- C) Muda a amplitude da onda.
- D) Se $b < 0$, o período muda.
- E) Se $a < 0$, o período muda.

Questão 3: Marque a resposta certa sobre a função $g(x) = \cos(2x)$.

- A) período: $\frac{\pi}{2}$.
- B) período: 2π .
- C) período: π .
- D) período: $\frac{\pi}{4}$.
- E) período: 4π .

Questão 4: Qual o gráfico representa a função $f(x) = 2\text{sen}(x)$?

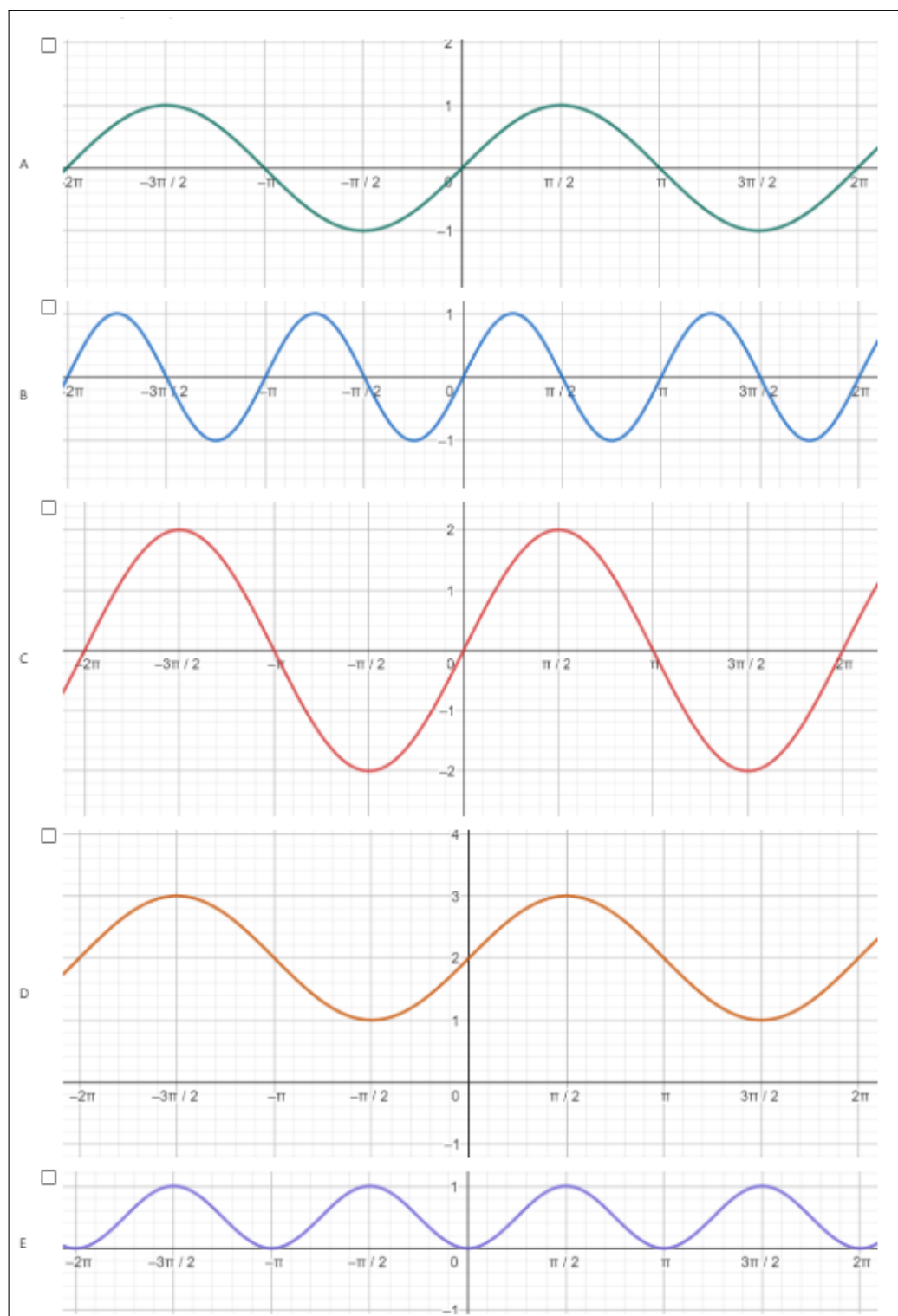


Figura A.6: Alternativas da questão 4.

Questão 5: Qual gráfico representa a função $g(x) = \cos(2x)$?

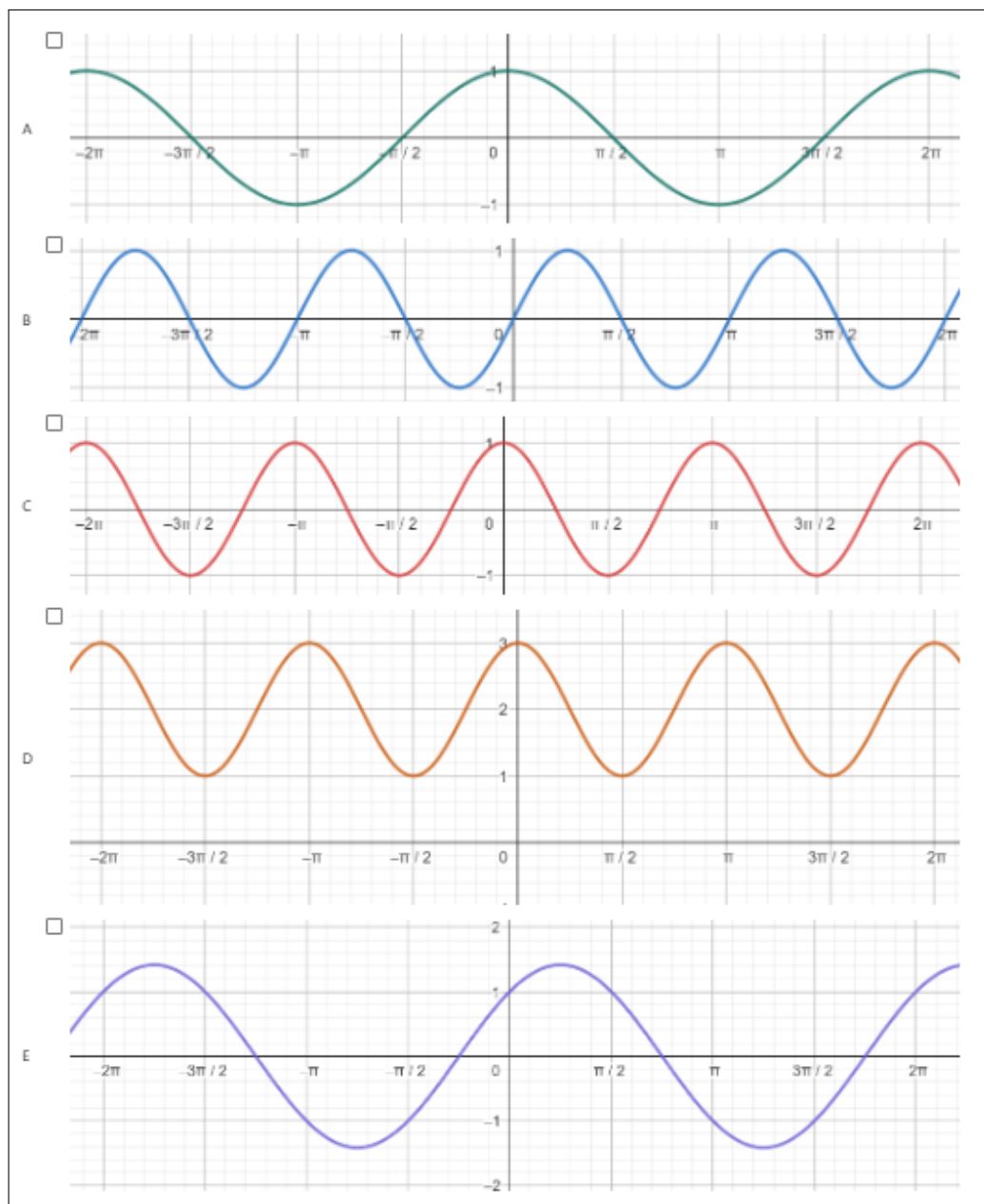


Figura A.7: Alternativas para questão 5.

A.8 Atividade - Adição e Subtração de Arcos

- Objetivo: Compreender e aplicar os conceitos de adição e subtração de arcos utilizando representações visuais e exercícios práticos, promovendo a interação e a reflexão.

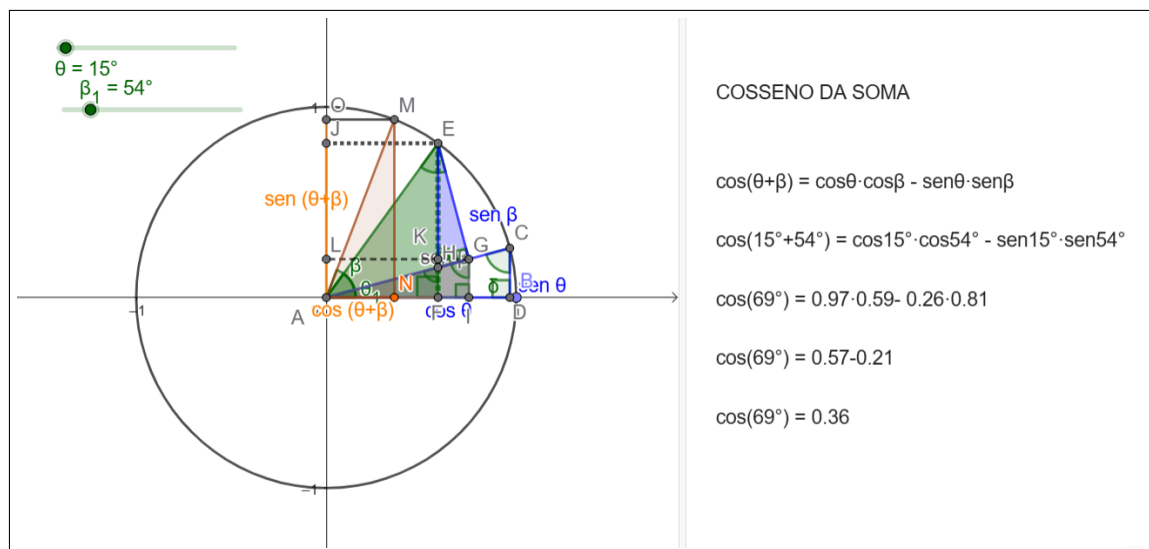


Figura A.8: Representação do cosseno da soma de arcos.

Questão 1: Dado um arco de 30° e outro de 45° , encontre o cosseno da soma do arco resultante. (Utilize a representação acima para determinar esse valor).

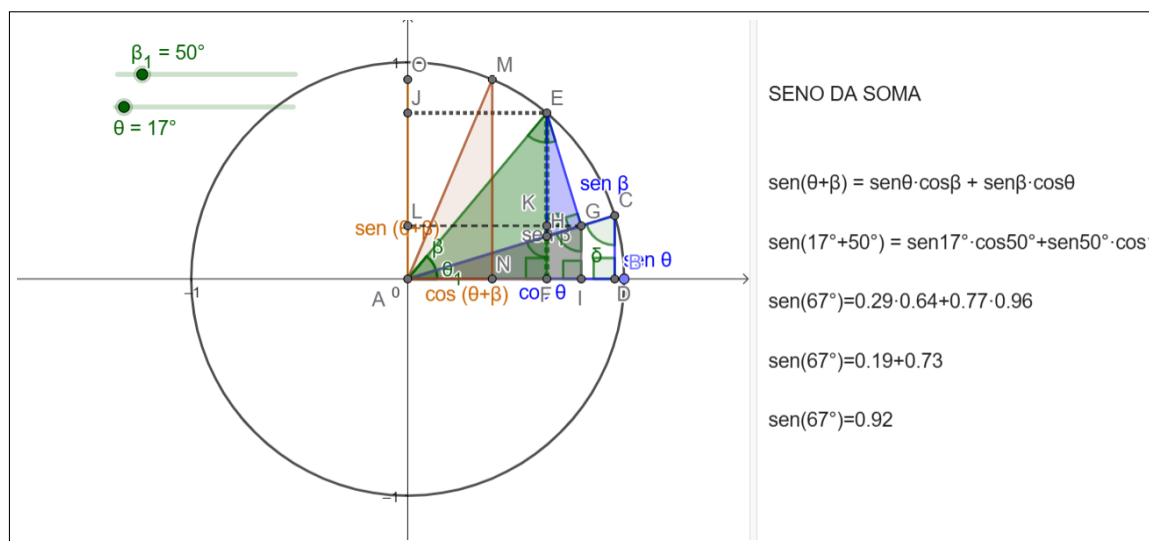


Figura A.9: Representação do seno da soma de arcos.

Questão 2: Dado um arco de 30° e outro de 45° , encontre o seno da soma do arco resultante. (Utilize a representação acima para determinar esse valor).

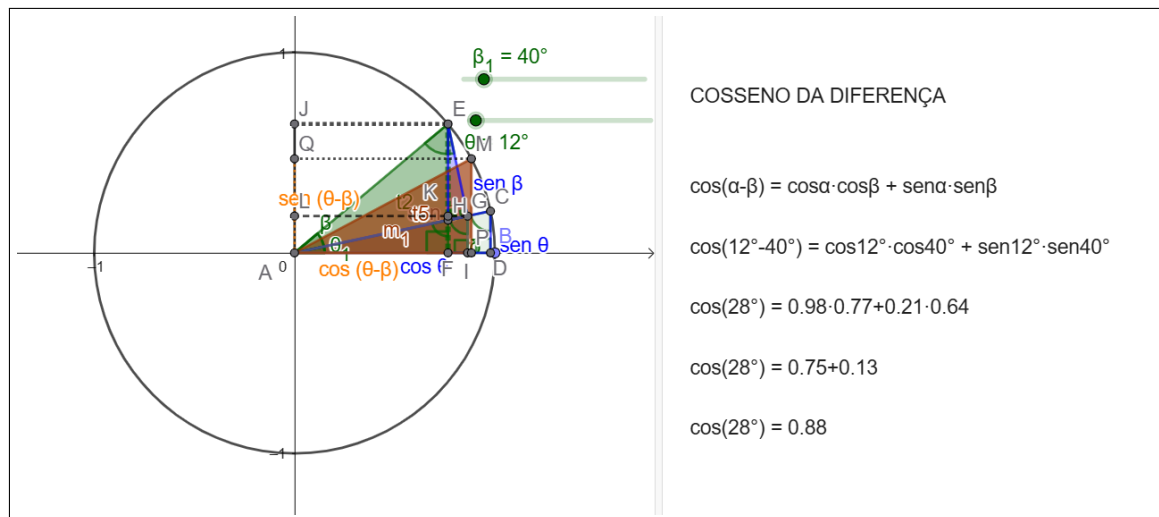


Figura A.10: Representação do cosseno da diferença de arcos.

Questão 3: Dado um arco de 60° e outro de 30° , encontre o cosseno da diferença do arco resultante. (Utilize a representação acima para determinar esse valor).

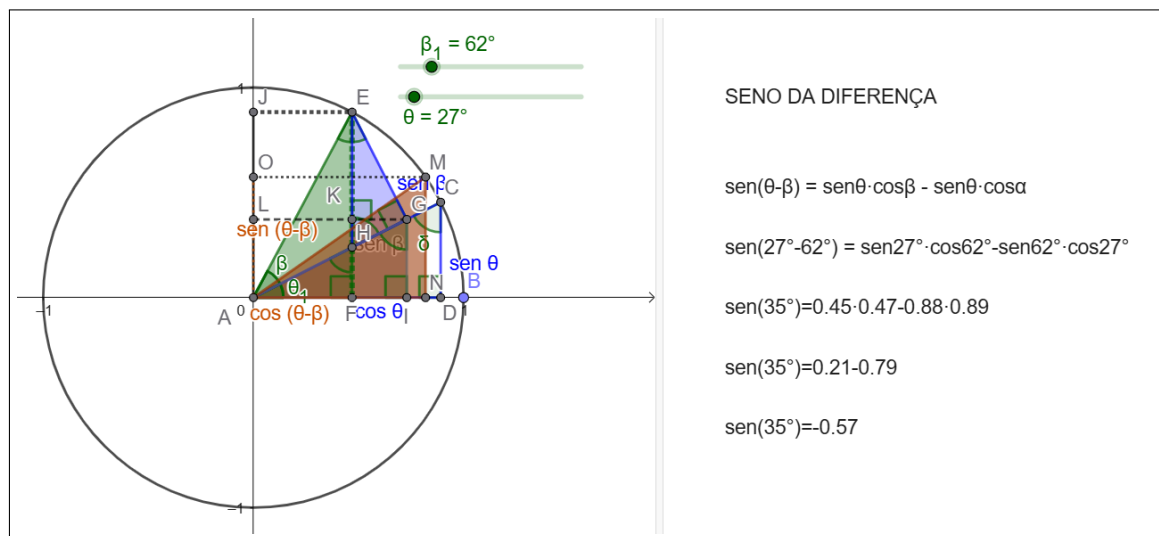


Figura A.11: Representação do seno da diferença de arcos.

Questão 4: Dado um arco de 60° e outro de 30° , encontre o seno da diferença do arco resultante. (Utilize a representação acima para determinar esse valor).