



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

WESLEY FELIPE GALVÃO

UMA ABORDAGEM HISTÓRICA E ALGÉBRICA
DA BASE HEXADECIMAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

CURITIBA

2025

WESLEY FELIPE GALVÃO

UMA ABORDAGEM HISTÓRICA E ALGÉBRICA
DA BASE HEXADECIMAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Setor de Ciências exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre.

Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Paula Rogeria Lima Couto

CURITIBA

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Galvão, Wesley Felipe

Uma abordagem histórica e algébrica da base hexadecimal para o ensino de matemática. / Wesley Felipe Galvão. – Curitiba, 2025.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Paula Rogeria Lima Couto

1. Análise numérica. 2. Sistema Hexadecimal (Matemática). 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Couto, Paula Rogeria Lima. IV. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **WESLEY FELIPE GALVÃO**, intitulada: **Uma abordagem histórica e algébrica da base hexadecimal para o ensino de matemática**, sob orientação da Profa. Dra. PAULA ROGÉRIA LIMA COUTO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 03 de Julho de 2025.

PAULA ROGÉRIA LIMA COUTO
Presidente da Banca Examinadora

ADRIANA LUIZA DO PRADO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

LEÔNIA GABARDO NEGRELLI
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Sempre que finalizamos um trabalho nos damos conta de que ele é fruto de um esforço conjunto e percebemos que precisamos agradecer aos companheiros de jornada.

Assim, agradeço primeiramente a Deus, fonte de toda sabedoria e força, por me dar saúde e perseverança ao longo dessa caminhada acadêmica.

À minha mãe, agradeço pelo exemplo de dedicação e honestidade, pelo incentivo aos estudos desde cedo e por acreditar no meu potencial.

À minha noiva, minha companheira incansável, por sua paciência e sua confiança em mim. Esta conquista também é sua.

À minha orientadora, minha profunda gratidão por sua orientação firme e ao mesmo tempo acolhedora. Seu compromisso com a pesquisa, seu olhar crítico e suas palavras de encorajamento foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também aos professores do PROFMAT que contribuíram significativamente para minha formação com seus ensinamentos, críticas construtivas e partilhas de experiências.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para esta etapa da minha jornada. Este trabalho é o reflexo de muitos apoios, gestos e palavras que fizeram toda a diferença.

RESUMO

Esta dissertação, desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), apresenta um estudo introdutório sobre a base hexadecimal (base 16), abordando aspectos históricos, teóricos e aplicados desse sistema de numeração. A pesquisa teve como objetivo compreender as origens e o funcionamento da base 16, bem como algumas aplicações, especialmente em contextos tecnológicos, além de propor uma abordagem didático-pedagógica que favoreça sua exploração no ensino básico. A investigação foi de natureza qualitativa, com base em pesquisa bibliográfica em obras de História da Matemática e sistemas de numeração, além de consulta a fontes digitais que descrevem aplicações contemporâneas da base hexadecimal, particularmente em áreas da computação. Como contribuição didática, é apresentada uma variedade de exemplos de operações algébricas — como as operações básicas e conversões entre bases — com números hexadecimais, acompanhadas de explicações detalhadas e de forma análoga à base decimal, visando facilitar a compreensão desses procedimentos por parte de estudantes e professores. Além disso, foi desenvolvido um jogo didático com o intuito de tornar o tema mais acessível e atrativo para estudantes do ensino médio ou mesmo do ensino fundamental, promovendo o raciocínio lógico e a interdisciplinaridade. Embora a proposta não tenha sido aplicada em contexto escolar, ela é apresentada como uma sugestão de recurso pedagógico que pode ser explorado em práticas docentes inovadoras. Acredita-se que a abordagem lúdica e contextualizada ofereça potencial para enriquecer o ensino de sistemas de numeração não decimais e ampliar a percepção dos estudantes sobre a aplicabilidade dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: bases numéricas; hexadecimal; jogo da senha hexadecimal.

ABSTRACT

This dissertation, developed within the scope of the Professional Master's Program in Mathematics in a National Network (PROFMAT), presents a study on the hexadecimal system (base 16), briefly addressing historical, theoretical, and practical aspects of this numeral system. The research aimed to understand the origins and functioning of base 16, as well as some of its applications—especially in technological contexts—and to propose a didactic-pedagogical approach that supports its exploration in basic education. The investigation followed a qualitative methodology, based on bibliographic research in works related to the History of Mathematics and numeral systems, in addition to consulting digital sources that describe contemporary applications of the hexadecimal system, particularly in computing. As a didactic contribution, the dissertation presents a variety of examples involving algebraic operations—such as basic arithmetic and base conversions—with hexadecimal numbers. These are accompanied by detailed explanations, structured similarly to those used with the decimal system, in order to facilitate student and teacher understanding of the procedures. Furthermore, an educational game was developed with the aim of making the topic more accessible and engaging for high school or even middle school students, promoting logical reasoning and interdisciplinarity. Although the proposal was not implemented in a school setting, it is presented as a suggestion for a pedagogical resource that can be used in innovative teaching practices. It is believed that the playful and contextualized approach has the potential to enrich the teaching of non-decimal numeral systems and broaden students' perception of the applicability of mathematical concepts.

Key words: numerical bases. hexadecimal. hexadecimal password game.

Lista de Figuras

2.1	Números egípcios	19
2.2	Sistema de numeração chinês	20
2.3	Algarismos indo-arábicos	21
2.4	Hexagramas encontrados no I-Ching	23
2.5	Base binária por Leibniz	23
4.1	Trecho de código Assembly	42
4.2	Exemplo de tabuleiro do jogo da senha	45
4.3	Exemplo de carta do jogo da senha hexadecimal	46

Lista de Tabelas

2.1	Palavras usadas na numeração de alguns povos da América do Sul	19
3.1	Contagem na base hexadecimal	26
3.2	Exemplo de interpretação dos números hexadecimais	26
3.3	Tabuada aditiva de base 16	27
3.4	Adicionando 123 a 579	28
3.5	Adicionando 359 a 52A	29
3.6	Adicionando 4F5 a 37B	29
3.7	Subtraindo 345 de 9F7	29
3.8	Subtraindo 27B de 5A3	30
3.9	Tabuada multiplicativa de base 16	31
3.10	Multiplicando 25 por 12	32
3.11	Multiplicando 32 por 1A	33
3.12	Multiplicando 3BC por F	33
3.13	Divisão de 3BC por 7	37
3.14	Divisão de 3BC por 7	37
3.15	Convertendo 2D4C para decimal	38
3.16	Representação de números inteiros	38

3.17	Alguns exemplos de conversão Binário-Hexadecimal	39
3.18	Representação de números inteiros	39
3.19	Conversão da parte decimal 0,C4	39
3.20	Exemplos de números com duas casas após a vírgula	40
4.1	Mnemônico <i>mov</i> e suas correspondências numéricas	42
4.2	As três cores primárias	43
4.3	Cores somadas para obtenção do "amaranto"	44
4.4	Referências hexadecimais para cores	44
4.5	Subtração das cores branco e "amaranto"	44
4.6	Código da cor "midnight blue"	47
4.7	Rodada de operações das cores	47
4.8	Rodada de operações das cores	47
4.9	Sequência de tentativas	48

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Motivação e justificativa	13
1.2	Organização e estrutura do trabalho	15
1.2.1	Objetivo geral	15
1.2.2	Objetivos específicos	15
1.2.3	Organização dos capítulos	16
2	Uma abordagem histórica dos sistemas de numeração	17
2.1	Sistemas numéricos de agrupamento simples	17
2.2	Sistemas de agrupamento multiplicativo	19
2.3	Sistema de numeração posicional	20
2.4	A base binária e as primeiras formas de computação	22
2.5	Surgimento da base hexadecimal	24
3	Noções de aritmética em base 16	25

3.1	A adição	27
3.1.1	Tabuada aditiva	27
3.1.2	Números complementares	27
3.1.3	O algoritmo da adição	28
3.2	A subtração	29
3.3	A multiplicação	31
3.4	A divisão	33
3.4.1	Divisão euclidiana (com resto)	33
3.4.2	Divisão com vírgula (não inteira)	34
3.5	Conversão entre bases numéricas	34
3.5.1	Conversão para a base 10	34
3.5.2	Conversão para a base binária	35
3.6	Extensão da representação para os números reais	35
4	Algumas aplicações do sistema hexadecimal	41
4.1	Arquitetura Assembly	41
4.2	Sistema de cores RGB	43
4.3	Aplicação em sala de aula: O jogo da senha hexadecimal	45
4.3.1	Exemplo de partida	46
5	Considerações finais	49
	Bibliografia	52

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e justificativa

No dia a dia, como professor, é possível perceber em sala de aula uma desconexão entre a matemática e a vivência dos alunos. Em meio a tantas tecnologias, calculadoras na palma da mão, até mesmo o ato de contar se torna obsoleto e o desinteresse fica cada dia mais visível.

Um dos objetivos deste trabalho é despertar o interesse em **como** as coisas acontecem na matemática, isto é, responder algumas dúvidas que vão além da pergunta "**para que vou usar isso em minha vida?**", tentando trazer uma visão mais próxima de "**como isso funciona e por que dá certo?**". Sob este contexto, a pesquisa sobre bases numéricas foi iniciada. Esse assunto é abordado na disciplina de Aritmética do curso do PROFMAT e sempre despertou interesse deste autor, desde muito novo, como se as bases numéricas fossem, para a Matemática, o que os diferentes idiomas são para a Linguagem/Linguística.

O ponto de partida para a pesquisa foi a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD, s.d.)¹. Por meio de uma pesquisa sobre o termo "bases numéricas", mais de 40 mil trabalhos foram encontrados. Alguns trabalhos foram também encontrados

¹Portal criado pelo Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (Ibict) em parceria com a CAPES

na base de dados de dissertações do próprio PROFMAT, em uma pesquisa paralela, apesar de um resultado mais restrito. Obviamente, foram necessárias uma seleção e uma filtragem, uma vez que muitos dos trabalhos sequer tinham relação direta com o ensino de matemática, indo de contextos da Engenharia até Medicina. Como o objetivo da pesquisa era selecionar os trabalhos relacionados à Aritmética, foram acrescentados termos como "binária", "decimal" e principalmente "hexadecimal".

Alguns trabalhos encontrados na BDTD (s.d.) despertaram maior interesse, como Rech (2015) sobre a função ϕ de Euler e frações em base b (além da decimal). No entanto ele traz uma abordagem bastante teórica e distante do contexto procurado por se tratar de uma linguagem técnica, voltada a estudantes de nível superior ou pós-graduados e que fala de temas como a própria função ϕ aplicada ao cálculo de casa decimais e o estudo de dízimas periódicas em diferentes bases, sem especificá-las.

Outros dois textos importantes foram Rodrigues (2001) e Rocha (2019), que versam sobre a base dez, em um contexto histórico e mais próximo à sala de aula. Os autores fazem um levantamento bibliográfico além de estudos de casos em diferentes situações de ensino.

Mas foi Martines (2019) e Salviato (2018) que mostraram algo fortemente relacionado ao assunto abordado nesta dissertação: o uso "prático" das bases numéricas além da decimal por meio de algoritmos. Lendo estes trabalhos, que trazem uma abordagem equilibrada entre teoria e prática matemática, é possível perceber que os processos algorítmicos de adição, subtração, multiplicação e divisão, apesar de serem aparentemente simples, trazem em sua essência algo muito mais complexo do que se imagina. E mais, é possível estender tais processos independentemente da base numérica utilizada. Outro detalhe constatado foi o de que muito se fala da base decimal, o que é de se esperar, uma vez que, desde os tempos mais antigos, é esta a base que se usa na contagem e que todos aprendem quando crianças; e da base binária (base 2), por ser a "linguagem" principal dos computadores, que por sua arquitetura, fazem cálculos baseando-se em "ligado" (1) ou "desligado" (0).

Assim, procurou-se entender que outra base poderia enriquecer o entendimento do tema, além das já mencionadas. A princípio, das opções pesquisadas, surgiu um dilema: octal

(base 8) ou hexadecimal (base 16). Ambas estão intimamente ligadas aos computadores, mas a base octal possui menos aplicações conhecidas além das simples conversões entre bases, apesar da representação de seus números ser mais fácil. Assim, escolheu-se a base hexadecimal, muito mais utilizada e com diversas aplicações que podem ser mencionadas, e que neste trabalho será tratada de uma forma diferente, ressaltando a importância de se conhecer outras formas de calcular apesar de suas características e complexidades, e que são tão eficazes quanto as feitas em base 10.

Decidido o tema a ser trabalhado, era necessário também encontrar uma pergunta central. Pensando nos diferentes idiomas existentes pelo mundo e na capacidade das pessoas de aprenderem uma nova língua apenas conhecendo suas estruturas básicas, gramática e ortografia, e praticando frequentemente, pensou-se em um paralelo com a matemática e as bases numéricas: como é possível abordar a base hexadecimal de maneira significativa, considerando aspectos históricos, aplicações tecnológicas e desenvolvimento de recursos didáticos? Saber previamente as ideias, conceitos e algoritmos, da mesma forma que se faz com a base decimal, ajuda nessa tarefa?

1.2 Organização e estrutura do trabalho

A fim de responder às perguntas anteriormente formuladas, este trabalho buscará cumprir com os objetivos apresentados a seguir.

1.2.1 Objetivo geral

Investigar possíveis abordagens da base hexadecimal no ensino de Matemática, de forma significativa, considerando o aspecto histórico, aplicações tecnológicas e desenvolvimento de recursos pedagógicos.

1.2.2 Objetivos específicos

- Apresentar uma abordagem histórica dos sistemas de numeração.

- Operar com números hexadecimais, da mesma forma que é feito com a base 10, ressaltando as principais propriedades dos algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão.
- Mostrar as semelhanças entre as formas de cálculo na base decimal e hexadecimal, apesar da maior complexidade dessa última.
- Tratar de algumas aplicações e a relação direta da base hexadecimal com a binária, a "linguagem dos computadores".
- Elaborar algum tipo de recurso pedagógico, como produto final do trabalho, que possa auxiliar nos cálculos em base hexadecimal e, conseqüentemente, no ensino de matemática.

1.2.3 Organização dos capítulos

Para que possam ser cumpridos os objetivos do trabalho, os capítulos estarão organizados da seguinte maneira:

- Este primeiro capítulo trouxe as principais motivações para o estudo do tema escolhido, bem como a pesquisa feita para revisão e os principais objetivos.
- O segundo capítulo trará uma abordagem histórica dos sistemas numéricos, não necessariamente em ordem cronológica, para uma melhor compreensão do sistema posicional e das principais bases utilizadas atualmente.
- O terceiro capítulo terá foco na Aritmética e apresentará as principais operações e algumas propriedades destas, todas relativas à base 16.
- O quarto capítulo será dedicado a algumas aplicações da base hexadecimal, em particular nos contextos de computação e do ensino de matemática.
- O último capítulo será o das considerações finais, a fim de concluir este trabalho e também propor sugestões para estudos futuros.

Capítulo 2

Uma abordagem histórica dos sistemas de numeração

A necessidade de contar sempre esteve presente no cotidiano do ser humano. Um pastor na Antiguidade poderia contar seu rebanho apenas relacionando cada animal com um de seus dedos, em uma relação biunívoca bastante simples e intuitiva. Contudo, à medida que seu rebanho aumentava, eram necessárias novas estratégias de contagem, como, por exemplo, nós em uma corda, como a antiga civilização Inca já fazia antes dos primeiros colonos europeus chegarem às Américas, ou entalhes em ossos, como em épocas pré-históricas (IFRAH, 1997a, p. 135). Pode-se dizer que assim surgiu a ideia de "número", entendida como a quantidade de elementos em um determinado conjunto.

Porém, com o tempo apenas a contagem não seria suficiente. Ainda seria preciso uma forma de se registrar essas informações de maneira prática, para que elas pudessem ser acessadas futuramente.

2.1 Sistemas numéricos de agrupamento simples

Imagine novamente o pastor na antiguidade contando os animais de seu rebanho. Munido apenas de um graveto, com o qual conseguia riscar o solo, ele começa a registrar os animais, cada um com um símbolo, um simples traço vertical, por exemplo. À medida

que ele faz esse registro, percebe que mais e mais traços verticais vão se agrupando e a imagem no chão se torna cada vez mais confusa. Ele então decide apagar cada grupo de dez traços verticais, trocando-os por um traço horizontal.

Os antigos egípcios, que já faziam parte de seus registros por meio de hieróglifos por volta de 3000 anos antes de Cristo (a.C.), perceberam esse problema e desenvolveram um sistema de numeração que consistia de símbolos diferentes, a medida que grupos de 10 eram obtidos, ou seja, para cada potência de 10 existia um símbolo específico (IFRAH, 1997a, p. 341). A escolha de uma base 10 não é à toa, "como os dedos do homem constituíam um dispositivo de correspondência conveniente, não é de se estranhar que o 10 acabasse sendo escolhido frequentemente como o número b da base" (EVES, 2005) para a contagem e registro dos números em diferentes civilizações, incluindo obviamente os egípcios. O sistema de numeração egípcio, propriamente dito, era bastante simples: representavam-se as potências de 10 por símbolos próprios, como pode ser observado na Figura 2.1, com registros destes símbolos conhecidos até a potência 10^6 (um milhão), e para a representação dos demais números fazia-se a simples repetição dos símbolos, independentemente da ordem de escrita, sendo possível a representação da direita para a esquerda e vice-versa. Em outras palavras, para se registrar os números de 1 a 9, repetia-se o traço vertical ou "dedo" esticado, símbolo para representar o 1 (uma unidade), a quantidade de vezes correspondente ao número. Da mesma forma, os números múltiplos de 10, até o 90, representavam-se pela repetição do desenho de uma corda ou pergaminho enrolado. Já para a representação dos outros números, fazia-se a composição desses diversos símbolos, por exemplo o número 23, que era representado pelo desenho de duas cordas enroladas junto a três traços verticais.

Figura 2.1: Números egípcios

	LEITURA DA DIREITA PARA A ESQUERDA					LEITURA DA ESQUERDA PARA A DIREITA				
1										
10	∩					∩				
100										
1 000										
10 000										
100 000										
1 000 000										

Fonte: Ifrah (1997a)

Essa forma de contagem pode ser observada em outros povos, como os babilônicos que usavam um sistema de base 10 mesclado a um sistema posicional de base 60, e também alguns povos da América do Sul com um sistema de base quinária (base 5), que contavam de uma maneira parecida com “um, dois, três, quatro, mão, mão e um” e assim por diante (EVES, 2005, p. 28), como pode ser observado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Palavras usadas na numeração de alguns povos da América do Sul

1	tai
2	lua
3	tolu
4	vari
5	luna (uma mão)
6	luna tai

Fonte: Ifrah (1997a)

2.2 Sistemas de agrupamento multiplicativo

Voltando a atenção para o Oriente, alguns povos chineses no primeiro milênio a.C. usavam um sistema que, à primeira vista, poderia ser encarado como uma evolução do

anterior, embora historicamente não se tenha evidências claras de uma relação entre eles. Neste tipo de numeração, também de base 10, existiam símbolos para as quatro primeiras potências de 10 e também para as quantidades de 1 a 9. Assim, um número era representado agrupando-se o número de 1 a 9 correspondente com o símbolo da potência desejada e sua leitura era feita na vertical, uma vez que os registros eram feitos em placas de bambu (EVES, 2005, p. 34) como exemplificado na Figura 2.2.

Figura 2.2: Sistema de numeração chinês

1	一	10	十
2	二		
3	三	100	百
4	四		
5	五	1 000	千
6	六		
7	七	10 000	萬
8	八		
9	九		

Fonte: Ifrah (1997a)

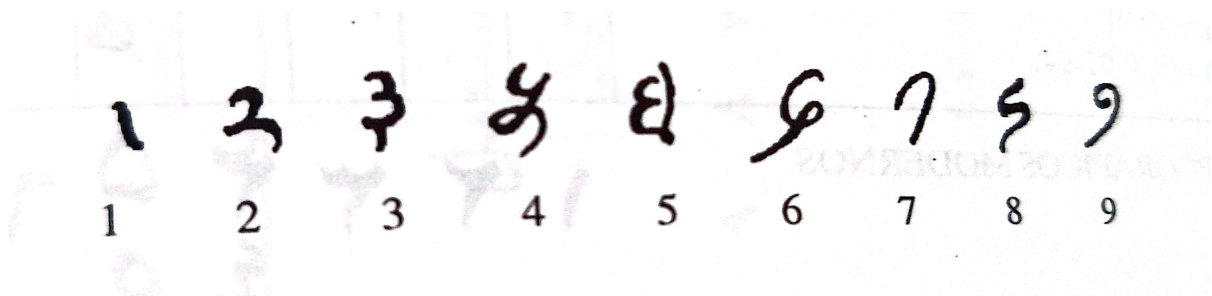
Embora sistemas numéricos como esse não tenham sobrevivido por completo devido ao material de registro com os quais foram feitos, é possível encontrar relações com a forma como se dão os nomes aos números atualmente. Por exemplo, o número 348 que se lê trezentos (três "centos") e quarenta ("quadráginta" ou quatro dezenas) e oito.

2.3 Sistema de numeração posicional

Avançando no tempo, com a crescente expansão do comércio, a forma de se escrever os números não se limitava apenas à contagem e ao registro, mas também era de suma importância para o cálculo de valores, medidas e bens. Em meio a diversas invasões estran-

geiras, os hindus, desde por volta do século V depois de Cristo (d.C.), já desempenhavam um papel memorável no desenvolvimento da matemática. Nomes como Brahmagupta e Bhaskara estão entre os mais lembrados (EVES, 2005, p. 250-251). Mas a principal contribuição dos hindus, sem dúvida alguma, foi um sistema de numeração posicional. Neste sistema, usam-se apenas os algarismos de 1 a 9 (Figura 2.3) que podem assumir valores diferentes de acordo com sua posição de escrita. Isto é, ao se ler um número, da esquerda para a direita, um mesmo algarismo assumirá o valor correspondente à potência que sua posição representa. Por exemplo, tomando-se o número 555, é possível observar que, apesar de se escrever com o mesmo algarismo 5, o valor de cada um é diferente, sendo que o primeiro 5 mais à esquerda tem valor $5 \times 100 = 500$, o segundo 5 tem valor $5 \times 10 = 50$ e o último 5 mais à direita tem valor 5.

Figura 2.3: Algarismos indo-arábicos



Fonte: Ifrah (1997b)

Alguns documentos sumérios e babilônicos já traziam representações de seus números de maneira parecida, sendo os números de 1 a 59 representados por um sistema decimal de agrupamento simples, que usava símbolos em forma de cunhas (cuneiformes), mesclado a um sistema posicional de base 60, no qual diferentes posições representavam diferentes potências de 60.

Porém, um problema era notório: poucas vezes havia uma indicação clara da ordem de grandeza dos números, de modo que uma mesma representação podia ter diferentes interpretações, incluindo os números decimais (com vírgula), que já podiam ser calculados desde aqueles primórdios. Obviamente que essa dificuldade em identificar os números vem da necessidade dos estudiosos de querer interpretar os escritos antigos. Ainda assim, a fim de propagar o uso do sistema posicional, um novo algarismo, que representasse

justamente a ideia do "vazio", fez-se necessário (CHRISOMALIS, 2010). Um dos principais responsáveis pela disseminação de um símbolo para o zero foi o matemático persa Al-Khowârizmí. Do seu nome também deriva a palavra "algarismo", que se utiliza atualmente para se referir aos símbolos numéricos.

Após essa pequena viagem, não necessariamente feita em ordem cronológica, tem-se o sistema de numeração atual, posicional e de base 10, ou seja, que consiste de 10 algarismos (de 1 a 9 e o zero) e no qual cada algarismo assume um valor diferente de acordo com a sua posição de escrita ou ordem na qual se encontra na representação de um determinado número.

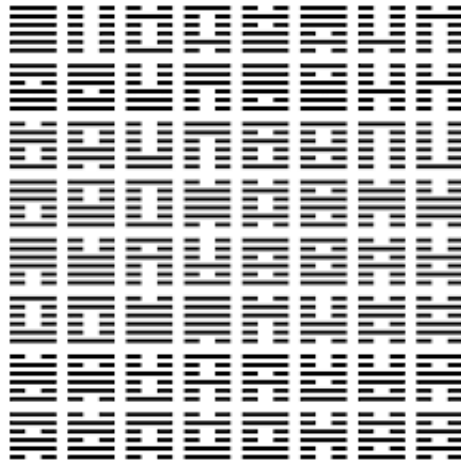
2.4 A base binária e as primeiras formas de computação

Como visto, a base 10 parece ter sido predominante nos sistemas de numeração em diferentes civilizações, porém ela não foi a única que surgiu. A base binária associada fortemente à computação moderna, também não teve origem recente. De fato, no Egito antigo, muitos dos cálculos de agrimensura eram feitos com base em ideias de dobro e metade, mesmo que o 2 ainda não fosse usado como base do sistema numérico. Os polinésios, na ilha de Mangareva, já usavam palavras para representar os números de 1 a 10 e resumiam em uma palavra cada grupo de duas dezenas, há cerca de 600 anos atrás.

Voltando a atenção novamente ao Oriente, o famoso livro *I-Ching* ou *Yi-King*, o "Livro das Mutações", já trazia em seu conteúdo algo interpretado como uma linguagem binária, embora fosse usada com o objetivo de adivinhação e misticismo, e não de numeração ou matemática (IFRAH, 1997b, p. 576). A Figura 2.4 traz os hexagramas encontrados no *I-Ching*, que consistiam em conjuntos de seis linhas cada. As linhas inteiras podem ser interpretadas como 1 e as linhas divididas como zero, estabelecendo a relação com o sistema binário.

Uma leitura mais aprofundada deste material levou o matemático e filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz a desenvolver um sistema posicional de base 2, usando apenas os algarismos 0 e 1 para representar números, isso muito tempo antes dos primeiros computadores modernos surgirem (ver Figura 2.5). Em 1705, Leibniz publicou um artigo intitulado

Figura 2.4: Hexagramas encontrados no I-Ching



Fonte: Wilhelm (2006)

"*Explication de l'Arithmétique Binaire*", onde defendia a utilização do sistema binário para a matemática e a lógica, destacando a simplicidade e a eficiência do uso de apenas dois símbolos. Leibniz também estabeleceu conexões entre os sistemas binário e decimal, além de sugerir que o sistema poderia ser usado para representar ideias filosóficas.

Figura 2.5: Base binária por Leibniz

0	1	10	11	100	101	110	111
0	1	2	3	4	5	6	7

Fonte: Leibniz (1705)

Outro grande contribuinte para o desenvolvimento do sistema binário foi George Boole, cujos trabalhos ajudaram a formalizar as operações lógicas que mais tarde se tornariam a base da computação digital. Com a revolução industrial e o avanço da tecnologia, o sistema binário começou a ser aplicado em dispositivos mecânicos, como os telégrafos, ajudando a difundir o código Morse, que faz uso apenas de "pontos" e "traços" para representar letras. O sistema binário também foi importante no desenvolvimento de máquinas de calcular, bem como no surgimento dos primeiros computadores eletrônicos, que funcionam por meio de pulsos elétricos, o que pode claramente ser interpretado como

0 (sem pulso) ou 1 (com pulso).

2.5 Surgimento da base hexadecimal

Apesar de bastante conveniente em sua simplicidade, a base binária apresenta um problema que surge rapidamente ao se observar a representação dos números: a quantidade necessária de algarismos para representar os números cresce de forma muito rápida. Para exemplificar essa situação, o número 8, que no sistema decimal possui apenas um algarismo, o próprio 8, no sistema binário precisa de quatro algarismos, sendo 1000 a sua representação binária. O ano de 2024 teria que ser representado com onze algarismos, neste caso 11111101000.

Conforme os computadores atuais foram avançando, a necessidade de cálculo com grandes quantidades de dados e números com vários dígitos foi se tornando mais presente, uma vez que os computadores atuais usam o *byte*, grupo de oito *bits* (0's ou 1's), como unidade básica de memória. Por outro lado, a "miniaturização" da tecnologia, impulsionada pela chamada "Lei de Moore" (VERRE, 2023), trouxe como consequência a criação de uma nova forma de agrupamento de dados: o sistema de numeração hexadecimal (base 16). Um *byte*, tem capacidade de representar números de 0 a 255, ou seja, é possível representar $16^2 = 256$ números, motivo pelo qual torna essa "nova" base fortemente relacionada ao sistema binário. Outro motivo importante para o uso da base 16 é a compactação das representações dos números. O exemplo anterior, do ano de 2024, que em base 2 era representado por 11111101000, na base 16 se torna 7E8, sendo E uma alternativa para a representação do "algarismo" 14. Além disso, sistemas de computação ainda mais avançados, podem usar grupos de 32, 64 ou 86 bits (ALECRIM; HIGA, 2023).

Capítulo 3

Noções de aritmética em base 16

Como citado anteriormente, o sistema numérico de base 16 está intimamente relacionado à computação e aos dias atuais. Porém, a fim de aproximar o assunto ao tema proposto no capítulo anterior, imagine uma civilização hipotética, que no decorrer de sua história, desenvolveu um sistema de numeração na qual a base predominante é o 16. Nesse sistema, que também deve ser posicional, existem 16 algarismos diferentes, que podem ser representados pelos que já conhecemos, de 0 a 9, mais as letras A, B, C, D, E e F para representar, respectivamente as quantidades 10, 11, 12, 13, 14 e 15 do sistema decimal. Por se tratar de poucos números, maiores que 10, que precisam de um algarismo próprio, é possível a representação por meio das letras do alfabeto. Contudo, para o estudo de civilizações que usavam bases maiores, como os babilônicos e sua base sexagesimal (base 60) por exemplo, faz-se uso da notação de Otto Eduard Neugebauer, como pode ser encontrado em seu trabalho "*The exact sciences in antiquity*" (NEUGEBAUER, 1969). Nesta notação, utiliza-se a vírgula para separação das ordens (unidade, dezena e centena) e o ponto e vírgula para separação da parte inteira e da parte decimal, permitindo a utilização de números maiores para a representação de um único algarismo. Esta notação será aplicada a alguns exemplos nos próximos capítulos.

Sendo assim, essa civilização hipotética contaria de 1 a 9, A, B, C, D, E e F e após isso contaria 10 ou uma "hexadecena"(ver Tabela 3.1). Em seguida, viriam os números de 11 até 19, 1A, 1B, 1C, 1D, 1E, 1F e então o 20 (duas "hexadecenas"), e assim por diante, exatamente como feito com o sistema decimal (FREITAS, 2020).

Tabela 3.1: Contagem na base hexadecimal

1	2	...	9	A	...	F	10
11	12	...	19	1A	...	1F	20

Fonte: Autoria própria (2025), baseado em Santos (2023)

Pode-se então representar todos os números naturais, estabelecendo inclusive uma ordem coerente entre eles. Atualmente, por meio de estudos em Aritmética, já se sabe que a representação de um número pode ser feita em qualquer base $b > 1$ (HEFEZ, 2016), como pode ser verificado a seguir:

Teorema (das bases): Sejam dados os números inteiros a e b , com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, \dots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que

$$a = r_0 + r_1b + r_2b^2 + \dots + r_nb^n.$$

Em outras palavras: uma vez escolhida a base b , todo número a pode ser escrito como uma sequência de algarismos r_i , ($i = 0, 1, \dots, n$), onde cada algarismo ocupa a posição n referente à potência da base escolhida, e essa representação será única. Alguns exemplos de aplicação do Teorema das bases pode ser visto na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Exemplo de interpretação dos números hexadecimais

Representação hexadecimal	"Aplicação" do Teorema	Representação decimal
123	$1 \times 16^2 + 2 \times 16 + 3$	291
100	$1 \times 16^2 + 0 \times 16 + 0$	256
4AE	$4 \times 16^2 + 10 \times 16 + 14$	1198

Fonte: Autoria própria (2025)

O Teorema em questão surge como consequência do algoritmo da divisão aplicado sucessivamente. Essa ideia será novamente abordada mais à frente, quando as conversões entre bases forem mencionadas, mas já é possível perceber que as operações básicas, como a de adição, podem ser realizadas normalmente, apenas adaptando-as para esse novo sistema de numeração.

3.1 A adição

3.1.1 Tabuada aditiva

Em muitas civilizações antigas, as tabuadas (tabelas ou tábuas) de operações foram essenciais nos primeiros passos de um sistema de numeração. É claro que o tamanho e a quantidade de valores para se "decorar" aumenta de acordo com a base escolhida. No entanto, uma pessoa já familiarizada com a contagem em uma determinada base, poderia ter mais facilidade em decorar tais tabuadas.

Tabela 3.3: Tabuada aditiva de base 16

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Fonte: Autoria própria (2025)

3.1.2 Números complementares

A fim de se facilitar a adição, outras estratégias podem ser adotadas, como por exemplo, o uso dos chamados **números complementares** que quando somados resultam em 10 (em destaque na Tabela 3.3). Conhecer os pares de números complementares, neste caso em base 16, pode tornar o cálculo muito mais rápido. Por exemplo, sabe-se que $A + 6 = 10$

e que $8 = 6 + 2$, então

$$A + 8 = A + 6 + 2 = 10 + 2 = 12.$$

Deste modo, tal pensamento pode ser aplicado nas demais operações, em particular na subtração.

3.1.3 O algoritmo da adição

Para adicionar números maiores, a estratégia usada pode surgir na forma de um algoritmo de adição, como o conhecido e aplicado desde cedo na vida escolar. Para adicionar 123 a 579, por exemplo, isto é, efetuar a operação $123 + 579$, primeiramente deve se posicionar cada algarismo de acordo com a ordem que ele representa. Em seguida, faz-se a adição, começando sempre do algarismo mais à direita, isto é, o algarismo das unidades, da mesma forma que seria feito em base 10 (SOARES, 2022). A Tabela 3.4 traz esta adição resolvida.

Tabela 3.4: Adicionando 123 a 579

Representação Hexadecimal	Notação de Neugebauer
$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \\ + \ 5 \ 7 \ 9 \\ \hline 6 \ 9 \ C \end{array}$	$\begin{array}{r} 1, \ 2, \ 3 \\ + \ 5, \ 7, \ 9 \\ \hline 6, \ 9, \ 12 \end{array}$

Fonte: Autoria própria (2025)

Contudo, pode ocorrer de uma determinada adição resultar em um número maior que 10, como por exemplo $9 + A = 13$, o que extrapolaria a quantidade de algarismos em uma mesma posição, que é apenas um. Neste caso, o que deve ser feito é "deixar" o algarismo 3 no resultado e "subir" o 1 para ser somado à próxima ordem, como feito na Tabela 3.5. Esse agrupamento ocorre da mesma forma no sistema decimal, a diferença é que esse algarismo 1 valerá 16 unidades.

Outro exemplo de adição na base 16 pode ser encontrado na Tabela 3.6.

Tabela 3.5: Adicionando 359 a 52A

Representação Hexadecimal	Notação de Neugebauer
$\begin{array}{r} \text{+1} \\ 3 \quad 5 \quad 9 \\ + \quad 5 \quad 2 \quad A \\ \hline 8 \quad 8 \quad 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{+1} \\ 3, \quad 5, \quad 9 \\ + \quad 5, \quad 2, \quad 10 \\ \hline 8, \quad 8, \quad 3 \end{array}$

Fonte: Autoria própria (2025)

Tabela 3.6: Adicionando 4F5 a 37B

Representação Hexadecimal	Notação de Neugebauer
$\begin{array}{r} \text{+1} \quad \text{+1} \\ 4 \quad F \quad 5 \\ + \quad 3 \quad 7 \quad B \\ \hline 8 \quad 7 \quad 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{+1} \quad \text{+1} \\ 4, \quad 15, \quad 5 \\ + \quad 3, \quad 7, \quad 11 \\ \hline 8, \quad 7, \quad 0 \end{array}$

Fonte: Autoria própria (2025)

3.2 A subtração

Uma vez compreendido como a adição funciona, a subtração surge automaticamente como sua operação inversa. Por exemplo, se ao adicionar $A + 6 = 10$, pode-se concluir que $10 - A = 6$ e também que $10 - 6 = A$, neste caso fazendo uso da ideia de números complementares. Para subtrair números maiores, como subtrair 345 de 9F7, o uso de um algoritmo para a subtração deve ser empregado, como na Tabela 3.7.

Tabela 3.7: Subtraindo 345 de 9F7

Representação Hexadecimal	Notação de Neugebauer
$\begin{array}{r} 9 \quad F \quad 7 \\ - \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \hline 6 \quad B \quad 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9, \quad 15, \quad 7 \\ - \quad 3, \quad 4, \quad 5 \\ \hline 6, \quad 11, \quad 2 \end{array}$

Fonte: Autoria própria (2025)

Haverão casos em que o algarismo do **minuendo** será menor que o **subtraendo**, de modo que é necessário "emprestar" uma "hexadecena" da ordem imediatamente à esquerda, como pode ser verificado no exemplo da Tabela 3.8, lembrando que o 1

"emprestado" valerá 16 unidades.

Tabela 3.8: Subtraindo 27B de 5A3

Representação Hexadecimal	Notação de Neugebauer
$\begin{array}{r} \\ \\ - \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \\ \\ - \\ \hline \end{array}$

Fonte: Autoria própria (2025)

3.3 A multiplicação

A multiplicação, à primeira vista, pode ser considerada como uma forma compacta de se escrever uma adição de várias parcelas iguais. Por exemplo a adição $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ pode ser escrita como $4 \cdot 2 = 8$.

Com isso em mente, a civilização hipotética usada como exemplo neste capítulo, seria capaz de desenvolver uma tabuada multiplicativa como a mostrada na Tabela 3.9.

Tabela 3.9: Tabuada multiplicativa de base 16

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	55	5C	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	55	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5C	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Fonte: Autoria própria (2025), baseado em Wikipedia (s.d.d)

Mesmo a tabuada sendo extensa, afinal são 256 números para se memorizar, alguns padrões podem ser observados:

- A multiplicação de qualquer número por zero resulta em zero.
- O número 1 é o elemento neutro, logo, a multiplicação de qualquer número por 1 resulta sempre neste mesmo número.
- A tabuada do 2 segue o mesmo padrão, com a inclusão dos algarismos A, C e E.
- A tabuada do 8 em hexadecimal segue o mesmo padrão do 5 em decimal:

Hexadecimal	8	10	18	20	28	...
Decimal	5	10	15	20	25	...

- A tabuada do 4 segue um padrão semelhante, uma vez que 4 é um divisor de 16:

Hexadecimal	4	8	10	14	18	20	24	...
-------------	---	---	----	----	----	----	----	-----

- A tabuada do F hexadecimal segue o mesmo padrão da tabuada do 9 decimal

Hexadecimal	F	1E	2D	3C	4B	...	C3	D2	E1
Decimal	9	18	27	36	45	54	63	72	81

- As tabuadas do 3 e do 6 mantêm todos os valores da tabuada decimal, com a inclusão de novos números hexadecimais;
- Outros padrões interessantes também podem ser observados nas tabuadas do C e do E.

Da mesma forma feita com as outras operações, para números maiores, pode-se efetuar a operação de multiplicação por meio de um algoritmo, semelhante ao usado para a base decimal. Por exemplo, o produto de 25 por 12 que é feito na Tabela 3.10.

Tabela 3.10: Multiplicando 25 por 12

Representação Hexadecimal	Notação de Neugebauer
$\begin{array}{r} 2 \quad 5 \\ \times 1 \quad 2 \\ \hline 4 \quad A \\ 2 \quad 5 \quad + \\ \hline 2 \quad 9 \quad A \end{array}$	$\begin{array}{r} 2, \quad 5 \\ \times 1, \quad 2 \\ \hline 4, \quad 10 \\ 2, \quad 5, \quad + \\ \hline 2, \quad 9, \quad 10 \end{array}$

Fonte: Autoria própria (2025)

Assim como na adição, e até mais comumente, acontecerá o agrupamento, já que um produto pode ocupar duas ordens, então uma ou mais "hexadecenas" serão somadas à próxima ordem. Como por exemplo, na multiplicação de 32 por 1A efetuada na Tabela 3.11.

Outro exemplo pode ser visto na Tabela 3.12, agora multiplicando 3BC por F.

Tabela 3.11: Multiplicando 32 por 1A

Representação Hexadecimal	Notação de Neugebauer
$+1$	
3 2	3, 2
× 1 A	× 1, 10
$+1$ F 4	$+1$, 15, 4
3 2 +	3, 2, +
5 1 4	5, 1, 4

Fonte: Autoria própria (2025)

Tabela 3.12: Multiplicando 3BC por F

Representação Hexadecimal	Notação de Neugebauer
$+B$ $+B$	$+11$ $+11$
3 B C	3, 11, 12
× F	× 15
3 8 0 4	3, 8, 0, 4

Fonte: Autoria própria (2025)

3.4 A divisão

3.4.1 Divisão euclidiana (com resto)

Como é esperado, a última das operações "básicas" também pode ser desenvolvida em base 16. No entanto, deve ter ficado claro que a forma de se efetuar as operações não muda, apesar da base 16 requerer uma atenção maior em relação aos valores a serem memorizados nas tabuadas. Outro aspecto importante, evidente no algoritmo usado na escola para a divisão, é que nele estão presentes também as operações de multiplicação e subtração, por isso a necessidade delas serem estudadas anteriormente. Além disso, assim como na divisão de base 10, a operação será iniciada pela esquerda, diferente das demais. Isso muitas vezes torna a divisão a operação mais complexa de ser realizada.

Para efetuar-se a divisão euclidiana (HEFEZ, 2016) de 3BC por 7, como na Tabela 3.13, o primeiro passo será dividir 3B "hexadezenas" em grupos de 7, o que de acordo com a tabuada multiplicativa (visto na Tabela 3.9), resulta em 8 grupos com resto 3. Em seguida, divide-se 3C por 7, o que resulta em 8, novamente, com resto 4.

Assim, o quociente é 88 e o resto 4.

3.4.2 Divisão com vírgula (não inteira)

Sabe-se que a operação de divisão não é fechada em relação aos números inteiros, ou seja, o resultado de um número inteiro dividido por outro pode não ser um número inteiro. Neste caso, é possível realizar a divisão com vírgula.

Considere o mesmo exemplo anterior, dividir 3BC por 7. Se o objetivo da operação é encontrar o quociente em sua forma "decimal"¹, a operação deve continuar após encontrar o resto 4, colocando uma vírgula após a unidade no resultado, que indica a separação da parte inteira, e completando-se o resto com 0 para que se possa continuar a divisão. Esta operação foi efetuada na Tabela 3.14.

A divisão continua do mesmo modo até que uma de duas coisas ocorra: o resto é igual a zero ou o resto se repete indefinidamente, o que resulta em uma dízima periódica, que é o caso do exemplo mostrado, cujo quociente obtido será $88,\overline{924}$.

3.5 Conversão entre bases numéricas

Uma vez entendido como funcionam as operações na base hexadecimal, é natural que se queira entender a relação desta base com a binária e, principalmente, com a decimal. Contudo, diferentemente de outros trabalhos que fazem as conversões entre bases partindo da base 10, aqui elas serão feitas sob o ponto de vista da civilização hipotética que usa a base 16.

3.5.1 Conversão para a base 10

Usando o algoritmo da divisão, é possível encontrar a representação de um número em qualquer base, assim como Martines (2019) faz com diversos exemplos. Qual seria, então, a representação decimal do número 2D4C? Primeiramente, deve-se lembrar que

¹"decimal" aqui se refere números não inteiros.

10 em hexadecimal está representado pelo algarismo A, logo, é necessário fazer divisões sucessivas por A, como consta na Tabela 3.15.

A cada divisão, é reservado o resto, pois ele formará a representação procurada, da direita para a esquerda, ou seja, o primeiro resto representará a unidade, o segundo resto a dezena e assim por diante. O último algarismo mais à esquerda da representação é determinado pelo último quociente, que deverá ser menor que o divisor, neste caso A. Desse modo, obtém-se o número 11596, como visto na Tabela 3.15. De fato, esta é a representação correta, possível de se verificar pelo Teorema das bases:

$$2D4C = 2 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16 + 11 = 8192 + 3328 + 64 + 12 = 11596.$$

3.5.2 Conversão para a base binária

A conversão para a base binária é mais simplificada. Como 2 é um divisor de 16, a conversão entre as bases se torna quase automática, apenas lembrando da relação presente na Tabela 3.16.

Cada algarismo hexadecimal corresponde a 4 *bits* binários, assim, a conversão da base 16 para base 2 é feita escrevendo cada algarismo em sua versão "4-*bits*", como na Tabela 3.17.

3.6 Extensão da representação para os números reais

Como já foi mencionado, algumas operações não são fechadas em determinados conjuntos numéricos. A operação de divisão por exemplo, não é fechada no conjunto dos números inteiros, sendo necessária uma expansão para o conjunto dos racionais.

A representação de um número inteiro negativo no decorrer de um texto pode ser feita de maneira simples, escrevendo um sinal negativo (-) à esquerda do número. Contudo, em computação isso não pode ser feito, uma vez que a máquina não poderá interpretar um sinal. Então, para que esse problema seja contornado, muitas vezes usa-se uma regra chamada "**complemento para 2**", no qual determina-se que "metade dos números

representados sejam não negativos e a outra metade corresponda a números negativos." (TOMÁS; MOREIRA, 2011). Deste modo, em uma representação de 8-*bits*, na qual é possível representar $2^8 = 256$ números, 128 serão não negativos enquanto que os demais 128 serão negativos, o que corresponde a um intervalo de -128 a 127 . Deste modo, as representações hexadecimais de 00 a 7F serão números não negativos e de 80 a FF serão negativos (ver Tabela 3.18).

Também é possível representar números com vírgula, ou seja, racionais e irracionais aproximados. A conversão deste tipo de número é feita separando-se a parte inteira das casas decimais. A conversão da parte inteira se dá como feito na seção anterior, por meio de sucessivas divisões. Já a parte "decimal" é convertida fazendo-se sucessivas multiplicações. A cada multiplicação, anota-se a parte inteira do resultado e deixa-se as casas decimais para a próxima multiplicação, formando-se a representação do número na base determinada. Por exemplo, é possível escrever o número 2A,C4 na base decimal, como realizado na tabela 3.19, e este número possui uma representação em forma de dízima periódica, que é $42,75\bar{3}$

Na computação, essa representação pode ser feita de duas formas: com vírgula fixa ou com vírgula flutuante.

No sistema de vírgula fixa, determina-se quantas casas decimais deseja-se para todos os números representados. Suponha um contexto no qual são necessárias apenas duas casas decimais. Então os dois últimos algarismos binários serão destinados às casas decimais, enquanto os demais são reservados à parte inteira, como observado em alguns exemplos da Tabela 3.20. Neste método, "o número pode ser tratado como um inteiro. Assim as operações com números racionais podem ser feitas internamente como operações com inteiros" (TOMÁS; MOREIRA, 2011).

O método de vírgula flutuante utiliza 32 *bits* para armazenar a informação de um número, sendo o primeiro *bit* reservado ao sinal, 8 *bits* seguintes para representar um número inteiro correspondente à potência da base e os 23 restante para a representação da mantissa, isto é, os algarismos que, de fato, compõem o número. Este método não será abordado aqui devido à sua complexidade, mas pode ser encontrado em Tomás e Moreira (2011).

Tabela 3.13: Divisão de 3BC por 7

Representação Hexadecimal	Notação de Neugebauer
$\begin{array}{r} 3 \text{ B C } \boxed{7} \\ - \quad 3 \text{ 8} \quad \quad \quad 8 \\ \hline 0 \text{ 3} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3, \text{ 11, } \boxed{12} \quad 7 \\ - \quad 3, \quad \quad \quad 8 \quad \quad \quad 8 \\ \hline 0 \quad 3 \end{array}$
$\begin{array}{r} 3 \text{ B C } \boxed{7} \\ - \quad 3 \text{ 8 } \downarrow \quad \quad \quad 88 \\ \hline 0 \text{ 3 } \color{red}{\text{C}} \\ \quad \quad 3 \text{ 8} \\ \hline \quad \quad 0 \text{ 4} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3, \text{ 11, } \boxed{12} \quad 7 \\ - \quad 3, \quad \quad \quad 8 \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad 8, 8 \\ \hline 0 \quad 3, \quad \color{red}{12} \\ \quad \quad 3, \quad \quad 8 \\ \hline \quad \quad 0, \quad \quad 4 \end{array}$

Fonte: Autoria própria (2025)

Tabela 3.14: Divisão de 3BC por 7

Representação Hexadecimal	Notação de Neugebauer
$\begin{array}{r} 3 \text{ B C } \boxed{7} \\ - \quad 3 \text{ 8 } \downarrow \quad \quad \quad 88 \\ \hline 0 \text{ 3 } \color{red}{\text{C}} \\ \quad \quad 3 \text{ 8} \\ \hline \quad \quad 0 \text{ 4} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3, \text{ 11, } \boxed{12} \quad 7 \\ - \quad 3, \quad \quad \quad 8 \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad 8, 8 \\ \hline 0 \quad 3, \quad \color{red}{12} \\ \quad \quad 3, \quad \quad 8 \\ \hline \quad \quad 0, \quad \quad 4 \end{array}$
$\begin{array}{r} 3 \text{ B C } \boxed{7} \\ - \quad 3 \text{ 8} \quad \quad \quad 88, \\ \hline 0 \text{ 3 } \text{ C} \\ \quad \quad 3 \text{ 8} \\ \hline \quad \quad 0 \text{ 4 } \color{red}{0} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3, \text{ 11, } \boxed{12} \quad 7 \\ - \quad 3, \quad \quad \quad 8 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 8, 8; \\ \hline 0 \quad 3, \quad \quad 12 \\ \quad \quad 3, \quad \quad 8 \\ \hline \quad \quad 0, \quad 4, \quad \color{red}{0} \end{array}$
$\begin{array}{r} 3 \text{ B C } \boxed{7} \\ - \quad 3 \text{ 8} \quad \quad \quad 88, \color{red}{9} \\ \hline 0 \text{ 3 } \text{ C} \\ \quad \quad 3 \text{ 8} \\ \hline \quad \quad 0 \text{ 4 } \color{red}{0} \\ \quad \quad \quad 3 \text{ F} \\ \hline \quad \quad \quad 0 \text{ 1} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3, \text{ 11, } \boxed{12} \quad 7 \\ - \quad 3, \quad \quad \quad 8 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 8, 8; \color{red}{9} \\ \hline 0 \quad 3, \quad \quad 12 \\ \quad \quad 3, \quad \quad 8 \\ \hline \quad \quad 0, \quad 4, \quad \quad 0 \\ \quad \quad \quad 3, \quad \quad 15 \\ \hline \quad \quad \quad 0, \quad \quad 1 \end{array}$

Fonte: Autoria própria (2025)

Tabela 3.15: Convertendo 2D4C para decimal

$ \begin{array}{r} 2 \text{ D } 4 \text{ C} \\ - 2 \text{ 8} \\ \hline 5 \text{ 4} \\ - 5 \text{ 0} \\ \hline 4 \text{ C} \\ 4 \text{ 6} \\ \hline \text{unidades } 6 \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} 4 \text{ 8 } 7 \\ - 4 \text{ 6} \\ \hline 2 \text{ 7} \\ - 1 \text{ E} \\ \hline \text{dezenas } 9 \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} 7 \text{ 3} \\ - 6 \text{ E} \\ \hline 5 \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} B \\ - A \\ \hline 1 \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} 4 \text{ 8 } 7 \\ - 4 \text{ 6} \\ \hline 2 \text{ 7} \\ - 1 \text{ E} \\ \hline \text{dezenas } 9 \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} 7 \text{ 3} \\ - 6 \text{ E} \\ \hline 5 \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} B \\ - A \\ \hline 1 \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} 7 \text{ 3} \\ - 6 \text{ E} \\ \hline 5 \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} B \\ - A \\ \hline 1 \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} B \\ - A \\ \hline 1 \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array} $	
$ \begin{array}{r} 4 \text{ 8 } 7 \\ - 4 \text{ 6} \\ \hline 2 \text{ 7} \\ - 1 \text{ E} \\ \hline \text{dezenas } 9 \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} 7 \text{ 3} \\ - 6 \text{ E} \\ \hline 5 \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} B \\ - A \\ \hline 1 \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} 7 \text{ 3} \\ - 6 \text{ E} \\ \hline 5 \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} B \\ - A \\ \hline 1 \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} B \\ - A \\ \hline 1 \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array} $			
$ \begin{array}{r} 7 \text{ 3} \\ - 6 \text{ E} \\ \hline 5 \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} B \\ - A \\ \hline 1 \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} B \\ - A \\ \hline 1 \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array} $					
$ \begin{array}{r} B \\ - A \\ \hline 1 \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px; text-align: center; vertical-align: middle;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array} $							
$ \begin{array}{r} A \\ B \\ \hline \text{centenas} \end{array} $	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 100px; height: 100px; text-align: right; vertical-align: top;"> $\begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array}$ </td> <td style="width: 100px;"></td> </tr> </table>	$ \begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array} $									
$ \begin{array}{r} A \\ 1 \\ \hline \text{dezena de milhar} \\ \text{unidade de milhar} \end{array} $											

Fonte: Autoria própria (2025)

Tabela 3.16: Representação de números inteiros

Decimal	Binário	Hexadecimal
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F
16	00010000	10

Fonte: Autoria própria (2025), baseado em Gerlinger (2022)

Tabela 3.17: Alguns exemplos de conversão Binário-Hexadecimal

Hexadecimal	Binário	Decimal
36	00110111	54
D7	11010111	215
123	000100100011	291
4FC	010011111100	1276

Fonte: Autoria própria (2025)

Tabela 3.18: Representação de números inteiros

Decimal	Binário	Hexadecimal
0	00000000	00
1	00000001	01
2	00000010	02
...
126	01111110	7E
127	01111111	7F
-128	10000000	80
-127	10000001	81
...
-2	11111110	FE
-1	11111111	FF

Fonte: Autoria própria (2025), com base em Wikipedia (s.d.c)

Tabela 3.19: Conversão da parte decimal 0,C4

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \color{red}{+7} \quad \color{red}{+2} \\
 0, \quad C \quad 4 \\
 \times \quad \quad \quad A \\
 \hline
 7, \quad 8 \quad 8
 \end{array} \\
 \color{blue}{\uparrow} \text{ primeira casa decimal}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \color{red}{+5} \quad \color{red}{+5} \\
 0, \quad 8 \quad 8 \\
 \times \quad \quad \quad A \\
 \hline
 5, \quad 5 \quad 0
 \end{array} \\
 \color{blue}{\uparrow} \text{ segunda casa decimal}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \color{red}{+3} \\
 0, \quad 5 \\
 \times \quad \quad \quad A \\
 \hline
 3, \quad 2
 \end{array} \\
 \color{blue}{\uparrow} \text{ terceira casa decimal}
 \end{array}$$

Fonte: Autoria própria (2025)

Tabela 3.20: Exemplos de números com duas casas após a vírgula

Decimal	Binário	Hexadecimal
1,5	1,1	1,8
2,5	10,1	2,8
3,25	11,01	3,4
6,75	111,11	6,C
51,75	110011,11	36,C

Fonte: Autoria própria (2025)

Capítulo 4

Algumas aplicações do sistema hexadecimal

4.1 Arquitetura Assembly

Como já mencionado diversas vezes, a base hexadecimal está fortemente relacionada à base binária que, por sua vez, é a principal "linguagem" dos computadores. Entre os computadores, uma classe que se destaca é a dos videogames.

Desde a chamada "primeira geração" de consoles, lançados entre os anos de 1972 e 1977 (WIKIPEDIA, s.d.a), dos quais se encontram o *Magnavox Odyssey*, até os dias atuais e a "guerra" de consoles das gigantes Sony e Microsoft, os videogames como computadores sempre tiveram que operar com bytes e mais bytes de informação.

Dos muitos consoles conhecidos até hoje, o foco aqui será o SNES (sigla para *Super Nintendo Entertainment System*), console que fez parte da infância de várias pessoas na década de 1990. Tal console usa a linguagem de programação Assembly, que é dita ser de baixo nível, "caracterizada pelo difícil entendimento e pela equivalência 1 para 1 com código de máquina" (FLARE; TSUTARJA, 2020). Isso quer dizer que uma instrução escrita pelo programador em forma de texto, conhecida como **mnemônico**, será convertida pelo *software* e interpretada pelo processador diretamente como uma operação matemática (WIKIPEDIA, s.d.b). Apesar do código de máquina ser, por analogia, o código binário,

a interpretação de instruções pelo *software* é feita com números hexadecimais, sempre acompanhados do prefixo "0x", por isso diz-se que o SNES é um console "16-bits".

Como exemplo mais simples, um pedaço do código responsável por apresentar a mensagem "Hello world", brincadeira feita com iniciantes em programação sempre que uma nova linguagem de programação é aprendida, pode ser observada na Figura 4.1.

Figura 4.1: Trecho de código Assembly

<code>mov si, Hello</code>
<code>call Print</code>

Fonte: Autoria própria (2025)

Neste exemplo, as palavras "Hello" e "Print" se referem a funções ou instruções previamente programadas com seus próprios comandos e interações, a palavra *si* indica um lugar específico na memória do console, mas o foco está nos mnemônicos *mov* e *call* que são entendidos pelo *software* como os números hexadecimais "0xA0, 0xA1, 0xA2, 0xA3, 0x8C, 0x8E" e "0x9A, 0xE8, 0xFF/2 , 0xFF/3" respectivamente (WIKIPEDIA, s.d.e). Em outras palavras, cada vez que um programador escreve o mnemônico *mov* na linha de código, o *software* traduzirá o comando como os números hexadecimais A0, A1, A2, A3, 8C e 8E, que por sua vez serão convertidos em números binários pelo processador, já que este trabalha com dois níveis de corrente: ligado (1 - com corrente) e desligado (0 - sem corrente). Esta combinação de "zeros" e "uns" faz com que o processador "mova" determinado bloco de dados para um local específico da memória. A Tabela 4.1 traz as correspondências entre o mnemônico *mov* e a linguagem de máquina.

Tabela 4.1: Mnemônico *mov* e suas correspondências numéricas




Mnemônico	Equivalente hexadecimal	Equivalente binário
<i>mov</i>	0xA0 0xA1 0xA2 0xA3 0x8C 0x8E	10100000 10100001 10100010 10100011 10001100 10001110
Texto escrito pelo programador	Interpretação do <i>software</i>	Interpretação do processador

Fonte: Autoria própria (2025)

4.2 Sistema de cores RGB

Outro aspecto interessante da programação no console SNES é a cor. Por se tratar de um console "16-bits", ele era capaz de representar 256 cores ao mesmo tempo em tela, mas sua paleta de cores ultrapassava 32 mil (ele usava 15 bits de informação para cada cor). Atualmente, a tela de um computador pode mostrar mais de 16 milhões de tonalidades de cores diferentes, isso porque as cores são obtidas digitalmente pela composição de três cores primárias, o vermelho (Red - R), o verde (Green - G) e o azul (Blue - B). Cada tonalidade (vermelho, verde ou azul) possui uma escala própria, que representa sua contribuição para a formação de uma determinada cor e que pode variar de 0 (00 ou 0%) para tonalidades próximas ao preto, a 255 (FF ou 100%) para tonalidades próximas ao branco (Tabela 4.2). Nesse sistema, conhecido como RGB, as cores são representadas por números hexadecimais com seis dígitos, no qual os dois primeiros se referem à tonalidade de vermelho, os dois dígitos do meio se referem à tonalidade de verde e os dois últimos representam a tonalidade de azul. Normalmente os códigos das cores são precedidos pelo símbolo "#".

Tabela 4.2: As três cores primárias

	Vermelho	#FF0000
	Verde	#00FF00
	Azul	#0000FF





Autoria própria (2025), baseado em Encycolorpedia (s.d.)

Tome como exemplo, a cor "amaranto" (em inglês *amaranth*).

Esta cor é composta pela "soma" de três tonalidades, sendo vermelho a 90%, verde a 17% e azul a 32% (ENCYCOPEDIA, s.d.). Calculando essas porcentagens para cada tonalidade, isto é, 90% de 255 para o vermelho, 17% de 255 para o verde e 32% de 255 para o azul, obtém-se os números 229 (E5), 43 (2B) e 80 (50), respectivamente.

Por se tratar de um sistema usado em dispositivos que emitem luz, é necessário entender que os números estão relacionados à amplitude e comprimento de onda da luz de cada cor e, por consequência, à luminosidade. Sem adentrar nos aspectos da Física, de forma bastante resumida, mais cor significa mais luz, de modo que os tons usados na composição do "amaranto" serão mais escuros quanto mais próximos de 0 e mais claros se

Tabela 4.3: Cores somadas para obtenção do "amaranto"



Cor	Código	
	#E50000	Vermelho 90%
	#002B00	Verde 17%
	#000050	Azul 32%
	#E52B50	Amaranto

Fonte: Autoria própria (2025)

próximos de 255, portanto, quanto mais cores são misturadas, mais a cor final se aproxima do branco (VIEIRA, 2021).

Com esse número também é possível analisar outros aspectos da cor, como por exemplo qual a sua cor inversa ou complementar em relação a esse sistema. Uma vez que "#FFFFFF" representa o branco, a "soma" de todas as cores, ao subtrair-se "#E52B50" obtém-se "#1AD4AF", que faz referência a uma cor conhecida como "verde do Caribe". A comparação das duas cores, bem como a operação efetuada para obtenção do "verde do Caribe" são apresentadas a seguir nas Tabelas 4.4 e 4.5, respectivamente.

Tabela 4.4: Referências hexadecimais para cores

Cor	Nome	Código
	Amaranto	#E52B50
	Verde do Caribe	#1AD4AF

Fonte: Autoria própria (2025)

Tabela 4.5: Subtração das cores branco e "amaranto"

	F	F	F	F	F	F
-	E	5	2	B	5	0
	1	A	D	4	A	F

Fonte: Autoria própria (2025)

4.3 Aplicação em sala de aula: O jogo da senha hexadecimal

Unindo os conceitos de sistema numérico hexadecimal e a representação das cores por meio desse sistema, é possível desenvolver atividades diversas em sala de aula, que podem envolver as operações vistas neste trabalho. Um exemplo de atividade é o "jogo da senha" (ver Figura 4.2). Neste jogo, "o desafiante seleciona, dentre 6 cores possíveis e distintas, um conjunto de 4 cores, chamado senha, com cores distintas duas a duas, e as coloca ordenadamente atrás de uma proteção, para que o desafiado não as veja" (FILHO, 2016). O jogador desafiado tem como objetivo acertar as cores e a ordem correta delas na senha, mas possui um número limitado de tentativas, definido pelas regras do jogo ou acordado pelos jogadores. A cada tentativa feita, o desafiante deve dar duas dicas: quantas cores estão certas mas em uma posição errada, ou quantas cores estão corretas e nos lugares corretos. O desafiado vencerá o jogo se acertar a senha com as tentativas disponíveis, caso contrário, o desafiante vence.

Figura 4.2: Exemplo de tabuleiro do jogo da senha



Fonte: Ludopedia

No intuito de se adaptar o jogo para o sistema hexadecimal, algumas mudanças podem ser feitas:

- 1 Ao invés de quatro cores distintas, será escolhida apenas uma e a senha será composta pelo código hexadecimal desta cor.
- 2 A cada tentativa, o desafiante deve dizer o quanto falta de cada cor primária,

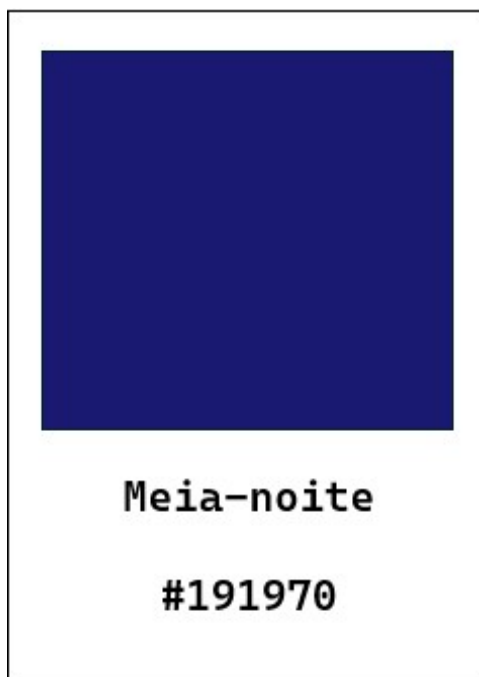
apenas dizendo "mais vermelho" ou "menos verde", por exemplo, ou dizer quando o desafiado acertar o valor correto.

3 Após cada dica, o desafiado deve escolher um número (de dois dígitos hexadecimais) para somar, ou subtrair, a cada cor primária e efetuar essa operação, assim formando uma nova cor/senha.

4.3.1 Exemplo de partida

A escolha da cor, pelo jogador desafiante, pode ser feita por meio de uma carta que mostra a cor em si junto com seu respectivo código hexadecimal.

Figura 4.3: Exemplo de carta do jogo da senha hexadecimal



Fonte: Autoria própria (2025)

Tome como exemplo a cor "azul meia-noite" (do inglês *midnight blue*, Figura 4.3), cujo código hexadecimal é "#191970" (Tabela 4.6).

Na primeira rodada, o desafiado faz sua primeira tentativa com o número "#200A90". Em seguida, o desafiante deverá dar a dica "menos vermelho, mais verde e menos azul". Deste modo o desafiado escolhe os números hexadecimais 10 para subtrair na cor vermelha,

Tabela 4.6: Código da cor "midnight blue"

Cor	Nome	Código
	Azul meia-noite	#191970

Fonte: A autoria própria (2025)

08 para adicionar à cor verde e 15 para subtrair da cor azul e efetua estas operações como mostrado na Tabela 4.7.

Tabela 4.7: Rodada de operações das cores

2 0	0 A	9 0
- 1 0	+ 0 8	- 1 5
1 0	1 2	7 B

Fonte: A autoria própria (2025)

O desafiado obterá uma nova cor, de código "#10127B", iniciando a segunda rodada. O desafiante deverá dar uma nova dica: "mais vermelho, mais verde e menos azul". Assim, uma nova rodada de operações é realizada com os números 05, 10 e 0B (Tabela 4.8), e o jogo continua.

Tabela 4.8: Rodada de operações das cores

1 0	1 2	7 B
+ 0 5	+ 1 0	- 0 B
1 5	2 2	7 0

Fonte: A autoria própria (2025)

Na sequência, o desafiante dará a dica "mais vermelho, menos verde, acertou azul". A partir desta tentativa, o desafiado poderá realizar as operações apenas para as cores vermelho e verde. Suponha que, na próxima rodada de operações, o desafiado escolheu os números 04 e 03 para adicionar e subtrair aos números 15 e 22, respectivamente.

Neste caso, o desafiado ganhou a partida (Tabela 4.9).

Outras variações podem ser aplicadas ao jogo, como por exemplo:

- Um desafiante contra vários desafiados, o vencedor é o jogador que acertar primeiro ou em um menor tempo.

Tabela 4.9: Sequência de tentativas

Cor	Código	Dica
	#200A90	menos vermelho, mais verde, menos azul
	#10127B	mais vermelho, mais verde, menos azul
	#152270	mais vermelho, menos verde, acertou azul
	#191970	acertou!

Fonte: Autoria própria (2025)

- Disputa por pontos, onde cada jogador se reveza e escolhe uma nova cor a cada partida, vencendo aquele que marcar mais pontos.
- Modo fácil: o jogo funciona sem a etapa das operações.
- As cores podem ser escolhidas em um intervalo específico, com números mais próximos da senha correta, ou a partir de outra carta colorida, diminuindo assim a quantidade de tentativas que o desafiado necessita para vencer.

Capítulo 5

Considerações finais

O principal objetivo deste trabalho investigar possíveis abordagens da base hexadecimal no ensino de Matemática, de forma significativa, considerando o aspecto histórico, aplicações tecnológicas e desenvolvimento de recursos didáticos, a fim de despertar o interesse do leitor para "como a matemática funciona". Para tanto, buscou-se estudar a história dos sistemas de numeração, para que fosse possível a familiarização do leitor ao assunto, uma vez que, para se saber como algo funciona, é necessário entender como se deu o seu desenvolvimento. Também foi necessária uma breve explicação das principais bases usadas atualmente, fora do contexto puramente matemático, a fim de despertar o interesse não apenas daqueles que estão relacionados à matemática - acadêmicos e professores - mas também de alunos, que por vários motivos podem se afastar desta disciplina devido a uma linguagem excessivamente técnica.

Para que este trabalho se diferísse de outros que foram analisados cuidadosamente na etapa de pesquisa, optou-se por fazer um estudo da base hexadecimal, apesar de sua aparente complexidade, vide as tabelas de adições e multiplicações cheias de valores para serem decorados, de modo que era necessária uma abordagem menos formal. Optou-se por escolher um contexto hipotético, onde uma civilização imaginária teria desenvolvido sua aritmética em um sistema de base 16. Esta escolha foi feita pensando-se em alguns motivos principais que serão apresentados na sequência.

Em primeiro lugar, a História da humanidade, apesar de "já estar escrita", não é

absoluta. Achados históricos podem mudar a percepção que se tem de um povo ou civilização antiga, incluindo sua escrita, cultura e até mesmo sua matemática e a forma como faziam seus cálculos.

O segundo motivo é o crescente desenvolvimento no que se refere à busca de vida extraterrestre. Apesar de parecer incoerente para alguns estudiosos, muitas vezes motivo para risos, não se pode negar as infinitas possibilidades que o universo proporciona. Assim como o ser humano desenvolveu um sistema decimal influenciado, provavelmente, pelos seus dez dedos, uma civilização que se desenvolveu em outro ambiente, com diferentes pressões evolutivas, poderia desenvolver um sistema de numeração completamente diferente dos que se conhecem atualmente na história humana.

Outro motivo é o grande desenvolvimento da computação, que inicialmente estava relacionada à base binária, passou também pela octal (base 8) e por fim chegou à hexadecimal. A "linguagem" dos computadores está fortemente conectada a estas bases, e ainda pode ir além, uma vez que atualmente, os processadores podem fazer cálculos com blocos de 32, 64 e até 86 *bits*.

Então, é compreensível o foco no estudo das bases 10 e 2, mas é necessário também ter em atenção as outras bases, de modo que outros estudos mais teóricos ainda são importantes e não puderam ser abordados neste trabalho com profundidade, como critérios de divisibilidade em base 16 (e em outras bases), apenas citados como curiosidade ao se mencionar as tabuadas multiplicativas, e conversão de números decimais, sejam racionais ou irracionais, que são possíveis e foram apenas exemplificadas.

Contudo, tão importante quanto estes estudos futuros é a forma de trazê-los ao público não acadêmico. Em um contexto de escola e sala de aula, optou-se por trazer uma atividade lúdica, o "jogo da senha", de modo a sintetizar os conceitos vistos no decorrer do texto, sobre as operações com números hexadecimais. Abordagens como esta, apesar de desafiadoras, podem auxiliar na compreensão dos alunos acerca de novas formas de calcular, isto é, dos diferentes sistemas de numeração. Além do mais, "na escola são exaustivas as atividades visuais e os problemas que tentam ressaltar a importância dessa percepção, abrindo caminho para as operações matemáticas futuras" (VILCHES, 2019). Em relação aos estudantes do Ensino Fundamental, anos iniciais, a utilização de material

dourado de diferentes bases, também auxilia na aprendizagem de aspectos importantes como ordens e classes (unidade, dezena, centena, etc.) e mesmo nas quatro operações básicas como foram mencionadas neste trabalho. Também é possível a elaboração de ábacos, dado o contexto histórico que pode ser relacionado com estes e com a numeração de modo geral.

Por fim, pode-se concluir que é essencial trazer aos leitores, mesmo em uma dissertação, uma linguagem mais atraente ao se abordar a matemática, não se afastando, obviamente, do conhecimento técnico e do formalismo necessário nestes momentos. É tarefa do professor mostrar **como** a matemática funciona, utilizando as ferramentas disponíveis ou criando novas, e tentar afastar seus alunos do pensamento de "para que preciso disso?", mostrando a eles que suas escolhas que ditarão o que será necessário ou não em seus futuros. Portanto, aprender sobre bases numéricas não convencionais, por exemplo, pode não ser de total utilidade imediata, mas as propriedades, algoritmos e notações usadas no decorrer deste processo podem servir como ferramentas para se descobrir novas formas de ver e entender o mundo.

Bibliografia

ALECRIM, E.; HIGA, P. **Qual é a diferença entre processadores de 64 bits e 32 bits? Saiba o que muda na arquitetura.** 2023. Acesso em: 10/02/2025. Disponível em: <<https://tecnoblog.net/responde/processador-64-bits-vs-32-bits-diferencas/>>.

BDTD. s.d. Acesso em: 23/12/2024. Disponível em: <<https://bdt.d.ibict.br/vufind/>>.

CHRISOMALIS, S. **Numerical notation: A comparative History.** [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.

ENCYCLOPEDIA. s.d. Último acesso em: 18/05/2025. Disponível em: <<https://encycolorpedia.pt/>>.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** [S.l.]: Editora Unicamp, 2005.

FILHO, H. S. G. **O JOGO SENHA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DOS MÉTODOS DE CONTAGEM.** Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE, 2016.

FLARE, M.; TSUTARJA. **65c816 Assembly- Instruções, Lógica e Aplicações.** [S.l.], 2020. Incompleto.

FREITAS, A. **Exemplo - Soma de Números na Base 16 (MDI).** 2020. Vídeo do Youtube. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=A3QZJD0Xp0Y>>.

GERLINGER, M. **What's the Hex Code and how to use it.** 2022. Acesso em: 23/12/2024. Disponível em: <<https://www.linearity.io/blog/hex-code/>>.

HEFEZ, A. **Aritmética.** [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos.** [S.l.]: Editora Nova Fronteira, 1997. v. 1.

_____. _____. [S.l.]: Editora Nova Fronteira, 1997. v. 2.

LEIBNIZ, G. W. Explication de l'arithmétique binaire. **Memoires de l'Academie Royale des Sciences**, 1705.

MARTINES, V. M. **Base de numeração e o sistema binário.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Grande Dourados, 2019.

NEUGEBAUER, O. E. **The exact sciences in antiquity**. [S.l.]: Dover Publications, Inc., 1969.

RECH, M. **A função Φ de Euler e a expansão periódica de frações na base b** . Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso, 2015.

ROCHA, K. F. **Bases Numéricas Não Usuais: Um breve estudo**. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS, 2019.

RODRIGUES, W. S. **Base dez: o grande tesouro matemático e sua aparente simplicidade**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001.

SALVIATO, J. L. **Sistema de numeração binário: dos computadores à sala de aula**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2018.

SANTOS, M. H. M. **Bases numéricas: Um estudo além do sistema decimal**. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS, 2023.

SOARES, A. de S. **Apostila de Matemática Discreta I**. [S.l.]: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, 2022.

TOMÁS, A. P.; MOREIRA, N. **Bases de numeração e representação de números em computador**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2011.

VERRE, C. **Lei de Moore: o que é, como funciona e por que acabou?** 2023. Acesso em: 19/10/2024. Disponível em: <[VIEIRA, T. **Pantone, RGB e CMYK; qual a diferença?** 2021. Último acesso em: 04/05/2025. Disponível em: <<https://tecnoblog.net/responde/pantone-rgb-e-cmyk-qual-a-diferenca/>>>.](https://blog.singularityubrazil.com/blog/lei-d-e-moore/#:~:text=O%20que%20%C3%A9%20a%20Lei,cada%20vez%20maior%20de%20aplica%C3%A7%C3%B5es.>></p></div><div data-bbox=)

VILCHES, M. **NÚMEROS COMPLEMENTARES**. 2019. Último acesso em: 06/12/2024. Disponível em: <<https://entendabem.com.br/index.php/2019/04/10/numeros-complementares/>>>.

WIKIPEDIA. **Consoles de jogos eletrônicos de primeira geração**. s.d. Último acesso em: 05/03/2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Consoles_de_jogos_eletr%C3%B4nicos_de_primeira_gera%C3%A7%C3%A3o.>>.

_____. **Linguagem assembly**. s.d. Último acesso em: 05/03/2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Linguagem_assembly.>>.

_____. **Representação de números com sinal**. s.d. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Representa%C3%A7%C3%A3o_de_n%C3%BAmeros_com_sinal#:~:text=Em%20matem%C3%A1tica%2C%20os%20n%C3%BAmeros%20negativos,de%20codifica%C3%A7%C3%A3o%20para%20n%C3%BAmeros%20negativos.>>

_____. **Sistema de numeração hexadecimal**. s.d. Último acesso em: 05/03/2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_numera%C3%A7%C3%A3o_hexadecimal>.

_____. **x86 instruction listings**. s.d. Último acesso em: 05/03/2024. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/X86_instruction_listings>.

WILHELM, R. **I-ching, Livro das mutações**. [S.l.]: Editora Pensamento, 2006.