

Veridiana Baldez Garcia

Atividades para Construção de Sólidos Redondos utilizando o GeoGebra 3D

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Novembro, 2025

Veridiana Baldez Garcia

Atividades para Construção de Sólidos Redondos utilizando o GeoGebra 3D

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Veridiana Baldez Garcia junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Cristiana Andrade Poffal

Coorientador: Dr. Mario Rocha Retamoso

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Novembro, 2025

Colaboradores



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

<http://www.furg.br>



IMEF INSTITUTO DE
MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E FÍSICA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

<http://www.imef.furg.br>



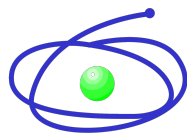
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

<http://www.profmatsbm.org.br>



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

<http://www.sbm.org.br>



COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

<http://www.capes.gov.br>

G616a Garcia, Veridiana Baldez
Atividades para construção de sólidos redondos utilizando o
GeoGebra 3D / Veridiana Baldez Garcia - 2025.

127f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande -
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional,
2025.

Orientadora: Dra. Cristiana Andrade Poffal

Coorientador: Dr. Mario Rocha Retamoso

1. Matemática em Rede Nacional.. 2. Geometria espacial 3.
GeoGebra 3D. 4. Realidade aumentada. 5. Teoria Semiótica. 6.
Teoria de Van Hiele. I. Poffal, Cristiana Andrade. II. Retamoso,
Mario Rocha. III. Título.


CDU 51

Veridiana Baldez Garcia


Atividades para Construção de Sólidos Redondos utilizando o GeoGebra 3D

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Veridiana Baldez Garcia junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.


Aprovada por:

Documento assinado digitalmente
 **CRISTIANA ANDRADE POFFAL**
Data: 14/11/2025 20:49:19-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>


Profa. Dra. Cristiana Andrade Poffal
Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

Documento assinado digitalmente
 **MARIO ROCHA RETAMOSO**
Data: 14/11/2025 21:44:18-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Mario Rocha Retamoso
Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

Documento assinado digitalmente
 **BARBARA DENICOL DO AMARAL RODRIGUEZ**
Data: 14/11/2025 23:22:11-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Profa. Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez
Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

Documento assinado digitalmente
 **LISANDRA DE OLIVEIRA SAUER**
Data: 17/11/2025 10:59:01-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Profa. Dra. Lisandra de Oliveira Sauer
Universidade Federal de Pelotas (UFPEL)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Novembro, 2025

Dedico este trabalho à minha filha Poliana, para que veja no estudo um caminho de sonhos e ao meu pai Taylor, por ter sido meu primeiro mestre e o maior incentivador da minha jornada.

Agradecimentos

Expresso minha profunda gratidão à minha Orientadora, Prof^a. Dra. Cristiana Andrade Poffal, pela persistência, dedicação e apoio incondicional. Ao meu Coorientador, Prof. Dr. Mario Rocha Retamoso, agradeço pela valiosa contribuição e pelas discussões produtivas, especialmente sobre Geometria Espacial e GeoGebra 3D.

O meu muito obrigado, acima de tudo, à minha família, base de tudo o que conquistei: à minha amada filha Poliana, minha razão e inspiração diária, e ao meu pai Taylor, pelo incentivo constante e por acreditar em mim em cada etapa desta caminhada.

Estendo meus agradecimentos às professoras Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez e Dra. Lisandra de Oliveira Sauer, por aceitarem o convite para compor a banca examinadora e pelas valiosas contribuições oferecidas a este trabalho.

Meu reconhecimento à Universidade Federal do Rio Grande (FURG) e ao PROFMAT, pela oportunidade acadêmica e pelo ambiente de pesquisa. Um agradecimento especial aos professores do PROFMAT, que com tanta dedicação conduziram as aulas durante todo o mestrado, sendo fundamentais na minha formação.

Por fim, sou grata aos meus amigos de profissão e de vida, bem como aos colegas que fiz no PROFMAT. Compartilhar estes anos com vocês tornou a jornada muito mais leve e significativa.

"A Geometria existe por toda parte. No girar das estrelas, no formato das nuvens, no rastro dos pássaros. A natureza é um livro escrito em caracteres matemáticos."(Galileu Galilei)

Resumo

Esta dissertação estuda o uso de tecnologias digitais no ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio, com foco no desenvolvimento e na proposição de um produto educacional que consiste em atividades mediadas pelo GeoGebra 3D e pela Realidade Aumentada (RA). O objetivo é auxiliar o professor na abordagem dos conceitos de esfera, cone e cilindro. A pesquisa é de natureza qualitativa e descritiva, fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Teoria dos Níveis de Pensamento Geométrico de Van Hiele. O produto educacional propõe oito atividades voltadas à exploração de conceitos de volume e propriedades dos sólidos redondos na Geometria Espacial, sendo quatro de construção no software GeoGebra 3D e quatro de exercícios de ENEM e Vestibulares. Destaca-se que uma dessas atividades utiliza Realidade Aumentada (RA). A etapa culminante aborda o volume da esfera e o Princípio de Cavalieri, permitindo aos estudantes observarem e manipularem objetos tridimensionais em ambiente interativo, relacionando representações planas e espaciais. Todas as atividades têm a versão pronta para impressão e para serem aplicadas na sala de aula com a mediação do professor. As atividades integradas com GeoGebra 3D e a Realidade Aumentada favorecem o desenvolvimento do raciocínio espacial, facilitam a compreensão das relações métricas e contribuem para a articulação entre registros visuais e algébricos.

Palavras-chave: Geometria Espacial. GeoGebra 3D. Realidade Aumentada. Teoria Semiótica. Teoria de Van Hiele.

Abstract

This master thesis studies the use of digital technologies in the teaching of Spatial Geometry in High School, focusing on the development and proposition of an educational product consisting of activities mediated by GeoGebra 3D and Augmented Reality (AR). The main objective is to support teachers in addressing sphere, cone and cylinder. The research is qualitative and descriptive in nature, grounded in Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers and Van Hiele's Theory of Geometric Thought Levels. The educational product proposes eight activities aimed at exploring concepts of volume and properties of round solids in Spatial Geometry, with four activities focused on construction within the GeoGebra 3D software and four based on exercises from national exams (ENEM) and college entrance exams. It is highlighted that one of these activities uses Augmented Reality (AR). The culminating stage addresses the volume of the sphere and Cavalieri's Principle, allowing students to observe and manipulate three-dimensional objects in an interactive environment, linking planar and spatial representations. All activities have a version ready for printing and for immediate application in the classroom with teacher mediation. The activities integrated with GeoGebra 3D and Augmented Reality favor the development of spatial reasoning, facilitate the comprehension of metric relations, and contribute to the articulation between visual and algebraic registers.

Keywords: Spatial Geometry. GeoGebra 3D. Augmented Reality. Semiotic Theory. Van Hiele Theory.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Princípio de Cavalieri	35
Figura 2 – Uma pirâmide pentagonal, um tetraedro e um cone circular reto	36
Figura 3 – Comparação entre o cone circular reto e uma pirâmide	37
Figura 4 – Superfície lateral do cone circular reto	38
Figura 5 – Uma prisma pentagonal, um paralelepípedo e um cilindro	39
Figura 6 – Comparação entre o prisma e o cilindro circular	40
Figura 7 – Área lateral do cilindro	40
Figura 8 – Construção no GeoGebra 3D	42
Figura 9 – Janela de Visualização	46
Figura 10 – Menu de opções do GeoGebra 3D	47
Figura 11 – Seleção sobre o objeto	49
Figura 12 – Acesso às Propriedades	50
Figura 13 – Aba Cor	50
Figura 14 – Aba Estilo	50
Figura 15 – Via comando	51
Figura 16 – Controle criado	52
Figura 17 – Configuração do Controle Deslizante	52
Figura 18 – Ajustes	53
Figura 19 – Ferramenta Extrusão	53
Figura 20 – Altura h	54
Figura 21 – Resultado	54
Figura 22 – Interface do Aplicativo Calculadora GeoGebra 3D em Plataforma de Download	57
Figura 23 – Tela principal do aplicativo	58
Figura 24 – Acesso e ativação	59
Figura 25 – Identificação do plano	60
Figura 26 – Projeção do Sólido	61
Figura 27 – Interação com o GeoGebraAR	62
Figura 28 – Opção Mais	64
Figura 29 – Objetos que lembram uma esfera	65
Figura 30 – Tela inicial do GeoGebra 3D	65
Figura 31 – Ferramentas básicas do GeoGebra 3D	66
Figura 32 – Pontos A e B	66
Figura 33 – Esfera de Centro A e raio definido pelo ponto B	67
Figura 34 – Segmento AB	68
Figura 35 – Esfera de centro A e raio AB	68

Figura 36 – Diâmetros das Esferas de Água	69
Figura 37 – Ferramenta FraçãoEmTexto (número)	70
Figura 38 – Comando	71
Figura 39 – Razão entre os volumes das esferas	71
Figura 40 – Objetos que lembram um cilindro	73
Figura 41 – Tela inicial do GeoGebra 3D	73
Figura 42 – Pontos A e B: centros das bases do cilindro	74
Figura 43 – Cilindro construído no GeoGebra 3D	74
Figura 44 – Cisterna antiga	77
Figura 45 – Raio da cisterna nova	78
Figura 46 – Imagem das cisternas e solução da questão	78
Figura 47 – Objetos que lembram um cone	80
Figura 48 – Tela inicial do GeoGebra 3D	80
Figura 49 – Pontos A e B	81
Figura 50 – Ferramenta Cone	82
Figura 51 – Construção do Cone Circular Reto	82
Figura 52 – Dados da Questão 153 - ENEM 2022	83
Figura 53 – Parâmetros para construção do cone	84
Figura 54 – Comando Cone (Ponto, Ponto, Raio)	85
Figura 55 – Cone construído	85
Figura 56 – Digitação dos comandos – ENEM 2022	86
Figura 57 – Comparação dos cones no GeoGebra 3D – ENEM 2022	87
Figura 58 – Ilustração do Princípio de Cavalieri com Pilhas de Moedas	88
Figura 59 – Esfera, Clepsidra e Anticlepsidra	89
Figura 60 – Esfera criada no GeoGebra 3D	90
Figura 61 – Cilindro criado com raio 2	91
Figura 62 – Ponto médio do eixo do cilindro	92
Figura 63 – Cones superior e inferior inseridos no Cilindro	93
Figura 64 – Anticlepsidra	93
Figura 65 – Plano de interseção $z = L$	94
Figura 66 – Interseção da esfera com o plano xy	95
Figura 67 – Interseção do cilindro com o plano xy	95
Figura 68 – Área da seção esférica com a seção do cone superior	96
Figura 69 – Área da seção esférica com a seção do cone inferior	97
Figura 70 – Visualização do modelo no GeoGebra 3D (celular)	98
Figura 71 – Realidade Aumentada com a anticlepsidra e esfera	98
Figura 72 – Princípio de Cavalieri	100
Figura 73 – Tela inicial do GeoGebra 3D	112
Figura 74 – Ferramentas básicas do GeoGebra 3D	112

Figura 75 – Pontos A e B	113
Figura 76 – Esfera de Centro A e raio definido pelo ponto B	113
Figura 77 – Diâmetros das Esferas de Água	114
Figura 78 – Tela inicial do GeoGebra 3D	115
Figura 79 – Pontos A e B: centros das bases do cilindro	116
Figura 80 – Cilindro construído no GeoGebra 3D	116
Figura 81 – Tela inicial do GeoGebra 3D	118
Figura 82 – Pontos A e B	119
Figura 83 – Ferramenta Cone	119
Figura 84 – Construção do Cone Circular Reto	120
Figura 85 – Dados da Questão 153 - ENEM 2022	121
Figura 86 – Esfera criada no GeoGebra 3D	122
Figura 87 – Cilindro criado com raio 2	123
Figura 88 – Ponto médio do eixo do cilindro	123
Figura 89 – Cones superior e inferior inseridos no Cilindro	123
Figura 90 – Clepsidra e Anticlepsidra	124
Figura 91 – Plano de interseção $z = L$	124
Figura 92 – Interseção da esfera com o plano xy	125
Figura 93 – Interseção do cilindro com o plano xy	125
Figura 94 – Área da seção esférica com a seção do cone superior	126
Figura 95 – Área da seção esférica com a seção do cone inferior	126

Lista de tabelas

Tabela 1 – Posição relativa das retas r e s	33
Tabela 2 – Posição relativa de r e α	34
Tabela 3 – Relações entre dois planos α e β no espaço	34

Lista de quadros

1	Quadro de Níveis de Compreensão Segundo Van Hiele	26
2	Quadro de Avaliação de Livros Didáticos – Geometria Espacial	28
3	Quadro de Comandos e Recursos Essenciais para as Atividades	55

Sumário

	Introdução	17
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	22
2.1	A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval	22
2.2	A Teoria dos Níveis de Pensamento Geométrico de Van Hiele . . .	25
2.3	O Papel dos Materiais Concretos e Digitais no Ensino de Matemática	27
2.4	A Geometria Espacial nos Livros Didáticos do Ensino Médio: Con- tribuições e Limitações	27
3	FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA	30
3.1	A Geometria como Campo de Formação	31
3.2	Pontos, Retas e Planos	31
3.3	Sólidos Geométricos	34
3.3.1	O Princípio de Cavalieri	34
3.3.2	Pirâmides e Cones	35
3.3.2.1	Volume do cone	36
3.3.2.2	Área lateral do cone	37
3.3.3	Prismas e Cilindros	38
3.3.3.1	Volume do cilindro	39
3.3.3.2	Área lateral do cilindro	40
3.3.4	A Esfera	41
3.3.4.1	Volume da esfera	41
3.3.4.2	Área da superfície da esfera	42
4	O GEOGEBRA 3D: AMBIENTE DINÂMICO PARA A GEOME- TRIA ESPACIAL	44
4.1	A Interface do GeoGebra 3D	45
4.1.1	Interface Básica e Fontes de Criação	45
4.1.2	A Barra de Ferramentas e as Funções de Construção 3D	46
4.2	Funcionalidades do Menu Principal (GeoGebra 3D)	47
4.3	Edição, Interação e Personalização dos Objetos	48
4.3.1	Manipulação da Janela de Visualização (<i>Zoom</i> e <i>Rotação</i>)	48
4.3.2	Personalização de Cores e Estilos (Propriedades)	49
4.3.3	Articulação com o Controle Deslizante	51

4.4	Recursos e Estratégias de Construção no GeoGebra 3D	54
4.5	Realidade Aumentada	56
4.5.1	Guia de Instalação do GeoGebra 3D com Funcionalidade RA	56
4.5.2	Processo de Interação com a Realidade Aumentada (GeoGebraAR)	58
5	ATIVIDADES PROPOSTAS	63
5.1	Atividade 1: Construção de uma Esfera	64
5.1.1	Atividade no GeoGebra	65
5.1.2	Atividade aplicada	69
5.2	Atividade 2: Construção de um Cilindro Reto	72
5.2.1	Atividade no GeoGebra	73
5.2.2	Atividade aplicada	75
5.3	Atividade 3: Construção de um cone circular reto	79
5.3.1	Atividade no GeoGebra	80
5.3.2	Atividade aplicada	82
5.4	Atividade 4: Volume da Esfera usando o Princípio de Cavalieri no GeoGebra 3D com RA	88
5.4.1	Atividade no GeoGebra	90
5.4.2	Atividade aplicada	99
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
	REFERÊNCIAS	104
	APÊNDICES	110
	APÊNDICE A – ATIVIDADES PARA IMPRIMIR	111

Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz uma visão importante sobre o Ensino de Matemática, mostrando que a Geometria Espacial é uma disciplina essencial para a formação integral do aluno. A proposta é ajudar crianças e adolescentes a aprender a visualizar, raciocinar sobre relações espaciais e resolver problemas do cotidiano. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), os principais objetivos no campo da Geometria Espacial envolvem a visualização e a representação, o estabelecimento de relações entre figuras geométricas, o cálculo de medidas e a resolução de problemas.

Essa visão é consistente com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), pois o documento estabelece que as ações específicas de ensino contribuam para o desenvolvimento de capacidades de pensar, como percepção do espaço, abstração e generalização de propriedades matemáticas. Contudo, apesar de sua relevância, a Geometria Espacial ainda ocupa um espaço reduzido nos currículos escolares e, muitas vezes, é trabalhada de forma fragmentada, com ênfase em cálculos algébricos e pouca exploração visual. Esse método popular pode ser uma barreira para a aprendizagem porque não promove uma compreensão das propriedades dos sólidos, nem o tipo de raciocínio geométrico que pretende-se que os alunos alcancem. Nesse sentido, como afirma Lorenzato (1995), aqueles que procuram um facilitador de processos mentais, encontrarão na Geometria o que precisam: prestigiando o processo de construção do conhecimento, a Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar. Essa visão reforça a necessidade de tratar a Geometria não apenas como um conjunto de fórmulas a serem aplicadas, mas como um campo de investigação e desenvolvimento do raciocínio matemático, no qual o aluno é estimulado a explorar, conjecturar e validar ideias. Partindo dessa proposta de renovação, a BNCC estabelece dez competências gerais a serem desenvolvidas durante a Educação Básica. Dentre elas, duas são as mais importantes para o ensino de Matemática e, em particular, pode-se citar:

I. Pensamento científico, crítico e criativo: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. II. Cultura digital: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e

autoria na vida pessoal e coletiva. Brasil (2018, p.9)

Apesar da ênfase da BNCC no desenvolvimento de raciocínio crítico, espacial e tecnológico, a superação das dificuldades de aprendizagem dos alunos em Geometria Espacial exige uma análise pedagógica fundamentada. Para compreender como o pensamento geométrico é construído e quais atividades cognitivas são requeridas pelas novas competências, é essencial o apoio em referenciais teóricos específicos. Este estudo baseia-se, portanto, em duas contribuições essenciais do campo da Educação Matemática. A primeira é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (DUVAL, 2023), que investiga como os alunos interpretam e representam os objetos matemáticos por meio de diferentes registros, como gráficos, linguagem natural, figuras planas e modelos tridimensionais. Segundo Duval (2023), os objetos matemáticos não podem ser percebidos diretamente; eles só se tornam acessíveis por meio de representações semióticas. Assim, para que ocorra a aprendizagem, é fundamental que os estudantes sejam capazes de converter informações entre registros distintos, como do algébrico para o gráfico ou do simbólico para o geométrico. Essa perspectiva é de grande valor no estudo da Geometria Espacial, pois a compreensão de sólidos exige a coordenação de representações em múltiplos registros.

A segunda contribuição teórica é a Teoria dos Níveis de Pensamento Geométrico de Van Hiele, que explica o desenvolvimento cognitivo dos alunos na compreensão de conceitos geométricos (NASSER; SAT'ANNA, 2010). Essa teoria é estruturada em níveis de habilidades, desde a mais simples de visualizar e reconhecer formas até a criação de definições e a demonstração de propriedades. Passar de um nível para o próximo não é automático, mas exige um processo de ensino estruturado, que possibilite ao aluno atingir o nível de pensamento superior subsequente. Portanto, o professor atua como mediador para apresentar atividades que levem o aluno do reconhecimento intuitivo de formas para algo mais avançado e formal. As atividades propostas neste trabalho são orientadas por essa teoria, de modo a possibilitar que os alunos se movimentem entre diferentes níveis de compreensão da Geometria Espacial. Nesse sentido, a articulação teórica estabelecida entre Duval e Van Hiele demonstra que a tecnologia atua como um recurso didático potencializador, pois a mobilização e a conversão entre os diferentes registros de representação (visual, algébrico e linguagem natural), facilitadas pelo dinamismo do GeoGebra 3D, constituem a condição para que o estudante avance do nível de visualização para os níveis subsequentes de pensamento geométrico.

Além do embasamento teórico, este estudo também valoriza o papel das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem da Matemática. Nas últimas décadas, o desenvolvimento de softwares de geometria dinâmica revolucionou a forma como os conceitos geométricos podem ser explorados em sala de aula. Entre essas ferramentas, o GeoGebra ocupa lugar de destaque por ser gratuito, acessível, de código aberto e amplamente uti-

lizado em contextos escolares. Sua versão em três dimensões (GeoGebra 3D) possibilita a construção, manipulação e visualização de sólidos geométricos em ambiente dinâmico, ampliando as possibilidades de aprendizagem. Outro recurso relevante é a Realidade Aumentada (RA), que permite integrar os objetos construídos no GeoGebra 3D ao espaço físico, oferecendo ao estudante a oportunidade de interagir com modelos tridimensionais de maneira mais concreta e envolvente.

Enquanto outros pacotes de softwares também exploram a geometria 3D e a realidade aumentada (por exemplo: NIZ, ARSolids, Unity e Blender) a maioria enfrenta limitações em torno da complexidade para uso em sala de aula ou custos, além da necessidade de habilidades técnicas avançadas em programação e modelagem 3D. Por outro lado, no que diz respeito à realidade escolar, o GeoGebra acaba sendo um software apropriado (e simples de usar também) pela grande quantidade de materiais de apoio que existem na sua comunidade de usuários mundial. Além disso, sua manuseabilidade é consistente com a cultura de competências digitais recomendada pela BNCC e é pedagogicamente estratégica para o ensino de Geometria Espacial.

Com base neste cenário, o objetivo geral deste trabalho é apresentar oito atividades com visualização e representação em Geometria Espacial, embasadas nas teorias de Duval e modelo de Van Hiele, juntamente com ações com tecnologias digitais como o GeoGebra 3D, que podem contribuir para a melhoria da compreensão dos alunos. Deve-se ressaltar que o material didático criado ao final, Apêndice A - Atividades para Imprimir, refere-se à sistematização e à consolidação da aprendizagem. Este material é composto por questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e Vestibular, acompanhadas de estratégias de resolução que utilizam o GeoGebra 3D, permitindo ao professor uma seleção ágil de atividades para impressão. Portanto, neste trabalho, pretende-se fornecer subsídios teóricos e práticos que complementem a prática pedagógica do professor de Matemática e contribuam para um processo mais significativo, dinâmico e articulado no ensino-aprendizagem.

O trabalho está estruturado em 6 capítulos: no capítulo 1, apresenta-se uma revisão bibliográfica, que inclui o estudo de dissertações, artigos e revistas sobre o uso de tecnologia e o ensino de Geometria Espacial. No capítulo 2, discute-se a fundamentação teórica que embasa a pesquisa, abordando a teoria de Duval, o modelo Van Hiele, o papel dos materiais concretos e digitais no ensino de Matemática e a Geometria Espacial nos livros didáticos do Ensino Médio. No capítulo 3, detalha-se a fundamentação matemática, na qual são apresentados os conteúdos de Geometria Espacial trabalhados nas atividades propostas. No capítulo 4, explora-se o GeoGebra 3D, com foco na sua interface, recursos e estratégias de utilização, incluindo a funcionalidade de Realidade Aumentada. No capítulo 5, são apresentadas as atividades propostas de aplicação no GeoGebra 3D, que consistem na construção dos sólidos redondos e o capítulo 6 traz as Considerações Finais.

1 Revisão Bibliográfica

O ensino de Geometria Espacial tem recebido atenção significativa em pesquisas que buscam superar os obstáculos relacionados à visualização e à abstração de sólidos geométricos. Esses desafios decorrem, segundo Pais (1996), do caráter não perceptivo dos objetos matemáticos, exigindo, em sala de aula, processos de mediação simbólica e representação. A progressão do pensamento geométrico, por sua vez, ocorre de forma gradual, do reconhecimento visual à dedução formal e ao rigor teórico, sendo este um processo descrito em detalhe pelo modelo de Van Hiele, conforme Kaleff, Henriques e Rei (1994) explicam. Essa evolução do pensamento está diretamente relacionada às experiências de aprendizagem e às oportunidades de manipulação e exploração de figuras tridimensionais. Nesse contexto, o uso de recursos como o software GeoGebra, é defendido por Henriques e Ponte (2012) e Moura, Krindges e Wielewski (2015) como mediador entre a percepção e a abstração, permitindo que os estudantes avancem nos níveis de compreensão. Além disso, a relevância do modelo de Van Hiele é demonstrada em trabalhos de análise como o de Barros, Barros e Bisconcim (2025) que evidencia a necessidade de alinhamento entre a abordagem de ensino e o nível cognitivo do estudante nos materiais didáticos.

Outra vertente importante envolve a criação de materiais didáticos digitais ou impressos para apoiar o ensino da Geometria Espacial. Pesquisas como as de França (2015) e Silva (2021) mostraram que a produção de planificações, jogos e aplicativos auxiliam professores e alunos ao possibilitar a exploração das propriedades dos sólidos de forma interativa. Essas abordagens contribuem para a aprendizagem significativa (PELIZZARI et al., 2002), pois favorecem a relação entre o novo conhecimento e as estruturas cognitivas prévias dos estudantes.

As pesquisas recentes evidenciam que a integração de tecnologias digitais ao ensino da Geometria Espacial constitui uma estratégia promissora, abrangendo softwares de geometria dinâmica, recursos de Realidade Aumentada (RA), modelagem 3D e jogos digitais (SILVA; PAZUCH, 2024) e (DIAS, 2025). Entre os recursos investigados na literatura, o GeoGebra 3D é apontado como o software de geometria dinâmica mais recorrente em pesquisas sobre Geometria Espacial (SILVA; PAZUCH, 2024). Sendo gratuito, acessível e interativo, ele possibilita a manipulação de sólidos tridimensionais e a articulação eficiente entre percepção e raciocínio formal. O software facilita a observação e a manipulação de figuras, o que, por sua vez, estimula o professor a promover a experimentação e a formulação de hipóteses, ampliando a compreensão geométrica dos estudantes. Essa eficácia é atestada em pesquisas do PROFMAT, como os trabalhos de Araújo (2023) e Avanzi (2024), que destacam o engajamento dos alunos e a facilidade na transição entre representações planas e espaciais.

A Realidade Aumentada (RA), por sua vez, potencializa a experiência do GeoGebra 3D. Cardoso et al. (2014) destacam o papel crescente da RA na educação, uma vez que facilita a assimilação do conteúdo ao permitir a visualização e interação com as informações. Essa tecnologia permite projetar sólidos virtuais em ambientes reais, oferecendo experiências concretas e interativas com os objetos matemáticos. Trabalhos como os de Leme (2017), Bandeira (2017), Paixão (2019) e Junior (2025) demonstram que a RA amplia a percepção tridimensional e aumenta a motivação em sala de aula, estimulando o envolvimento dos estudantes. A integração da RA e do GeoGebra, portanto, proporciona vantagens claras na visualização e na compreensão de conteúdos geométricos, aproximando a Matemática do cotidiano, conforme sintetizam Souza (2020), Silva (2017), Valentim (2017), Dantas (2018), Oliveira (2019), Lima (2021), Santos (2021), Martins (2021), Oliveira (2021) e Amorim e Mendes (2024).

Embora o GeoGebra e a RA sejam predominantes, outras ferramentas também figuram nos trabalhos analisados. Santos (2015) explorou a relação entre funções quadráticas e Geometria Espacial; Fontes (2018) investigou o uso do software GeoGebra 3D aliado a materiais alternativos, como por exemplo, sólidos geométricos em acrílico. Já Dantas (2018) e Oliveira (2021) analisaram o uso de jogos digitais e lousas interativas como apoio ao ensino da Geometria Espacial, reforçando que a diversidade de recursos enriquece a prática pedagógica, desde que articulada a objetivos de aprendizagem bem definidos.

Portanto, a revisão bibliográfica evidencia um movimento consistente em direção à integração de tecnologias digitais no ensino da Geometria Espacial. O GeoGebra 3D e a Realidade Aumentada se consolidam como ferramentas de maior potencial, enquanto os estudos sobre os níveis de Van Hiele oferecem suporte teórico para compreender os processos cognitivos envolvidos. Ao promover a visualização, favorecer a experimentação e apoiar o raciocínio lógico, essas abordagens se mostram alinhadas às demandas contemporâneas da educação matemática e oferecem subsídios valiosos para a formação docente e a aprendizagem dos estudantes.

No próximo capítulo, apresentam-se os fundamentos teóricos que embasam este trabalho.

2 Fundamentos Teóricos

Segundo Lorenzato (1995) pesquisas psicológicas indicam que a aprendizagem geométrica é necessária ao desenvolvimento da criança e dos adolescentes, pois inúmeras situações escolares requerem percepção espacial, tanto em Matemática (por exemplo: algoritmos, medições, valor posicional, séries, sequências...) como na leitura e escrita. Aprender nesse cenário abrange variáveis que dizem respeito tanto ao aluno quanto às dimensões estruturais e metodológicas da escola. Do ponto de vista do aluno, pode-se destacar sua dificuldade em pensar em abstrações, uma habilidade que raramente é exercitada e cujo desenvolvimento não é suficiente, bem como a incapacidade de imaginar formas tridimensionais, o que interfere na compreensão de relações espaciais mais complexas. Além disso, se o conteúdo não estiver relacionado com o próprio mundo do aluno, pode se tornar menos interessante e sem importância para ele, resultando em menor engajamento. Em parte do contexto escolar, os recursos disponíveis são insuficientes em termos concretos, como por exemplo, sólidos de acrílico, que são necessários para visualizar e trabalhar com objetos geométricos. Ademais, o modelo de ensino predominante ainda prioriza a memorização de fórmulas e dedica pouco tempo à construção efetiva da compreensão. Essa realidade é agravada pela carência de atividades práticas e investigativas (como desenho com compasso/régua, uso de softwares de geometria ou investigação de situações aplicadas), as quais são cruciais para a eficácia do ensino e da compreensão da Geometria Espacial.

2.1 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica foi desenvolvida por Raymond Duval, filósofo, psicólogo e professor emérito da Universidade du Littoral Côte d'Opale. Suas pesquisas, realizadas entre 1970 e 1995 no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (*Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - IREM*) de Estrasburgo, contribuíram significativamente para a compreensão dos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem matemática. Duval investigou, entre outros temas, a utilização da linguagem natural nos procedimentos matemáticos, a leitura e interpretação de textos, além da aprendizagem de raciocínios e argumentações específicas da área (DUVAL, 2009).

A teoria proposta por Duval destaca que a atividade matemática está fundamentalmente ligada à utilização de diferentes registros de representação semiótica, tais como gráficos, tabelas, equações, linguagem natural, diagramas e figuras. O conhecimento matemático distingue-se pelo fato de seus objetos não serem perceptíveis diretamente, exi-

gindo a mediação de representações para que possam ser compreendidos. Diferentemente das ciências empíricas, em que os objetos de estudo são acessíveis sensorialmente, como pedras na geologia, plantas na biologia ou sons na música, os objetos matemáticos não podem ser apreendidos pelos sentidos de forma imediata. Números, funções ou vetores, por exemplo, não existem como entidades físicas, mas apenas por meio de representações que permitem sua manipulação. Essa característica evidencia que a matemática exige processos de abstração e raciocínio lógico mediados por registros semióticos.

Essa dependência das representações leva Duval a postular a indissociabilidade de dois atos cognitivos: a Semiose e a Noésis. A Semiose refere-se ao ato de lidar com a representação de um objeto matemático, como escrever uma fração, desenhar um gráfico ou construir um modelo de cubo em madeira. Já a Noésis corresponde à apreensão conceitual do objeto, isto é, a compreensão de que a fração expressa uma relação parte do todo, que o gráfico traduz uma variação de crescimento (ou decrescimento) ou até não ter variação, ou que o cubo de madeira é apenas um modelo de um cubo ideal. Em termos simples, Semiose é o ato de trabalhar com a forma de representar, enquanto Noésis é a compreensão da ideia que está sendo representada. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica destaca, assim, que o acesso à compreensão (Noésis) só é viável pela manipulação efetiva dos sistemas de representação (Semiose), conforme sublinha Duval (1993): "Não há Noésis, sem Semiose".

Compreender como os alunos transitam entre registros, por meio dos processos de tratamento e de conversão, torna-se essencial para o ensino e a aprendizagem. O tratamento é uma transformação intrarregistro (realizada dentro de um mesmo registro, como resolver uma equação ou simplificar uma fração), e a conversão é uma transformação interregistro (passagem de um registro para outro, como de uma equação para um gráfico). A conversão é o ato cognitivo fundamental que permite ao estudante acessar o conceito, tornando-se a essência da Noésis. Enquanto o tratamento corresponde às habilidades de cálculo e manipulação simbólica e permite avançar na resolução de um problema, essa transformação intrarregistro é insuficiente para a apreensão total do objeto matemático. O verdadeiro obstáculo cognitivo e, conseqüentemente, a origem do fracasso na aprendizagem, reside frequentemente na dificuldade de conversão. Segundo Duval (2003), o aluno pode ser proficiente em tratar as representações, mas falhar em reconhecer o mesmo objeto quando representado em um registro diferente. É a conversão que exige do aluno a descentralização do signo (a representação) em favor do objeto invariante que as diversas representações compartilham, permitindo que ele estabeleça as conexões conceituais necessárias. A descentralização do signo significa que o estudante consegue distinguir o objeto matemático do registro semiótico específico que o representa, superando a confusão entre o signo e o objeto (o conceito). O domínio da matemática, portanto, pressupõe a capacidade não apenas de realizar tratamentos eficientes, mas, sobretudo, de coordenar as conversões necessárias, como ilustra o exemplo:

[...] o cálculo numérico. Os alunos podem muito bem realizar a adição desses números com a sua escrita decimal e com a sua escrita fracionária, mas não pensar em converter, se necessário, a escrita decimal de um número na sua escrita fracionária (e vice-versa), ou mesmo falhar nessa conversão. É muito comum que esse tipo de exemplo seja apresentado para explicar que os alunos chegam ao ensino médio e não sabem calcular! Isso é esquecer que a escrita decimal, a escrita fracionária e a escrita com expoente constituem três registros (DUVAL, 1993).

A sistematização dos registros é um dos pilares da teoria. Duval formaliza as categorias mobilizadas na atividade matemática, tipicamente classificadas em quatro grandes famílias: o Registro Linguístico/Discursivo (envolvendo a língua natural, usado para descrição e argumentação), o Registro Figural (composto por figuras, diagramas e desenhos, essencial em geometria), o Registro Algébrico/Simbolizado (incluindo fórmulas e equações) e o Registro Tabular/Numérico (tabelas e escritas numéricas). Essa classificação está interligada à distinção fundamental entre registros discursivos (linguísticos) e não discursivos (figural, algébrico, tabular). A coordenação entre esses dois grandes tipos de registro é indispensável, por exemplo, na Geometria Espacial, onde o raciocínio exige a articulação entre a visualização figural e a descrição discursiva, pois a compreensão dos sólidos depende tanto da visualização quanto da formalização algébrica, exigindo que o estudante seja capaz de converter informações entre diferentes modos de representação para construir um entendimento consistente.

Essa distinção evidencia que, para cada representação, associa-se uma significação operatória específica, o modo como as regras de tratamento são aplicadas, que é distinta do objeto conceitual que está sendo representado. Esta distinção é crítica para o acesso à Noésis, pois, como aponta Duval (1993), na escritura de um número, é preciso distinguir a significação operatória fixada ao significante e o número representado. Assim, a significação operatória não é a mesma para 0,25, para $\frac{1}{4}$ e para $25 \cdot 10^{-2}$. Cada um destes três significantes 0,25, $\frac{1}{4}$ e $25 \cdot 10^{-2}$, tem uma significação operatória diferente, mas representa o mesmo número.

A conversão permite ao estudante descentralizar o signo e reconhecer o objeto invariante apesar das diferentes significações operatórias, sendo, assim, um dos pilares da aprendizagem matemática significativa. Essa abordagem é particularmente relevante para compreender e diagnosticar as dificuldades de aprendizagem observadas em sala de aula, sobretudo quando os estudantes não conseguem estabelecer conexões entre diferentes representações de um mesmo conceito. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica oferece, portanto, uma lente poderosa para propor intervenções pedagógicas mais eficazes. Ao focar na necessidade de conversão e coordenação dos registros de representação, a teoria de Duval tem fundamentado pesquisas em educação matemática, inclusive no ensino

da Geometria Espacial. Ela reforça que o desenvolvimento do pensamento matemático depende intrinsecamente da habilidade do aluno em gerenciar e articular as representações semióticas dos objetos.

2.2 A Teoria dos Níveis de Pensamento Geométrico de Van Hiele

A Teoria dos Níveis de Pensamento Geométrico, desenvolvida pelos educadores holandeses Pierre e Dina Van Hiele na década de 1950, oferece um modelo estrutural fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Esta teoria baseia-se na premissa de que a aprendizagem geométrica não é um processo contínuo ligado à idade do aluno, mas sim uma progressão através de níveis de pensamento que são alcançados mediante a qualidade da instrução e das atividades didáticas (KALEFF; HENRIQUES; REI, 1994). Essa característica confere ao professor um papel central como mediador, responsável por planejar o ensino de modo a promover a ascensão do aluno a níveis superiores de raciocínio (MOURA; KRINDGES; WIELEWSKI, 2015).

O modelo é dividido em cinco níveis de compreensão que descrevem as características do pensamento do aluno em Geometria. A progressão começa no Nível 1, ou Visualização, onde o aluno reconhece e nomeia as figuras com base em sua aparência geral (forma), sem conseguir identificar ou usar suas propriedades formais. Ao avançar, o estudante alcança o Nível 2, ou Análise, em que já identifica e descreve as propriedades dos elementos geométricos, mas ainda sem estabelecer relações lógicas entre elas. Apenas no Nível 3, ou Dedução Informal, o aluno é capaz de estabelecer relações entre as propriedades, classificar figuras e pode formular definições de forma intuitiva. Em seguida, o Nível 4, ou Dedução Formal, marca o momento em que o pensamento se torna abstrato e o estudante compreende o papel das demonstrações e do sistema axiomático. Por fim, o Nível 5, ou Rigor, é o nível mais elevado, em que o aluno atua com abstração máxima, comparando e construindo diferentes sistemas axiomáticos formais.

A transição entre esses níveis é um processo que exige a exposição a experiências de aprendizagem programadas (KALEFF; HENRIQUES; REI, 1994). A eficácia do ensino geométrico, seja ele focado em Geometria Plana ou Espacial, está diretamente ligada ao alinhamento das atividades com o nível em que o aluno se encontra, garantindo que o desenvolvimento dos conceitos seja coerente com o estágio do pensamento geométrico (BARROS; BARROS; BISCONCINI, 2025). O aluno só consegue compreender a linguagem de um nível se já domina o nível anterior, o que reforça a necessidade de um planejamento didático que respeite essa progressão e ofereça as ferramentas necessárias para a transição (MOURA; KRINDGES; WIELEWSKI, 2015).

A sistematização apresentada no Quadro 1 evidencia como o desenvolvimento do pensamento geométrico ocorre em níveis progressivos, exigindo do professor uma inten-

cionalidade didática que respeite o estágio em que o aluno se encontra e crie condições para avançar ao nível seguinte.

Quadro 1. Quadro de Níveis de Compreensão Segundo Van Hiele

Níveis de compreensão	Características	Exemplos
Nível 1 Visualização	Reconhecimento das figuras pela forma global, sem considerar suas propriedades. O aluno identifica e nomeia sólidos, mas pode confundir objetos semelhantes visualmente.	Reconhecer uma esfera porque “parece uma bola”; identificar um cilindro porque “parece uma lata”.
Nível 2 Análise	O aluno percebe e lista propriedades das figuras, mas não estabelece relações entre elas. Foca em características isoladas.	Identificar que um cubo tem “seis faces quadradas”, ou que um cone circular reto tem “uma base circular e uma ponta”.
Nível 3 Dedução informal	Capacidade de estabelecer relações entre propriedades, comparando e classificando figuras. O aluno compreende relações de inclusão entre classes de sólidos, mas sem formalizar demonstrações.	Concluir que “todo cubo é um prisma reto de base quadrada”; perceber que uma esfera e um cilindro são corpos redondos.
Nível 4 Dedução formal	Entendimento da estrutura lógica da Geometria. O aluno compreende teoremas, axiomas e consegue construir demonstrações formais.	Demonstrar a fórmula do volume de uma pirâmide usando o princípio de Cavalieri; provar que a área lateral de um cilindro é igual ao perímetro da base vezes a altura.
Nível 5 Rigor	Capacidade de trabalhar com diferentes sistemas axiomáticos e comparar estruturas geométricas em níveis mais abstratos.	Analisar propriedades dos sólidos em geometria euclidiana e compará-las com representações em geometria projetiva ou não euclidiana.

Fonte: (KALEFF; HENRIQUES; REI, 1994)

O Quadro 1 traduz, portanto, a essência do modelo de Van Hiele, ao ilustrar que o domínio da geometria depende de uma progressão estruturada. Fica clara a necessidade de o planejamento didático ser sensível a esses níveis, garantindo que as atividades propostas, sobretudo aquelas voltadas para a Geometria Espacial, forneçam as bases conceituais necessárias para que o aluno ascenda de um nível de raciocínio para o próximo, evitando lacunas que comprometam a compreensão dos conceitos mais abstratos.

2.3 O Papel dos Materiais Concretos e Digitais no Ensino de Matemática

No ambiente de sala de aula existente, o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial são desafiadores, especialmente no que diz respeito à conceituação e compreensão de figuras tridimensionais. Essa dificuldade é decorrente do desafio na superação da transição entre os níveis, especificamente do Nível de Visualização (Nível 1) para o Nível de Análise (Nível 2), conforme os Níveis de Pensamento Geométrico de Van Hiele. A manipulação de recursos constitui um elemento crucial para o acesso conceitual (Noésis) ao objeto matemático, que, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, só é viável pela Semiose (manipulação dos sistemas de representação). Segundo Lorenzato (1995), os materiais manipuláveis impulsionam essa progressão, permitindo ao estudante mover-se da ação concreta para a abstração.

Historicamente, materiais concretos (sólidos geométricos, blocos e dobraduras) geram representações no registro figural (não discursivo). Tais representações são indispensáveis para que o estudante perceba a figura como um todo, estabelecendo a base do Nível de Visualização (Nível 1) de Van Hiele. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009) estabelece que o tratamento de objetos matemáticos começa no uso desses registros. No contexto atual, essa mediação é ampliada pela incorporação de materiais digitais e softwares de geometria dinâmica. Estas ferramentas, ao oferecerem visualização dinâmica e manipulação interativa de objetos em 3D, facilitam as atividades de conversão entre o registro figural e o registro da língua natural, essencial para que o aluno descreva as propriedades das figuras e, conseqüentemente, avance para o Nível de Análise (Nível 2) de Van Hiele. A coordenação entre as atividades de conversão e tratamento constitui a chave para a compreensão (Noésis) em Geometria, conforme preconiza Duval. D'Ambrosio (1996) enfatiza que práticas conectadas à realidade do aluno, por meio de experiências concretas (físicas ou virtuais), promovem essa compreensão e contribuem para o desenvolvimento do raciocínio formal. Assim, os materiais, concretos ou digitais, atuam como mediadores nesse processo cognitivo, facilitando a transição da percepção visual para o raciocínio formal e consolidando o avanço nos níveis de Van Hiele.

2.4 A Geometria Espacial nos Livros Didáticos do Ensino Médio: Contribuições e Limitações

O livro didático exerce grande influência no sistema escolar brasileiro. Além de estar presente no cotidiano da sala de aula, ele se constitui em um dos elementos básicos da organização do trabalho do professor, de modo que sua avaliação se tornou uma política de Estado, conforme apontado por Silva e Siqueira (2016). Diante da escassez de materiais

didático-pedagógicos, o livro didático é, na maioria das vezes, o único recurso que aporta os estudos para o aluno (FREITAS; FRACALOSSO, 2013). No caso da Geometria Espacial, a relevância desse material é ainda maior, pois ele organiza conteúdos de alta abstração e orienta a sequência didática, podendo favorecer ou limitar o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Com o intuito de compreender como esse conteúdo vem sendo tratado, realizou-se uma análise de cinco coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), a saber: Quadrante (CHAVANTE; PRESTES, 2016), Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2016), Prisma Matemática (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2016), Contato Matemática (SOUZA; GARCIA, 2016) e Matemática: Ciência e Aplicações (IEZZI et al., 2016). O estudo considerou como base as diretrizes do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A investigação evidenciou diferenças relevantes quanto à clareza conceitual, à contextualização dos conteúdos, à diversidade e profundidade das atividades, à presença de recursos visuais e tecnológicos e ao alinhamento com as competências da BNCC. Enquanto há obras que apresentam propostas que articulam situações do cotidiano, questões discursivas e sugestões de uso de softwares, outras se restringem à exposição teórica e à aplicação direta de fórmulas. Além disso, constatou-se que, mesmo nos livros que mencionam tecnologias digitais, como o GeoGebra, nem sempre são oferecidas alternativas viáveis para contextos escolares sem infraestrutura adequada, o que gera um descompasso entre as propostas e a realidade de muitas escolas públicas.

Quadro 2. Quadro de Avaliação de Livros Didáticos – Geometria Espacial

Critério	Quadrante	Conexões	Prisma	Contato	Matemática
Clareza conceitual e organização didática	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Contextualização dos conteúdos	Não	Sim	Sim	Sim	Não
Diversidade e qualidade das atividades	Não	Sim	Sim	Sim	Não
Recursos visuais e tecnológicos	Sim	Sim	Sim	Sim	Não
Integração com a BNCC e estímulo à cidadania	Não	Sim	Não	Sim	Não
Viabilidade de aplicação nas escolas públicas	Não	Não	Não	Não	Não

Fonte: Próprio Autor

De forma geral, os resultados apresentados no Quadro 2 demonstram que, embora todas as coleções atendam às exigências mínimas do PNL D, persistem diferenças significativas na abordagem da Geometria Espacial. As coleções Conexões com a Matemática, Prisma Matemática e Contato Matemática destacam-se pela contextualização e pelo incentivo ao uso de recursos tecnológicos, o que sugere a proposição de atividades que promovem a conversão entre registros semióticos (como o figural e o da língua natural), um aspecto crucial para o avanço do aluno ao Nível de Análise (Nível 2) de Van Hiele. No entanto, o incentivo tecnológico nem sempre é acompanhado de alternativas viáveis para a realidade das escolas públicas. Por outro lado, as coleções Quadrante e Matemática: Ciência e Aplicações permanecem restritas à exposição teórica e à aplicação de fórmulas, focando o tratamento prioritariamente no registro algébrico. Essa limitação impede a mobilização de diferentes representações, dificultando a superação do Nível de Visualização (Nível 1) de Van Hiele e, conseqüentemente, o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Tais constatações reforçam a importância de uma escolha criteriosa por parte dos professores, de modo a priorizar materiais que favoreçam a articulação entre os diferentes registros de representação, essenciais para a aprendizagem conceitual e o desenvolvimento das competências previstas pela BNCC.

No próximo capítulo, apresenta-se a fundamentação matemática de Geometria Espacial, abrangendo os conceitos que são trabalhados nas atividades propostas.

3 Fundamentação Matemática

A obra *Os Elementos*, escrita por Euclides por volta de 300 a.C., constitui um marco fundador da Matemática. Nela, o autor organizou de forma sistemática o conhecimento matemático acumulado por gregos e povos anteriores, estabelecendo um método dedutivo baseado em definições, postulados e proposições demonstradas logicamente. Esse modelo de exposição, partindo de um pequeno conjunto de noções aceitas como evidentes e construindo a partir delas um edifício teórico coerente, serviu como paradigma não apenas para a Geometria, mas para toda a ciência matemática nos dois milênios seguintes (EUCLIDES, 2009).

Vale destacar que se trata de uma obra com milhares de anos e recebeu no Brasil, uma tradução direta do grego clássico para o português num trabalho realizado pelo Prof. Dr. Irineu Bicudo, que dedicou cerca de 25 anos ao aprendizado da língua e ao trabalho de verter integralmente *Os Elementos* para nosso idioma.

Durante séculos, a autoridade de *Os Elementos* permaneceu praticamente incontestada. O método axiomático euclidiano orientou o ensino e a prática da Matemática, tornando-se referência de clareza e rigor. No entanto, suas “definições” iniciais, como a do ponto e da reta, eram de caráter intuitivo e não formal, e os postulados assumiam como evidentes certas propriedades do espaço físico, em especial o famoso quinto postulado ou postulado das paralelas.

As tentativas de provar esse postulado, tornando-o um teorema a partir dos demais impulsionaram a criação das geometrias não euclidianas, nos séculos XVIII e XIX, por autores como Gauss, Lobachevsky e Bolyai. Essas descobertas revelaram que a geometria euclidiana não era a única possível, mas apenas um caso particular dentro de um quadro mais amplo de coerência lógica. Esse fato trouxe à tona a necessidade de repensar os fundamentos da disciplina.

Foi nesse contexto que David Hilbert publicou, em 1899, sua obra *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria), na qual propôs um sistema axiomático completo, explicitando com precisão lógica todas as noções primitivas e relações entre pontos, retas e planos (HILBERT, 2003).

Diferentemente de Euclides, Hilbert não buscava apoiar-se na intuição geométrica, mas garantir consistência, independência e completude do sistema dedutivo. Com isso, estabeleceu um novo padrão de rigor formal que influenciou profundamente não só a Geometria, mas também a filosofia da Matemática e o desenvolvimento da lógica no século XX.

A partir dessa evolução histórica dos fundamentos, torna-se necessário adotar um referencial didático que incorpore o rigor formal sem perder a clareza conceitual essencial ao ensino. Para estabelecer a notação, os conceitos e as definições que estruturam esta fundamentação matemática, e que serão a base da análise das atividades propostas, optou-se por seguir a obra *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*, de Lima, Carvalho e Morgado (2006). Essa escolha se justifica por dois fatores principais: primeiramente, o livro é reconhecido por apresentar os conteúdos de Geometria Espacial com o rigor exigido pela formação matemática e, em segundo lugar, por sua vasta adoção e influência como referência didática no ensino superior e na formação de professores no Brasil, garantindo a uniformidade e a coerência necessárias à abordagem dos conteúdos subsequentemente analisados.

3.1 A Geometria como Campo de Formação

Segundo Georges Barthélemy (2003) a geometria, etimologicamente "medida da terra", teria sido inventada para responder às necessidades de medições de terra após cada cheia do Rio Nilo, para reconstruírem as porções alagadas. Modernamente o urbanismo e a arquitetura também induzem a problemas para os quais primeiramente foram encontradas soluções práticas e mais tarde teóricas. A Geometria é, provavelmente, o ramo mais antigo da Matemática, pois nasceu das necessidades práticas do ser humano: medir distâncias, áreas e volumes, construir instrumentos e edificações, representar a natureza e expressar-se artisticamente (YOUSSEF, 2004).

No que diz respeito ao ensino de Matemática, segundo Pavanello (2004), a Geometria constitui um campo privilegiado para desenvolver a capacidade de abstração, generalização e projeção, permitindo ultrapassar o imediatamente sensível. Nesse sentido, seu ensino não deve se reduzir à mera aplicação de fórmulas, mas de uma compreensão de significados e contextos nos quais a Matemática pode ser aplicada acrescentando qualidade à formação intelectual dos estudantes.

3.2 Pontos, Retas e Planos

Do ponto de vista axiomático, considera-se o espaço tridimensional formado por pontos, retas e planos, cujas relações básicas são descritas por postulados. Entre eles, segundo Lima, Carvalho e Morgado (2006), destacam-se.

Postulado 1. Por dois pontos distintos passa uma única reta.

Postulado 2. Três pontos não colineares determinam um único plano.

Postulado 3. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então a reta inteira está contida nesse plano.

Postulado 4. Se dois planos possuem um ponto em comum, então eles compartilham pelo menos uma reta.

Esses enunciados expressam propriedades fundamentais que permitem organizar do ponto de vista pedagógico a Geometria do espaço, sem recorrer a definições formais de ponto, reta ou plano. Tais noções permanecem primitivas; o que importa é o conjunto de relações estabelecidas entre elas. Esse método, herdado da tradição euclidiana e sistematizado em obras modernas como a de Lima, Carvalho e Morgado (2006), fornece a base para deduções posteriores e para a construção coerente da Geometria Espacial.

Pelo Postulado 1, duas retas distintas não podem ter mais de um ponto em comum. Se tiverem mais de um, então são coincidentes, ou seja, são a mesma reta. Quando compartilham exatamente um ponto, diz-se que são concorrentes. Nesse caso, como existe um ponto comum e é possível encontrar em cada uma das retas outro ponto que pertence a uma das retas e não pertence a outra, os três pontos formados (o de interseção e um de cada reta) não são colineares. Dessa maneira, determinam um único plano que contém ambas as retas. Ou seja, retas concorrentes sempre são coplanares. Por fim, mesmo quando não se intersectam, duas retas podem sim determinar um plano se forem coplanares. Para caracterizar essa propriedade pode-se recorrer ao postulado das paralelas: por um ponto externo a uma reta, existe uma única reta paralela a ela no espaço, exatamente como ocorre na Geometria Plana. Essa reta está contida no mesmo plano determinado pela reta original e o ponto dado, pois pode-se tomar um ponto de uma das retas e outro ponto na outra reta. Como estão em retas diferentes, esses pontos não são colineares e portanto, conforme o Postulado 2 e o Postulado 3, existe um único plano que possui essas retas.

Analogamente, considera-se a situação em que são dadas uma reta r e um plano α . Pode ocorrer de haver um ponto em comum com os dois objetos ou nenhum ponto em comum. Caso haja dois pontos em comum, conforme o Postulado 3, a reta r estaria inteiramente no plano. Havendo um ponto em comum, caracteriza-se a situação dizendo que a reta é secante ao plano. E não havendo qualquer ponto em comum, diz-se que a reta é paralela ao plano.

Analisando a situação em que são dados dois planos α e β , os Postulados 1, 2, 3 e 4 permitem concluir que há somente duas possibilidades: ou os planos possuem interseção ou não a possuem. Caso haja interseção, se os planos possuem dois pontos distintos em comum, pelo Postulado 3, sua interseção é uma reta única. Se os planos possuem pelo menos um ponto em comum, o Postulado 4 garante que eles possuem pelo menos uma reta em comum. Não havendo qualquer ponto em comum, diz-se que os planos são paralelos.

Essas caracterizações são essenciais para a construção de argumentos geométricos complexos e também aparecem com frequência na resolução de problemas envolvendo sólidos geométricos, planos de simetria e projeções espaciais.

Definição 5 (Posição relativa de duas retas). Duas retas r e s do espaço são:

1. coplanares se existe um plano α que contém r e s (Postulados 2 e 3) e nesse caso há duas possibilidades:
 - 1.1) paralelas se não possuem ponto em comum;
 - 1.2) concorrentes se possuem exatamente um ponto em comum.
2. reversas, se não são coplanares.

Definição 6 (Posição relativa de reta e plano). Dada uma reta r e um plano α , ocorre exatamente um dos casos:

1. r é paralela a α e nesse caso há duas possibilidades:
 - 1.1) não há interseção da reta com o plano: $r \cap \alpha = \emptyset$;
 - 1.2) a reta está inteiramente contida no plano: $r \subset \alpha$.
2. r é secante a α , isto é: $r \cap \alpha = \{P\}$ para algum ponto P .

Definição 7 (Posição relativa de plano e plano). Dados os planos α e β , ocorre exatamente um dos casos:

1. α e β são paralelos e nesse caso há duas possibilidades:
 - 1.1) $\alpha \cap \beta = \emptyset$;
 - 1.2) $\alpha = \beta$.
2. α e β são secantes, isto é: $\alpha \cap \beta = r$.

As Tabelas 1, 2 e 3 resumem o estudo da posição relativa entre duas retas r e s , uma reta r e um plano α e os planos α e β .

Tabela 1 – Posição relativa das retas r e s

Posição relativa de r e s	Interseção de r e s	r e s são coplanares?
Concorrentes	um ponto	Sim
Paralelas	nenhum	Sim
Reversas	nenhum	Não

Tabela 2 – Posição relativa de r e α

Posição relativa de r e α	Interseção de r e α
r contida em α	a própria reta r
r secante a α	um único ponto
r paralela a α	vazia

Tabela 3 – Relações entre dois planos α e β no espaço

Posição relativa de α e β	Interseção de α e β
planos secantes	uma reta
planos paralelos	não possui interseção

3.3 Sólidos Geométricos

Nesta seção são definidos os sólidos geométricos, e, ao tratá-los, uma das questões centrais é determinar o espaço que eles ocupam. Essa reflexão leva à necessidade de definir o conceito de volume, que, de maneira intuitiva, pode ser entendido como a quantidade de espaço envolvida por esse sólido. Para quantificar esse espaço, é necessário adotar uma unidade de medida. No universo matemático, adota-se como unidade de volume o cubo de aresta unitária.

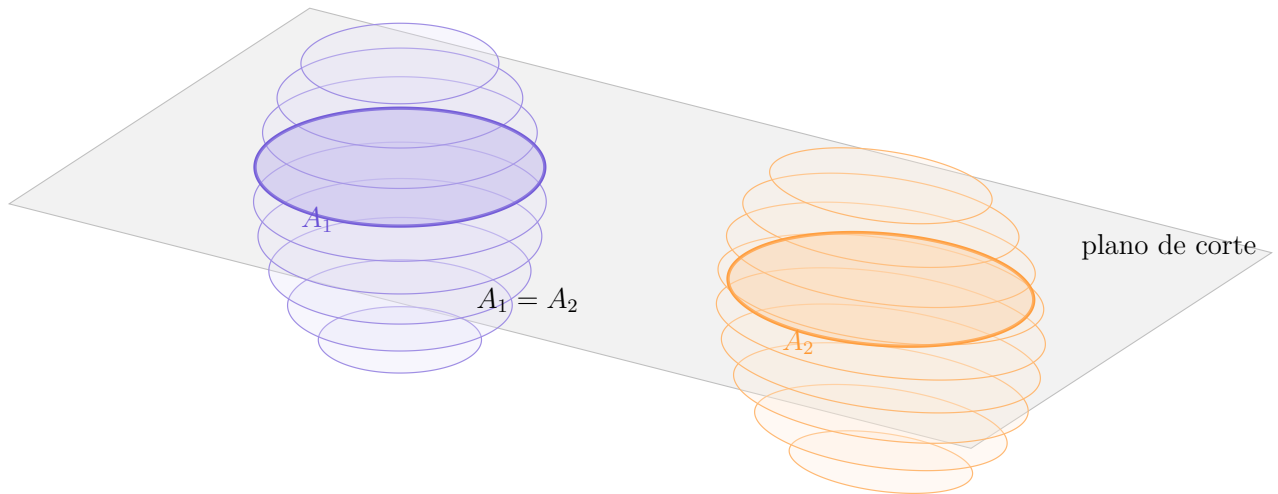
A medição de volume é um processo complexo, pois a existência de objetos irregulares, muito pequenos, grandes demais ou maciços inviabiliza medições físicas diretas. Nesse sentido, a necessidade de generalização impulsionou a criação de meios sistemáticos e suficientemente gerais para calcular volumes com base em determinadas medidas características de cada objeto. É nesse contexto que surgiram, por exemplo, ferramentas teóricas robustas como o Princípio de Cavalieri (NETO, 2013).

3.3.1 O Princípio de Cavalieri

Considere dois sólidos apoiados sobre um mesmo plano de tal modo que qualquer plano horizontal (plano de corte) que os intersecte produza seções com áreas iguais. Nesse caso, diz-se que os dois sólidos têm o mesmo volume.

A Figura 1 ilustra essa ideia: dois sólidos fatiados horizontalmente em camadas muito finas. Se as áreas de cada camada correspondente forem iguais, então a soma aproximada dos volumes das fatias será a mesma para ambos os sólidos. Quanto mais finas forem as fatias, mais próximo estaremos da igualdade exata de volumes.

Figura 1 – Princípio de Cavalieri



Fonte: Próprio Autor

O Princípio de Cavalieri afirma: Se dois sólidos estão contidos entre dois planos paralelos e, para qualquer plano entre eles, a área da seção do primeiro sólido é igual à área da seção correspondente do segundo, então os dois sólidos têm volumes iguais.

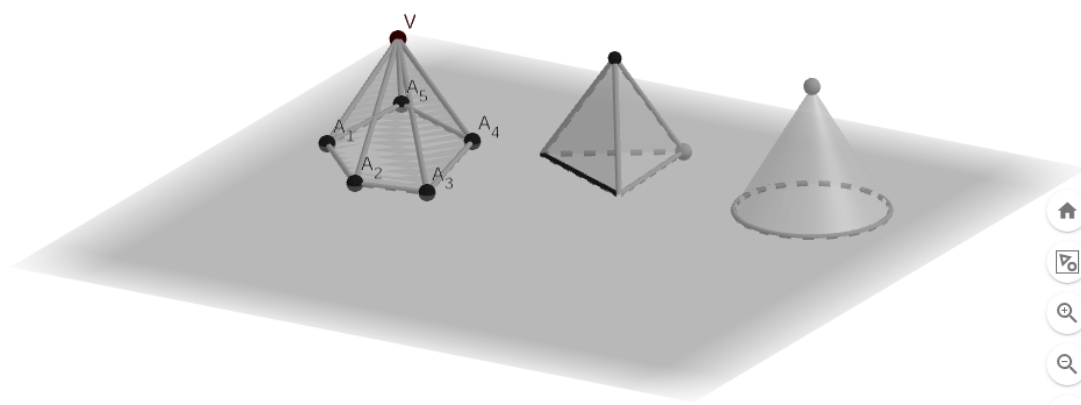
Esse princípio será adotado como ferramenta teórica para o cálculo dos volumes dos principais sólidos apresentados nesse trabalho.

3.3.2 Pirâmides e Cones

Quando houver referência a um polígono plano \mathcal{P}_n , a notação $\mathcal{P}_n : A_1A_2\dots A_n$, subentende que os vértices A_1, A_2, \dots, A_n e A_1 são adjacentes e os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ e A_nA_1 formam as arestas desse polígono. Se um ponto V é exterior ao plano do polígono \mathcal{P}_n (Figura 2) a notação VA_kA_{k+1} para $k = 1, 2, \dots, n - 1$ subentende triângulos de vértices nesses pontos com VA_nA_1 representando o último triângulo. Essa descrição será registrada com a definição a seguir.

Definição 8. Dado um polígono plano \mathcal{P}_n e um ponto V externo ao plano que contém \mathcal{P}_n chama-se Pirâmide de base \mathcal{P}_n a região do espaço que é limitada pelos triângulos VA_kA_{k+1} para $1 \leq k \leq n - 1$ e VA_nA_1 e pelo polígono \mathcal{P}_n .

Figura 2 – Uma pirâmide pentagonal, um tetraedro e um cone circular reto



Fonte: Próprio Autor

Essa definição pode ser generalizada se o polígono for substituído por uma curva γ fechada, plana e sem auto-interseções, que passa a ser denominada curva simples, considerando V um ponto externo ao plano de γ .

Definição 9. Chama-se cone de base γ e vértice V a região do espaço que é limitada pela família de retas que passam por γ e V e pelo interior da curva simples γ .

Definição 10. Um cone é dito circular quando sua base é uma circunferência.

Definição 11. Um cone circular é chamado de cone circular reto se o segmento de reta que liga o vértice V ao centro O da base (o eixo do cone) for perpendicular ao plano γ que contém a base.

Definição 12. Em um cone reto, cada segmento que liga o vértice a um ponto da base γ é chamado geratriz do cone. A união de todas as geratrizes e da região limitada por γ é chamada superfície do cone.

3.3.2.1 Volume do cone

Considere um cone circular de altura h e base de área B_2 , apoiado em um plano horizontal. Pode-se compará-lo a uma pirâmide com as mesmas dimensões e aplicar o Princípio de Cavalieri.

Ao seccionar o cone (e a pirâmide) por um plano paralelo à base, cria-se um cone menor (ou pirâmide menor) semelhante ao cone original. A razão de semelhança k é dada pela razão entre as alturas:

$$k = \frac{h'}{h}.$$

No caso do cone, a semelhança dos triângulos formados pela altura, o raio da base e a geratriz (ou a altura, o raio da seção e a geratriz) garante que a razão dos raios é igual à razão das alturas:

$$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} = k. \quad (3.1)$$

Como a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, tem-se:

$$\frac{B'_1}{B_1} = \frac{\pi(r')^2}{\pi r^2} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2.$$

Substituindo a expressão (3.1), tem-se:

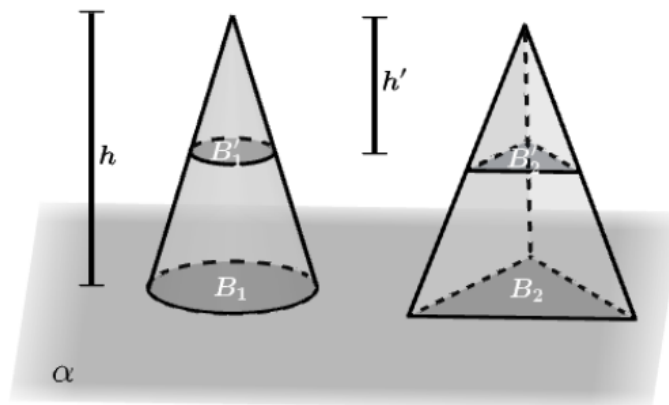
$$\frac{B'_1}{B_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

Como a mesma razão se aplica à pirâmide correspondente, conclui-se que os dois sólidos têm o mesmo volume. Dessa forma, o volume do cone V_{cone} é:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h,$$

em que A_b é a área da base do cone. A Figura 3 ilustra essa construção.

Figura 3 – Comparação entre o cone circular reto e uma pirâmide



Fonte: (SAUER; NUNES, 2025)

3.3.2.2 Área lateral do cone

Para o cone reto de base circular, a superfície lateral pode ser desenrolada em forma de setor circular de raio igual à geratriz g do cone e arco de comprimento $2\pi r$. A área A_L desse setor é proporcional à área do círculo completo, numa razão igual à do comprimento do arco sobre o comprimento total da circunferência:

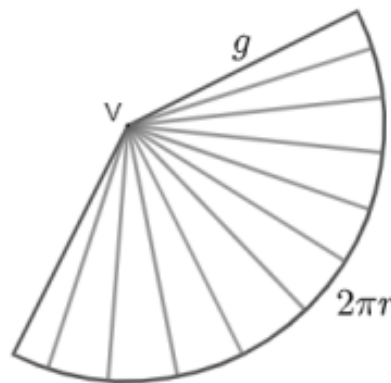
$$\frac{A_L}{\pi g^2} = \frac{2\pi r}{2\pi g}.$$

Portanto:

$$A_L = \pi Rg.$$

Essa construção é ilustrada na Figura 4.

Figura 4 – Superfície lateral do cone circular reto



Fonte: (SAUER; NUNES, 2025)

3.3.3 Prismas e Cilindros

Sejam α e β dois planos paralelos distintos e $\mathcal{P}_n : A_1A_2\dots A_n$ um polígono contido no plano α (Figura 5). Seja r_1 uma reta secante ao plano α pelo ponto A_1 e seja B_1 a interseção de r_1 com β . Tomando retas r_k por A_k e paralelas a r_1 para $k = 2, 3, \dots, n$ são obtidos pontos B_k no plano β os quais originam um polígono $\mathcal{Q}_n : B_1B_2\dots B_n$ no plano β . O polígono \mathcal{Q}_n é congruente com \mathcal{P}_n . Os polígonos $A_1B_1B_2A_2, A_2B_2B_3A_3, \dots, A_nB_nB_1A_1$ são paralelogramos. Esses paralelogramos e os polígonos \mathcal{P}_n e \mathcal{Q}_n definem uma região do espaço.

Definição 13. Nas condições descritas, chama-se prisma a região do espaço definida pelos polígonos $\mathcal{P}_n, \mathcal{Q}_n$ e pelos paralelogramos $A_1B_1B_2A_2, A_2B_2B_3A_3, \dots, A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n$ e $A_nB_nB_1A_1$.

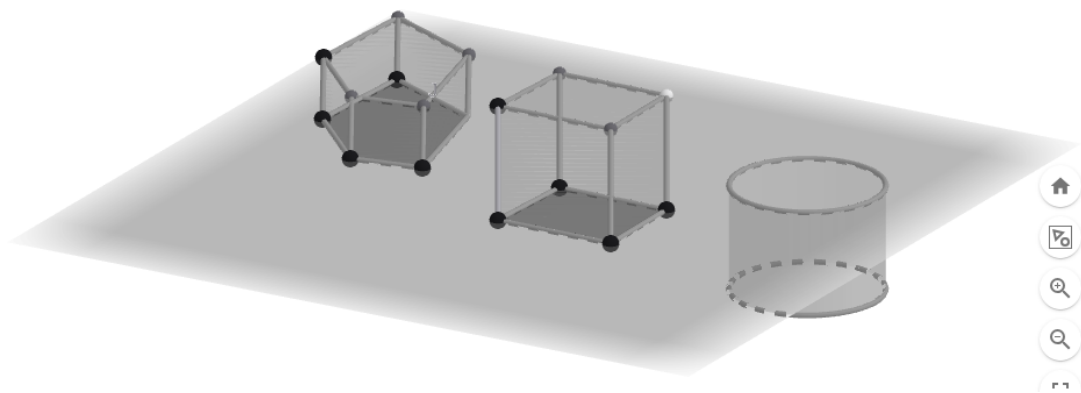
Um caso particular de muito interesse ocorre quando a base é um paralelogramo. Neste caso, o prisma é chamado de paralelepípedo. Paralelepípedos são prismas que têm a particularidade de que qualquer de suas faces pode ser tomada como base (duas faces opostas quaisquer estão situadas em planos paralelos e são ligadas por arestas paralelas entre si).

A generalização natural de prisma é a noção de cilindro.

Definição 14. Sejam α e β planos paralelos e distintos α e β , γ uma curva simples no plano α e r uma reta secante a α por um ponto A de γ . Considerando o conjunto de todas as retas paralelas a r e que possuem algum ponto de γ , chama-se cilindro a região do espaço limitada pelo conjunto de todas essas retas paralelas e pelos polígonos \mathcal{P}_n e \mathcal{Q}_n .

Cada uma das retas pertencentes à família de retas que passam por γ é dita geratriz do cilindro.

Figura 5 – Uma prisma pentagonal, um paralelepípedo e um cilindro



Fonte: Próprio Autor

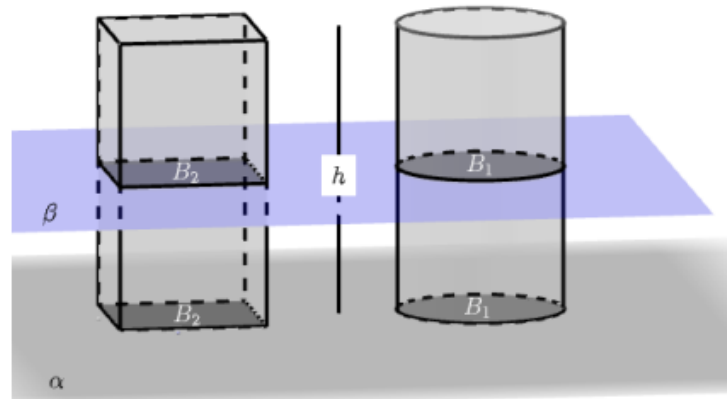
3.3.3.1 Volume do cilindro

Do modo como é definido, um cilindro é formado por duas bases congruentes contidas em planos paralelos, ligadas por segmentos de reta chamados geratrizes do cilindro. Para qualquer plano horizontal que seccione o cilindro, a seção obtida é sempre congruente à base. Para aplicar o Princípio de Cavalieri, considera-se um prisma cuja área da base seja igual à área da base do cilindro (A) e cuja altura seja a mesma (h). Como o cilindro e o prisma possuem seções transversais de áreas iguais em todas as alturas ($A_{cilindro} = A_{prisma} = A_{base}$), conclui-se que eles possuem o mesmo volume. Ou seja: o volume de um cilindro $V_{cilindro}$ é obtido pelo produto da área da base A (troca-se A por A_b) pela altura h , que é a distância entre os planos paralelos que contêm as bases.

$$V_{cilindro} = A_b \cdot h.$$

A Figura 6 representa a ideia.

Figura 6 – Comparação entre o prisma e o cilindro circular



Fonte: (SAUER; NUNES, 2025)

3.3.3.2 Área lateral do cilindro

Além do volume, é útil avaliar a área da superfície lateral (S_l) do cilindro. Sempre é possível desenvolver essa superfície num plano. Resultará um paralelogramo em que um dos lados tem a medida de uma geratriz e o outro lado terá como medida o comprimento L_γ da curva simples γ que define a base do cilindro. A distância entre os planos que possuem as bases do cilindro, define a altura h do cilindro. Dessa forma:

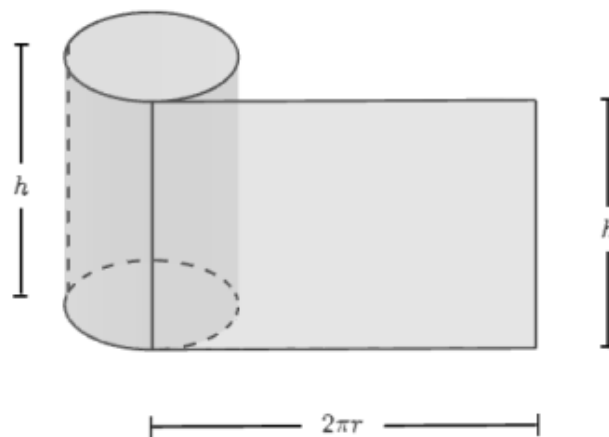
$$S_l = L_\gamma h,$$

resulta na área lateral do cilindro reto. No caso de um cilindro de base circular, isto é, γ é uma circunferência de raio r , então escreve-se:

$$S_l = 2\pi r h.$$

A Figura 7 representa essa planificação.

Figura 7 – Área lateral do cilindro



Fonte:(SAUER; NUNES, 2025)

3.3.4 A Esfera

Definição 15. Dados um ponto P_o e um número real $R > 0$, chama-se esfera de centro P_o e raio R , o conjunto de todos os pontos P do espaço cuja distância a P_o é igual a R .

Trata-se de uma superfície no espaço tridimensional que pode ser vista como o análogo espacial da circunferência. Ainda que a palavra “esfera” também seja usada, informalmente, para se referir ao sólido delimitado por essa superfície, neste trabalho é usada como referência à superfície desse sólido.

A posição relativa de um ponto em relação a uma esfera depende de sua distância ao centro. Pontos cuja distância ao centro for menor que, maior que, ou igual ao raio R , são, respectivamente pontos interiores, pontos exteriores ou estão sobre a superfície esférica.

3.3.4.1 Volume da esfera

Para avaliar o volume de uma esfera, aplica-se o Princípio de Cavalieri à esfera. Conforme o enunciado do Princípio de Cavalieri é necessário compará-la a outro sólido de volume conhecido. E esse sólido deve ser tal que quando um plano secciona ambos os sólidos, as seções transversais possuem mesma área. Para isso, considera-se uma esfera de raio R , apoiada em um plano horizontal. A uma distância h do centro, a seção da esfera é um círculo de raio $\sqrt{R^2 - h^2}$ e a área desse círculo é:

$$A = \pi(R^2 - h^2). \quad (3.2)$$

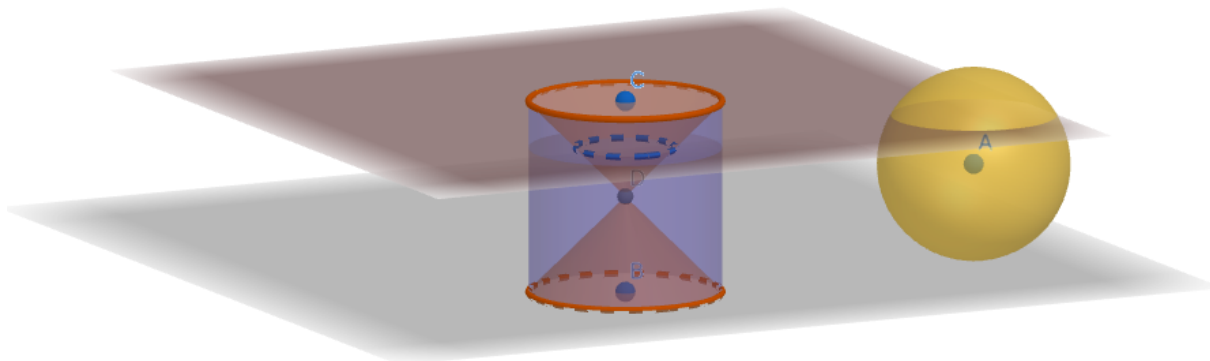
Um cilindro circular equilátero é definido quando o diâmetro de sua base é igual à sua altura, ou seja, $h = 2R$. Dentro desse cilindro, são considerados dois cones circulares cujo vértice é o centro do cilindro, e cujas bases são as circunferências do topo e da base. Esses cones são idênticos e posicionados simetricamente em relação ao seu vértice comum. A região do espaço internamente ao cilindro e externamente aos cones é conhecida como anticlépsidra. As seções transversais dessa anticlépsidra por planos de corte paralelos à base do cilindro resultam em coroas circulares de raio externo R e raio interno h (em razão do cilindro ser equilátero), cuja área é dada por:

$$A = \pi(R^2 - h^2). \quad (3.3)$$

Desse modo as seções da esfera e da anticlépsidra são regiões planas de mesma área (expressões 3.2 e 3.3. Pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos possuem o mesmo volume.

A Figura 8 ilustra a correspondência entre a esfera e a clave de corte que possibilita essa equivalência de áreas.

Figura 8 – Construção no GeoGebra 3D



Fonte: Próprio Autor

Assim, o volume da esfera é determinado por meio da avaliação do volume da anticlepsidra. O cálculo dessa figura é realizado subtraindo-se os volumes de dois cones idênticos do volume total do cilindro de base circular. É fundamental considerar que a altura de cada cone equivale à metade da altura do cilindro e que suas bases possuem a mesma área da base do cilindro. Portanto:

$$V_{esfera} = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \left(\frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R \right) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

3.3.4.2 Área da superfície da esfera

Diferentemente do que ocorre com cilindros e cones, a superfície da esfera não pode ser desenvolvida sobre o plano. Em outras palavras, a esfera não é uma superfície desenvolvível. Por isso, é impossível utilizar um argumento geométrico simples para obter sua área lateral.

Entretanto, há uma justificativa plausível, ainda que intuitiva, para a fórmula da área da superfície da esfera, mesmo sem fazer uso direto do cálculo diferencial. Uma estratégia consiste em imaginar que a superfície da esfera foi dividida em um grande número de pequenas regiões, como uma malha muito fina, cada uma delas aproximadamente plana. Ao conectar-se cada região ao centro da esfera por segmentos de reta, obtêm-se pequenos cones com altura aproximadamente igual a R , o raio da esfera.

A soma dos volumes desses cones é aproximadamente

$$\frac{1}{3} A_1 R + \frac{1}{3} A_2 R + \cdots + \frac{1}{3} A_n R = \frac{1}{3} A R,$$

em que A_1, A_2, \dots, A_n são as áreas das pequenas regiões da superfície e A é a área total da esfera. Sabendo que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi R^3$, pode-se escrever:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}AR.$$

Logo, $A = 4\pi R^2$.

No próximo capítulo, apresenta-se o software GeoGebra 3D e os comandos utilizados nas atividades propostas neste trabalho.

4 O GeoGebra 3D: Ambiente Dinâmico para a Geometria Espacial

Conforme apontam Silva, Souza e Castelluber (2024), o GeoGebra é um software educativo interativo que favorece a aprendizagem de conceitos matemáticos por meio de representações dinâmicas, acessíveis tanto a professores quanto a estudantes dos diferentes níveis de ensino. Desenvolvido por Markus Hohenwarter, o programa integra, em um único ambiente, recursos de Geometria, Álgebra e Cálculo, oferecendo funcionalidades como construção de régua e compasso digital, além de cálculos de alta ou baixa complexidade.

O GeoGebra é particularmente poderoso em auxiliar o ensino de Matemática, pois facilita oportunidades incomparáveis para investigar a correlação entre expressões em várias formas: visual, algébrica e numérica. Dessa forma, o sistema facilita uma progressão para a compreensão das propriedades geométricas, raciocínio lógico e pensamento matemático de maneira mais intuitiva e interativa.

Ressaltam-se as características do GeoGebra que o estabeleceram como o software mais utilizado na educação matemática: seu status de programa de código aberto (licença GPL), que permite o uso e a distribuição gratuita, e sua versatilidade em operar em múltiplos sistemas operacionais. Sua relevância pedagógica reside principalmente na capacidade de integrar de forma interativa diversos conceitos da Matemática, o que propicia uma visualização dinâmica e incentiva o aprendizado orientado visualmente e a construção de conexões em vez da mera memorização (MARQUES; BAIRRAL; PEREIRA, 2023). Além disso, o software oferece uma vasta comunidade online e recursos de personalização que apoiam o planejamento de aulas e o aprimoramento das práticas de ensino.

O GeoGebra 3D é uma das extensões do aplicativo que foi criado em particular para ajudar os alunos a investigar ideias matemáticas em 3D. Por meio do ambiente localizado em <https://www.geogebra.org/3d>, tem-se uma interface intuitiva para manipular e visualizar objetos em 3D. Ao contrário do plano 2D do GeoGebra Classic, sua versão 3D possibilita desenhar planos, sólidos, superfícies e curvas no espaço, aumentando dramaticamente o potencial de uso para aprender e ensinar Geometria Espacial.

O manual <https://geogebra.github.io/docs/manual/en/> e os tutoriais no site oficial <https://www.geogebra.org/> são referências confiáveis para estudar e aprimorar o uso do software, trazendo explicações sobre seus principais comandos, além de exemplos de aplicação.

4.1 A Interface do GeoGebra 3D

O GeoGebra 3D oferece uma interface que facilita a manipulação fluida e interativa de objetos tridimensionais, aprimorando a experiência de quem o utiliza ao trabalhar com objetos tridimensionais em contraste com o foco bidimensional do GeoGebra Classic. O ambiente gráfico é composto por uma janela central de visualização tridimensional, onde é possível manipular e explorar figuras no espaço, como planos, esferas e vetores, com recursos de rotação, ampliação e transformações em 3D. A principal distinção em relação à versão clássica é a presença de uma grade tridimensional interativa, crucial para posicionar e alinhar objetos, e o uso de comandos específicos para trabalhar com coordenadas e elementos espaciais. Assim, o GeoGebra 3D proporciona uma visualização mais avançada e completa, tornando-o adequado para a exploração de conceitos geométricos complexos e a análise de relações espaciais.

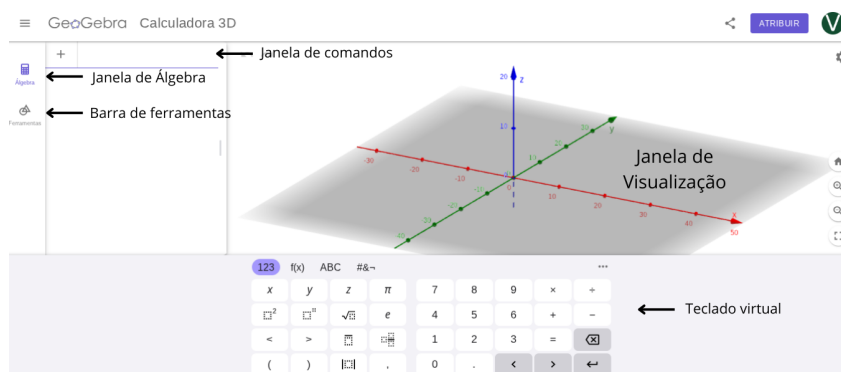
4.1.1 Interface Básica e Fontes de Criação

O trabalho no GeoGebra 3D é sustentado por três elementos integrados. São eles:

- Janela de Visualização 3D: é o espaço central onde os objetos geométricos espaciais (sólidos, planos, vetores) são representados e manipulados;
- Janela de Álgebra: lista todos os objetos criados, exibindo suas coordenadas, valores numéricos e equações correspondentes. É vital para conferir a coerência algébrica das construções espaciais;
- Barra de Entrada ou Janela de Comandos: esta é a ferramenta-chave do GeoGebra 3D para o rigor matemático. É nela que o usuário insere comandos exatos (como $\text{Cilindro}(A,B,5)$ para um raio preciso) e expressões matemáticas complexas. O teclado virtual, que se ativa nessa barra, facilita a inserção de símbolos e ícones para a realização de operações como radiciação e potenciação.

A Figura 9 ilustra os elementos citados.

Figura 9 – Janela de Visualização



Fonte: Próprio autor

A barra de ferramentas é o principal recurso gráfico do GeoGebra 3D para a criação e manipulação de elementos no espaço. Ela se localiza à esquerda da janela de visualização e agrupa ferramentas relacionadas sob ícones principais, o que otimiza a interface e o processo de construção.

4.1.2 A Barra de Ferramentas e as Funções de Construção 3D

A estrutura da barra de ferramentas é estritamente focada nas necessidades do ambiente tridimensional. As funções de construção podem ser acessadas pelos ícones dessa barra ou pela janela de entrada, por meio de comandos de sintaxe específicos. As categorias essenciais de ferramentas incluem:

- **Construção Primitiva:** possibilitam a criação de pontos em 3D e vetores no espaço. Estas ferramentas, facilmente acessíveis na primeira seção da barra, são a base para definir posições e direções dos sólidos;
- **Sólidos:** oferecem comandos diretos para a criação de formas 3D a partir de suas bases, como cilindro, cone, prisma e esfera. Essas ferramentas garantem que as figuras construídas sejam imediatamente manipuláveis no ambiente 3D;
- **Planos e Retas:** permitem a construção de planos no espaço (como o plano perpendicular utilizado para seções) e retas no espaço, fundamentais para definir eixos de rotação ou planos de corte;
- **Medição e Volume:** esta categoria é crucial para a Geometria Espacial, pois inclui recursos para calcular volume, área de superfície de sólidos e distância entre pontos no espaço;
- **Controle Deslizante:** o controle deslizante é o elemento fundamental para a dinâmica no GeoGebra 3D, embora seja uma ferramenta de criação. Ele é acessível na barra

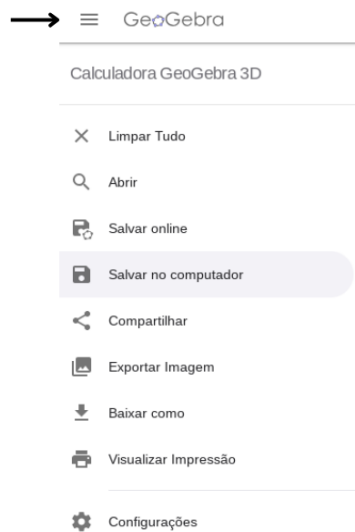
principal e cria uma variável numérica manipulável que pode ser utilizada para controlar, como neste trabalho, a posição de um plano móvel (a altura h de corte), estimulando a exploração e a observação de regularidades.

Em síntese, a integração dessas ferramentas e funções no ambiente 3D transforma o GeoGebra 3D em uma plataforma de geometria dinâmica espacial, permitindo que o estudante vá além da simples visualização para investigar ativamente as propriedades e relações espaciais dos objetos.

4.2 Funcionalidades do Menu Principal (GeoGebra 3D)

O menu principal do GeoGebra 3D (representado pelo ícone \equiv , no canto superior esquerdo) concentra as ferramentas de gerenciamento de arquivos e as configurações globais do aplicativo. A lista de opções é exibida conforme a Figura 10, e suas principais funções são detalhadas, conforme a documentação oficial do software GeoGebra (2025). É importante notar que todas as construções podem ser salvas e o formato de arquivo padrão do GeoGebra 3D é o .ggb.

Figura 10 – Menu de opções do GeoGebra 3D



Fonte: Próprio autor

- Limpar Tudo (Novo): inicia uma nova construção, excluindo todos os objetos e comandos da janela de visualização e do campo de entrada;
- Abrir: permite carregar trabalhos previamente salvos, seja de arquivos locais (no formato padrão) ou de recursos armazenados na conta online do GeoGebra;
- Salvar online: armazena o trabalho atual na conta GeoGebra do usuário, permitindo o acesso de qualquer dispositivo logado;

- Salvar no computador: baixa o arquivo da construção no formato padrão do GeoGebra. Esta é a forma recomendada para criar um backup local ou continuar a construção posteriormente sem depender de conexão;
- Compartilhar: cria um link direto para a construção online, facilitando o compartilhamento do recurso com professores e colegas;
- Exportar: permite obter o registro visual ou o código da construção:
 - Exportar imagem: gera uma figura em formato .png para inserção em relatórios ou trabalhos;
 - Baixar como: permite salvar em diferentes formatos, como HTML ou código para aplicativos (disponibilidade varia conforme a plataforma e a construção).
- Visualizar Impressão: abre a tela de pré-visualização, permitindo o ajuste do layout e da formatação da construção antes da impressão;
- Modo Exame: restringe temporariamente o acesso a outros aplicativos e à internet, sendo utilizado em ambientes de avaliação controlada;
- Configurações: abre o painel de ajustes do aplicativo, onde é possível modificar a precisão numérica (número de casas decimais), o idioma, o tamanho da fonte e outras configurações avançadas;
- Ajuda: redireciona o usuário para o Centro de Ajuda ou para o Fórum da Comunidade GeoGebra 3D, fornecendo suporte técnico e tutoriais.

Recomenda-se sempre salvar o trabalho no formato .ggb para garantir a continuidade da construção e, adicionalmente, utilizar a opção Exportar Imagem como registro final do trabalho realizado.

4.3 Edição, Interação e Personalização dos Objetos

Esta subseção detalha os procedimentos técnicos para manipular e personalizar os objetos construídos na janela de visualização 3D, cobrindo ajustes de visualização (*zoom*/rotação), alteração de estilo (cores) e interação com parâmetros (controle deslizante). As informações apresentadas estão em conformidade com a documentação oficial do GeoGebra (2025).

4.3.1 Manipulação da Janela de Visualização (*Zoom* e Rotação)

O controle da Janela 3D é essencial para a exploração espacial do objeto. No GeoGebra 3D, as funções de *zoom* e rotação são executadas por meio de gestos (em dispositivos móveis) ou do mouse (em desktops).

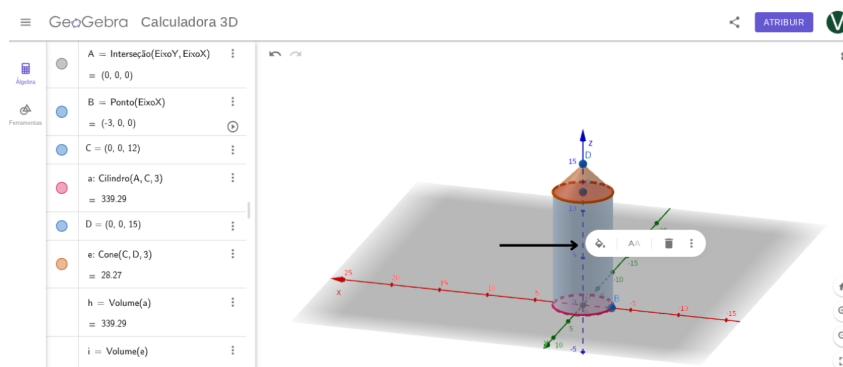
- Rotação do Objeto/Câmera:
 - Dispositivos móveis: toque e arraste o dedo na área da janela 3D para rotacionar a visualização em torno da origem.
 - Desktop: clique e arraste o botão esquerdo do mouse na janela 3D.
- Zoom (Ampliação/Redução):
 - Dispositivos móveis: use o gesto de pinça (*pinch-to-zoom*) na área da janela 3D.
 - Desktop: utilize a roda de rolagem (*scroll*) do mouse para ampliar ou reduzir o objeto.

4.3.2 Personalização de Cores e Estilos (Propriedades)

A alteração da aparência visual dos objetos é feita por meio do menu de configurações ou propriedades de cada elemento. O acesso para essas configurações é feita por seleção sobre o objeto ou pelas propriedades.

- Seleção: clicando diretamente sobre o objeto na janela 3D, como mostra a Figura 11.

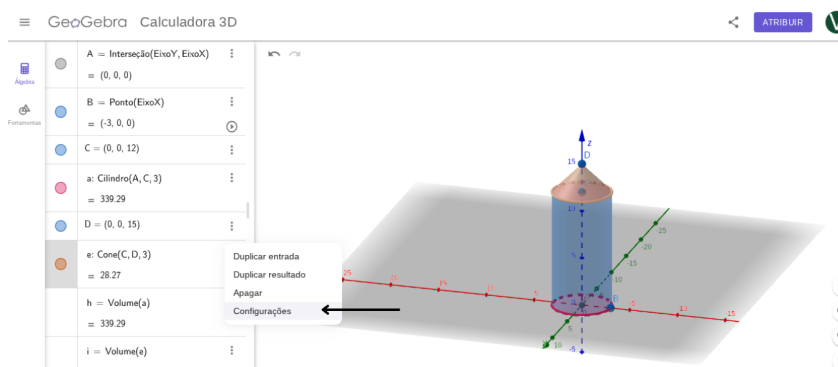
Figura 11 – Seleção sobre o objeto



Fonte: Próprio autor

- Acesso às propriedades: selecionando o item correspondente na janela de álgebra e clicando no ícone dos três pontinhos e após em configurações, como ilustra a Figura 12.

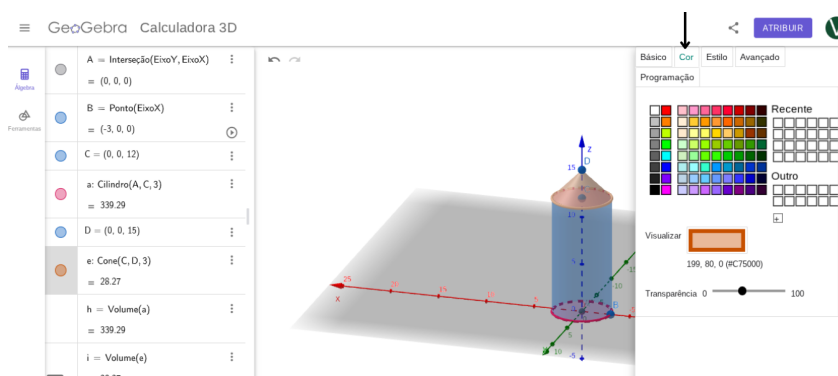
Figura 12 – Acesso às Propriedades



Fonte: Próprio autor

- Ajuste de cor: no painel de propriedades, acessando a aba Cor (Figura 13) permite definir a cor desejada e o ajuste da opacidade (transparência) do objeto.

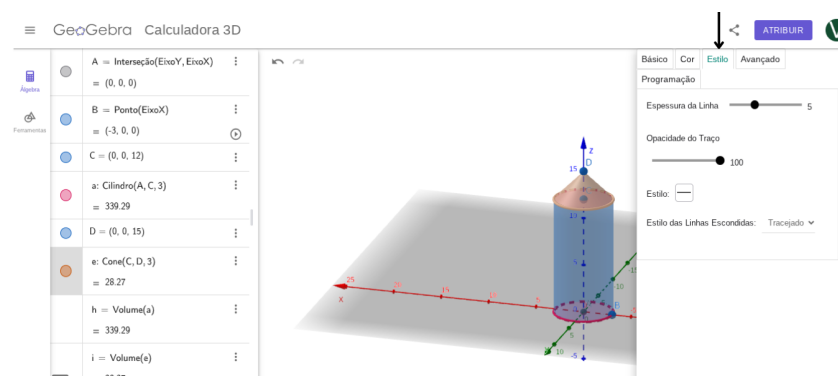
Figura 13 – Aba Cor



Fonte: Próprio autor

- Ajuste de estilo: na aba Estilo é possível configurar a espessura da linha (dos contornos) e o estilo de preenchimento do sólido (Figura 14).

Figura 14 – Aba Estilo



Fonte: Próprio autor

Este processo é fundamental para diferenciar sólidos, planos ou vetores em uma construção complexa.

4.3.3 Articulação com o Controle Deslizante

O controle deslizante é uma ferramenta que permite a variação dinâmica de um parâmetro (número, ângulo ou valor inteiro), sendo crucial para a exploração de conceitos matemáticos. A sintaxe para a criação do controle deslizante na janela de entrada é definida pelo valor mínimo e máximo que a variável pode assumir, bem como o incremento, que representa o passo ou a variação mínima pela qual o valor do parâmetro deve ser alterado a cada manipulação do controle.

É fundamental destacar que, no GeoGebra 3D, a sintaxe de entrada de dados exige o uso do ponto (.) como separador decimal, e não a vírgula (,), o que deve ser observado ao definir os valores do incremento, valor mínimo e valor máximo.

1. Criação do parâmetro (Controle Deslizante)

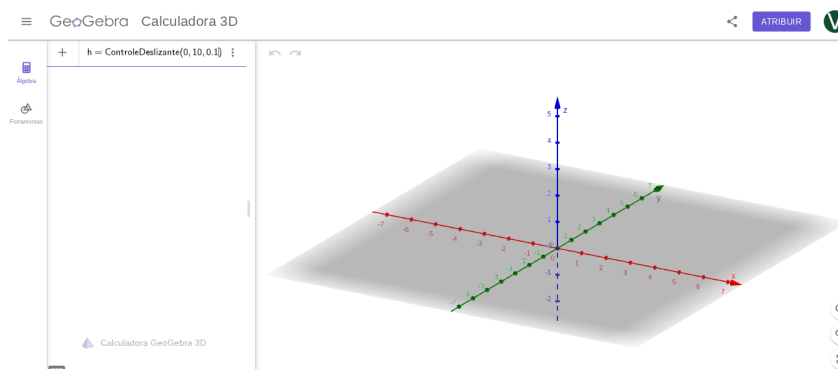
- Método via comando: utilize o campo de entrada e digite o comando de criação do controle deslizante, no formato:

Nome do Parâmetro = ControleDeslizante (Valor Mínimo,
Valor Máximo, Incremento).

Exemplo: Crie um parâmetro de altura (h) que varia de 0 a 10, com incremento 0,1 (Figura 15). O comando a ser digitado na janela álgebra é:

$$h = \text{ControleDeslizante}(0,10,0.1).$$

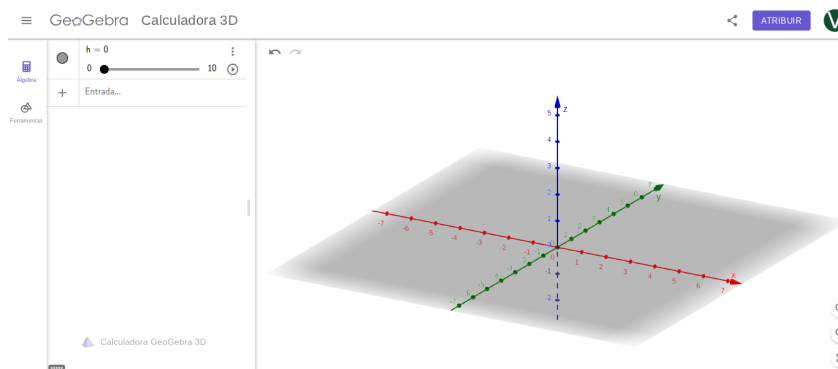
Figura 15 – Via comando



Fonte: Próprio autor

- Ao pressionar Enter, o GeoGebra 3D cria e exibe o controle deslizante diretamente na janela de álgebra para uso no ambiente 3D (Figura 16).

Figura 16 – Controle criado

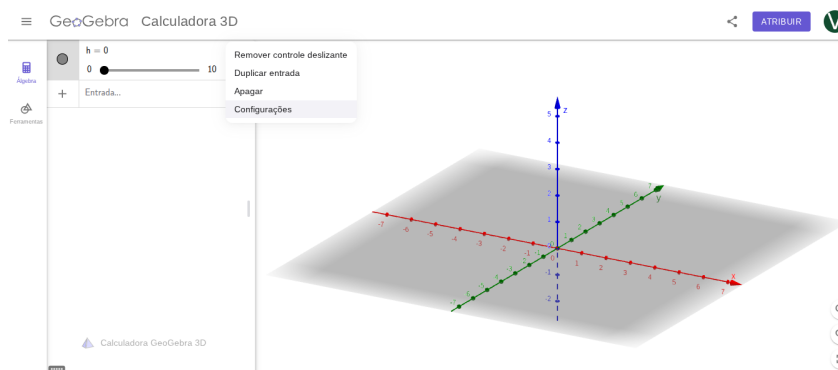


Fonte: Próprio autor

2. Configuração e ajuste

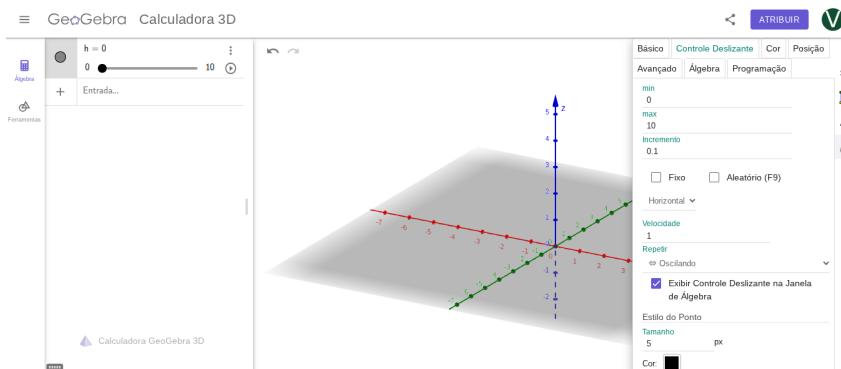
- Se o controle deslizante precisar de ajustes finos, clique no parâmetro na janela de álgebra e acesse suas configurações (Figura 17) para alterar o nome, intervalo, incremento ou ativar a animação, conforme mostra a Figura 18.

Figura 17 – Configuração do Controle Deslizante



Fonte: Próprio autor

Figura 18 – Ajustes



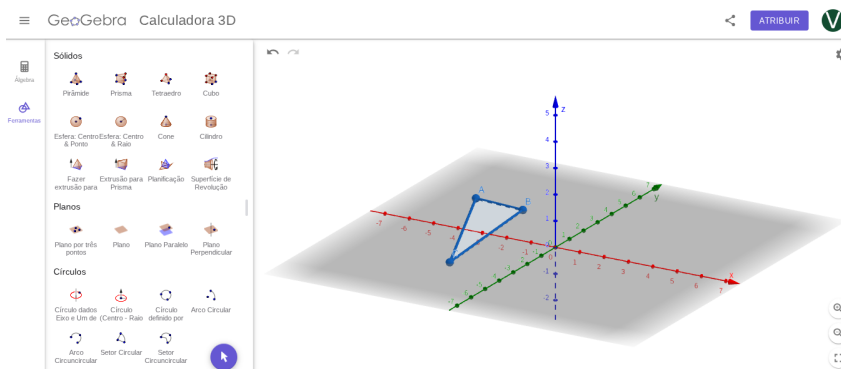
Fonte: Próprio autor

3. Vinculação ao objeto (Extrusão)

- O nome do parâmetro criado (por exemplo, h) deve ser usado como a dimensão variável na construção geométrica.

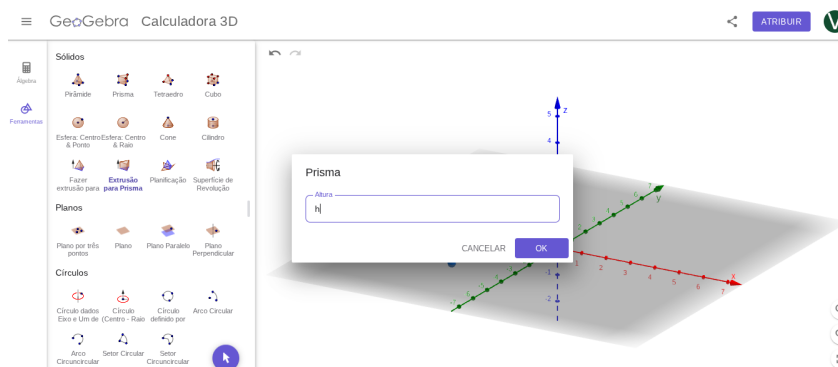
Exemplo: Crie uma figura por meio da ferramenta Extrusão. Selecione a ferramenta Retas e Polígonos, clique em Polígono, após crie um polígono clicando nas posições dos pontos que a complete na malha (na Figura 19 foi criado um triângulo). Selecione a ferramenta Extrusão para Prisma, clique no polígono criado e, na caixa de diálogo de altura, digite o nome do parâmetro (h) (Figura 20) e pressione OK.

Figura 19 – Ferramenta Extrusão



Fonte: Próprio autor

Figura 20 – Altura h

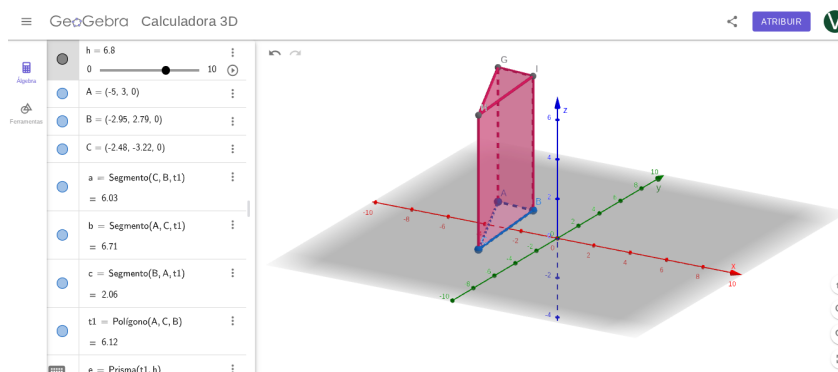


Fonte: Próprio autor

4. Articulação

- O sólido resultante aparecerá na janela 3D. O objeto se modifica em tempo real quando o controle deslizante (h) é movido, demonstrando a relação paramétrica entre a altura e o volume (ou forma) do sólido (Figura 21).

Figura 21 – Resultado



Fonte: Próprio autor

4.4 Recursos e Estratégias de Construção no GeoGebra 3D

A implementação das atividades de Geometria Espacial desta pesquisa exigiu o uso estratégico dos recursos do GeoGebra 3D, priorizando a precisão na construção e a capacidade de dinamismo das figuras tridimensionais. Enquanto a barra de ferramentas oferece acesso rápido a formas geométricas, o rigor da modelagem de sólidos e a manipulação de seções planas dependem do uso direto da barra de entrada (comandos) e de ferramentas avançadas de definição de variáveis e controle de figuras.

O Quadro 3 detalha os comandos e recursos essenciais do GeoGebra 3D utilizados nas atividades de construção, análise volumétrica e visualização de seções planas, indicando suas funções técnicas e a justificativa didática em todo o projeto.

Quadro 3. Quadro de Comandos e Recursos Essenciais para as Atividades

Recurso/Comando	Função Técnica Central	Justificativa Didática
Ponto(<Objeto>)	Cria um ponto livre no ambiente 3D ou fixo em um objeto (linha, plano).	Elemento fundamental para a construção de todos os sólidos. Essencial para fixar bases, vértices e centros.
Esfera(<Ponto>, <Raio>)	Cria uma esfera definida com precisão por seu centro (ponto) e raio (valor numérico ou deslizante).	Essencial para a modelagem de esferas e objetos esféricos, permitindo o cálculo exato do seu volume e área.
Cilindro(<Ponto>, <Ponto>, <Raio>)	Cria um cilindro circular reto definido com precisão por seus pontos da base e raio.	Garante que os sólidos de comparação tenham dimensões rigorosas (base e altura), o que é fundamental para a análise e verificação de volumes.
Cone(<Ponto>, <Ponto>, <Raio>)	Cria um cone circular reto definido por seus pontos (vértice e centro da base) e raio.	Permite a construção de cones com a precisão geométrica necessária para as atividades que envolvem a relação volume/altura.
PontoMédio(<Ponto>, <Ponto>)	Calcula e cria o ponto que está exatamente no meio do segmento de reta definido por dois pontos.	Essencial para garantir a simetria das construções e ajuda a posicionar outros elementos de forma precisa e centralizada.
Volume(<Sólido>)	Calcula e exibe o valor numérico do volume do sólido construído.	Permite a quantificação e verificação numérica do cálculo do volume.
Área(<Figura>)	Calcula e exibe o valor da área de uma figura plana (seção transversal).	Utilizado para a comparação numérica entre áreas de figuras planas.
Controle Deslizante	Cria uma variável numérica manipulável, que controla um valor (altura h , ângulo α , raio r) na figura.	Elemento central da dinâmica. Permite a exploração interativa de como a variação de um parâmetro afeta o sólido ou a seção plana.
Interseção de duas Superfícies (ou InterseçãoGeométrica)	Gera a figura 2D (a seção) resultante do encontro entre o sólido e o plano de corte.	Produz a seção plana em tempo real. Este comando é a chave para a análise de área transversal em qualquer atividade que envolva cortes e o Princípio de Cavalieri.
FraçãoEmTexto(<Expressão>)	Converte um resultado decimal da janela de álgebra para sua representação fracionária.	Permite a validação algébrica e a comparação direta do resultado numérico com a fração esperada.

Fonte: Adaptado do Manual (GeoGebra, 2025).

O uso do software GeoGebra 3D na construção dos sólidos espaciais, embora focado na visualização (registro figural) e manipulação, introduz um elemento intrínseco de Geometria Analítica ao gerar automaticamente as equações cartesianas e paramétricas dos objetos. Essa interface dupla, visual e analítica, é uma característica potente do software que, se não mediada, pode gerar um ruído desnecessário para o aluno focado na formação conceitual da Geometria Espacial. É vital que o professor reconheça esse aspecto e direcione a atenção do aluno exclusivamente para a interface gráfica, evitando que o excesso de informações analíticas na janela de álgebra desvie o foco do objetivo didático.

A manipulação de sólidos e a visualização de cortes seccionais no ambiente 3D do GeoGebra 3D já constituem um avanço significativo em relação aos modelos estáticos. No entanto, para promover uma imersão em que efetivamente é possível combinar o mundo real com a representação digital, o potencial da Geometria Dinâmica é ampliado com a integração da Realidade Aumentada. Esta tecnologia permite que as construções digitais saiam do plano do monitor e sejam visualizadas no espaço físico da sala de aula, adicionando uma camada extra de concretude à abstração.

4.5 Realidade Aumentada

A Realidade Aumentada (RA) é uma tecnologia que combina elementos virtuais com o ambiente físico de forma interativa e em tempo real. Segundo a definição clássica de Azuma (1997), trata-se de um sistema que alia os mundos real e virtual, é interativo em tempo real e está registrado em três dimensões. Esta abordagem representa uma técnica de interface computacional que utiliza o espaço tridimensional de forma multissensorial.

No contexto pedagógico, o uso crescente da RA na educação é um fato positivo. A compreensão dos conteúdos torna-se mais fácil quando existe a possibilidade de visualização prévia da informação que se pretende transmitir, por meio de técnicas como a visão computacional (CARDOSO et al., 2014). Em especial na Geometria Espacial, a RA apresenta grande potencial ao permitir a manipulação de objetos tridimensionais sobrepostos ao mundo físico, favorecendo a exploração de conceitos abstratos.

Nesse cenário, diferentes aplicativos têm sido desenvolvidos com foco na educação matemática, como o GeoGebraAR, que possibilita a visualização e manipulação de sólidos em 3D. A utilização dessas ferramentas amplia a interação e o engajamento dos estudantes, que demonstram motivação inicial pela possibilidade de interatividade e facilidade de uso (CARDOSO et al., 2014). A Realidade Aumentada (RA) atua como uma extensão da visualização dinâmica oferecida pelo GeoGebra 3D, levando a construção digital para o espaço físico da sala de aula. Antes de descrever o processo de interação, é fundamental detalhar os passos para a instalação do aplicativo em dispositivos móveis.

4.5.1 Guia de Instalação do GeoGebra 3D com Funcionalidade RA

O acesso à Realidade Aumentada é realizado por meio do aplicativo Calculadora GeoGebra 3D (ou GeoGebra Calculator Suite), disponível gratuitamente nas principais plataformas de download:

1. Para Dispositivos Android (Celulares e Tablets):
 - a) O dispositivo precisa ser compatível com o serviço de Realidade Aumentada do Google, o ARCore;

- b) Abra a Google Play Store;
 - c) Instale o aplicativo de base: Google Play Services for AR (ou ARCore), caso não esteja instalado;
 - d) Pesquise e instale o aplicativo principal: Calculadora GeoGebra 3D ou a GeoGebra Calculator Suite.
2. Para Dispositivos iOS (iPhone e iPad):
- a) Abra a App Store;
 - b) Pesquise e instale o aplicativo: Calculadora GeoGebra 3D.

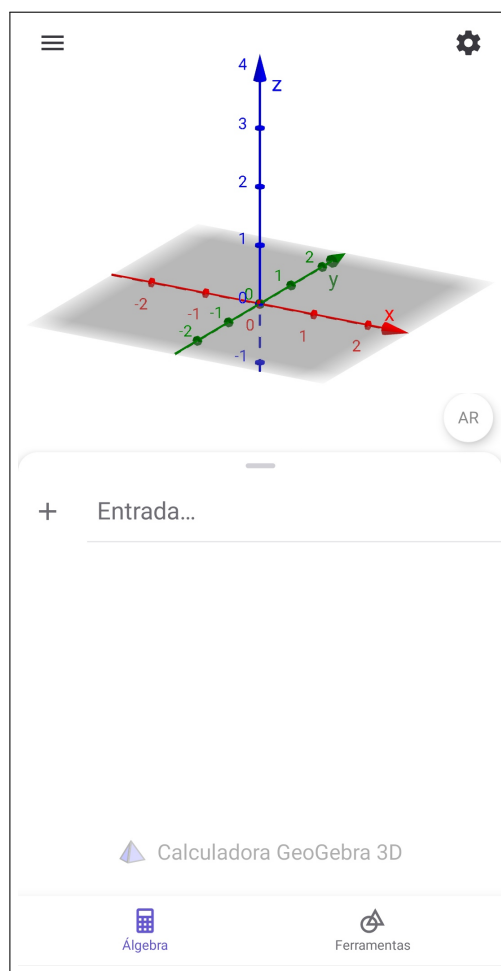
A Figura 22 ilustra a interface do aplicativo nas plataformas de download e a Figura 23 apresenta a tela principal após a abertura.

Figura 22 – Interface do Aplicativo Calculadora GeoGebra 3D em Plataforma de Download



Fonte: Próprio autor

Figura 23 – Tela principal do aplicativo



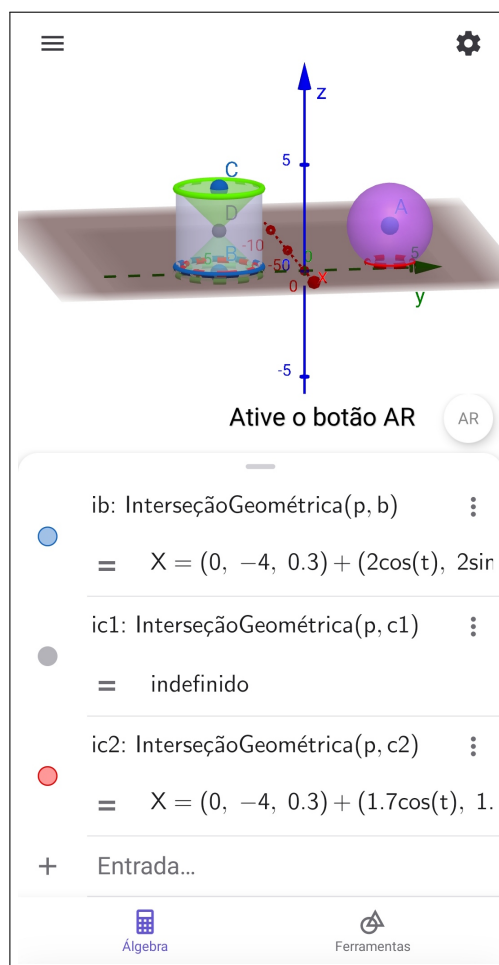
Fonte: Próprio autor

4.5.2 Processo de Interação com a Realidade Aumentada (GeoGebraAR)

O processo de interação com o GeoGebraAR segue uma sequência lógica que facilita a exploração e a manipulação dos conceitos geométricos em um ambiente imersivo (GeoGebra, 2025):

- Acesso e ativação (Figura 24): após criar o sólido geométrico desejado (ou abrir um material já pronto) dentro do GeoGebra 3D, ativa-se a função de Realidade Aumentada (AR) por meio do ícone específico, ligando a câmera do dispositivo;

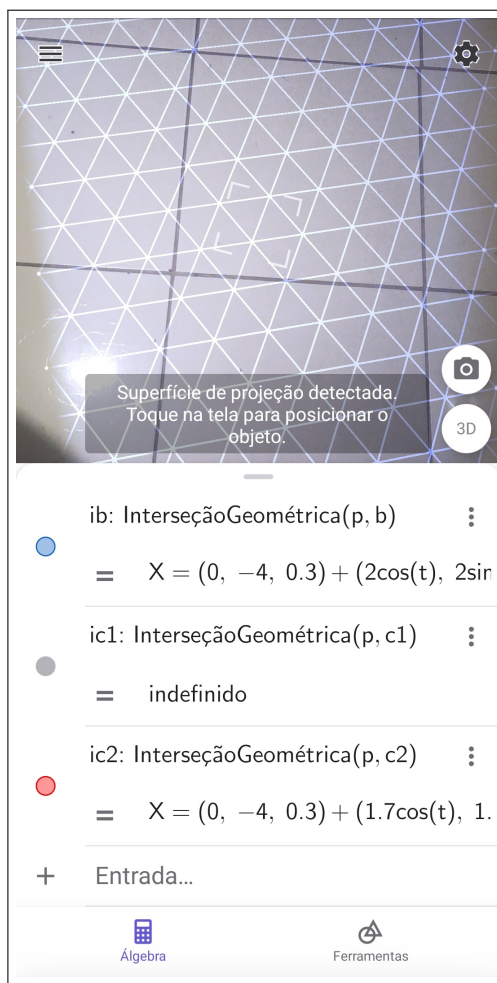
Figura 24 – Acesso e ativação



Fonte: Próprio autor

- Identificação do plano (Figura 25): o dispositivo utiliza a câmera e o serviço de AR (como o ARCore) para rastrear o ambiente e identificar uma superfície plana (como uma mesa ou o chão). Esta superfície é reconhecida como a âncora digital, onde o sólido será projetado;

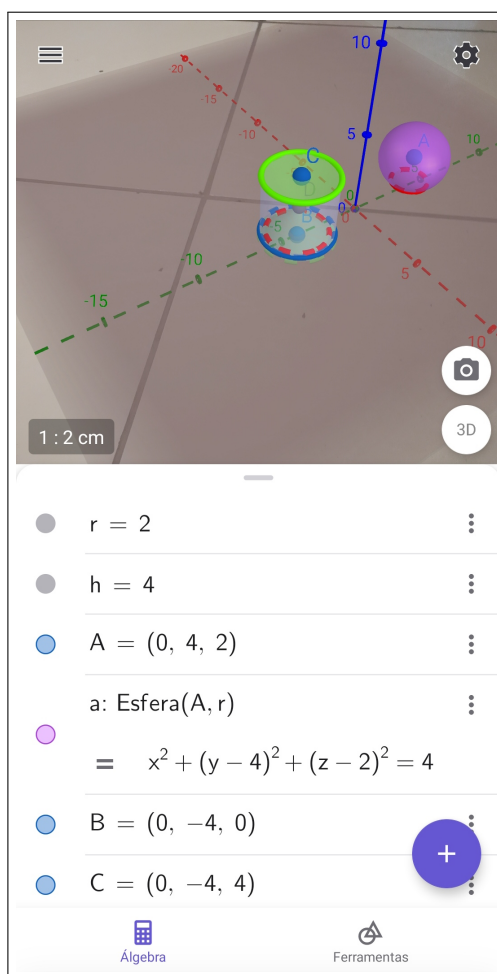
Figura 25 – Identificação do plano



Fonte: Próprio autor

- Projeção e calibração do sólido (Figura 26): o objeto geométrico é projetado em escala sobre o plano físico (âncora digital), criando a ilusão de que ele é real e está na frente do aluno. O sistema se calibra para garantir que a manipulação do objeto seja responsiva ao movimento do usuário no mundo real;

Figura 26 – Projeção do Sólido

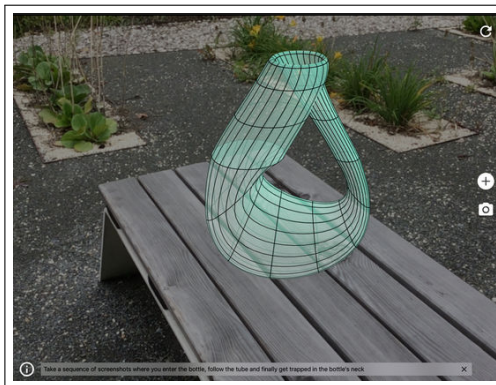


Fonte: Próprio autor

- **Interação Dinâmica:** a manipulação do objeto 3D é realizada pelo movimento do dispositivo no espaço tridimensional (translação e rotação). Isso permite girar, aproximar e até mesmo caminhar em torno do objeto digital, explorando propriedades (faces, arestas e vértices) de forma dinâmica, como se ele fosse palpável.

O processo de interação com o GeoGebraAR é dinâmico e imersivo. Depois de criar o sólido e ativada a função de Realidade Aumentada (AR), o sistema rastreia o ambiente para identificar uma superfície plana (âncora digital) e projeta o objeto geométrico sobre ela. A manipulação do objeto é feita pelo movimento do dispositivo no espaço tridimensional, permitindo uma exploração detalhada de suas propriedades. A Figura 27 ilustra essa interação dinâmica do objeto 3D com um ambiente real.

Figura 27 – Interação com o GeoGebraAR



Fonte: (ALEXANDRE, 2017)

No próximo capítulo, apresentam-se as atividades envolvendo sólidos redondos que podem ser aplicadas pelo professor para sistematizar as definições já estudadas da Geometria Espacial.

5 Atividades Propostas

Neste capítulo, apresentam-se oito atividades voltadas para a revisão de conceitos de Geometria Espacial no Ensino Médio, fundamentadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e na Teoria dos Níveis de Pensamento Geométrico de Van Hiele. As propostas articulam construções no software GeoGebra 3D com a resolução de questões do ENEM, buscando oferecer alternativas didáticas para a abordagem da Geometria Espacial no contexto escolar. Cada atividade contempla diferentes formas de representação como linguagem verbal, registros algébricos, representações gráficas e modelos tridimensionais digitais, favorecendo, em potencial, a conversão entre registros discursivos e não discursivos, conforme indica Duval. Do mesmo modo, espera-se que a progressão cognitiva requerida pelos exercícios dialogue com os níveis de compreensão geométrica descritos por Van Hiele, permitindo que os estudantes avancem da simples visualização de sólidos para a análise de propriedades e relações espaciais, e posteriormente para formulações que possam ser generalizadas. Assim, a utilização do GeoGebra 3D pode constituir-se como recurso de apoio, capaz de ampliar as possibilidades de visualização, manipulação e exploração dinâmica dos conceitos de Geometria Espacial no Ensino Médio, sem, no entanto, substituir a mediação pedagógica planejada pelo professor. A penúltima atividade inclui Realidade Aumentada para o cálculo do volume da esfera, empregando o Princípio de Cavalieri. A última envolve uma questão de vestibular sobre o mesmo assunto e tem como objetivo aplicar, de forma prática e interativa, a relação entre o volume da esfera e o seus sólidos auxiliares (cilindro e cone retos). A manipulação da construção 3D diretamente no ambiente real favorece a visualização e a compreensão conceitual.

O GeoGebra 3D, como software de Geometria Dinâmica, gera automaticamente as equações analíticas (cartesianas, paramétricas ou vetoriais) de todos os objetos construídos, exibindo-as na Janela de Álgebra. Por isso, uma vez que o foco desta sequência didática está na formação conceitual da Geometria Espacial (visualização e propriedades) e nas conversões de registros segundo Duval, e não nos detalhes da Geometria Analítica, o professor deve orientar os alunos a ignorar ou a ocultar estas equações. Recomenda-se que o aluno mantenha o foco exclusivamente na representação gráfica 3D e nos comandos de construção, para que não haja desvio da atenção para o conteúdo analítico, que está além dos objetivos primários desta intervenção.

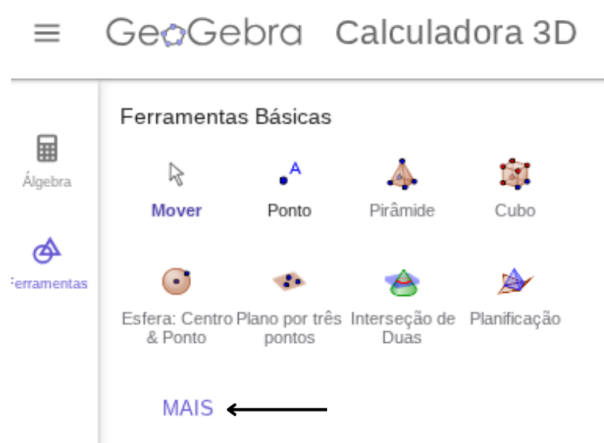
O público atendido corresponde aos alunos do Ensino Médio, que já tenham estudado Geometria Espacial. Consideram-se como materiais necessários: computador ou celular (aplicativo Calculadora 3D, instalado ou acesso à versão online); folha impressa com as instruções da atividade; materiais de uso pessoal como lápis, borracha, régua e

caderno para registros.

Considerando o número de páginas da atividade de RA, sua impressão integral pode não ser viável em todos os contextos escolares, devido aos custos e à restrição de recursos. Sugere-se que o professor considere a disponibilização do material em formato digital, por meio de plataformas de gerenciamento de aprendizagem (como Google Classroom, Moodle ou WhatsApp), para consulta e preenchimento digital pelos alunos. A projeção do conteúdo em tela ou quadro, quando houver infraestrutura, também constitui uma alternativa viável para a apresentação em aula. A versão impressa pode ser reservada apenas para a folha de registro de respostas, se necessário.

Caso o menu de ferramentas não exiba todas as opções citadas nos próximos passos (como Segmento ou Esfera), clique na opção MAIS (localizada no final da lista) para expandir e acessar todas as ferramentas disponíveis no GeoGebra 3D, como ilustra a Figura 28.

Figura 28 – Opção Mais



Fonte: Próprio autor

No Apêndice A estão disponibilizadas as atividades para impressão.

5.1 Atividade 1: Construção de uma Esfera

Objetivo: Construir uma esfera no software GeoGebra 3D, utilizando recursos básicos de representação tridimensional, de modo a introduzir o sólido geométrico e estabelecer uma base para análises posteriores relacionadas ao cálculo de volume.

Contextualização: O professor pode iniciar a aula discutindo exemplos de objetos do cotidiano que apresentam forma esférica, exibir imagens reais ou utilizar um modelo físico (por exemplo: uma bola, uma laranja, planeta Terra, bola de sorvete) para destacar características da esfera, como simetria, raio e sua relação com a circunferência. Caso a escola disponha de materiais acrílicos educativos, recomenda-se o

uso de esferas transparentes desmontáveis, que permitem observar o interior e discutir o conceito de volume. Também é possível recorrer a planificações esféricas simplificadas, como mapas-múndi, e propor que os alunos identifiquem objetos esféricos presentes no ambiente escolar. Uma dica boa é usar vídeos, como por exemplo no link: <<https://www.youtube.com/watch?v=5x50ibIN750>>, de onde foram retiradas as imagens da Figura 29.

Figura 29 – Objetos que lembram uma esfera



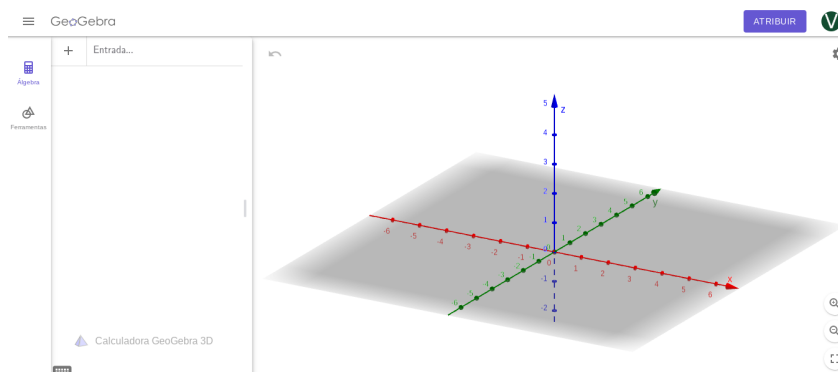
Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=5x50ibIN750>

5.1.1 Atividade no GeoGebra

Enunciado: Construa uma esfera no GeoGebra 3D.

- 1) Acesse o GeoGebra em: <www.geogebra.org/3d>. A tela inicial é semelhante à Figura 30.

Figura 30 – Tela inicial do GeoGebra 3D



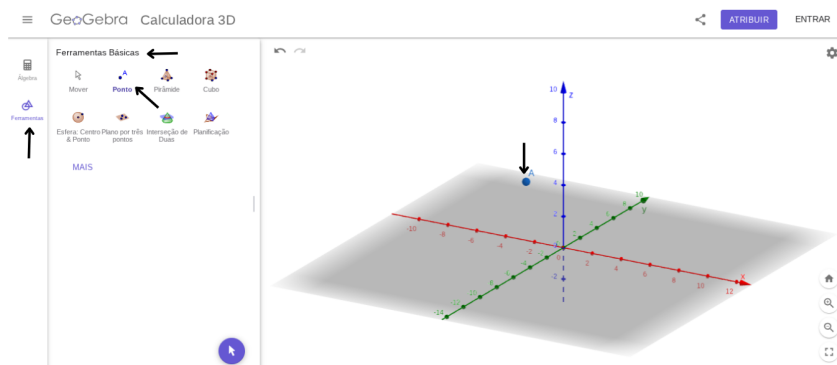
Fonte: Próprio autor

- 2) Crie o centro da esfera.

- Clique em Ferramentas → Ferramentas Básicas → Ponto;

- Clique em qualquer lugar no espaço para criar o ponto A (o centro da esfera), como indicado na Figura 31.

Figura 31 – Ferramentas básicas do GeoGebra 3D

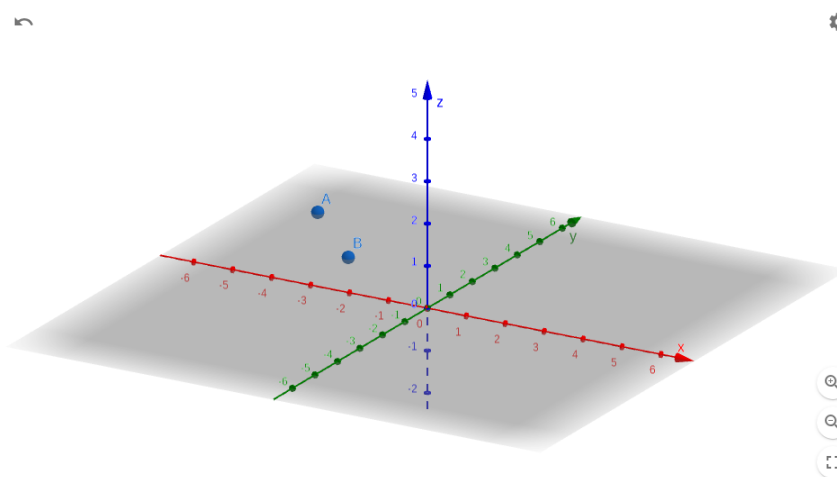


Fonte: Próprio autor

3) Defina o raio da esfera.

- Ainda com a ferramenta Ponto, clique em outro local da tela para criar o ponto B, distante de A;
- O ponto B, juntamente com o ponto A (centro), determina o comprimento do raio da esfera (Figura 32).

Figura 32 – Pontos A e B



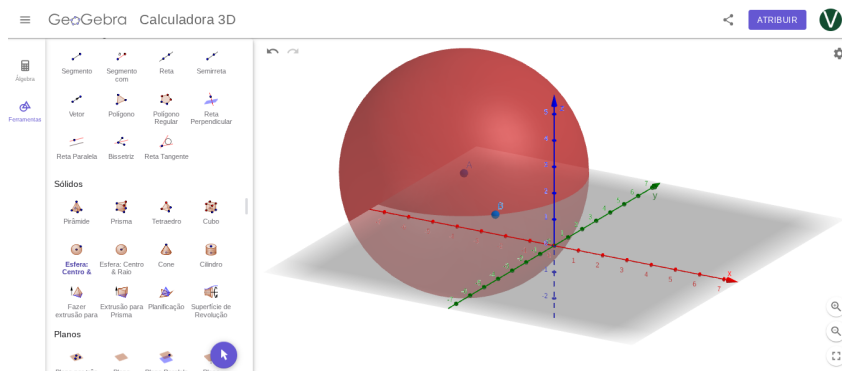
Fonte: Próprio autor

4) Construa a esfera.

- Selecione a ferramenta Esfera (Centro & Ponto) em Ferramentas → Sólidos → Esfera: Centro & Ponto.

- Clique primeiro no ponto A (centro da esfera) e, em seguida, clique no ponto B (que define o raio). A esfera é exibida conforme a Figura 33.

Figura 33 – Esfera de Centro A e raio definido pelo ponto B

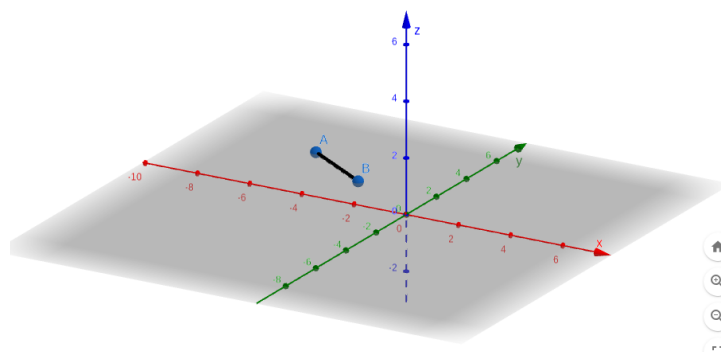


Fonte: Próprio autor

Observação ao professor: A ferramenta Esfera (Centro & Raio), que exige que a medida do raio seja digitada numericamente ou referenciada por um segmento existente (como o segmento \overline{AB}), também é uma alternativa viável para a construção. Recomenda-se a utilização da ferramenta Centro & Ponto neste tutorial por ser mais intuitiva e direta para os alunos que estão iniciando a exploração. Seguem os passos para a construção da esfera com a ferramenta Esfera (Centro & Raio) mantendo as mesmas instruções 1 e 2.

- 1) Acesse o GeoGebra em: <www.geogebra.org/3d>.
- 2) Crie o centro da esfera.
 - Clique em Ferramentas → Ferramentas Básicas → Ponto;
 - Clique em qualquer lugar no espaço para criar o ponto A (o centro da esfera).
- 3) Defina o raio da esfera.
 - Ainda com a ferramenta Ponto, clique em outro local da tela para criar o ponto B, distante de A;
 - O ponto B determinará o comprimento do raio da esfera;
 - Em seguida, na ferramenta Segmento (Ferramentas → Retas e Polígonos → Segmento), selecione A e B para construir o segmento AB, que representará o raio da esfera (Figura 34).

Figura 34 – Segmento AB

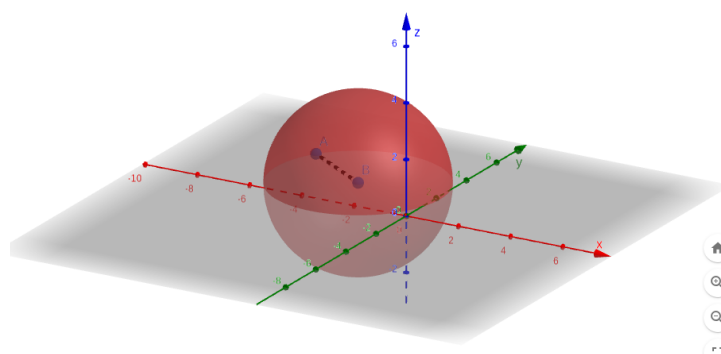


Fonte: Próprio autor

4) Construa a esfera.

- Selecione a ferramenta Esfera (Centro & Raio) em Ferramentas → Sólidos → Esfera: Centro & Raio;
- Clique primeiro no ponto A (centro da esfera). Ao surgir a caixa de texto para a definição do raio, digite AB (certifique-se de usar as letras maiúsculas para A e B, conforme a notação dos pontos). Confirme o valor clicando em OK. A esfera será exibida conforme a Figura 35.

Figura 35 – Esfera de centro A e raio AB



Fonte: Próprio autor

Esta etapa de construção no GeoGebra 3D permite aos estudantes visualizar a esfera e articular seus elementos conceituais (centro e raio) com a representação digital em um ambiente tridimensional. A experiência com essa visualização e manipulação serve de preparação para a próxima seção. A seguir, a Atividade Aplicada utilizará esse raciocínio espacial para abordar a interpretação e a resolução de um problema contextualizado da Geometria Espacial.

5.1.2 Atividade aplicada

A questão envolvendo o sólido esfera foi extraída da prova amarela Exame Nacional do Ensino Médio para pessoas privadas de liberdade do ano de 2010.

Enunciado: Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros dessas esferas seriam conforme a Figura 36.

Figura 36 – Diâmetros das Esferas de Água

 1385 km	Toda água do planeta 1,39 bilhões de km ³
 406 km	Água doce do planeta 35,03 milhões de km ³
 272 km	Água doce subterrânea 10,53 milhões de km ³
 58 km	Água doce superficial 104,59 mil km ³

Fonte: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/2010_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD5.pdf>

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é:

- A) $\frac{1}{343}$
- B) $\frac{1}{49}$
- C) $\frac{1}{7}$
- D) $\frac{29}{136}$
- E) $\frac{136}{203}$

Sugestão: O professor pode sugerir que o aluno resolva a questão algebricamente e também com o GeoGebra. Em seguida, pode solicitar a comparação dos resultados obtidos.

Resolução algébrica: Para calcular o volume de uma esfera, usa-se a expressão

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

A água doce superficial tem 58 km de diâmetro, ou seja, 29 km de raio. Substituindo r por 29 na expressão do volume, obtém-se:

$$V_s = \frac{4}{3}\pi(29)^3.$$

Já a esfera de água doce do planeta tem 406 km de diâmetro, sendo seu raio 203 km e seu volume:

$$V_p = \frac{4}{3}\pi(203)^3.$$

A razão entre os volumes é:

$$R = \frac{\frac{4}{3}\pi(29)^3}{\frac{4}{3}\pi(203)^3} = \frac{(29)^3}{(203)^3} = \left(\frac{29}{203}\right)^3 = \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}.$$

Portanto, a alternativa correta é A.

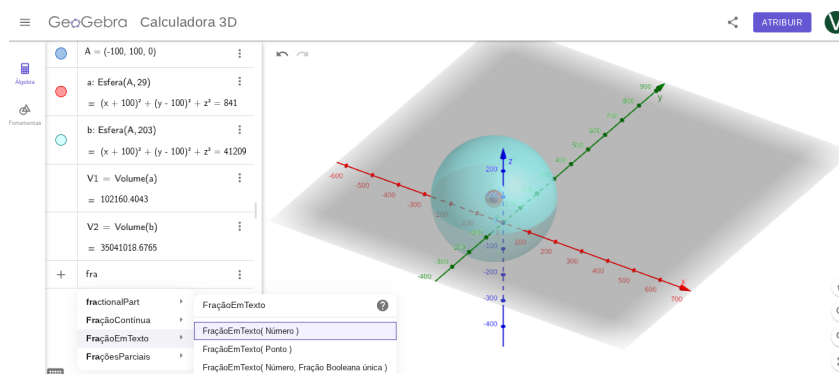
Resolução no GeoGebra: Crie o ponto A (aleatório) na janela de visualização (centro das esferas). Construa as duas esferas: uma representando a água doce superficial ($a = \text{Esfera}(A,29)$) e outra a água doce total do planeta ($b = \text{Esfera}(A,203)$). Redimensione no *zoom* para visualizar as duas esferas.

Para calcular os volumes de cada esfera, utilize os comandos:

$$V1 = \text{Volume}(a) \text{ e } V2 = \text{Volume}(b).$$

Para apresentar o resultado da razão entre os volumes na forma de fração, digite na Janela Álgebra: $R = \text{FraçãoEmTexto}(V1/V2)$ e aperte a tecla Enter. Os passos desse comando e do resultado final são apresentados nas Figuras 37, 38 e 39.

Figura 37 – Ferramenta FraçãoEmTexto (número)



Fonte: Próprio autor

Figura 38 – Comando

The screenshot shows the GeoGebra algebra view with the following commands:

- $A = (-100, 100, 0)$
- $a: \text{Esfera}(A, 29)$
 $= (x + 100)^2 + (y - 100)^2 + z^2 = 8$
- $b: \text{Esfera}(A, 203)$
 $= (x + 100)^2 + (y - 100)^2 + z^2 = 4$
- $V1 = \text{Volume}(a)$
 $= 102160.4043$
- $V2 = \text{Volume}(b)$
 $= 35041018.6765$
- $R = \text{FraçãoEmTexto}\left(\frac{V1}{V2}\right)$

At the bottom, there is a button for "Calculadora GeoGebra 3D".

Fonte: Próprio autor

Figura 39 – Razão entre os volumes das esferas

The screenshot shows the GeoGebra 3D view with two spheres centered at $A = (-100, 100, 0)$. The smaller sphere has a radius of 29 and the larger one has a radius of 203. The volume ratio R is displayed as $R = \frac{1}{343}$. The 3D view includes a coordinate system with x, y, and z axes and a grid.

Fonte: Próprio autor

Dessa forma, pela construção no GeoGebra 3D, conclui-se que a resposta correta é a alternativa A.

Sugestão ao professor: Solicite que os alunos façam *prints* das etapas da construção e registrem as dimensões utilizadas (raio, volume e razão). Vale destacar que, ao construir a esfera no GeoGebra 3D, o software gera automaticamente sua equação canônica na aba Álgebra. Esse conteúdo, entretanto, não é o foco da atividade, que está direcionada à visualização espacial e à comparação entre volumes. Portanto, não há necessidade de explorar ou explicar a equação neste momento.

Exploração da construção: Incentive o raciocínio lógico sobre os conceitos com

perguntas do tipo: O que significa, em termos de razão, afirmar que o volume da esfera maior é 343 vezes o da menor? Se o raio da esfera aumenta, o que acontece com o seu volume?.

Observação ao professor: A questão proposta, ao ser resolvida tanto de forma algébrica quanto com o uso do GeoGebra 3D, oferece uma oportunidade rica para o desenvolvimento do raciocínio matemático, alinhado às teorias de Duval e de Van Hiele. A abordagem com o software permite que o aluno explore o problema em diferentes níveis, seguindo uma progressão natural. No Nível 1 de Van Hiele (Visualização), os alunos reconhecem a forma da esfera, comparando-a intuitivamente com outros sólidos. A visualização das duas esferas no GeoGebra 3D ajuda o aluno a perceber a diferença entre seus tamanhos e a relação entre elas. Essa percepção visual é o ponto de partida para a compreensão do problema. Em seguida, no Nível 2 (Análise), o aluno começa a identificar as propriedades específicas da esfera, como o raio e o volume, e a estabelecer relações entre elas. A manipulação do software, onde se inserem os valores dos raios para obter os volumes, reforça essa compreensão. Paralelamente a essa progressão, a atividade explora a teoria de Duval, promovendo a articulação e conversão entre diferentes registros de representação semiótica, o que é potencializado pelo software. A progressão ocorre em etapas: primeiro, o aluno realiza a conversão do registro simbólico-algébrico (inserção dos raios e da fórmula do volume no GeoGebra 3D) para o registro visual-gráfico (visualização das esferas 3D). Em seguida, a exploração da construção no GeoGebra 3D estimula a conversão do registro visual para o registro simbólico-numérico (comparação das dimensões e o cálculo do volume). Por fim, o questionamento sugerido estimula o aluno a realizar o tratamento dentro do registro visual (por meio da manipulação) e a retornar ao registro da língua natural para a resposta final, consolidando a compreensão do objeto matemático em diferentes registros e aprofundando o aprendizado de forma significativa.

5.2 Atividade 2: Construção de um Cilindro Reto

Objetivo: Explorar as propriedades e relações métricas do cilindro reto por meio de sua construção em um ambiente dinâmico (GeoGebra 3D) para a resolução de problemas envolvendo área e volume.

Contextualização: O professor pode iniciar a aula com uma conversa sobre a presença de objetos cilíndricos no cotidiano, como latas de refrigerante, canos, rolos de papel higiênico e velas, como alguns indicados na Figura 40. É possível, ainda, utilizar um modelo físico (como uma lata vazia) para destacar as características do cilindro: duas bases circulares paralelas e uma superfície lateral que, ao ser planificada, se transforma em um retângulo. O uso de planificações impressas pode ser um recurso interessante. O

professor pode pedir que os alunos tragam embalagens cilíndricas para a sala de aula, explorando suas dimensões e propriedades de forma prática. Essa abordagem reforça a relação entre as formas geométricas e o mundo real, preparando-os para a construção no GeoGebra 3D.

Figura 40 – Objetos que lembram um cilindro



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=IzUYEfb9y3k>

5.2.1 Atividade no GeoGebra

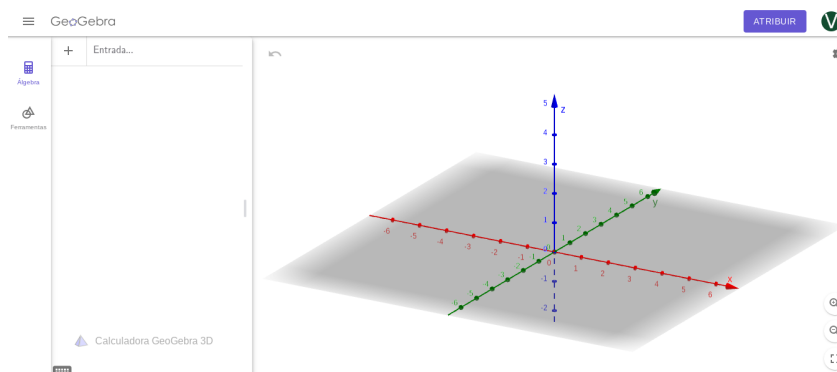
Enunciado: Construa um cilindro reto no GeoGebra 3D.

No GeoGebra 3D, a ferramenta Cilindro permite criar esse sólido a partir de duas bases. Para garantir que o cilindro tenha bases planas horizontais, é necessário atentar-se à posição dos centros dessas bases. Pelo conceito, um cilindro reto é aquele em que o eixo é perpendicular às bases, o que significa que os centros das bases devem ter as mesmas abscissas e ordenadas, diferindo apenas na cota. Dessa forma, o eixo \overline{AB} (que une os centros das bases) fica paralelo ao eixo z , assegurando que o cilindro seja reto. Seguem os passos para a construção no GeoGebra 3D:

1) Acesse o GeoGebra 3D em: <www.geogebra.org/3d>.

A tela inicial é semelhante à Figura 41.

Figura 41 – Tela inicial do GeoGebra 3D



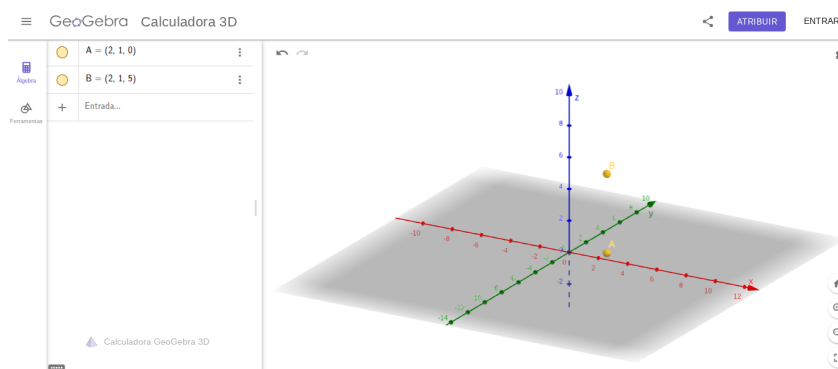
Fonte: Próprio autor

2) Crie os centros da base e do topo do cilindro:

- Clique em Ferramentas → Ferramentas Básicas → Ponto;
- Clique em algum lugar no espaço para criar o ponto A (centro da primeira base);
- Crie o ponto B, alterando apenas a coordenada z . Para isso, observe as coordenadas do ponto A na aba Álgebra e modifique apenas o valor da coordenada z no ponto B, como ilustrado na Figura 42.

Observação: Caso o ponto A tenha alguma coordenada decimal, escreva-a com ponto na Janela Álgebra. Por exemplo: $A = (1.3, 4.6, 8)$.

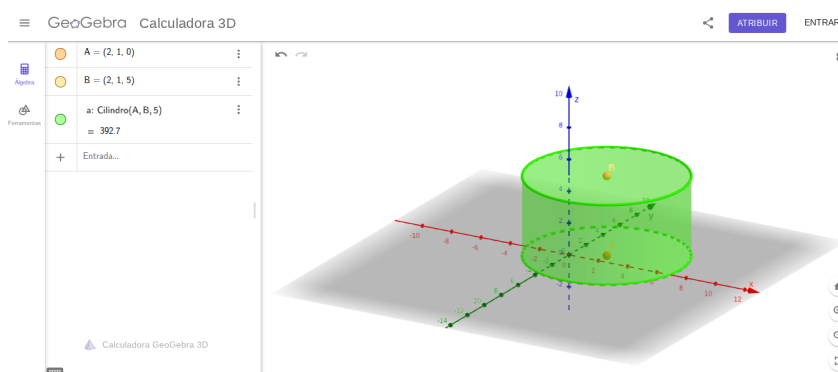
Figura 42 – Pontos A e B: centros das bases do cilindro



Fonte: Próprio autor

3) Selecione a ferramenta Cilindro (Ferramentas → Sólidos → Cilindro). Clique sequencialmente nos pontos A (centro da primeira base) e B (centro da segunda base). Na caixa de texto que surgir, digite o valor numérico do raio (por exemplo, 3 ou a variável do raio, como r). Confirme o valor clicando em OK. O cilindro será exibido conforme a Figura 43.

Figura 43 – Cilindro construído no GeoGebra 3D



Fonte: Próprio autor

Caso seja necessário, ajuste o *zoom*, como orientado na subseção 4.3.1.

Esta etapa de construção do cilindro no GeoGebra 3D permite a visualização e a articulação entre as propriedades do sólido (raio e altura) e sua representação tridimensional. A experiência com a manipulação do objeto estabelece o vínculo necessário com o raciocínio espacial. A seguir, a Atividade Aplicada do ENEM utilizará esse raciocínio e a compreensão dos elementos do cilindro para a interpretação e a resolução de uma situação-problema contextualizada que envolve a aplicação da fórmula de volume.

5.2.2 Atividade aplicada

A questão envolvendo o sólido cilindro foi extraída da prova amarela do Exame Nacional do Ensino Médio do ano de 2015.

Enunciado: Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π . Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

- (A) 0,5
- (B) 1,0
- (C) 2,0
- (D) 3,5
- (E) 8,0

Resolução algébrica: Considerando os dados do problema, tem-se na antiga cisterna: $h = 3 \text{ m}$ e $d = 2 \text{ m}$. Como o raio é a metade do diâmetro, tem-se o raio da antiga cisterna igual a 1 m. Na nova cisterna, tem-se os seguintes dados: $V = 81 \text{ m}^3$ e a altura permanece 3 m. O objetivo do problema é calcular de quanto deve ser o aumento, em metros, do raio da nova cisterna.

O volume do cilindro é dado por:

$$V = \pi r^2 h.$$

Substituindo na expressão os valores conhecidos da nova cisterna: $V = 81$, $h = 3$ e $\pi = 3$, conforme solicitado no enunciado, tem-se:

$$81 = 3 \cdot r^2 \cdot 3. \quad (5.1)$$

Efetuando as multiplicações no 2º membro da equação (5.1), obtém-se:

$$81 = 9r^2.$$

Isolando r^2 , tem-se:

$$r^2 = \frac{81}{9} = 9.$$

Resolvendo a equação polinomial do 2º grau $r^2 = 9$ para r , chega-se:

$$r = \pm 3.$$

Como o raio não pode assumir valor negativo, considera-se apenas $r = 3$.

Assim, o raio da cisterna nova deve ser de 3 metros. Comparando com o raio da cisterna antiga, que era 1 metro, tem-se a diferença de 2 metros.

Portanto, o aumento necessário no raio da cisterna é de 2 metros, correspondendo à alternativa (C).

Resolução no GeoGebra: No campo de entrada do GeoGebra 3D, são definidos os parâmetros iniciais $h = 3$, $d_0 = 2$, $r_0 = 1$ e $V = 81$, que correspondem, respectivamente, à altura, ao diâmetro, ao raio da cisterna antiga e ao volume da cisterna nova. Ambas as cisternas são modeladas como cilindros retos, isto é, sólidos cujos eixos são perpendiculares às bases circulares. Para que o software construa corretamente essa configuração, é necessário que os pontos que definem o eixo do cilindro possuam as mesmas coordenadas nos eixos x e y , variando apenas no eixo z , que representa a altura. Essa escolha assegura que o eixo do cilindro seja vertical, caracterizando-o como reto e preservando a simetria entre as bases. Assumindo os pontos A e B , digita-se na Janela Álgebra:

$$A = (1, 5, 0), \quad B = (1, 5, h).$$

O ponto A representa o centro da base inferior e o ponto B indica o centro da base superior do cilindro. O fato de ambos terem as mesmas coordenadas x e y (1 e 5) assegura que o eixo do cilindro seja vertical, caracterizando um cilindro reto.

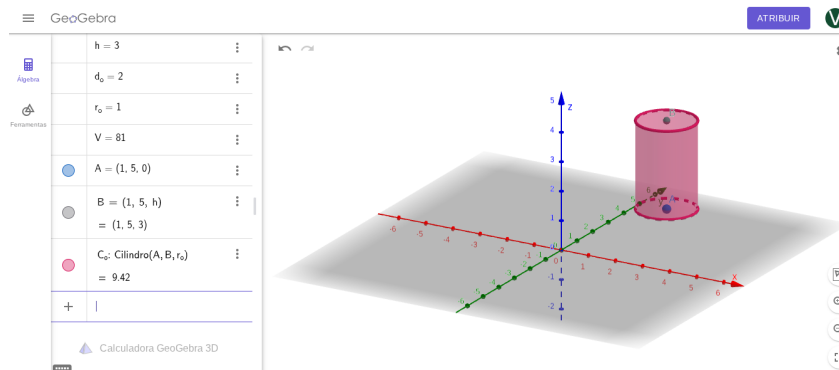
O cilindro que representa a cisterna antiga é construído utilizando o comando Cilindro (ponto, ponto, raio), disponível na barra de ferramentas do GeoGebra 3D. Nesse comando, o primeiro parâmetro corresponde ao ponto central da base inferior (A), o

segundo ao ponto central da base superior (B), e o terceiro ao valor do raio (r_0). A digitação pode ser realizada no campo de entrada conforme segue:

$$C_0 = \text{Cilindro}(A, B, r_0).$$

A Figura 44 apresenta os parâmetros e o cilindro correspondente.

Figura 44 – Cisterna antiga



Fonte: Próprio autor

Para determinar o raio da cisterna nova, utiliza-se a expressão do volume do cilindro:

$$V = \pi r^2 h. \quad (5.2)$$

Contudo, conforme o enunciado do problema, deve-se adotar $\pi = 3$. Assim, a equação (5.2) torna-se:

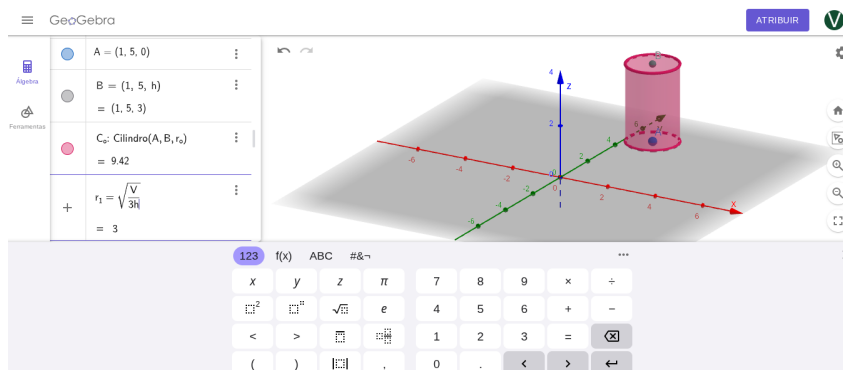
$$V = 3r_1^2 h.$$

Isolando o parâmetro r_1 :

$$r_1 = \pm \sqrt{\frac{V}{3h}}.$$

A digitação da raiz quadrada deve ser realizada por meio do teclado do GeoGebra, localizado no canto inferior esquerdo. Como o raio não pode assumir valor negativo, considera-se apenas o valor positivo. A Figura 45 apresenta o valor obtido.

Figura 45 – Raio da cisterna nova



Fonte: Próprio autor

O cilindro que representa a cisterna nova é construído utilizando os pontos C e D , definidos como: $C = (8, 5, 0)$ e $D = (8, 5, h)$, por meio do comando:

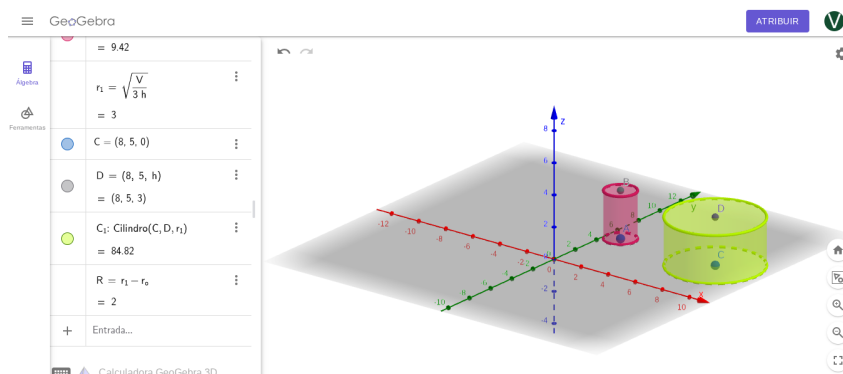
$$C_1 = \text{Cilindro}(C, D, r_1).$$

Cores distintas são atribuídas a cada cilindro para facilitar a diferenciação visual (verifique a subseção 4.3.2). O aumento no raio da cisterna nova para atingir o volume desejado é apresentado pela expressão:

$$R = r_1 - r_o,$$

como verificado na Figura 46.

Figura 46 – Imagem das cisternas e solução da questão



Fonte: Próprio autor

Portanto, a resposta da questão é (C).

Exploração da construção: A construção no GeoGebra 3D possibilita que os alunos visualizem a diferença entre a cisterna antiga e a nova, destacando a relação entre

o raio e o volume do cilindro. Ao representar os dois cilindros lado a lado, torna-se perceptível como o aumento do raio, mantendo a altura constante, impacta diretamente no volume do sólido. Essa visualização contribui para a compreensão de que, em cilindros de mesma altura, o volume cresce proporcionalmente ao quadrado do raio da base.

Para favorecer a compreensão, podem ser propostos os seguintes questionamentos:

1. Se a altura da cisterna fosse duplicada, mas o raio permanecesse igual, como o volume seria alterado?
2. E se o raio da cisterna fosse dobrado, mantendo-se a mesma altura, qual seria a alteração no volume?

Assim, a atividade articula a exploração dinâmica no GeoGebra 3D com o cálculo algébrico, permitindo que os estudantes compreendam de forma integrada a relação entre as dimensões do cilindro e seu volume.

Observação ao professor: A atividade proposta a partir da questão do ENEM 2015 (cisterna) promove a articulação entre diferentes registros de representação, conforme a teoria de Duval. O enunciado do problema mobiliza inicialmente o registro verbal-discursivo ao descrever as dimensões da cisterna original e a necessidade de ampliar seu raio para atingir o volume desejado. A construção no GeoGebra 3D, representando a cisterna antiga e a nova como cilindros retos, corresponde ao registro figural-dinâmico, possibilitando a visualização tridimensional e a comparação direta entre as duas formas. Na sequência, ocorre a transição para o registro algébrico-simbólico por meio da utilização da fórmula do volume do cilindro e da resolução da equação que determina o novo raio.

Sob a ótica dos níveis de Van Hiele, a atividade inicia-se no Nível 1 (Visualização), quando o estudante identifica a figura cilíndrica e reconhece sua estrutura. Avança para o Nível 2 (Análise) ao manipular as grandezas relacionadas (raio, altura e volume), compreendendo como se interligam. Por fim, alcança o Nível 3 (Dedução Informal) ao relacionar a necessidade de aumentar o raio com a expressão matemática do volume do cilindro, reconhecendo que a modificação geométrica decorre diretamente da fórmula. Dessa forma, a atividade favorece a integração entre os registros algébrico e geométrico, fortalecendo a compreensão conceitual e o raciocínio matemático.

5.3 Atividade 3: Construção de um cone circular reto

Objetivo: Explorar as propriedades e relações métricas do cone por meio da construção em um ambiente dinâmico (GeoGebra 3D), utilizando recursos de representação tridimensional para a resolução de problemas envolvendo área e volume.

Contextualização: O professor pode começar a aula explorando objetos do dia a dia em formato de cone, como sorvetes, chapéus de festa, cones de trânsito ou funis (Figura 47). Um modelo físico, como um cone de acrílico, pode ser utilizado para mostrar a base circular, a altura e o vértice. A planificação do cone (um setor circular e um círculo) pode ser trabalhada por meio de recortes, permitindo que os alunos montem o sólido e compreendam sua estrutura. Também é possível pedir que os alunos caminhem pela escola em busca de objetos cônicos ou utilizar imagens, vídeos e cenas de filmes em que esse formato aparece (por exemplo, cones de sorvete ou chapéus).

Figura 47 – Objetos que lembram um cone



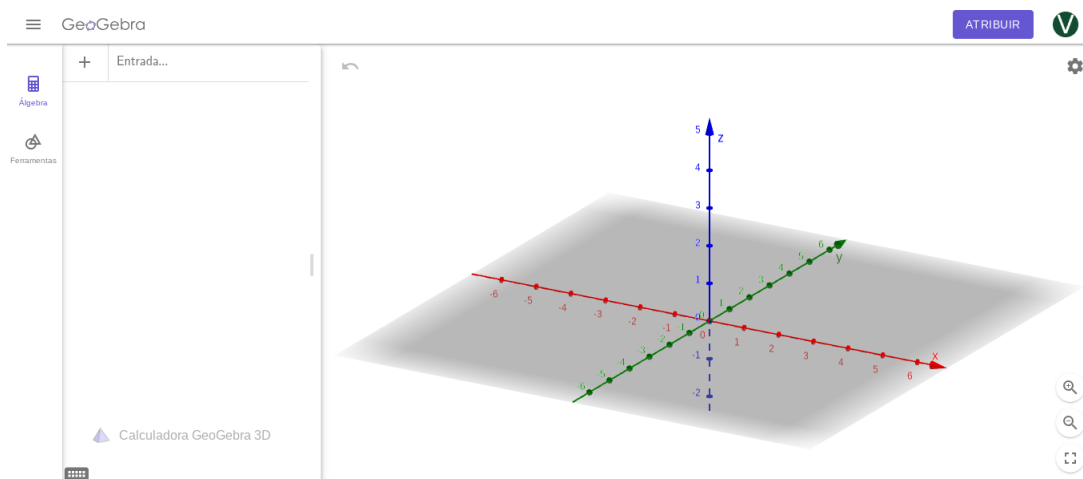
Fonte: <https://in.pinterest.com/pin/719168634240037288/>

5.3.1 Atividade no GeoGebra

Enunciado: Construa um cone circular reto utilizando o GeoGebra 3D.

- 1) Acesse o GeoGebra 3D em: <www.geogebra.org/3d>. A tela inicial está representada na Figura 48.

Figura 48 – Tela inicial do GeoGebra 3D



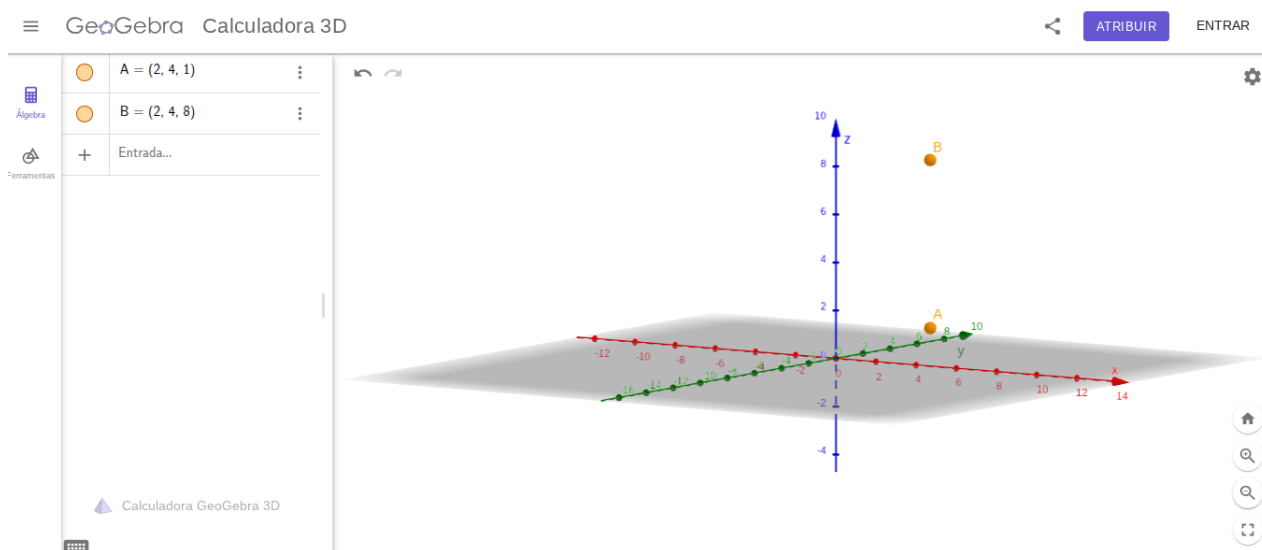
Fonte: Próprio autor

2) Defina o centro da base e o vértice

Para garantir que o cone circular seja reto, o centro da base e o vértice devem estar perfeitamente alinhados verticalmente. Para isso, é necessário que o centro da base (ponto A) e o vértice (ponto B) possuam a mesma abscissa e a mesma ordenada, diferenciando-se apenas na cota (que define a altura).

- Defina o ponto A, que representa o centro da base do cone, com coordenadas arbitrárias. Para isso, clique em Ferramentas → Ferramentas Básicas → Ponto e clique em algum lugar do plano. De maneira alternativa, digite na aba Álgebra o ponto A, por exemplo: $A = (2,4,1)$;
- O vértice, ponto B, deve ser definido de modo que o segmento \overline{AB} seja paralelo ao eixo da cota. Para tal, o vértice deve herdar a abscissa e a ordenada do ponto A e ter a cota aumentada pela altura h desejada. Por exemplo, para uma altura $h = 7$, insira na Janela Álgebra o comando $B = (2,4,8)$. O resultado pode ser verificado na Figura 49.

Figura 49 – Pontos A e B



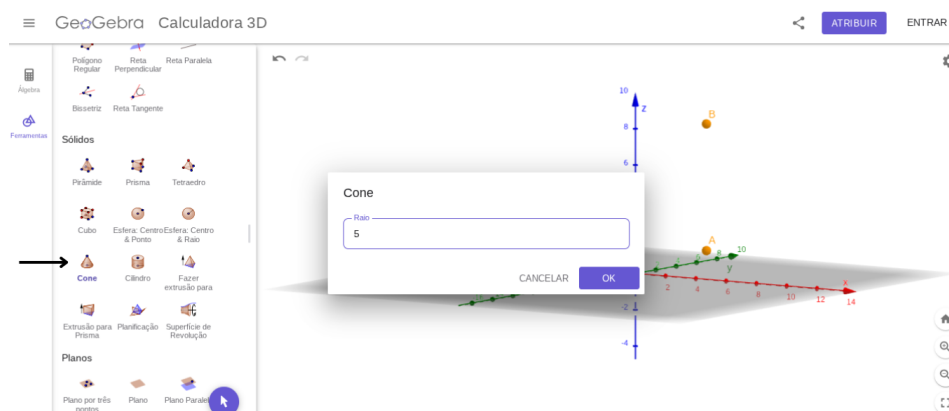
Fonte: Próprio autor

3) Construção do cone

- Utilize a ferramenta Cone na seção Sólidos;
- Selecione o Ponto A (Centro da Base);
- Selecione o Ponto B (Vértice);
- Insira o valor numérico do raio solicitado pelo software, por exemplo, 5.

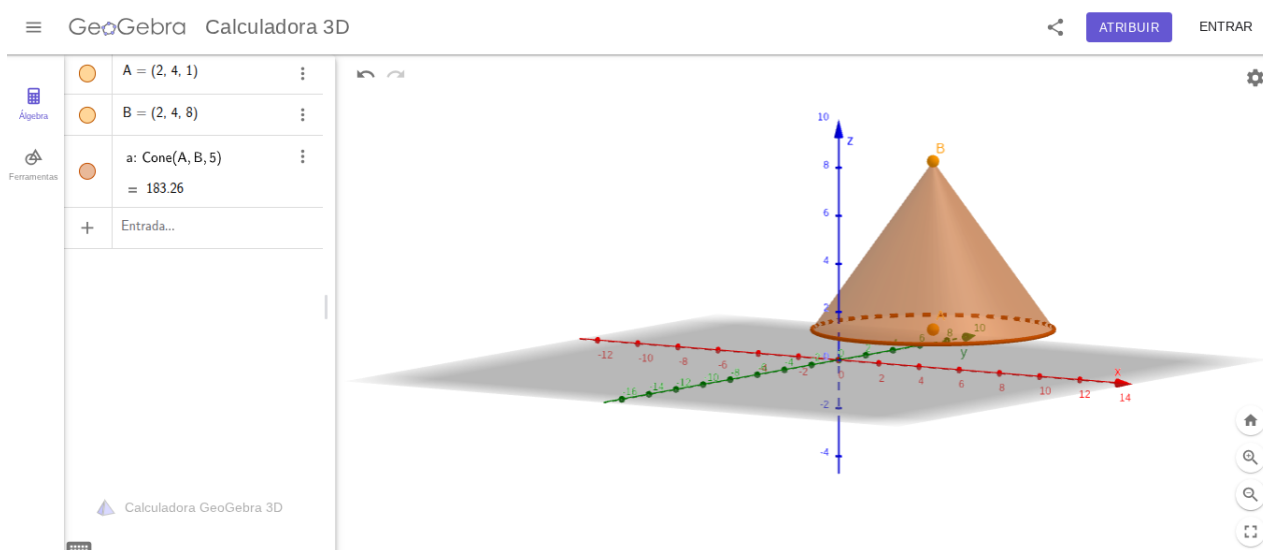
As Figuras 50 e 51 retratam os passos da construção do cone reto.

Figura 50 – Ferramenta Cone



Fonte: Próprio autor

Figura 51 – Construção do Cone Circular Reto



Fonte: Próprio autor

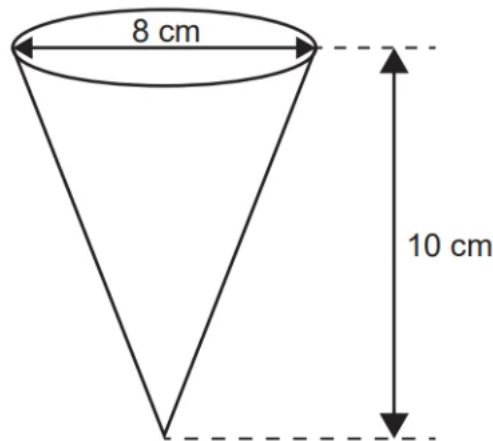
A construção do cone no GeoGebra 3D permite a visualização e a articulação dos elementos conceituais do sólido (raio da base e altura) com sua representação tridimensional. Na sequência, a atividade aplicada do ENEM abordará a interpretação e a resolução de uma situação-problema contextualizada que envolve o cálculo do volume do cone.

5.3.2 Atividade aplicada

A questão envolvendo o sólido cone foi extraída da prova azul do Exame Nacional do Ensino Médio do ano de 2022 (questão 153).

Enunciado: Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a Figura 52.

Figura 52 – Dados da Questão 153 - ENEM 2022



Fonte: ENEM 2022 - prova azul

Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm.

Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

- (A) 1,52
- (B) 3,24
- (C) 3,60
- (D) 6,48
- (E) 7,20

Resolução algébrica:

O volume de um cone circular reto é dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

em que r representa o raio da base e h a altura.

No cone original, tem-se $r_0 = 4$ cm e $h = 10$ cm e o novo cone deve ter o mesmo formato, mas com volume 19% menor, ou seja, 81% do volume inicial. Logo,

$$\frac{81}{100}\pi \cdot r_o^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Considerando que h é constante e o fator π pode ser simplificado, ao substituir $r_0 = 4$, a expressão resulta em:

$$r^2 = \frac{81 \cdot 16}{100}.$$

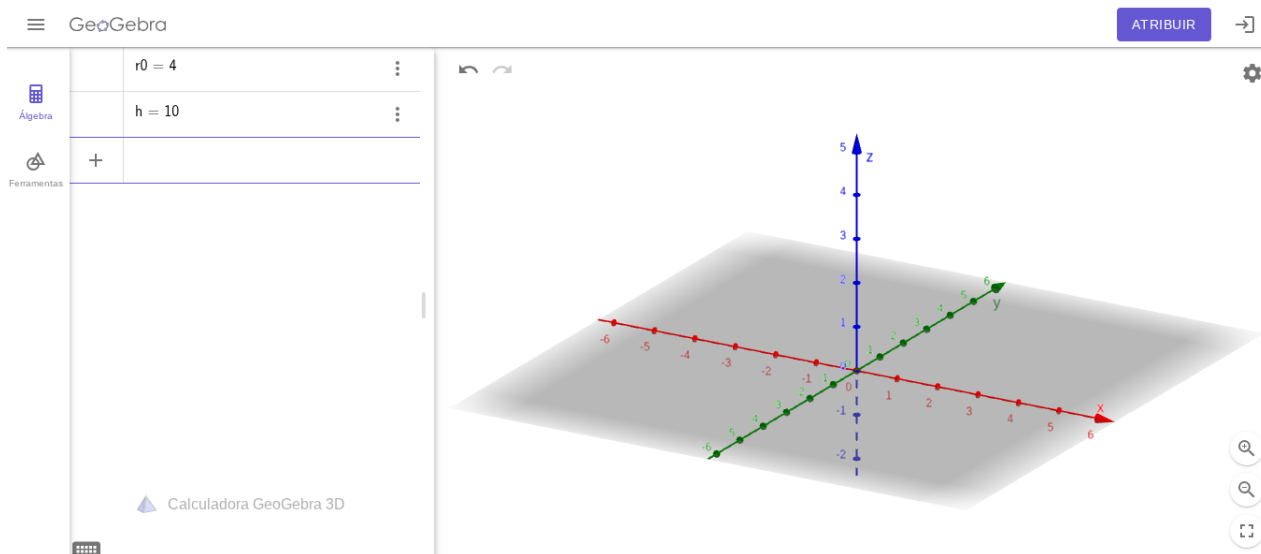
Portanto,

$$r = \pm \sqrt{\frac{9 \cdot 4}{10}} = \pm 3,6 \text{ cm}.$$

Como o raio não pode assumir valor negativo, considera-se apenas $r = 3,6 \text{ cm}$, alternativa C.

Resolução no GeoGebra: Considerando os dados do problema, abra o GeoGebra 3D (acesse o GeoGebra em: <www.geogebra.org/3d>) e defina os parâmetros iniciais no campo de entrada: $r_0 = 4$, $h = 10$. Estes parâmetros correspondem ao raio original da base, a altura do cone e a fração de redução do volume, respectivamente. Na Figura 53 observam-se os parâmetros.

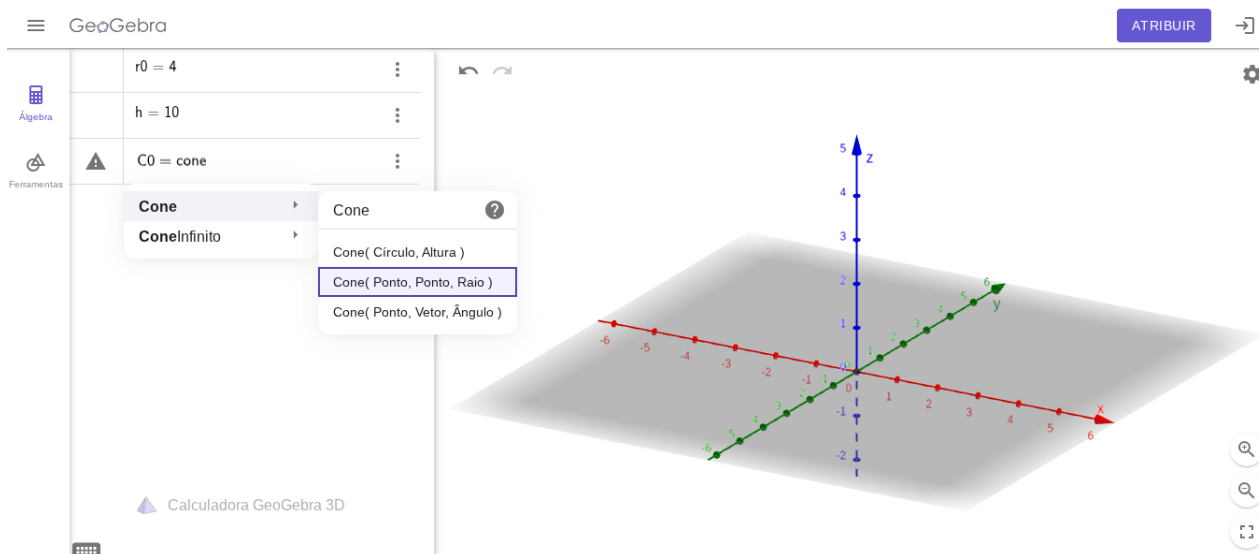
Figura 53 – Parâmetros para construção do cone



Fonte: Próprio autor

Em seguida, construa o cone original (C_0) considerando os pontos $(0, 0, h)$ e $(0, 0, 0)$, e raio igual a r_0 . Essa escolha de pontos facilita a representação do cone reto, porém podem ser arbitrários, desde que as abscissas dos pontos sejam iguais e ordenadas de ambos pontos sejam iguais também. As Figuras 54 e 55 mostram a construção do cone.

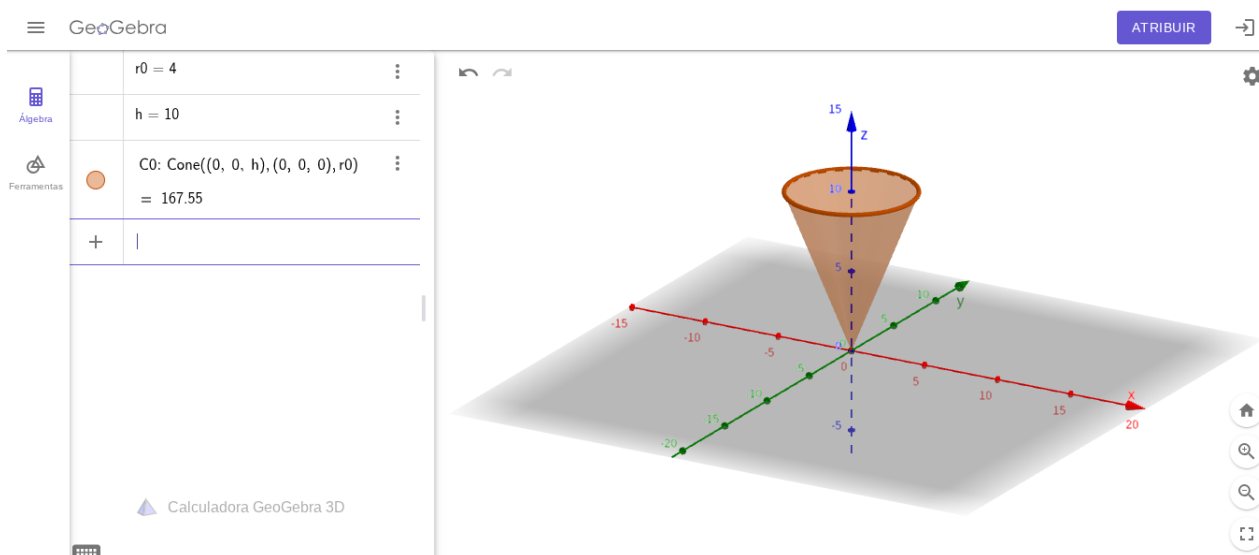
Figura 54 – Comando Cone (Ponto, Ponto, Raio)



Fonte: Próprio autor

É possível observar que foi digitado o comando Cone (Ponto,Ponto,Raio) na aba Álgebra, e não clicado na aba Ferramentas → Sólidos → Cone, já que os pontos A e B não foram criados antecipadamente.

Figura 55 – Cone construído



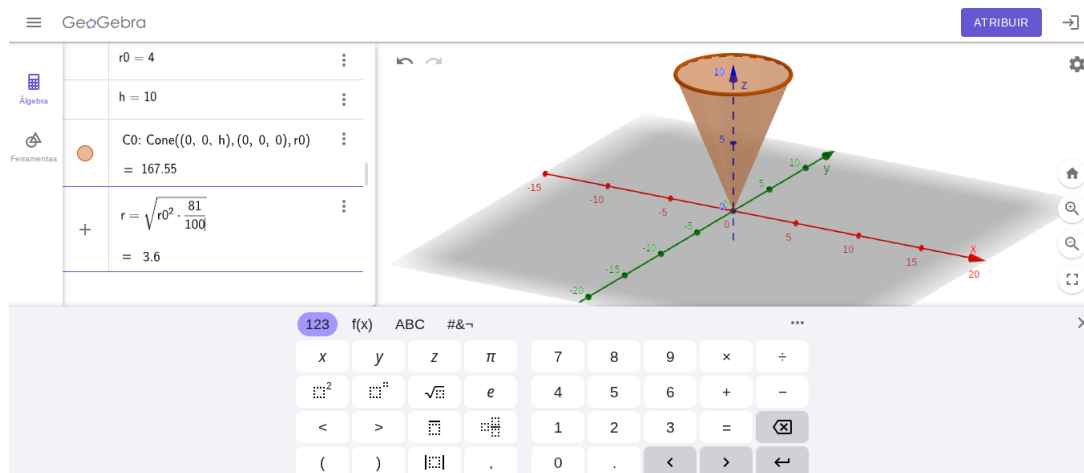
Fonte: Próprio autor

O volume pode ser obtido por meio do comando $V_0 = \text{Volume}(C_0)$. Redimensione no *zoom* para visualizar o cone na tela. Para determinar o novo raio (resposta da questão), com volume 19% menor, ou seja, 81% do volume inicial, utiliza-se a relação entre volumes e raios, dado que a altura permanece constante:

$$r = \pm \sqrt{r_o^2 \cdot \frac{81}{100}}. \quad (5.3)$$

É importante ressaltar a importância da resolução da equação (5.3), passo a passo, a mão, para retomar critérios da Matemática Básica como porcentagem, radiciação e solução de equações. Essa abordagem algébrica garante a consolidação dos conceitos fundamentais antes da exploração tecnológica. Em seguida, para a verificação do resultado e a visualização gráfica no GeoGebra 3D, a inserção da raiz quadrada pode ser realizada utilizando o teclado do GeoGebra (ícone de teclado), que está abaixo dos comandos de entrada, como ilustrado na Figura 56.

Figura 56 – Digitação dos comandos – ENEM 2022



Fonte: Próprio autor

O novo cone (C_n), posicionado à direita do original para fins comparativos, pode ser construído com o mesmo comando anterior Cone(Ponto,Ponto,Raio):

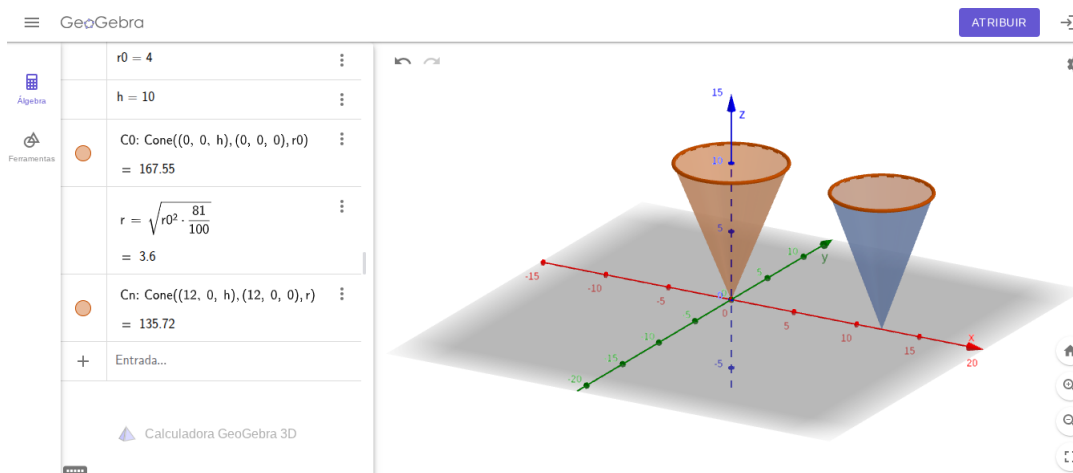
$$C_n = \text{Cone}((12, 0, h), (12, 0, 0), r).$$

Para obter o volume, digite:

$$V_1 = \text{Volume}(C_n)$$

Dessa forma, o software permite visualizar simultaneamente os dois sólidos, comparando seus volumes e dimensões, e confirmando o resultado obtido analiticamente, como na Figura 57.

Figura 57 – Comparação dos cones no GeoGebra 3D – ENEM 2022



Fonte: Próprio autor

Conclui-se que, ao reduzir o volume em 19%, o novo raio da base passa a medir 3,6 cm, alternativa C.

Exploração da construção: A construção no GeoGebra 3D possibilita não apenas a visualização comparativa entre os dois cones, mas também a análise de como a variação do raio impacta diretamente o volume do sólido. Sugere-se que os alunos manipulem o valor percentual dado no problema, alterando a fração $\frac{81}{100}$ com aumento ou redução percentual. Essa exploração evidencia que a redução do raio não ocorre de forma linear em relação à redução do volume, uma vez que o volume depende do quadrado do raio. Além disso, a observação simultânea dos cones, com volumes distintos, mas altura constante, favorece a compreensão da relação entre as grandezas geométricas e permite discussões sobre proporcionalidade e dependência quadrática. Recomenda-se, ao final, que os estudantes registrem *prints* das etapas da construção e descrevam, com o vocabulário técnico adequado, as diferenças identificadas entre os sólidos.

1. Se a redução do volume fosse de apenas 10%, qual seria o novo valor do raio?
2. Mantendo o raio original e reduzindo a altura em 19%, o volume diminuiria na mesma proporção?

Observação ao professor: A atividade proposta a partir da questão do ENEM 2022 explora intensamente a articulação entre diferentes registros de representação, conforme a teoria de Duval. O enunciado do problema já mobiliza o registro verbal-discursivo ao descrever as dimensões do cone original e a necessidade de reduzir seu volume. A construção do cone no software corresponde ao registro figural-dinâmico, permitindo a manipulação visual e a comparação entre o cone original e o cone reduzido. A seguir, a

passagem para o registro algébrico-simbólico ocorre no cálculo da determinação do novo raio.

Do ponto de vista dos níveis do modelo de Van Hiele, a atividade começa no Nível 1 (Visualização), com a identificação do cone a partir de sua forma característica. Avança para o Nível 2 (Análise) quando o estudante manipula as grandezas envolvidas (raio, altura e volume) e observa suas relações. Por fim, atinge o Nível 3 (Dedução Informal) ao relacionar a redução no volume com a expressão da fórmula do cone, compreendendo que o ajuste necessário no raio decorre diretamente dessa relação. Assim, a atividade cria condições para que o aluno conecte os cálculos algébricos à representação geométrica, fortalecendo o raciocínio matemático de forma integrada.

5.4 Atividade 4: Volume da Esfera usando o Princípio de Cavalieri no GeoGebra 3D com RA

Objetivo: Conduzir o aluno à compreensão da fórmula do volume da esfera a partir do Princípio de Cavalieri, utilizando o ambiente tridimensional do GeoGebra 3D. A construção envolve três tipos de sólidos redondos: uma esfera, um cilindro e dois cones, que, combinados, formam o sólido conhecido como anticilepsidra. A visualização é aprimorada pelo controle deslizante, que permite observar as seções planas e verificar que as áreas correspondentes são iguais ao longo da altura, o que confirma o princípio geométrico proposto, enunciado na subseção 3.3.1.

Contextualização: O professor pode iniciar a aula com uma discussão sobre a dificuldade em determinar o volume de corpos redondos, como a esfera, em comparação com sólidos de faces planas, por exemplo, o prisma. A esfera, em particular, não permite uma simples decomposição em formas mais elementares. Essa dificuldade histórica motivou a busca por métodos de comparação. Pode-se introduzir a ideia de áreas de corte ou seções transversais por meio de um exemplo concreto. Para isso, a Figura 58 ilustra duas pilhas de moedas, uma reta e outra oblíqua. O professor pode questionar: Se cortarmos esses dois objetos na mesma altura, a área do corte será a mesma?.

Figura 58 – Ilustração do Princípio de Cavalieri com Pilhas de Moedas



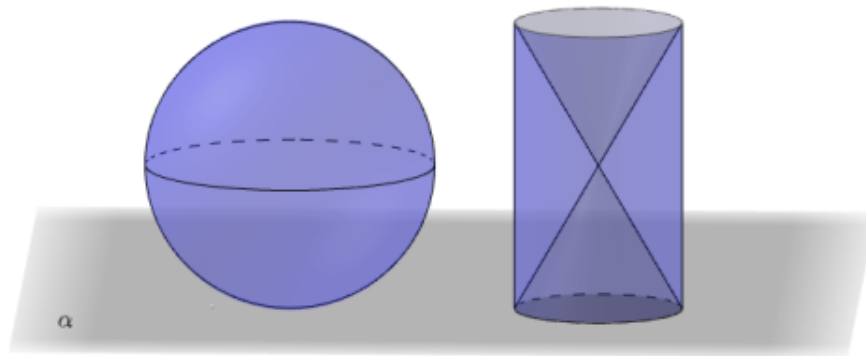
Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm>

Essa exploração prática, mesmo que imaginária ou visualizada pela Figura 58, estabelece a base para o Princípio de Cavalieri. A atividade no GeoGebra 3D visa verificar visual e numericamente essa relação entre a esfera e um sólido auxiliar anticlepsidra, demonstrando a validade do princípio.

Resolução algébrica: Cálculo do volume da esfera de acordo com o Princípio de Cavalieri

Para deduzir a fórmula do volume da esfera (V_{esfera}), comparam-se os volumes da esfera e de uma anticlepsidra ($V_{anticlepsidra}$). Este sólido auxiliar é formado por um cilindro equilátero, cuja altura é igual ao diâmetro da base, do qual se subtraem dois cones. As bases dos cones coincidem com as bases do cilindro, conforme ilustra a Figura 59.

Figura 59 – Esfera, Clepsidra e Anticlepsidra



Fonte: (SAUER; NUNES, 2025)

De acordo com o Princípio de Cavalieri, o volume da esfera é igual ao volume da anticlepsidra:

$$V_{esfera} = V_{anticlepsidra}.$$

Como o sólido anticlepsidra é obtido subtraindo-se dois cones de um cilindro equilátero, tem-se:

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone}. \quad (5.4)$$

Substituindo as expressões dos volumes na expressão (5.4):

$$V_{esfera} = \pi r^2 h_{cilindro} - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h_{cone}.$$

Considerando as relações entre os sólidos: a altura do cilindro é igual ao diâmetro da esfera ($h_{cilindro} = 2r$), e a altura de cada cone é igual ao raio da esfera ($h_{cone} = r$):

$$V_{esfera} = \pi r^2 \cdot (2r) - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r. \quad (5.5)$$

Logo, efetuando as operações e simplificando a equação (5.5), chega-se à fórmula do volume da esfera:

$$V_{esfera} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

5.4.1 Atividade no GeoGebra

Enunciado: Construa uma esfera e uma anticlpsidra com dimensões equivalentes para a visualização do Princípio de Cavalieri no GeoGebra 3D.

Previamente, digite na Janela Álgebra o raio $r = 2$ da esfera e altura $h = 4$ do cilindro.

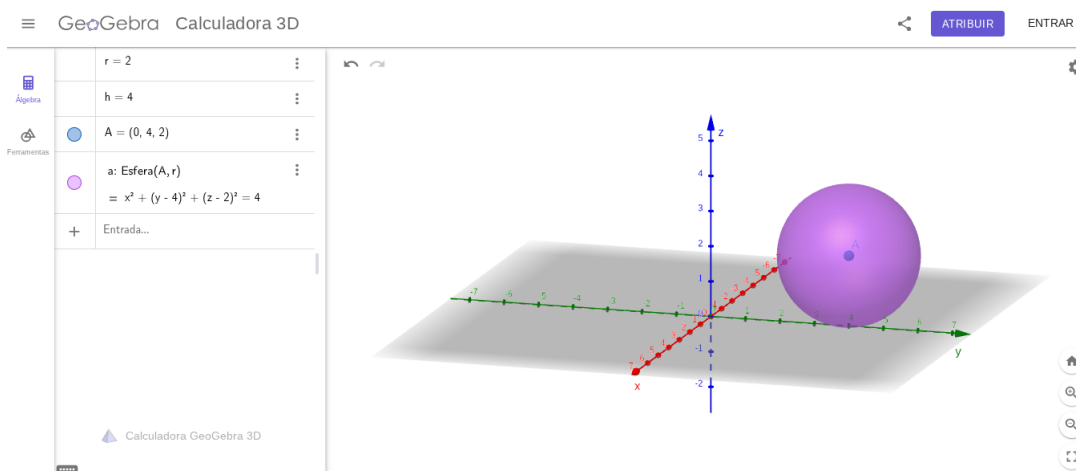
Observação: Para trocar as cores e configurar a visualização dos sólidos no GeoGebra 3D, utilize a descrição na subseção 4.3.2.

Construção da esfera: Abra o GeoGebra 3D (acessível em: <www.geogebra.org/3d>) e crie uma esfera com centro no ponto $A = (0, 4, 2)$ e raio $r = 2$. Para isso, digite no campo de entrada o comando:

$$A = (0, 4, 2), \quad a = \text{Esfera}(A, r).$$

A esfera é o primeiro sólido da construção e representa o objeto de estudo cujo volume se deseja compreender. O comando $\text{Esfera}(\text{Centro}, \text{Raio})$ cria uma esfera de centro $A = (0, 4, 2)$ e raio $r = 2$. Redimensione a tela para visualizar melhor. A Figura 60 ilustra o resultado inicial.

Figura 60 – Esfera criada no GeoGebra 3D



Fonte: Próprio autor

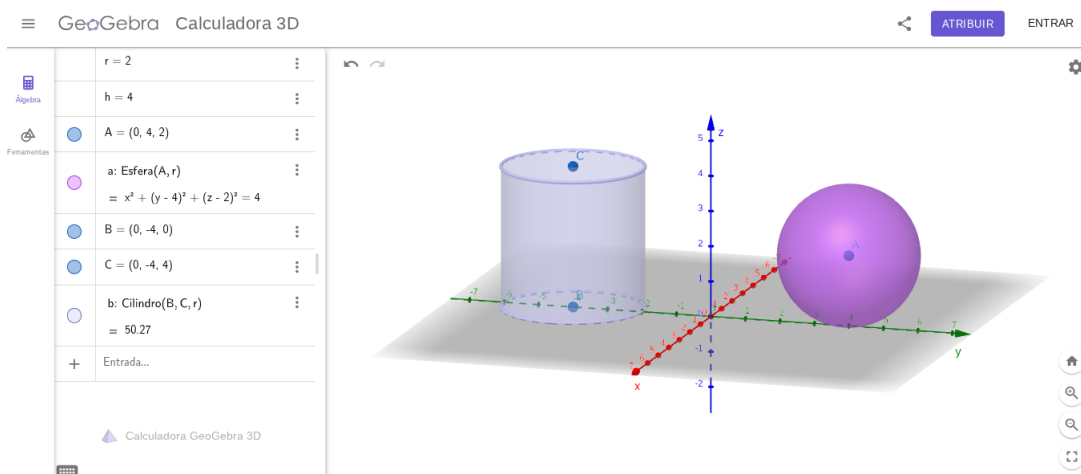
Construção do cilindro: Em seguida, cria-se o cilindro que servirá de base para

a construção da anticlépsida. Definem-se os pontos $B = (0, -4, 0)$ e $C = (0, -4, 4)$ (digite-os na aba Álgebra), que correspondem aos centros das bases inferior e superior, respectivamente. Esses pontos têm as mesmas abscissas e ordenadas, variando apenas a cota, o que garante que o cilindro seja reto (isto é, com eixo perpendicular às bases).

Digite o comando: $b = \text{Cilindro}(B, C, r)$.

O parâmetro r representa o raio, igual ao da esfera, e o comando $\text{Cilindro}(\text{Ponto}, \text{Ponto}, \text{Raio})$ gera o sólido, conforme mostrado na Figura 61.

Figura 61 – Cilindro criado com raio 2



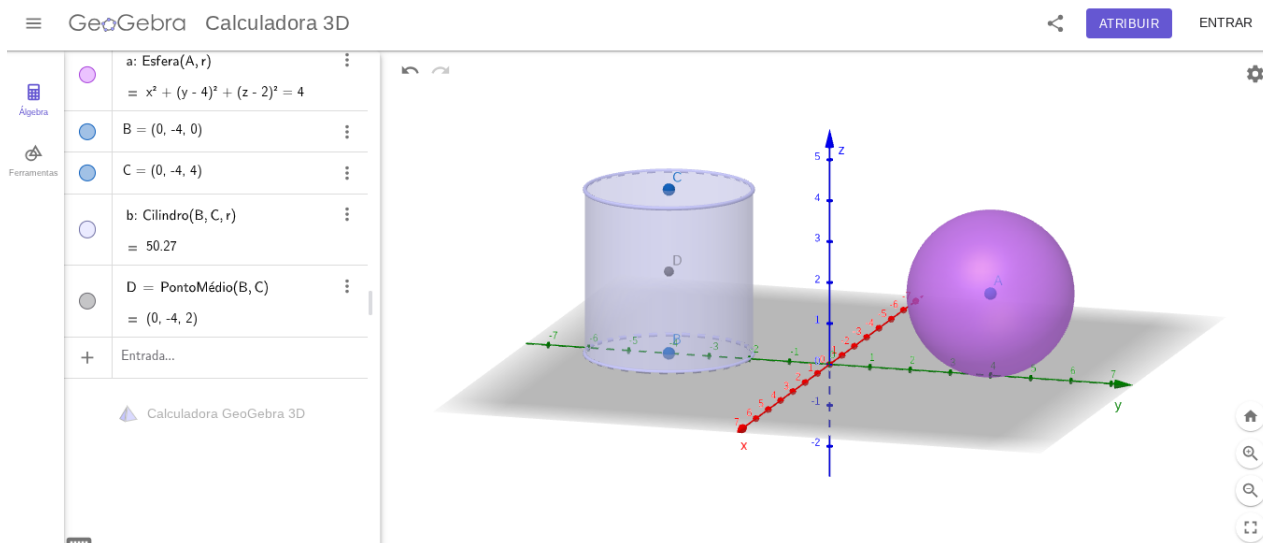
Fonte: Próprio autor

Para auxiliar na construção dos cones, determine o ponto médio do eixo do cilindro, ou seja, o segmento de reta que une o centro das duas bases (B e C). Digite:

$$D = \text{PontoMédio}(B, C).$$

A ferramenta do Ponto Médio cria o ponto D que é o centro da anticlépsida, equidistante das duas bases do cilindro (Figura 62).

Figura 62 – Ponto médio do eixo do cilindro



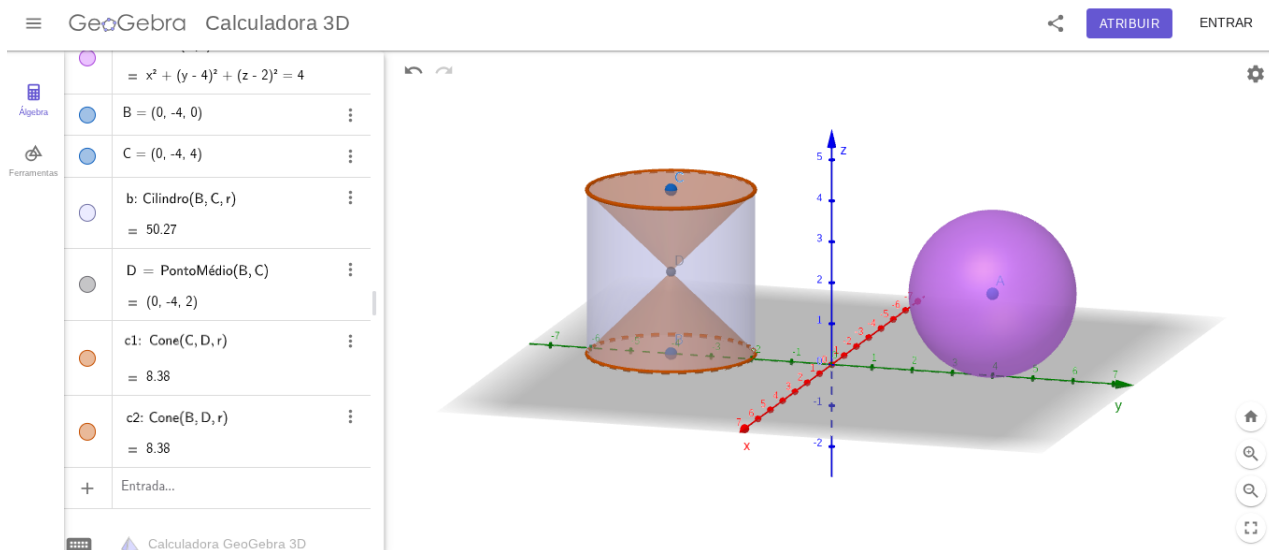
Fonte: Próprio autor

Construção dos cones: O sólido conhecido como anticlépsidra é obtido retirando-se do cilindro dois cones de mesmo raio e altura igual à metade da altura do cilindro. Para isso, utilizam-se os comandos:

$$c_1 = \text{Cone}(C, D, r), \quad c_2 = \text{Cone}(B, D, r).$$

O comando $\text{Cone}(\text{Ponto}, \text{Ponto}, \text{Raio})$, criado na digitação de c_1 e c_2 , tem parâmetros ponto central da base, vértice e raio da base. O primeiro cone (c_1) é construído a partir da base superior do cilindro, e o segundo (c_2) a partir da base inferior. Esses comandos criam dois sólidos perfeitamente ajustados ao cilindro, formando a estrutura da anticlépsidra (Figura 63). Recomenda-se aplicar uma cor distinta aos cones para facilitar a identificação durante as comparações visuais.

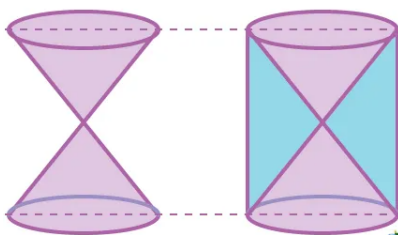
Figura 63 – Cones superior e inferior inseridos no Cilindro



Fonte: Próprio autor

A Figura 64 mostra a Clepsidra (em roxo) e a Anticlepsidra (em azul).

Figura 64 – Anticlepsidra



Fonte: <<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm>>

Controle deslizante e plano de interseção: para investigar as seções planas dos sólidos e aplicar o Princípio de Cavalieri, cria-se um controle deslizante que permite movimentar um plano horizontal ao longo da altura dos sólidos. Digite no campo de entrada do GeoGebra 3D:

$$L = \text{ControleDeslizante}(0, 4, 0.01).$$

Cria-se, assim, um controle com valor mínimo 0, máximo 4 e incremento de 0.01, possibilitando a variação contínua da altura.

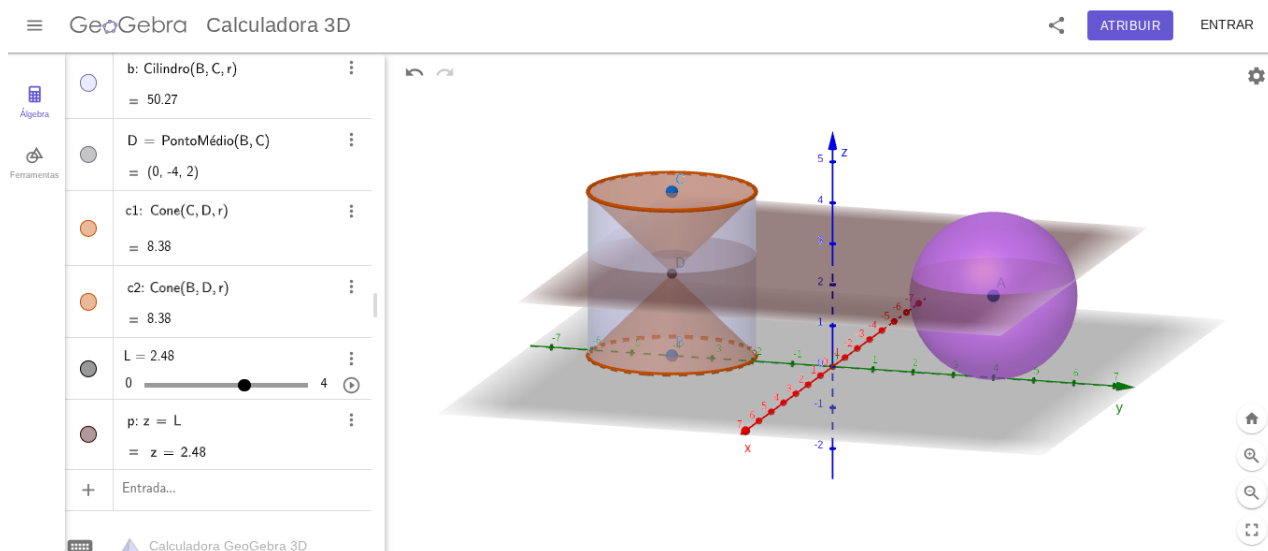
A instrução a seguir direciona a criação de uma ferramenta essencial para a demonstração do Princípio de Cavalieri no GeoGebra 3D. O comando cria o objeto p , que é um plano horizontal paralelo ao plano base (XY). A variável L representa o Controle Deslizante criado, permitindo que o plano se mova dinamicamente pela altura dos sólidos, de $z = 0$ a $z = 4$.

Crie um plano paralelo ao plano xy com equação $z = L$, digitando:

$$p : z = L.$$

Esse plano intercepta a esfera, o cilindro e os cones simultaneamente, conforme mostra a Figura 65.

Figura 65 – Plano de interseção $z = L$



Fonte: Próprio autor

Interseções e áreas das seções planas: O próximo passo consiste em identificar as curvas de interseção entre o plano p e cada sólido. Para isso, utilize o comando `InterseçãoGeométrica(plano,quádrica)`, digitando na aba Álgebra os comandos (a cada comando digitado, clique na tecla Enter para o próximo):

$$ia = \text{InterseçãoGeométrica}(p, a);$$

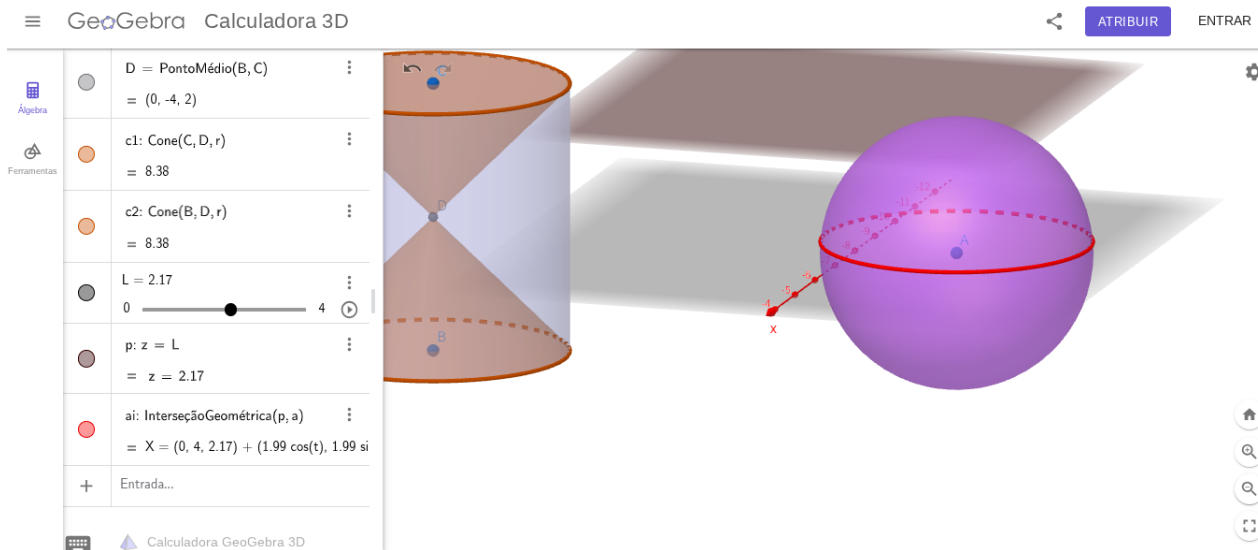
$$ib = \text{InterseçãoGeométrica}(p, b);$$

$$ic1 = \text{InterseçãoGeométrica}(p, c1);$$

$$ic2 = \text{InterseçãoGeométrica}(p, c2).$$

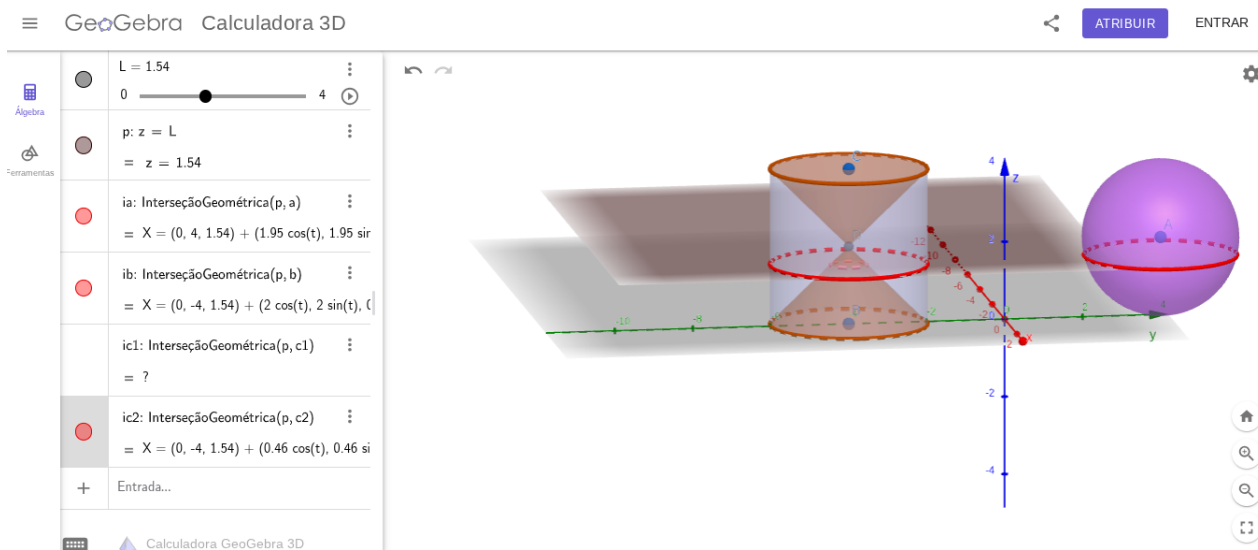
Essas interseções representam, respectivamente, o círculo seccionado da esfera, o do cilindro e das bases dos cones. Com o plano em diferentes alturas, é possível observar que as áreas se mantêm equivalentes, demonstrando o Princípio de Cavalieri. As Figuras 66 e 67 mostram essas interseções com cores vermelhas para facilitar a análise visual.

Figura 66 – Interseção da esfera com o plano xy



Fonte: Próprio autor

Figura 67 – Interseção do cilindro com o plano xy



Fonte: Próprio autor

Área da seção circular: Com o objetivo de verificar a igualdade das áreas no GeoGebra 3D, foi criada uma seção plana $p : z = L$ que intercepta simultaneamente a esfera e a anticilindro. A partir dos sólidos previamente construídos, esfera, cilindro e os dois cones, utiliza-se o comando $\text{InterseçãoGeométrica}(\text{plano}, \text{quádrica})$ para obter as quatro curvas correspondentes: uma seção circular na esfera, uma no cilindro e duas nos cones. Agora, aplica-se o comando $\text{Área}()$ a cada uma delas, nomeando-as como Areaa , Areab , Areac1 e Areac2 .

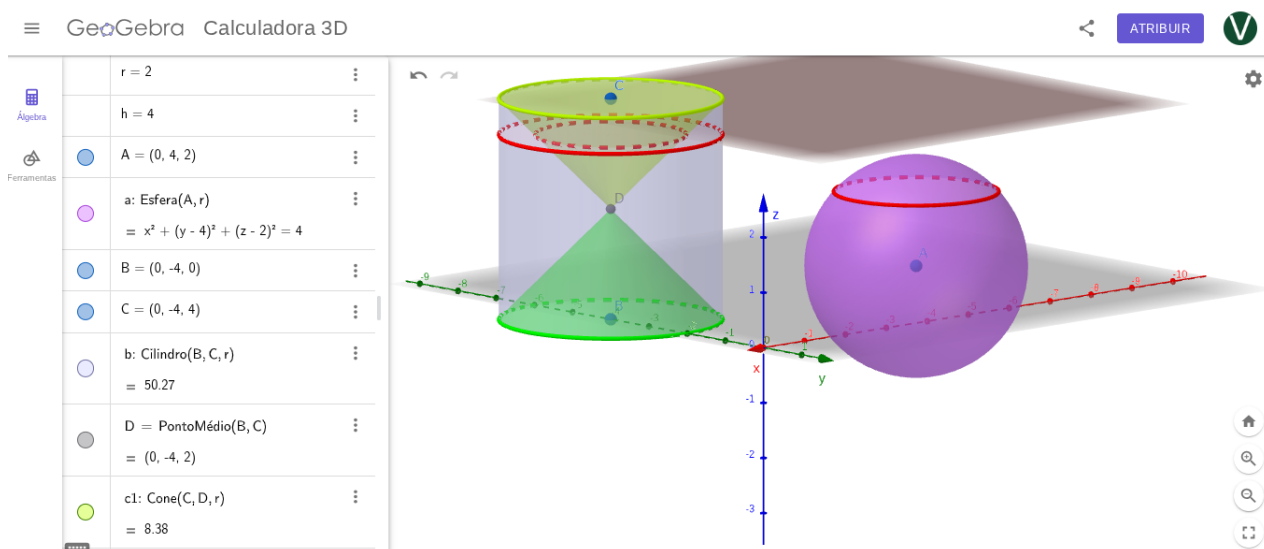
$$\begin{aligned} \text{Areaa} &= \text{Area}(ia); \\ \text{Areab} &= \text{Area}(ib); \\ \text{Areac1} &= \text{Area}(ic1); \\ \text{Areac2} &= \text{Area}(ic2). \end{aligned}$$

Para confirmar que as áreas das seções da esfera e da anticlpsidra são iguais, calcula-se no GeoGebra 3D as diferenças das áreas do cone superior e inferior do cilindro (conforme segue o Princípio de Cavalieri). No GeoGebra 3D digita-se:

$$\begin{aligned} \text{Areacoroa1} &= \text{Areab} - \text{Areac1}; \\ \text{Areacoroa2} &= \text{Areab} - \text{Areac2}. \end{aligned}$$

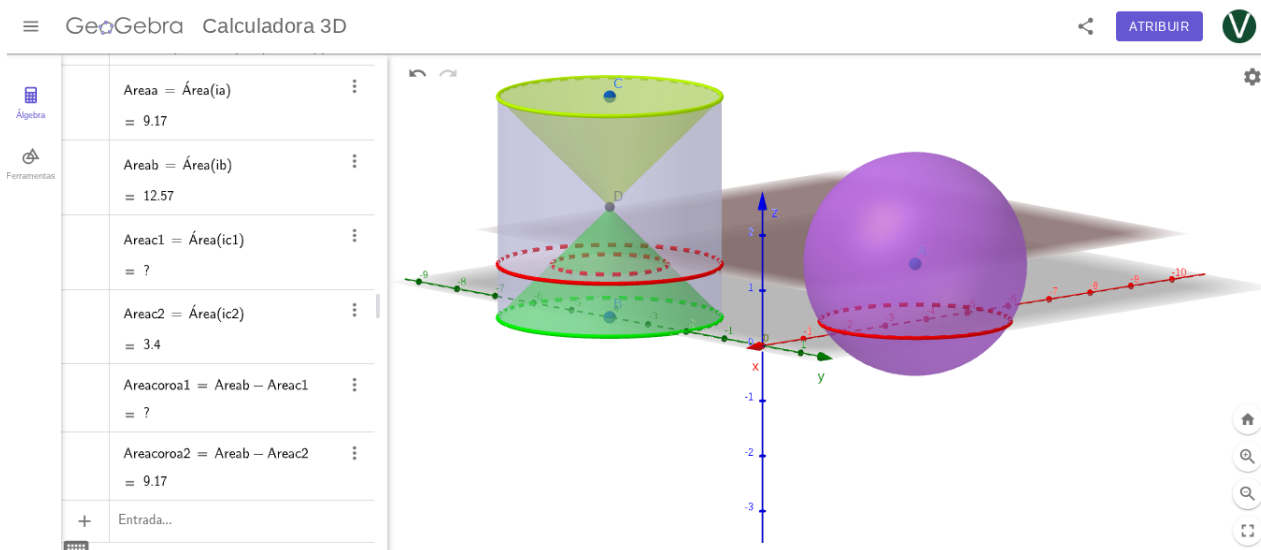
As Figuras 68 e 69 fornecem dois exemplos distintos da equivalência de áreas de seção transversal. A Figura 68 ilustra a comparação das áreas de corte na região do cone superior, e a Figura 69 demonstra a mesma igualdade na região do cone inferior. Em ambos os casos, observa-se que a área da seção da esfera é igual à área da seção do sólido auxiliar, anticlpsidra, (cilindro subtraído dos dois cones), o que é visualmente e numericamente confirmado pelos cálculos apresentados no GeoGebra 3D, validando a aplicação do Princípio de Cavalieri.

Figura 68 – Área da seção esférica com a seção do cone superior



Fonte: Próprio autor

Figura 69 – Área da seção esférica com a seção do cone inferior



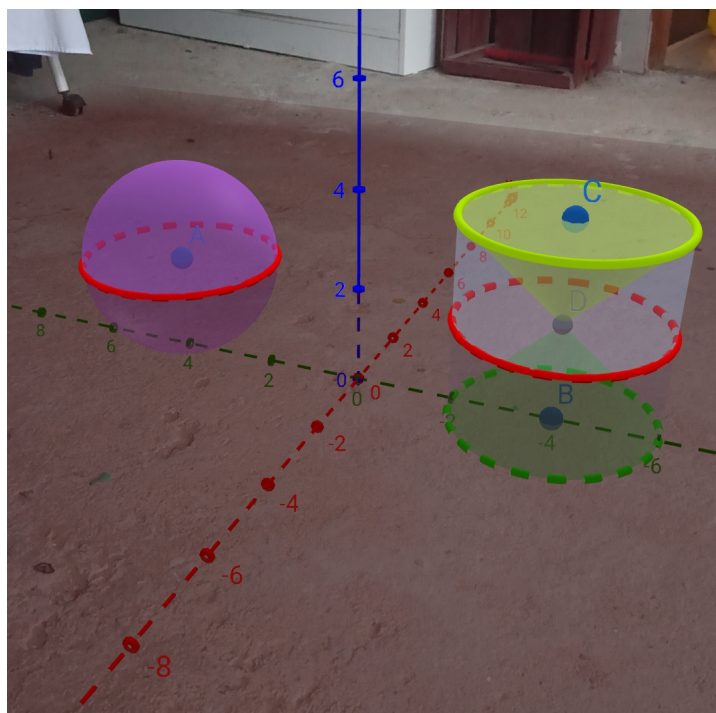
Fonte: Próprio autor

Análise final e volume da esfera: Ao variar a posição do plano p , observa-se que a diferença entre a área do cilindro e a do cone correspondente é sempre igual à área da seção da esfera.

Essa coincidência numérica das áreas, confirmada visual e computacionalmente no GeoGebra 3D, evidencia o Princípio de Cavalieri, segundo o qual, se dois sólidos possuem a mesma altura e seções transversais de áreas iguais em todos os planos paralelos às bases, então possuem volumes iguais. Assim, a experiência no GeoGebra 3D permite compreender concretamente que a área das seções circulares da esfera é idêntica à da anticlepsidra em qualquer altura, validando geometricamente o Princípio de Cavalieri.

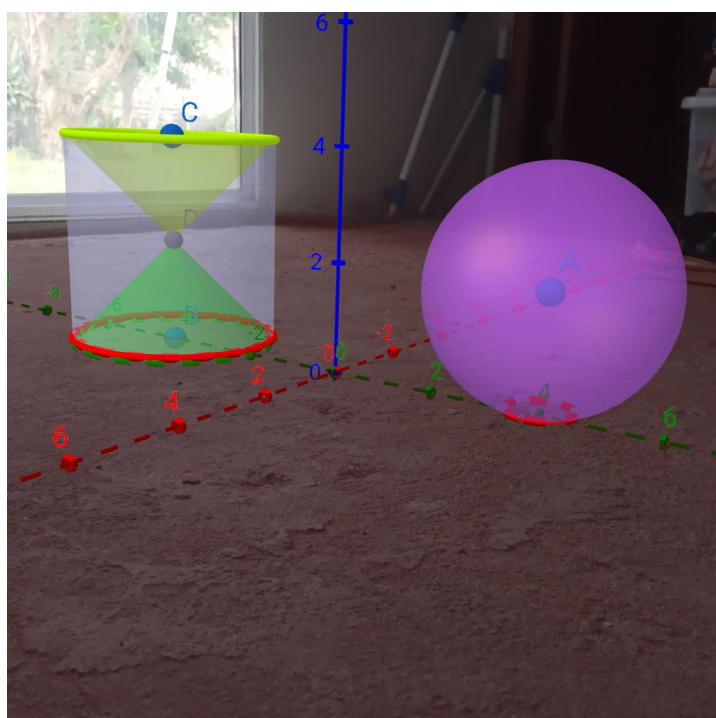
Visualização em realidade aumentada: Após a finalização da construção, salve o arquivo online e abra-o no aplicativo Calculadora GeoGebra 3D no celular. Com o comando AR, posicione o modelo no ambiente físico e observe a sobreposição dos sólidos em escala real. Essa experiência torna o conceito mais concreto, permitindo ao aluno explorar e compreender a geometria dos sólidos sob diferentes perspectivas espaciais (Figuras 70 e 71).

Figura 70 – Visualização do modelo no GeoGebra 3D (celular)



Fonte: Próprio autor

Figura 71 – Realidade Aumentada com a anticlepsidra e esfera



Fonte: Próprio autor

A visualização dos modelos da esfera e da anticlepsidra por meio da Realidade Aumentada (RA) ilustra a principal vantagem desta tecnologia: a superação da limitação

da representação bidimensional. Ao sobrepor o modelo 3D ao ambiente físico do estudante, a RA potencializa o nível de visualização, permitindo a interação, a rotação e a inspeção do objeto em seu próprio espaço. Este recurso é fundamental para a construção do raciocínio espacial e a apreensão dos elementos conceituais dos sólidos de revolução.

Na sequência, a Atividade Aplicada de Vestibular abordará a interpretação e a análise de uma questão de natureza conceitual que envolve a definição e as condições do Princípio de Cavalieri.

5.4.2 Atividade aplicada

A questão sobre o Princípio de Cavalieri foi extraída do vestibular da Universidade Estadual de Feira do Santana (UEFS) no ano 2012/1, caderno 2, questão 49.

Enunciado: O italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1589 – 1647), que foi discípulo de Galileu, publicou, em 1635, sua Teoria do Indivisível, contendo o que hoje é conhecido como “princípio de Cavalieri”. Entretanto, sua teoria, que permitia que se encontrassem rapidamente com exatidão a área e o volume de muitas figuras geométricas, foi duramente criticada na época. Segundo seus críticos, a teoria não se mostrava suficientemente embasada. Em 1647, Cavalieri publicou a obra *Exercitationes geometricae sex*, na qual apresentou sua teoria de maneira mais clara. Esse livro transformou-se em fonte importante para os matemáticos do século XVII. (E CÁLCULO..., 2011). De acordo com o Princípio de Cavalieri, pode-se afirmar que, dados sólidos geométricos P_1 e P_2 ,

- A - se esses sólidos possuem secções meridianas de mesma área, então P_1 e P_2 têm volumes iguais.
- B - se esses sólidos possuem bases de mesma área e alturas de mesma medida, então P_1 e P_2 têm volumes iguais.
- C - se esses sólidos possuem áreas laterais iguais e alturas de mesma medida, então os sólidos P_1 e P_2 têm volumes iguais.
- D - se esses sólidos possuem áreas totais iguais e alturas de mesma medida, então P_1 e P_2 têm volumes iguais.
- E - e um plano α , se qualquer plano β , paralelo a α , que intercepta um dos sólidos, também intercepta o outro e determina, nesses sólidos, secções de mesma área, então P_1 e P_2 têm volumes iguais.

Resolução teórica: O Princípio de Cavalieri é um teorema em geometria que estabelece a seguinte condição de igualdade volumétrica, baseada nos dados da questão do vestibular da UEFS:

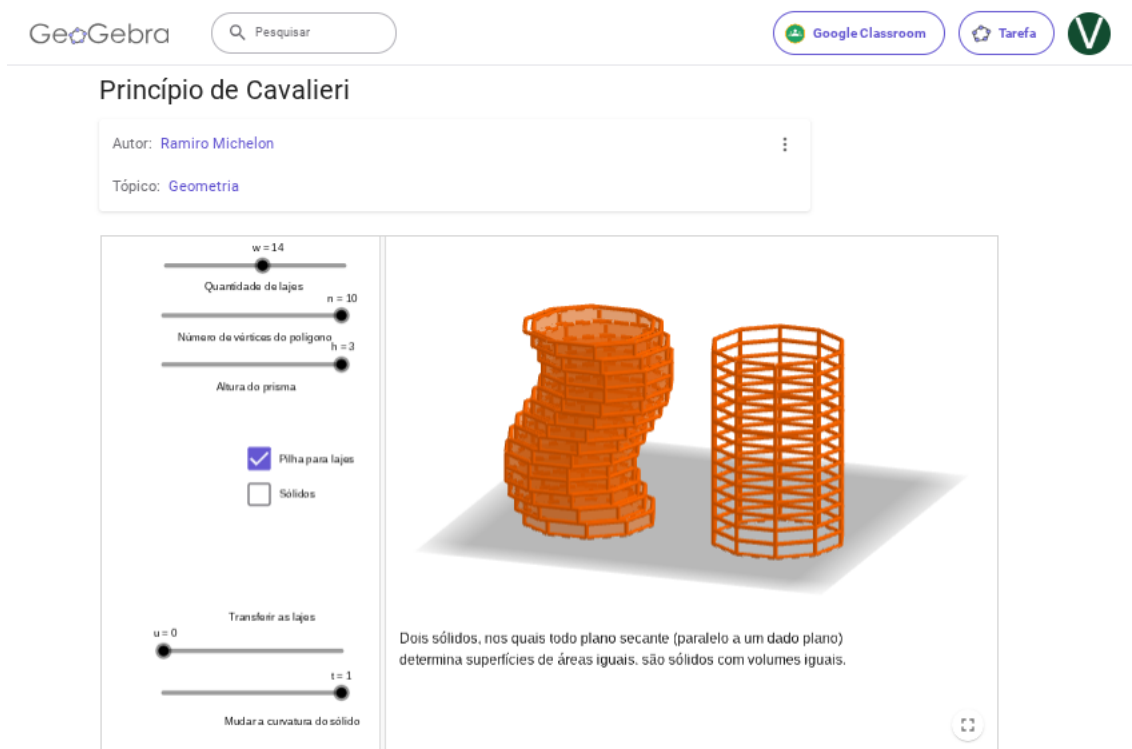
Dados dois sólidos P_1 e P_2 situados entre dois planos paralelos α e β , se todo plano γ paralelo a α que intercepta um dos sólidos também intercepta o outro, e as áreas das seções planas resultantes são sempre iguais, então os volumes dos dois sólidos são iguais ($V_{P_1} = V_{P_2}$).

As alternativas A, B, C e D estão incorretas porque sugerem que a igualdade de volume depende de outras medidas (área total, perímetro de seção, área lateral ou área da base). O volume de sólidos não depende da área total ou da forma da base, mas sim da relação entre as áreas de suas seções transversais em toda a altura.

A alternativa E é a única que descreve precisamente essa condição fundamental.

Resolução no GeoGebra: O recurso interativo disponível em <<https://www.geogebra.org/m/k7acqad5>> pode ser utilizado como uma demonstração visual do Princípio de Cavalieri. Ao manipular o controle deslizante do recurso, o aluno observa um gráfico dinâmico que compara a área de duas seções transversais em diferentes alturas. Essa validação visual e gráfica confirma a premissa da Alternativa E, que estabelece que a igualdade de volumes é garantida quando planos paralelos determinam seções de mesma área nos sólidos. A Figura 72 ilustra uma imagem do site.

Figura 72 – Princípio de Cavalieri



Fonte: <<https://www.geogebra.org/m/k7acqad5>>

Exploração da construção: A exploração desta questão conceitual deve ser conduzida no ambiente interativo do GeoGebra 3D (<<https://www.geogebra.org/m/k7acqad5>>),

com o objetivo de visualizar a definição do Princípio de Cavalieri.

Esta exploração evidencia que a igualdade volumétrica não depende da forma externa dos sólidos, mas sim da relação entre as áreas de suas seções em todas as alturas, validando a condição estabelecida na Alternativa E. A atividade é, portanto, uma tradução figural e dinâmica da definição formal do princípio.

Observação ao professor: A atividade proposta a partir da questão 49 da UEFS 2012/1 explora intensamente a articulação entre diferentes registros de representação, conforme a teoria de Duval. O enunciado já mobiliza o registro verbal-discursivo ao exigir a definição formal do Princípio de Cavalieri. A seguir, o recurso interativo (<<https://www.geogebra.org/m/k7acqad5>>) corresponde ao registro figural-dinâmico e gráfico, permitindo a visualização da condição estabelecida na alternativa correta (E): a igualdade das áreas das seções transversais.

Essas representações são complementares. É na articulação entre o texto da definição formal (registro verbal) e a verificação gráfica da igualdade de áreas (registro figural/gráfico) que ocorre a compreensão conceitual. O uso do GeoGebra 3D potencializa o desenvolvimento da Noésis (a apreensão do conceito), ao fornecer múltiplas formas de representar e validar o Princípio de Cavalieri.

Do ponto de vista dos níveis do modelo de Van Hiele, a atividade estimula o avanço do aluno do nível 1 (visualização) para o nível 2 (análise). O aluno deixa de reconhecer os sólidos apenas por sua forma global para compreender as propriedades que garantem a igualdade de volumes. A questão atua diretamente na formação do raciocínio dedutivo, pois exige a identificação precisa do Princípio de Cavalieri, um elemento essencial para o aprendizado significativo da geometria de sólidos.

No próximo capítulo, apresentam-se as considerações finais.

6 Considerações Finais

O presente estudo foi elaborado para contribuir com o ensino-aprendizagem da Geometria Espacial, integrando teoria, prática e tecnologia, com ênfase no GeoGebra 3D como ferramenta didática. Com oito atividades propostas, acompanhadas de roteiros pedagógicos detalhados, elas guiam os professores e alunos na exploração de sólidos geométricos e proporcionam uma vivência pedagógica significativa por meio da Realidade Aumentada (RA).

O ponto alto da proposta reside na abordagem, que conecta um princípio geométrico fundamental, como o Princípio de Cavalieri, à sua validação visual em um software dinâmico e à sua aplicação em problemas de alta complexidade. Dessa forma, o trabalho estabelece o ciclo completo do raciocínio matemático, partindo da fundamentação geométrica para o cálculo formal.

Do ponto de vista teórico, as construções no GeoGebra 3D possibilitaram a articulação de diferentes registros de representação semiótica (figural, algébrico, simbólico), incentivando a transição do concreto para o abstrato, conforme argumentado por Duval. É na Noésis, estimulada pela interatividade do software, que o aluno avança nos níveis do modelo de Van Hiele, partindo da percepção global (nível visual) para a análise das propriedades e relações métricas (nível analítico).

A pesquisa também revelou a extrema relevância da análise dos livros didáticos no contexto do PNL (Programa Nacional do Livro Didático). Para além do campo teórico, os critérios de análise estabelecidos nesta dissertação, sintetizados na estruturação de tabelas comparativas de registros de representação, serviram como instrumento prático e decisivo no processo de escolha das coleções didáticas adotadas na unidade escolar em que atuou. Essa transposição da pesquisa para a prática pedagógica permitiu um olhar técnico diferenciado, superando escolhas baseadas apenas na aparência do material ou em tradições editoriais. A aplicação da metodologia de análise deste trabalho possibilitou identificar, de forma objetiva, qual coleção oferecia o suporte necessário para a conversão de registros e a visualização dinâmica, garantindo que o material selecionado estivesse verdadeiramente alinhado às necessidades de desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos. Assim, a pesquisa demonstrou sua eficácia imediata como ferramenta de avaliação qualitativa de materiais de ensino.

Em suma, este trabalho oferece uma contribuição que vai além do simples uso de tecnologia, propondo uma abordagem que fortalece o raciocínio dedutivo e a compreensão espacial. Buscou-se criar materiais acessíveis e de qualidade, que sirvam como estímulo para que os docentes utilizem as tecnologias digitais como aliadas na mediação

do conhecimento matemático.

Como desdobramento deste trabalho, propõe-se a criação de atividades a serem realizadas no GeoGebra 3D para construção e análise de outros sólidos, como prismas e pirâmides, que permitam a exploração de relações métricas e volumétricas por meio da interação contínua com seus elementos.

Referências

- ALEXANDRE, E. *Realidade Aumentada e Geogebra: Novo Aplicativo para iPad, iPhone*. 2017. Blog Prof. Edigley Alexandre. Disponível em: <<https://www.prof-edigleyalexandre.com/2017/09/realidade-aumentada-geogebra-novo-aplicativo-para-ipad-iphone.html>>. Citado na página 62.
- AMORIM, S. L. G.; MENDES, I. A. A utilização integrada da realidade aumentada no software geogebra por meio de dispositivos móveis para a aprendizagem de geometria espacial no ensino médio. *VIDYA*, v. 44, n. 1, p. 211–230, 2024. ISSN 2764-6705. Disponível em: <<https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4771>>. Citado na página 21.
- ARAÚJO, F. S. D. *Tecnologias na Educação Matemática: o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino da geometria espacial no Ensino Médio*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)) — Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), São Luís, 2023. Disponível em: <<https://repositorio.uema.br/handle/123456789/3178>>. Citado na página 20.
- AVANZI, D. L. *A lousa digital e o GeoGebra: uma proposta para o ensino de geometria espacial*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)) — Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR, 2024. Disponível em: <<https://repositorio.uema.br/handle/123456789/3178>>. Citado na página 20.
- AZUMA, R. T. A survey of augmented reality. *Presence: Teleoperators & Virtual Environments*, v. 6, n. 4, p. 355–385, 1997. Citado na página 56.
- BANDEIRA, W. A. d. A. e. S. *O uso do software GeoGebra 3D e a teoria de resposta ao item no processo de ensino aprendizagem de geometria espacial*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)) — Universidade Federal de Alagoas (UFAL), Maceió, AL, 2017. Disponível em: <https://sca.profmt-sbm.org.br/profmt_tcc.php?id1=3744&id2=150091987>. Citado na página 21.
- BARROS, D. R. d.; BARROS, M. d. S.; BISCONCIM, R. R. Um olhar sobre a perspectiva das teorias de van hiele e registros de representação semiótica em tópicos de geometria plana e espacial em livros didáticos para os anos finais do ensino fundamental. *Olhar de Professor*, v. 28, n. 1, p. 1–19, 2025. Disponível em: <<https://revistas.uepg.br/index.php/olhardeprofessor/article/view/23560>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 25.
- BARTHÉLEMY, G. *2500 Anos de Matemática: A Evolução das Ideias*. 1. ed. Lisboa: Instituto Piaget, 2003. 140 p. Citado na página 31.
- BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUZA, P. R. C. d. *Prisma Matemática*. São Paulo: FTD, 2016. Coleção de Matemática para o Ensino Médio aprovada no PNLD. Citado na página 28.

- BRASIL, M. da E. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- CARDOSO, R. G. S. et al. Uso da realidade aumentada em auxílio à educação. In: *Computer on the Beach 2014 - Artigos Completos*. São Luís - MA: [s.n.], 2014. p. 330–339. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 56.
- CHAVANTE, E.; PRESTES, D. *Quadrante: Matemática*. São Paulo: Edições SM, 2016. Coleção de Matemática para o Ensino Médio aprovada no PNL D. Citado na página 28.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996. Citado na página 27.
- DANTAS, E. H. *Uso da Realidade Aumentada no Ensino da Geometria Espacial*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, PB, 2018. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=4247&id2=160190252>. Citado na página 21.
- DIAS, A. d. S. *Desenvolvendo o Pensamento Geométrico Espacial com Auxílio do GeoGebra e de uma Impressora 3D*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2025. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171057560>. Citado na página 20.
- DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, v. 5, n. 5, p. 37–65, 1993. Lido em tradução para o Português. Título original em Francês. Disponível em: <https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo do pensamento matemático. In: BORBA, R. M. M. (Ed.). *Pluralidade de representações na aprendizagem matemática*. Florianópolis: Editora da UFSC, 2003. p. 11–42. Citado na página 23.
- DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. 1. ed. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2009. 120 p. Fascículo I. ISBN 9788578610357. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 27.
- DUVAL, R. *Semióse e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagem intelectual*. São Paulo: Livraria da Física, 2023. Citado na página 18.
- EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: Editora Unesp, 2009. Tradução completa a partir do grego; páginas 81–84. ISBN 9788571399358. Citado na página 30.
- FONTES, G. F. *Utilização Lúdica do Software GeoGebra 3D Como Ferramenta Facilitadora no Ensino e Aprendizagem de Geometria Espacial*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)) — Universidade Estadual do Norte Fluminense (UENF), Campos dos Goytacazes, RJ, 2018. Disponível

em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=4510&id2=160461345>. Citado na página 21.

FRANÇA, J. S. *Uma Proposta Didática da Realidade Aumentada no Ensino da Geometria Espacial*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, PA, 2015. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=2007&id2=81433>. Citado na página 20.

FREITAS, J. F. d.; FRACALOSSO, J. C. T. Escolha do livro didático: critérios a serem considerados. In: *Anais do II Seminário de Educação: Desafios e Possibilidades*. Guaçuí, ES: FACELI, 2013. Disponível em: <https://www.faceli.edu.br/admin/arquivos/arquivos_20_12_2016_013222/arquivos_01.pdf>. Citado na página 28.

GeoGebra. *GeoGebra 3D Calculator: Getting Started with Augmented Reality*. 2025. Acesso em: 15 out. 2025. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/zbnhkhxu>>. Citado 4 vezes nas páginas 47, 48, 55 e 58.

HENRIQUES, A.; PONTE, J. P. da. As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 26, n. 42B, p. 621–646, 2012. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/bolema/a/Nq9JbdGvGky6nxbQHgtFpkn/?lang=pt>>. Citado na página 20.

HILBERT, D. *Fundamentos da Geometria*. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003. Citado na página 30.

IEZZI, G. et al. *Matemática: Ciência e Aplicações*. São Paulo: Saraiva, 2016. Coleção de Matemática para o Ensino Médio aprovada no PNL D. Citado na página 28.

JUNIOR, J. A. d. O. *Visualização geométrica nos processos de ensino e aprendizagem de geometria espacial: uma proposta utilizando o GeoGebra*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Colégio Pedro II – PROFMAT, Rio de Janeiro, RJ, 2025. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=8243&id2=171058055>. Citado na página 21.

KALEFF, A. M. M. R.; HENRIQUES, A. d. S.; REI, L. G. F. Desenvolvimento do pensamento geométrico – o modelo de van hiele. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, v. 9, n. 10, p. 1–19, 1994. Disponível em: <<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10671>>. Citado 3 vezes nas páginas 20, 25 e 26.

LEME, C. B. *O uso do GeoGebra no ensino da geometria espacial para alunos do 2º ano do Ensino Médio*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), Ponta Grossa, 2017. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=3787&id2=160620036>. Citado na página 21.

LEONARDO, F. M. d. *Conexões com a Matemática*. São Paulo: Moderna, 2016. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. Coleção de Matemática para o Ensino Médio aprovada no PNL D. Citado na página 28.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, E. W. A. C. de O. *A Matemática do Ensino Médio. V. 2.* 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Coleção do Professor de Matemática. ISBN 978-8585818111. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

LIMA, R. M. L. *O Uso da Realidade Aumentada no Ensino de Prismas: Um Referencial Didático para Professores do Ensino Médio.* Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – PROFMAT, Acará, PA, 2021. Disponível em: <<https://sca.profmtat-sbm.org.br/â“/60>>. Citado na página 21.

LORENZATO, S. d. O. Por que não ensinar geometria? *A Educação Matemática em Revista*, v. 3, n. 4, p. 3–12, 1995. Disponível em: <<https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/1311>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 22 e 27.

MARQUES, M. M.; BAIRRAL, M. A.; PEREIRA, T. L. M. Da matemática experimental à ferramenta didática: o papel do geogebra na formação de professores da educação básica. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, v. 12, n. 2, p. 203–216, 2023. Disponível em: <<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9198286.pdf>>. Citado na página 44.

MARTINS, F. N. *Uma Proposta de Abordagem da Planificação de Poliedros no Ensino Básico utilizando o Recurso de Realidade Aumentada do GeoGebra.* Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal do Rio de Janeiro – PROFMAT, Rio de Janeiro, RJ, 2021. Disponível em: <<https://sca.profmtat-sbm.org.br/â“/58>>. Citado na página 21.

MOURA, L. K. J. d.; KRINDGES, A.; WIELEWSKI, G. D. As vantagens do modelo de van hiele no ensino de geometria. *Educação Matemática em Revista - RS (EMR-RS)*, v. 1, n. 16, p. 48–61, 2015. Disponível em: <<https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/2355/1768>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 25.

NASSER, L.; SAT’ANNA, N. F. P. *Geometria segundo a teoria de Van Hiele.* 2. ed. Rio de Janeiro: Projeto Fundação/Instituto de Matemática, UFRJ, 2010. Citado na página 18.

NETO, A. C. M. *Geometria.* Rio de Janeiro: SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), 2013. (Coleção Professor de Matemática). Citado na página 34.

OLIVEIRA, O. G. d. *O uso do GeoGebra 3D com Realidade Aumentada no Ensino de Geometria Espacial.* Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)) — Universidade Estadual de Ponta Grossa(UEPG), Ponta Grossa, 2021. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=6457&id2=171054057>. Citado na página 21.

OLIVEIRA, P. N. d. *Criação de um Aplicativo de Realidade Aumentada para o Ensino da Geometria.* Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Estadual de Campinas – PROFMAT, Campinas, SP, 2019. Disponível em: <<https://sca.profmtat-sbm.org.br/â“/62>>. Citado na página 21.

- PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. *Zetetiké*, Faculdade de Educação - UNICAMP, v. 4, n. 2, p. 45–63, 1996. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646739>>. Citado na página 20.
- PAIXÃO, A. A. S. *A utilização de materiais concretos e do software GeoGebra no Ensino aprendizagem da geometria espacial*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)) — Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), Teófilo Otoni, MG, 2019. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=5523&id2=170960638>. Citado na página 21.
- PAVANELLO, R. M. Por que ensinar/aprender geometria? In: *Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática*. São Paulo: [s.n.], 2004. Citado na página 31.
- PELIZZARI, A. et al. Teoria da aprendizagem significativa segundo ausubel. *Revista PEC: Cadernos de Estudos e Pesquisas do CEP*, Colégio Bom Jesus, Curitiba, v. 2, n. 1, p. 37–42, Julho 2002. Publicado entre Jul. 2001 e Jul. 2002. Citado na página 20.
- SANTOS, F. C. d. *Realidade Aumentada Aplicada ao Ensino de Geometria Espacial: um desafio para a Educação Matemática*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal do Pará – PROFMAT, Belém, PA, 2015. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=1683&id2=79376>. Citado na página 21.
- SANTOS, S. J. P. d. *Possibilidades de Ensino com Realidade Virtual e Realidade Aumentada*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal de São João del-Rei – PROFMAT, Divinópolis, MG, 2021. Disponível em: <<https://sca.profmtat-sbm.org.br/ã/59>>. Citado na página 21.
- SAUER, L. d. O.; NUNES, G. *Medição em Geometria Euclidiana: comprimento, área e volume*. Pelotas: Editora da UFPel, 2025. E-book. ISBN 978-85-60696-58-1. Disponível em: <<https://guaiaca.ufpel.edu.br/handle/prefix/15428>>. Citado 4 vezes nas páginas 37, 38, 40 e 89.
- SILVA, E.; SIQUEIRA, J. Geometria espacial no ensino médio: análise de um livro didático de matemática. In: *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2016. p. 1–11. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7648_4094_ID.pdf>. Citado na página 27.
- SILVA, E. O. *Geometria Espacial na EJA: uma proposta de ensino à luz do Modelo Van Hiele com auxílio do Software de Geometria Dinâmica GeoGebra*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)) — Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia, 2021. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=6132&id2=171055348>. Citado na página 20.
- SILVA, F. O. d. *Utilização de Dispositivos Móveis e Recursos de Realidade Aumentada nas Aulas de Matemática para Elucidação dos Sólidos de Platão*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) —

Universidade Estadual Paulista – PROFMAT, Araraquara, SP, 2017. Disponível em: <<https://sca.profmtat-sbm.org.br/ãË/65>>. Citado na página 21.

SILVA, J. M. d.; SOUZA, J. B. d.; CASTELLUBER, A. Geogebra, um facilitador para o ensino de funções. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 13, n. 3, p. 169–186, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p169-186>>. Citado na página 44.

SILVA, M. R. d.; PAZUCH, V. Tecnologias digitais no ensino de geometria: Uma revisão sistemática da literatura. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 26, n. 2, p. 31–55, 2024. ISSN 1983-3156. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/59593>>. Citado na página 20.

SOUZA, J. B. d. *Sequncias Didáticas com Realidade Aumentada como Auxílio para Desenvolver a Habilidade de Visualização Espacial*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – PROFMAT, Teófilo Otoni, MG, 2020. Disponível em: <<https://sca.profmtat-sbm.org.br/ãË/61>>. Citado na página 21.

SOUZA, J. R. d.; GARCIA, J. d. S. R. *Contato Matemática*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016. Coleção de Matemática para o Ensino Médio aprovada no PNLD. Citado na página 28.

VALENTIM, T. A. *O Uso da Realidade Aumentada no Ensino da Geometria Espacial*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, 2017. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=3787&id2=160620036>. Citado na página 21.

YOUSSEF, A. N. *Matemática: volume único para o Ensino Médio*. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2004. Citado na página 31.

Apêndices

APÊNDICE A – Atividades para Imprimir

Nome: _____

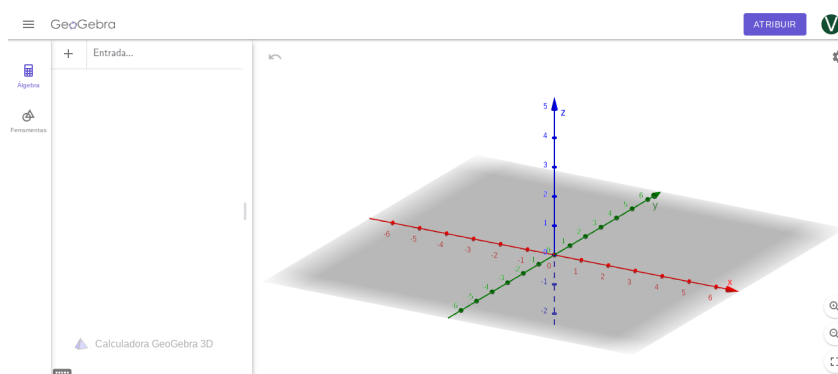
Professor: _____

Construção de uma Esfera no GeoGebra 3D

1) Acesse o GeoGebra em: <www.geogebra.org/3d>.

A tela inicial é semelhante à Figura 73.

Figura 73 – Tela inicial do GeoGebra 3D

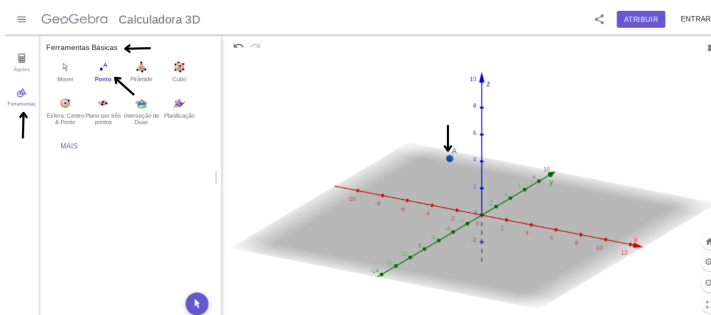


Fonte: Próprio autor

2) Crie o centro da esfera.

- Clique em Ferramentas → Ferramentas Básicas → Ponto;
- Clique em algum lugar no espaço para criar o ponto A (o centro da esfera), como indicado na Figura 74.

Figura 74 – Ferramentas básicas do GeoGebra 3D



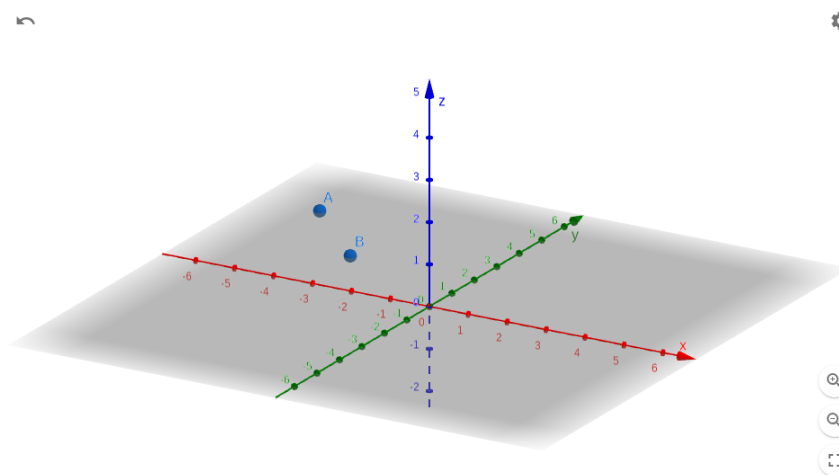
Fonte: Próprio autor

3) Defina o raio da esfera.

- Ainda com a ferramenta Ponto, clique em outro local da tela para criar o ponto B, distante de A;

- O ponto B, juntamente com o ponto A (centro), determina o comprimento do raio da esfera (Figura 75).

Figura 75 – Pontos A e B

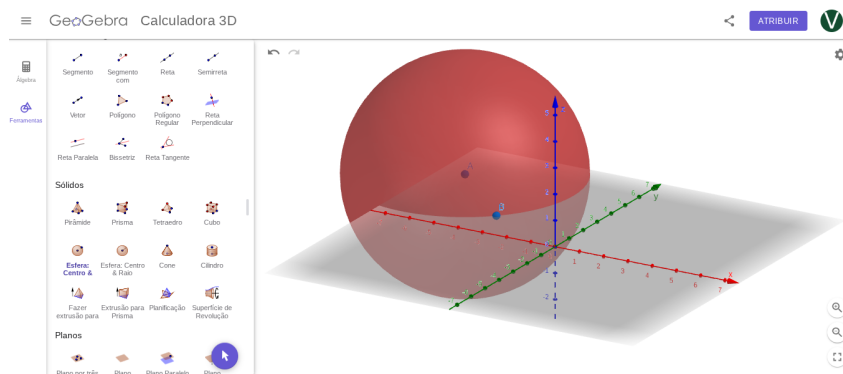


Fonte: Próprio autor

4) Construa a esfera.

- Selecione a ferramenta Esfera (Centro & Ponto) em Ferramentas → Sólidos → Esfera: Centro & Ponto.
- Clique primeiro no ponto A (centro da esfera) e, em seguida, clique no ponto B (que define o raio). A esfera é exibida conforme a Figura 76.

Figura 76 – Esfera de Centro A e raio definido pelo ponto B



Fonte: Próprio autor

Nome: _____

Professor: _____

Atividade Aplicada de Esfera

Fonte: ENEM PPL 2010 - prova amarela - questão 154

Enunciado: Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros dessas esferas seriam conforme ilustra a Figura 77.

Figura 77 – Diâmetros das Esferas de Água

 1385 km	Toda água do planeta 1,39 bilhões de km ³
 406 km	Água doce do planeta 35,03 milhões de km ³
 272 km	Água doce subterrânea 10,53 milhões de km ³
 58 km	Água doce superficial 104,59 mil km ³

Fonte: ENEM 2010 para Pessoas Privadas de Liberdade (PPL)

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é:

- A) $\frac{1}{343}$
- B) $\frac{1}{49}$
- C) $\frac{1}{7}$
- D) $\frac{29}{136}$
- E) $\frac{136}{203}$

Nome: _____

Professor: _____

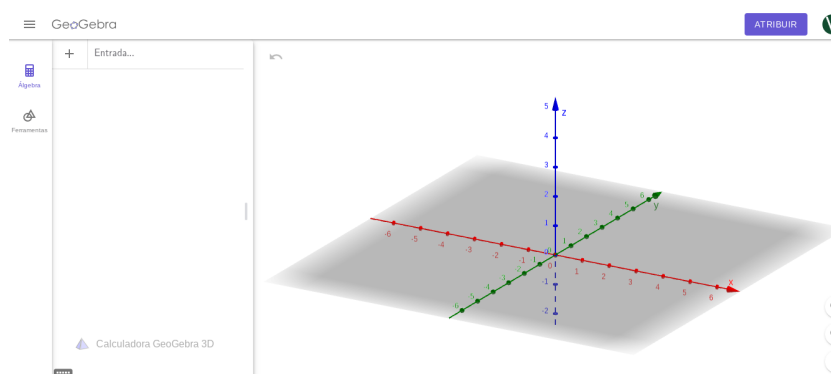
Construção de um Cilindro Reto no GeoGebra 3D

No GeoGebra 3D, a ferramenta Cilindro permite criar esse sólido a partir de duas bases. Para garantir que o cilindro seja reto, é necessário atentar-se à posição dos centros dessas bases. Pelo conceito, um cilindro reto é aquele em que o eixo é perpendicular às bases. Isso significa que os centros das bases devem ter as mesmas abscissas e ordenadas, diferindo apenas na cota. Dessa forma, o eixo \overline{AB} (que une os centros das bases) fica paralelo ao eixo z , assegurando que o cilindro seja reto. Seguem os passos para a construção no GeoGebra:

1) Acesse o GeoGebra em: <www.geogebra.org/3d>.

A tela inicial é semelhante à Figura 78.

Figura 78 – Tela inicial do GeoGebra 3D



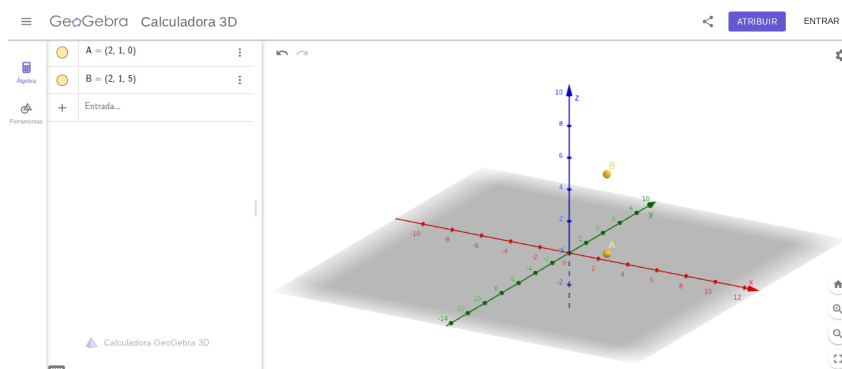
Fonte: Próprio autor

2) Crie os centros da base e do topo do cilindro:

- Clique em Ferramentas → Ferramentas Básicas → Ponto;
- Clique em algum lugar no espaço para criar o ponto A (centro da primeira base);
- Crie o ponto B, alterando apenas a cota. Para isso, observe as coordenadas do ponto A na aba Álgebra e modifique apenas o valor da cota no ponto B, como ilustrado na Figura 79.

Observação: Caso o ponto A tenha alguma coordenada decimal, escreva-a com ponto e não vírgula, na Janela Álgebra. Por exemplo: $A = (1.3, 4.6, 8)$.

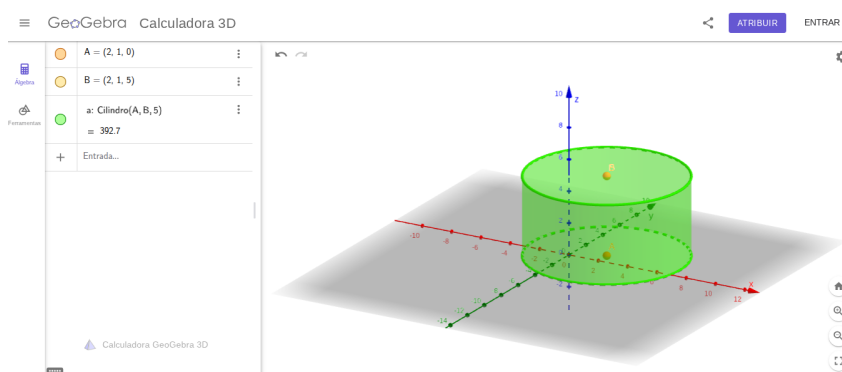
Figura 79 – Pontos A e B: centros das bases do cilindro



Fonte: Próprio autor

- 3) Selecione a ferramenta Cilindro (Ferramentas → Sólidos → Cilindro). Clique sequencialmente nos pontos A (centro da primeira base) e B (centro da segunda base). Na caixa de texto que surgir, digite o valor numérico do raio (por exemplo, 3 ou a variável do raio, como r). Confirme o valor clicando em OK. O cilindro será exibido conforme a Figura 80.

Figura 80 – Cilindro construído no GeoGebra 3D



Fonte: Próprio autor

Observação: caso seja necessário, ajuste o *zoom* e altere as cores. Faça *prints* das etapas da construção do cilindro.

Nome: _____

Professor: _____

Atividade Aplicada de Cilindro

Fonte: ENEM 2015 - prova amarela - questão 163

Enunciado: Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π . Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

- (A) 0,5
- (B) 1,0
- (C) 2,0
- (D) 3,5
- (E) 8,0

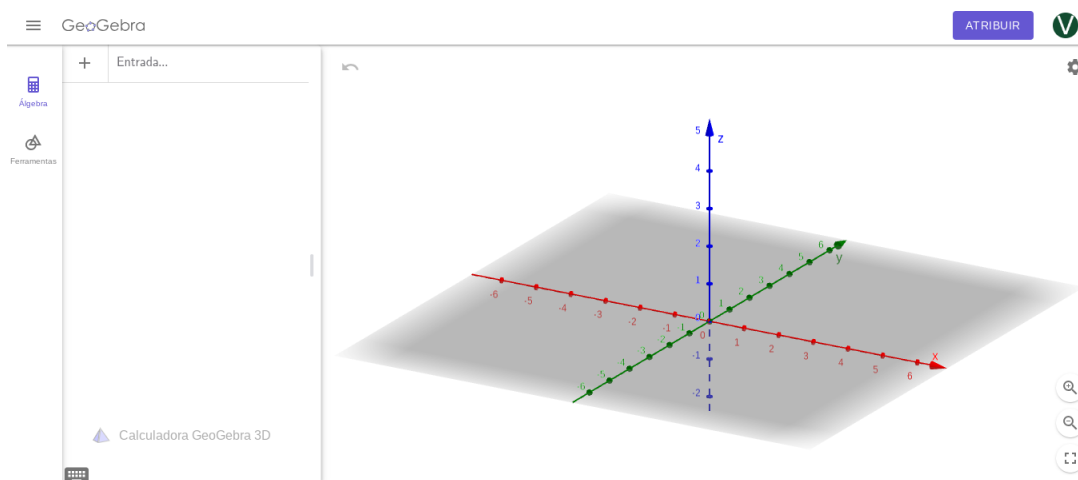
Nome: _____

Professor: _____

Construção de um Cone Reto no GeoGebra 3D

- 1) Acesse o GeoGebra em: <www.geogebra.org/3d>. A tela inicial está representada na Figura 81.

Figura 81 – Tela inicial do GeoGebra 3D



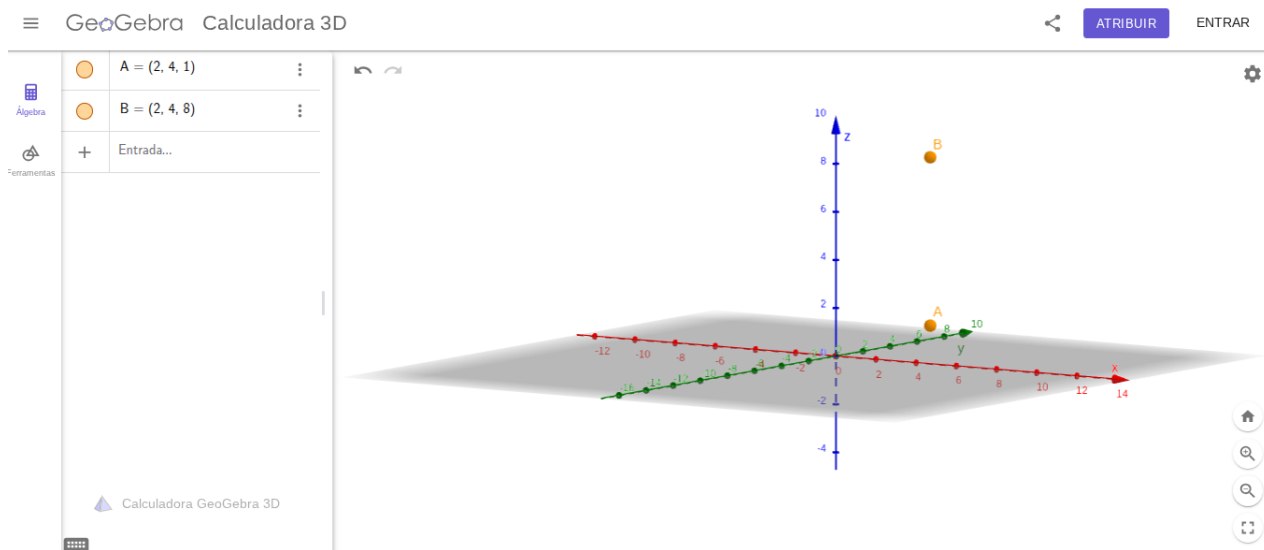
Fonte: Próprio autor

- 2) Defina o centro da base e o vértice

Para garantir que o cone seja reto, o centro da base e o vértice devem estar perfeitamente alinhados verticalmente. Para isso, é necessário que o centro da base (ponto A) e o vértice (ponto B) possuam a mesma abscissa e a mesma ordenada, diferenciando-se apenas na cota (que define a altura).

- Defina o ponto A, que representará o centro da base do cone, com coordenadas arbitrárias. Para isso, clique em Ferramentas → Ferramentas Básicas → Ponto e clique em algum lugar do plano. De maneira alternativa, digite na aba Álgebra o ponto A, por exemplo: $A = (2, 4, 1)$;
- O vértice, ponto B, deve ser definido de modo que o segmento \overline{AB} seja paralelo ao eixo da cota. Para tal, o vértice deve herdar a abscissa e a ordenada do ponto A e ter a cota aumentada pela altura h desejada. Por exemplo, para uma altura $h = 7$, insira na aba Álgebra o comando $B = (2, 4, 8)$. O resultado pode ser verificado na Figura 82.

Figura 82 – Pontos A e B



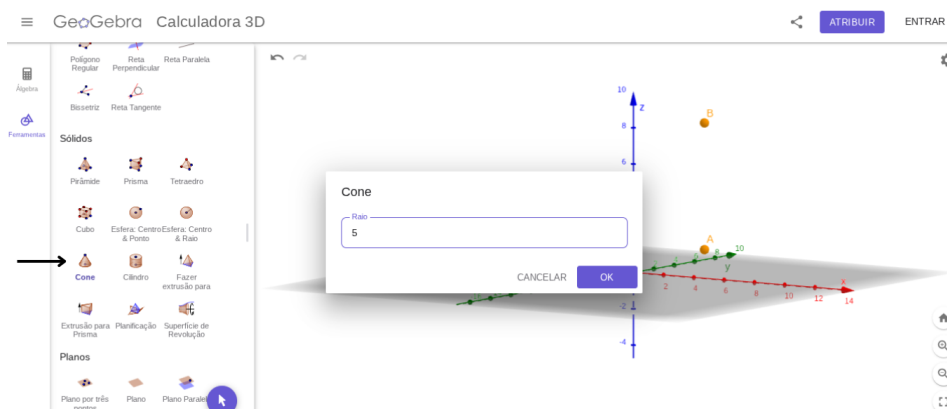
Fonte: Próprio autor

2) Construção do cone

- Utilize a ferramenta Cone na seção Sólidos;
- Selecione o Ponto A (Centro da Base);
- Selecione o Ponto B (Vértice);
- Insira o valor numérico do raio solicitado pelo software, por exemplo, 5.

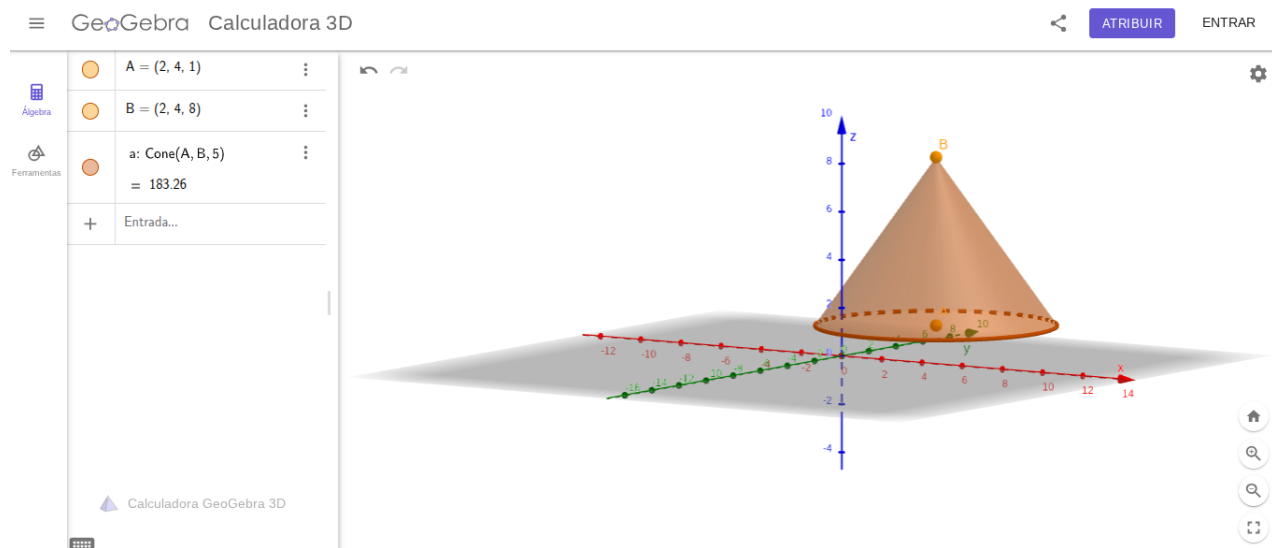
As Figuras 83 e 84 retratam os passos da construção do cone reto.

Figura 83 – Ferramenta Cone



Fonte: Próprio autor

Figura 84 – Construção do Cone Circular Reto



Fonte: Próprio autor

Nome: _____

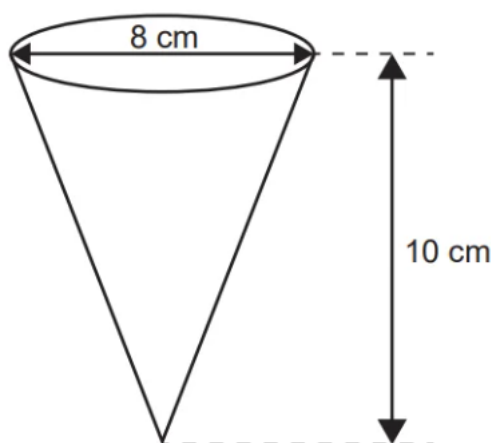
Professor: _____

Atividade Aplicada de Cone

Fonte: ENEM 2022 - prova azul - questão 153

Enunciado: Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a Figura.

Figura 85 – Dados da Questão 153 - ENEM 2022



Fonte: ENEM 2022 - prova azul

Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm.

Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

- (A) 1,52
- (B) 3,24
- (C) 3,60
- (D) 6,48
- (E) 7,20

Nome: _____

Professor: _____

Volume da Esfera: aplicação do Princípio de Cavalieri em RA

Conceito-Chave: Princípio de Cavalieri Se dois sólidos têm a mesma altura e as áreas de suas seções transversais, por planos paralelos à base, são sempre iguais, então os sólidos têm volumes iguais.

Instrução Inicial: Abra o GeoGebra 3D (acessível em: <www.geogebra.org/3d>). Para esta exploração no GeoGebra 3D e Realidade Aumentada (RA), defina os parâmetros iniciais na aba Álgebra: $r = 2$ e $h = 4$.

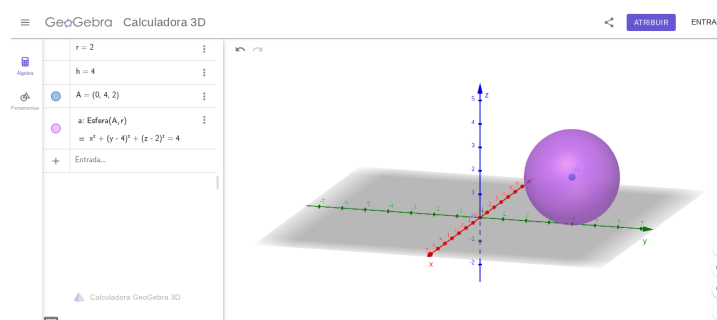
Etapa 1: Preparando os Sólidos

1. Construção da esfera

Crie uma esfera com centro no ponto $A = (0, 4, 2)$ e raio $r = 2$. Para isso, digite na Janela Álgebra o comando: $A = (0, 4, 2)$ e $a = \text{Esfera}(A, r)$.

A Figura 86 ilustra o resultado inicial.

Figura 86 – Esfera criada no GeoGebra 3D



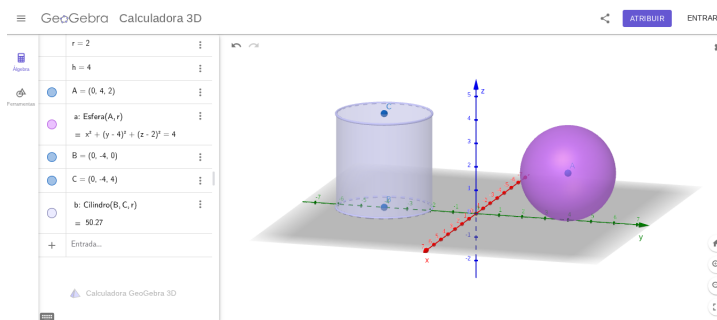
Fonte: Próprio autor

2. Construção do cilindro

Crie o cilindro que serve de base para a construção da anticlépsidra. Definem-se os pontos $B = (0, -4, 0)$ e $C = (0, -4, 4)$ (digite-os na Janela Álgebra), que correspondem aos centros das bases inferior e superior, respectivamente.

Digite o comando: $b = \text{Cilindro}(B, C, r)$ para gerar o sólido, conforme mostrado na Figura 87.

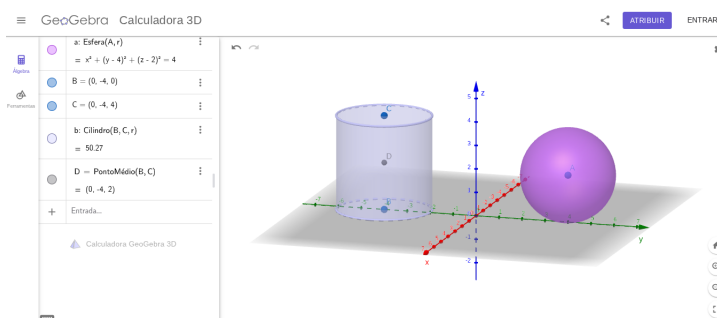
Figura 87 – Cilindro criado com raio 2



Fonte: Próprio autor

Determine o ponto médio do eixo do cilindro, digitando: $D = \text{PontoMédio}(B, C)$. O resultado está ilustrado na Figura 88.

Figura 88 – Ponto médio do eixo do cilindro



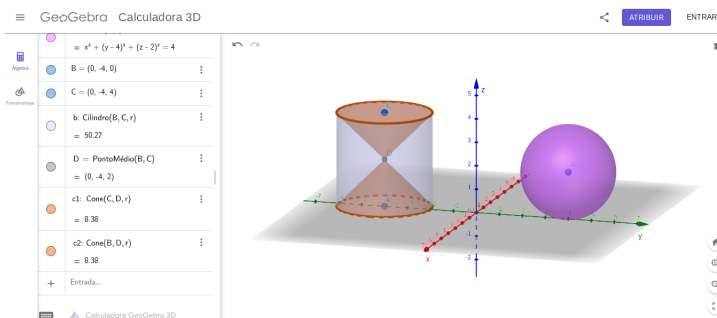
Fonte: Próprio autor

3. Construção dos cones

O sólido conhecido como anticilindro é obtido retirando-se do cilindro dois cones de mesmo raio e altura igual à metade da altura do cilindro. Para isso, utilizam-se os comandos: $c_1 = \text{Cone}(C, D, r)$ e $c_2 = \text{Cone}(B, D, r)$.

A Figura 89 mostra a esfera, o cilindro e os dois cones.

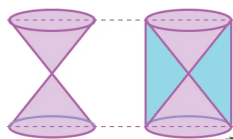
Figura 89 – Cones superior e inferior inseridos no Cilindro



Fonte: Próprio autor

A Figura 90 mostra a Clepsidra e a Anticlepsidra.

Figura 90 – Clepsidra e Anticlepsidra



Fonte: <<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm>>

Etapa 2: Ferramentas de interação

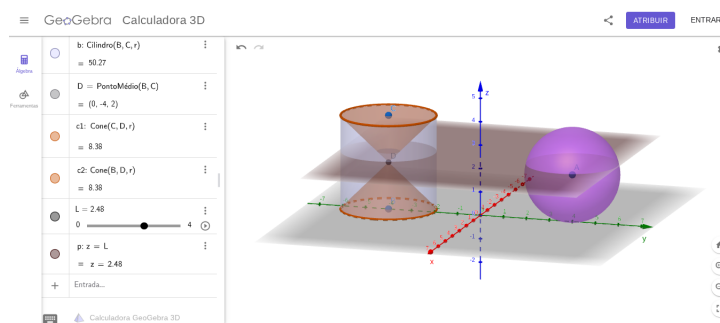
1. Controle deslizante e plano de interseção

Para investigar as seções planas dos sólidos e aplicar o Princípio de Cavalieri, cria-se um controle deslizante que permite movimentar um plano horizontal ao longo da altura dos sólidos. Digite no campo de entrada do GeoGebra 3D: $L = \text{ControleDeslizante}(0, 4, 0.01)$.

Crie um plano paralelo ao plano xy com equação $z = L$, digitando: $p : z = L$.

Esse plano intercepta a esfera, o cilindro e os cones simultaneamente, conforme mostra na Figura 91.

Figura 91 – Plano de interseção $z = L$



Fonte: Próprio autor

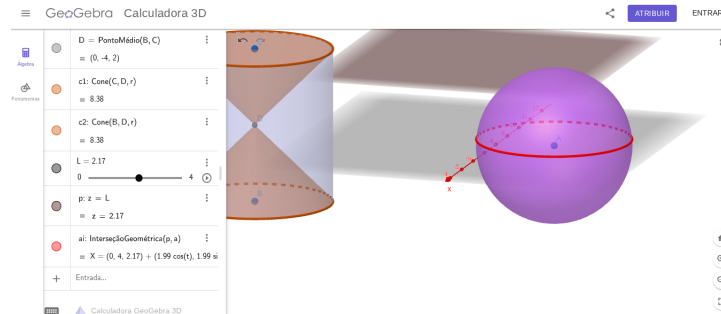
2. Interseções e áreas das seções planas

O próximo passo consiste em identificar as curvas de interseção entre o plano p e cada sólido. Para isso, utilize o comando *InterseçãoGeométrica*, digitando na aba Álgebra os comandos (a cada comando digitado, clique na tecla Enter para o próximo): $ia = \text{InterseçãoGeométrica}(p, a)$, $ib = \text{InterseçãoGeométrica}(p, b)$, $ic1 = \text{InterseçãoGeométrica}(p, c1)$ e $ic2 = \text{InterseçãoGeométrica}(p, c2)$,

Essas interseções representam, respectivamente, o círculo seccionado da esfera, o do cilindro e das bases dos cones. Com o plano em diferentes alturas, é possível observar que as áreas se mantêm equivalentes, demonstrando o Princípio de Cavalieri. As

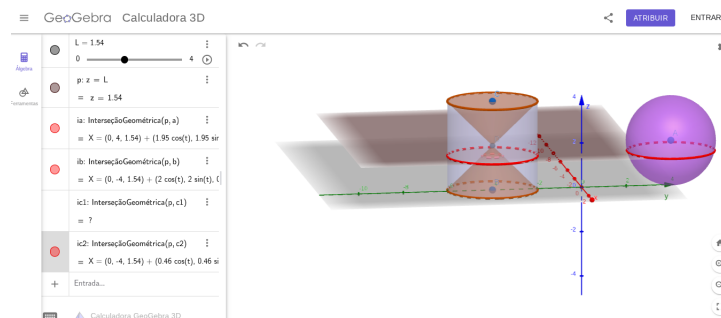
Figuras 92 e 93 mostram essas interseções com cores diferenciadas para facilitar a análise visual.

Figura 92 – Interseção da esfera com o plano xy



Fonte: Próprio autor

Figura 93 – Interseção do cilindro com o plano xy



Fonte: Próprio autor

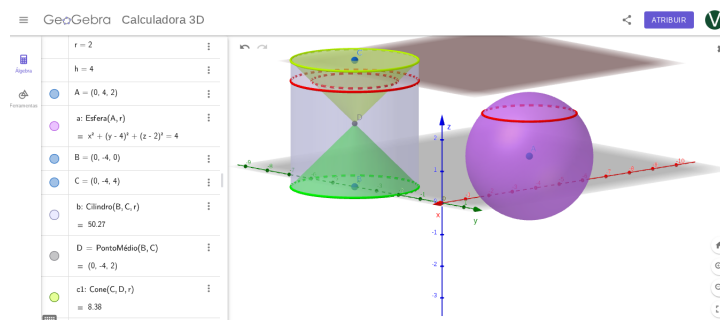
3. Área da seção circular

Aplique o comando $\text{Área}()$ a cada uma das Intersecções (ia , ib , $ic1$ e $ic2$), nomeando-as como $\text{Areaa} = \text{Area}(ia)$, $\text{Areab} = \text{Area}(ib)$, $\text{Areac1} = \text{Area}(ic1)$ e $\text{Areac2} = \text{Area}(ic2)$.

Para confirmar que as áreas das seções da esfera e da anticlipsisda são iguais, calcule-se no Geogebra 3D as diferenças das áreas do cone superior e inferior do cilindro (conforme segue o Princípio de Cavalieri). Na aba Álgebra do GeoGebra 3D, digite: $\text{Areacoroa1} = \text{Areab} - \text{Areac1}$ e $\text{Areacoroa2} = \text{Areab} - \text{Areac2}$.

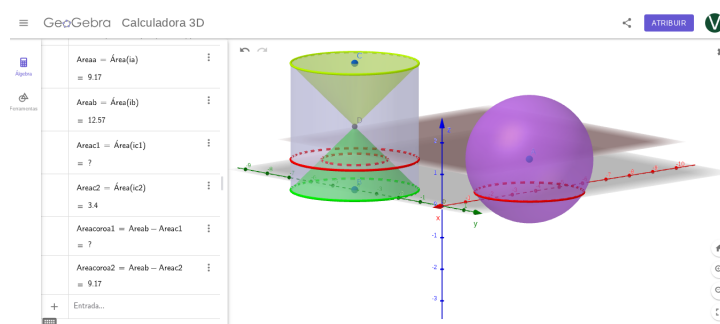
As Figuras 94 e 95 fornecem dois exemplos distintos da equivalência de áreas de seção transversal.

Figura 94 – Área da seção esférica com a seção do cone superior



Fonte: Próprio autor

Figura 95 – Área da seção esférica com a seção do cone inferior



Fonte: Próprio autor

Etapa 3: Visualização em Realidade Aumentada

Após a finalização da construção, salve o arquivo online e abra-o no aplicativo Calculadora GeoGebra 3D no celular. Com o comando AR, posicione o modelo no ambiente físico e observe a sobreposição dos sólidos em escala real. Faça *prints* das imagens refletidas em realidade aumentada.

Nome: _____

Professor: _____

Atividade Aplicada de Princípio de Cavalieri

Fonte: Vestibular da Universidade Estadual de Feira do Santana (UEFS) no ano 2012/1, caderno 2, questão 49.

Enunciado: O italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1589 – 1647), que foi discípulo de Galileu, publicou, em 1635, sua Teoria do Indivisível, contendo o que hoje é conhecido como “princípio de Cavalieri”. Entretanto, sua teoria, que permitia que se encontrassem rapidamente com exatidão a área e o volume de muitas figuras geométricas, foi duramente criticada na época. Segundo seus críticos, a teoria não se mostrava suficientemente embasada. Em 1647, Cavalieri publicou a obra *Exercitationes geometricae sex*, na qual apresentou sua teoria de maneira mais clara. Esse livro transformou-se em fonte importante para os matemáticos do século XVII. (E CÁLCULO..., 2011). De acordo com o Princípio de Cavalieri, pode-se afirmar que, dados sólidos geométricos P_1 e P_2 ,

- A- se esses sólidos possuem secções meridianas de mesma área, então P_1 e P_2 têm volumes iguais.
- B- se esses sólidos possuem bases de mesma área e alturas de mesma medida, então P_1 e P_2 têm volumes iguais.
- C- se esses sólidos possuem áreas laterais iguais e alturas de mesma medida, então os sólidos P_1 e P_2 têm volumes iguais.
- D- se esses sólidos possuem áreas totais iguais e alturas de mesma medida, então P_1 e P_2 têm volumes iguais.
- E- e um plano α , se qualquer plano β , paralelo a α , que intercepta um dos sólidos, também intercepta o outro e determina, nesses sólidos, secções de mesma área, então P_1 e P_2 têm volumes iguais.