



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT

MARIA ISABELA GALVANI ZUSSA

**Para Além da Geometria Euclidiana: A Imersão da Geometria  
Hiperbólica na Arquitetura**

Maringá, PR - Brasil

2025

Maria Isabela Galvani Zussa

**Para Além da Geometria Euclidiana: A Imersão da Geometria Hiperbólica  
na Arquitetura**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Universidade Estadual de Maringá

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT

Orientadora: Professora Dra. Patricia Tacuri Cordova

Maringá, PR - Brasil

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Z967p Zussa, Maria Isabela Galvani  
Para além da geometria Euclidiana : a imersão da geometria hiperbólica na Arquitetura / Maria Isabela Galvani Zussa. - Maringá, 2025.  
106 f. : il.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Patricia Tacuri Cordova.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2025.

1. Quinto postulado. 2. Curvatura. 3. Geometria não Euclidiana. I. Cordova, Patricia Tacuri, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 516.9

Edilson Damasio CRB9-1.123

**MARIA ISABELA GALVANI ZUSSA**

**PARA ALÉM DA GEOMETRIA EUCLIDIANA: A IMERSÃO DA  
GEOMETRIA HIPERBÓLICA NA ARQUITETURA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

**COMISSÃO JULGADORA:**



Profa. Dra. Patricia Hilario Tacuri Córdova  
UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientadora)



Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti  
UNESP - Universidade Estadual Paulista



Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves  
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 28 de fevereiro de 2025  
Local de defesa: Bloco F67 – Sala 107

*"Porque eu, o senhor teu Deus, te tomo pela sua mão direita; e te digo: Não temas, eu  
te ajudo"*

*(Bíblia Sagrada, Isaías 41: 13)*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ser tão maravilhoso em minha vida e por me amparar em todos os momentos.

Aos meus pais Leila e Wilson pois em cada momento de dúvida ou dificuldade, o amor de vocês foi a força que me manteve firme, me deu coragem para seguir e a certeza de que eu nunca estaria sozinha. Este trabalho, é reflexo da dedicação, do sacrifício e da confiança que sempre depositaram em mim.

Ao meu noivo William por me apoiar em tudo, por ser meu porto seguro, minha paz e minha motivação para seguir em frente. Em cada sorriso, em cada gesto, você me lembra da beleza de compartilhar a vida com alguém tão especial.

Ao meu irmão Lucas e sua esposa Tuane, por acreditarem em mim nos momentos em que eu mesma duvidava de minha capacidade e por me darem o maior presente: minhas sobrinhas, que fazem de mim a tia mais feliz do mundo.

A minha irmã de outra mãe Sarah por estar ao meu lado nos momentos mais felizes e nas horas mais difíceis, sua amizade é um presente que a vida me deu e não há nada mais valioso do que poder contar com alguém tão incrível como você.

A minha amiga Samara por estar ao meu lado durante esse processo, por toda a ajuda durante todos esses anos e por todas as risadas que demos juntas.

Aos meus orientadores, Patrícia e Norbil, por terem aceitado caminhar ao meu lado nesta jornada para a realização deste trabalho.

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma revisão histórica da evolução das Geometrias Não Euclidianas, com ênfase na Geometria Hiperbólica, a partir das tentativas de demonstração do quinto postulado de Euclides. Além disso, busca explorar as conexões entre a Geometria Hiperbólica e a arquitetura, analisando a curvatura de construções em diferentes contextos geográficos. A relevância desse estudo é respaldada por documentos orientadores da educação básica, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Referencial Curricular do Estado do Paraná. O estudo também incluirá uma análise dos modelos matemáticos propostos para a Geometria Hiperbólica, além de apresentar as demonstrações dos principais teoremas que caracterizam essa geometria, com o intuito de fornecer uma compreensão mais profunda de seus fundamentos e implicações. Dessa forma, espera-se contribuir para o entendimento da aplicação da Geometria Hiperbólica, tanto no campo matemático quanto em áreas interdisciplinares como a arquitetura.

**Palavras-chave:** Quinto postulado, Curvatura, Geometria Não Euclidiana.

## Abstract

This work aims to present a historical review of the evolution of Non-Euclidean Geometries, with emphasis on Hyperbolic Geometry, based on demonstrations of Euclid's fifth postulate. In addition, it seeks to explore the connections between Hyperbolic Geometry and Architecture, analyzing the curvature of buildings in different geographic contexts. The relevance of this study is supported by guiding documents for basic education, such as the National Common Curricular Base (BNCC) and the Curricular Reference of the State of Paraná. The study will also include an analysis of the mathematical models proposed for Hyperbolic Geometry, in addition to presenting the projections of the main theorems that characterize this geometry, in order to provide a deeper understanding of its foundations and implications. In this way, we hope to contribute to the understanding of the application of Hyperbolic Geometry, both in the mathematical field and in interdisciplinary areas such as architecture.

**Keywords:** Fifth Postulate, Curvature, Non-Euclidean Geometry.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Os Documentos Norteadores</b>	<b>16</b>
2.1	A Geometria Não Euclidiana e a BNCC . . . . .	16
2.2	Referencial Curricular para o ensino médio do Estado do Paraná . . . . .	18
<b>3</b>	<b>A Geometria Euclidiana</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>A história da Geometria Não Euclidiana</b>	<b>24</b>
4.1	Giovanni Girolamo Saccheri. . . . .	25
4.2	Johann Heinrich Lambert. . . . .	26
4.3	Johann Carl Friedrich Gauss . . . . .	27
4.4	Eugenio Beltrami . . . . .	28
4.5	Felix Christian Klein. . . . .	29
4.6	Adrien-Marie Legendre . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Curvaturas</b>	<b>32</b>
<b>6</b>	<b>Modelos para a Geometria Não Euclidiana</b>	<b>37</b>
6.1	O modelo de Beltrami . . . . .	37
6.1.1	Pseudoesfera . . . . .	38
6.2	Modelos de Poincaré . . . . .	39
6.2.1	Modelo do Disco de Poincaré . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Surgimento da Geometria Hiperbólica</b>	<b>43</b>
7.1	Resultados da Geometria Euclidiana . . . . .	44
7.2	Resultados da Geometria Hiperbólica . . . . .	48

<b>8</b>	<b>Arquitetura</b>	<b>83</b>
8.1	Hiperboloides . . . . .	85
8.1.1	Catedral de Brasília . . . . .	85
8.1.2	Torres de Resfriamento . . . . .	86
8.1.3	Aeroporto Internacional de Newcastle . . . . .	87
8.1.4	Torre do Porto de Kobe . . . . .	88
8.2	Paraboloide Hiperbólico . . . . .	89
8.2.1	Estação Ferroviária de Varsóvia Oshota . . . . .	89
8.2.2	Reinoldikirche Station . . . . .	91
<b>9</b>	<b>Proposta</b>	<b>92</b>
<b>10</b>	<b>Conclusão</b>	<b>95</b>

## Lista de Figuras

1	Objetivos de conhecimento apontados pelo Referencial Curricular . . . . .	18
2	Objetivos de conhecimento e conteúdos apontados pelo Referencial Curricular na unidade temática sobre Geometrias. . . . .	19
3	Quinto Postulado. . . . .	21
4	Dependência para demonstração . . . . .	22
5	Linha do tempo dos estudiosos abordados no trabalho . . . . .	25
6	Quadrilátero de Saccheri. . . . .	26
7	Johann Heinrich Lambert. . . . .	27
8	Johann Carl Friedrich Gauss. . . . .	28
9	Eugenio Beltrami. . . . .	29
10	Felix Christian Klein. . . . .	30
11	Adrien-Marie Legendre . . . . .	31
12	Curvatura máxima e mínima . . . . .	34
13	Cilindro . . . . .	34
14	Superfícies positivas. . . . .	35
15	Superfícies negativas. . . . .	35
16	Pseudoesfera . . . . .	38
17	Tratriz . . . . .	39
18	Disco de Poincaré . . . . .	40
19	Retas no Disco de Poncaré . . . . .	40
20	Como medir ângulos no Disco de Poincaré . . . . .	41
21	Distância entre os pontos A e B . . . . .	41
22	Desenho suporte para a demonstração do Teorema do ângulo externo. . . .	45
23	Ângulos congruentes para a demonstração. . . . .	45

24	Ângulos congruentes para demonstração. . . . .	46
25	Reta que entra no triângulo por um de seus vértices. . . . .	47
26	Existem pelo menos duas retas paralelas. . . . .	48
27	Construção da reta $t'$ . . . . .	49
28	Construção dos ângulos $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	51
29	Verificação do ângulo de paralelismo agudo. . . . .	52
30	Análise do caso $B\hat{A}\Omega < \alpha$ . . . . .	54
31	Análise do caso $B\hat{A}\Omega > \alpha$ . . . . .	55
32	Reta entrando no triângulo pelo ponto ideal. . . . .	56
33	Reta que corta um dos lados do triângulo generalizado. . . . .	57
34	Reta que corta um dos lados do triângulo generalizado. . . . .	58
35	Possibilidade para a construção do ângulo congruente a $\alpha$ . . . . .	59
36	Possibilidade para a construção do ângulo congruente a $\alpha$ . . . . .	60
37	Possibilidades para o ponto $Q$ . . . . .	61
38	Possibilidade para a construção do ângulo congruente a $\alpha$ . . . . .	62
39	Polígono de $n$ lados dividido em $n - 2$ triângulos. . . . .	63
40	Triângulo generalizado contendo um ponto ideal. . . . .	64
41	Triângulo generalizado contendo dois pontos ideais. . . . .	65
42	polígono convexo generalizado de $n$ lados dividido em $n - 2$ triângulos. . . . .	66
43	Construção dos segmentos $AM \equiv DE$ e $AN \equiv DF$ com $N$ entre $A$ e $C$ para a demonstração do caso de congruência AAA. . . . .	68
44	Construção dos segmentos $AM \equiv DE$ e $AN \equiv DF$ com $C \equiv N$ para a demonstração do caso de congruência AAA. . . . .	69
45	Construção dos segmentos $AM \equiv DE$ e $AN \equiv DF$ com $C$ entre $A$ e $N$ para a demonstração do caso de congruência AAA. . . . .	70
46	Desenho suporte para a demonstração do caso de congruência LA. . . . .	72

47	ponto Q em AB ta que $AQ \equiv A'B'$ . . . . .	73
48	ponto Q' tal que $B'Q' \equiv BQ$ . . . . .	74
49	Pontos médios da base e do topo do Quadrilátero de Saccheri. . . . .	75
50	Base e topo do quadrilátero de Saccheri. . . . .	77
51	Desenho suporte para a demonstração do ângulo interno desconhecido do quadrilátero de Lambert. . . . .	78
52	Desenho suporte para a demonstração do ângulo interno desconhecido do quadrilátero de Lambert. . . . .	79
53	Desenho suporte para a demonstração do Teorema 20. . . . .	80
54	Desenho suporte para a demonstração do Teorema 20. . . . .	81
55	Desenho suporte para a demonstração do Teorema 20. . . . .	82
56	Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida (Catedral de Brasília) . .	85
57	Catedral e suas curvaturas. . . . .	86
58	Torre hiperboloide na estação de energia de Didcot - Inglaterra e suas curvaturas . . . . .	87
59	Torre de controle do Aeroporto Internacional de Newcastle e suas curvaturas. . . . .	88
60	Torre do Porto de Kobe e suas curvaturas. . . . .	89
61	Estação Ferroviária de Varsóvia Oshota . . . . .	89
62	Estação Ferroviária de Varsóvia Oshota . . . . .	90
63	Estação Ferroviária de Varsóvia Oshota e suas curvaturas. . . . .	90
64	Reinoldikirche Station e suas curvaturas. . . . .	91

# 1 Introdução

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e o Referencial Curricular do Estado do Paraná compõe documentos importantes norteadores do ensino básico. Veremos que a BNCC traz o estudo das Geometrias Não Euclidianas de forma indireta em seu texto, enquanto o Referencial cita diretamente o estudo da Geometria Hiperbólica.

A geometria Euclidiana é, sem dúvidas, a mais difundida entre o mundo acadêmico, estando presente nas grades curriculares das escolas desde o ensino básico. Porém, essa geometria considera as formas como perfeitamente planas, o que não é a realidade funcional do mundo em que vivemos onde grande parte das superfícies apresentam curvaturas e desdobramentos.

Dessa forma, há a necessidade do uso da Geometria Não Euclidiana não só pelos profissionais da área, mas para que desde a escola, os discentes tenham a compreensão de que será necessário um olhar diferenciado ao estudar as superfícies na prática, precisando de outros recursos e fórmulas para obter a compreensão e resultados pretendidos.

A história do desenvolvimento da Geometria Hiperbólica remonta ao século XIX, onde diversos matemáticos começaram a questionar a veracidade do quinto postulado de Euclides. Durante muitos anos, estudiosos se debruçaram na tentativa de demonstrar tal postulado ou chegar a uma contradição. Durante esse percurso, alguns matemáticos chegaram a conclusões semelhantes, descobrindo resultados que contradiziam a conhecida Geometria Euclidiana. Esses resultados, que mais tarde ficaram conhecidos como proposições de Geometrias Não Euclidianas, apesar de terem sido deduzidos e demonstrados, ainda divergiam das experiências que tinham com a Geometria Euclidiana. As retas são representadas por curvas, as retas paralelas parecem se encontrar e a soma dos ângulos internos dos triângulos não são sempre 180 graus. O surgimento da Geometria Hiperbólica, portanto, marca a busca por alternativas ao modelo Euclidiano, trazendo uma nova perspectiva sobre a forma do universo, tendo implicações que alcançaram áreas como a física, a cosmologia e até mesmo as artes.

Neste trabalho, será realizada uma retomada da história do surgimento das Geometrias Não Euclidianas, com foco na Geometria Hiperbólica. Serão abordadas as descobertas, tentativas e dificuldades enfrentadas por grandes nomes da matemática da época,

sendo possível entender como a Geometria Hiperbólica desafiou as concepções tradicionais sobre o espaço e abriu caminho para novas abordagens no entendimento da matemática e suas aplicações.

O conceito de curvaturas negativas e positivas também será discutido neste trabalho, além dos modelos de Beltrami e Poincaré, sendo este último utilizado para as demonstrações dos principais resultados dessa geometria.

Para finalizar, o trabalho relacionará a Geometria Hiperbólica com aspectos da vida real, mostrando que tal geometria vai além das abstrações matemáticas e pode se materializar, por exemplo, na arquitetura. Neste campo, veremos que seus princípios se mostram como uma ferramenta valiosa não só para o design, mas também para a eficiência e vantagens estruturais de tais construções.

Esse estudo irá explorar a relação entre a Geometria Hiperbólica e a arquitetura, investigando como os princípios dessa teoria matemática podem ser aplicados nas construções. Analisando a influência dessa geometria, mostrando como a matemática pode interagir com a arquitetura e explorando as propriedades de curvatura das superfícies envolvidas.

Com isso, este trabalho não apenas destaca o caráter interdisciplinar da Geometria Hiperbólica, mas também evidencia sua relevância prática e criativa, ampliando as possibilidades de expressão na arquitetura.

## 2 Os Documentos Norteadores

O presente trabalho está fundamentado em documentos norteadores, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que estabelece diretrizes para os currículos das redes de ensino em todo o Brasil, e o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Estado do Paraná, que orienta os currículos dessa etapa de ensino na rede estadual paranaense.

Diante da importância desses documentos para a construção de um ensino estruturado e alinhado com as diretrizes educacionais vigentes, este capítulo tem como objetivo realizar um estudo sobre como a Geometria Não Euclidiana é abordada em cada um deles, fornecendo suporte para a inserção desse conteúdo na educação básica, evidenciando sua relevância no contexto do ensino de Matemática e justificando a relevância deste trabalho.

### 2.1 A Geometria Não Euclidiana e a BNCC

A BNCC, como é conhecida popularmente a Base Nacional Curricular Comum, é um documento que tem por responsabilidade nortear os currículos escolares das redes de ensino do Brasil. Neste documento é possível encontrar quais os conhecimentos, competências e habilidades que são esperados e devem ser desenvolvidos pelos alunos em cada ano de ensino. Para o ensino fundamental, as habilidades estão classificadas em unidades temáticas, são elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

A importância da BNCC para a educação básica é que ela é uma ferramenta indispensável para a garantia de que as escolas atinjam um mesmo nível de aprendizagem, visando impedir discrepâncias consideráveis entre as grades curriculares e o método de ensino ao longo das escolas.

Nesse contexto, há uma abordagem acerca da Geometria Não Euclidiana, colocando em pauta a discussão da necessidade da sua introdução no ensino médio. Isto porque é possível encontrá-la em nosso cotidiano, sendo evidenciada tanto na natureza como nas tecnologias, exemplo: nas artes, na arquitetura, na navegação por GPS, no crescimento de folhas entre outros. Assim, a BNCC a traz como competência específica da matemática para o ensino médio:

"Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral." (BRASIL,2017, p.531)

Desse modo, a abordagem a respeito da Geometria Não Euclidiana poderia ser embasada, a princípio, na explicação da evolução histórica de como surgiram essas geometrias. Para Morais (2024) essa perspectiva estimularia um pensamento crítico sobre como se deu o desenvolvimento das teorias matemáticas, o coaduna com a linha de raciocínio da BNCC, que coloca a história da matemática como um instrumento que tem por objetivo inspirar interesse aos alunos, sendo significativo no aprender e ensinar matemático.

Outrossim, conforme Batista (2019), um discente mais atento pode vir a despertar para a busca de questionamentos sobre a matéria, a fim de encontrar suas próprias respostas e meios de solução.

Nesse sentido, podemos ver como competência prevista nesse documento:

"Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas."(BRASIL,2017, p.9)

Para a BNCC, "no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos" (BRASIL, 2017, p.528) e ao abordar esse tipo de conteúdo no ensino médio, pode-se facilmente fazer a integração entre a matemática e a realidade da turma, uma vez que esse conteúdo tem uma grande importância para a compreensão de diversos aspectos do nosso dia a dia, aponta (CARVALHO, 2017).

Ademais, ao analisar criticamente o trabalho de Morais (2024), é factível inferir que algumas das habilidades a serem contempladas pela Geometria no ensino médio possibilitam discutir temas relacionados à Geometria Não Euclidiana, estando assim, essa geometria, subentendida como uma possibilidade de debate e aprofundamento no ensino.

## 2.2 Referencial Curricular para o ensino médio do Estado do Paraná

O Referencial Curricular para o ensino médio do Estado do Paraná é um documento norteador que visa orientar as redes de ensino do Estado na criação de um currículo adequado tendo em vista o desenvolvimento integral do estudante e o princípio de igualdade a todos os docentes do Estado, ele fornece elementos que ajudam a entender os obstáculos educacionais do Estado.

O referencial, traz de maneira direta a Geometria Não Euclidiana como um dos objetivos de conhecimento a serem atingidos dentro de uma das competências específicas da matemática citada no capítulo anterior, como podemos ver:

Figura 1: Objetivos de conhecimento apontados pelo Referencial Curricular

Competências Específicas	Habilidades	Objetos de Conhecimento
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	<p><b>(EM13MAT101)</b> Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p> <p><b>(EM13MAT102)</b> Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.</p> <p><b>(EM13MAT103)</b> Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.</p> <p><b>(EM13MAT104)</b> Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.</p> <p><b>(EM13MAT105)</b> Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).</p> <p><b>(EM13MAT106)</b> Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas, levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).</p>	<p>Funções.</p> <p>Porcentagem.</p> <p>Estatística.</p> <p>Medidas.</p> <p>Matemática financeira.</p> <p>Geometria plana.</p> <p>Geometria espacial.</p> <p>Geometria não euclidiana.</p> <p>Probabilidade.</p>

**Fonte:** Referencial Curricular para o ensino médio do Estado do Paraná, P.513

O Referencial Curricular para o ensino médio do Estado do Paraná (2021) amplia as unidade temáticas trazidas pela BNCC para o ensino fundamental, sendo elas: números e álgebra; geometrias; grandezas e medidas e tratamento da informação. Na unidade temática sobre geometrias, aponta que "As geometrias (Euclidiana e Não Euclidiana) estão presentes de diversas formas, nas mais variadas situações: na natureza, nas artes, nas ciências, nos jogos, nas construções etc"(REFERENCIAL CURRICULAR PARA O ENSINO MÉDIO DO PARANÁ, 2021, P.541). Além disso, de acordo com o

documento, agregar o estudo das Geometrias Não Euclidianas na educação é essencial para o entendimento de problemas da realidade e do mundo científico.

Voltando os olhos novamente para a BNCC (2017), é importante destacar a habilidade (EM13MAT105): "Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)" (BRASIL, 2017, P.545). E, de acordo com o Referencial, para ser contemplada, tal habilidade tem a Geometria Não Euclidiana como objetivo de conhecimento, trazendo as noções de Geometria Elíptica e Hiperbólica como conteúdos para essa finalidade.

Figura 2: Objetivos de conhecimento e conteúdos apontados pelo Referencial Curricular na unidade temática sobre Geometrias.

UNIDADE TEMÁTICA 03 GEOMETRIAS		
Habilidades a serem desenvolvidas	Objetos de conhecimento	Conteúdos
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.	Geometria plana. Geometria espacial. Geometria não euclidianas.	Transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições). Transformações homotéticas. Fractais. Noções de geometria elíptica e hiperbólica. Geometria projetiva.

**Fonte:** Referencial Curricular para o ensino médio do Estado do Paraná, P.543

### 3 A Geometria Euclidiana

Este capítulo tem como objetivo realizar uma revisão histórica da Geometria Euclidiana, revisitando seus fundamentos e explorando os postulados descritos por Euclides, responsável pela obra "Os Elementos", um dos escritos matemáticos mais influentes da história que segundo Agustini (2022) é a segunda obra mais editada do mundo, perdendo apenas para a Bíblia e que serviu de base para o desenvolvimento da geometria ao longo dos séculos.

A partir dessa abordagem histórica, busca-se fornecer um embasamento sólido para que, nos capítulos seguintes, o leitor compreenda o contexto em que surgiram as Geometrias Não Euclidianas, bem como os questionamentos que levaram ao desenvolvimento dessas novas concepções geométricas.

Euclides viveu por volta de 300 a.C na região de Alexandria. Segundo Agustini (2022), em sua obra "Os Elementos", ele reúne grande parte do conhecimento matemático desenvolvido até o momento, sendo apenas responsável por compilar esse conhecimento, já que em sua época, a Geometria Euclidiana já havia sido muito desenvolvida. Os elementos, é composto por 13 livros e foi o primeiro a utilizar uma axiomática dedutiva. Foi dividido em 5 noções comuns, verdades aceitas em qualquer ciência e 5 postulados, verdades aceitas na geometria. De acordo com (BARBOSA, 2007, p.2), são noções comuns:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais;
2. Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais;
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais;
4. Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais;
5. O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Ainda de acordo com o autor, os postulados específicos da geometria são:

**Postulado 1:** Pode se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos;

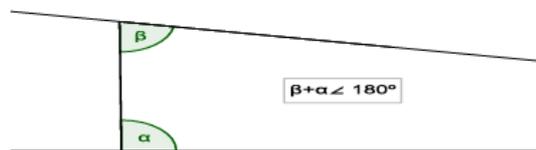
**Postulado 2:** Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta;

**Postulado 3:** Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio;

**Postulado 4:** Todos os ângulos retos são iguais;

**Postulado 5:** É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Figura 3: Quinto Postulado.



**Fonte:** (SANTOS, 2014, p.3)

De acordo com (BARBOSA, 2007, P.3), Euclides ainda empregou algumas hipóteses que não foram explicitamente mencionadas, como:

- Retas são conjuntos ilimitados;
- As retas são contínuas;
- Vale o Axioma de Pasch.

**Axioma de Pasch:** "Sejam A, B e C três pontos não colineares e r uma reta no plano determinado por A, B e C que não passa por nenhum desses pontos mas que intersecta o segmento AC, então r intersecta o segmento BC ou o segmento AB."

Em seu trabalho, (BATISTA, 2019, p.4-5) elenca os assuntos abordados em cada um dos treze volumes do livro Os Elementos:

**Livro I:** Fundamentos da Geometria Plana;

**Livro II:** Álgebra geométrica;

**Livro III:** Teoria da circunferência;

**Livro IV:** Figuras inscritas e circunscritas;

**Livro V:** Teoria das proporções abstratas;

**Livro VI:** Figuras geométricas semelhantes e proporcionais;

**Livro VII:** Fundamentos da teoria dos números;

**Livro VIII:** Sequências de números em progressão geométricas;

**Livro IX:** Teoria dos números;

**Livro X:** Classificação dos incomensuráveis;

**Livro XI:** Geometria dos sólidos;

**Livro XII:** Medição de figuras;

**Livro XIII:** Sólidos Regulares.

O quinto postulado de Euclides era mais complexo que os demais e também não era tão natural e intuitivo, e talvez, segundo Santos (2014) seja por esse motivo que ele tenha evitado utilizar o quinto postulado nas demonstrações de suas proposições e só tenha aplicado ele a partir da vigésima nona proposição, sendo que todas as anteriores utilizaram apenas os quatro primeiros postulados, veja a seguir a tabela que mostra as definições, postulados, noções comuns e proposições utilizadas para cada demonstração.

Figura 4: Dependência para demonstração

Proposição	Definição	Postulados	Noções Comuns	Proposição	Proposição	Definição	Postulados	Noções Comuns	Proposição
1	15,20	1,3	1		25				4,24
2	15,20	1,2,3	1,3	1	26		1	1,8	3,4,16
3	15	3	1	2	27	23	2		16
4			7,9		28		4	1,2,3	13,15,27
5		1,2	3	3,4	29	23	2,5	1,2,4	13,15
6		1	8	3,4	30			1	27,29
7		1	8	5	31		1,2		23,27
8			7	7	32		2	1,2	13,29,31
9	20	1		1,3,8	33		1		4,27,29
10	20			1,4,9	34		1	2	4,26,29
11	10,20	1		1,2,3,8	35			1,2,3	4,29,34
12	10,15	1,3		8,10	36		1	1	33,34,35
13	10		1,2	11	37		2	6	31,34,35
14		2,4	1,2,3,8	13	38		2	6	31,34,36
15		4	1,2,3	13	39		1	1,8	31,37
16		1,2	8	2,3,4,10,15	40		1	1,8	31,38
17		2	4	13,16	41		1	1,2	34,37
18		1	8	3,5,16	42		1	1,2	10,23,31,38,41
19				5,18	43		1	2,3	34
20		1,2	8	2,5,19	44		1,2,5	1,8	15,29,30,31,42,43
21		2	4	16,20	45		1	1,2	14,29,30,33,34,42,44
22	15	1,3	1	2,3,20	46	22	4	1,3	2,3,11,29,31,34
23		1		8,22	47		1,4	1,2,5	4,14,30,31,41,46
24		1	1,8	2,4,5,19,23	48		1	1,2	2,3,8,11,47

**Fonte:** (BONGIOVANI;JAHN, 2010, P.43)

Ainda por esse motivo, como veremos adiante, no decorrer da história, ao longo de mais de 2 mil anos, a aceitação desse postulado causava desconforto em diversos matemáticos que contestaram sua veracidade e tentaram, sem êxito, demonstra-lo a partir das noções primitivas e dos quatro postulados anteriores ou substituí-lo por outra definição de reta paralela.

Muitos desses matemáticos, na busca da demonstração do quinto postulado de Euclides, muniram-se dos quatro primeiros postulados e acabaram sendo frustrados ao utilizarem afirmações que, mais tarde, perceberam que eram equivalentes ao que eles queriam demonstrar.

Agustini (2022) destaca como equivalentes ao quinto postulado:

- “Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada”  
(Axioma de Playfair)
- “A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso”
- “Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes”
- “Existe um par de retas equidistantes”
- “A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma”
- “Existem retângulos”

(AGUSTINI, 2022, p. 35-40)

Como consequência dessa busca, ao longo dos anos, matemáticos em diferentes partes do mundo começaram a reconhecer a possibilidade do surgimento de uma nova geometria e a chegar, de modo desvinculado, em resultados semelhantes que hoje são usados nas Geometrias Não Euclidianas.

## 4 A história da Geometria Não Euclidiana

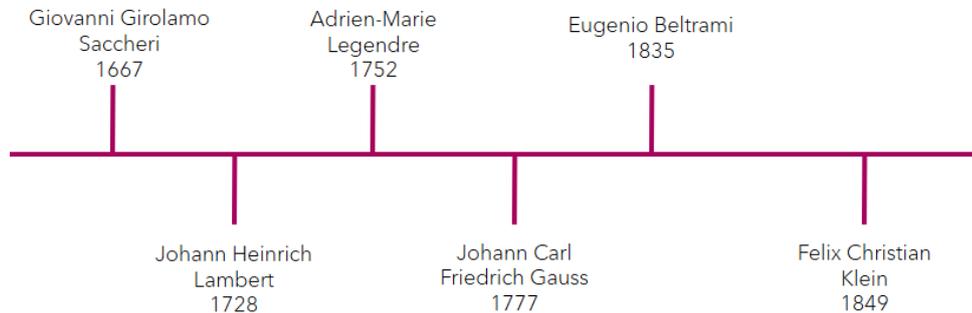
Como vimos anteriormente, durante séculos, estudiosos dedicaram-se intensamente à tentativa de demonstrar o quinto postulado de Euclides. Um dos equivalentes a esse postulado, afirma que, dados uma linha reta e um ponto fora dela, existe exatamente uma reta paralela passando pelo ponto dado, foi considerado por muito tempo uma verdade fundamental e indiscutível. No entanto, por diversas vezes, esses estudiosos falharam ao demonstrar o quinto postulado por utilizarem afirmações equivalentes ao próprio.

Ao longo desse processo, no entanto, muitos dos conceitos que surgiram das tentativas de demonstrar o quinto postulado se revelaram fundamentais para o desenvolvimento de novas abordagens geométricas, que mais tarde seriam reconhecidas como Geometrias Não Euclidianas. Tais geometrias, ao desafiar as suposições da Geometria Euclidiana, abriram portas para uma compreensão completamente nova do espaço e suas propriedades.

Conforme argumenta Barbosa (2007), a ideia de que a Geometria Euclidiana fosse a única forma de descrever o universo e que sua estrutura rígida e imutável refletisse a realidade do espaço físico pode ter, de fato, atrasado o surgimento de novas descobertas no campo da geometria. Durante séculos, muitos matemáticos estavam presos à concepção de que a Geometria Euclidiana era não apenas a mais simples, mas também a única possível para explicar a natureza do espaço. Isso pode ter gerado uma resistência natural a explorar alternativas, o que dificultou o avanço das ideias sobre geometrias mais gerais.

A busca por alternativas ao quinto postulado de Euclides, que culminou no surgimento da Geometria Não Euclidiana, envolveu o trabalho de diversos matemáticos notáveis. A seguir, destacamos alguns desses grandes nomes, cujas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento dessa nova abordagem geométrica.

Figura 5: Linha do tempo dos estudiosos abordados no trabalho



Fonte: A autora

Este capítulo foi escrito tendo como base os livros de Agustini (2022) e Barbosa (2007).

#### 4.1 Giovanni Girolamo Saccheri.

Saccheri, padre Jesuíta e estudioso matemático, nasceu em 1667 na Itália e faleceu em 1733. Foi um dos primeiros a utilizar a redução ao absurdo para tentar resolver o problema do quinto postulado e também é responsável por uma das primeiras obras sobre Geometria Não Euclidiana. Em sua tentativa de demonstração, ele fez o uso de um quadrilátero que, mais tarde, receberia seu nome.

O quadrilátero utilizado por ele em sua tentativa de demonstração possuía dois lados iguais perpendiculares a base. Como visto anteriormente, a existência de retângulos é equivalente ao quinto postulado e, sabendo disso, Saccheri negou essa existência para tentar, sem êxito, chegar em uma contradição. Sendo assim, ao negar que os ângulos eram retos, ou seja, negar o quinto postulado, segundo Agustini (2022), Saccheri se deparou com duas hipóteses:

1. Os ângulos do topo de seu quadrilátero deveriam ser obtusos;
2. Os ângulos do topo de seu quadrilátero deveriam ser agudos.

A primeira hipótese entra em contradição ao assumir que as retas são ilimitadas (Segundo

Postulado de Euclides). E segundo Agustini(2022), Saccheri não conseguiu chegar em uma contradição para a hipótese de que os ângulos são agudos.

Para Barbosa (2007), Saccheri possuía uma grande intuição geométrica e, a partir de seu estudo, demonstrou resultados que são hoje conhecidos da Geometria Não Euclidiana, sendo o primeiro a ter uma visão da possibilidade de outras geometrias.

Figura 6: Quadrilátero de Saccheri.



Fonte: A autora

## 4.2 Johann Heinrich Lambert.

Lambert nasceu em 1728 na França e faleceu em 1777. Segundo Carvalho (2017), ele usou um caminho parecido com o de Saccheri ao tentar utilizar redução ao absurdo e um tipo especial de quadrilátero para sua tentativa de demonstração do quinto postulado de Euclides.

O quadrilátero utilizado por ele possuía três ângulos retos e, mais tarde, receberia o nome de “Quadrilátero de Lambert”. Como a existência de retângulos é equivalente ao quinto postulado, então o quarto ângulo de seu quadrilátero não poderia ser reto. Para o caso do ângulo obtuso, segundo Carvalho (2017), ele chegou a conclusões parecidas com as do Saccheri e no caso do ângulo ser agudo, não conseguiu chegar a nenhuma contradição.

Podemos destacar como uma proposição deduzida por Lambert em seu estudo que: *"A área de um triângulo é proporcional à diferença entre a soma de seus ângulos internos e dois ângulos retos"* (BARBOSA, 2007, p.27)

Figura 7: Johann Heinrich Lambert.



**Fonte:** (Agustini, 2022, p. 15)

### 4.3 Johann Carl Friedrich Gauss

Gauss nasceu em 1777 na Alemanha e faleceu em 1855. Segundo Barbosa (2007), ele tentou demonstrar o quinto postulado de Euclides por meio da redução ao absurdo, assim como haviam tentado Lambert e Saccheri. Foi um grande matemático que, apesar de não ter publicado seus resultados em vida, foi o primeiro a utilizar o termo “Não Euclidiana” e desenvolveu diversos resultados que são aceitos hoje na Geometria Hiperbólica.

De acordo com Agustini (2022, p.16) “Talvez a não publicação de tais resultados tenha sido motivada pelo receio da não aceitação de uma geometria diferente da clássica e da contestação da filosofia de Kant, adotada pela igreja, que coloca o universo como euclidiano.”

Gauss trocava correspondências com outros matemáticos e ao longo dos anos se surpreendia por seus companheiros chegarem, de modo independente, nos mesmos resultados que ele havia alcançado. A seguir, veremos uma parte da carta que Gauss enviou a Wolfgang Bolay sobre o trabalho de seu filho Johann:

“se eu começasse com a afirmação de que não ousou louvar tal trabalho você, é claro, se sobressaltaria: mas não posso proceder de outra forma, pois louvá-lo, significaria louvar a mim mesmo, visto que todo o conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho seguiu, os resultados aos quais ele chegou, coincidem quase exatamente com as meditações que têm ocupado minha mente por (um período de) trinta a trinta e cinco anos. Por isto mesmo, encontro-me surpreso ao extremo” (BARBOSA, 2007, p. 42-43)

Figura 8: Johann Carl Friedrich Gauss.

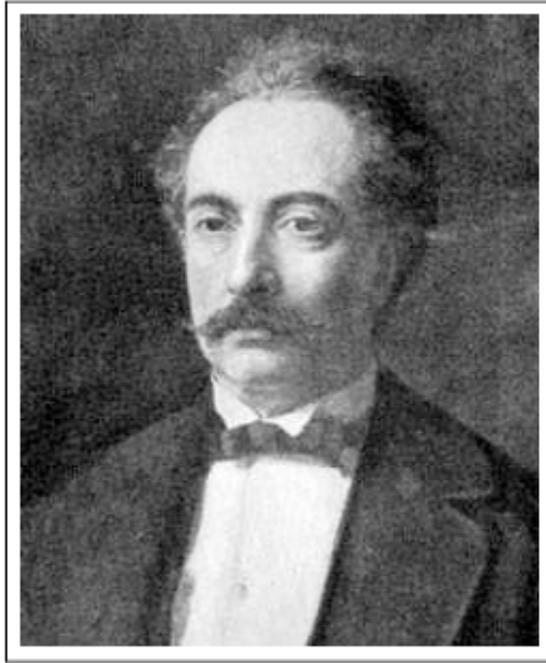


Fonte: (AGUSTINI, 2022, p.16)

#### 4.4 Eugenio Beltrami

Beltrami nasceu em 1835 no Império Austríaco e faleceu em 1900. Em sua época, a Geometria Hiperbólica já havia sido bem desenvolvida, mas, segundo Agustini (2022), haviam preocupações em relação a sua consistência. Beltrami é conhecido por ter sido o primeiro a desenvolver um modelo parcial para a Geometria Hiperbólica.

Figura 9: Eugenio Beltrami.



Fonte: (AGUSTINI, 2022, p.18)

#### 4.5 Felix Christian Klein.

Klein nasceu em 1849 na Prússia e faleceu em 1925. O modelo proposto por Beltrami para a Geometria Hiperbólica era um modelo parcial. Portanto, a busca por modelos completos continuou entre os estudiosos da época. De acordo com Agustini (2022), foi Félix Klein que utilizou os termos “Hiperbólica” e “Elíptica” para as novas geometrias e também é conhecido por ter introduzido um modelo, agora completo, para a Geometria Hiperbólica e dois modelos para a Geometria Elíptica.

Figura 10: Felix Christian Klein.



Fonte: (AGUSTINI, 2022, p.18)

## 4.6 Adrien-Marie Legendre

Adrien nasceu em 1752 na França e faleceu em 1833. Na época dele, muito da geometria já havia sido descoberta, mas, Legendre ficou conhecido pela sua contribuição em demonstrar alguns resultados conhecidos da Geometria Euclidiana sem utilizar o quinto postulado de Euclides. Segundo Agustini(2022), podemos destacar:

**Primeira proposição de Legendre:** *"A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que ou igual a um ângulo raso"* (AGUSTINI, 2022, p. 33)

**Segunda proposição de Legendre:** *"Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a  $\pi$  rad, então a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a  $\pi$  rad"* (AGUSTINI, 2022, p. 34)

Figura 11: Adrien-Marie Legendre



**Fonte:** (AGUSTINI, 2022, p.16)

## 5 Curvaturas

O presente capítulo tem como objetivo apresentar o conceito de curvatura tanto de maneira formal quanto de maneira intuitiva, para que possa ser utilizado em sala de aula com os alunos da educação básica. Dessa forma, busca-se tornar o tema acessível e compreensível, permitindo que os estudantes desenvolvam uma percepção mais ampla sobre essa noção matemática.

O estudo da curvatura neste trabalho visa fornecer uma base para que seja possível relacionar a Geometria Hiperbólica com a arquitetura, analisando e classificando diferentes monumentos arquitetônicos, explorando como a curvatura se manifesta em suas estruturas e contribuindo para uma compreensão mais profunda da relação entre matemática e arquitetura.

Segundo Petit (1982) "uma superfície curva é uma superfície onde os teoremas euclidianos não funcionam" sendo assim, para entendermos melhor sobre as Geometria Hiperbólica e Elíptica se faz necessário compreender os novos resultados (chamados de Não Euclidianos) obtidos por causa da curvatura sobre a superfície curva.

Uma curvatura pode ser positiva, negativa ou nula. De maneira mais intuitiva, como é apresentada no livro de Petit (1982) podemos concluir que ao tentar revestir uma superfície com curvatura positiva, deve "sobrar" papel, aparecer pregas. Enquanto que para revestir uma superfície de curvatura negativa, deve "faltar" papel, apresentar falhas.

Outra maneira de determinar a curvatura, segundo Prološćić (2021) é colocando um plano tangente no ponto em que queremos analisar. Se a superfície estiver posicionada de um único lado do plano, sua curvatura Gaussiana será positiva nesse ponto, caso contrário, a curvatura Gaussiana será negativa. Mas qual a definição formal de curvatura?

Para melhor entender a curvatura, nos voltemos a definição de curva. Segundo o dicionário "curva" é a "representação gráfica de uma função matemática" (CURVA, 2024). Já a curvatura, segundo Minhós (2011) indica o grau em que a curva se distancia de estar contida numa linha reta. Notemos que, uma circunferência com um raio menor é mais encurvada do que uma circunferência com um raio maior. Dito isso, Minhós (2011) destaca que:

1. A curvatura de uma reta é igual a zero.

2. A curvatura de uma circunferência é constante e inversamente proporcional ao seu raio, ou seja, quanto menor o raio da circunferência, maior a sua curvatura.

De acordo com a apostila sobre Curvatura de Gauss encontrada no site oficial da Universidade Federal do Ceará (Seara da Ciência), para encontrar a curvatura de uma curva em um determinado ponto, devemos traçar a maior circunferência possível tangente a esse ponto no lado côncavo. Sendo assim, a curvatura da curva nesse ponto é igual a curvatura da circunferência traçada e, já vimos anteriormente que tal curvatura deve ser inversamente proporcional ao seu raio, ou seja,

$$C = \frac{1}{r}$$

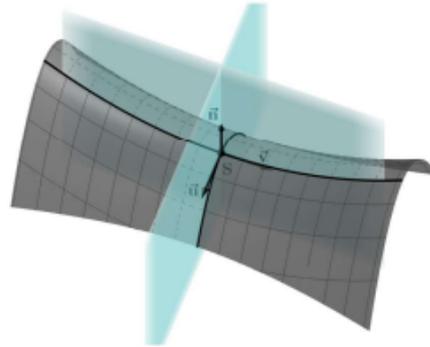
Mas como calcular a curvatura de uma superfície em um ponto?

Note que ao se traçar um plano que corta a superfície em determinado ponto, sua interseção com ela será uma curva. Curva essa que temos conhecimento de como encontrar sua curvatura.

Novamente de acordo com Seara da Ciência (s.d), para encontrar a curvatura de uma superfície, devemos traçar diversos planos que cortam a superfície em determinado ponto e calcular a curvatura das curvas obtidas com as suas interseções. Devemos então, encontrar a maior e a menor curvatura. Sejam elas  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente. Sendo assim, a curvatura no ponto é dada pelo produto da curvatura máxima pela curvatura mínima, ou seja,

$$C = C_1 \times C_2$$

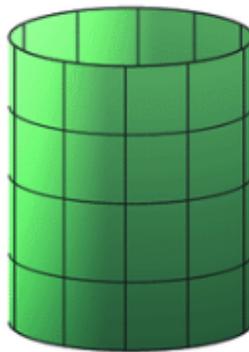
Figura 12: Curvatura máxima e mínima



**Fonte:** (PROLOŠČIĆ, 2021, p.39)

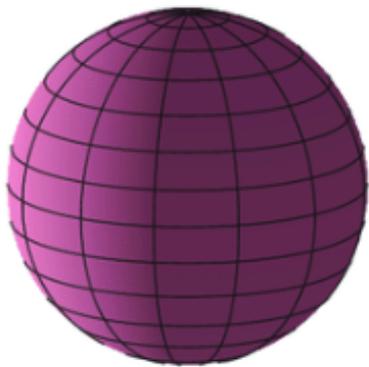
Deste modo, podemos concluir que a curvatura pode ser positiva, negativa ou nula. De acordo com Seara da Ciência (s.d), se a superfície tiver pelo menos uma das curvas ( $C_1$  ou  $C_2$ ) reta, terá a curvatura nula, que é o caso do plano e do cilindro.

Figura 13: Cilindro



**Fonte:** (BASSI, 2020)

Ainda de acordo com ele, a superfície será positiva se as curvas se encurvarem para um mesmo lado, ou seja, se  $C_1$  e  $C_2$  forem ambas positivas ou se  $C_1$  e  $C_2$  forem ambas negativas, o que ocorre com uma esfera ou um elipsoide.



(a) Esfera

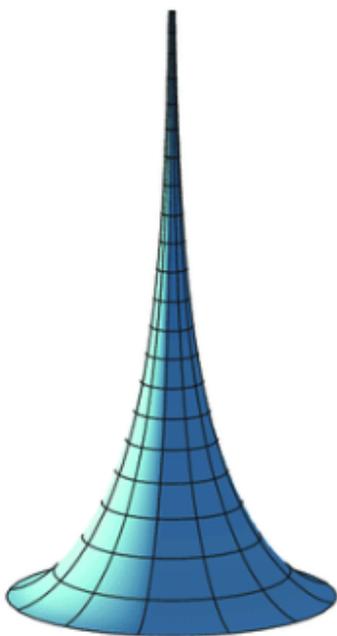


(b) Elipsoide

Figura 14: Superfícies positivas.

**Fonte:** (BASSI, 2020)

E para finalizar, segundo Seara da ciência (s.d) a superfície será negativa se as curvas se encurvarem para lados diferentes, ou seja, se  $C_1$  e  $C_2$  tiverem sinais opostos, o que ocorre com a Pseudoesfera, o Hiperboloide e também com o Paraboloides Hiperbólico.



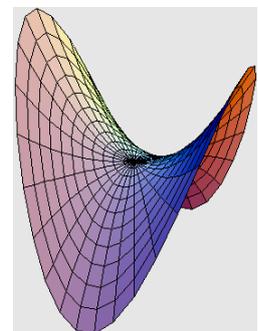
(a) Pseudoesfera

**Fonte:** (BASSI, 2020)



(b) Hiperboloide

**Fonte:** (DELGADO et al, 2022)



(c) Paraboloides Hiperbólico

**Fonte:** (WIKIPEDIA, 2020)

Figura 15: Superfícies negativas.

De acordo com Firmo (2003), as superfícies em que as curvas são curvadas para o mesmo lado, ou seja, superfícies positivas, são chamadas de superfícies elípticas, já as superfícies que possuem suas curvas curvadas para lados diferentes, ou seja, superfícies negativas, são chamadas de hiperbólicas.

Segundo Prološćić (2021), para serem adequadas para ser um modelo para a Geometria Hiperbólica, as superfícies devem ter curvaturas constantes, para que assim os ângulos e formas não sejam alterados quando os objetos são movidos, o que é o caso da Pseudoesfera, que será estudada como modelo adiante, mas não é o caso da sela por exemplo, que é uma superfície hiperbólica de curvatura negativa, mas não serve para ser um modelo para tal geometria.

## 6 Modelos para a Geometria Não Euclidiana

Muitas foram as tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides ou de tentar chegar em uma contradição. Como visto nos capítulos anteriores, diante de tantos esforços, diversos matemáticos ao longo dos anos se depararam com resultados divergentes da conhecida Geometria Euclidiana, resultados esses, que são conhecidos da Geometria Hiperbólica e da Geometria Esférica. Os resultados da Geometria Hiperbólica, por exemplo, vão contra à Geometria Euclidiana que estamos tão acostumados, sendo difícil imaginar e visualizar as características dos teoremas deduzidos (PROLOŠČIĆ, 2021).

Apesar dos resultados encontrados, os estudiosos da época ainda se preocupavam com a consistência de tais geometrias e tinham o receio de encontrar uma contradição na teoria (AGUSTINI, 2022). Portanto, ainda era necessário mostrar que não haveriam contradições em tais geometrias.

Para demonstrar a consistência dessa nova geometria, Beltrami, Klein e Poincaré fizeram uso do método dos modelos, "Um modelo para um dado sistema axiomático é uma interpretação dada aos conceitos primitivos de modo que os axiomas sejam todos verdadeiros" (BONGIOVANNI; JAHN, 2010, pg.44). Nesse contexto, Prološčić (2021) afirma que:

"Se algo existe na teoria, então tem que ser cumprido no modelo, mas o inverso dessa afirmação nem sempre é verdadeiro. É por isso que não é preciso afirmar que um determinado modelo é um plano hiperbólico, é apenas uma interpretação do plano" (PROLOŠČIĆ, 2021, pg.36, tradução nossa).

E assim, ainda segundo Prološčić (2021), ao exibir um modelo consistente da Geometria Hiperbólica, qualquer contradição encontrada nessa geometria seria observada também na Geometria Euclidiana.

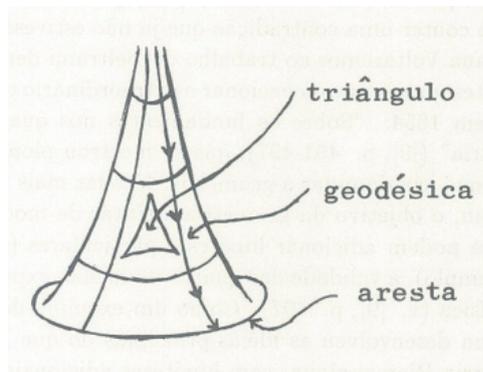
### 6.1 O modelo de Beltrami

Segundo Bongiovanni; Jahn (2010), o modelo da pseudoesfera de Beltrami foi o primeiro modelo apresentado afim de tentar resolver o problema da consistência da Geometria Hiperbólica.

Em 1868 ele foi responsável por apresentar um modelo na forma de parametrizações de superfícies de curvatura constante e negativa, onde era possível verificar, interpretar e aceitar as propriedades da Geometria Hiperbólica (SCHENA, 2019).

Porém, de acordo com Agustini (2022), o modelo descrito por Beltrami na época era considerado um modelo parcial e não representava o plano hiperbólico por inteiro. Ainda, segundo Schena (2019) não era possível prolongar suas geodésicas infinitamente pelo fato de que as superfícies de curvatura negativa constante conhecidas possuíam arestas, como podemos ver na imagem a seguir.

Figura 16: Pseudoesfera



Fonte: (CARMO, 1987, p.31)

### 6.1.1 Pseudoesfera

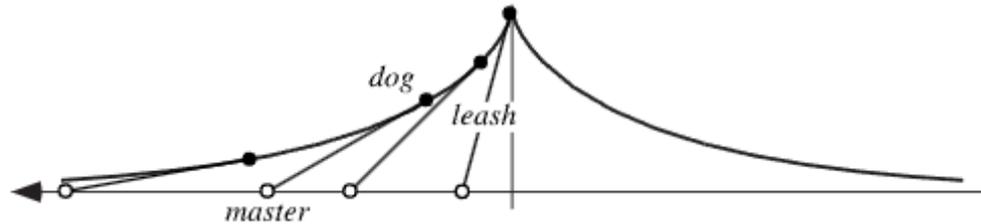
A Pseudoesfera é uma superfície de curvatura constante negativa que já era conhecida pelos matemáticos da época mas, foi Beltrami que decidiu usá-la como modelo para a Geometria Hiperbólica (PROLOŠČIĆ, 2021).

Essa superfície é o resultado do giro de uma curva conhecida como tratriz em torno de um eixo. De acordo com Weisstein (s.d) esse nome foi dado por Huygens em 1692 quando tal curva foi estudada por ele pela primeira vez.

A tratriz, surgiu por conta de um problema que foi proposto a Leibniz: "Qual é a trajetória de um objeto que começa com um deslocamento vertical quando é arrastado por uma corda de comprimento constante sendo puxada ao longo de uma linha reta horizontal" (WEISSTEIN apud STEINHAUS 1999, p. 250-251, tradução nossa). Para o autor, esse problema pode ser associado a um cachorro que puxa uma coleira ao longo de uma linha

horizontal, sendo a tratriz conhecida também como "a curva do cachorro".

Figura 17: Tratriz



Fonte: (WEISSTEIN, s.d)

Neste modelo, de acordo com Prološćić (2021), a superfície é considerada como o **plano** e as **retas** são formadas pelo caminho mais curto entre dois pontos.

## 6.2 Modelos de Poincaré

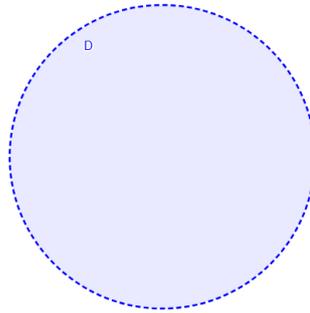
Jules Henri Poincaré nasceu em 1854 na França e faleceu em 1912. Segundo Agustini (2022), Poincaré é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele ficou conhecido pela introdução dos modelos completos para a Geometria Hiperbólica como o Modelo do Semiplano Superior e o Modelo do Disco de Poincaré.

Segundo Souza (2014), o Modelo de Poincaré foi criado entre 1882 e 1887. Ele utiliza os postulados da Geometria Hiperbólica mas ainda faz uso de resultados da Geometria Euclidiana, sendo assim, uma inconsistência da Geometria Hiperbólica pode ser transferida para a Geometria Euclidiana.

### 6.2.1 Modelo do Disco de Poincaré

No modelo do Disco de Poincaré, fazendo um compilado das definições trazidas por Souza (2014) e Agustini (2022), vamos considerar como **Plano Hiperbólico** o disco  $D$  sem sua circunferência, ou seja, sem seu bordo. Os pontos no interior desse disco serão chamados de **Pontos Hiperbólicos** enquanto os pontos na borda do disco serão chamados de **Pontos Ideais**.

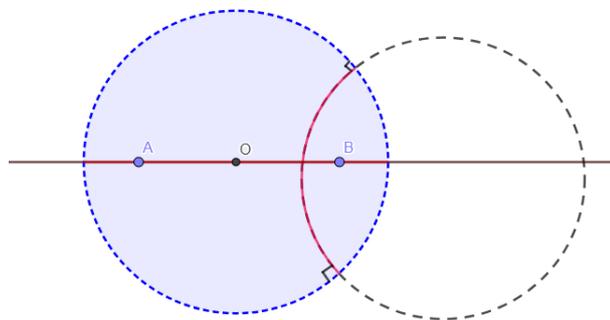
Figura 18: Disco de Poincaré



Fonte: A autora

Ainda tendo como referência os textos de Souza (2014) e Agustini (2022), no modelo do Disco, as **retas** serão o conjunto dos pontos de  $D$  que pertencem a uma circunferência ortogonal a seu bordo, ou, as interseções de  $D$  com seus diâmetros.

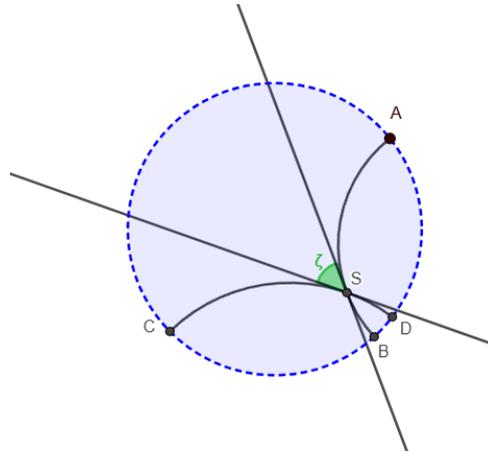
Figura 19: Retas no Disco de Poncaré



Fonte: A autora

Para medir os **ângulos** entre duas retas concorrentes em um determinado ponto no disco de Poincaré, se faz necessário traçar suas retas tangentes nesse ponto e então calcular a medida do ângulo euclidiano formado pelas tangentes já que, segundo Agustini (2022), a medida do ângulo Hiperbólico coincide com a medida do ângulo Euclidiano.

Figura 20: Como medir ângulos no Disco de Poincaré

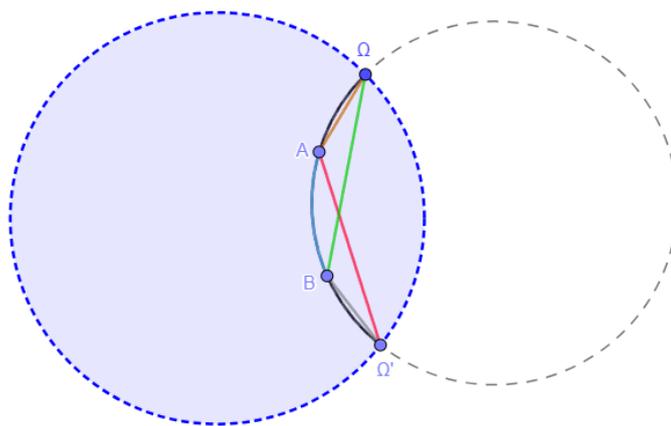


Fonte: A autora

Já a medida de **distância** é um pouco mais complexa do que a medida dos ângulos pois não podemos usar a distância Euclidiana. De acordo com os Axiomas de Ordem de Hilbert, uma reta deve ser infinita, o que não ocorreria se pensássemos nela como sendo o arco ou o diâmetro de um círculo usando a distância Euclidiana.

Sendo assim, a **distância hiperbólica** entre os pontos A e B no disco D a seguir será definida por:

Figura 21: Distância entre os pontos A e B



Fonte: A autora

$$d(A, B) : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(A, B) = \ln \left| \frac{AQ' \cdot BQ}{AQ \cdot BQ'} \right|$$

Vejam os que,

- Quando  $A=B$ ,

$$d(A, B) = d(A, A) = \ln\left|\frac{1}{1}\right| = \ln(1) = 0$$

- Quando os pontos se afastam,

$$\frac{A\Omega'.B\Omega}{A\Omega.B\Omega'} > 1$$

$$\Rightarrow A\Omega'.B\Omega > A\Omega.B\Omega'$$

$$\Rightarrow d(A, B) > 0$$

Ou seja, quanto mais os pontos se afastam, maior a razão  $\frac{A\Omega'.B\Omega}{A\Omega.B\Omega'}$  e daí, maior o logaritmo. Sendo assim, quanto mais os pontos se afastam, maior a distância entre eles.

É possível verificar que  $d : (A, B)$  satisfaz as condições de métrica.

As demonstrações das proposições trazidas neste trabalho serão feitas por meio do Modelo Do Disco de Poincaré.

## 7 Surgimento da Geometria Hiperbólica

Como visto anteriormente, o problema da aceitação do quinto postulado de Euclides perdurou por muitos séculos, gerando intensos debates entre os matemáticos da época. Durante as tentativas de prová-lo, que se estenderam por várias gerações, os estudiosos da época não apenas enfrentaram as dificuldades de encontrar uma demonstração satisfatória, mas também começaram a se deparar com evidências que apontavam para a possibilidade de surgirem novas geometrias. Essas novas abordagens não faziam uso do quinto postulado de Euclides, ou seja, negavam esse postulado. Entre as descobertas mais notáveis, destacam-se as ideias de Geometrias Não Euclidianas, como a Geometria Hiperbólica e a Elíptica, que romperam com a visão tradicional Euclidiana do mundo. Contudo, tais descobertas nem sempre foram bem aceitas nem receberam o devido reconhecimento na época, sendo muitas vezes rejeitadas.

“A historia das descobertas científicas nos ensina que, toda mudança radical em um dos compartimentos da ciência, não produz, de imediato, alterações nas convicções e nas pressuposições nas quais os cientistas baseiam suas visões particulares da parte da ciência a que se dedicam” (BARBOSA, 2007, p.46)

Podemos nos deparar com duas possibilidades para a negação de tal postulado:

- Por um ponto fora de uma reta pode se traçar pelo menos duas retas paralelas a reta dada (conhecido como Postulado de Lobachewsky);
- Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar uma reta paralela à reta dada.

Ou seja, Nos deparamos com a possibilidade de uma infinidade de retas paralelas passando pelo mesmo ponto, ou com a inexistência delas. A negação que leva à possibilidade da não existência de retas paralelas dá origem ao que conhecemos hoje como Geometria Esférica, enquanto a negação que leva à possibilidade da existência de infinitas retas paralelas dá origem ao que chamamos de Geometria Hiperbólica, que será o objeto de estudo do presente trabalho.

Além da diferença na quantidade de retas paralelas entre as três geometrias, também podemos citar a diferença na soma dos ângulos internos de um triângulo. Na Geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a  $180^\circ$ ,

propriedade que é válida para qualquer triângulo em um espaço plano. No entanto, na Geometria Hiperbólica, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que  $180^\circ$ , o que reflete a curvatura negativa do espaço hiperbólico. Já na Geometria Esférica, devido à curvatura positiva da esfera, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que  $180^\circ$ . O conceito de semelhança de triângulos também é equivalente ao quinto postulado de Euclides e, portanto, não se aplica a essa geometria. Os casos de congruência conhecidos na Geometria Euclidiana, que não fazem uso do quinto postulado, também são válidos para os triângulos ordinários. Além dos casos conhecidos, demonstraremos adiante o caso Ângulo-Ângulo-Ângulo (AAA), que não se aplica à Geometria plana, bem como os casos de congruência em triângulos generalizados.

Neste capítulo, faremos as demonstrações, sem tanto rigor e formalismo, dos principais Teoremas que caracterizam essa Geometria, a fim de fornecer uma compreensão mais profunda de seus fundamentos e implicações.

## 7.1 Resultados da Geometria Euclidiana

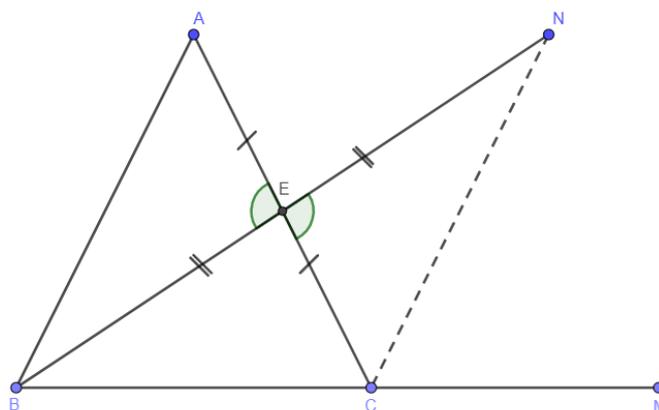
Para começar, enunciaremos algumas proposições importantes da Geometria Euclidiana Plana, encontradas no livro do Agustini (2022), que serão utilizadas nas demonstrações das proposições da Geometria Hiperbólica.

**Teorema 1.** *"(Proposição I-16 do livro 1 de "Os Elementos": Teorema do ângulo externo) Em qualquer triângulo, se um dos lados for continuado, o ângulo externo formado é sempre maior do que qualquer um dos ângulos internos que não lhe sejam adjacentes."*

### Demonstração:

Seja  $ABC$  um triângulo. Consideremos o ponto  $M$  na reta  $BC$  tal que  $C$  esteja entre  $B$  e  $M$ . Consideremos também o ponto  $E$  médio de  $AC$  e tome  $N$  na reta  $BE$  tal que  $E$  esteja entre  $B$  e  $N$  e  $BE \equiv EN$ . Vamos mostrar que o ângulo externo  $M\hat{C}A$  é maior do que os ângulos internos a ele não adjacentes, ou seja,  $M\hat{C}A > B\hat{A}C$  e  $M\hat{C}A > A\hat{B}C$

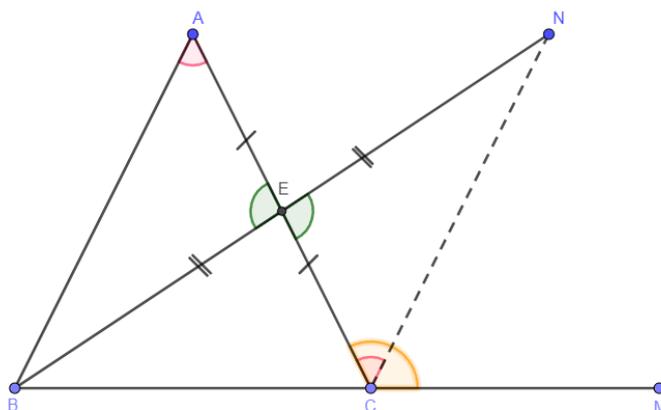
Figura 22: Desenho suporte para a demonstração do Teorema do ângulo externo.



Fonte: A autora

Como os ângulos  $\hat{AEB}$  e  $\hat{NEC}$  são opostos pelo vértice, então, pelo caso lado-ângulo-lado (LAL), os triângulos ABE e CNE são congruentes e daí,  $\hat{BAC} \equiv \hat{NCA}$ .

Figura 23: Ângulos congruentes para a demonstração.



Fonte: A autora

Mas, note que o ângulo  $\hat{MCA}$  é externo ao triângulo ABC e  $\hat{MCA} > \hat{NCA}$ . Daí, concluímos que:

$$\hat{BAC} \equiv \hat{NCA} < \hat{MCA} \Rightarrow \hat{BAC} < \hat{MCA}.$$

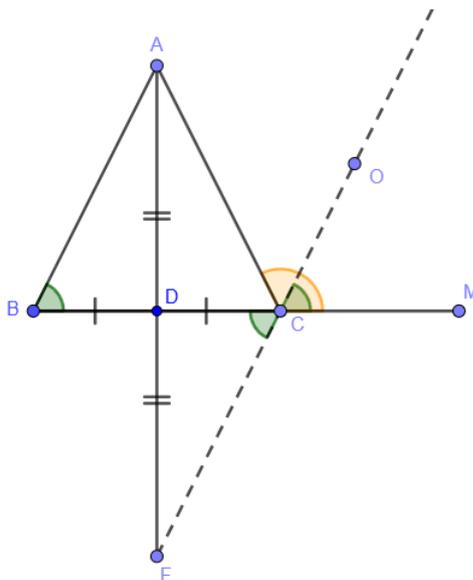
Agora, vejamos que  $\hat{MCA} > \hat{ABC}$ .

De fato, consideremos o ponto D, médio de BC, ou seja,  $BD \equiv DC$  e tomemos F na reta AD de tal forma que D esteja entre A e F e que  $AD \equiv DF$ . Sendo assim,

como  $B\hat{D}A \equiv F\hat{D}C$  pois são opostos pelo vértice, então os triângulos BDA e CDF são congruentes pelo caso LAL. Da congruência, podemos concluir que  $A\hat{B}C \equiv F\hat{C}D$ .

Consideremos o ponto O na reta FC tal que C esteja entre F e O. Note que  $F\hat{C}D$  e  $M\hat{C}O$  são opostos pelo vértice e portanto, são congruentes. Daí, concluímos que  $A\hat{B}C \equiv F\hat{C}D \equiv M\hat{C}O$ .

Figura 24: Ângulos congruentes para demonstração.



Fonte: A autora

Como o ângulo  $M\hat{C}A$  é externo ao triângulo ABC e  $M\hat{C}A > M\hat{C}O$  podemos concluir que:

$$M\hat{C}A > M\hat{C}O \equiv F\hat{C}D \equiv A\hat{B}C \Rightarrow M\hat{C}A > A\hat{B}C.$$

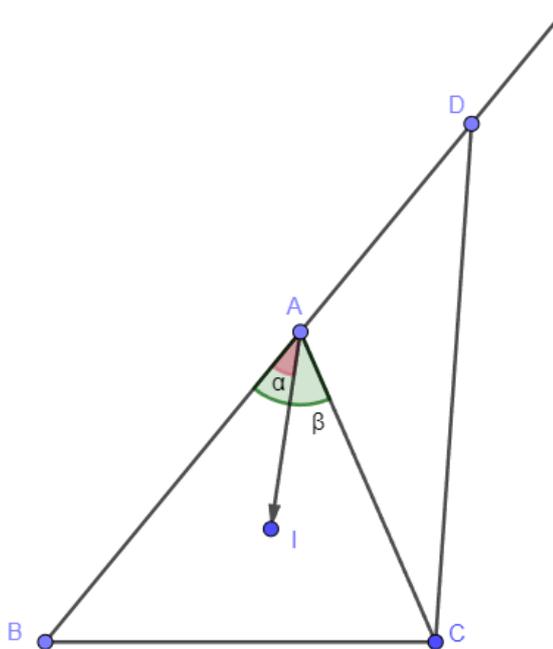
□

**Teorema 2.** "Sejam ABC um triângulo e r reta que passa por A e por um ponto interior ao triângulo ABC. Então, a reta r intersecta o lado BC do triângulo."

**Demonstração:**

Consideremos um triângulo ABC e r uma reta que entra nesse triângulo por A. Consideremos  $I \in r$  um ponto interior de ABC.

Figura 25: Reta que entra no triângulo por um de seus vértices.



Fonte: A autora

Como sabemos que por dois pontos podemos traçar uma única reta, então  $r$  não pode intersectar os lados  $AB$  e  $AC$ , pois de maneira oposta,  $r$  iria conter esses lados e daí, não passaria por dentro do triângulo citado.

Sendo assim, consideremos a reta  $s$  que passa por  $A$  e  $B$  e um ponto  $D$  nessa reta tal que  $A$  esteja entre  $B$  e  $D$ . Chamemos de  $\alpha$  o ângulo definido por  $B\hat{A}I$  e  $\beta$  o ângulo definido por  $B\hat{A}C$ .

Como  $\alpha < \beta$  então  $r$  não passa no interior do triângulo  $DAC \Rightarrow r \cap DC = \emptyset$ .

Analisando agora o triângulo  $BDC$ , note que a interseção de  $r$  com esse triângulo é o ponto  $A$ . Logo, por Pash, a reta  $r$  deve intersectar o lado  $BC$  ou  $DC$ . Como não pode passar por  $DC$ , pois não teria ponto no interior de  $DAC$ , então deve intersectar o lado  $BC$ . □

## 7.2 Resultados da Geometria Hiperbólica

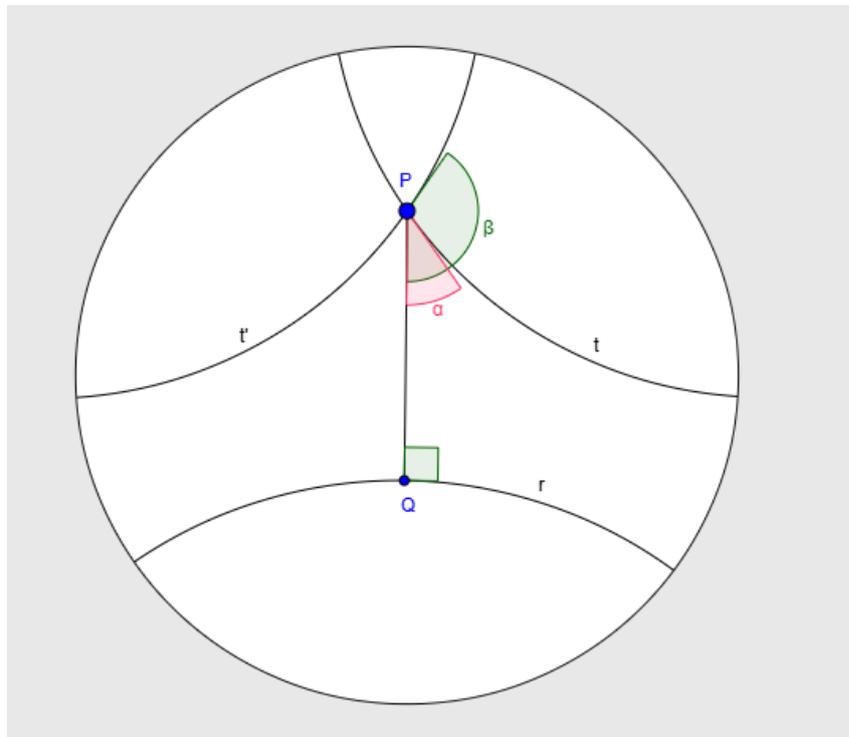
**Teorema 3.** “Sejam  $r$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $r$ . Então, existem infinitas retas que passam por  $P$  e não intersectam  $r$ .”

### Demonstração:

Consideremos uma reta  $r$  e um ponto  $P$  que não pertence à reta. Pelo Postulado de Lobachewsky, visto anteriormente, sabemos que “por um ponto não pertencente a uma reta dada, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não intersectam a reta dada”, portanto, sejam  $t$  e  $t'$  essas duas retas.

Seja  $Q$  o ponto de interseção da reta  $r$  com a sua perpendicular que passa por  $P$ . Consideremos os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  como mostra a figura a seguir.

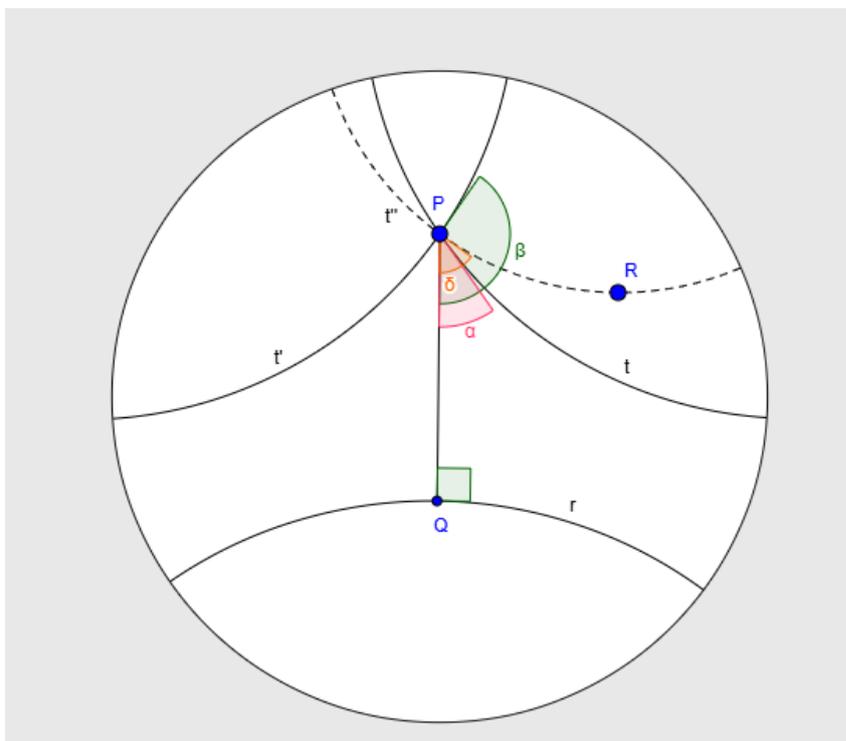
Figura 26: Existem pelo menos duas retas paralelas.



Fonte: A autora

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $\alpha < \beta$ . Com isso, sabemos que existe  $\delta$  tal que  $\alpha < \delta < \beta$ . Seja o ponto  $R$ , do mesmo lado dos setores angulares  $\alpha$  e  $\beta$  tal que  $\widehat{QPR} \equiv \delta$  e  $t''$  a reta que passa por  $P$  e  $R$ .

Figura 27: Construção da reta  $t''$ .



**Fonte:** A autora

Se  $t''$  intersecta  $r$  em um ponto que chamaremos de  $O$ , então nos deparamos com duas possibilidades:

- $t$  entra no triângulo  $PQO$  pelo vértice  $P$

Como provado anteriormente, se a reta entra no triângulo por um de seus vértices, então deve intersectar o lado oposto ao vértice, ou seja, se  $t$  entra no triângulo  $PQO$  por  $P$ , então deve intersectar o lado  $QO$ , o que é uma contradição com a hipótese de que  $t$  é paralela a reta  $r$ .

- $t'$  entra no triângulo  $PQO$  pelo vértice  $P$

De modo análogo, se  $t'$  entra no triângulo  $PQO$  por  $P$ , então deve intersectar o lado  $QO$ , o que é uma contradição com a hipótese de que  $t'$  é paralela a reta  $r$ .

Sendo assim,  $t''$  não intersecta a reta  $r$ .

Note que, temos infinitas possibilidades de  $\delta \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha < \delta < \beta$  e portanto, infinitas possibilidades para o ponto  $R$  que gera a reta  $t''$ . Portanto, temos infinitas retas  $t''$  que passam por  $P$  e não intersectam  $r$ .  $\square$

**Teorema 4.** "Sejam  $r$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $r$ . Consideremos:

$C_1$ : conjunto das retas que passam por  $P$  e não intersectam  $r$ ;

$C_2$ : conjunto das retas que passam por  $P$  e intersectam  $r$ .

Então, existem exatamente duas retas distintas  $s$  e  $s'$  de  $C_1$  que determinam no plano hiperbólico dois pares  $S_1$  e  $S_2$  de setores angulares opostos pelo vértice  $P$  de tal modo que  $C_1 = S_1$  e  $C_2 \subset S_2$ ."

A demonstração do Teorema 4 se encontra no livro "Introdução à Geometria Hiperbólica Plana" de Edson Agustini (2022) na página 64.

**Definição 1.** Chamaremos de retas paralelas a  $r$  por  $P$  às retas  $s$  e  $s'$  da proposição anterior.

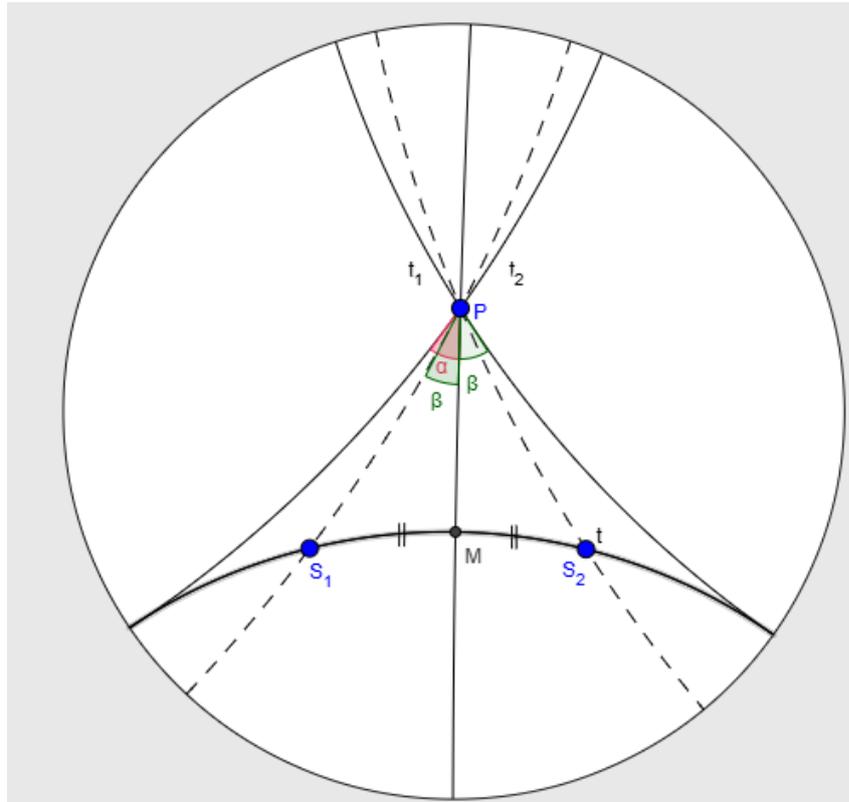
**Definição 2.** Chamaremos de retas hiperparalelas a  $r$  por  $P$  as demais retas da proposição anterior que passam por  $P$  e não intersectam  $r$ .

**Teorema 5.** "Sejam  $t$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $t$ . Então, as duas retas paralelas a  $t$  pelo ponto  $P$  determinam ângulos congruentes com o segmento perpendicular a reta  $t$  baixado de  $P$ . Além disso, os ângulos congruentes mencionados são agudos."

**Demonstração:**

Seja  $M$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  à reta  $t$ , ou seja,  $PM$  é perpendicular a reta  $t$ . Sejam também  $\alpha$  e  $\beta$  os ângulos formados com a perpendicular baixada, conforme a figura a seguir.

Figura 28: Construção dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ .



**Fonte:** A autora

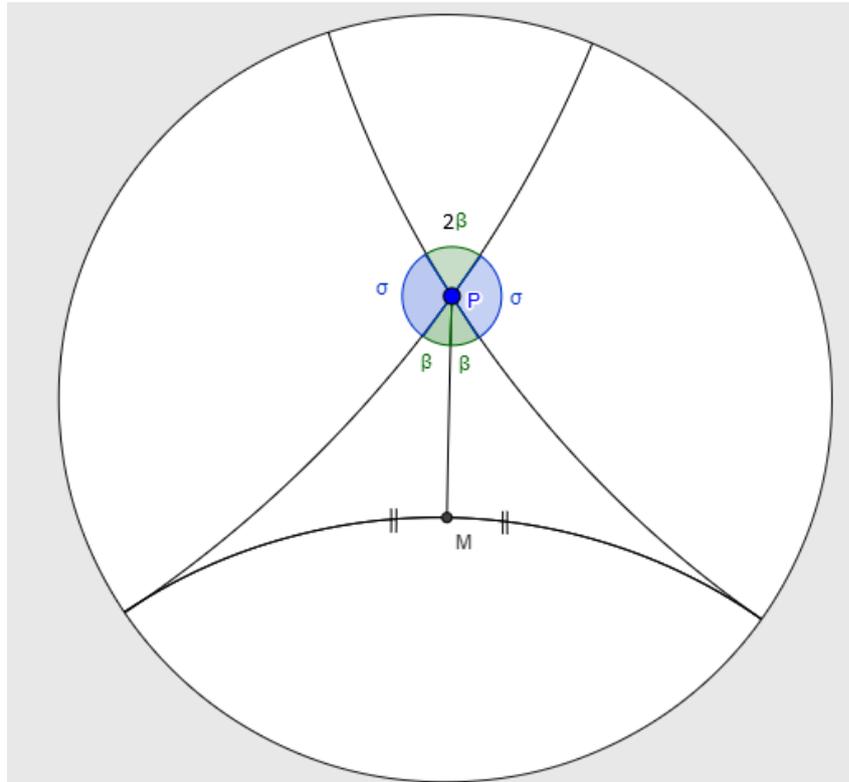
Suponhamos que  $\beta \neq \alpha$ , portanto, sem perda de generalidade, consideremos  $\beta < \alpha$ .

Tracemos uma reta passando por P de modo que o lado em que está  $\alpha$  forme um ângulo do mesmo tamanho de  $\beta$  com PM. Pela proposição 4, é claro que ela intercepta a reta r. Chamemos essa interseção de  $S_1$ . Consideremos agora,  $S_2 \in r$  de modo que M seja ponto médio do seguimento  $S_1S_2$  e daí,  $S_1M \equiv S_2M$ .

Sendo assim, como  $PS_2$  corta a reta r, então, novamente pela proposição 4, deve cortar  $\beta$  e, portanto,  $M\hat{P}S_2 < \beta$ . Pelo caso lado-ângulo-lado (LAL), os triângulos  $PMS_1$  e  $PMS_2$  são congruentes e daí,  $M\hat{P}S_1 = M\hat{P}S_2 = \beta$ . O que é um absurdo já que  $M\hat{P}S_2 < \beta$ .

Ainda, chamemos de  $\sigma$  o ângulo assinalado na figura a seguir.

Figura 29: Verificação do ângulo de paralelismo agudo.



Fonte: A autora

Vejam os que:

$$\beta + \beta + 2\beta + \sigma + \sigma = 2\pi$$

$$\Rightarrow 4\beta + 2\sigma = 2\pi$$

$$\Rightarrow 4\beta = 2\pi - 2\sigma$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{2\pi - 2\sigma}{4}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{2}$$

$$\Rightarrow \beta < \frac{\pi}{2}$$

Portanto, os ângulos são agudos.

□

**Definição 3.** Os ângulos agudos enunciados na Proposição exterior são chamados de *ângulo de paralelismo entre  $t_1$  e  $r$  em  $P$*  e de *ângulo de paralelismo entre  $t_2$  e  $r$  em  $P$* .

**Definição 4.** Os pontos *ordinários* são os pontos que pertencem ao plano hiperbólico.

**Definição 5.** Consideremos a relação  $\sim$  de equivalência em  $S$ :

$$S_1 \sim S_2 \leftrightarrow S_1 \parallel S_2$$

As classes de equivalência da relação definida acima no conjunto  $S$  das semirretas do plano hiperbólico são chamadas de **pontos ideais** ou **pontos no infinito**. (Agustini, 2022)

Também podemos pensar o ponto ideal como sendo um ponto no bordo do Disco de Poincaré.

**Definição 6.** *Triângulos Generalizados são triângulos formados por um, dois ou até mesmo três vértices ideais.*

**Teorema 6.** *"Se uma reta  $r$  entra em um triângulo generalizado  $AB\Omega$  passando por um de seus vértices, então  $r$  intersecta o lado do triângulo generalizado oposto a esse vértice."*

### **Demonstração:**

Consideremos o triângulo generalizado  $AB\Omega$  e a reta  $r$ . Consideremos também os dois casos a seguir:

1. A reta  $r$  entra no triângulo generalizado pelo vértice  $A$ .
2. A rea  $r$  entra no triângulo generalizado por  $\Omega$ .

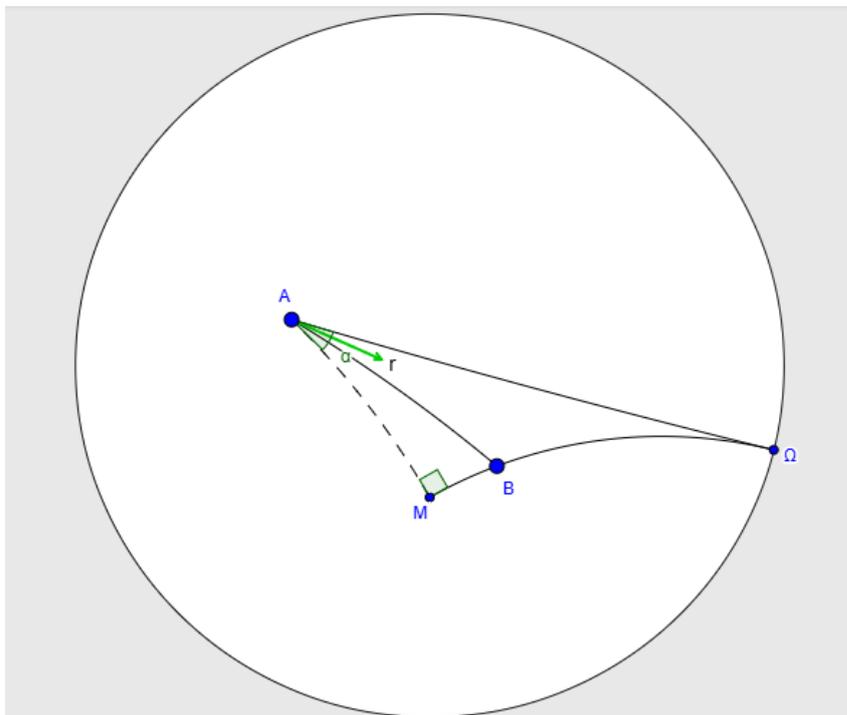
O caso em que a reta  $r$  entra no triângulo generalizado pelo vértice  $B$  deve ser análogo ao caso em que passa pelo vértice  $A$ .

**Caso 1:**  $r$  entrando em  $AB\Omega$  por  $A$ .

Consideremos  $M$  a interseção da perpendicular, que passa por  $A$ , com  $B\Omega$  e chamemos de  $\alpha$  o ângulo  $M\hat{A}\Omega$ . Analisemos as duas possíveis situações:

- I.  $B\hat{A}\Omega \leq \alpha$

Figura 30: Análise do caso  $B\hat{A}\Omega < \alpha$ .



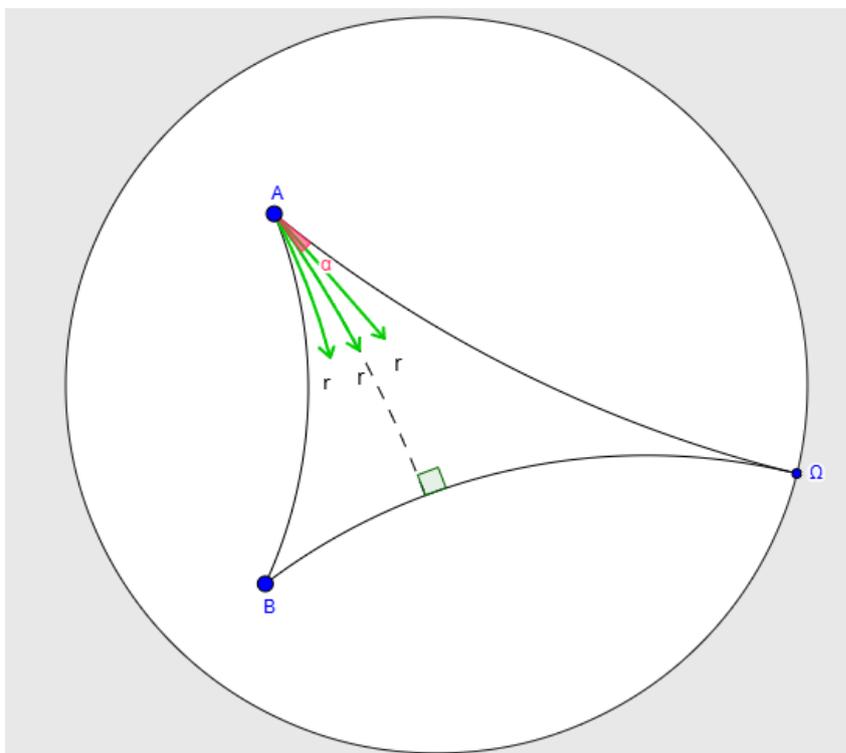
Fonte: A autora

Nesse caso, o ponto B está entre M e  $\Omega$ , como mostra na figura 30. Como  $B\hat{A}\Omega \leq \alpha$  e r entra no triângulo por A, então a reta r corta o ângulo de paralelismo ( $\alpha$ ) e, portanto, pela proposição vista anteriormente, deve intersectar o lado  $B\Omega$  do triângulo.

## II. $B\hat{A}\Omega > \alpha$

Nesse caso, M está entre B e  $\Omega$ , como mostra na figura 31.

Figura 31: Análise do caso  $B\hat{A}\Omega > \alpha$ .



Fonte: A autora

Temos os seguintes casos:

- $r$  entra no triângulo  $MA\Omega$

Sendo assim,  $r$  corta o ângulo de paralelismo ( $\alpha$ ) e portanto, como visto anteriormente, deve intersectar o lado  $B\Omega$

- $r$  entra no triângulo  $ABM$

Como já vimos anteriormente, o resultado é válido para triângulos que não são generalizados, então deve ser válido para o triângulo  $ABM$ . Ou seja, deve intersectar o lado  $B\Omega$ .

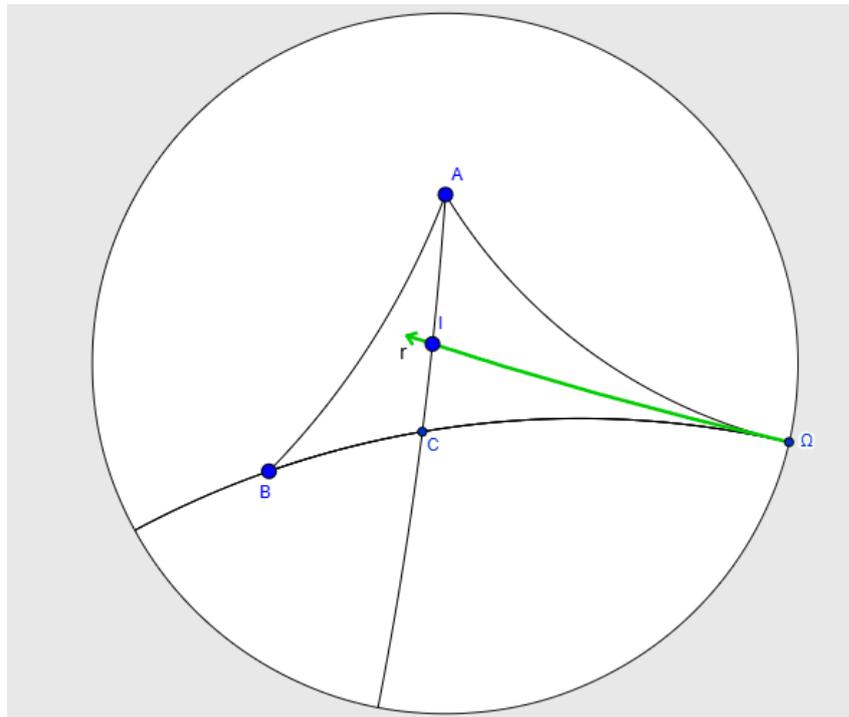
- $r$  contém  $M$

Como  $M$  é o pé da perpendicular baixada de  $A$  a reta  $B\Omega$  então  $M$  pertence à reta  $r$  e pertence ao lado  $B\Omega$  sendo um ponto de intersecção entre os dois.

**Caso 2:**  $r$  entrando em  $AB\Omega$  por  $\Omega$ .

Consideremos um ponto  $I \in r$  no interior de  $AB\Omega$ .

Figura 32: Reta entrando no triângulo pelo ponto ideal.



Fonte: A autora

Como demonstrado logo acima,  $AI$  deve intersectar o lado  $B\Omega$  em um ponto que chamaremos de  $C$ .

Com isso,  $r$  corta o lado  $AC$  do triângulo  $ABC$  e, por Pasch, deve intersectar o lado  $AB$  ou o lado  $BC$ . Se  $r$  intersectar  $BC$ , então  $r$  e  $B\Omega$  seriam paralelas a  $A\Omega$  em um mesmo sentido com um ponto em comum, ou seja,  $r$  e  $B\Omega$  seriam coincidentes. O que é uma contradição pois  $I$  deve estar no interior de  $AB\Omega$ . Portanto,  $r$  deve intersectar o lado  $AB$ . □

**Teorema 7.** *"Se uma reta  $r$  entra em um triângulo generalizado  $AB\Omega$  intersectando um de seus lados mas não passando por nenhum de seus vértices, então  $r$  intersecta um dos outros dois lados do triângulo generalizado."*

### Demonstração:

Consideremos o triângulo generalizado  $AB\Omega$  e os seguintes casos:

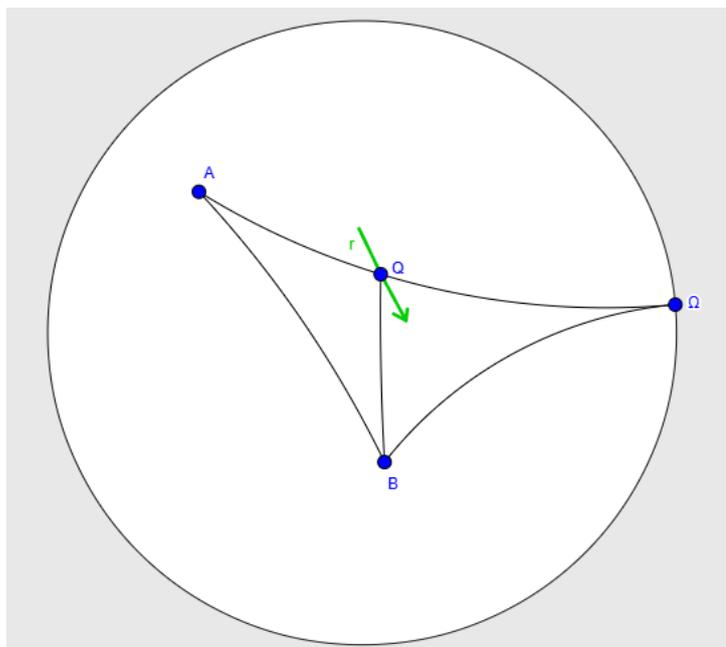
1.  $r$  entra no triângulo  $AB\Omega$  pelo lado  $A\Omega$ ;
2.  $r$  entra no triângulo  $AB\Omega$  pelo lado  $AB$ .

O caso em que  $r$  entra no triângulo  $AB\Omega$  pelo lado  $B\Omega$  é análogo ao caso 1.

**Caso 1:**  $r$  entra no triângulo pelo lado  $A\Omega$ .

Consideremos um ponto  $Q$  em  $A\Omega$ .

Figura 33: Reta que corta um dos lados do triângulo generalizado.



**Fonte:** A autora

Então:

- $r$  entra em  $BQ\Omega$ .

Pela proposição anterior, como  $r$  está entrando em um triângulo generalizado pelo seu vértice, deve então intersectar o lado oposto ao vértice, ou seja, deve intersectar o lado  $B\Omega$ .

- $r$  entra em  $ABQ$ .

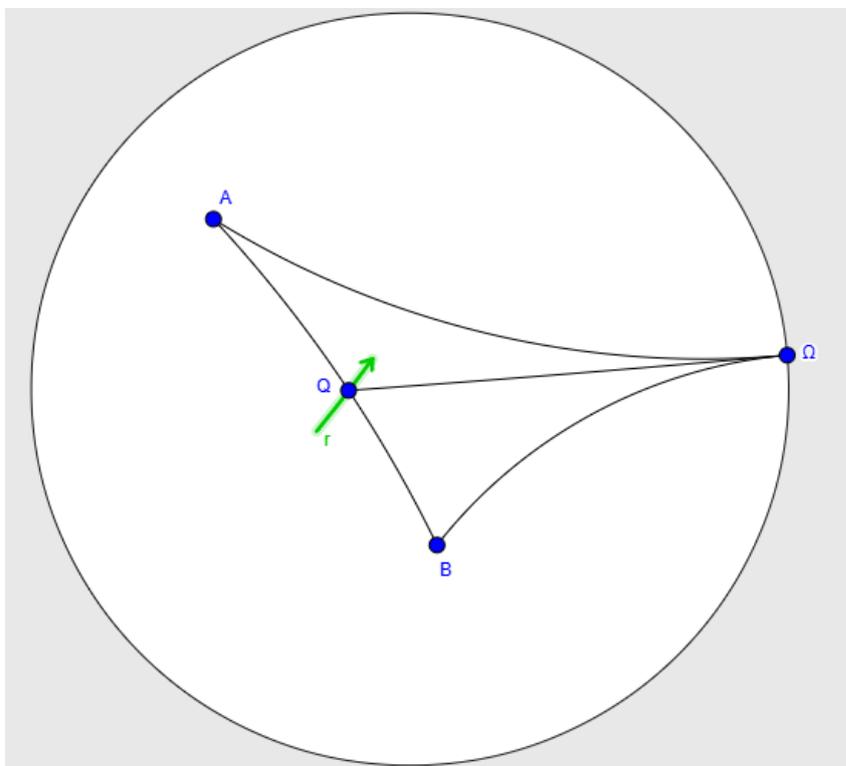
Como  $r$  entra no triângulo pelo seu vértice, então, como visto anteriormente, deve intersectar o lado oposto a esse vértice, ou seja, deve intersectar o lado  $AB$ .

Note que  $r$  não pode conter  $BQ$  pois, por hipótese,  $r$  não passa por nenhum dos vértices do triângulo.

**Caso 2:**  $r$  entra no triângulo pelo lado  $AB$ .

Consideremos  $Q$  um ponto em  $AB$ .

Figura 34: Reta que corta um dos lados do triângulo generalizado.



Fonte: A autora

Então, teríamos dois casos:

- $r$  entra em  $AQ\Omega$ .

Nesse caso, pela proposição anterior, como  $r$  entra no triângulo generalizado pelo vértice  $Q$ , então deve intersectar o lado oposto ao vértice, ou seja, deve intersectar o lado  $A\Omega$ .

- $r$  entra em  $BQ\Omega$ .

De modo análogo, novamente pela proposição anterior,  $r$  deve intersectar o lado  $B\Omega$  do triângulo  $BQ\Omega$ .

Outra vez, a reta  $r$  não deve conter  $Q\Omega$  pois, por hipótese,  $r$  não passa por nenhum dos vértices do triângulo.

□

**Teorema 8.** "(Teorema do Ângulo Externo para Triângulos Generalizados) Um ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe seja adjacente."

**Demonstração:**

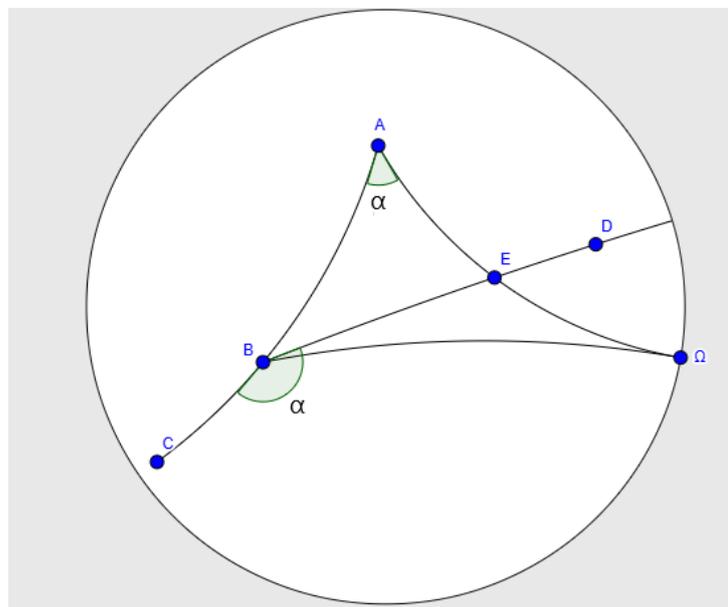
Um ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre diferente de zero, sendo assim, superior ao ângulo nulo nos vértices ideais.

Portanto vamos apenas mostrar que o ângulo externo em B é maior que o ângulo interno A em  $AB\Omega$ . O caso para o ângulo externo em A é análogo à demonstração que faremos a seguir.

Consideremos o triângulo  $AB\Omega$  e o ponto C em AB tal que B esteja entre C e A. Consideremos também a semirreta BD tal que  $C\hat{B}D = B\hat{A}\Omega = \alpha$ . Com isso, teremos os seguintes casos:

- I. BD entra no triângulo  $AB\Omega$ .

Figura 35: Possibilidade para a construção do ângulo congruente a  $\alpha$ .



Fonte: A autora

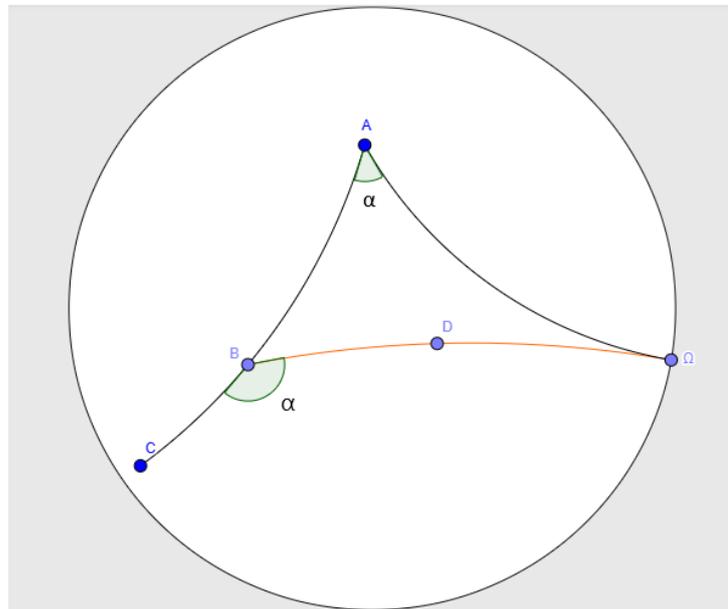
Como a semirreta entra no triângulo por um de seus vértices, como provado anteriormente, sabemos que ela deve intersectar o lado oposto a esse vértice, ou seja, deve intersectar o lado  $A\Omega$  em um ponto que chamaremos de E. Com isso, como

$\widehat{C\hat{B}D}$  é externo ao triângulo ABE e  $\widehat{C\hat{B}D} = \widehat{B\hat{A}\Omega} = \alpha$  então ABE possui um ângulo externo igual a um ângulo interno não adjacente, o que é uma contradição ao Teorema do Ângulo externo.

II. BD coincide com  $B\Omega$ .

Consideremos agora o ponto P, médio do segmento AB. Chamaremos de Q a interseção de  $B\Omega$  com a perpendicular baixada de P e de R o ponto que pertence a  $A\Omega$  tal que  $RA \equiv BQ$

Figura 36: Possibilidade para a construção do ângulo congruente a  $\alpha$ .

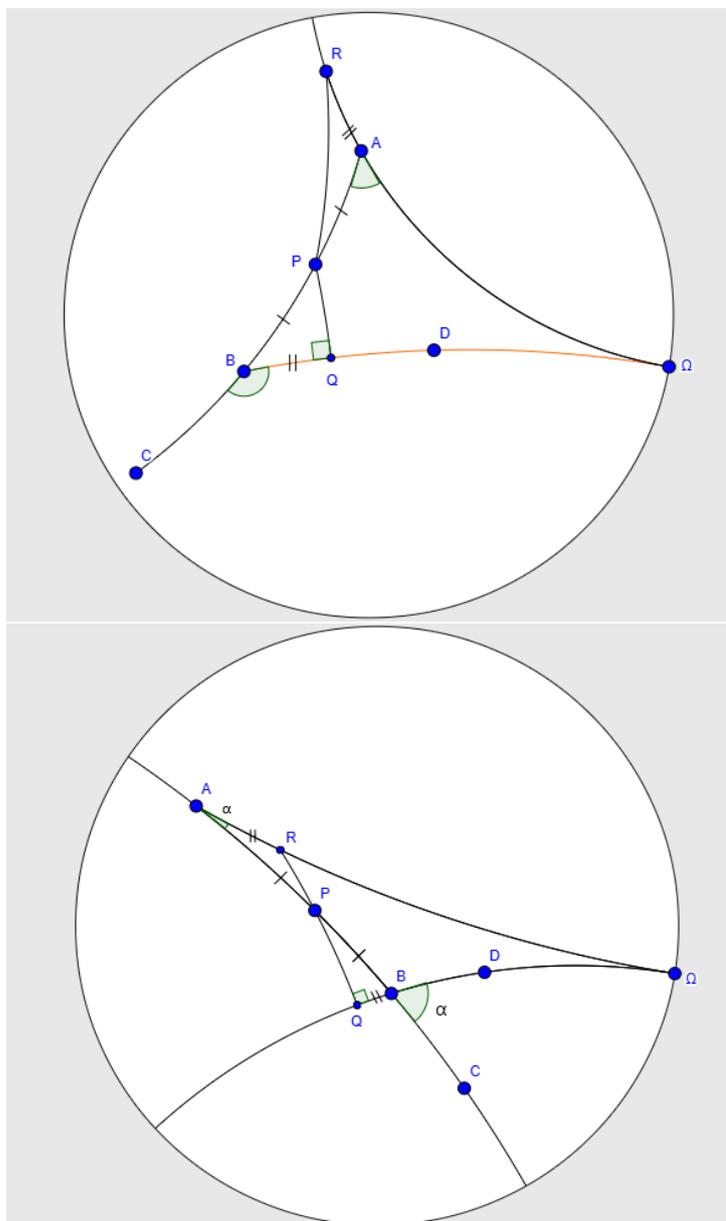


Fonte: A autora

- (a) Se Q coincide com B, então R deve coincidir com A e daí,  $\alpha$  é um ângulo reto, o que é uma contradição com o fato de que o ângulo de paralelismo deve ser agudo.
- (b) Se Q estiver entre B e  $\Omega$ , tomemos R tal que A esteja entre R e  $\Omega$ , conforme a Figura 37.

Com isso, note que os ângulos,  $\widehat{R\hat{A}P}$  e  $\widehat{Q\hat{B}P}$  são suplementares de  $\alpha$  e portanto,  $\widehat{R\hat{A}P} \equiv \widehat{Q\hat{B}P}$ . Sendo assim, como P é ponto médio de AB e R foi tomado de forma com que  $RA \equiv BQ$ , então, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que  $BQP \equiv ARP$  o que nos leva a concluir que os pontos R, P e Q são colineares e que PR é perpendicular a  $A\Omega$  o que novamente é uma contradição

Figura 37: Possibilidades para o ponto Q.



Fonte: A autora

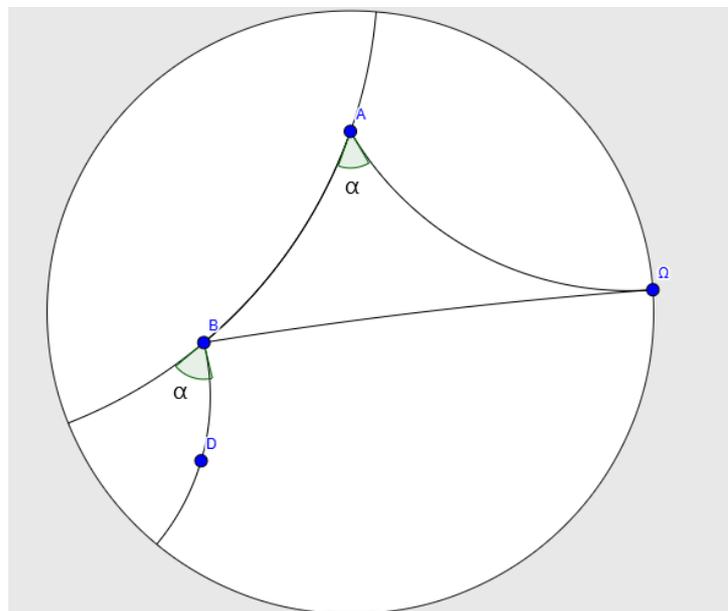
com o fato de que o ângulo de paralelismo não pode ser reto.

- (c) Se Q é tal que B está entre Q e  $\Omega$ , tomemos R entre A e  $\Omega$ , conforme a Figura 37

Note que, por ser oposto pelo vértice,  $\hat{A}BQ = \alpha$ . Daí, analogamente ao caso anterior, novamente pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que  $BQP \equiv ARP$ , implicando que os pontos R, P e Q são colineares e que PR é perpendicular a  $A\Omega$  entrando outra vez em uma contradição.

III.  $BD$  divide o ângulo externo de  $A\hat{B}\Omega$ .

Figura 38: Possibilidade para a construção do ângulo congruente a  $\alpha$ .



Fonte: A autora

Logo, note que o ângulo externo  $C\hat{B}\Omega$  é maior do que o ângulo  $C\hat{B}D \equiv B\hat{A}\Omega = \alpha$ . Portanto, o ângulo externo do triângulo  $AB\Omega$  é maior que o ângulo interno a ele não adjacente.  $\square$

**Teorema 9.** "A soma dos ângulos internos de um triângulo ordinário é menor do que dois retos."

### Demonstração:

Vimos anteriormente que são válidas as duas proposições de Legendre. Vamos supor que existe um triângulo ordinário no qual a soma dos ângulos internos é igual a dois ângulos retos. Pela segunda proposição de Legendre "Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a  $\pi rad$ , então a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a  $\pi rad$ ". Daí, concluimos que todos os triângulos ordinários devem possuir a soma dos ângulos internos igual a dois ângulos retos, o que, como visto anteriormente, é equivalente ao Axioma das paralelas de Euclides, que não vale na Geometria Hiperbólica e portanto, gera uma contradição. Sendo assim, como a primeira proposição de Legendre nos diz que "A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que ou igual a um ângulo raso" e acabamos de mostrar que o fato de existir um triângulo ordinário no

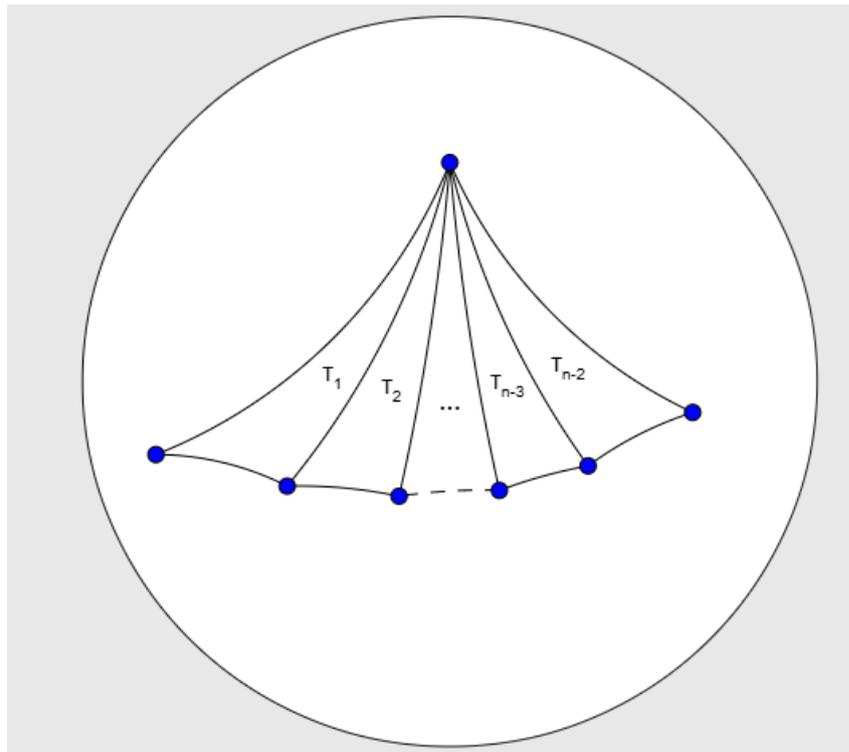
qual a soma dos ângulos internos é **igual** a dois ângulos retos nos leva a uma contradição, então, nos resta concluir que a soma dos ângulos internos do triângulo deve ser **menor** do que dois ângulos retos.

**Corolário 10.** "A soma dos ângulos internos de um polígono convexo ordinário de  $n$  lados possui medida menor do que  $(n - 2)\pi$ ."

**Demonstração:**

Consideremos um polígono de  $n$  lados. Por um dos vértices do polígono vamos traçar segmentos que ligam os vértices não adjacentes, ou seja, as diagonais. Com isso, vamos dividir o polígono em  $n - 2$  triângulos. Sejam eles  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-2}$

Figura 39: Polígono de  $n$  lados dividido em  $n - 2$  triângulos.



**Fonte:** A autora

Como visto anteriormente, a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser menor que dois ângulos retos. Portanto,

$$S_{T_1} < \pi,$$

$$S_{T_2} < \pi,$$

$$S_{T_3} < \pi,$$

⋮

$$S_{T_{N-2}} < \pi.$$

Com isso, concluímos que:  $S_{T_1} + S_{T_2} + S_{T_3} + \dots + S_{T_{N-2}} < \pi + \pi + \pi + \dots + \pi = (n-2)\pi$ .

□

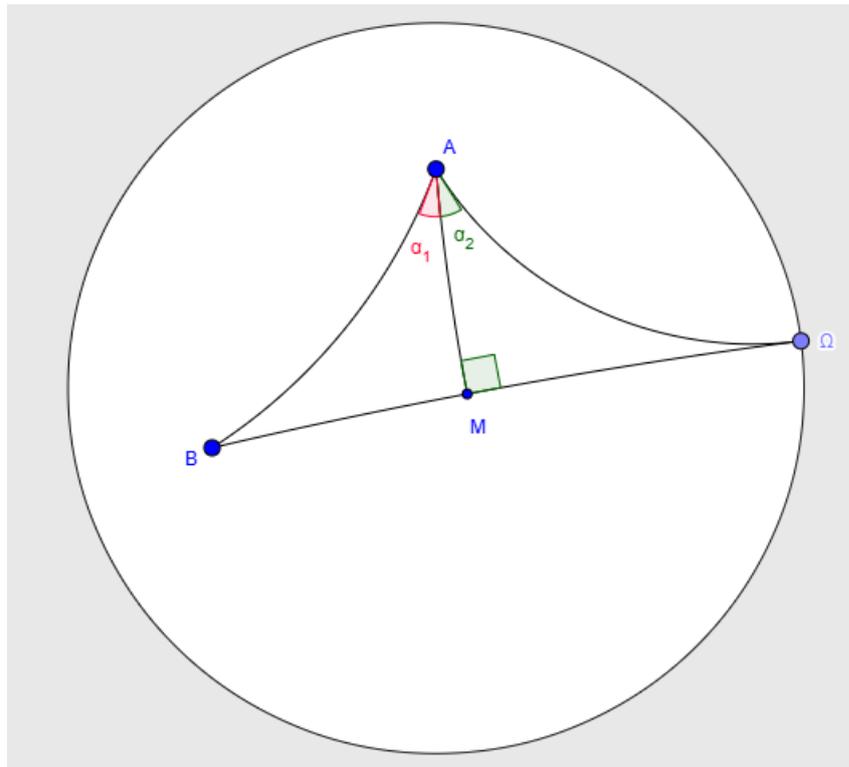
**Teorema 11.** "A soma dos ângulos internos de um triângulo generalizado é menor do que dois retos."

### Demonstração:

1. Triângulo generalizado contendo um ponto ideal:

Consideremos o triângulo generalizado  $AB\Omega$  e suponhamos que  $\hat{A} \geq \hat{B}$ . Consideremos  $M$  o pé da perpendicular baixada de  $A$  a  $B\Omega$  conforme a figura a seguir.

Figura 40: Triângulo generalizado contendo um ponto ideal.



**Fonte:** A autora

Chamaremos de  $\alpha_1$  o ângulo  $B\hat{A}M$  e de  $\alpha_2$  o ângulo  $M\hat{A}\Omega$ . Já que o triângulo  $ABM$  é um triângulo ordinário, como vimos anteriormente, a soma de seus ângulos internos deve ser menor do que  $\pi$ . Daí,

$$\hat{B} + \alpha_1 + \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow \hat{B} + \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$$

Note que o ângulo  $\alpha_2$  deve ser agudo pois é um ângulo de paralelismo, ou seja,  $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$  e  $\hat{\Omega}$  é nulo por definição. Sendo assim,

$$\hat{B} + \alpha_1 + \alpha_2 < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \alpha_1 + \alpha_2 < \pi$$

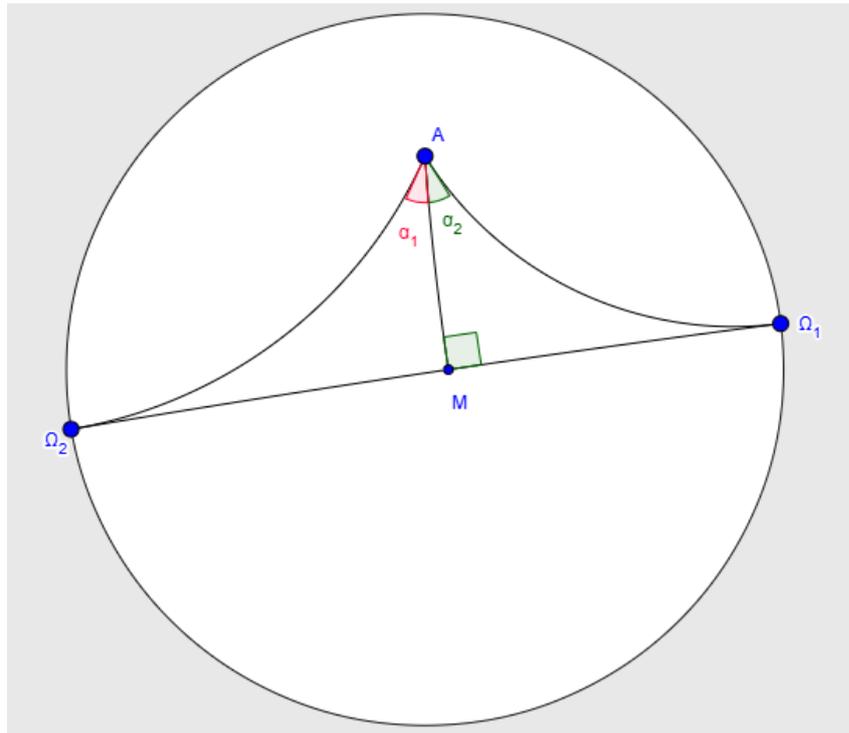
Como  $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv \hat{A}$ , temos que:

$$\hat{A} + \hat{B} < \pi$$

## 2. Triângulo generalizado contendo dois pontos ideais:

Consideremos o triângulo generalizado  $A\Omega_1\Omega_2$ . Consideremos também o ponto M, pé da perpendicular baixada de A a  $\Omega_1\Omega_2$  como na figura a seguir.

Figura 41: Triângulo generalizado contendo dois pontos ideais.



**Fonte:** A autora

Como as semirretas  $\overrightarrow{A\Omega_1}$  e  $\overrightarrow{A\Omega_2}$  são paralelas a reta  $\overleftrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$  então os ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são ângulos de paralelismo e por isoo, devem ser agudos, ou seja,  $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$  e  $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ .

Sendo assim,

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 < \pi$$

Ja que por definição os ângulos  $\hat{\Omega}_1$  e  $\hat{\Omega}_2$  são nulos, então a soma dos ângulos internos do triângulo  $A\Omega_1\Omega_2$  é menor do que dois ângulos retos. Como queríamos.

3. Triângulo generalizado contendo três pontos ideais:

É evidente que a soma dos ângulos internos de um triângulo  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$  é menor do que dois ângulos retos ja que, por definição, os ângulos  $\hat{\Omega}_1$ ,  $\hat{\Omega}_2$  e  $\hat{\Omega}_3$  são nulos.

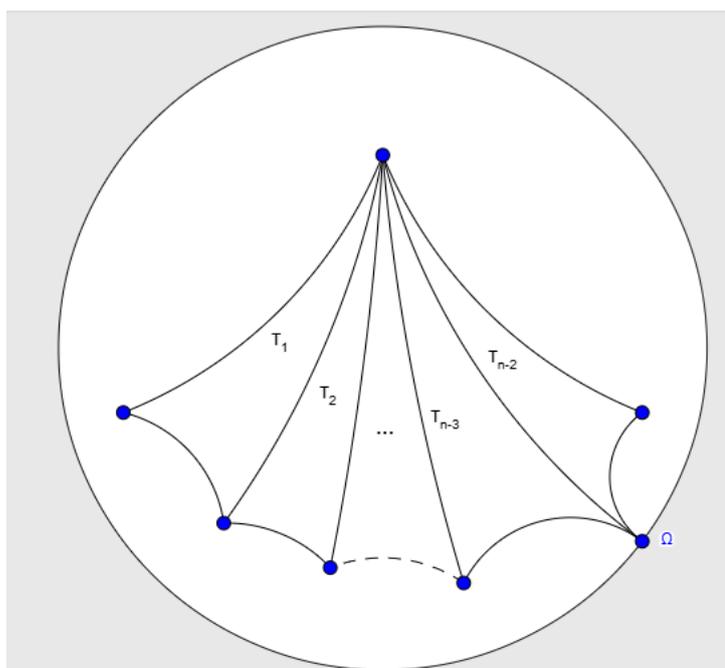
□

**Corolário 12.** "A soma dos ângulos internos de um polígono convexo generalizado de  $n$  lados possui medida menor do que  $(n - 2)\pi$ ."

**Demonstração:**

Consideremos um polígono convexo de  $n$  lados. Por um dos vértices do polígono (ordinário ou ideal) vamos traçar segmentos que ligam os vértices não adjacentes, ou seja, as diagonais. Com isso, vamos dividir o polígono em  $n - 2$  triângulos. Sejam eles  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{n-2}$ .

Figura 42: polígono convexo generalizado de  $n$  lados dividido em  $n - 2$  triângulos.



Fonte: A autora

Como visto anteriormente, a soma dos ângulos internos de um triângulo (generalizado ou não) deve ser menor que dois ângulos retos. Portanto,

$$S_{T_1} < \pi,$$

$$S_{T_2} < \pi,$$

$$S_{T_3} < \pi,$$

⋮

$$S_{T_{N-3}} < \pi,$$

$$S_{T_{N-2}} < \pi.$$

Com isso, concluímos que:  $S_{T_1} + S_{T_2} + S_{T_3} + \dots + S_{T_{N-3}} + S_{T_{N-2}} < \pi + \pi + \pi + \dots + \pi = (n - 2)\pi$ .

□

### Casos de congruência de triângulos ordinários:

Lembrando que os casos lado-ângulo-lado, lado-lado-lado, ângulo-lado-ângulo e lado-ângulo-ângulo oposto válidos na geometria Euclidiana também são válidos na Geometria Hiperbólica. A seguir, mostraremos o caso ângulo-ângulo-ângulo válido apenas na geometria hiperbólica.

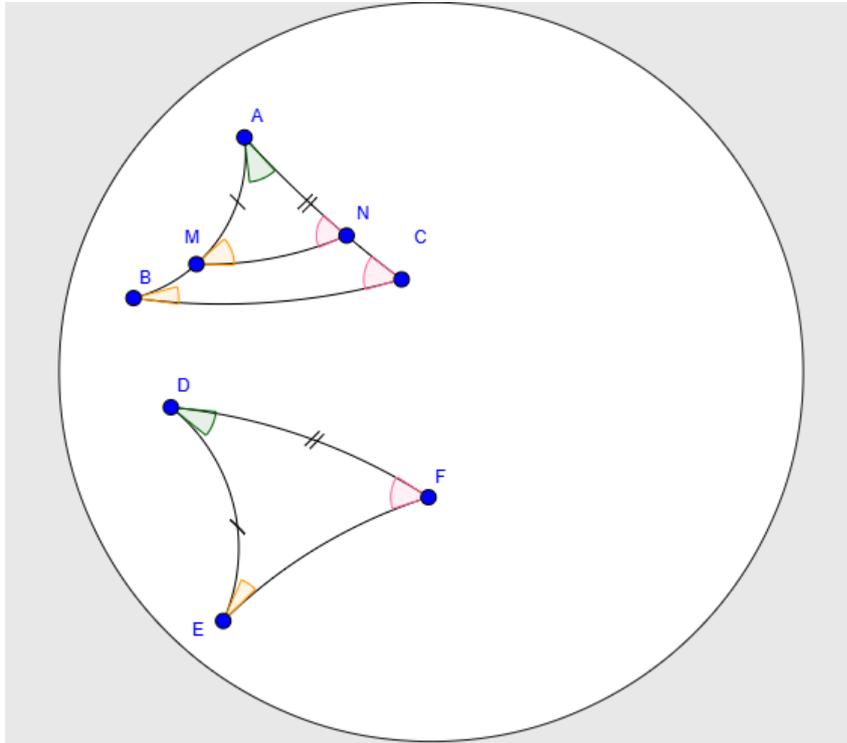
**Teorema 13.** "*(Caso de Congruencia AAA da Geometria Hiperbólica) Se ABC e DEF são triângulos ordinários tais que  $\hat{A} \equiv \hat{D}$ ,  $\hat{B} \equiv \hat{E}$  e  $\hat{C} \equiv \hat{F}$ , então  $ABC \equiv DEF$ .*"

### Demonstração:

Consideremos os triângulos ABC e DEF com  $\hat{A} \equiv \hat{D}$ ,  $\hat{B} \equiv \hat{E}$  e  $\hat{C} \equiv \hat{F}$ . Vamos supor que  $AB > DE$ . Sendo assim, consideremos o ponto M em AB tal que  $AM \equiv DE$  e o ponto N em AC tal que  $AN \equiv DF$ . Consideremos os casos:

- N entre A e C

Figura 43: Construção dos segmentos  $AM \equiv DE$  e  $AN \equiv DF$  com N entre A e C para a demonstração do caso de congruência AAA.



Fonte: A autora

Com isso, pelo caso LAL os triângulos DEF e AMN são congruentes. E daí, podemos concluir que:

$$\hat{A}MN \equiv \hat{D}EF \text{ e}$$

$$\hat{A}NM \equiv \hat{D}FE$$

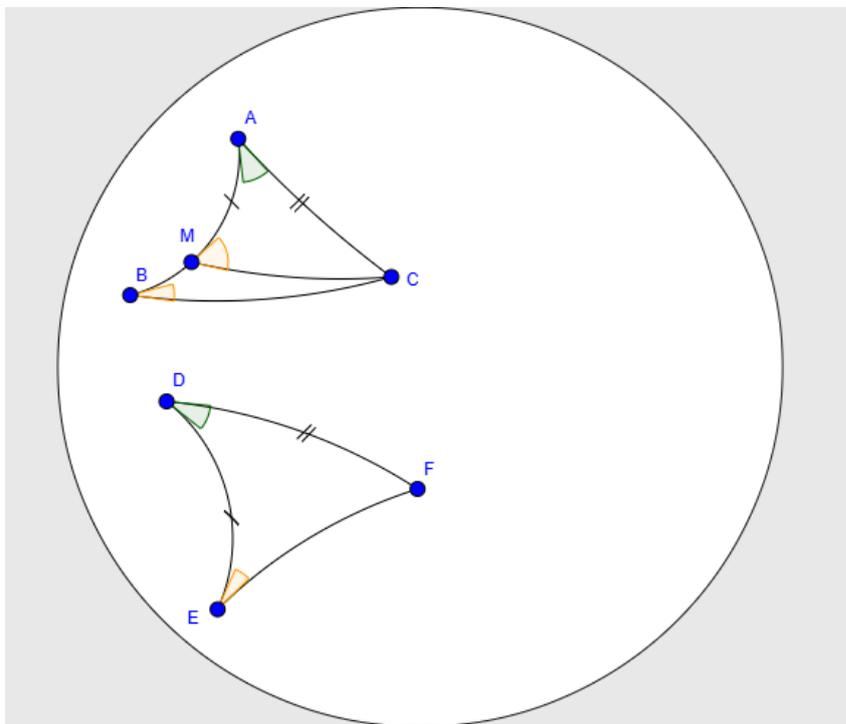
Mas, por hipótese,  $\hat{A} \equiv \hat{D}$ ,  $\hat{B} \equiv \hat{E}$  e  $\hat{C} \equiv \hat{F}$  e portanto,  $\hat{A}MN \equiv \hat{B}$  e  $\hat{A}NM \equiv \hat{C}$ .

Agora, note que  $M\hat{N}C$  é o ângulo suplementar de  $\hat{A}NM \equiv \hat{C}$  e  $N\hat{M}B$  é o ângulo suplementar de  $\hat{A}MN \equiv \hat{B}$ .

Portanto,  $M\hat{N}C + \hat{C} = \pi$  e  $N\hat{M}B + \hat{B} = \pi$ . Sendo assim, a soma dos ângulos internos do quadrilátero BCNM é igual a  $2\pi$  radianos, o que é uma contradição.

- $C \equiv N$

Figura 44: Construção dos segmentos  $AM \equiv DE$  e  $AN \equiv DF$  com  $C \equiv N$  para a demonstração do caso de congruência AAA.



Fonte: A autora

Novamente, pelo calo LAL, os triângulos DEF e AMN são congruentes. E daí, podemos concluir que  $\widehat{AMN} \equiv \widehat{E}$

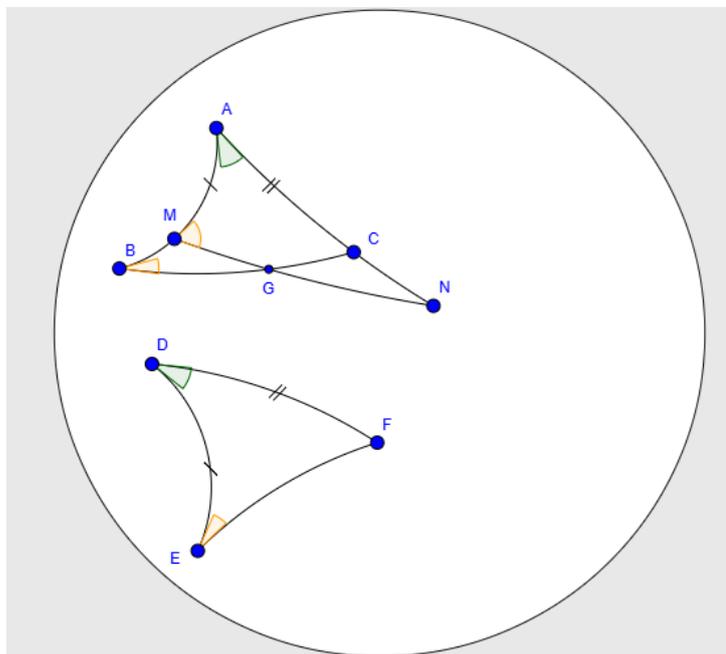
Por hipótese,  $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$ .

$\Rightarrow \widehat{AMN} \equiv \widehat{B}$ .

O que é uma contradição, pois  $\widehat{AMN}$  é ângulo externo ao triângulo BMC e pelo Teorema do Ângulo Externo, deve ser maior do que qualquer ângulo interno a ele não adjacente.

- C entre A e N

Figura 45: Construção dos segmentos  $AM \equiv DE$  e  $AN \equiv DF$  com C entre A e N para a demonstração do caso de congruência AAA.



Fonte: A autora

Novamente, pelo calo LAL, os triângulos DEF e AMN são congruentes. E daí, podemos concluir que:

$$\widehat{AMN} \equiv \widehat{E}$$

$$\widehat{ANM} \equiv \widehat{F}$$

Por hipótese,  $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$  e  $\widehat{C} \equiv \widehat{F}$ .

$$\Rightarrow \widehat{AMN} \equiv \widehat{B} \text{ e } \widehat{ANM} \equiv \widehat{C}$$

Note que  $\widehat{AMN}$  é ângulo externo ao triângulo MBG e  $\widehat{ACB}$  é ângulo externo ao triângulo CNG. Portanto, é uma contradição com o Teorema do Ângulo Externo já que os ângulos externos dos triângulos citados possuem a mesma medida de ângulos internos a eles não adjacentes.

Sendo assim, concluímos que  $AB \equiv DE$  e pelo caso ALA, os triângulos ABC e DEF devem ser congruentes.  $\square$

### Casos de congruência de triângulos generalizados:

**Definição 7.**

- "Dizemos que dois triângulos generalizados  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  são congruentes quando  $AB \equiv A'B'$ ,  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  e  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ . Indicamos por  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ "
- "Dizemos que dois triângulos generalizados  $A\Omega_1\Omega_2$  e  $A'\Omega'_1\Omega'_2$  são congruentes quando  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ . Indicamos por  $A\Omega_1\Omega_2 \equiv A'\Omega'_1\Omega'_2$ "
- "Definimos que todos os triângulos generalizados  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$  são congruentes entre si."

**Teorema 14.** "(Caso lado-ângulo - LA de congruência para triângulos generalizados) Sejam  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  triângulos generalizados. Se  $AB \equiv A'B'$  e  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ , então  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ ."

**Demonstração:**

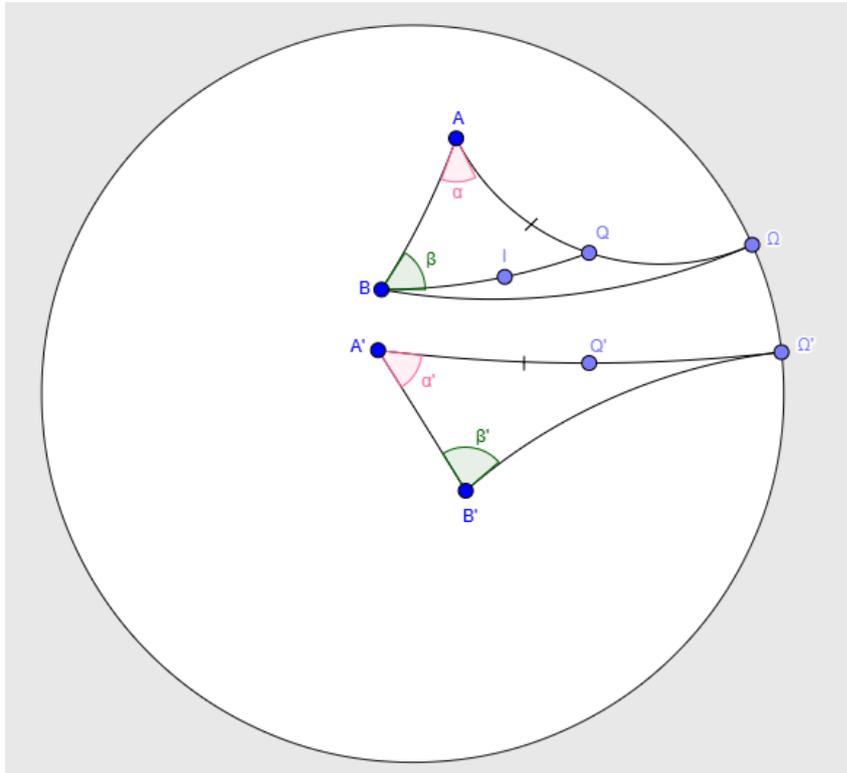
Consideremos os triângulos generalizados  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  com  $AB \equiv A'B'$  e  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ . Para que sejam congruentes, devemos provar que  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ .

Para isso, suponhamos que  $\hat{B} > \hat{B}' = \beta'$ .

Seja I um ponto no interior do triângulo  $AB\Omega$  tal que  $\hat{A}BI \equiv \hat{A}'B'\Omega' = \beta'$ . Note que, como a reta  $\overline{BI}$  entra no triângulo  $AB\Omega$  pelo vértice B, então, como já provado anteriormente, deve cortar o lado oposto a esse vértice, ou seja, corta o lado  $A\Omega$  do triângulo em um ponto que chamaremos de Q. Sendo assim,  $\hat{A}BQ \equiv \hat{A}'B'\Omega' = \beta'$ .

Agora, consideremos Q' um ponto em  $A'\Omega'$  tal que  $AQ \equiv A'Q'$ .

Figura 46: Desenho suporte para a demonstração do caso de congruência LA.



Fonte: A autora

Daí, como por hipótese  $AB \equiv A'B'$  e  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  pelo caso LAL, temos que os triângulos  $ABQ$  e  $A'B'Q'$  são congruentes. Com isso, concluímos que  $\hat{A}'\hat{B}'Q' \equiv \hat{A}\hat{B}Q = \beta'$ . O que é uma contradição pois  $B'Q'$  corta o ângulo  $\hat{A}'\hat{B}'\Omega'$  e então  $\hat{A}'\hat{B}'Q' < \hat{A}'\hat{B}'\Omega' = \beta'$ .

Portanto, devemos ter que  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ . □

**Teorema 15.** "Caso ângulo-ângulo - AA de congruência para triângulos generalizados)  
Sejam  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  triângulos generalizados. Se  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  e  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ , então  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ "

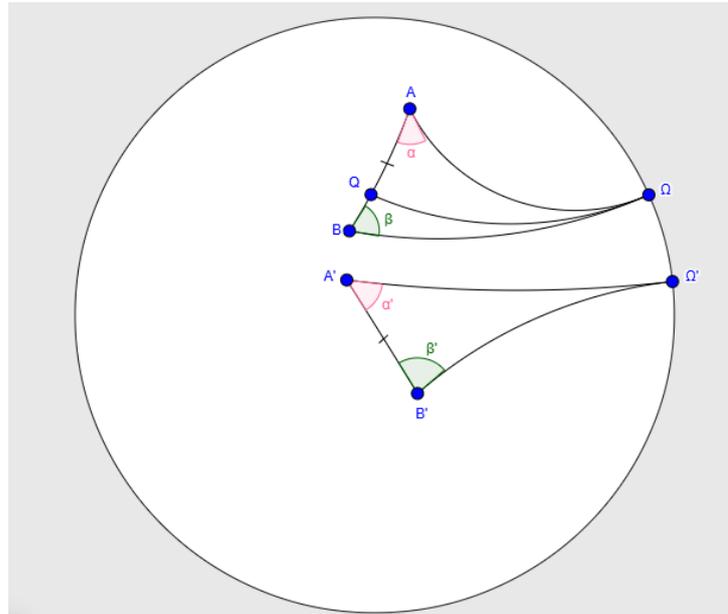
**Demonstração:**

Consideremos os triângulos  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  triângulos generalizados, com  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  e  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ . Para mostrar que são congruentes, precisamos mostrar que  $AB \equiv A'B'$ .

Para isso, suponhamos que  $AB > A'B'$ .

Consideremos um ponto  $Q$  em  $AB$  ta que  $AQ \equiv A'B'$ .

Figura 47: ponto Q em AB ta que  $AQ \equiv A'B'$ .



Fonte: A autora

Daí, pelo caso LA de triângulos generalizados já provado anteriormente, temos que os triângulos  $AQ\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  são congruentes. Dessa congruência, podemos concluir que  $A\hat{Q}\Omega \equiv \hat{B}'$ . Mas, por hipótese,  $\hat{B}' \equiv \hat{B} \Rightarrow A\hat{Q}\Omega \equiv \hat{B}$ .

O que é uma contradição, pois  $A\hat{Q}\Omega$  é ângulo externo ao triângulo  $BQ\Omega$  e pelo Teorema do Ângulo Externo para triângulos Generalizados deve ser maior do que qualquer ângulo interno a ele não adjacente.

Portanto,  $AB \equiv A'B'$ . □

**Teorema 16.** "(Caso triângulos isósceles de congruência para triângulos generalizados) Todos os triângulos generalizados isósceles com bases de mesma medida são congruentes entre si, ou seja, se  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  são tais que  $AB \equiv A'B'$ ,  $\hat{A} \equiv \hat{B}$  e  $\hat{A}' \equiv \hat{B}'$ , então  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ ."

**Demonstração:**

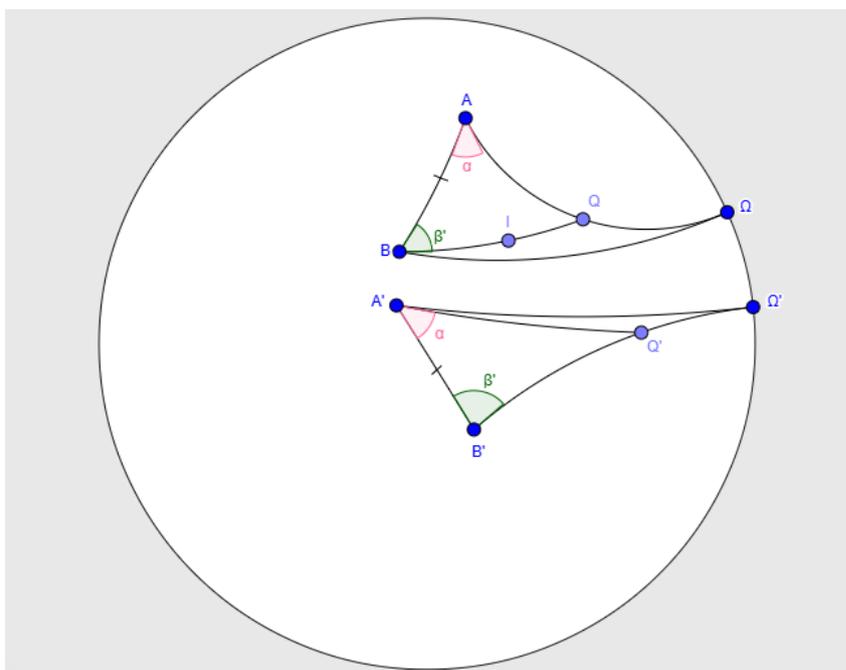
Consideremos os triângulos generalizados isósceles  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  tais que  $AB \equiv A'B'$ ,  $\hat{A} \equiv \hat{B}$  e  $\hat{A}' \equiv \hat{B}'$ . Para mostrar que são congruentes, mostraremos que  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$  para que seja possível utilizar o caso LA para congruência de triângulos generalizados que já foi demonstrado anteriormente.

Para tanto, suponhamos que  $\hat{B} > \hat{B}'$ .

Consideremos um ponto I no interior do triângulo  $AB\Omega$  tal que  $\hat{A}BI \equiv \hat{A}'B'\Omega'$ .  
Pela proposição demonstrada anteriormente, sabemos que a semirreta  $BI$  deve cortar o lado  $A\Omega$  do triângulo em um ponto que chamaremos de Q.

Considderemos também um ponto Q' em  $B'\Omega'$  tal que  $B'Q' \equiv BQ$ .

Figura 48: ponto Q' tal que  $B'Q' \equiv BQ$ .



Fonte: A autora

Sendo assim, pelo caso LAL, temos que os triângulos  $ABQ$  e  $A'B'Q'$  são congruentes e podemos concluir que  $\hat{B}AQ \equiv \hat{B}'A'Q' = \alpha$

Note que  $A'Q'$  corta o ângulo  $B'\hat{A}'\Omega'$  e daí,

$$\hat{B}'A'Q' < \hat{B}'A'\Omega'$$

$$\text{Como } \hat{B}AQ \equiv \hat{B}'A'Q'$$

$$\Rightarrow \hat{B}AQ < \hat{B}'A'\Omega'$$

$$\Rightarrow \hat{B}A\Omega < \hat{B}'A'\Omega'$$

$$\Rightarrow \hat{A} < \hat{A}'$$

Sendo assim, como  $\hat{B} > \hat{B}'$  e  $\hat{A}' > \hat{A}$

$$\text{Então } \hat{B} + \hat{A}' > \hat{B}' + \hat{A}$$

O que é uma contradição pois, como os triângulos são isósceles então  $\hat{B} \equiv \hat{A}$  e

$\hat{B}' \equiv \hat{A}'$  e daí, deveríamos concluir que  $\hat{B} + \hat{A}' \equiv \hat{B}' + \hat{A}$ .

Portanto,  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ . □

### Quadrilátero de Lambert e quadrilátero de Saccheri:

**Definição 8.** "Um quadrilátero convexo  $ABCD$  e dito **Quadrilátero de Saccheri** de base  $AB$ , topo  $DC$  e laterais  $AD$  e  $BC$  quando os lados laterais são congruentes e perpendiculares ao lado base, ou seja,  $AD \equiv BC, AD \perp AB$  e  $BC \perp AB$ ."

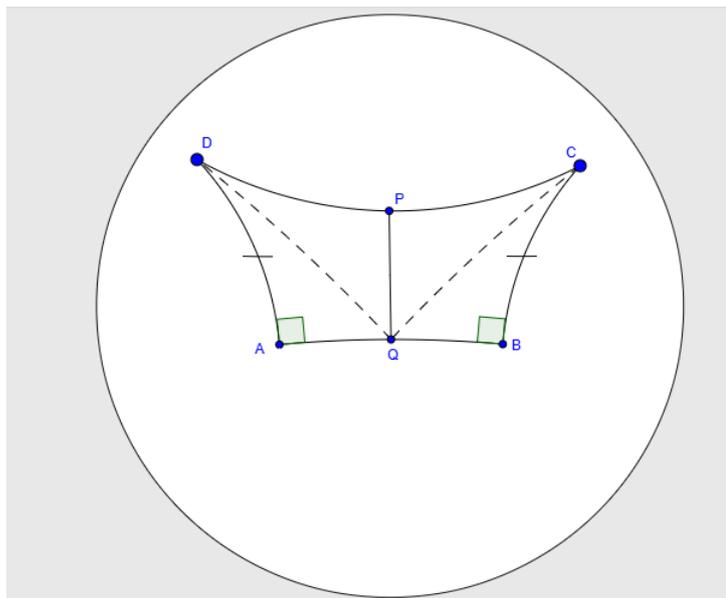
**Definição 9.** "Um quadrilátero e dito **Quadrilátero de Lambert** quando possuir três ângulos internos retos."

**Teorema 17.** "O segmento ligando os pontos médios da base e do topo de um Quadrilátero de Saccheri  $ABCD$  é perpendicular a esses lados. Além disso, os ângulos do topo  $C$  e  $D$  são congruentes e agudos."

### Demonstração:

Consideremos quadrilátero  $ABCD$ , de Saccheri, e os pontos  $P$ , ponto médio do topo do quadrilátero e  $Q$ , ponto médio do segmento da base.

Figura 49: Pontos médios da base e do topo do Quadrilátero de Saccheri.



Fonte: A autora

Pela definição do Quadrilátero de Saccheri,  $AD \equiv BC$  e  $\hat{A} \equiv \hat{B} = 90^\circ$  e como  $Q$  é ponto médio do segmento  $AB$ , então  $AQ \equiv QB$ . Sendo assim, pelo caso Lado-Ângulo-

lado, os triângulos ADQ e BCQ são congruentes e daí, podemos concluir que:

$$DQ \equiv QC,$$

$$A\hat{Q}D \equiv B\hat{Q}C \text{ e}$$

$$A\hat{D}Q \equiv B\hat{C}Q$$

Como P é ponto médio do segmento DC então,  $DP \equiv PC$ . Com isso, pelo caso Lado-Lado, os triângulos DQP e CQP são congruentes e portanto,

$$D\hat{P}Q \equiv C\hat{P}Q;$$

$$D\hat{Q}P \equiv C\hat{Q}P \text{ e}$$

$$Q\hat{D}P \equiv Q\hat{C}P.$$

Comos os ângulos  $D\hat{P}Q \equiv C\hat{P}Q$  são suplementares e congruentes, então  $D\hat{P}Q \equiv C\hat{P}Q = 90^\circ$ .

Agora, como  $D\hat{Q}P \equiv C\hat{Q}P$ ,  $A\hat{Q}D \equiv B\hat{Q}C$  e os ângulos  $A\hat{Q}P$  e  $B\hat{Q}P$  são suplementares, então,  $A\hat{Q}P \equiv B\hat{Q}P = 90^\circ$

E ainda, sendo  $A\hat{D}Q \equiv B\hat{C}Q$  e  $Q\hat{D}P \equiv Q\hat{C}P \Rightarrow \hat{D} \equiv \hat{C}$ , mostrando então, que os ângulos do topo são equivalentes.

Para finalizar, como visto anteriormente, a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser menor do que dois ângulos retos. Portanto, a soma dos ângulos internos dos triângulos ADB e BDC devem ser menores do que  $180^\circ$ .

$$\text{Daí, } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} < 360^\circ$$

$$\text{Como } \hat{A} \equiv \hat{B} = 90^\circ, \text{ temos que } \hat{C} + \hat{D} < 180^\circ$$

$$\text{Como } \hat{C} \equiv \hat{D} \text{ e } \hat{C} + \hat{D} < 180^\circ \Rightarrow \hat{C} \equiv \hat{D} < 90^\circ$$

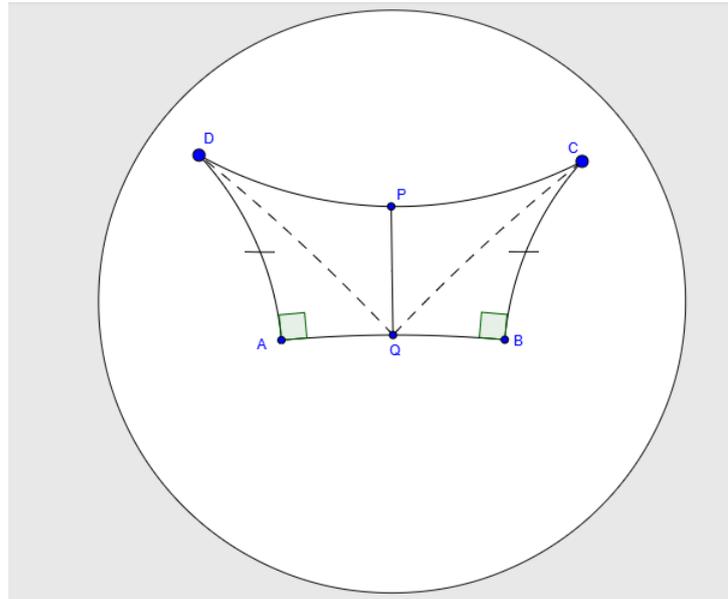
□

**Teorema 18.** “A base e o topo de um Quadrilátero de Saccheri fazem parte de retas hiperparalelas.”

**Demonstração:**

Consideremos quadrilátero ABCD, de Saccheri, e os pontos P, ponto médio do topo do quadrilátero e Q, ponto médio do segmento da base.

Figura 50: Base e topo do quadrilátero de Saccheri.



Fonte: A autora

Se  $\overleftrightarrow{DC}$  for paralelo ao segmento  $\overleftrightarrow{AB}$ , então, o ângulo  $Q\hat{P}C$  é um ângulo de paralelismo e daí, como provado anteriormente, deve ser agudo, o que é uma contradição com o fato de que o segmento ligando os pontos médios da base e do topo de um Quadrilátero de Saccheri ABCD é perpendicular a esses lados.

Agora, se  $\overleftrightarrow{DC}$  for concorrente a  $\overleftrightarrow{AB}$  então o ângulo  $Q\hat{P}C$  seria menor do que o ângulo de paralelismo, ou seja, seria agudo, o que é uma contradição ao fato de que o segmento ligando os pontos médios da base e do topo de um Quadrilátero de Saccheri ABCD é perpendicular a esses lados

Sendo assim,  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{DC}$  devem ser retas hiperparalelas.

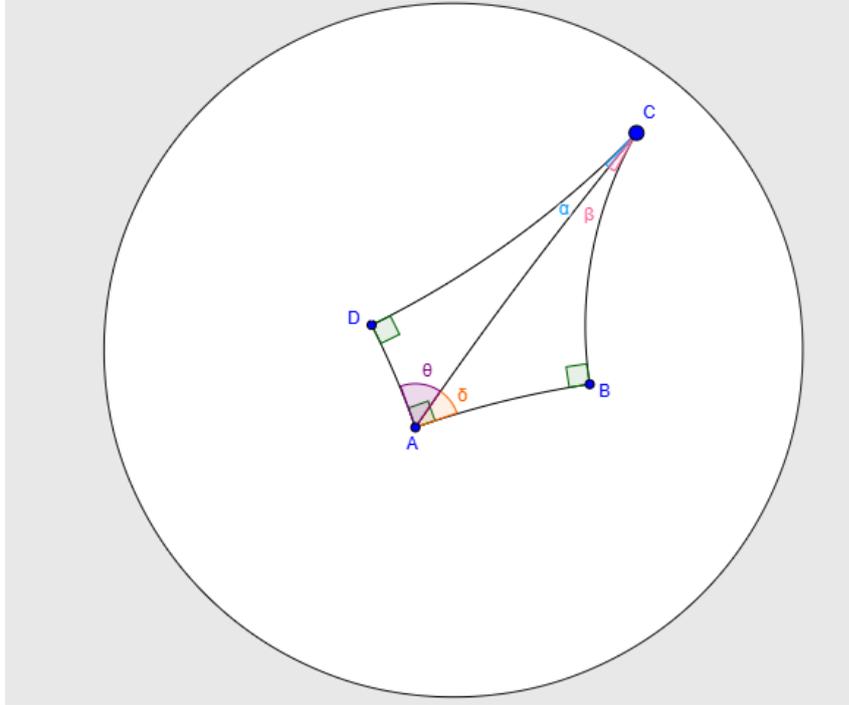
□

**Teorema 19.** “O ângulo interno não conhecido de um Quadrilátero de Lambert é agudo.”

### Demonstração 1:

Consideremos um quadrilátero ABCD de Lambert, com  $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{D} = 90^\circ$ . Podemos dividir esse quadrilátero em dois triângulos, sejam ADC e ABC. Consideremos os ângulos da figura a seguir.

Figura 51: Desenho suporte para a demonstração do ângulo interno desconhecido do quadrilátero de Lambert.



Fonte: A autora

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser menor do que dois ângulos retos. Portanto, a soma dos ângulos dos dois triângulos citados deve ser menor do que  $2\pi$ . Sendo assim,  $\delta + \hat{B} + \beta + \alpha + \theta + \hat{D} < 2\pi$ . Mas, note que  $\alpha + \beta = \hat{C}$  e  $\delta + \theta = \hat{A}$  e pela definição do quadrilátero de Lambert, temos que  $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{D} = \frac{\pi}{2}$

e daí,

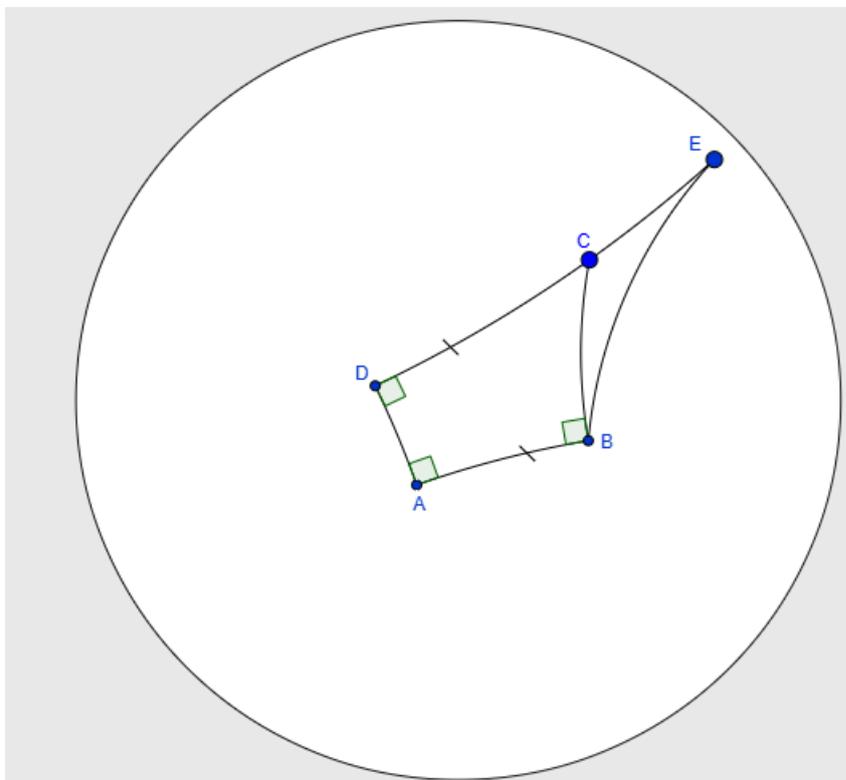
$$\begin{aligned} \hat{D} + \alpha + \beta + \hat{B} + \delta + \theta + \hat{D} &< 2\pi \\ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} &< 2\pi \\ \Rightarrow \hat{C} &< 2\pi - \frac{3\pi}{2} \\ \Rightarrow \hat{C} &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ou seja,  $\hat{C}$  é agudo. □

### Demonstração 2:

Consideremos um quadrilátero ABCD de Lambert, com  $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{D} = 90^\circ$ . Seja E um ponto em  $\overleftrightarrow{DC}$  tal que C esteja entre D e E e  $DE \equiv AB$ .

Figura 52: Desenho suporte para a demonstração do ângulo interno desconhecido do quadrilátero de Lambert.



Fonte: A autora

Note que, o quadrilátero ABED é um quadrilátero de Saccheri.

Como visto anteriormente, os ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri são agudos, ou seja,  $\widehat{DCB}$  é agudo. Vejamos que, o ângulo  $\widehat{DCB}$  é externo ao triângulo CEB e portanto, pelo Teorema do Ângulo Externo, ele deve ser maior que o ângulo interno que não lhe seja adjacente, ou seja, é maior do que o ângulo  $\widehat{E}$ .

Portanto, como  $\widehat{DCB}$  é agudo e maior do que  $\widehat{E}$ , então  $\widehat{E}$  também deve ser agudo.

□

**Teorema 20.** "Seja ABCD um quadrilátero convexo com base AB e laterais AD e BC perpendiculares a base, ou seja,

$$A \equiv B = \frac{\pi}{2}$$

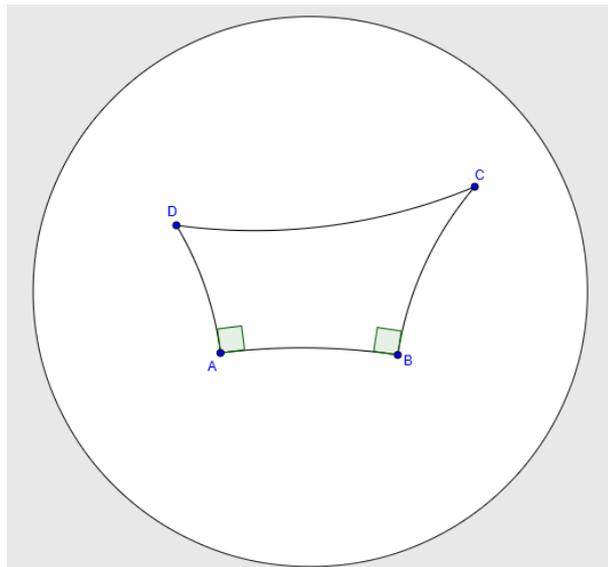
Então,  $C < D \Leftrightarrow AD < BC$ ."

**Demonstração:**

Consideremos o quadrilátero convexo ABCD base AB e laterais AD e BC perpendiculares a base. Suponha que  $\hat{C} < \hat{D}$ . Com isso, teremos três opções:

1.  $AD \equiv BC$ ;
  2.  $AD > BC$ ; ou
  3.  $AD < BC$
- Se  $AD \equiv BC$ ,

Figura 53: Desenho suporte para a demonstração do Teorema 20.



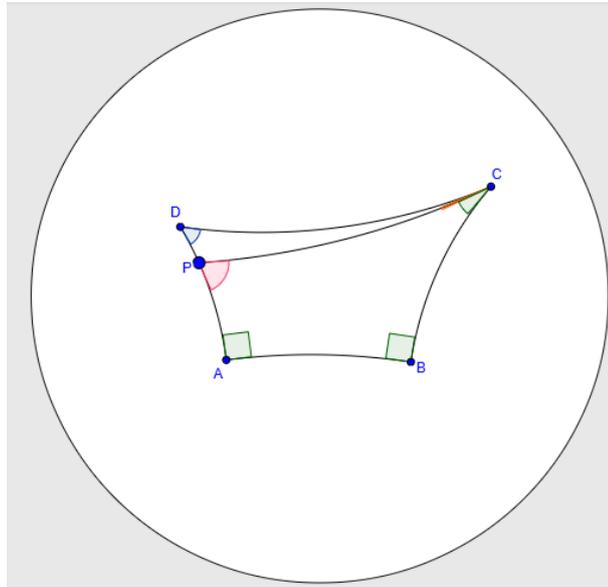
**Fonte:** A autora

Pela definição, teríamos um quadrilátero de Saccheri e daí, como provado anteriormente,  $\hat{C} \equiv \hat{D}$  o que seria uma contradição com a nossa hipótese de que  $\hat{C} < \hat{D}$ .

- Se  $AD > BC$ .

Consideremos um ponto P em AD tal que  $AP \equiv BC$ .

Figura 54: Desenho suporte para a demonstração do Teorema 20.



Fonte: A autora

Sendo assim, pela definição, o quadrilátero ABCP é um quadrilátero de Saccheri e portanto,  $\hat{P} \equiv \hat{PCB}$ .

Note que,  $\hat{PCB}$  é ângulo externo ao triângulo DCP e portanto, deve ser maior do que qualquer ângulo a ele não adjacente, ou seja,  $\hat{P} \equiv \hat{PCB} > \hat{D}$ .

Como  $\hat{C} \equiv \hat{PCD} + \hat{PCB}$  e  $\hat{PCB} \equiv \hat{P} > \hat{D}$  então  $\hat{C} > \hat{D}$ , o que é uma contradição com a hipótese assumida de que  $\hat{C} < \hat{D}$ .

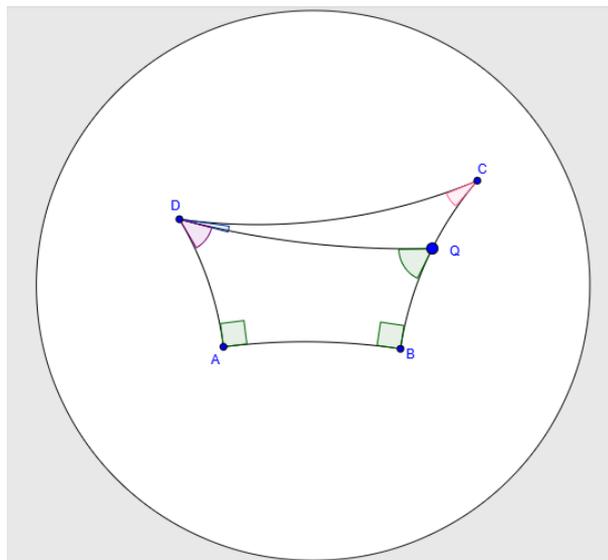
Com isso, podemos concluir que  $AD < BC$ .

Por outro lado, suponhamos agora que

- $AD < BC$ .

Consideremos um ponto Q em BC tal que  $AD \equiv BQ$ .

Figura 55: Desenho suporte para a demonstração do Teorema 20.



Fonte: A autora

Com isso, pela definição, o quadrilátero ABQD é um quadrilátero de Saccheri e portanto,  $\hat{A}\hat{D}Q \equiv \hat{D}\hat{Q}B$ . Note que  $\hat{D}\hat{Q}B$  é ângulo externo ao triângulo DD'C e portanto, deve ser maior do que qualquer ângulo interno a ele não adjacente, ou seja,  $\hat{D}\hat{Q}B > \hat{C}$ .

Sendo assim, como  $\hat{D} > \hat{A}\hat{D}Q \equiv \hat{D}\hat{Q}B$  e  $\hat{D}\hat{Q}B > \hat{C}$  então,  $\hat{C} < \hat{D}$ . □

## 8 Arquitetura

A Geometria Hiperbólica, é uma das Geometrias Não Euclidianas que apresenta uma nova perspectiva e novas ferramentas para a percepção do espaço, desafiando as noções tradicionais que aprendemos sobre formas e medidas Euclidianas. Por exemplo, como visto anteriormente, na Geometria Clássica (Euclidiana), os ângulos internos de um triângulo somam sempre 180 graus, na Geometria Hiperbólica, espaço com curvatura negativa, essa soma é sempre menor do que 180 graus. Essa curvatura negativa do espaço define uma nova forma ao objeto, como visto nos capítulos 6 e 7, diferente das superfícies planas utilizadas por muitas vezes nas construções de prédios e casas.

Os avanços matemáticos, como a Geometria Hiperbólica, ofereceram novas ferramentas para os arquitetos quebrarem as barreiras da Geometria Tradicional, permitindo a criação de espaços surpreendentes já que, segundo Firmo (2003), a geometria é de grande importância para a rigidez de sistemas estruturais.

Neste trabalho, vamos explorar como a Geometria Hiperbólica tem influenciado algumas obras arquitetônicas. Veremos como essa geometria não só tem gerado formas arquitetônicas inovadoras, mas também como ela transforma a percepção que temos do espaço ao nosso redor. Exemplos mostram como os arquitetos têm se apropriado da Geometria Hiperbólica como um instrumento que pode definir um melhor ou pior desempenho na estrutura e criar ambientes que vão além do convencional, gerando experiências únicas.

No trabalho realizado por Firmo (2003) podemos observar um experimento onde o mesmo tenta mostrar as vantagens estruturais das superfícies hiperbólicas sobre as superfícies planas, nos mostrando assim, um ponto importante da Geometria Hiperbólica na arquitetura que vai além do design e beleza. Segundo ele, as superfícies elípticas, exemplos de uma Geometria Não Euclidiana, são mais rígidas e resistentes do que aquelas superfícies que são possíveis de se planificar e ainda, o formato pode ser mais importante até mesmo que seu material. "Mas o que se deve salientar é que a conformação geométrica é o principal "ingrediente" para qualquer estrutura, mais importante até mesmo que o material desta". (FIRMO, 2003, p.43)

Como comentado anteriormente, as Geometrias Não Euclidianas podem ser encontradas em diversos aspectos do nosso dia a dia, como na biologia, na navegação por

gps, na arte, na computação, entre outros e segundo Firmo (2003):

"Pode-se dizer que as primeiras estruturas que utilizaram ao máximo a geometria de seus elementos como forma de enrijecimento (usando e abusando das superfícies hiperbólicas) foram construídas num passado anterior ao aparecimento do homem e continuam sendo “construídas” até hoje pela “mãe natureza” (tanto nas estruturas orgânicas como nas inorgânicas). Não é raro encontrar tais superfícies hiperbólicas a todo momento, como nos galhos de árvores, numa folha, numa pétala de flor, em teias de aranha, etc” (FIRMO, 2003, p.71)

Um dos nossos objetivos é relacionar a Geometria Não Euclidiana com algo que está presente no dia a dia do aluno, como a arquitetura, uma das vertentes do nosso trabalho, uma vez que as construções evidenciam formas e propriedades que podem ser relacionadas à Geometria Não Euclidiana. Nessa perspectiva, nosso trabalho, irá priorizar a análise da Geometria Hiperbólica.

Outro objetivo, será mostrar que a Geometria Hiperbólica vai além das abstrações matemáticas e pode se materializar na arquitetura já que, "Todo conhecimento humano está intimamente ligado à observação e à vivência dos fenômenos que estão à sua volta” (FIRMO, 2003, p.73)

## 8.1 Hiperboloides

### 8.1.1 Catedral de Brasília



(a) Catedral de Brasília em construção

**Fonte:** (BORGES, 2014, p.35)



(b) Interior da Catedral de Brasília

**Fonte:** (DEBORA BONETTO, 2013)

Figura 56: Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida (Catedral de Brasília)

A Catedral Metropolitana - Nossa Senhora Aparecida, ou também conhecida como Catedral de Brasília fica localizada na capital federal, no eixo monumental. Foi o primeiro monumento a ser criado em Brasília, projetado pelo famoso arquiteto Oscar Niemeyer. De acordo com o site oficial da catedral, ela foi concluída em 1960, apresentando apenas a área circular de setenta metros de diâmetro, sobre a qual se erguem dezesseis colunas de concreto em forma de hiperboloide, com um peso de noventa toneladas. Joaquim Cardozo, engenheiro, foi encarregado do cálculo estrutural que possibilitou a edificação da catedral.

De acordo com Borges (2014), a Catedral de Brasília, com sua altura de quarenta metros e capacidade para quatro mil fiéis, é dividida em três partes distintas - nave, campanário e batistério. Segundo ele, a Catedral ficou aberta até 1970, quando foi fechada com vidro transparente. Tempos depois, novos vitrais foram planejados por Marianne Peretti.



(a) Catedral de Brasília.

**Fonte:** (BORGES, 2014, p.42)



(b) Curvaturas

**Fonte:** A autora

Figura 57: Catedral e suas curvaturas.

Podemos observar nas figuras anteriores que a Catedral apresenta as curvas máxima e mínima curvadas para direções opostas, ou seja, uma positiva e uma negativa. Sendo assim, a curvatura dessa superfície, dada pelo produto da curva máxima pela curva mínima, será negativa. Como visto anteriormente, as superfícies com curvatura negativa serão chamadas de superfícies hiperbólicas. Neste caso, a Catedral de Brasília, se assemelha a um hiperboloide.

### 8.1.2 Torres de Resfriamento

A torre de resfriamento ou refrigeração funciona de forma a possibilitar a remoção de calor potente por meio do contato de duas correntes de fluidos, elas são utilizadas em indústrias químicas, termoelétricas, usinas nucleares e sistemas de condicionamento de ar em edifícios (SAPUNARU et al., 2014).

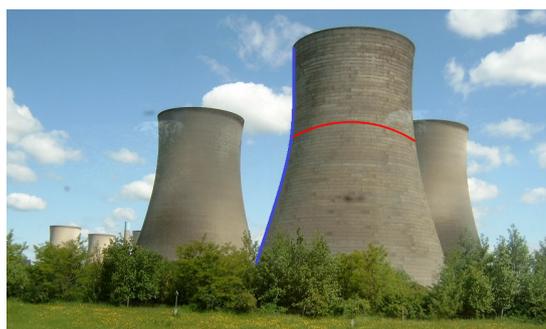
As torres no formato hiperbólico começaram a ser usadas apenas em 1930. Nesse sentido, (SAPUNARU et al., 2014) nos traz que as torres no formato hiperbólico possuem maior eficiência na refrigeração da água e ainda:

"O formato hiperbólico dessas torres contribui para uma maior velocidade de saída de ar quente, pois o afunilamento cria uma região de compressão no local de menor diâmetro. Nele, a velocidade do ar que está escoando no sentido de saída da torre aumentará e sua pressão na parte superior da torre sofrerá um decaimento."(SAPUNARU et al., 2014, p.31)



(a) Torre hiperboloide.

**Fonte:** (WIKIPÉDIA, 2024)



(b) Curvaturas

**Fonte:** A autora

Figura 58: Torre hiperboloide na estação de energia de Didcot - Inglaterra e suas curvaturas

É visível na imagem apresentada que as torres apresentam curvaturas em sentidos opostos, sendo assim, uma superfície de dupla curvatura negativa. Assim como a Catedral de Brasília, essa superfície se assemelha a um hiperboloide.

### 8.1.3 Aeroporto Internacional de Newcastle

O Aeroporto Internacional de Newcastle fica localizado na cidade de Woolsington, na Inglaterra. De acordo com o site oficial do aeroporto, ele foi inaugurado dia 26 de Julho de 1935 tendo um custo de construção de cerca de £ 35.000.

Atualmente, o Aeroporto conta com a implementação de um projeto de fazenda solar para a diminuição da emissão de carbono e para tornar suas instalações mais sustentáveis.



(a) Torre de controle.

**Fonte:** (AIRPORTS INTERNATIONAL, 2023)



(b) Curvaturas

**Fonte:** A autora

Figura 59: Torre de controle do Aeroporto Internacional de Newcastle e suas curvaturas.

Sua torre de controle, assim como os exemplos citados anteriormente, também apresenta curvaturas voltadas para lados opostos, se assemelhando as superfícies hiperbólicas, mais especificamente, um hiperboloide.

#### 8.1.4 Torre do Porto de Kobe

De acordo com o site Japan Travel (s.d) a torre de Kobe fica localizada na cidade de Kobe, no Japão. Ela foi construída por volta de 1963 pela empresa de arquitetura Nikken Sekkei Company.

A estrutura de 108 metros de altura que conta com deques para a observação da cidade também se assemelha a um hiperboloide, apresentando curvaturas voltadas para lados opostos e sendo classificada como uma superfície hiperbólica.



(a) Torre do Porto de Kobe

Fonte: (JAPAN TRAVEL)



(b) Curvaturas

Fonte: A autora

Figura 60: Torre do Porto de Kobe e suas curvaturas.

## 8.2 Parabolóide Hiperbólico

### 8.2.1 Estação Ferroviária de Varsóvia Oshota

Figura 61: Estação Ferroviária de Varsóvia Oshota



Figura 62: Estação Ferroviária de Varsóvia Oshota



Fonte: Figura 58 e 59 (WHITE MAD, s.d)

A estação ferroviária de Varsóvia Oshota fica localizada na Polônia. Segundo o site Mad White (s.d), Arseniusz Romanowicz e Piotr Szymaniak, juntamente com sua equipe, conceberam o projeto e iniciaram a construção em 1954, sendo inaugurada apenas em 29 de setembro de 1963. A estação Warszawa Ochota WKD, localizada na segunda plataforma do complexo, começou a funcionar apenas em 8 de dezembro do mesmo ano. Os dois vértices diagonais da estação foram abaixados, enquanto os outros dois foram elevados a uma altura de 8,34 m acima do nível da base da estrutura, conferindo à estrutura uma forma surpreendente.



(a) Estação Ferroviária de Varsóvia Oshota

Fonte: (WHITE MAD, s.d)



(b) Curvaturas

Fonte: A autora

Figura 63: Estação Ferroviária de Varsóvia Oshota e suas curvaturas.

Podemos observar nas imagens apresentadas, que a Estação Ferroviária apresenta uma dupla curvatura. Suas curvas máxima e mínima estão voltadas para lados opostos,

caracterizando assim, como uma superfície de dupla curvatura negativa. Como vimos anteriormente, as superfícies que apresentam essa característica são chamadas de superfícies hiperbólicas. Nesse caso, podemos observar que, a Estação Ferroviária de Varsóvia Ushota, se assemelha a um parabolóide hiperbólico.

### 8.2.2 Reinoldikirche Station

Reinoldikirche Station é uma estação de ônibus que fica localizada em Dortmund, Alemanha. Suas obras começaram em 1988 e foram concluídas em 1992.

A estação conta com uma cobertura inusitada que se assemelha a junção de vários parabolóides hiperbólicos, apresentando dupla curvatura negativa em cada uma de suas partes e tendo suas curvas máximas e mínimas voltadas para lados opostos, como podemos ver na imagem a seguir.



(a) Reinoldikirche Station

**Fonte:** (PINEQONE, s.d)



(b) Curvaturas

**Fonte:** A autora

Figura 64: Reinoldikirche Station e suas curvaturas.

## 9 Proposta

Neste capítulo, propomos uma aula sobre Geometrias Não Euclidianas, com foco na Geometria Hiperbólica, destinada a alunos do Ensino Básico, mais especificamente para alunos do Ensino Médio, garantindo que os discentes já tenham uma base geométrica consolidada sobre a Geometria Euclidiana. Essa temática aparece nos documentos norteadores da educação, de forma indireta na Base Nacional Comum Curricular e de forma direta no Referencial Curricular do Estado do Paraná.

A proposta é que a aula comece com o professor abordando brevemente a história da matemática, como feito em nosso estudo, explicando como a Geometria Tradicional de Euclides dominou o estudo do espaço por séculos, até que o problema do quinto postulado, um dos axiomas fundamentais de Euclides, gerou um impasse para os matemáticos. Um dos equivalentes deste postulado afirmava que, dada uma reta e um ponto fora dela, apenas uma reta passaria por esse ponto sem cruzar a reta dada. Esse conceito parece intuitivo no plano euclidiano, mas, ao longo do tempo, foi identificado que, em certos tipos de superfícies, poderiam existir múltiplas retas paralelas que passariam por esse ponto ou até mesmo nenhuma. Esse foi um dos pontos cruciais que levaram ao surgimento das Geometrias Não Euclidianas, com destaque para a Geometria Hiperbólica. Ao longo dessa primeira parte da aula, o professor deve incentivar os alunos a refletirem sobre a importância dos axiomas e como a geometria evoluiu para dar conta de diferentes representações do espaço. Na Geometria Euclidiana, por exemplo, os cinco postulados de Euclides foram considerados por séculos como a única forma válida de descrever o espaço. No entanto, a insistência em provar o quinto postulado (relacionado às paralelas) revelou que, ao adotar novas versões para esse axioma, outras geometrias poderiam ser estudadas.

Após essa introdução histórica, o professor deve passar para a explicação das principais características das Geometrias Euclidiana, Elíptica e Hiperbólica, como feito em nosso estudo e dando ênfase nas particularidades da Geometria Hiperbólica, que é nosso foco. É importante que os alunos compreendam as diferenças fundamentais entre essas geometrias, como, por exemplo, o comportamento das linhas paralelas. No caso da Geometria Euclidiana, a noção de paralelismo é bem definida, mas, na Geometria Hiperbólica, uma infinidade de linhas paralelas podem ser traçada por um ponto externo a uma linha dada. A Geometria Elíptica, por sua vez, não admite linhas paralelas: todas as linhas

eventualmente se encontram. Esses conceitos devem ser discutidos por meio de exemplos visuais e práticos, como o uso de figuras e modelos interativos.

Os principais conceitos a serem abordados incluem:

1. A soma dos ângulos internos de um triângulo: enquanto na Geometria Euclidiana a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre  $180^\circ$ , na Geometria Hiperbólica a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que  $180^\circ$ , refletindo a curvatura negativa do espaço e na Geometria Elíptica deve ser maior que  $180^\circ$ , refletindo a curvatura positiva do espaço;
2. O equivalente ao quinto postulado de Euclides, que afirma que, dada uma reta e um ponto fora dela, existe apenas uma reta paralela a ela que passe pelo ponto, se transforma em diferentes versões nas Geometrias Não Euclidianas. Na Geometria Hiperbólica, por exemplo, o postulado é substituído por uma versão que permite a existência de infinitas paralelas enquanto a Geometria Elíptica nega a existência delas;
3. Outras equivalências ao quinto postulado de Euclides.

Como vimos, as superfícies podem ter curvaturas negativas, positivas ou nulas, o que impacta diretamente as propriedades geométricas do espaço. Uma explicação intuitiva e visual pode ser dada aos alunos, demonstrando que, ao tentar cobrir uma superfície de curvatura positiva (elíptica) com um material plano, como o papel, este deve apresentar "sobras" ou rugas. Por outro lado, ao tentar cobrir uma superfície com curvatura negativa (hiperbólica), o material se estica e rasga, pois há mais "espaço" no modelo hiperbólico do que o plano pode acomodar. Essa demonstração pode ser realizada com modelos físicos simples, como um balão ou uma esfera, para a curvatura positiva, e uma vuvuzela ou uma forma parecida com a pseudoesfera para a curvatura negativa. Também é possível desenhar alguns triângulos sobre a superfície para que seja possível analisar o que acontece com seus ângulos internos. Esses modelos ajudam a tornar mais reais os conceitos abstratos da Geometria Não Euclidiana.

Em seguida, o professor pode questionar os alunos sobre onde essa geometria pode ser observada no cotidiano. Questões como "Onde vemos superfícies com curvaturas negativas ou positivas ao nosso redor?" podem ser exploradas, estimulando os alunos a pensar

sobre exemplos práticos no mundo real. Após essa discussão, o professor deve apresentar aos alunos a relação entre essa geometria e a arquitetura, mostrando como a Geometria Hiperbólica tem sido aplicada em algumas construções arquitetônicas. Pode-se citar como exemplos monumentos espalhados pelo mundo. A partir daí, os alunos podem ser estimulados a analisar as curvaturas desses monumentos, classificando-as como Elípticas ou Hiperbólicas. Além disso, o professor pode destacar como a compreensão das curvaturas e das propriedades geométricas dessas superfícies tem impactos na estética e na funcionalidade de tais construções, refletindo o uso prático de uma geometria aparentemente abstrata.

Essa abordagem interdisciplinar pode enriquecer a compreensão dos alunos, mostrando a relação entre a matemática e a arquitetura e despertando o interesse por novas possibilidades de aplicação da Geometria Hiperbólica no mundo moderno.

## 10 Conclusão

A Geometria Euclidiana, durante muito tempo, foi vista como a única maneira de entender o espaço e o universo mas, aos poucos, foi dando lugar a novas descobertas. Como vimos, essas descobertas surgiram principalmente a partir das tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides, o que abriu portas para o desenvolvimento de outras geometrias, até então impensáveis.

Foi possível observar que atualmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) inclui o estudo das Geometrias Não Euclidianas no currículo da educação básica, embora de maneira indireta. Já o Referencial Curricular do Estado do Paraná menciona especificamente a Geometria Hiperbólica, evidenciando a importância desse campo no ensino.

A abordagem da Geometria Hiperbólica pode ser feita de maneira histórica, permitindo que os alunos acompanhem a evolução dessa geometria ao longo do tempo. Isso os ajuda a perceber que, ao contrário de um conhecimento "pronto", a Geometria Hiperbólica foi se formando aos poucos, à medida que novos conceitos e descobertas foram sendo feitos e também, de acordo com a BNCC, isso inspira interesse no aluno.

Com uma abordagem mais prática, os alunos podem explorar e analisar as diferenças entre as Geometrias e perceber como elas se relacionam com o mundo ao nosso redor que não é inteiramente Euclidiano. Isso também ajuda a entender a Geometria Hiperbólica como uma ferramenta poderosa que conecta a matemática ao nosso "mundo real", fazendo a ponte entre teoria e aplicação.

As Geometrias Não Euclidianas têm aplicações reais e interessantes em várias áreas, como na arte, na arquitetura e até na navegação por GPS. Ao trazer essas geometrias para o contexto cotidiano, nesse caso a arquitetura, é possível mostrar aos alunos que, embora muitas vezes tratemos elas de forma abstrata nas salas de aula, elas estão presentes em nosso dia a dia de maneiras práticas e úteis, integrando a matemática à realidade e cumprindo um dos focos expostos pela BNCC. Portanto, esperamos ter contribuído para o entendimento da aplicação da Geometria Hiperbólica, tanto no campo matemático quanto em áreas interdisciplinares.

## Referências

- [1] AGUSTINI, Edson. *Introdução à geometria hiperbólica plana*. Uberlândia: FAMAT UFU; CEaD UFU, 2022. 144 p. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/25207>. Acesso em: 10 jan. 2025.
- [2] AIRPORTS INTERNATIONAL. *Newcastle upgrades air traffic service*. *Airports International*, 17 set. 2023. Disponível em: <https://www.airportsinternational.com/article/newcastle-upgrades-air-traffic-service>. Acesso em: 16 jan. 2025.
- [3] BARBOSA, João Lucas Marques, *Geometria Hiperbólica*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada -IMPA. 2007
- [4] BATISTA, Pollyanna Débora da Silva. *Geometria hiperbólica e aplicações*. 2019.
- [5] BASSI, A.; GULI, D. *Figura e: Realizações exemplares de superfícies de revolução com curvatura gaussiana constante*. *ResearchGate*, 2020. Disponível em: [https://www.researchgate.net/figure/Figura-e-Exemplary-realizations-of-surfaces-of-revolution-with-constant-Gaussian\\_fig1\\_337195923](https://www.researchgate.net/figure/Figura-e-Exemplary-realizations-of-surfaces-of-revolution-with-constant-Gaussian_fig1_337195923). Acesso em: 20 jan. 2025.
- [6] BORGES, Carolina da Rocha Lima. *Espaços e percursos na catedral de Brasília*. *Revista do Curso de Arquitetura e Urbanismo da UCB*, n. 1, 2014.
- [7] BONETTO, Débora. *Catedral de Brasília - Niemeyer*. *Debora Bonetto*, 27 jun. 2013. Disponível em: <https://deborabonetto.wordpress.com/2013/06/27/catedral-de-brasilia-niemeyer/>. Acesso em: 20 jan. 2025.
- [8] BONGIOVANNI, V.; JAHN, A. P. *De Euclides às geometrias não euclidianas*. *UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, v. 6, n. 22, 15 jun. 2010.
- [9] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/educacao-basica/bncc>. Acesso em: 10 jan. 2025.

- [10] CARMO, Manfredo Perdigao do. *Geometrias não-euclidianas*. Matemática Universitária, n. 6, p. 25-48, 1987.
- [11] CARVALHO, Gracielle Simões de. *Geometrias não euclidianas: uma proposta de inserção da geometria esférica no ensino básico*. 2017.
- [12] CATEDRAL METROPOLITANA DE BRASÍLIA. *história*. Disponível em: <https://catedral.org.br/historia>. Acesso em: 20 dez 2014.
- [13] CURVA. In: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2020. Disponível em: <<https://www.dicio.com.br/curva/>>. Acesso em: 13 dez. 2024.
- [14] DOS SANTOS, Helbet Nonato. *Geometria Hiperbólica com inversão geométrica: Uma abordagem didática para o professor do ensino básico*. 2014.
- [15] FIRMO, Célio da Silveira. *Estruturas tubulares enrijecidas por superfícies de dupla curvaturas (hiperbólicas)*. 2003.
- [16] JAPAN TRAVEL. Torre do Porto de Kobe. Disponível em: <https://www.japan.travel/pt/spot/1039/#:~:text=Torre%20do%20porto%20de%20Kobe%20%E7%A5%9E%E6%88%B8%E3%83%9D%E3%83%BC%E3%83%88%E3%82%BF%E3%83%AF%E3%83%BC&text=Conclu%3%ADda%20em%201963%2C%20a%20Torre,o%20maior%20est%3%A1dio%20da%20Europa>. Acesso em: 15 dez. 2024.
- [17] JOSÉ HERNÁNDEZ-DELGADO, Zacarías Malacara-Hernández, Daniel Malacara-Doblado, Benito Vázquez-Dorrío, and Daniel Malacara Hernández. *Local curvatures and its measurements of an optical surface or a wavefront: a review* Optical Engineering 61(5), 050901 (23 May 2022). Disponível em: <https://doi.org/10.1117/1.OE.61.5.050901>. Acesso em 18 dez. 2024
- [18] MINHÓS, Feliz. *Análise Matemática III*. 2011.
- [19] MORAIS, Francisco Erasmo de. *Geometria Não Euclidiana: Uma Possibilidade Para a Educação Básica*. 2024. Universidade Estadual do Piauí
- [20] NEWCASTLE AIRPORT. Disponível em: <https://www.newcastleairport.com/>. Acesso em: 20 jan. 2025.

- [21] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. *Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná*. 2021. Disponível em: <[https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos\\_restritos/files/documento/2021-08/referencial\\_curricular\\_novoem\\_11082021.pdf](https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-08/referencial_curricular_novoem_11082021.pdf)>. Acesso em: 13 dez. 2024.
- [22] PETIT, Jean-Pierre. *Les Aventures d'Anselme Lanturlu – Le Geometricon*. Tradução de Luís Pignatelli. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1982. 1. ed.
- [23] PINEQONE. Disponível em: <https://pineqone.com/attractions/reinoldikirche/>. Acesso em: 13 jan. 2025.
- [24] PROLOŠČIĆ, Valentina. *Models of Hyperbolic Geometry*. 2021. Tese de Doutorado. Josip Juraj Strossmayer University of Osijek. Department of Mathematics. Chair of Pure Mathematics. Algebra and Calculus Research Group.
- [25] SAPUNARU, Raquel Anna et al. As Influências das Torres Hiperbólicas nas Usinas Termoelétricas: Um Foco Termonuclear. *Revista Ciência e Natura*, v. 37, 2015.
- [26] SCHENA, Fernanda Mocelin. *A história do surgimento da geometria não euclidiana: o despertar para novos mundos e os modelos de Beltrami*. 2019. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- [27] SEARA da Ciência. *Apostilas sobre a curvatura de Gauss*. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, [s.d.]. Disponível em: <https://seara.ufc.br/pt/producoes/nossas-producoes-e-colaboracoes/secoes-especiais-de-ciencia-e-tecnologia/apostilas-eletronicas-da-d-fifi/apostilas-sobre-a-curvatura-de-gauss/>. Acesso em: 03 dez. 2024.
- [28] SOUZA, Carlos Bino de et al. *Geometria hiperbólica: consistência do modelo de disco de Poincaré*. 2014.
- [29] STRUCTURAE. Reinoldikirche Station. Disponível em: <https://structurae.net/en/structures/reinoldikirche-station>. Acesso em: 20 jan. 2025.
- [30] WEISSTEIN, Eric W. *Tractrix*. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/Tractrix.html>. Acesso em 20 jan. 2025

- [31] WIKIPEDIA. Parabolóide. *Wikipedia, a enciclopédia livre*. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Parabolóide>. Acesso em: 5 jan. 2025.
- [32] WIKIPEDIA. *Torre de resfriamento*. *Wikipedia: a enciclopédia livre*. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre\\_de\\_resfriamento](https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_resfriamento). Acesso em: 24 jan. 2025.
- [33] WHITE MAD. *Estação Ferroviária de Varsóvia Ochota: um ícone dos anos 1960 com uma forma incomum*. Disponível em: <https://www.whitemad.pl/en/warsaw-ochota-railway-station-an-iconic-monument-from-the-1960s-with-an-unusual-form/>. Acesso em: 15 jan. 2025.