



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT

SAMARA DO NASCIMENTO DUBIAN

**Hiperbólicamente Natural: Uma Análise Geométrica dos  
Modelos Hiperbólicos e sua correspondência com elementos  
naturais**

Maringá, PR - Brasil

2025

Samara do Nascimento Dubian

**Hiperbólicamente Natural: Uma Análise Geométrica dos Modelos  
Hiperbólicos e sua correspondência com elementos naturais**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Universidade Estadual de Maringá

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT

Orientadora: Professora Dra. Patricia Tacuri Cordova

Maringá, PR - Brasil

2025

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)**

D814h Dubian, Samara do Nascimento  
Hiperbólicamente: uma análise geométrica dos  
hiperbólicos e sua correspondência com elementos  
naturais / Samara do Nascimento Dubian. -- Maringá,  
2025.  
128 f. : il., color.

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Patricia Tacuri Cordova.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática, 2025.

1. Geometria hiperbólica. 2. Plano hiperbólico. 3.  
Corais hiperbólicos. 4. Crochê. I. Cordova, Patricia  
Tacuri, orient. II. Universidade Estadual de Maringá.  
Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.  
III. Título.

CDD 22.ed. 516.9

Edilson Damasio CRB9-1.123

**SAMARA DO NASCIMENTO DUBIAN**

**HIPERBÓLICAMENTE NATURAL: UMA ANÁLISE GEOMÉTRICA DOS  
MODELOS HIPERBÓLICOS E SUA CORRESPONDÊNCIA COM  
ELEMENTOS NATURAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

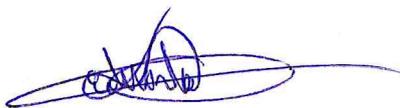
COMISSÃO JULGADORA:



Profa. Dra. Patricia Hilario Tacuri Córdova  
UEM - Universidade Estadual de Maringá (Orientadora)



Prof. Dr. Rawlilson de Oliveira Araújo  
UNESP - Universidade Estadual Paulista



Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves  
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 28 de fevereiro de 2025  
Local de defesa: Bloco F67 – Sala 107

*“ Já estou crucificado com Cristo. E vivo, não mais eu, mas Cristo vive em mim; e a vida que vivo na carne, vivo-a na fé no filho de Deus, o qual me amou e se entregou a si mesmo por mim.”*

*(Bíblia Sagrada, Galátas 2: 20)*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela força e inspiração que me guiou durante todo esse percurso. Sem Sua misericórdia, nada disso seria possível.

Aos meus pais, meu eterno agradecimento por todo o amor, apoio e confiança.

À minha orientadora, Prof<sup>ª</sup>. Dra. Patricia Tacuri Cordova, por toda a paciência, dedicação e por me ajudar a transformar minhas ideias em realidade. Seu apoio foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Norbil Cordova, agradeço pelas contribuições valiosas e pela disposição em me ajudar a aprimorar minha pesquisa.

Agradeço a minha amiga Maria Isabela Galvani Zussa, pela amizade, ajuda e companheirismo nos estudos que fizemos juntas para essa pesquisa e durante nossa vida acadêmica.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao meu noivo, Luiz Henrique Piovesani Carvalho, que esteve ao meu lado em todos os momentos, com todo amor, paciência e incentivo. Seu apoio foi essencial em todos os momentos.

## Resumo

Esse trabalho busca investigar a presença de representações da geometria hiperbólica na natureza, com ênfase em sua manifestação em estruturas naturais como corais e lesmas, e se justifica a partir da análise dos documentos norteadores da educação básica, uma vez que a exploração dessa geometria é evidenciada em tais documentos. O objetivo deste trabalho é explorar como o plano hiperbólico pode ser identificado em padrões naturais, possibilitando uma visualização e uma aplicação mais concreta e acessível ao cotidiano, implicando em uma compreensão mais profunda dessa geometria e das interações entre a matemática e o mundo natural. A pesquisa aborda as tentativas de representar o plano hiperbólico tanto de forma abstrata quanto por meio de exemplos concretos encontrados na natureza, ou construídos com crochê, por exemplo.

Palavras-chave: Geometria Hiperbólica, Plano Hiperbólico, curvatura, Corais Hiperbólicos, Crochê.

## Abstract

This paper seeks to investigate the presence of representations of the hyperbolic geometry in nature, with emphasis on its manifestation in natural structures such as corals and snails, and is justified by the analysis of guiding documents for basic education, since the exploration of this geometry is evidenced in such documents. The objective of this work is to explore how the hyperbolic plane can be identified in natural patterns, enabling a more concrete and accessible visualization and application in everyday life, implying a deeper understanding of this geometry and the interactions between mathematics and the natural world. The research addresses attempts to represent the hyperbolic plane both abstractly and through concrete examples found in nature, or constructed using crochet, for example.

Keywords: Hyperbolic Geometry, Hyperbolic Geometry, Curvature, Hyperbolic Corals, Crochet.

# Conteúdo

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>   | <b>13</b> |
| <b>2</b> | <b>Justificativa</b>  | <b>16</b> |
| 2.1      | Base Nacional Comum curricular e o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná . . . . . | 18        |
| 2.2      | Interdisciplinaridade . . . . .   | 23        |
| <b>3</b> | <b>Gênese da Geometria Hiperbólica</b>  | <b>25</b> |
| 3.1      | Postulados . . . . .  | 26        |
| 3.2      | Noções Comuns . . . . .   | 28        |
| <b>4</b> | <b>Curvatura</b>  | <b>37</b> |
| <b>5</b> | <b>Representações do Plano Hiperbólico</b>  | <b>42</b> |
| 5.1      | Modelo de Beltrami . . . . .  | 43        |
| 5.2      | Modelo de Beltrami-Klein . . . . .  | 46        |
| 5.3      | Modelo de Poincaré . . . . .  | 48        |
| 5.3.1    | Resultados de Geometria Hiperbólica no Disco de Poincaré . . . . .                                | 52        |
| 5.4      | Modelo do Semi-Plano de Poincaré . . . . .  | 72        |
| 5.5      | Modelo de Thurston . . . . .  | 73        |
| 5.6      | Modelo da Bola de Futebol Hiperbólica . . . . .   | 77        |
| <b>6</b> | <b>Geometria e Crochê - Os Modelos de Daina Taimina</b>   | <b>79</b> |
| <b>7</b> | <b>Geometria Hiperbólica e suas manifestações na Natureza</b>                                     | <b>87</b> |
| 7.1      | Corais . . . . .  | 90        |
| 7.1.1    | Agaricia (Coral Folha de alface) . . . . .  | 91        |
| 7.1.2    | Trachyphyllia Geoffroyi (Coral-cérebro aberto) . . . . .  | 94        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 7.1.3    | Stichodactyla haddoni (Anêmona de tapete de sela) . . . . .  | 96         |
| 7.2      | Lesmas do Mar . . . . .  | 98         |
| 7.2.1    | Glossodoris atromarginata . . . . .  | 98         |
| 7.2.2    | Glossodoris Cruenta . . . . .  | 99         |
| 7.2.3    | Ardeadoris symmetrica . . . . .  | 100        |
| 7.3      | Plantas . . . . .  | 101        |
| 7.3.1    | Alface . . . . .   | 101        |
| 7.3.2    | Euphorbia Abyssinica (Cacto) . . . . .   | 103        |
| 7.3.3    | Ilex aquifolium L. (Azevinho) . . . . .  | 104        |
| 7.3.4    | Celosia argentea (Crista de galo) . . . . .  | 105        |
| 7.3.5    | Brugmansia suaveolens (Trombeta de anjo) . . . . .   | 106        |
| 7.3.6    | Lírio de Chama (Gloriosa Superba) . . . . .  | 107        |
| 7.4      | Platelmintos . . . . .   | 108        |
| <b>8</b> | <b>Proposta de Aula e Oficina</b>  | <b>111</b> |
| 8.1      | Proposta de Aula: “Explorando a Geometria Hiperbólica na Natureza” . .                                       | 111        |
| 8.2      | Proposta de Oficina: “Entre Laços e Curvas: Geometria Hiperbólica, Crochê e as Formas da Natureza” . . . . . | 115        |
| 8.2.1    | Modelos de Corais Hiperbólicos de Crochê . . . . .   | 117        |
| <b>9</b> | <b>Considerações Finais</b>  | <b>123</b> |

## Lista de Figuras

|    |  |    |
|----|--|----|
| 1  | Quadro retirado Referencial Curricular do Paraná para o Ensino Médio . . . | 21 |
| 2  | Quadro retirado Referencial Curricular do Paraná para o Ensino Médio . . . | 22 |
| 3  | Quinto Postulado . . . . .   | 27 |
| 4  | Quadrilátero de Saccheri . . . . .   | 30 |
| 5  | Johann Bolyai . . . . .  | 33 |
| 6  | Johann Bolyai . . . . .  | 33 |
| 7  | Curvaturas . . . . .   | 37 |
| 8  | Circunferência osculante . . . . .   | 38 |
| 9  | Paisagem . . . . .   | 39 |
| 10 | Curvas principais da superfície: Sela . . . . .                            | 39 |
| 11 | Plano tangente a esfera . . . . .  | 40 |
| 12 | Curvas em uma paisagem . . . . .   | 41 |
| 13 | Modelos Originais de Beltrami . . . . .                                    | 43 |
| 14 | Tractriz . . . . .   | 44 |
| 15 | Pseudoesfera . . . . .   | 45 |
| 16 | Pseudoesfera - Foto Original . . . . .                                     | 45 |
| 17 | Plano e retas no modelo de Beltrami-Klein . . . . .                        | 46 |
| 18 | Distância no disco de Beltrami-Klein . . . . .                             | 47 |
| 19 | Disco de Poincaré . . . . .  | 48 |
| 20 | Distância no Disco de Poincaré . . . . .                                   | 49 |
| 21 | Medida de Ângulo no Disco de Poincaré . . . . .                            | 50 |
| 22 | Circle Limit I - Escher . . . . .  | 51 |
| 23 | Circle Limit III - Escher . . . . .  | 51 |
| 24 | Axioma de Pasch . . . . .  | 52 |

|    |  |    |
|----|--|----|
| 25 | Desenho suporte para a demonstração do Teorema do Ângulo Externo . . . | 53 |
| 26 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 3 . . . . .          | 54 |
| 27 | Postulado de Lobachewsky . . . . .                                     | 56 |
| 28 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 5 . . . . .          | 57 |
| 29 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 5 . . . . .          | 58 |
| 30 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 6 . . . . .          | 59 |
| 31 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 6 . . . . .          | 60 |
| 32 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 7 . . . . .          | 61 |
| 33 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 7 . . . . .          | 62 |
| 34 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 8 . . . . .          | 62 |
| 35 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 8 . . . . .          | 63 |
| 36 | Desenho suporte para a demonstração do Teorema 9 . . . . .             | 64 |
| 37 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 10 . . . . .         | 65 |
| 38 | Desenho suporte para a demonstração da proposição 11 . . . . .         | 66 |
| 39 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 13 . . . . .         | 68 |
| 40 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 13 . . . . .         | 69 |
| 41 | Quadrilátero de Saccheri . . . . .                                     | 70 |
| 42 | Quadrilátero de Lambert . . . . .                                      | 70 |
| 43 | Desenho suporte para a demonstração da Proposição 14 . . . . .         | 71 |
| 44 | Semi-Plano de Poincaré . . . . .                                       | 73 |
| 45 | William Thurston . . . . .   | 75 |
| 46 | Modelo de William Thurston feito por David Henderson . . . . .         | 76 |
| 47 | Construção do Modelo William Thurston . . . . .                        | 77 |
| 48 | Keith Henderson e sua bola de futebol hiperbólica . . . . .            | 78 |
| 49 | Bola de futebol hiperbólica . . . . .                                  | 78 |
| 50 | Daina Taimina e William Thurston . . . . .                             | 80 |

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 51 | Primeiro plano hiperbólico anular de malha de Daina 1997 . . . . . | 81  |
| 52 | Modelo de crochê da Pseudoesfera . . . . .                         | 83  |
| 53 | Retas no modelo de crochê . . . . .                                | 83  |
| 54 | David Henderson e o modelo de crochê . . . . .                     | 84  |
| 55 | Hyperbolic Crochet Coral Reef Project . . . . .                    | 85  |
| 56 | Hyperbolic Crochet Coral Reef Project . . . . .                    | 85  |
| 57 | Daina Taimina . . . . .  | 86  |
| 58 | Coral . . . . .  | 90  |
| 59 | Coral folha de alface . . . . .                                    | 92  |
| 60 | Coral folha de Alface . . . . .                                    | 93  |
| 61 | Coral cérebro aberto . . . . .                                     | 94  |
| 62 | Coral cérebro aberto . . . . .                                     | 95  |
| 63 | Amêmona Tapete de sela . . . . .                                   | 96  |
| 64 | Amêmona Tapete de sela . . . . .                                   | 97  |
| 65 | Anêmona Tapete de Sela e o Modelo de Beltrami . . . . .            | 97  |
| 66 | Glossodoris atromarginata . . . . .                                | 99  |
| 67 | Glossodoris cruenta . . . . .                                      | 99  |
| 68 | Ardeadoris Symmetrica . . . . .                                    | 100 |
| 69 | Alface . . . . .   | 102 |
| 70 | Ramificações da folha de alface . . . . .                          | 102 |
| 71 | Ondulação na folha de cacto . . . . .                              | 103 |
| 72 | Cacto . . . . .  | 103 |
| 73 | Folha de Azezinho adulto abaixo e uma folha jovem . . . . .        | 104 |
| 74 | Azezinho com sua folha e frutos . . . . .                          | 104 |
| 75 | Flor Crista de Galo . . . . .                                      | 105 |
| 76 | Ondulação da flor Crista de Galo . . . . .                         | 106 |

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 77 | Flor Trompeta de Anjo . . . . .                     | 106 |
| 78 | Trombeta de anjo . . . . .                          | 107 |
| 79 | Pseudoesfera . . . . .                              | 107 |
| 80 | Lírio de Chama . . . . .                            | 108 |
| 81 | Espécies de platelmintos . . . . .                  | 109 |
| 82 | Modelo 1: Plano Hiperbólico . . . . .               | 117 |
| 83 | Modelo 2: Plano Hiperbólico Mais Crescido . . . . . | 118 |
| 84 | Modelo 3: Pseudoesfera . . . . .                    | 119 |
| 85 | Modelo 4: Outra Pseudoesfera . . . . .              | 120 |
| 86 | Modelo 5: Plano Hiperbólico Duplo . . . . .         | 121 |
| 87 | Modelo 6: Coral Hiperbólico . . . . .               | 122 |

# 1 Introdução

A geometria hiperbólica, uma das Geometrias não euclidianas, aparece como um dos conteúdos de Geometria que devem ser explorados na Educação Básica e em cursos de graduação. A presença de conceitos de geometria hiperbólica no currículo da educação básica aparece indiretamente nas habilidades elencadas na Base Nacional Comum Curricular e diretamente citada no Parâmetro Curricular do Ensino Médio do nosso estado.

Nessa perspectiva, as Geometrias Não Euclidianas têm como objetivo não apenas enriquecer o entendimento matemático dos alunos, expandir a percepção da matemática como uma construção histórica, mas também os conecta com realidades cotidianas onde esses conceitos são mais aplicáveis do que se imagina. No entanto, a dificuldade de visualização e a abstração dessa geometria tornam a aprendizagem um desafio, especialmente para os estudantes que não possuem um conhecimento prévio profundo em geometria avançada.

Neste contexto, nosso trabalho apresenta uma breve história sobre o surgimento da Geometria Hiperbólica, conceitos e demonstrações iniciais e uma investigação de como se deu a construção das formas de representação do plano hiperbólico, visando facilitar o entendimento dessa geometria pelos alunos. A exploração de diferentes modelos de representação é essencial para que se possa visualizar o espaço hiperbólico de maneira acessível. O foco desta pesquisa será em duas abordagens: a observação de representações do plano hiperbólico na natureza, amparado com a interdisciplinaridade com os componentes curriculares das Ciências da Natureza, e a utilização do crochê como uma ferramenta para modelar essas estruturas geométricas de forma concreta e didática.

A natureza, com sua infinidade de padrões e formas, apresenta uma abundância de exemplos que podem ser analisados sob a ótica da geometria hiperbólica. Organismos como corais, flores e conchas possuem arranjos que, ao serem observados de perto, revelam padrões geométricos que podem ser semelhantes às estruturas geométricas da geometria hiperbólica, onde os objetos geométricos não se comportam como na Geometria Euclidiana. Essas estruturas são uma excelente forma de introduzir o conceito de curvatura negativa e outras propriedades da geometria hiperbólica de uma maneira que é visualmente acessível para os alunos.

Por outro lado, abordaremos o crochê, como uma ferramenta inovadora para a criação de modelos geométricos no ensino de geometria. Essa forma de representação foi inspirada na natureza e foi apresentada pela professora Daina Taimina da Universidade de Cornell em 1997. Ao utilizar o crochê para representar figuras geométricas, é possível visualizar fisicamente as propriedades da geometria hiperbólica de uma maneira que as representações tradicionais, como as projeções em papel ou modelos digitais, não conseguem. O crochê permite a manipulação tátil da geometria, o que pode tornar o aprendizado mais concreto e compreensível. Com ele, é possível criar modelos de superfícies que ilustram a curvatura negativa característica do plano hiperbólico, proporcionando aos alunos uma experiência prática que complementa a teoria matemática.

Ao combinar essas duas perspectivas, as representações naturais e as artificiais criadas pelo crochê, esta dissertação busca apresentar uma abordagem didática e inovadora para o ensino da geometria hiperbólica, ou mesmo para sua introdução na Educação Básica, contribuindo para uma compreensão mais acessível e engajante do assunto.

Sendo assim, estruturamos nosso trabalho da seguinte forma: No Capítulo 2, apresentamos a justificativa do nosso trabalho, fundamentada nos parâmetros da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná, além de destacar a importância da interdisciplinaridade como princípio norteador da pesquisa. No Capítulo 3, abordamos o surgimento da Geometria Hiperbólica, traçando seu desenvolvimento histórico e as bases matemáticas que a sustentam. No Capítulo 4, discutimos o conceito de curvatura, explicando-o de maneira acessível e intuitiva, de modo a facilitar a compreensão do leitor.

No Capítulo 5, apresentamos os modelos do plano hiperbólico que surgiram ao longo da história, explorando o seu surgimento e as características de cada um. No Capítulo 6 daremos um ênfase especial nos modelos da professora Daina Taimina, que representam o ponto alto do trabalho. Esses modelos servem como um elo entre os modelos do plano hiperbólico, o material didático para facilitar a visualização das propriedades dessa Geometria e a relação com as formas da natureza, oferecendo uma conexão visual e conceitual rica para os alunos e para o ensino da Geometria.

No Capítulo 7, apontaremos as características da Geometria Hiperbólica que aparecem nos elementos da natureza (semelhanças). Tais apontamentos foi construído a

partir de uma pesquisa que buscamos elencar espécies de corais, lesmas marinhas, plantas e flores que exibem características geométricas compatíveis com a geometria hiperbólica, partindo dos modelos de crochê da professora Daina Taimina, estabelecendo uma ponte entre os conceitos matemáticos e a observação de formas naturais do espaço que vivemos.

## 2 Justificativa

O Componente Curricular da Matemática é um desafio para estudantes e professores devido a dificuldade de compreensão e a falta de percepção, pelos alunos, da Matemática no cotidiano e conseqüentemente a falta de motivação para o estudo da mesma. De acordo com D' Ambrosio [38]:

É muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta (D' AMBROSIO, 1996, p.31)[38].

Dessa forma, faz-se necessário buscar estratégias de ensino da matemática a fim de torná-la interessante, atraente e prazerosa aos olhos dos discentes e tornar a aprendizagem significativa.

Entre as diversas áreas da Matemática, a Geometria pode ser explorada para tornar o ensino mais atrativo e contextualizado, uma vez que ela permeia nosso cotidiano com aplicações em áreas como a arquitetura e engenharia, se manifesta na natureza e ainda, de acordo com Duval [33], o ensino da geometria favorece três diferentes vertentes do processo cognitivo: a visualização, o raciocínio e a construção.

A área da Geometria é vista como uma ferramenta para interagir e descrever o espaço no qual vivemos, ou seja, está fortemente ligada à realidade. Segundo essa mesma perspectiva, Lorenzatto (1995, p. 5) [33] justifica a importância do ensino da Geometria da seguinte forma:

A necessidade do ensino de Geometria é justificada pelo fato de que um indivíduo sem esse conteúdo, nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizadas. Não poderá ainda utilizar-se da Geometria como facilitadora para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano.

Nesse contexto, é essencial que o discente tenha condições de realizar conjecturas, investigar, perceber propriedades, descrever, explorar e fazer representações, como

por exemplo, na caracterização de formas geométricas, pode-se utilizar objetos ou formas concretas encontradas no ambiente e no cotidiano ao invés de explorar somente as definições.

Nessa perspectiva, decidimos explorar a Geometria Não Euclidiana devido a sua relevância histórica e teórica, o seu papel crucial em várias áreas modernas, como física, cosmologia e computação gráfica, sua manifestação na natureza e a Compreensão de que essas Geometrias não apenas enriquecem nossa percepção do espaço, mas também esclarece questões fundamentais sobre a estrutura da realidade.

Ao fazermos um levantamento no banco de dissertações do Programa ProfMat com o tema Geometria Hiperbólica ou que abordem alguma tópico da mesma, encontramos 22 trabalhos. Um trabalho trata somente da história e dos modelos de Beltrami. Cinco trabalhos têm por objetivo introduzir os conceitos e fundamentos iniciais de Geometria Hiperbólica e os demais trabalhos, em sua maioria, tratam de propostas de inserção das Geometrias Não Euclidianas na Educação Básica e a utilização de softwares para exploração das propriedades dessas Geometrias.

Sendo assim, não há algum trabalho com o objetivo de evidenciar o plano hiperbólico ou as formas hiperbólicas presentes na natureza e a criação de modelos palpáveis que possibilitem a visualização, manipulação e compreensão dessa geometria.

Na escola, os alunos são apresentados a geometria de Euclides que funciona muito bem sob superfícies planas, porém, o mundo em que vivemos não é perfeitamente plano e apresenta curvaturas o que exige que conheçamos propriedades e ferramentas que não são oferecidas pela Geometria Euclidiana. Um exemplo muito simples, é a verificação da soma dos ângulos internos do triângulo ser dois retos que em uma superfície ligeiramente curva não é verificada.

Outras situações, como na navegação em que se deve levar em consideração a curvatura da Terra, a Geometria Euclidiana dá lugar a outro tipo de Geometria, ou seja, cada Geometria é usada na situação que for mais adequada. Para tanto, é necessário que se conheça e reconheça propriedades e representações das Geometrias Não Euclidianas, no nosso caso, a Geometria Hiperbólica. Esse contato com a Geometria Hiperbólica na Educação Básica é amparado por documentos que norteiam o ensino no país e no estado do Paraná, como a Base Nacional Comum Curricular e o Referencial Curricular para o

## 2.1 Base Nacional Comum curricular e o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que direciona o currículo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, determinando as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas durante a Educação Básica. De acordo com a BNCC [5], as competências são entendida como a mobilização de conceitos e habilidades para resolver situações do dia a dia.

A BNCC se divide em cinco temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Tais temáticas irão nortear as habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo da Educação Básica.

Para os anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC ressalta que a área de Matemática e suas tecnologias devem garantir que os discentes consigam relacionar situações do mundo real com conceitos e propriedades matemáticas, fazendo induções e conjecturas. Ou seja, deve-se esperar que os alunos desenvolvam a habilidade de utilizar conceitos matemáticos para resolver problemas e interpretá-los. Nessa perspectiva, a BNCC aponta como competência a ser alcançada no Ensino Fundamental:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho [5].

No que diz respeito a Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC aponta para o estudo de posição, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, além das transformações geométricas e simetrias, de modo que os alunos sejam capazes de fazer demonstrações simples e desenvolver o raciocínio hipotético-dedutivo.

De acordo com a BNCC [5], no que diz respeito as habilidades e objetos de conhecimento, a aprendizagem dos conceitos matemáticos nos anos finais do Ensino Fundamental está ligada à conexões que os discentes realizam entre o objeto matemático e o

seu cotidiano e entre os demais componentes curriculares. Salienta que, para haver uma aprendizagem com contexto e significativa, deve-se lançar mão não somente do cotidiano, mas de outras áreas do conhecimento e da História da Matemática.

Entretanto, os alunos devem ser capazes de abstrair o contexto, isto é, possam fazer questionamentos e reflexões sobre o que aconteceria se algum conceito fosse retirado ou acrescentado de uma situação ou problema. É importante notarmos que essa última habilidade nos remete ao problema do quinto postulado de Euclides, afinal, levaram-se anos para que grande matemáticos percebessem que o quinto postulado não dependia dos outros quatro e que seria possível construir um outro tipo de geometria, tão sólida quanto a geometria Euclidiana, acrescentando a negação do quinto postulado, o postulado das paralelas.

Para o Ensino Médio, a BNCC propõe o aprofundamento dos conceitos matemáticos trabalhados no ensino Fundamental, salientando que nessa etapa os estudantes devem desenvolver representações mais sofisticadas. Em relação as competências, devem ser capazes de analisar situações nos mais variados contextos, como situações do dia a dia e fatos das Ciências da Natureza e Humanas.

Ainda sobre o Ensino Médio, a BNCC apresenta as habilidades, das quais é importante apresentarmos duas delas:

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.[5]

Analisando essas habilidades e as demais ideias apresentadas na BNCC pode-se perceber que o ensino de Geometria Não Euclidiana atende as necessidades e as concepções apresentadas, uma vez que a mesma possibilita um entendimento mais abrangente sobre o espaço, as formas e as relações entre os objetos, incentiva o desenvolvimento do raciocínio lógico, crítico e abstrato, competências fundamentais que a BNCC elenca para o Ensino Médio.

A Geometria Não Euclidiana apresenta ao aluno uma outra perspectiva de espaço, mostrando que conceitos de reta, triângulo e de outras figuras podem variar de acordo com a curvatura do espaço, além de preparar o estudante para compreender alguns fenômenos do mundo real, como por exemplo, a Teoria da Relatividade, o sistema navegação e o GPS. Ainda, o estudo de Geometrias Não Euclidianas pode estimular a curiosidade e a compreensão de que a Matemática é uma área dinâmica, que evoluiu a partir de ideias anteriores que contribuíram para a valorização e entendimento do progresso científico.

A presença de formas do dia a dia que apresentam Geometria Hiperbólica permite aos alunos perceberem as mudanças dos ângulos e das figuras geométricas já conhecidas, estabelecendo uma ponte entre o mundo real e o abstrato, como por exemplo, o colarinho de uma camisa ou uma folha de alface que assumem formas onduladas.

Ao analisar esses objetos, os estudantes podem visualizar como a curvatura negativa faz com que a superfície se expanda mais rapidamente à medida que se distancia do ponto central. A percepção e análise dessas características no ambiente ou espaço, estabelece a conexão proposta pela BNCC do componente curricular com o cotidiano.

Com a atualização das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e a instituição da BNCC para a etapa do Ensino Médio, o Estado do Paraná iniciou a elaboração do Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná [28]. Tal documento apresenta um texto introdutório abordando o cenário atual do Ensino Médio em todo o estado, as necessidades e percepções dos estudantes nessa etapa do ensino e a fundamentação teórica utilizada para construção do documento.

Depois, no tópico Formação Geral Básica, aparece a organização curricular com as competências e habilidades, dividida em quatro áreas de conhecimento: Linguagens e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas tecnologias e Ciências Humanas Sociais e Aplicadas.

A seção dos Itinerários Formativos possui a apresentação do Projeto de Vida como componente curricular no Ensino Médio, os Princípios Organizadores dos Itinerários Formativos e, na última seção, quatro Itinerários Formativos (um para cada área de conhecimento) e as trilhas de aprendizagem. Por último, são explicados os princípios do Itinerário da Formação Técnica e Profissional.

O Referencial Curricular do Paraná traz claras reflexões na área da Matemática e

suas tecnologias, é orientado pela Base Nacional Comum Curricular apresentando os Objetos de Conhecimento que são os conteúdos que contemplam cada habilidade apresentada na BNCC.

Figura 1: Quadro retirado Referencial Curricular do Paraná para o Ensino Médio

| Competências Específicas   | Habilidades   | Objetos de Conhecimento   |
|--|---|---|
| 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. | <p><b>(EM13MAT101)</b> Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p> <p><b>(EM13MAT102)</b> Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.</p> <p><b>(EM13MAT103)</b> Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.</p> <p><b>(EM13MAT104)</b> Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.</p> <p><b>(EM13MAT105)</b> Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).</p> <p><b>(EM13MAT106)</b> Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas, levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).</p> | <p>Funções.</p> <p>Porcentagem.</p> <p>Estatística.</p> <p>Medidas.</p> <p>Matemática financeira.</p> <p>Geometria plana.</p> <p>Geometria espacial.</p> <p>Geometria não euclidiana.</p> <p>Probabilidade.</p> |

Fonte: Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná [28]

Na unidade temática da Geometria, o Referencial, inicialmente, já apresenta as Geometrias Não Euclidianas e a análise dos elementos da natureza, bem como a importância do trabalho com esse conteúdo:

As Geometrias (Euclidiana e Não Euclidiana) estão presentes de diversas formas, nas mais variadas situações: na natureza, nas artes, nas ciências, nos jogos, nas construções etc. Desenvolver o pensamento geométrico nessa etapa de ensino implica em ter conhecimentos de geometria plana e espacial em um nível de abstração mais complexo. Os estudantes devem desenvolver também habilidades para identificar e utilizar as transformações isométricas e homotéticas, para construir figuras e analisar elementos da natureza, como os fractais, representados nas estruturas microscópica e macroscópicas, de um floco de neve ou de uma grande nuvem, e diferentes produções humanas, como as obras de arte, ou ainda padrões de repetição étnicos como indígenas, da cultura afro, entre outros. Assim como reconhecer composições geométricas na engenharia e arquitetura.

Com relação às Geometrias não euclidianas, elas surgem entre o final do século XVIII e o início do século XIX e ganham importância no início do século XX com a Teoria da Relatividade Geral e, posteriormente, com o desenvolvimento da Teoria dos Fractais (PARANÁ, 2008). O seu surgimento mostrou que, para compreender diversos problemas da realidade e do mundo científico além das relações matemáticas com a própria geometria euclidiana é necessário incorporar na educação básica o estudo das Geometrias Não Euclidianas. (Paraná [28])

Posteriormente, o documento organiza em quadros contendo as Habilidades da BNCC que devem ser desenvolvidas, os objetos de conhecimento e os conteúdos. É possível observar a presença da Geometria Hiperbólica e outras Geometrias Não Euclidianas como conteúdos a serem trabalhados.

Figura 2: Quadro retirado Referencial Curricular do Paraná para o Ensino Médio

| UNIDADE TEMÁTICA 03<br>GEOMETRIAS   |   |  |
|---|---|--|
| Habilidades a serem desenvolvidas   | Objetos de conhecimento   | Conteúdos  |
| (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras. | Geometria plana.<br>Geometria espacial.<br>Geometria não euclidianas. | Transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições).<br>Transformações homotéticas.<br>Fractais.<br>Noções de geometria elíptica e hiperbólica.<br>Geometria projetiva. |

Fonte: Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná

Portanto, esse trabalho se ampara em uma análise dos documentos oficiais que norteiam a Educação Básica em nosso Estado e país.

## 2.2 Interdisciplinaridade

Ao longo dos anos, à medida que novos conhecimentos surgiram, o estudo se tornou cada vez mais fragmentado, dando origem a diversas Ciências, como a Biologia e a Matemática, além de áreas como Física e Química. Esse aprendizado nas ciências é fundamental, pois permite que os alunos vejam o mundo de uma forma nova, compreendendo detalhes e discernindo conceitos de maneira mais clara.

Nesse sentido, à medida que os campos de conhecimento nas Ciências se desenvolveram, notamos como a Matemática se relaciona com a Biologia na Educação Básica. Infelizmente, muitas vezes, a Matemática é vista de forma restrita, focando apenas em ler, organizar dados e realizar cálculos de maneira mecânica, sem que se perceba seu verdadeiro significado. É essencial entender que a Matemática vai além da simples interpretação de dados em gráficos; ela está presente nas decisões que fazemos e nas ideias que desenvolvemos. Contudo, ao longo dos anos letivos, a Matemática e a Biologia tendem a se afastar, e isso ocorre por várias razões, desde a falta de conexão entre elas nos livros didáticos até as dificuldades que os professores enfrentam em sala de aula.

A interdisciplinaridade surge, então, como uma resposta a essas mudanças na forma de produzir ciência e entender a realidade, além de refletir os aspectos político-administrativos do ensino e da pesquisa nas instituições. Um dos principais desafios é a rigidez e a artificialidade das disciplinas, que muitas vezes não conseguem se adaptar às novas demandas do processo educativo e à produção de conhecimentos inovadores (PAVIANI, 2008, p.14) [?].

Neste contexto, a interdisciplinaridade se torna um elo que conecta diferentes disciplinas, oferecendo uma visão mais integrada do conhecimento. Ela desempenha um papel importante ao reunir várias temáticas e conteúdos, promovendo a inovação de recursos e dinâmicas que podem enriquecer a aprendizagem. Assim, a interdisciplinaridade facilita o diálogo entre diferentes áreas, ajudando a criar uma compreensão mais profunda das relações que existem entre elas.

As Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio garantem que: “A interdisciplinaridade e a contextualização devem assegurar a transversalidade e a articulação do conhecimento de diferentes componentes curriculares, propiciando a interlocução entre os saberes das diferentes áreas de conhecimento”.(BRASIL, 2013, p.189)[?].

Nesse contexto, o trabalho interdisciplinar vai além de simplesmente juntar disciplinas; ele se torna um caminho que ajuda os estudantes a perceberem as conexões entre as diferentes áreas do conhecimento. Ao explorar esses laços que entrelaçam os saberes, os alunos se sentem motivados a buscar, por conta própria, um aprofundamento do que aprenderam na escola.

A falta de envolvimento entre a Matemática e as Ciências da Natureza, cujo um dos componentes é a Biologia, tem um impacto direto na Educação Básica. Nos tópicos de Biologia que utilizam a Matemática, bem como nos conceitos matemáticos aplicados à Biologia, muitos professores se sentem despreparados para explicar como essas áreas se conectam, sua origem, e por que essa relação é importante. Como diz o filósofo Edgar Morin: “É preciso distinguir, mas não separar”[34].

Para que os alunos realmente aprendam de forma significativa, a interdisciplinaridade e a contextualização são essenciais. Quando conseguimos integrar diferentes áreas do conhecimento, facilitamos a compreensão da complexidade da natureza, ajudando a evitar um pensamento limitado e a alienação. Essa conexão não apenas enriquece o aprendizado, mas também prepara os alunos para enfrentar os desafios do mundo de maneira mais ampla e crítica.

Galileu Galilei, embora nunca tenha dado uma definição clara do que entendia por Natureza, acreditava que ela tinha uma estrutura matemática. Para ele, a Matemática era a chave para compreender o mundo ao nosso redor. Ele via a essência da Natureza em linguagem matemática, o que o levou a afirmar que, para entender o universo, era essencial recorrer a essa linguagem.

“O Universo (...) não pode ser compreendido a menos que primeiro aprendamos a linguagem no qual ele está escrito. Ele está escrito na linguagem Matemática e os seus caracteres são o triângulo, o círculo e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível compreender uma palavra que seja dele: sem estes ficamos às escuras, num labirinto escuro” (Galileu Galilei, 1626)[14].

### 3 Gênese da Geometria Hiperbólica

As informações históricas apresentadas nesse capítulo foram escritas com base na dissertação de mestrado intitulada *A Gênese da Geometria Hiperbólica*, de 2005 da Faculdade de Ciências do Porto, cujo autor é José Maria Eduardo Samuco [35].

Explorar a origem da geometria é um enorme desafio, pois essa prática é mais antiga que a escrita. O historiador grego Heródoto (século V a.C) defendia a ideia de que a geometria teria iniciado no Antigo Egito advindo da necessidade de medir terrenos depois da inundação anual do vale do rio Nilo, afinal, a palavra “Geometria” tem origem no grego *geometrein* que significa medição da terra (*geo* significa terra e *metrein* significa medir).

Tales de Mileto (século VI a. C.), matemático grego, teria introduzido a geometria na Grécia de acordo com um relato de Eudemo-Proclo:

“Tales, que tinha estado no Egito, foi o primeiro a trazer essa teoria para a Grécia; ele próprio descobriu muitas coisas e ensinou os princípios de muitas delas aos seus sucessores, tratando umas de modo mais geral e outras de modo mais sensível” (Samuco, J. M. E. (2005)) [35].

Tales teria sido o primeiro matemático a colaborar para instituir a geometria dedutiva, isto é, a veracidade das proposições se dava a partir do raciocínio dedutivo, da demonstração utilizando as hipóteses admitidas.

Próximo a Mileto, na ilha de Samos, nasceu Pitágoras (571-496 a.C.), que estudou no Egito e posteriormente se estabeleceu em Crotona, onde teria fundado a Escola Pitagórica ou Escola de Crotona com caráter de culto religioso e filosófico cultivando a purificação do espírito através da música e matemática. Os pitagóricos continuaram na mesma perspectiva de Tales buscando uma geometria dedutiva.

A Escola Pitagórica fez sua grande contribuição com a descoberta da incomensurabilidade, contrariando a crença dos primeiros pitagóricos de que era possível encontrar uma medida para todo segmento de reta. Essa descoberta teria provocado uma crise entre os pitagóricos por ter contrariado seus fundamentos filosóficos. Ainda, como consequência da incomensurabilidade, houve a distinção entre os domínios numéricos e geométricos. Assim as demonstrações utilizando a teoria das proporções foram abandonadas e surgindo, então, dois domínios da matemática: a aritmética e a geometria.

Por volta de 300 a.C., Euclides de Alexandria publicou *Os Elementos*, uma obra em treze livros e 465 proposições que se tornou um marco na geometria devido à sua organização e rigor lógico. Baseado nos trabalhos de antecessores gregos como Pitágoras e Eudoxo, Euclides estruturou sua geometria a partir de cinco postulados, cinco noções comuns e diversas definições. De acordo com Braz [6], os livros que compõem *Os Elementos* são:

**Livro I:** Fundamentos da Geometria Plana.

**Livro II:** Álgebra Geométrica.

**Livro III:** Teoria da circunferência.

**Livro IV:** Figuras inscrita e circunscrita

**Livro V:** Teoria das proporções abstratas.

**Livro VI:** Figuras geométricas semelhantes e proporcionais.

**Livro VII:** Fundamentos da teoria dos números.

**Livro VIII:** Sequências de números em progressões geométricas.

**Livro IX:** Teoria dos números.

**Livro X:** Classificação dos incomensuráveis.

**Livro XI:** Geometria dos sólidos.

**Livro XII:** Medição de figuras.

**Livro XIII:** Sólidos Regulares.

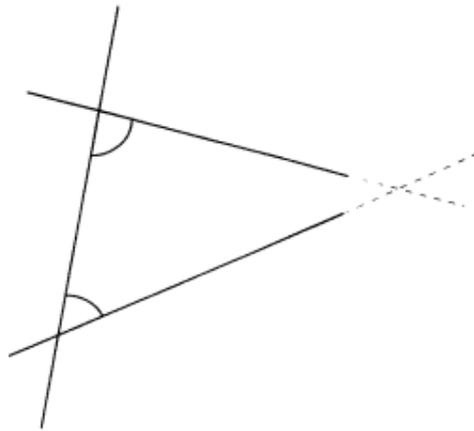
Euclides tentou definir conceitos básicos como ponto, reta e plano, mas não conseguiu fazer de maneira totalmente clara. No primeiro livro, destacou a definição de linhas retas paralelas como aquelas que, estando no mesmo plano e prolongadas indefinidamente, nunca se encontram. O livro I dos *Elementos* inclui quarenta e oito proposições, que são demonstradas com base nos postulados, nas noções comuns e em proposições previamente provadas. A seguir, apresentamos os postulados e noções comuns estruturados por Euclides. Estes foram retirados do livro *Os elementos de Euclides* traduzido diretamente do grego por Irineu Bicudo. [12].

### 3.1 Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos

Figura 3: Quinto Postulado



Fonte: A Gênese da Geometria Hiperbólica, 2009

O primeiro postulado garante que é possível traçar uma reta passando por dois pontos dados, o segundo indica a infinitude da reta em qualquer sentido e o terceiro postulado trata da possibilidade de traçar uma circunferência a partir de dois pontos dados com um deles sendo o centro. O quarto postulado contribui para a formulação do quinto, também conhecido como postulado das paralelas, que é o mais importante e conflitante componente dos elementos.

O enunciado do quinto postulado refere-se a existência, ou seja, se verificarmos a hipótese de que a soma dos ângulos indicados for inferior a dois retos então as duas retas, cortadas por uma transversal, se intersectam.

Após apresentar os postulados, Euclides detalhou cinco Noções Comuns no *Elementos*[12], amplamente aceitas e de conhecimento geral. As três primeiras têm um caráter lógico, enquanto a quarta está relacionada ao conceito de movimento rígido, permitindo a sobreposição de figuras sem alterar suas formas. A quinta noção é clara para grandezas físicas, como medidas e volumes, mas não se aplica a conjuntos infinitos.

## 3.2 Noções Comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

O postulado das paralelas foi considerado por alguns sucessores de Euclides como um teorema e procurou-se demonstrá-lo durante mais de dois mil anos. No entanto, todas as tentativas foram fracassadas, de forma que cada tentativa de demonstração culminou na descoberta de resultados equivalentes ao quinto postulado que se buscava provar. O primeiro trabalho que buscou demonstrar o quinto postulado teria sido o Tratado de Arquimedes (287-212 a.C.), intitulado “*Sobre rectas paralelas*” [35].

Proclo, matemático conhecido por seus comentários sobre Os Elementos, criticou o quinto Postulado de Euclides:

“Este deve ser absolutamente irradiado do conjunto dos postulados, porque é um teorema que envolve inúmeras dificuldades que Ptolomeu se propôs esclarecer num certo livro e cuja demonstração exige muitas definições e teoremas. Euclides, aliás, demonstra a proposição recíproca deste postulado como sendo um teorema [...]. Resulta manifestamente do que precede que é preciso encontrar uma demonstração do teorema proposto e que ele difere da natureza especial dos postulados” (Samuco, J. M. E.(2005))[35].

Proclo apresenta uma tentativa de demonstração do quinto postulado. No entanto, ele próprio criticou-a pois assumiu que por um ponto fora da reta passa uma única paralela a ela, o que é equivalente ao quinto postulado.

Os matemáticos Árabes Ibn al-Haytham (965-1039) e Omar khayyam (1048-1131) tentaram utilizar a redução ao absurdo como tentativa de demonstração. As demonstrações de ambos levaram a contradições e afirmações equivalentes. Depois, Jhon Wallis (1612-1703) fez uma tentativa utilizando o seguinte axioma: *Toda figura tem uma semelhante de tamanho arbitrárias.*

O francês Adien- Marie Legendre (1752-1833) fez várias tentativas de demonstração do quinto postulado nas suas edições do livro “Elementos de Geometria” de 1794 até 1823. Tentou demonstrar a partir dos quatro primeiros postulados, no entanto, Legendre não obteve sucesso. Já o matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819) foi responsável por substituir o quinto postulado por um outro de escrita mais simples: *“Por um ponto exterior a uma reta passa uma só reta paralela à dada”*. Essa substituição para o postulado é o mais usado nos tempos modernos, no entanto, essa alternativa já tinha sido enunciada no século V por Proclo.

Faz-se necessário, ressaltar algumas outras alternativas de substituição equivalentes do postulado das paralelas que foram retirados de Arcari, página 31 [4]:

1. Há pelos menos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a um ângulo raso.
2. Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.
3. Existe um par de retas igualmente distantes uma da outra em todos os pontos
4. Por três pontos não colineares pode-se traçar uma circunferência.
5. Por qualquer ponto no interior de um ângulo menor que  $60^\circ$  pode-se sempre traçar uma reta que intercepta ambos os lados do ângulo.

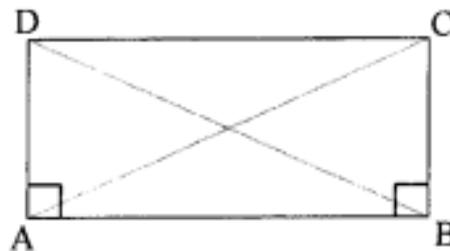
Gerolamo Saccheri (1667-1733) matemático e filósofo, era padre jesuíta e professor de teologia e iniciou seu trabalho com a Geometria Não Euclidiana estudando os trabalhos de Nasír ed-dín, (1201-1274) que além de estudar astronomia, também tentou provar o

postulado das paralelas, mas acabou assumindo uma proposição-axioma que era equivalente ao quinto postulado. Esses escritos, além de serem a primeira investigação científica do quinto postulado, foram a única tentativa de prova durante um longo período que vai dos gregos antigos até a época do Renascimento, e que posteriormente foi traduzido para o latim, no século XVII, por John Wallis e utilizado por ele em Oxford.

Saccheri escreveu “Euclides Livre de Todos os Erros” de 1733, sua obra mais conhecida, que buscava principalmente provar o quinto postulado e que praticamente descobriu uma das Geometrias Não Euclidianas. Assumiu as vinte e sete primeiras proposições no livro I dos Elementos e tomou como hipótese que o quinto postulado era falso. Usou um método particular de raciocínio, em que assume a proposição como falsa para chegar a conclusão que a mesma é verdadeira. Utilizou também, que a reta é infinita e contínua. Sua principal estratégia é a utilização de um quadrilátero com dois lados opostos perpendiculares a base e congruentes, que ficou conhecido como quadrilátero de Saccheri, tendo-o formulado da seguinte forma:

**Proposição 1** *Se um quadrilátero  $ABCD$  tiver os ângulos consecutivos  $A$  e  $B$  retos e os lados  $AD$  e  $BC$  iguais, então os ângulos  $C$  e  $D$  são iguais.*

Figura 4: Quadrilátero de Saccheri



Fonte: A Gênese da Geometria Hiperbólica, 2009

Saccheri traçou as diagonais  $AC$  e  $BD$  aplicou a Proposição: *Se dois triângulos têm dois lados correspondentes iguais e o ângulo por eles formado igual, então os terceiros lados e os ângulos opostos aos lados iguais também são iguais* [12] dos Elementos de Euclides nos triângulos  $ACB$  e  $ABD$  concluindo que as diagonais eram congruentes.

Posteriormente, aplicou a Proposição: *Se dois triângulos têm os três lados correspondentes iguais, então os ângulos compreendidos entre os lados iguais também são iguais*

[12], dos Elementos de Euclides nos triângulos ACD e BCD deduzindo que os ângulos do topo, C e D são iguais.

Depois, Saccheri tentou provar proposições voltadas para os ângulos C e D do quadrilátero. O tamanho desses ângulos estariam ligados ao tamanho do lado CD em relação ao lado AB (maior, igual ou menor) e implicaria que os ângulos seriam respectivamente agudos, retos ou obtusos. Como consequência, levaram-no a um resultado relacionado a soma dos ângulos internos do triângulo, apresentando a ideia de que essa soma poderia ser igual, maior ou menor que dois ângulos retos. Saccheri trabalhou individualmente cada uma das três hipóteses com o objetivo de mostrar que a hipótese do ângulo obtuso e a hipótese do ângulo agudo levariam a uma contradição, e então usando a redução ao absurdo deveria valer a hipótese do ângulo reto o que implicaria no postulado das paralelas.

Em seguida, Saccheri buscou provar a relação entre o quinto postulado de Euclides e as hipóteses dos ângulos do topo do quadrilátero. Ele pretendia provar que o quinto postulado era verdadeiro em todos os casos, no entanto, veio a falhar no seu objetivo e não tendo descoberto qualquer contradição sugeriu que o postulado de Euclides seria impossível de demonstrar. De forma mais detalhada, Saccheri assumiu a infinitude da reta para eliminar a hipótese do ângulo obtuso, mas teve maior dificuldade na hipótese do ângulo agudo que culminou provando teoremas que atualmente são clássicos da Geometria Não Euclidiana e acabou forçando uma contradição no desenvolvimento do seu trabalho.

Vale ressaltar que se Saccheri não tivesse se concentrado somente em encontrar uma contradição para a hipótese do ângulo agudo, ele teria recebido os méritos pela descoberta da Geometria Não Euclidiana.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) foi um matemático conhecido por ter sido o primeiro a publicar uma demonstração da irracionalidade de  $\pi$  e por ser um dos precursores da descoberta da Geometria Não Euclidiana com seu livro de 1766 *Die Theorie der Parallellinien*, o qual possui deduções de propriedades de Geometria Não Euclidianas mesmo não aceitando-as.

Lambert utilizou quadriláteros contendo três ângulos retos e estudou as possibilidades para o quarto, assim como Saccheri, haviam três hipóteses: ângulo reto, ângulo obtuso e ângulo agudo, sendo a primeira hipótese já provada à luz da Geometria Euclidiana.

Baseado na hipótese do ângulo obtuso, Lambert mostrou, caso fosse possível essa geometria, a soma dos ângulos internos de um triângulo seria maior que dois retos. E, a hipótese do ângulo agudo, conduziu Lambert à descoberta de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que a soma de dois retos. Ainda, analisou a área dos triângulos de acordo com a segunda e terceira hipótese e chegou a concluir que na hipótese do ângulo agudo poderia-se considerar mais um caso de congruência de triângulos, relacionada aos dois triângulos possuírem dois ângulos congruentes, o que na Geometria Euclidiana é um caso de semelhança de triângulos. No entanto, acabou utilizando a mesma tática de Saccheri para concluir sobre a hipótese do ângulo agudo, forçando uma contradição, as quais foram consideradas imprecisas e insatisfatória.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), iniciou seus estudos sobre o quinto postulado de forma diferente dos anteriores, considerando três hipóteses sobre a soma dos ângulos internos do triângulo: ser maior, menor ou igual a dois retos. Para eliminar a primeira hipótese assumiu a infinitude da reta, no entanto, mesmo depois de muitas tentativas, não conseguiu eliminar a hipótese da soma ser menor que dois retos. Contribuiu para popularizar o problema do quinto postulado através de suas edições de *Éléments de Géométrie*.

Johann Bolyai (1802-1860), matemático húngaro, se interessou em sua juventude em estudar sobre a teoria das paralelas. Em 1823 escreveu uma carta ao seu pai, Wolfgang Bolyai (1775-1856), indicando ter descoberto um novo tipo de Geometria, de fato, havia inventado a primeira Geometria Não Euclidiana:

“Resolvi publicar um trabalho sobre a teoria das paralelas, mal arranje o material e as minhas circunstâncias o permitam. Não completei o meu trabalho, mas o caminho que segui torna quase certo que o objetivo será alcançado, se isso for de todo possível; o objetivo ainda não foi atingido, mas efetuei descobertas maravilhosas que me deixaram extasiado, e seria motivo de lamento se as perdesse. Quando as vires, querido pai, também perceberás. Presentemente não posso dizer mais nada exceto isto: Criei um novo universo do nada. Tudo o que te enviei até hoje não passa duma casa de cartas em comparação com uma torre. Tenho a certeza que isto me trará honra, tal como se já tivesse completado a descoberta” (Samuco, J. M. E.) [35].

Em 1825 J. Bolyai enviou seu trabalho, mas o manuscrito só chegou ao seu pai em 1829 que publicou a teoria no apêndice do primeiro volume dos *Ensaio*s com o título

“A ciência do espaço absoluto com uma demonstração da independência da verdade ou falsidade do axioma XI de Euclides (que não pode ser decidido a priori) e também a quadratura do círculo no caso da sua falsidade”. , em 1832, depois de muitos atrasos, o que levou a não ser o primeiro a publicar sobre uma Geometria Não Euclidiana.

Figura 5: Johann Bolyai



Fonte: <[https://pt.m.wikipedia.org/wiki/J%C3%A1nos\\_Bolyai](https://pt.m.wikipedia.org/wiki/J%C3%A1nos_Bolyai)>

Em 1829, Nikolai Lobachevsky publicou o artigo “*Sobre Fundamentos da Geometria*”, seu primeiro trabalho apresentando uma Geometria Não Euclidiana, a Geometria Hiperbólica. O documento estava escrito em russo e não teve muito impacto, no entanto, apresentava todo o desenvolvimento da Geometria Hiperbólica, que foi denominada por Lobachevsky de Geometria Imaginária.

Figura 6: Johann Bolyai



Fonte: <[https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Nikolai\\_Lobachevsky#>](https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Lobachevsky#>)

As descobertas de Johann Bolyai e Nikolai Lobachevsky foram independentes um do outro, mas ambos sabiam que Carl Friedrich Gauss (1777-1855) não havia conseguido demonstrar o quinto postulado de Euclides. Enquanto Bolyai não publicou mais documentos sobre o assunto, Lobachevsky publicou, em francês um documento chamado *Geometria Imaginária* no Jornal de Crelle em 1837 e um livro, em alemão, denominado ‘*Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas*’, em 1840, na intenção de fazer sua obra conhecida. Posteriormente, já cego, Lobachevsky expôs tudo sobre sua geometria, mas nesse momento chamou “Pangeometria”.

A Geometria imaginária de Lobachevsky impulsionou o desenvolvimento analítico da Geometria Não Euclidiana, procurando construir uma estrutura geométrica partindo da negação do quinto postulado, enquanto J. Bolyai se aprofundou na relação de dependência de teoremas da geometria relacionadas ao quinto postulado, fazendo demonstrações que independessem do tal postulado.

Lobachevsky foi reconhecido e indicado por Gauss à Sociedade Científica de Göttingen em 1824, porém, Bolyai não recebeu qualquer reconhecimento público e morreu antes de ter recebido o merecido reconhecimento pelo seu trabalho. Dessa forma, a descoberta da primeira Geometria Não Euclidiana, a Geometria Hiperbólica, é vinculada principalmente a Johann Bolyai, Nikolai Lobachevsky e Carl Friedrich Gauss, geometria essa que corresponderia à hipótese do ângulo agudo levantada anteriormente por Saccheri.

É importante aprofundarmos no papel importante que Gauss exerceu no desenvolvimento da Geometria Hiperbólica. Primeiramente, assim como Lambert e Saccheri, tentou demonstrar o quinto postulado de Euclides utilizando redução ao absurdo, mas logo percebeu que esse postulado seria independente dos outros quatro e aceitou a existência de uma geometria partindo da negação do postulado das paralelas, isto é, admitindo que poderiam ser traçadas mais de uma paralela a um reta por um ponto fora. Denominou essa geometria de *Anti-Euclidiana*, em seguida de *Geometria Astral* e por fim, *Geometria Não Euclidiana* e considerou que a mesma poderia estar relacionada com o espaço físico.

Gauss não publicava todas suas descobertas, pois gostava de investigar as suas provas até que concluísse uma obra-prima sem falhas ou pouco rigor matemático, sendo assim não foi atribuído a ele a descoberta dessa nova geometria, mas para aqueles que primeiro as publicaram. Em 1824, Gauss já constatava detalhes da sua nova geometria

e pretendia publicá-la como é possível perceber na carta que enviou a Franz Taurinus (1794-1874):

“É verdade que a sua demonstração de que a soma dos três ângulos dum triângulo plano não pode ser maior do que  $180^\circ$  carece de rigor geométrico. Mas isto por si só pode ser facilmente remediado, e não há dúvida que a impossibilidade pode ser provada rigorosamente. Mas a situação é bastante diferente na segunda parte, a assunção de que a soma dos ângulos não pode ser menor do que  $180^\circ$ ; este é o ponto crítico, o recife no qual todos os naufrágios ocorrem [...]. A assunção de que a soma dos três ângulos é menor que  $180^\circ$  conduz a uma geometria curiosa, bastante diferente da nossa (a euclidiana), embora consistente, que desenvolvi com inteira satisfação, de modo que eu possa resolver todos os problemas com base nela [...] Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta Geometria Não Euclidiana foram infrutíferos e a única coisa a que é oposta às nossas concepções é que, se é verdade, deve haver no espaço uma magnitude linear, determinada por si mesma (mas desconhecida por nós). Mas parece-me que nós sabemos, apesar da sabedoria da palavra de dizer nada dos metafísicos, bastante pouco ou quase nada mesmo, acerca da verdadeira natureza do espaço, para considerar absolutamente impossível aquilo que nos parece não natural. Se esta Geometria Não Euclidiana fosse verdade, e fosse possível comparar essa constante com tais magnitudes como encontramos nas nossas medições na terra e nos céus, poderia então ser determinado a posteriori. Consequentemente, em gracejo às vezes expressi o desejo que a Geometria Euclidiana não fosse verdade, uma vez que aí teríamos a priori um padrão absoluto de medição. [...]” (Samuco, J. M. E.)[35].

Nessa carta, a “constante” que se refere Gauss seria a constante do espaço, ou o raio da esfera da geometria Esférica ou, ainda, o raio de curvatura do plano da geometria de Lobachevsky.

Gauss recebeu em janeiro de 1832 o trabalho de J. Bolyai e escreveu a M. Bolyai,

“...Agora uma palavra acerca do trabalho do seu filho. Se começar por dizer que não posso elogiá-lo ficará surpreso por momentos, mas não posso fazê-lo de outro modo. Elogiá-lo seria elogiar-me, porque o conteúdo do trabalho, a abordagem que o seu filho faz, e os resultados a que chegou coincidem quase por completo com as meditações que levei a cabo há 30 ou 35 anos. De facto, estou extremamente surpreso pelo trabalho.” (Samuco, J. M. E. )[35].

Tais correspondências de Gauss indicam que pensou muito sobre o assunto das Geometria Hiperbólica, chegou a resultados, mas acabou adiando a publicação de seu trabalho devido a necessidade de apresentar algo que considerasse impecável.

A aceitação da Geometria Hiperbólica sofreu dificuldades e foi retardada devido o trabalho de Lobachevsky ter sido escrito em russo e o seu nome, assim como o de J. Bolyai, serem novidade na comunidade científica. Entretanto, os trabalhos de Lobachevsky publicados em francês e alemão contribuíram para disseminação dessa nova teoria.

O Jornal de Matemática na Itália, em 1867, passou a publicar os trabalhos de Geometria Hiperbólica e no seu sexto volume trouxe um famoso trabalho de Eugenio Beltrami (1835-1900) intitulado “*Uma tentativa de interpretação da Geometria Não Euclidiana*”. Nos outros demais volumes do Jornal era frequentemente publicados trabalhos sobre Geometria Não Euclidiana o que contribuiu para difusão do conhecimento dessa nova geometria, assim como uma leva de publicações que aconteceram em 1868 e 1872, alguns com foco em tornar mais simples a interpretação dos trabalhos dos fundadores da Geometria Hiperbólica.

Outros matemáticos como Felix Klein e Henri Poincaré, por exemplo, contribuíram para estabelecer inquestionavelmente a independência do quinto postulado com demonstrações relacionadas a consistência da hipótese do ângulo agudo.

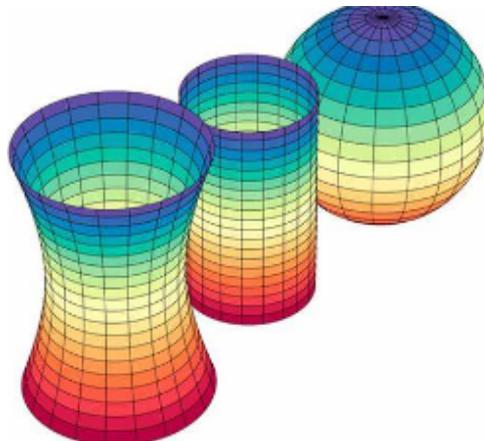
Não é surpresa que nenhum matemático tenha encontrado uma contradição ou demonstração para a hipótese do ângulo agudo, afinal, sabe-se que a geometria construída a partir de uma coleção de axiomas acrescida da hipótese do ângulo agudo é consistente, da mesma forma que a geometria euclidiana desenvolvida a partir dos mesmos axiomas e acrescida do quinto postulado (hipótese do ângulo reto) é consistente.

## 4 Curvatura

Para entendermos as características que fazem os seres da natureza semelhantes, de forma aproximada, com modelos de planos hiperbólicos, que apresentam curvatura negativa, e até mesmo entendermos os modelos, é necessário compreendermos a ideia de curvatura. De modo simplificado, a curvatura, é utilizada para estudar curvas que não são círculos nem linhas retas, medindo a *falha* de uma curva em ser uma linha reta.

No início do século XIX, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss, começou a explorar a ideia de classificar superfícies de acordo com sua curvatura em diferentes pontos. Tal curvatura poderia ser positiva, negativa ou zero. De acordo com Taimina [22], na década de 1820, Gauss trabalhava como agrimensor (profissional que mede, mapeia e monitora espaços físicos), e essa experiência aguçou sua curiosidade em estudar a geometria das superfícies. Seu principal interesse era como determinar a curvatura de uma superfície arbitrária sem precisar saber a forma dessa superfície.

Figura 7: Curvaturas



Fonte: <<https://ik-ptz.ru/en/exam-tests—2014-for-physics/gde-peresekayutsya-parallelnye-pryamye-osnovnye-ponyatiya.html>>

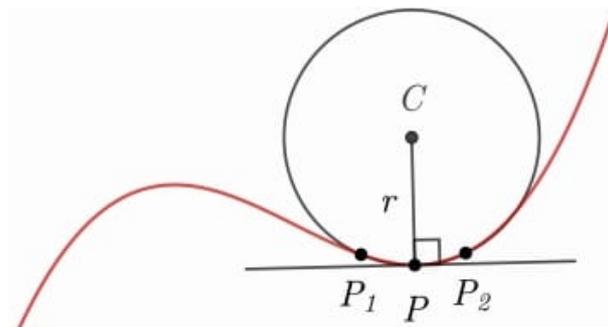
De forma simplificada, uma curvatura gaussiana indica de que forma uma superfície se curva na vizinhança de um ponto. Mas, para analisarmos a curvatura da superfície precisamos primeiro entender a curvatura da curva unidimensional.

Intuitivamente, diremos que a linha reta não é curva, enquanto a circunferência o é. Ainda, é possível intuir que quanto maior o raio da circunferência menos curva ela será, pois podemos olhar apenas para uma região e parecerá reta, ou ainda, que o

círculo pequeno possui uma curva mais acentuada. Portanto, a curvatura da circunferência está inversamente relacionada ao raio. Considerando uma circunferência de raio  $R$ , sua curvatura  $C$ , será  $C = \frac{1}{R}$ .

Agora, em uma curva suave vamos escolher um ponto  $P$  fixado e dois pontos quaisquer  $P_1$  e  $P_2$  na curva de forma que  $P$  está contido no segmento  $P_1P_2$ . Considere a única circunferência que contém  $P$ ,  $P_1$  e  $P_2$ . À medida que os pontos  $P_1$  e  $P_2$  se aproximam de  $P$  vamos obter a circunferência que mais se aproxima da curva e possui mesma tangente. Tal circunferência é denominada *circunferência osculante* (Prološčić, V.)[30].

Figura 8: Circunferência osculante



Fonte: <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

Observe que a circunferência pode mudar de lado se a curva não for constante. A escolha de qual lado da curva representa a curvatura positiva e qual representa a curvatura negativa é uma convenção arbitrária. Definiremos a curvatura positiva quando o círculo osculante está abaixo da curva e negativa quando está acima.

Para ilustrar a curvatura em um cenário cotidiano, vamos analisar uma paisagem. Podemos verificar a curvatura local pelo círculo que melhor se ajustaria à curva naquele ponto. Em uma colina, a curvatura é positiva, pois o círculo se encontra abaixo da superfície (no solo). Já em um vale, a curvatura é negativa, pois o círculo fica acima do solo.

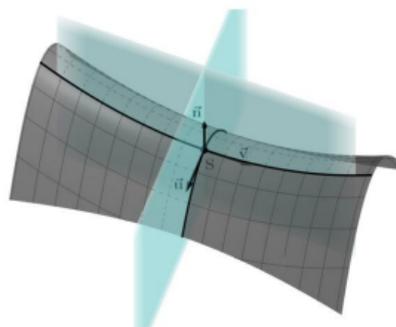
Figura 9: Paisagem



Fonte: Autor

Dispomos, até o momento, dos elementos para determinar a curvatura de uma superfície. De acordo com (Prološćić, V.)[30], basta selecionar um ponto qualquer  $S$  sobre a superfície. Considere um vetor  $v$  que seja tangente a superfície em  $S$  e um vetor  $n$  que seja normal em  $S$ . O plano que contém  $n$  e  $v$  intersecta a superfície forma uma curva, conhecida como **curva normal da superfície no ponto  $S$  na direção de  $v$** . Quando alteramos a direção de  $v$ , obtemos diferentes curvas normais. Focamos em duas dessas curvas normais: uma com curvatura máxima  $k_1$  e outra com curvatura mínima  $k_2$ . Essas curvaturas, chamadas de **curvaturas principais**, ocorrem em direções ortogonais entre si. A **curvatura gaussiana no ponto  $S$** , indicada por  $K$ , é então definida como o produto das curvaturas principais:  $K = k_1 \cdot k_2$ . Isso significa, de maneira simplificada, que a curvatura da superfície em um ponto, pode ser determinada pelas curvaturas das curvas unidimensionais nesse ponto.

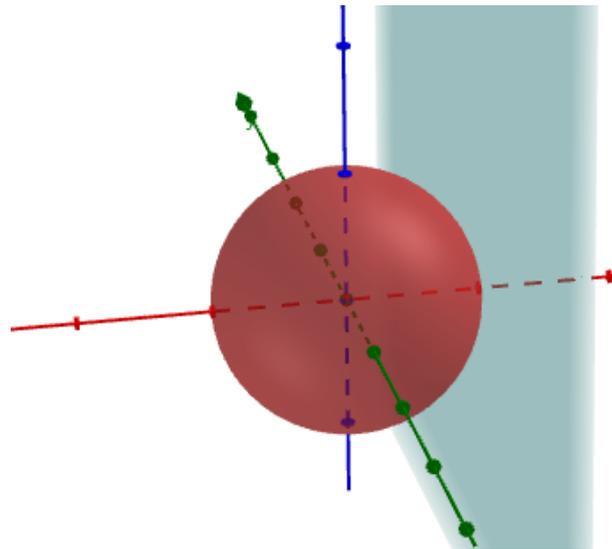
Figura 10: Curvas principais da superfície: Sela



Fonte: <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjunic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

Outra forma de identificar a curvatura da superfície é observando somente o plano tangente à superfície no ponto. Se a superfície estiver totalmente em um lado do plano tangente ela será positiva no ponto, e se o plano intersecta a superfície na região vizinha, será negativa no ponto, como podemos observar na sela acima. Note que no caso da esfera, ela fica inteiramente em um dos semiplanos determinados pelo plano tangente, pois possui curvatura positiva em todos os seus pontos.

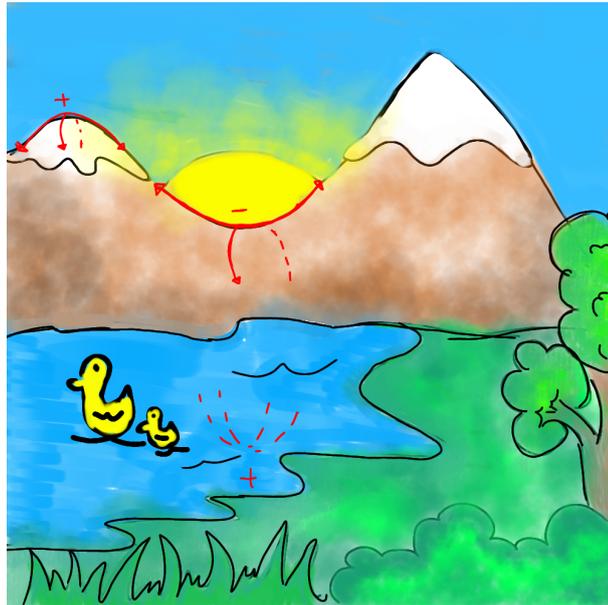
Figura 11: Plano tangente a esfera



Fonte: Autor

Vamos ilustrar essa ideia em uma paisagem tridimensional. Imaginemos uma paisagem há montanhas, vale e o fundo do lago em forma de tigela. Podemos desenhar duas curvas que se cruzam para definir um ponto no topo de uma colina e um ponto na baía. Em ambos os casos temos curvatura positiva, já que positivo vezes positivo dá positivo. Mas no vale, há uma curva positiva e uma curva negativa, logo, a curvatura da superfície será negativa.

Figura 12: Curvas em uma paisagem



Fonte: Autor

Outra característica que pode ser visualmente percebida é que a superfície com curvatura positiva constante se fechará em si mesma, enquanto a superfície com curvatura negativa constante se estenderá indefinidamente (Taimina, (2018))[22].

## 5 Representações do Plano Hiperbólico

As propriedades e resultados de Geometria Hiperbólica são difíceis de imaginar e visualizar, principalmente quando se está acostumado à Geometria de Euclides. Os conceitos e representações da Geometria Euclidiana, como ângulo de  $90^\circ$  graus, linhas retas, superfícies de curvatura zero, aparecem em objetos que utilizamos diariamente (mesa, televisão, casas e construções em geral). Em contrapartida, a geometria hiperbólica lida com um tipo de espaço curvo que não se comporta da maneira que esperamos. Esse comportamento vai contra nossa intuição visual, pois não nos foi apresentada no mundo físico que experimentamos diretamente o que a torna difícil de imaginar e abstrair. A geometria hiperbólica também é mais difícil de representar em duas dimensões, o que exige construções mais elaboradas.

A dificuldade de imaginar as propriedades da geometria hiperbólica levou à criação de modelos visuais que traduzem essas propriedades para algo mais próximo do que conseguimos visualizar. Esses modelos ajudam a abstrair e entender essa geometria, mesmo que ela não se comporte como o espaço plano da geometria euclidiana.

Neste capítulo, buscaremos superar esse obstáculo, apresentando os modelos matemáticos (modelos do sistema axiomático hiperbólico) e físicos do plano hiperbólico. Ainda, esses modelos, construídos por matemáticos, servirá de suporte teórico para identificar as características do plano hiperbólico na natureza. Afinal, ao buscarmos representações no nosso mundo de superfícies com características que lembram a geometria hiperbólica, possibilitamos a visualização os conceitos básicos que tornam a abstração menos difícil, proporcionando um ponto de referência mais próximo da nossa realidade e, conseqüentemente, tornam a aprendizagem significativa.

A rigor, a Geometria Hiperbólica é um sistema axiomático consistente e, assim, um modelo para esses sistema será um conjunto de relações e objetos definidos para atender a termos primitivos do sistema e satisfazer os axiomas. Sendo assim, ao construirmos toda a teoria (proposições e teoremas) a partir desses axiomas, esses resultados também serão verdadeiros no modelo.

Considerando as limitações da geometria euclidiana em relação à geometria hiperbólica, é natural que, ao adaptar conceitos hiperbólicos para o contexto euclidiano,

algumas propriedades precisem ser ajustadas. Dessa forma, há diferentes modelos que preservam distintas características da estrutura hiperbólica.

Alguns desses modelos possuem propriedades próprias, que não são necessariamente parte da teoria da geometria hiperbólica. De acordo com Prološćić, V. [30], Se uma característica existe na teoria, ela deve ser mantida no modelo, mas o contrário nem sempre ocorre. Por isso, não é correto afirmar que um modelo específico é, de fato, um plano hiperbólico ele representa apenas uma interpretação do plano.

## 5.1 Modelo de Beltrami

Ao longo do tempo, vários matemáticos se concentraram em estudar o conceito de curvatura constante negativa. Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) apresentou uma palestra sobre os fundamentos da geometria, onde surgiu uma pergunta importante: “Existe alguma superfície no espaço tridimensional com curvatura negativa constante?” (Taimina, D.)[22]. A resposta levou à noção do que hoje conhecemos como o *Plano Hiperbólico*.

Em 1868, o matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) apresentou o primeiro modelo, com o objetivo de divulgar a nova geometria e dar significado a nova descoberta. O modelo de Beltrami é uma superfície que foi intitulada “Pseudoesfera”. Tal superfície já era conhecida pelos matemáticos da época, mas Beltrami foi o responsável por relacionar a Pseudoesfera com a geometria hiperbólica [30].

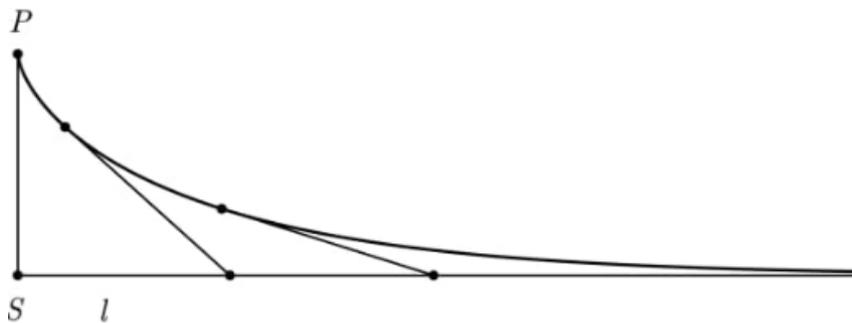
Figura 13: Modelos Originais de Beltrami



Fonte: Departamento de Matemática. Universidade de Pavia, Itália

A Pseudoesfera pode ser obtida a partir da rotação de uma curva denominada “tractriz” em torno da sua assíntota. Essa curva pode ser imaginada da seguinte forma: Um homem andando com seu cão na coleira, porém o cachorro está resistindo a acompanhá-lo. O homem está no ponto  $S$ ,  $l$  é o caminho que estão fazendo e o ponto  $P$  será o cachorro. Pela resistência do cachorro, a coleira ficará esticada e será o segmento  $PS$ . A caminhada inicia com a coleira  $PS$  perpendicular ao caminho  $l$  e conforme o homem caminha o cachorro resistindo formará a curva que chamamos de tractriz, que também é conhecida como “*Caminho do Cão obstinado*” (Prološćić, V.)[30].

Figura 14: Tractriz

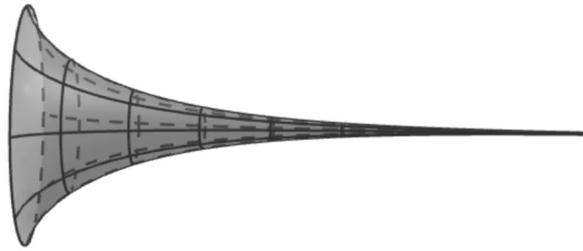


Fonte: <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjmic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

Pelos conhecimentos de curvatura no capítulo anterior sabemos que a Pseudoesfera se trata de uma superfície de curvatura gaussiana negativa constante. Mas ainda precisamos definir o que são pontos, linhas e planos dentro deste modelo. O plano é interpretado como a própria superfície; pontos são definidos como pontos na superfície, enquanto as linhas correspondem às geodésicas da superfície. O que denominamos por **geodésica**, representa o caminho mais curto entre dois pontos na superfície. Por exemplo, na esfera, as geodésicas são os grandes círculos. Já na pseudoesfera, há três tipos distintos de geodésicas: a tractrix, o círculo e a tractrix rotativa, esta última podendo ser visualizada como uma curva que se enrola ao redor da pseudoesfera várias vezes.

De acordo com (Prološćić, V.)[30], a pseudoesfera não representa um modelo completo da geometria hiperbólica. Um dos problemas está em sua borda: como a tractrix, que usamos para descrevê-la, começa em um ponto específico, a pseudoesfera possui uma borda circular em uma de suas extremidades, o que impede que as geodésicas se estendam infinitamente em ambas as direções. É possível pontuar alguns outros problemas, mas vamos resumir utilizando um resultado publicado por David Hilbert em 1901.

Figura 15: Pseudoesfera

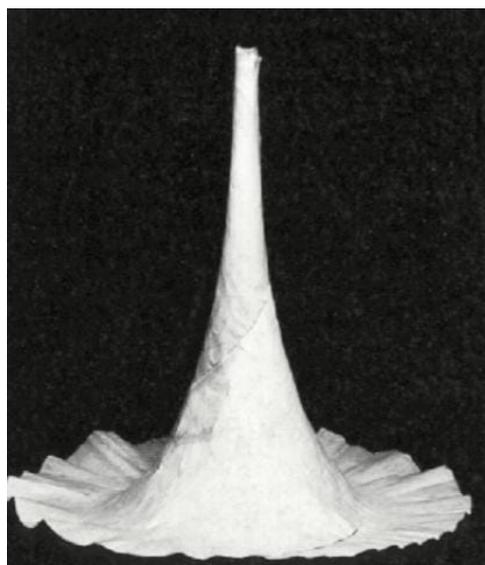


Fonte: <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjunic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

Hilbert provou que não existe uma superfície regular e completa com curvatura negativa constante que possa ser imersa no espaço euclidiano tridimensional. Isso significa que a pseudoesfera não pode ser entendida como modelo para todo o plano hiperbólico, mas apenas para uma parte dele.

Apesar de suas limitações, a pseudoesfera desempenha um papel histórico fundamental no desenvolvimento da geometria hiperbólica. Ela permitiu grandes avanços na compreensão dos conceitos e relações exclusivos desse plano e abriu caminho para a criação de outros modelos para a geometria hiperbólica.

Figura 16: Pseudoesfera - Foto Original



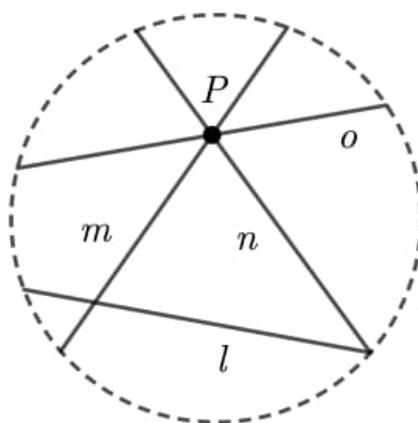
Fonte: <<http://www-dimat.unipv.it/cornalba/lezioni/beltrami.pdf>>

## 5.2 Modelo de Beltrami-Klein

Em 1868, no mesmo artigo que publicou sobre a Pseudoesfera, Beltrami apresentou um modelo em forma de disco. Em 1971, esse modelo foi aprimorado pelo matemático Felix Klein (Prološćić, V.) [30].

O modelo de Beltrami-Klein, consiste em fixarmos um disco no plano euclidiano, chamado de **Disco Absoluto**. O plano hiperbólico é formado pelo pontos euclidianos no interior do disco e sem a borda. Os pontos da borda do disco são chamados *Pontos Ideais* (pontos no infinito). Fora do disco, os pontos chamados *Ultra-ideais*.

Figura 17: Plano e retas no modelo de Beltrami-Klein



Fonte: <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjunic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

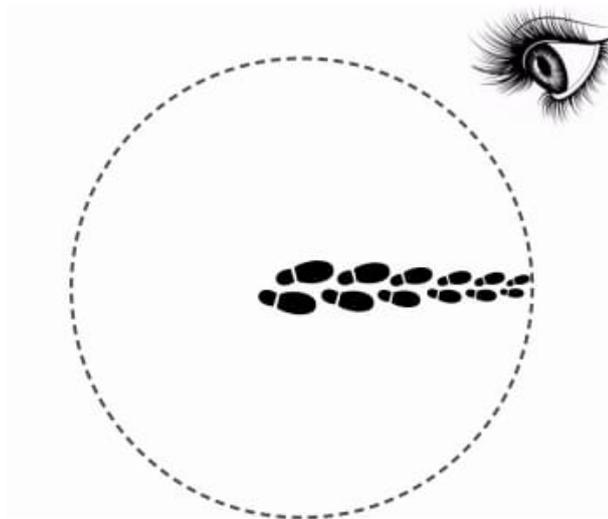
As retas são cordas sem as extremidades e cada uma delas se relaciona com dois pontos ideais. Isso ocorre porque interpretamos a linha hiperbólica neste modelo como parte de uma linha euclidiana que se encontra dentro do círculo absoluto, então fica claro que, para quaisquer dois pontos no círculo, existe uma única linha hiperbólica que os conecta.

Ainda, é necessário pensar como essas retas podem ser infinitas se estão dentro do disco. Fica difícil de imaginar que essas cordas possam ser maiores que o diâmetro do disco. A questão é que a distância dentro desse modelo é medida de forma diferente do euclidiano.

A ideia de distância pode ser ilustrada da seguinte forma: Um homem bidimensional que mora no disco decide fazer uma caminhada. Um observador de fora do disco perceberá que o homem está diminuindo a medida que se aproxima da borda do disco,

no entanto, quando o homem dentro do disco mede sua altura, nada mudou de quando iniciou a caminhada. Essa ideia é parecida com o conceito de limite, e da mesma forma, não importa o quanto ele caminhe, jamais alcançará a borda.

Figura 18: Distância no disco de Beltrami-Klein



Fonte: <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

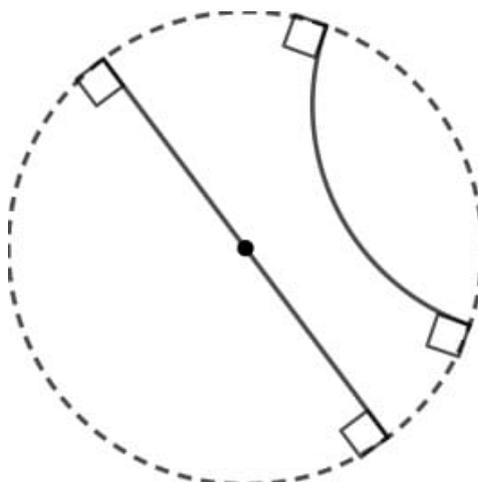
O disco de Beltrami-Klein mantém a “retidão” das linhas euclidianas, mas isso vem com algumas implicações. Se medirmos os ângulos de um triângulo nesse disco da maneira euclidiana dará dois  $180^\circ$ , o que não é ideal para a geometria hiperbólica.

### 5.3 Modelo de Poincaré

Em 1882, o matemático francês Henri Poincaré (1854–1912) investigou dois modelos de geometria hiperbólica que hoje levam seu nome: o **disco de Poincaré** e o **modelo do Semi-Plano de Poincaré**. Inicialmente, vamos focar no modelo do disco, que surge de maneira natural após o disco de Beltrami-Klein, com o qual compartilha várias semelhanças. No entanto, embora sejam parecidos, o disco de Poincaré apresenta uma vantagem significativa em relação ao disco de Beltrami-Klein: ele preserva os ângulos euclidianos. Em outras palavras, o ângulo hiperbólico entre duas linhas que se cruzam no disco de Poincaré é idêntico ao ângulo euclidiano entre essas mesmas linhas. Isso torna o modelo de Poincaré mais útil e nos permite vê-lo como uma versão aprimorada do disco de Beltrami-Klein (Prološćić, V. [30]).

Em ambos os modelos, o plano hiperbólico e seus pontos são representados de maneira semelhante. O plano hiperbólico reside dentro de um disco fixo no plano euclidiano. Os **pontos hiperbólicos** são os pontos euclidianos situados dentro desse disco, enquanto os pontos na borda do disco são chamados de **Pontos Ideais** e aqueles fora do círculo são considerados **Pontos Ultra-Ideais**. A principal diferença entre os dois modelos está na definição das retas, o que determina a distinção fundamental entre o disco de Poincaré e o de Beltrami-Klein.

Figura 19: Disco de Poincaré



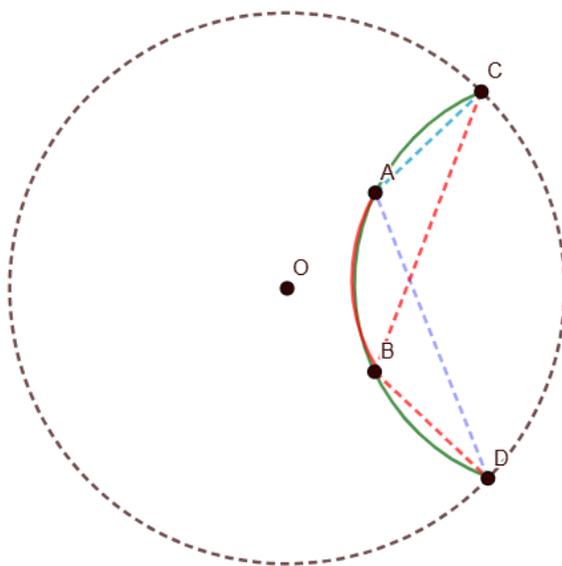
Fonte: <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjunic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

No disco de Poincaré, existem dois tipos de retas: a reta pode ser um diâmetro

euclidiano do disco absoluto ou um arco de uma circunferência que seja ortogonal a borda do disco. Os pontos finais no limite do círculo não fazem parte da reta. Vale destacar que um diâmetro do disco também se encontra com a borda em ângulos retos e pode ser interpretado como um arco de um círculo de raio infinito.

De acordo com Agustini [1], usando os axiomas de ordem de Hilbert, uma reta deve ter comprimento infinito. Isso significa que não podemos usar a métrica euclidiana, já que, segundo essa métrica, arcos de círculo ou diâmetros possuem comprimentos finitos. Portanto, precisamos usar outro tipo de métrica para que as retas e semirretas hiperbólicas possam ter comprimento infinito.

Figura 20: Distância no Disco de Poincaré



Fonte: Autor

Consideremos um segmento hiperbólico  $AB$  e sejam  $C$  e  $D$  os pontos do disco que representam as “extremidades” da reta hiperbólica que contém o segmento  $AB$ . Definimos a **distância hiperbólica**  $d_{D'}(A, B)$ , que é a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  no disco, ou o comprimento hiperbólico do segmento  $AB$  no disco  $D'$ , como sendo a aplicação  $d_{D'} : D' \times D' \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

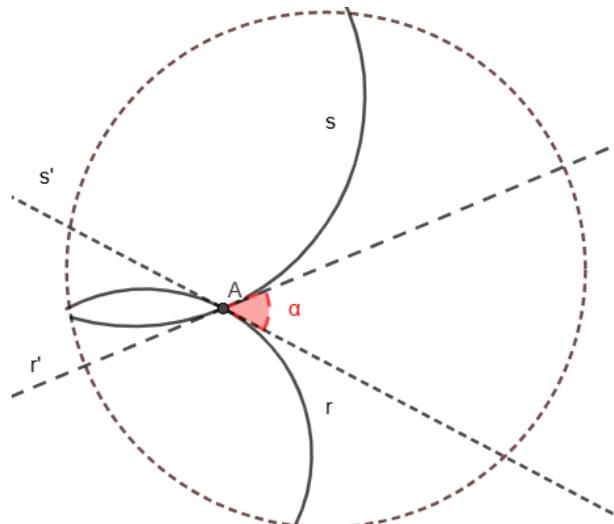
$$d_{D'}(A, B) = \ln \left( \frac{AD \cdot BC}{AC \cdot BD} \right),$$

onde  $AD$ ,  $BC$ ,  $AC$  e  $BD$  são os comprimentos euclidianos. O logaritmando acima é

conhecido como **razão cruzada** e é sempre maior ou igual a 1 (a igualdade ocorre quando  $A = B$ ), o que garante que  $d_{D'}(A, B) > 0$ .

Ao contrário do comprimento hiperbólico no disco, que é diferente do comprimento euclidiano, a medida do ângulo hiperbólico coincide com a medida do ângulo euclidiano, no entanto, é necessário utilizarmos retas tangentes. Isso significa que, se duas retas hiperbólicas  $r$  e  $s$  se encontram em  $A$ , os quatro ângulos formados por essas retas terão medidas iguais às dos ângulos formados pelas retas euclidianas  $r'$  e  $s'$ , que são tangentes a  $r$  e  $s$  em  $A$ .

Figura 21: Medida de Ângulo no Disco de Poincaré

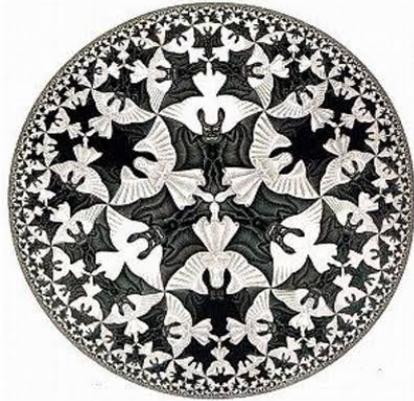


Fonte: Autor

A geometria hiperbólica, em particular o disco de Poincaré, despertou interesse não só entre matemáticos, mas também de um artista renomado. Em 1958, um dos mais importantes foi o artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher (1898–1972), inspirado pelo modelo do disco de Poincaré, criou *Circle Limit I*, a primeira de uma série de quatro obras chamada *Circle Limit*. Nela, ele desenvolve padrões que se repetem infinitamente dentro de um disco. A semelhança entre *Circle Limit I* e o disco de Poincaré é evidente. Ao seguir as linhas dos espinhos dos peixes, é possível desenhar uma linha reta euclidiana que passa pelo centro do disco ou um arco de um círculo ortogonal ao limite. Embora os peixes diminuam à medida que se aproximam da borda, todos têm o mesmo tamanho, tanto os brancos quanto os pretos (Prološćić, V. (2021)[30]).

Em 1959, Escher revisitou a obra, tornando-a mais refinada. A nova versão, cha-

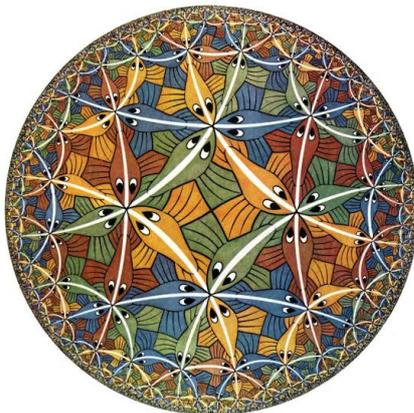
Figura 22: Circle Limit I - Escher



Fonte: <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjunic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

mada *Circle Limit III*, mostra uma linha branca conectando as espinhas dorsais dos peixes da mesma cor, criando um efeito de movimento sequencial entre os peixes, que nadam de cabeça para cauda em uma direção única. Embora esta versão seja mais esteticamente atraente do que Circle Limit I, uma observação cuidadosa revela que as linhas brancas não formam ângulos retos com a borda do disco, o que indica que não são linhas hiperbólicas. No entanto, isso não diminui o valor artístico de Escher (Prološćić, V. (2021)[30]).

Figura 23: Circle Limit III - Escher



Fonte: <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjunic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

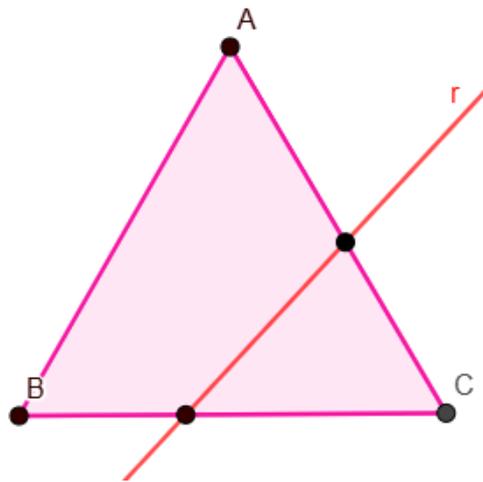
Entre os modelos de geometria hiperbólica, o disco de Poincaré se destaca por sua capacidade de ilustrar de forma clara diversos objetos geométricos. Sendo assim, utilizaremos esse modelo para demonstrar resultados de geometria hiperbólica.

### 5.3.1 Resultados de Geometria Hiperbólica no Disco de Poincaré

Os resultados aqui apresentados foram demonstrados com base no livro *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana* - Edson Agustini, (2022)[1]. Primeiros demonstraremos alguns resultados de Geometria Euclidiana:

**Axioma 2 Axioma de Pasch:** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos não colineares e  $r$  uma reta no plano determinado por  $A$ ,  $B$  e  $C$  que não passa por nenhum desses pontos, mas que intersecta o segmento  $AC$ , então  $r$  intersecta o segmento  $AB$  ou o segmento  $BC$ .*

Figura 24: Axioma de Pasch



Fonte: Autor

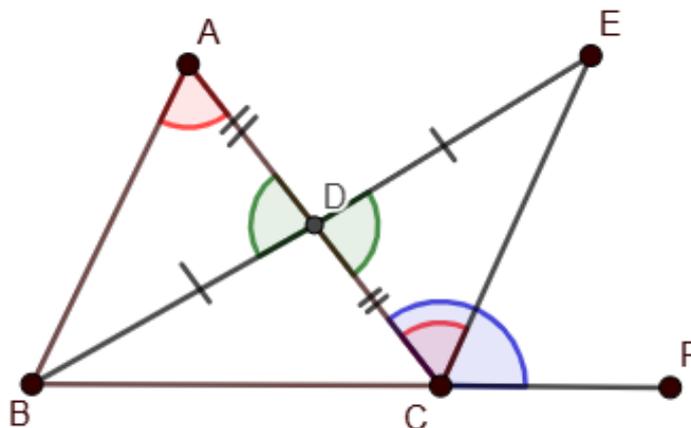
**Teorema 3** (*Proposição I.16 - Livro 1 de “Os Elementos”*): *Teorema do Ângulo Externo. Em qualquer triângulo, se um dos seus lados for estendido, o ângulo externo gerado será sempre maior do que qualquer um dos ângulos internos que não compartilham o mesmo vértice.*

*Demonstração:*

Considere o triângulo  $ABC$  e prolonguemos o lado  $BC$  até um ponto  $F$ , de modo que  $C$  esteja entre  $B$  e  $F$ . Considere o ponto  $D$  como sendo o ponto médio do lado  $AC$  e  $E$  um ponto no prolongamento do segmento  $BD$  tal que  $BD \equiv DE$ .

Os triângulos  $ABD$  e  $CDE$  são congruentes pelo caso *LAL* (*Lado-Ângulo-Lado*). De fato, observe que  $AD \equiv DC$  pelo ponto médio,  $BD \equiv DE$  por construção e  $\hat{A}DB \equiv \hat{C}DE$  por serem ângulos opostos pelo mesmo vértice.

Figura 25: Desenho suporte para a demonstração do Teorema do Ângulo Externo



Fonte: Autor

Da congruência dos triângulos, segue que  $B\hat{A}C \equiv A\hat{C}E$ .

No entanto,

$$m(A\hat{C}F) = m(A\hat{C}E) + m(E\hat{C}F) \Rightarrow m(A\hat{C}E) < m(A\hat{C}F)$$

Portanto,  $m(B\hat{A}C) < m(A\hat{C}F)$ , como queríamos demonstrar. Análogo para  $A\hat{B}C$ .

□

**Proposição 4** *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $r$  uma reta que passa por  $A$  e por um ponto interior ao triângulo  $ABC$ . Então, a reta  $r$  intersecta o lado  $BC$  do triângulo.*

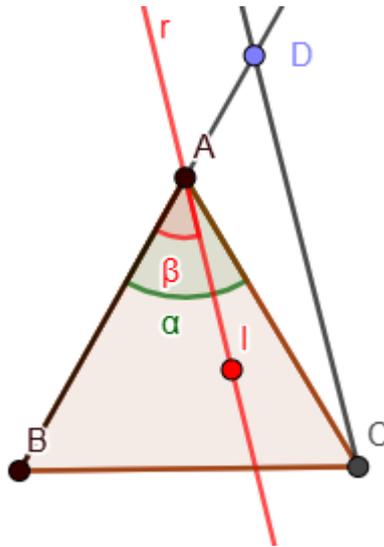
*Demonstração:*

Note que  $r$  não pode intersectar  $AB$  ou  $AC$  em outro ponto distinto de  $A$ , pois haveriam dois pontos distintos pertencentes a reta e aos segmentos e, dessa forma,  $r$  deveria conter  $AB$  ou  $AC$  e, portanto,  $r$  não passaria pelo ponto, que chamaremos de  $I$ , no interior do triângulo  $ABC$ .

Sejam  $s$  a reta que contém o lado  $AB$  e  $D \in s$  de modo que  $A$  esteja entre  $B$  e  $D$ . Chamando de  $\beta$  a medida do ângulo  $I\hat{A}B$  e de  $\alpha$  a medida do ângulo interno  $\hat{A}$  do triângulo  $ABC$ . Como  $r$  passa por  $I$ , segue que  $\beta < \alpha$ , o que significa que a reta  $r$  não possui pontos interiores ao triângulo  $DAC$  e, portanto,  $r$  não intersecta  $DC$ .

A reta  $r$  intersecta o triângulo  $DBC$  no ponto  $A \in BD$ . Pelo *Axioma de Pasch*,  $r$

Figura 26: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 3



Fonte: Autor

deve intersectar  $BC$  ou  $DC$ . Mas já provamos que  $r$  não intersecta  $DC$ , logo  $r$  intersecta  $BC$ , como queríamos demonstrar.

□

Os resultados de Geometria Hiperbólica são construídos a partir do seguinte sistema axiomático:

### 1. Axiomas de Incidência

- Dois pontos distintos determinam uma reta.
- A reta que passa por dois pontos distintos é única.
- Três pontos não colineares determinam um plano.
- O plano que passa por três pontos não colineares é único.
- Uma reta que possui dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.
- A interseção de dois planos distintos que têm um ponto em comum possui necessariamente outro ponto em comum.
- Em uma reta existem pelo menos dois pontos. Em um plano existem pelo menos três pontos não colineares. No espaço existem pelo menos quatro pontos não coplanares.

## 2. Axiomas de Ordem

- Se o ponto  $B$  está entre os pontos distintos  $A$  e  $C$ , então  $B$  também está entre  $C$  e  $A$ , e são três pontos distintos colineares.
- Se  $A$  e  $C$  são dois pontos distintos de uma reta, então existe pelo menos um ponto  $B$  entre  $A$  e  $C$  e existe pelo menos um ponto  $D$  tal que  $C$  está entre  $A$  e  $D$ .
- De quaisquer três pontos distintos de uma reta, sempre haverá um, e somente um, que está entre os outros dois.
- (*Axioma de Pasch*) Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos não colineares e  $r$  uma reta no plano determinado por  $A$ ,  $B$  e  $C$  que não passa por nenhum desses pontos mas que intersecta o segmento  $AC$ , então  $r$  intersecta o segmento  $BC$ . ou o segmento  $AB$ .

## 3. Axiomas de Congruência

- Se  $A$  e  $B$  são dois pontos distintos e  $A'$  é a origem da semirreta  $s$ , então existe um único ponto  $B'$  distinto de  $A'$  em  $s$  tal que o segmento  $AB$  é congruente ao segmento  $A'B'$ . Além disso, todo segmento é congruente a si mesmo.
- Se o segmento  $AB$  é congruente ao segmento  $CD$  e ao segmento  $EF$ , então o segmento  $CD$  é congruente ao segmento  $EF$  (**transitividade**).
- Sejam  $AB$  e  $BC$  segmentos em uma reta  $r$  com apenas  $B$  em comum. Além disso, seja  $A'B'$  e  $B'C'$  segmentos em uma reta  $r'$  com apenas  $B'$  em comum. Se o segmento  $AB$  for congruente ao segmento  $A'B'$  e o segmento  $BC$  for congruente ao segmento  $B'C'$ , então o segmento  $AC$  é congruente ao segmento  $A'C'$ .
- Sejam um semiplano  $\sigma$  e um ângulo  $\hat{A}$ . Tomemos uma semirreta  $s$  com origem em  $B$  contida na reta que determina o semiplano  $\sigma$ . Então, existe apenas um ângulo  $\hat{B}$  com lado em  $s$  contido no semiplano  $\sigma$  e congruente ao ângulo  $\hat{A}$ . Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.
- Se o ângulo  $\hat{A}$  é congruente ao ângulo  $\hat{B}$  e ao ângulo  $\hat{C}$ , então o ângulo  $\hat{B}$  é congruente ao ângulo  $\hat{C}$  (*transitividade*).

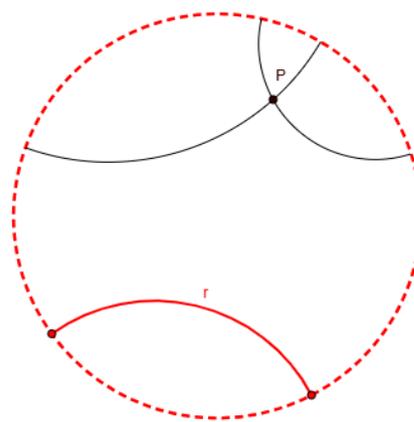
- Dados dois triângulos  $ABC$  e  $EFG$ , se  $AB$  é congruente a  $EF$ ,  $AC$  é congruente a  $EG$  e o ângulo  $\hat{A}$  é congruente a  $\hat{E}$ , então os triângulos  $ABC$  e  $EFG$  são congruentes (caso  $LAL$ ).

#### 4. Axiomas de Continuidade

- **Axioma de Arquimedes:** Sejam  $AB$  e  $CD$  dois segmentos. Então, existe um número finito e distinto de pontos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  na reta que passa por  $A$  e  $B$ , tal que os segmentos  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$  são congruentes a  $CD$  e o ponto  $B$  está entre  $A$  e  $A_n$ .
- **Axioma de Dedekind:** Suponha que o conjunto de todos os pontos de uma reta  $r$  está na união dos conjuntos não vazios  $C_1$  e  $C_2$ . Suponha ainda que nenhum ponto de  $C_1$  está entre dois pontos de  $C_2$  e vice-versa. Então, existe um único ponto  $O$  de  $C_1$  ou  $C_2$  entre quaisquer  $P_1 \in C_1$  e  $P_2 \in C_2$  com  $O$  diferente de  $P_1$  ou  $P_2$ .

**Postulado de Lobachewsky:** “Por um ponto não pertencente a uma reta dada, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não intersectam a reta dada”.

Figura 27: Postulado de Lobachewsky



Fonte: Autor

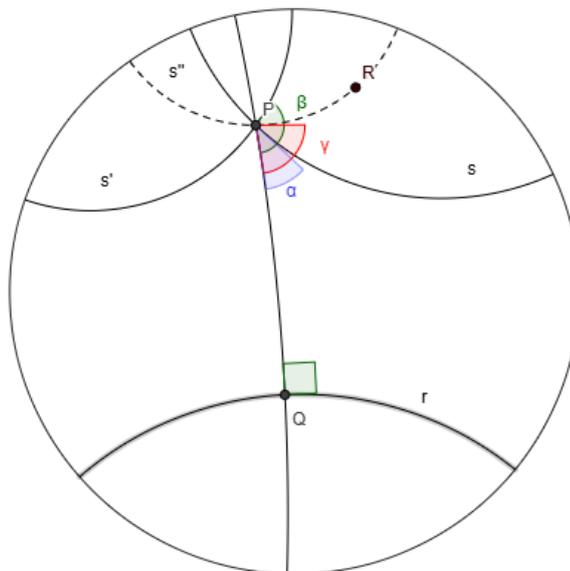
**Proposição 5** *Sejam  $r$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $r$ . Então, existem infinitas retas que passam por  $P$  e não intersectam  $r$ .*

*Demonstração:*

De acordo com o Postulado de Lobachewsky, existem duas retas  $s$  e  $s'$  passando por  $P$ , de forma que  $s \cap r = \emptyset$  e  $s' \cap r = \emptyset$ . Considere:

1.  $Q \in r$  o pé da perpendicular  $PQ$ .
2.  $\alpha$  e  $\beta$  os ângulos de vértice  $P$ , formados com  $PQ$  e  $s$  e,  $PQ$  e  $s'$  em um mesmo semiplano.
3. Sem perda de generalidade que  $\alpha < \beta$  (já que  $s$  e  $s'$  são distintas.)
4.  $R$  um ponto no interior do ângulo  $\beta$  e seja  $Q\hat{P}R = \gamma$  de modo que  $\alpha < \gamma < \beta$ .
5. Seja  $s''$  uma reta passando por  $P$  e  $R$ , ou seja,  $s''$  é distintas de  $s$  e  $s'$ .

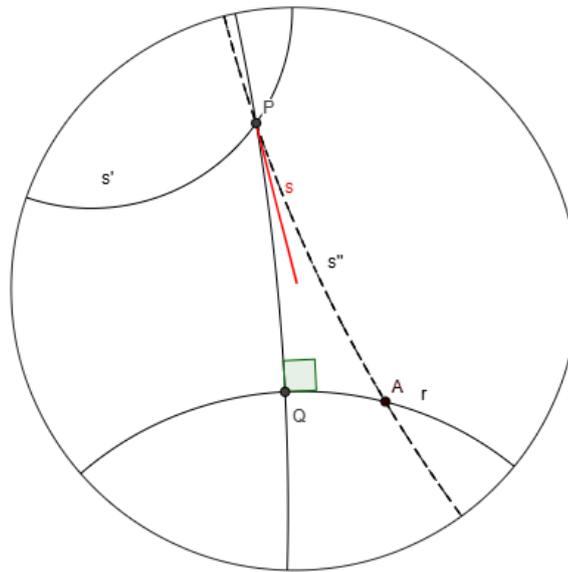
Figura 28: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 5



Fonte: Autor

Vamos provar que  $s''$  não intersecta  $r$ . De fato, suponha por absurdo que  $s'' \cap r = A$ , formando o triângulo  $PQA$ . Então a reta  $s$  que passa pelo ponto  $P$  entra no triângulo e pela Proposição 4 a reta  $s$  intersectaria  $r$  o que é uma contradição. Análogo para a reta  $s'$ .

Figura 29: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 5



Fonte: Autor

Logo,  $s''$  é paralela a  $r$ . Consequentemente, como existem infinitos ângulos  $\gamma$  em  $\mathbb{R}$  entre  $\alpha$  e  $\beta$  para infinitos pontos  $R$  temos infinitas retas  $s''$  paralelas a  $r$ .

□

**Proposição 6** *Sejam  $r$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $r$ . Teremos:*

- $C_1$ : conjunto das retas que passam por  $P$  e não intersectam  $r$ ;
- $C_2$ : conjunto das retas que passam por  $P$  e intersectam  $r$ .

*Então, existem exatamente duas retas distintas  $s$  e  $s'$  de  $C_1$  que determinam no plano hiperbólico dois pares  $S_1$  e  $S_2$  de setores angulares opostos pelo vértice  $P$ , de tal modo que  $C_1 = S_1$  e  $C_2 \subset S_2$ .*

*Demonstração:*

Considere  $Q$  um ponto de  $r$  e  $PQ$  perpendicular a  $r$  em  $Q$ .

Seja a reta  $m$  passando por  $P$  e perpendicular a  $PQ$  e, portanto, não intersecta  $r$ . Considere  $A$  e  $B$  pontos de  $m$ , tal que  $P$  esteja entre  $A$  e  $B$ .

Analisando o triângulo  $AQB$ , pelo *Axioma de Pasch*, toda reta e passa por  $P$  corta o segmento  $AQ$  ou o segmento  $BQ$ .

Vamos analisar as retas que cortam o segmento  $AQ$ . Cada ponto desse segmento representa uma reta que o corta. Tais pontos podem ser divididos em duas classes:

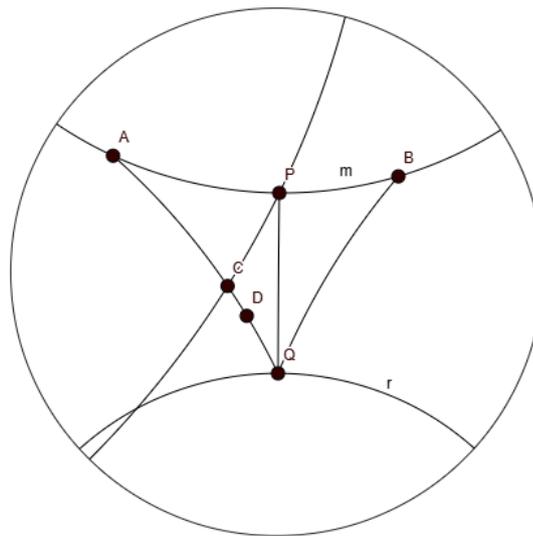
1. O conjunto  $C_1$  pontos que representam as retas que não intersectam  $r$ .
2. O conjunto  $C_2$  pontos que representam as retas que intersectam  $r$ .

Inicialmente, sabemos que os conjuntos  $C_1$  e  $C_2$  são disjuntos e que  $A \in C_1$  e  $Q \in C_2$ .

Vamos provar que se  $C \in C_2$  então  $CQ \subset C_2$ .

De fato, considere  $C' \in r$  e que faz parte da reta que passa por  $P$  e  $C$ . Considere o ponto  $D$  entre  $C$  e  $Q$ . A reta que passa por  $P$  e  $D$  entra no triângulo  $PC'Q$  pelo vértice  $P$ , assim pela Proposição 4, ela corta o lado  $C'Q \subset r$ . Portanto, todo ponto no segmento  $CQ$  representa uma reta que intersecta  $r$ . Análogo para pontos que estejam no conjunto  $C_1$ , ou seja, se  $C \in C_1$  então  $AC \subset C_1$ .

Figura 30: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 6

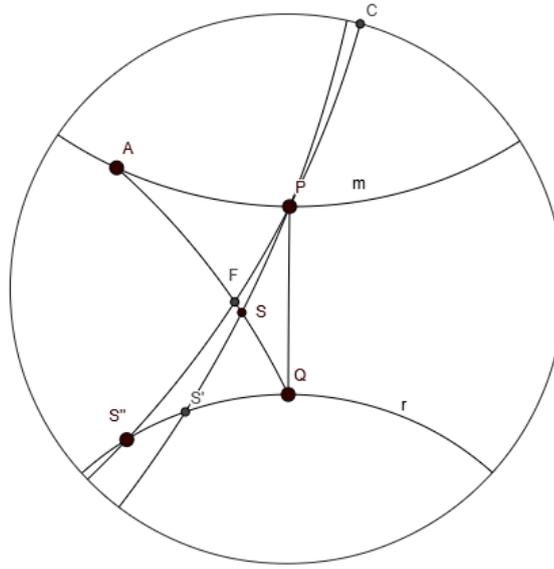


Fonte: Autor

Usando o *Axioma de Dedekind*, sabemos que existe somente um ponto  $S \in AQ$  que separa os conjuntos  $C_1$  e  $C_2$ , basta concluirmos que se  $S$  está em  $C_1$  ou  $C_2$ .

Se  $S \in C_2$  então a reta que passa por  $PS$  intersecta  $r$  em um ponto  $S'$  e tomemos um ponto  $S''$  de modo que  $S'$  esteja entre  $S''$  e  $Q$ . A reta que passa em  $P$  e  $S''$  intersectará  $AQ$  em um ponto  $F$  de modo que  $F \notin SQ$ . Assim,  $F \in C_2$  e  $S$  está entre  $F$  e  $Q$ , ambos pontos de  $C_2$ , o que é uma contradição, uma vez que  $S$  é o ponto de separação. Logo  $S \in C_1$ .

Figura 31: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 6



Fonte: Autor

Análogo pode ser feito no segmento  $BQ$ .

□

**Definição 1** A reta que passa por  $S$  é denominada **Paralela a  $r$  em  $P$**  e as demais retas que não intersectam  $r$  são denominadas **Hiperparalelas a  $r$  em  $P$** .

**Definição 2** Triângulos Generalizados são figuras geométricas formadas por semirretas que possui um ou mais vértices sendo pontos ideais. Os pontos ideais serão simbolizados pela letra  $\omega$ . Os vértices ideais formarão ângulo nulo.

**Proposição 7** Se uma reta  $r$  entra em um triângulo generalizado  $AB\Omega$  passando por um de seus vértices, então  $r$  intersecta o lado do triângulo generalizado oposto a esse vértice.

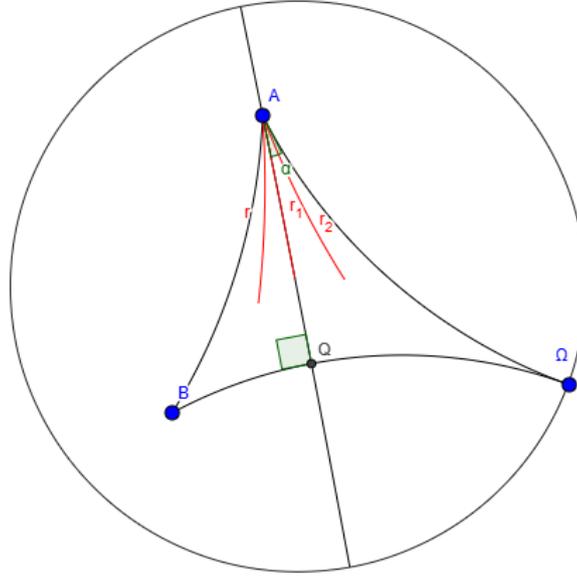
*Demonstração:*

Considere a reta  $r$  entrando em  $AB\Omega$  pelo vértice  $A$ . Seja  $AQ$  perpendicular a reta  $\overleftrightarrow{B\Omega}$  em  $Q$  e  $m(Q\hat{A}\Omega) = \alpha$ .

Vamos analisar alguns casos:

1. Se a medida de  $B\hat{A}\Omega \leq \alpha$ , então, pela Proposição 4, temos  $r \cap B\Omega \neq \emptyset$ .

Figura 32: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 7



Fonte: Autor

2. Se a medida de  $B\hat{A}\Omega > \alpha$ , teremos outros casos para analisar:

- Se  $r$  entra em  $AQ\Omega$ , então, pela Proposição 4, temos  $r \cap Q\Omega \neq \emptyset$ .
- Se  $r$  entra em  $ABQ$ , então, pela Proposição 4, temos  $r \cap BQ \neq \emptyset$ .
- Se  $r$  contém  $Q$ , então  $r \cap B\Omega = \{Q\} \neq \emptyset$ .

Agora, se  $r$  entra em  $AB\Omega$  pelo vértice  $\Omega$ , e, consideremos um ponto  $P \in r$  no interior do triângulo  $AB\Omega$ , Logo,  $\overleftrightarrow{AP}$  intersecta  $B\Omega$  em um ponto  $C$ .

Dessa forma, a reta  $r$  entra no triângulo  $ABC$  e *Pelo Axioma de Pasch*,  $r$  corta  $AB$  ou  $BC$ .

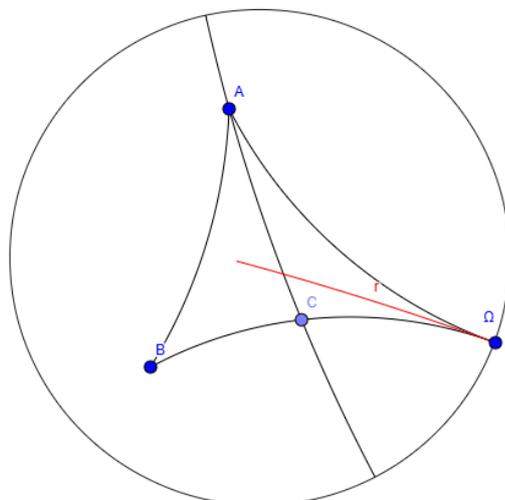
A reta  $r$  não corta  $BC$ . De fato, se  $r$  cortasse  $BC$ , então possuiriam um ponto de interseção e o ponto ideal  $\omega$  em comum. Logo, pelo axioma de incidência  $r = \overleftrightarrow{B\Omega}$ .

Concluimos então que  $r \cap AB \neq \emptyset$ .

□

**Proposição 8** *Se uma reta  $r$  entra em um triângulo generalizado  $AB\Omega$  intersectando um de seus lados, mas não passando por nenhum de seus vértices, então  $r$  intersecta um dos outros dois lados do triângulo generalizado.*

Figura 33: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 7

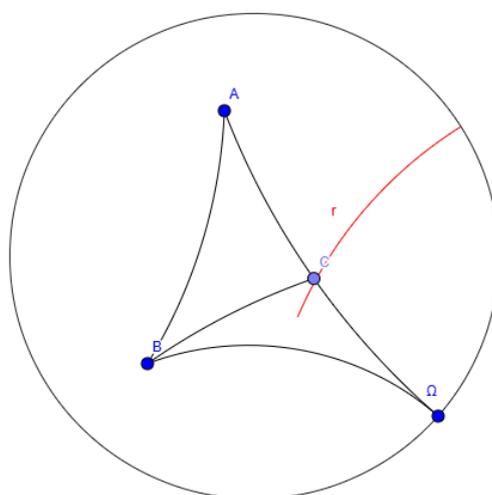


Fonte: Autor

*Demonstração:*

Se a reta  $r$  entra no triângulo generalizado  $AB\Omega$  por  $A\Omega$ , então  $r \cap A\Omega = C$ .

Figura 34: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 8



Fonte: Autor

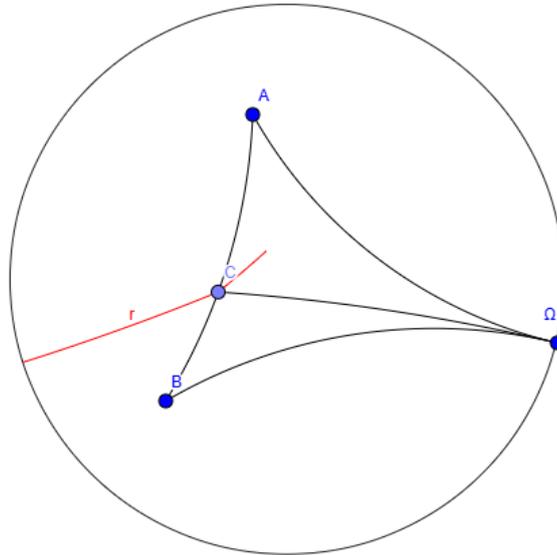
Temos dois casos a considerar:

1. Se  $r$  entra em  $BC\Omega$ , pela Proposição 7, temos que  $r \cap B\Omega \neq \emptyset$ .
2. Se  $r$  entra em  $ABC$ , pela Proposição 7, então  $r \cap AB \neq \emptyset$ .

**Observação:**  $r$  não contém  $BC$ , pois, caso contrário, teríamos que  $B \in r$ , o que é uma contradição com a hipótese inicial.

Ainda, se  $r$  entra no triângulo  $AB\Omega$  por  $AB$ , então temos outros dois casos:

Figura 35: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 8



Fonte: Autor

1. Se  $r$  entra em  $AC\Omega$ , aplicando proposição anterior, temos que  $r \cap A\Omega \neq \emptyset$ .
2. Se  $r$  entra em  $BC\Omega$ , pela proposição anterior, temos que  $r \cap B\Omega \neq \emptyset$ .

Portanto,  $r$  intersecta um dos lados do triângulo generalizado.

□

**Teorema 9 (Teorema do Ângulo Externo para Triângulos Generalizados)** *Um ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe seja adjacente.*

*Demonstração:*

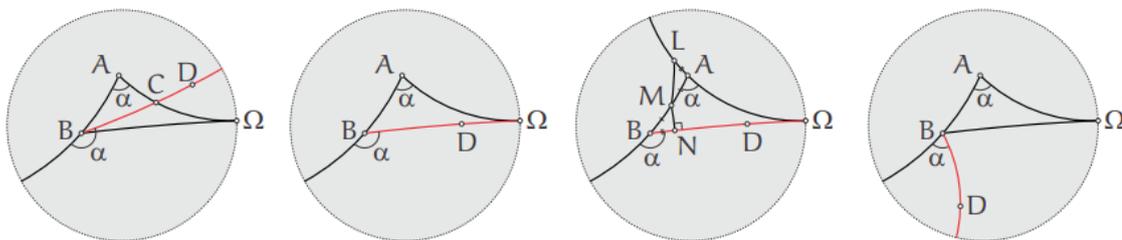
Inicialmente, é importante pontuar que o ângulo externo de um triângulo generalizado é sempre não nulo. Então, ele é maior que o ângulo nulo dos vértices ideais. Basta mostrarmos que no triângulo  $AB\Omega$ , o ângulo externo em  $B$  é maior do que o ângulo em  $\hat{A}$ .

Consideremos a semirreta  $\overrightarrow{BD}$ . Temos três possibilidades para  $\overrightarrow{BD}$ :

- (i) A reta  $\overrightarrow{BD}$  entra no triângulo  $AB\Omega$  pelo vértice  $B$ , isso implica que  $\overrightarrow{BD} \cap \overleftarrow{A\Omega} = \{C\}$  pela Proposição 7. Consideremos um triângulo  $ABC$  com um ângulo externo  $\alpha$  e um ângulo interno não adjacente também igual a  $\alpha$ . Esse cenário leva a uma contradição com o Teorema do Ângulo Externo.
- (ii) A reta  $\overrightarrow{BD}$  coincide com o lado  $\overrightarrow{B\Omega}$  do triângulo  $AB\Omega$ . Nesta situação, vamos considerar  $M$  o ponto médio de  $AB$ ,  $N$  o pé da perpendicular de  $M$  sobre a reta  $\overleftarrow{B\Omega}$ , e  $L \in \overleftarrow{A\Omega}$  tal que  $LA \equiv BN$ . Para o ponto  $L$ , existem três situações possíveis:
- (1) Caso  $N$  coincida com  $B$ , então  $L$  será igual a  $A$ , e o ângulo  $\alpha$  será reto. Isso resultaria em um ângulo de paralelismo reto, no entanto todo ângulo de paralelismo será agudo.
  - (2) Se  $N$  estiver localizado entre  $B$  e  $\Omega$ , escolhemos  $L$  de forma que  $A$  se situe entre  $L$  e  $\Omega$  (como mostrado na terceira figura abaixo).
  - (3) Caso  $N$  esteja tal que  $B$  fique entre  $N$  e  $\Omega$ , tomamos  $L$  como sendo o ponto entre  $A$  e  $\Omega$ . Os casos (2) e (3) são análogos. Pelo critério de congruência de triângulos  $LAL$ , temos  $BNM \equiv ALM$ . Portanto, os pontos  $L$ ,  $M$  e  $N$  são colineares, e  $ML$  é perpendicular à reta  $\overleftarrow{A\Omega}$ . Essa configuração novamente leva a uma contradição com o fato do ângulo de paralelismo ser agudo, pois resultaria em um ângulo de paralelismo reto.

Concluimos, portanto, que a situação (ii) não pode ocorrer.

Figura 36: Desenho suporte para a demonstração do Teorema 9



Fonte: Introdução a Geometria Hiperbólica Plana - Edson Agustini

- (iii) A reta  $\overrightarrow{BD}$  divide um ângulo externo do triângulo  $AB\Omega$  (como ilustrado na quarta figura acima).

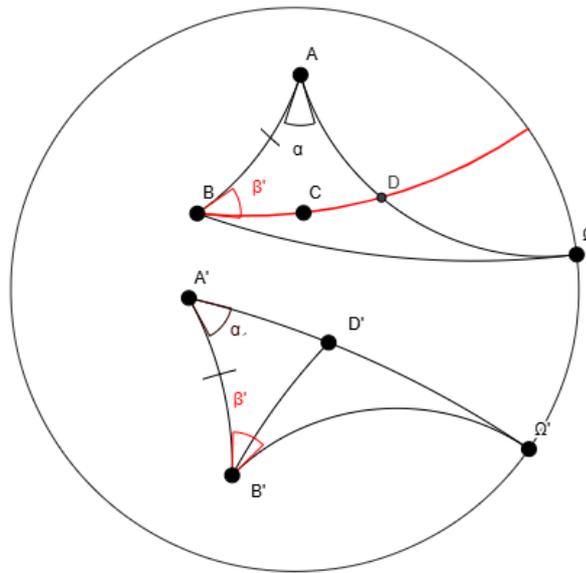
Portanto, em todos os casos provamos a validade do resultado do Teorema do ângulo externo para triângulos generalizados.  $\square$

**Proposição 10** (*Caso “lado-ângulo” (LA) de congruência para triângulos generalizados*) *Sejam  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  triângulos generalizados. Se  $AB \equiv A'B'$  e  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ , então  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ .*

*Demonstração:*

Devemos mostrar que  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$  e poderemos assumir a congruência usando o caso ALA já conhecido. Vamos supor inicialmente que  $\hat{B} > \hat{B}' = \beta'$ . Considere  $C$  no interior de  $AB\Omega$  de modo que  $\hat{A}BC \equiv \hat{A}'B'\Omega' = \beta'$ .

Figura 37: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 10



Fonte: Autor

Então, a semirreta  $\overrightarrow{BC}$  intersecta o lado  $A\Omega$  do triângulo  $AB\Omega$  em um ponto  $D$ . Assim, temos:

$$A\hat{B}D \equiv A'\hat{B}'\Omega' = \beta' \quad (1)$$

Seja  $D' \in A'\Omega'$  tal que  $AD \equiv A'D'$ . Como  $AB \equiv A'B'$  e  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  por hipótese, então  $ABD \equiv A'B'D'$ , pelo caso de congruência de triângulos  $LAL$  juntamente com (1), temos

$$A'\hat{B}'D' \equiv A'\hat{B}'\Omega' = \beta',$$

o que é uma contradição, uma vez que a semirreta  $\overrightarrow{B'D'}$  divide o ângulo  $A'\hat{B}'\Omega'$  e, consequentemente,  $A'\hat{B}'D' < A'\hat{B}'\Omega'$ .

Portanto,  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ .

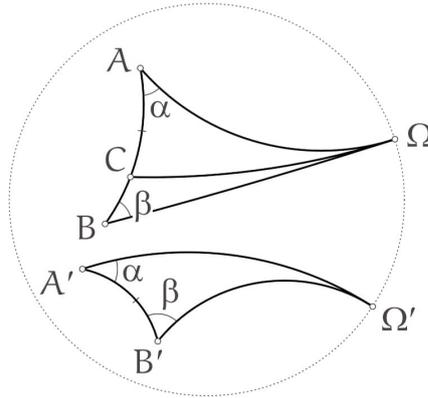
□

**Proposição 11 (Caso “ângulo-ângulo” (AA) de congruência para triângulos generalizados)** *Sejam  $AB\Omega$  e  $A'B'\Omega'$  triângulos generalizados. Se  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$  e  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ , então  $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$ .*

*Demonstração:*

Nosso objetivo será mostrar que  $AB \equiv A'B'$  para usar o caso ALA já conhecido da Geometria Euclidiana.

Figura 38: Desenho suporte para a demonstração da proposição 11



Fonte: Introdução a Geometria Hiperbólica Plana - Edson Agustini

Suponhamos, para fins de contradição, que  $AB > A'B'$ . Seja  $C \in AB$  tal que  $AC \equiv A'B'$ . De acordo com o caso de congruência LA para triângulos generalizados demonstrado anteriormente, temos que  $AC\Omega \equiv A'B'\Omega'$ . Assim, concluímos que  $\hat{C} \equiv \hat{B}' \equiv \hat{B}$ , o que implica que

$$AC\Omega \equiv CB\Omega,$$

o que gera uma contradição com o *Teorema do Ângulo Externo para Triângulos Generalizados*, já que  $A\hat{C}\Omega$  é o ângulo externo do triângulo generalizado  $BC\Omega$ .

Portanto, devemos ter  $AB \equiv A'B'$ , como desejado.

□

**Proposição 12** *A soma dos ângulos internos de um triângulo ordinário é menor do que dois retos.*

*Demonstração:*

Suponhamos que exista um triângulo ordinário cuja soma de ângulos internos seja igual a dois retos. Pela Segunda Proposição de Legendre (*Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a  $\pi$  radianos, então a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a  $\pi$  radianos.*), concluímos que todos os triângulos ordinários possuirão soma de ângulos internos igual a dois retos, que é precisamente o equivalente ao Axioma das Paralelas de Euclides já provado.

Assim, chegamos a uma contradição com o fato de que tal axioma não vale na Geometria Hiperbólica e, portanto, todo triângulo ordinário possui soma de ângulos internos menor do que dois retos.

□

**Proposição 13** *A soma dos ângulos internos de um triângulo generalizado é menor do que dois ângulos retos.*

*Demonstração:*

Podemos dividir em três casos:

**1º caso: Triângulo generalizado  $AB\Omega$ .**

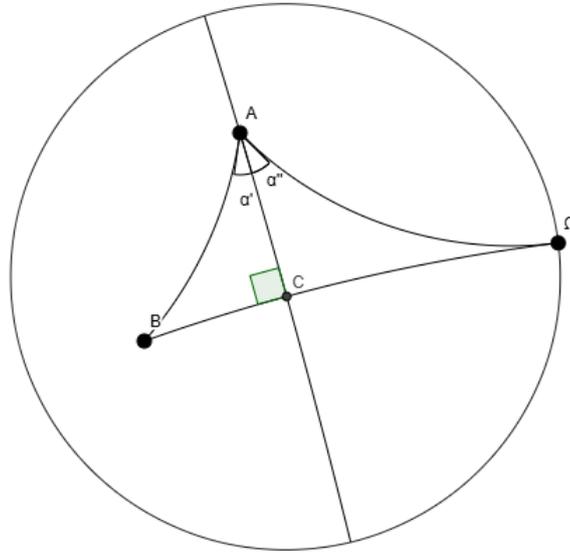
Sem perda de generalidade, vamos supor que  $\hat{A} \geq \hat{B}$  e  $m(\hat{B}) = \beta$ . Consideremos a altura relativa ao vértice  $A$  e chamemos de  $C$  o ponto onde a altura intersecta o lado  $B\Omega$ .

De um lado, temos o triângulo retângulo ordinário  $ABC$ , e, de outro, o triângulo retângulo generalizado  $AC\Omega$ . Definimos ainda  $\alpha = \alpha' + \alpha''$ . A partir disso, temos as seguintes desigualdades:

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

Pois um dos ângulos mede  $\frac{\pi}{2}$  logo a soma dos outros dois ângulos não pode exceder essa

Figura 39: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 13



Fonte: Autor

medida e,

$$\alpha'' < \frac{\pi}{2} \quad (\text{é o ângulo de paralelismo e portanto é agudo}),$$

e sabemos que  $\Omega$  é nulo por definição. Assim, podemos deduzir que  $\alpha' + \alpha'' + \beta < \pi$ .

Como  $\alpha' + \alpha'' = \alpha$ , concluímos que:

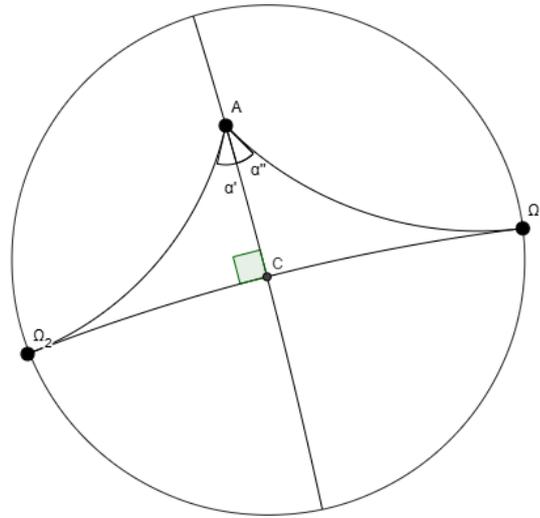
$$\alpha + \beta < \pi.$$

### 2º caso: Triângulo generalizado $A\Omega_1\Omega_2$

Por definição, os ângulos nos pontos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são nulos. Note que as semirretas  $\overrightarrow{A\Omega_1}$  e  $\overrightarrow{A\Omega_2}$  são paralelas ao lado  $\overleftrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ , à esquerda e à direita, respectivamente, e traçarmos a perpendicular do ponto  $A$  até a reta  $\overleftrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ , o que nos permite utilizar o ângulo de paralelismo. Sabemos que os ângulos de paralelismo são agudos, logo, podemos afirmar que:

$$\alpha' + \alpha'' = \alpha < \pi.$$

Figura 40: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 13



Fonte: Autor

**3º caso: Triângulo generalizado  $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ .**

É imediato que a soma dos ângulos desse triângulo seja menor que  $\pi$  radianos, pois, por definição, os três ângulos são nulos, o que resulta em uma soma igual a zero.

□

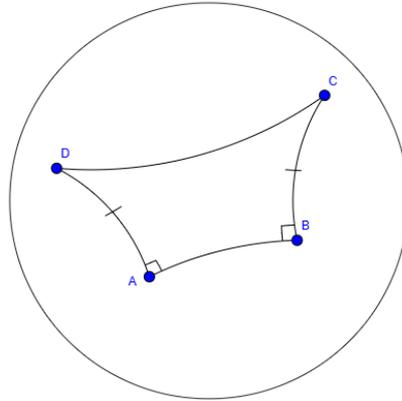
**Quadriláteros**

**Definição 3** Consideremos um quadrilátero convexo  $ABCD$ , que é denominado **Quadrilátero de Saccheri** com base  $AB$ , topo  $DC$  e laterais  $AD$  e  $BC$  quando os lados laterais são congruentes e perpendiculares à base, ou seja,

$$AD \equiv BC, \quad AD \perp AB \quad e \quad BC \perp AB.$$

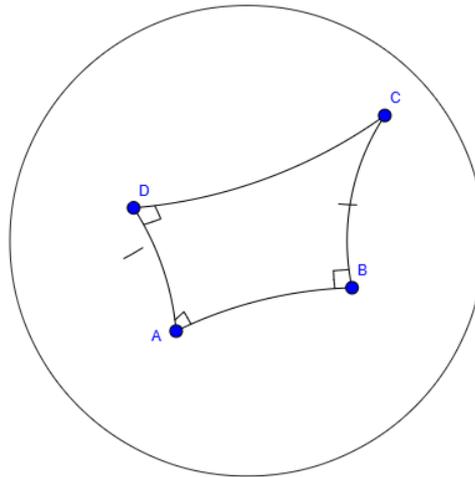
**Definição 4** Um quadrilátero é dito **Quadrilátero de Lambert** quando possuir três ângulos internos retos.

Figura 41: Quadrilátero de Saccheri



Fonte: Autor

Figura 42: Quadrilátero de Lambert



Fonte: Autor

**Proposição 14** *O segmento ligando os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri  $ABCD$  é perpendicular a esses lados. Além disso, os ângulos do topo  $\widehat{C}$  e  $\widehat{D}$  são congruentes e agudos.*

*Demonstração:*

Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios do topo e da base, respectivamente. Usando o caso de congruência de triângulos LAL, temos:

$$ADN \equiv BCN \Rightarrow DN \equiv NC.$$

Aplicando o caso de congruência LLL, obtemos:

$$DNM \equiv CNM \Rightarrow NM \perp DC.$$

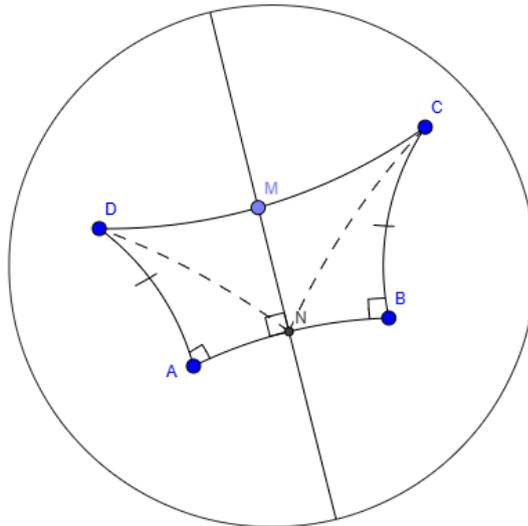
Além disso, como

$$A\hat{N}D \equiv B\hat{N}C \text{ e } D\hat{N}M \equiv C\hat{N}M \Rightarrow NM \perp AB,$$

também temos que

$$A\hat{D}N \equiv B\hat{C}N \text{ e } N\hat{D}M \equiv N\hat{C}M \Rightarrow \hat{D} \equiv \hat{C}.$$

Figura 43: Desenho suporte para a demonstração da Proposição 14



Fonte: Autor

Quanto aos ângulos do topo serem agudos, podemos usar a *Primeira Proposição de Legendre*, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a  $\pi$ . Consideremos os triângulos  $ABD$  e  $BDC$ , se a soma dos ângulos internos de algum desses triângulos fosse exatamente igual a  $\pi$  radianos, pela Segunda Proposição de Legendre, isso implicaria que todos os triângulos teriam a soma dos ângulos internos igual a  $\pi$  radianos, o que levaria ao 5º Postulado de Euclides, o que contradiz o Postulado de Lobachewsky. Portanto, a soma

dos ângulos internos dos triângulos  $ABD$  e  $BDC$  é estritamente menor que  $\pi$ . Assim, temos:

$$m(\hat{D}) + m(C) < \pi \quad \Rightarrow \quad m(\hat{D}) < \frac{\pi}{2}$$

Como desejado.

□

**Proposição 15** *O ângulo interno não conhecido de um Quadrilátero de Lambert é agudo.*

*Demonstração:*

É possível dividir um quadrilátero arbitrário em dois triângulos. De acordo com a Primeira Proposição de Legendre, a soma dos ângulos internos de cada triângulo resultante dessa decomposição é, no máximo, igual a  $\pi$  radianos.

Se por acaso um dos triângulos tivesse a soma dos ângulos internos igual exatamente a  $\pi$  radianos, a Segunda Proposição de Legendre nos levaria à conclusão de que todos os triângulos teriam a soma dos ângulos internos igual a  $\pi$  radianos. Isso implicaria a aceitação do 5º Postulado de Euclides, o qual é incompatível com o Postulado de Lobachewsky. Portanto, concluímos que a soma dos ângulos internos de cada um dos triângulos que formam o Quadrilátero de Lambert é estritamente menor que  $\pi$  radianos.

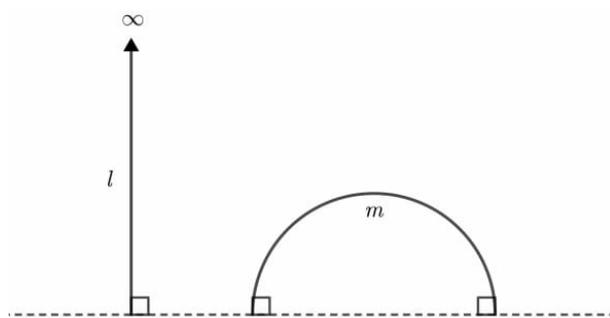
Com isso, o ângulo desconhecido do quadrilátero deve ser um ângulo agudo.

□

## 5.4 Modelo do Semi-Plano de Poincaré

O modelo do semiplano de Poincaré é uma representação do plano hiperbólico no qual usamos o semiplano superior do plano euclidiano, ou seja, a região acima de uma reta horizontal. A reta horizontal, chamada reta absoluta, serve como uma espécie de “limite” do plano hiperbólico, mas ela não faz parte dele. Os pontos hiperbólicos são os pontos da geometria euclidiana situados no semiplano superior, mas excluindo a reta absoluta. Os pontos sobre a reta absoluta serão os pontos ideais (Prološčić, V. [30]).

Figura 44: Semi-Plano de Poincaré



Fonte: <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjunic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

Uma linha hiperbólica pode ser representada de duas maneiras distintas. A primeira é como um raio euclidiano que parte de um ponto na reta absoluta e é perpendicular a ela. A segunda forma é como um semicírculo euclidiano, cujo centro está localizado na reta absoluta, com todos os pontos da linha sendo ortogonais a essa reta. Essas duas formas são as maneiras de representar as chamadas ‘retas’ no modelo do semi-plano Poincaré.

Os pontos ideais podem ser entendidos como representações do infinito, assim como no outro modelo, e marcam as extremidades das retas dentro do modelo. Além disso, há um ponto especial, chamado ponto ideal  $Z$ , que está relacionado com as retas verticais no semiplano. Embora todas essas linhas verticais sejam “paralelas”, elas compartilham o mesmo ponto ideal  $Z$ , o que as torna assintoticamente paralelas entre si.

Em suma, modelo do semiplano de Poincaré é amplamente usado em diversas áreas, como análises complexas, principalmente por ser útil em certos cálculos e transformações matemáticas. Esse modelo, embora não ofereça a melhor visualização em todos os casos, facilita muitos procedimentos e representa bem a geometria hiperbólica, onde as linhas são semicírculos ou segmentos de semicírculos, todos ortogonais à reta absoluta.

## 5.5 Modelo de Thurston

Mesmo o matemático David Hilbert provando que era impossível descrever uma superfície com curvatura negativa constante e infinita em todas as direções usando apenas uma equação, o interesse por tais superfícies continuou, e Robert Osserman (1926-2011), matemático estadunidense conhecido por suas pesquisas em Geometria Diferencial explo-

rou métodos alternativos para compreender e representar o plano hiperbólico no espaço de terceira dimensão (Taimina, D.[22]). Em 2008, escreveu para uma colega sobre as ideias que teve para construção dessa superfície:

“Em vez de tentar construir uma superfície na forma de um gráfico que eu pudesse provar que tinha que ser hiperbólica, eu poderia tentar começar com uma superfície de Riemann clássica dada como uma cobertura ramificada do plano que eu sabia ser hiperbólica e, em seguida, ver se eu poderia ‘desvendá-la’ para que pudesse ser incorporada como um gráfico em todo o plano.[...] então fiz um modelo usando uma vizinhança de um ponto de ramificação simples conectando duas folhas; podia-se cortá-lo ao longo de um raio do ponto de ramificação, dobrá-lo em forma de leque consistindo em 16 setores em forma de cunha com um ângulo de 45 graus cada. e, em seguida, cole os dois lados do corte novamente[...]” (Taimina, D. [22]).

Essa construção, ou tentativa de construção de Osserman, mostra que o desejo de construir um modelos físicos do plano hiperbólico é mais atual que imaginamos. Dessa forma, falaremos a partir desse capítulo sobre a elaboração de outros modelos físicos como o de Beltrami. O primeiro é conhecido como “Plano Hiperbólico Anular” desenvolvido por William Thurston.

Primeiro, vale ressaltar que a demonstração do Teorema de Hilbert (“*Não é possível existir uma superfícies regular e completa com curvatura negativa constante*”) levou aos matemáticos uma ideia de que não seria possível construir uma superfície completa de curvatura negativa constante (ou seja, um plano hiperbólico) em nosso espaço euclidiano tridimensional. Contudo, em 1954, o matemático holandês Nicolaas Kuiper (1920-1994) levantou a possibilidade da existência dessa superfície, embora ele próprio não tivesse elaborado um método prático para sua construção (Taimina, D. [22]).

Mas foi na década de 1970, que William Thurston, personagem principal desse nosso capítulo, introduziu uma abordagem relativamente simples, pois usa apenas papel, para representar o plano hiperbólico no espaço tridimensional usando anéis (tiras) de papel (que deu origem ao nome “anulares”), sem a necessidade de fórmulas matemáticas complexas.

William Paul Thurston, conhecido por todos como Bill, foi um matemático extraordinário, cujas contribuições transformaram profundamente diversas áreas da matemática.

Seu trabalho abrangeu campos como foliações, automorfismos de superfícies, topologia de variedades tridimensionais, geometria hiperbólica, a famosa geometrização das variedades de 3 dimensões, entre outros.

Figura 45: William Thurston



Fonte:

<<https://hyperbolic-crochet.blogspot.com/2012/08/bill-thurston-1946-2012.html>>

Além de suas realizações acadêmicas, Bill sempre teve um forte interesse por educação. Ele e outros estudantes do New College, dedicaram-se a ensinar matemática para jovens de comunidades menos favorecidas, compartilhando seu entusiasmo pela disciplina com aqueles que mais precisavam de apoio.

De acordo com o jornal *Notices of the AMS (2015)*[27], Thurston também era muito habilidoso com as mãos e gostava de construir coisas. Em sua casa em Princeton, ele tinha uma oficina onde costumava criar diversos objetos. Uma história marcante sobre sua habilidade de improvisar foi quando, ao receber convidados e perceber que não havia camas suficientes, ele saiu, comprou madeira e, em poucas horas, construiu um beliche. Sua mãe, Margaret, uma costureira habilidosa, costumava criar superfícies impressionantes baseadas nos desenhos que Bill fazia. Essa troca criativa entre mãe e filho refletia sua conexão com a arte de fazer e construir.

Desenvolveu técnicas para construir modelos geométricos quase suaves, usando discos euclidianos colados, o que evidencia ainda mais sua abordagem inovadora e criativa à matemática. Ao longo de sua vida, Bill Thurston não só deixou um legado matemático imenso, mas também tocou as vidas de muitas pessoas com seu espírito inovador, sua paixão pela educação e seu entusiasmo em explorar a matemática de maneiras criativas e acessíveis (Paul, W. [27]).

A ideia do modelo com anéis de papel, nasceu quando ainda estava na graduação, por volta de 1966, quando ele propôs um modelo de papel que consistia em anéis colados, formando uma representação visual do plano hiperbólico. Em 1997, essa técnica foi popularizada por meio de cursos e palestras apresentados pelo Professor David Henderson, que havia aprendido o método diretamente de Thurston no final da década de 1970 (Taimina, D. [22]).

Figura 46: Modelo de William Thurston feito por David Henderson



Fonte: <Crocheting Adventures Hyperbolic Planes - Daina Taimina, 2018>

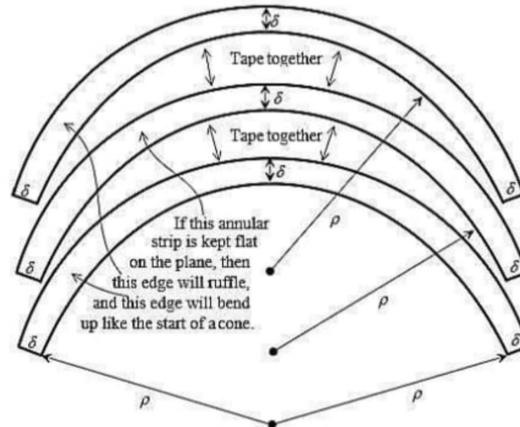
Thurston relatou a sua colega Daina Taimina (que falaremos posteriormente) sobre a construção do seu modelo de papel e a relação com o modelos de Beltrami:

“Não me lembro de ter visto os modelos de papel de Beltrami, embora eu soubesse que Beltrami havia mostrado que a pseudoesfera tinha a geometria intrínseca do plano hiperbólico. No New College (ele se formou em 1967 ), um punhado de alunos de matemática realizou um ‘seminário sênior’ em geometria (puramente estudantes) e nós passamos por grandes partes do livro Geometria de Coxeter. Eu olhei para alguns outros livros sobre geometria e geometria hiperbólica que estavam disponíveis na biblioteca, mas eu não sabia muito. Eu estava lutando para entender como era o plano hiperbólico, então comecei a juntá-lo de uma forma óbvia (enquanto também fazia isso para uma esfera, para orientação) usando círculos concêntricos com forma obtida usando trigonometria [...]

Logo ficou óbvio que as formas no caso hiperbólico eram convergindo, então mudei para usar anéis congruentes. Eu estava tentando modelar o plano hiperbólico, não a imagem da pseudoesfera, mas é claro que logo ficou óbvio que você poderia envolver a construção em torno de uma pseudoesfera.” (Taimina, D. [22]).

Esse modelo pode ser construído da seguinte forma: Corte diversas tiras anulares idênticas (um ‘anel’ é a região compreendida entre dois círculos concêntricos). Junte as tiras colando o círculo interno de uma no círculo externo da outra.

Figura 47: Construção do Modelo William Thurston



Fonte: <<https://pi.math.cornell.edu/~dtaimina/crochet/hplane.htm>>

É essencial que todas as tiras tenham o mesmo raio interno (mesma largura) e o mesmo raio externo, já os comprimentos das tiras podem variar. Também é possível cortar uma tira anular menor ou aumentar o comprimento de uma tira, unindo duas tiras ao longo de suas extremidades retas. A superfície obtida será, naturalmente, uma aproximação da superfície desejada (Taimina, D.& Henderson, D. [17]).

## 5.6 Modelo da Bola de Futebol Hiperbólica

Há também uma construção poliédrica do plano hiperbólico que não utiliza diretamente o modelo de Thurston, mas que é mais acessível para alunos e professores. Esse método, desenvolvido por Keith Henderson, filho de David Henderson, é chamado de *Bola de futebol hiperbólica* (Taimina, D., & Henderson, D. [17]).

Nesse modelo, a superfície hiperbólica é formada por uma combinação de polígonos que criam a curvatura negativa do espaço hiperbólico, lembrando a estrutura de uma bola de futebol, pois a bola também é formada com polígonos, mas com formas e número de lados ajustados para essa curvatura.

Figura 48: Keith Henderson e sua bola de futebol hiperbólica



Fonte: Experiencing Geometry: Euclidean and Non-Euclidean with History - David Henderson e Daina Taimina 2005.

Uma bola de futebol tradicional é formada por hexágonos (polígono de seis lados) e pentágonos (polígonos de cinco lados), com hexágonos brancos ao redor de alguns pentágonos pretos. Na versão hiperbólica, esse padrão é alterado para refletir a geometria hiperbólica. Em vez da estrutura convencional, onde hexágonos e pentágonos se combinam, a bola hiperbólica usa um maior número de hexágonos, pois os pentágonos pretos são substituídos por heptágonos (polígono de sete lados). Isso faz com que a superfície se curve negativamente, expandindo-se de acordo com as propriedades do espaço hiperbólico, à medida que mais hexágonos são colocados em volta dos heptágonos.

Figura 49: Bola de futebol hiperbólica



Fonte:

<[https://www.math.tamu.edu/~sottile/teaching/17.1/Hyperbolic\\_Soccerballs.html](https://www.math.tamu.edu/~sottile/teaching/17.1/Hyperbolic_Soccerballs.html)>

## 6 Geometria e Crochê - Os Modelos de Daina Taimina

Este capítulo sobre os crochês hiperbólicos tem um caráter especial para nosso trabalho, pois representa a interseção das duas vertentes que buscamos aqui discutir: a criação de modelos matemáticos do plano hiperbólico e a presença desse tipo de geometria na natureza. Ao explorar o crochê como uma forma de modelar superfícies hiperbólicas, estamos não apenas aprofundando a compreensão da matemática, mas também ligando-a diretamente ao mundo natural.

O crochê hiperbólico de Daina Taimina, não é apenas uma técnica criativa de modelagem matemática, mas também uma maneira de visualizar como estruturas geométricas complexas, como as superfícies hiperbólicas, podem surgir em fenômenos naturais. Isso nos permite perceber a geometria não como algo abstrato e distante, mas como algo presente e palpável ao nosso redor.

Assim, este capítulo conecta quatro áreas de conhecimento: a matemática, a observação da natureza, a arte e os recursos didáticos.

Daina Taimina nasceu em Riga, Letônia, em 1954, e faz parte da Universidade de Cornell. Durante sua graduação, ela enfrentou grandes dificuldades com a matéria. De acordo com ela, a geometria hiperbólica exigia um esforço de imaginação considerável para ser compreendida. Após concluir a disciplina, ela esperava nunca mais ter que lidar com essa teoria matemática abstrata. No entanto, 20 anos depois, como professora na Universidade de Cornell, ela se viu incumbida de ensinar geometria hiperbólica. Diante da falta de alternativas, ela teve que buscar uma maneira de tornar concretos os conceitos complexos que não conseguia visualizar. Foi nesse momento que, utilizando sua criatividade, ela desenvolveu o modelo de crochê do plano hiperbólico (Prološčić, V. [30]).

A ideia de Taimina foi inspirada no modelo dos discos anulares de Willian Thurston, cuja principal característica observada por Daina era que o modelo dos anéis de papel que refletia a expansão exponencial que ocorre ao se afastar de um ponto no espaço hiperbólico. No entanto, é possível perceber pelo Capítulo anterior que o modelo de papel de Thurston era difícil de construir, frágil e pouco prático.

Figura 50: Daina Taimina e William Thurston



Fonte: <<https://hyperbolic-crochet.blogspot.com/>>

Em junho de 1997, Daina participava de um workshop onde observava David Henderson (1939-2018) da Universidade de Cornell ajudando os participantes a estudar conceitos da geometria hiperbólica usando o modelo que aprendeu com Thurston. A superfície hiperbólica de papel de David, no entanto, estava tão desgastada e frágil que ele temia manuseá-la demais. Daina, então, teve uma ideia: “Deve haver uma maneira de criar um modelo mais durável” (Henderson, D. W., & Taimina, D. [16]).

Em seu livro, *Crocheting adventures with Hyperbolic Planes, 2018* [22], a professora Daina relata sua experiência com suas próprias palavras:

Aprendi pela primeira vez sobre um modelo de papel do plano hiperbólico em junho de 1997. O professor David Henderson, agora meu marido, estava conduzindo um workshop sobre o ensino de geometria para professores universitários e estava mostrando o modelo que aprendeu com Bill Thurston no final dos anos 1970 (Taimina, D)[22].

O modelo de papel original foi utilizado tantas vezes pelo professor David nas aulas e workshops de geometria que com o tempo, a superfície de papel se deteriorou. Em 1986, um grupo de professores do ensino médio que participavam de um programa de verão com David colaboraram na criação de uma nova versão de maior escala, que

também seria usada em diversas aulas e workshops ao longo dos anos seguintes e teria o mesmo desgaste da primeira.

Daina então começou a experimentar diferentes formas de construir modelos mais duráveis. Inicialmente, ela tentou tricô, mas o resultado não era suficientemente rígido. Foi então que ela se estabeleceu no crochê. Ela aprimorou sua técnica e criou seu primeiro pequeno plano hiperbólico. Mais tarde, enquanto acampava nas florestas da Pensilvânia, Daina continuou a experimentar com o crochê e começou a explorar suas aplicações matemáticas, desenvolvendo modelos que pudessem ilustrar a geometria hiperbólica de uma forma mais robusta e visualmente clara (Henderson, D. W., & Taimina, D. [16]).

Figura 51: Primeiro plano hiperbólico anular de malha de Daina 1997



Fonte: Experiencing Geometry: Euclidean and Non-Euclidean with History - David Henderson e Daina Taimina, 2005.

A professora Daina provou que o modelo de crochê é, de fato, um modelo isométrico do plano hiperbólico, mostrando que ele preserva as distâncias, o que é essencial para entender a geometria hiperbólica de forma prática e visual. A demonstração será omitida nesse trabalho por usar conceitos de isometria, inversão, distorção entre outros que não foram aqui abordados e por demandar de uma estrutura matemática mais complexa já que é feita toda no âmbito da Geometria Diferencial.

O modelo pode ser construído seguindo os passos que a professora Daina disponibilizou em seu artigo *Crocheting the Hyperbolic Plane* de 2001, [16]:

1. Para começar, cerca de 20 pontos correntinha são suficientes.
2. Para o primeiro ponto de cada carreira, insira a agulha de crochê na segunda corrente a partir da agulha. Pegue o fio e puxe-o através da corrente, criando dois laços na agulha. Em seguida, pegue o fio novamente e passe-o pelos dois laços. Isso completa o primeiro ponto de crochê.
3. Para os próximos pontos, repita o processo acima para cada corrente subsequente. Ou seja, insira a agulha na próxima corrente e faça o ponto de crochê normalmente, pegando o fio e passando-o pelos dois laços.
4. Para o ponto  $(N+1)$ , insira a agulha na mesma laçada que o ponto anterior, ou seja, no laço do ponto  $N$ . Repita esse processo até chegar ao final da carreira.
5. Ao terminar a carreira, antes de começar a próxima, faça um ponto corrente extra para dar início à nova carreira.
6. Finalizando o modelo: Quando o trabalho atingir o tamanho desejado, termine puxando o fio através do último laço da última corrente.

Essa construção usa um algoritmo simples que consiste em aumentar os pontos colocando um ponto a mais a cada  $N$  pontos. Isso quer dizer que se  $N=3$ , então no quarto ponto você fará dois pontos. O número de pontos de uma linha para a próxima em uma proporção constante,  $N$  para  $N + 1$  determina o *raio* do plano hiperbólico. A medida que acrescentamos pontos a mais o número de pontos de cada linha cresce rápido, quanto maior a proporção mais rápido aparecerão as ondulações, simbolizando o crescimento exponencial do plano hiperbólico.

Figura 52: Modelo de crochê da Pseudoesfera



Fonte: : <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

O modelo de crochê acima lembra a pseudoesfera, com sua borda ficando mais ondulada à medida que se expande. As linhas hiperbólicas podem ser facilmente traçadas nos pontos do crochê, e ao esticar o modelo, é possível fazer com que cada uma dessas linhas se torne perfeitamente reta no sentido da geometria euclidiana.

Figura 53: Retas no modelo de crochê

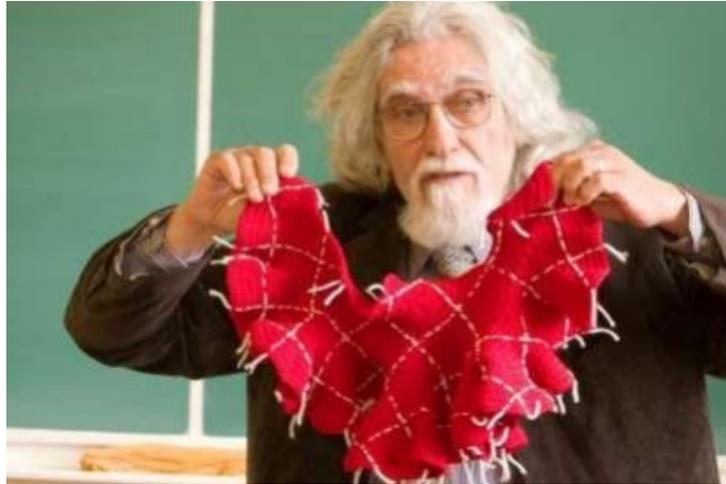


Fonte: : <<https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/PRO21.pdf>>

Na imagem acima, é possível visualizar o Postulado de Lobachevsky (*Existem infinitas linhas paralelas a uma reta dada*) com três retas passando pelo mesmo ponto e não intersectando a quarta reta apresentada. Elas também mostram como duas linhas paralelas se aproximam em um ponto e depois se afastam uma da outra em ambas as direções. Taimina foi capaz de demonstrar diversas outras propriedades do plano hiperbólico

utilizando o método do crochê.

Figura 54: David Henderson e o modelo de crochê



Fonte: Experiencing Geometry: Euclidean and Non-Euclidean with History - David Henderson e Daina Taimina , 2005.

O modelo de plano hiperbólico de crochê criado por Daina tem uma aparência bastante única e fascinante. As formas dos planos da professora parecem com padrões orgânicos e lembram algumas espécies de corais marinhos.

Em 2005, as ideias de Taimina sobre crochê e geometria hiperbólica motivaram as irmãs Christine e Margaret Wertheim a idealizarem o *Hyperbolic Crochet Coral Reef Project* [39]. Desde então, diversos recifes de corais confeccionados com crochê foram criados em diferentes partes do mundo.

O projeto dos corais inspirados nos planos hiperbólicos de Daina ganhou grande reconhecimento. Em janeiro de 2024, o famoso jornal The New York Times publicou um artigo intitulado *The Crochet Coral Reef Keeps Spawning, Hyperbolically* [32], que relata a história da criação dos recifes de corais pelas irmãs Wertheim e a relação com o trabalho da professora Daina.

Um plano hiperbólico exibe curvatura negativa constante; em todos os pontos, a superfície se curva para longe de si mesma. A vida nos recifes prospera, por assim dizer, no hiperbolismo; a estrutura de superfície curvada dos corais maximiza a absorção de nutrientes, e os nudibrânquios se deslocam pela água com franjas ondulantes (The New York Times,[32]).

De acordo com o jornal, até aquele momento (janeiro de 2024), cerca de 25.000

Figura 55: Hyperbolic Crochet Coral Reef Project



Fonte: <<https://scottsdalepublicart.org/exhibition/hyperbolic-crochet-coral-reef/>>

crocheteiras (ou “reefers”) formaram um arquipélago global com mais de 50 recifes como forma de homenagear e fazer um apelo a esses ecossistemas, as florestas do mar, que estão em risco devido às mudanças climáticas. O projeto também aborda conceitos matemáticos, uma vez que muitos organismos dos recifes de corais apresentam características que se assemelham à curvatura única da geometria hiperbólica.

Figura 56: Hyperbolic Crochet Coral Reef Project



Fonte: <<https://crochetcoralreef.org/>>

As formas marinhas do projeto de recifes de corais hiperbólicos, são retratadas exímia perfeição, através da técnica do crochê. Christine Wertheim, artista e escritora, explicou ao jornal que os corais feitos de crochê são representações abstratas da natureza. Enquanto sua irmã Margaret Wertheim se responsabilizava pela pesquisa científica e a

abordagem matemática. No site oficial do projeto, apresentam brevemente os conceitos de geometria hiperbólica e a relação com os organismos do mar, enfatizando que as superfícies hiperbólicas lembram mais uma criatura marinha do que qualquer outra coisa, e que corais, algas e lesmas do mar apresentam geometria hiperbólica em suas superfícies, pois sempre que um organismo precisa maximizar sua área de superfície para captar nutrientes, as superfícies hiperbólicas oferecem uma solução perfeita, compactando uma grande área em um espaço tridimensional reduzido. Corais e outros organismos filtradores evoluíram para adotar essa solução geométrica eficiente para otimizar sua alimentação. (The New York Times,[32]).

O objetivo das irmãs Wertheim com o projeto do recife de corais era semelhante ao de Daina, possibilitar que as pessoas apreciem, manipulem e experimentem para adquirir as ideias matemáticas.

Concluiremos este capítulo com uma citação da professora Daina, que resume sua dedicação ao estudo do plano hiperbólico: “A matemática é uma parte natural e profunda da experiência humana, e as vivências de significado na matemática são acessíveis a todos” (Taimina, D. [22]).

Figura 57: Daina Taimina



Fonte: <<https://www.liepajniekiem.lv/zinas/sabiedriba/viesojas-matematike-un-maksliniece-daina-taimina/>>

## 7 Geometria Hiperbólica e suas manifestações na Natureza

Diversas formas observadas na natureza podem ser explicadas por conceitos geométricos. Um exemplo claro são as abelhas que constroem colmeias com células hexagonais para armazenar o mel. Outro fenômeno geométrico recorrente na natureza são as espirais logarítmicas, que possuem a peculiaridade de manter sua forma independentemente da escala, com o intervalo entre as voltas sucessivas aumentando de forma constante. O mais interessante é que essa forma espiral é bastante comum no mundo natural. Exemplos disso incluem o arranjo das sementes de girassol e a organização das inflorescências da couve-flor. A fascinação por essa curva remonta ao século XVII, quando Jacob Bernoulli se dedicou ao estudo de várias curvas planas (Ferreira Filho [13]).

A natureza apresenta uma diversidade surpreendente de formas e estruturas que refletem princípios geométricos complexos e uma das mais intrigantes é a representação dos espaços hiperbólicos. Esses padrões podem ser observados em organismos como corais, lesmas marinhas e folhas de alface, cada um deles exibindo características que vão além da estética, desempenhando papéis fundamentais em suas ecologias e biologias. Nos corais, as formas hiperbólicas maximizam a superfície exposta à luz solar e ao fluxo de água, essenciais para a fotossíntese das zooxantelas que habitam suas células. As lesmas marinhas, também utilizam essas estruturas para otimizar a captura de luz e nutrientes, permitindo a incorporação de cloroplastos das algas em seus tecidos (Almeida, M. J., Nobre, A., Maciel, M., Forjaz, A., & Aguiar, C. A.[3]).

De acordo com Firmo C. D. S. [15], podemos dizer que as primeiras estruturas a aproveitar ao máximo a geometria de seus elementos para se fortalecer, explorando as propriedades das superfícies hiperbólicas, surgiram muito antes do aparecimento do ser humano e continuam sendo *construídas* até hoje pela natureza. Isso acontece tanto em organismos vivos quanto em estruturas inorgânicas. Não é difícil encontrar essas superfícies hiperbólicas no dia a dia, como nos galhos das árvores, nas folhas, nas pétalas das flores e até nas teias de aranha. A curvatura dupla das superfícies hiperbólicas, por exemplo, é bastante comum nas folhas e pétalas das plantas, pois oferece maior estabilidade, ajudando-as a se manter equilibradas mesmo quando o vento sopra. Se essas

estruturas fossem planas, provavelmente precisariam ser mais espessas (o que demandaria mais matéria e energia) para suportar o mesmo efeito ou, caso contrário, seriam menores e teriam menos área exposta ao ambiente.

O matemático aplicado Shankar Venkataramani da Universidade do Arizona, é conhecido por seu trabalho em geometria e suas aplicações na biologia e na física. Sua pesquisa explora a modelagem matemática de formas geométricas que aparecem na natureza, incluindo superfícies hiperbólicas e estruturas complexas. Venkataramani e seus alunos, investigam como essas formas podem ser usadas para otimizar processos naturais, como a absorção de nutrientes e a circulação de fluidos dentro de organismos biológicos. De acordo com o pesquisador, seus estudos indicam que essas superfícies proporcionam um *ponto ideal* estrutural, que permite aos organismos manterem um equilíbrio entre rigidez e flexibilidade, possibilitando que “se movam e mudem de forma com um baixo custo energético” (New York Times [32]).

De acordo com Margaret Wertheim [40], “Enquanto a natureza tem experimentado com formas hiperbólicas por centenas de milhões de anos, os matemáticos passaram centenas de anos tentando provar que tais estruturas eram impossíveis”. Ainda, segunda ela, essas formas são particularmente vantajosas quando há necessidade de maximizar a área de superfície, como é o caso de animais que se alimentam por filtração. As formas hiperbólicas podem ser encontradas em células, cactos e até mesmo em flores, como os lírios-de-chama.

Seguindo essa perspectiva, apresentaremos algumas dos principais organismos da natureza que apresentam semelhanças com as características do plano hiperbólico e propriedades da geometria hiperbólico. Faze-se necessário pontuar, que nesse trabalho não contém todas as criaturas, nem todas as informações científicas dos que aqui forem apresentados, uma vez que existem dezenas de milhares de espécies de alguns grupos de animais e plantas.

Vale ressaltar que realizei uma pesquisa em fóruns especializados e consultei professores da área de biologia para identificar quais espécies de corais, com seus respectivos nomes científicos e características, poderiam estar mais alinhadas com os padrões observados no crochê da professora. Esse processo se mostrou bastante difícil, pois a diversidade de espécies de corais é vasta, com milhares de variações a serem consideradas. A tarefa

de mapear essas espécies e suas características únicas exigiu uma análise detalhada dada a riqueza biológica dos corais e suas inúmeras formas e estruturas.

## 7.1 Corais

As informações biológicas sobre os corais aqui apresentadas foram retiradas do manual *Introduction to Coral Reef Ecosystems, Threats, and Solutions* [10]. De acordo com o manual, o coral faz parte do filo Cnidária, que também abrange anêmonas do mar e águas vivas. Diferentemente das anêmonas-do-mar, os corais produzem exoesqueletos de carbonato de cálcio, que fornecem suporte e proteção ao organismo. Uma das características

Figura 58: Coral



Fonte: <<https://fastcompanybrasil.com/impacto/conheca-o-recife-de-corais-gigante-das-profundezas-da-costa-do-taiti/>>

mais marcantes dos cnidários é a presença de células urticantes chamadas cnidócitos, que eles usam para capturar suas presas, além de uma cavidade estomacal bastante ampla.

Os pólipos, que são os pequenos animais que formam os corais, podem se agrupar em grandes colônias. Milhares desses pólipos podem cobrir um único ramo ou montículo de coral. Cada pólipos tem um corpo cilíndrico pequeno, com uma boca cercada por tentáculos que são, por sua vez, urticantes.

Os corais têm a capacidade de formar grandes colônias, criando o que chamamos de cabeças de coral. Cada cabeça pode ser composta por centenas ou até milhares de pólipos, que estão todos conectados por um tecido comum, incluindo suas cavidades digestivas. Isso implica que, quando um pólipos se alimenta, toda a colônia se beneficia, estabelecendo uma dinâmica de cooperação e interdependência entre esses organismos. Cada pólipos secreta um exoesqueleto perto de sua base e, ao longo de muitas gerações, a colônia constrói um esqueleto característico da espécie, que pode crescer por vários metros.

Os corais são muito sensíveis e as condições precisam ser exatamente certas para que prosperem. Os corais precisam de:

1. **Luz solar**
2. **Água quente (Aproximadamente de 16°C e 29°C.)**
3. **Baixos nutrientes.**
4. **Água livre de sedimentos.**
5. **Água salgada.**
6. **Um substrato duro para crescer.**

As colônias de corais se expandem principalmente por meio da reprodução assexuada dos pólipos. No entanto, os corais também se reproduzem sexualmente: durante a noite, geralmente próxima à lua cheia, pólipos da mesma espécie liberam seus gametas simultaneamente. Os ovos fertilizados se transformam em plânulas, as formas móveis iniciais dos pólipos. Quando essas plânulas se tornam maduras, elas se fixam no fundo do mar e começam a formar novas colônias.

Embora alguns corais consigam capturar plâncton e pequenos peixes usando suas células urticantes, a maior parte da energia e dos nutrientes que eles necessitam vem de dinoflagelados unicelulares fotossintéticos que habitam seus tecidos. Esses organismos microscópicos, conhecidos como zooxantelas, também são responsáveis pela cor vibrante dos corais. Como esses corais dependem da luz solar para sobreviver, eles prosperam em águas rasas e claras, geralmente a menos de 60 metros de profundidade. Os corais desempenham um papel fundamental na formação dos recifes de corais.

Existem milhares de outras espécies de corais pelo mundo, no entanto, em nossa pesquisa identificamos algumas que possuem características mais próximas do plano hiperbólico. De acordo com Daina Taimina [22], essas superfícies da natureza têm curvatura negativa constante (aproximada), mas obviamente não se estendem indefinidamente. Em todas as imagens é possível perceber que a curvatura negativa é mais evidente nas bordas.

### **7.1.1 Agaricia (Coral Folha de alface)**

O coral folha de alface, também chamado de coral repolho, coral prato ou coral vaso, é facilmente reconhecido por sua aparência característica, que se assemelha a grandes

folhas de alface, com bordas onduladas e uma forma cônica que se eleva. Esses corais se alimentam de plâncton e são encontrados em cores suaves como amarelo, verde e marrom, o que contribui para sua beleza nos recifes (Types of Coral Reef Species) [9].

Figura 59: Coral folha de alface



Fonte: <<https://www.coralsoftheworld.org/>>

As amplas estruturas do coral folha de alface fornecem abrigo para uma variedade de organismos marinhos, oferecendo um espaço seguro onde pequenos animais podem se esconder de predadores. Essa característica faz com que o coral seja uma peça chave nos ecossistemas marinhos.

Esses corais rochosos formam recifes e se desenvolvem em colônias vibrantes em várias regiões do Indo-Pacífico, prosperando especialmente em águas rasas, a profundidades de até 20 metros. Sua presença não só enriquece a biodiversidade local, mas também desempenha um papel fundamental na preservação e saúde dos recifes de corais [9].

Tabela 1: Informações sobre o Coral Folha de Alface

|                              |   |
|------------------------------|---|
| <b>Nome Científico</b>       | <i>Agaricia agaricites</i>                                    |
| <b>Nomes Comuns</b>          | Coral folha de alface, coral folha, coral repolho, coral vaso |
| <b>Tipo</b>                  | Coral duro, ramificado  |
| <b>Tamanho Máximo</b>        | Diâmetro de até 3 pés (0,9 m)                                 |
| <b>Habitat</b>               | Profundidades de 15 a 245 pés (5 a 75 m)                      |
| <b>Estado de Conservação</b> | Menor preocupação   |

Fonte: <https://www.citrusreef.com/blogs/news/types-of-coral-reef-species>

Observe que, na primeira figura, o coral folha de alface apresenta ramificações complexas que se estendem em diferentes direções. Suas bordas exibem uma clara curvatura

Figura 60: Coral folha de Alface



Fonte: <<https://www.coralsofttheworld.org>>

dupla negativa, criando ondulações que lembram superfícies hiperbólicas. Essas ondulações não seguem um padrão uniforme, mas distribuem-se de maneira natural. O mesmo é percebido na segunda figura, as ondulações das bordas formam curvatura negativa e lembram o crescimento exponencial do plano hiperbólico.

Além disso, as ramificações estão dispostas de forma a maximizar a área de superfície e essa estrutura também favorece a interação com a luz e os nutrientes presentes na água.

### 7.1.2 Trachyphyllia Geoffroyi (Coral-cérebro aberto)

O coral-cérebro aberto é uma espécie vibrante e de vida livre, predominante na região do Indo-Pacífico. Esse coral pode ser encontrado em diversos habitats, mas costuma ser encontrado em profundidades consideráveis para os padrões de corais. Os pólipos são carnudos. Quando os tentáculos se retraem durante o dia, um grande manto se estende além do perímetro do esqueleto. Isso se retrai se for perturbado (Types of Coral Reef Species) [9]. Comumente, essa espécie apresenta uma forma bastante lobada, exibindo cores

Figura 61: Coral cérebro aberto



Fonte: <<https://www.coralsoftheworld.org>>

intensas que podem variar de multicoloridas a monocromáticas, abrangendo praticamente todas as tonalidades do arco-íris.

Em geral, os corais-cérebro aberto são relativamente pequenos, com diâmetro que raramente ultrapassa 20 cm. No entanto, esses corais enfrentam ameaças significativas, como a captura excessiva para o comércio de aquários, a degradação de seus habitats naturais e os efeitos do aquecimento global [9].

Tabela 2: Informações sobre o Coral Cérebro Aberto

|                              |  |
|------------------------------|--|
| <b>Nome Científico</b>       | <i>Trachyphyllia geoffroyi</i>                             |
| <b>Nomes Comuns</b>          | Coral cérebro aberto, coral cérebro dobrado, coral repolho |
| <b>Tipo</b>                  | Coral duro   |
| <b>Tamanho Máximo</b>        | Diâmetro de até 8 polegadas (20 cm)                        |
| <b>Habitat</b>               | Profundidades de 100 a 130 pés (30 a 40 m)                 |
| <b>Estado de Conservação</b> | Quase ameaçado   |

Fonte: <https://www.citrusreef.com/blogs/news/types-of-coral-reef-species>

Figura 62: Coral cérebro aberto



Fonte: <<https://www.coralsoftheworld.org>>

O coral cérebro aberto apresenta sulcos profundos e curvas onduladas nas suas bordas que formam superfícies de curvatura negativa, típicas do plano hiperbólico. Essas ondulações se distribuem de maneira intrincada, criando padrões que parecem infinitamente detalhados, uma característica associada a modelos geométricos como as bordas do disco de Poincaré.

A curvatura negativa do coral é visível nas dobras que percorrem sua estrutura, com depressões e elevações que formam Geometrias complexas. No coral cérebro, esses padrões geométricos não são apenas estéticos, mas também funcionais, ajudando na circulação da água e na troca de nutrientes.

### 7.1.3 *Stichodactyla haddoni* (Anêmona de tapete de sela)

As anêmonas de tapete de sela exibem uma paleta de cores que varia de tons arenosos de marrom a verde, azul e roxo, e servem de lar para sete espécies diferentes de peixes-palhaço. Essas anêmonas são facilmente reconhecíveis por seus tentáculos curtos, bulbosos e pegajosos. Elas possuem um grande disco com dobras relativamente próximas, conferindo-lhes uma aparência semelhante a um tapete ondulado (Types of Coral Reef Species) [9].

Figura 63: Anêmona Tapete de sela



Fonte: <<https://www.shutterstock.com/pt/search/stichodactyla-haddoni>>

Como muitas outras anêmonas-do-mar, as anêmonas de tapete de sela são carnívoras e se alimentam de uma variedade de invertebrados, além de capturar partículas de alimento que ficam suspensas na água [9].

Essa espécie é geralmente encontrada solitária em recifes e em fundos arenosos macios, frequentemente fixando-se ao substrato.

Tabela 3: Informações sobre a Anêmona-Tapete-de-Sela

|                              |  |
|------------------------------|--|
| <b>Nome Científico</b>       | <i>Stichodactyla haddoni</i>                     |
| <b>Nome Comum</b>            | Anêmona-tapete-de-sela, anêmona-tapete-de-haddon |
| <b>Tipo</b>                  | Coral mole                                       |
| <b>Tamanho Máximo</b>        | Diâmetro de até 2,5 pés (0,75 m)                 |
| <b>Habitat</b>               | Profundidades de 13 a 130 pés (4 a 40 m)         |
| <b>Estado de Conservação</b> | Menor preocupação                                |

Fonte: <https://www.citrusreef.com/blogs/news/types-of-coral-reef-species>

Figura 64: Anêmona Tapete de sela



Fonte: <<https://www.shutterstock.com/pt/search/stichodactyla-haddoni>>

Observe nas imagens que os tentáculos da anêmona dispõem-se de forma ramificada e ondulada, formando padrões que lembram modelos geométricos como o primeiro modelo de Beltrami, onde as linhas curvas criam uma sensação de expansão infinita. Essa organização não apenas confere beleza ao organismo, mas também otimiza a distribuição de recursos e a interação com o ambiente.

Figura 65: Anêmona Tapete de Sela e o Modelo de Beltrami



Fonte: Wikipedia



Fonte: Universidade de Pavia

## 7.2 Lesmas do Mar

As lesmas do mar fazem parte da classe *Gastrópoda* que compreende os caramujos, caracóis e lesmas. São conhecidas como nudibrânquios, são fascinantes criaturas do mar. Embora muitas vezes sejam chamadas de lesmas marinhas, apenas uma parte delas pertence à ordem *Nudibranchia*, um grupo específico de gastrópodes. O que realmente distingue os nudibrânquios é a ausência de concha, tanto interna quanto externa, e seu apetite quase exclusivamente carnívoro. Eles são predadores habilidosos, alimentando-se de esponjas, *cnidários*, ascídias e outros invertebrados marinhos [23].

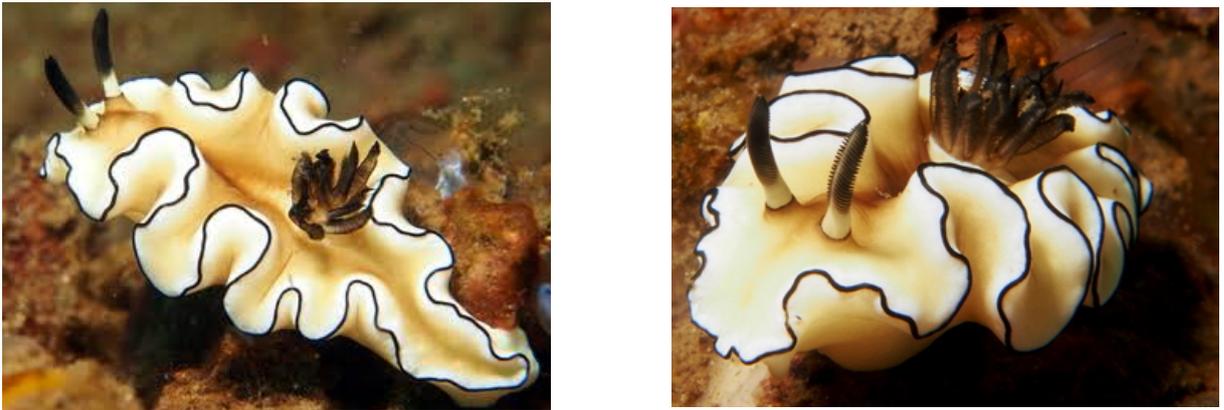
Esses moluscos exploram um nicho pouco aproveitado por outros habitantes do oceano, como esponjas e ascídias que possuem compostos tóxicos e *cnidários* com células urticantes. Além disso, algumas espécies de nudibrânquios se alimentam até mesmo de outros nudibrânquios ou dos ovos de diferentes espécies. Em geral, esses animais variam de milímetros a poucos centímetros de comprimento e vivem perto do fundo do mar, onde podem facilmente se aproximar de suas presas. A beleza e a complexidade dos nudibrânquios tornam-os uma parte essencial da diversidade marinha [42].

### 7.2.1 *Glossodoris atromarginata*

Essa espécie bastante comum apresenta uma coloração que varia entre branco-creme e marrom-claro. É facilmente identificável pela linha preta que contorna a borda sinuosa do manto, além da borda preta ao redor das bolsas de rinóforo “*antenas*”, das maçãs pretas dos rinóforos e da borda preta das guelras simples. As guelras tendem a se mover ritmicamente enquanto o animal se desloca. Os indivíduos dessa espécie podem atingir até 60 mm de comprimento. Tal espécie é encontrada no oceanos Pacífico e Índico tropicais e subtropicais [36].

A *Glossodoris atromarginata* possui uma curvatura suave em seu corpo, com as bordas do manto formando ondulações visíveis. Essas ondulações possuem manifestação de uma geometria semelhante à curvatura negativa. As ondulações do manto criam uma estrutura tridimensional que expande a área superficial do corpo, permitindo que o nudibrânquio maximize o contato com o ambiente marinho, facilitando processos como a respiração e a troca de nutrientes [36].

Figura 66: *Glossodoris atromarginata*



Fonte: <<https://reefguide.org/doriprismaticaatromarginata.html>>

### 7.2.2 *Glossodoris Cruenta*

De acordo com The Sea Lug Fórum [37], a *Glossodoris Cruenta* é uma espécie de nudibrânquio pertencente à família Chromodorididae. Este molusco marinho é conhecido por suas cores vibrantes e padrões distintos, que frequentemente incluem combinações de vermelho, laranja e amarelo, com bordas contrastantes.

Os nudibrânquios dessa espécie são encontrados principalmente em recifes de coral e áreas costeiras do oceano Pacífico, onde habitam ambientes marinhos rasos. Eles se alimentam de esponjas, que são sua principal fonte de alimento [41].

Figura 67: *Glossodoris cruenta*



Fonte: <[http://www.umiushi.info/kanri/photo\\_dsp\\_eng.php](http://www.umiushi.info/kanri/photo_dsp_eng.php)>

Observe nas imagens que a *Glossodoris Cruenta* possui um corpo arredondado, de cor branca com creme, e bordas contrastantes em tons mais escuros, como marrom

ou preto. As bordas apresentam curvatura suave e ondulada de seu corpo e bordas que formam pequenas elevações e criam uma geometria semelhante à curvatura negativa encontrada no plano hiperbólico. Além disso, as bordas e padrões repetitivos da *Glossodoris atromarginata*, com suas ondulações e variações de cor, podem ser vistas como uma manifestação visual de uma geometria complexa, semelhante aos padrões que aparecem nas representações do plano hiperbólico. A estrutura ramificada das bordas, organizada de forma eficiente, também remete à ideia de expansão e ramificação contínua, característica das superfícies hiperbólicas [41].

### 7.2.3 *Ardeadoris symmetrica*

*Ardeadoris symmetrica* é uma lesma-do-mar de tamanho médio, com até 45 mm de comprimento. O manto tem formato oval, com uma ampla saliência sobre o pé. A margem do manto forma uma série de pregas, frequentemente com uma grande prega distintiva de cada lado, aproximadamente na metade do comprimento. A borda do manto tem uma aparência espessa [26].

A cauda do pé é visível, projetando-se além da margem posterior do manto. Os rinóforos podem se retrair em bolsos protetores. As brânquias também podem se retrair em um bolso protetor. A brânquia é disposta em um arco ao redor do ânus, aberto posteriormente, com cada extremidade do arco formando uma espiral para dentro. As brânquias se movem continuamente com um ritmo regular e rítmico quando expandidas [41].

Figura 68: *Ardeadoris Symmetrica*



Fonte: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Ardeadoris\\_symmetrica](https://en.wikipedia.org/wiki/Ardeadoris_symmetrica)>

O manto da *Ardeadoris Symmetrica* apresenta pregas e ondulações que aumentam a área superficial do corpo, de forma similar à maneira como a geometria hiperbólica permite que uma superfície se expanda em um espaço limitado. Observe que diferente das outras lesmas apresentadas, a *Ardeadoris* apresenta ramificações no final da borda criando a ideia de infinidade, análogo ao disco de Poincaré. Essas ondulações e pregas formam padrões que lembram a curvatura negativa típica do plano hiperbólico.

## 7.3 Plantas

A maior parte da vida de uma planta depende de suas folhas, pois é nelas que ocorrem processos essenciais como a transpiração, a respiração e a fotossíntese. A fotossíntese é o processo pelo qual as plantas capturam a energia da luz solar e convertem substâncias minerais absorvidas do solo (água e sais minerais) e do ar (gás carbônico) em substâncias orgânicas. A partir das folhas, o alimento produzido é distribuído para os demais órgãos da planta [8].

Elas são superfícies achatadas, geralmente amplas e com grande diversidade de formas, onde se concentram os tecidos responsáveis pela fotossíntese, como o mesófilo foliar, que contém parênquima clorofiliano.

### 7.3.1 Alface

De acordo com Noumedem [25], a *lactuca sativa*, mais conhecida como alface, é uma planta amplamente reconhecida em todo o mundo, especialmente por seu papel nas saladas, sopas e pratos vegetarianos. Além de ser um ingrediente saboroso, a alface possui notáveis propriedades medicinais. Cultivada globalmente, ela se destaca como um dos vegetais de folhas verdes mais consumidos crua, graças ao seu sabor e alto valor nutricional.

Considerada uma importante fonte de fitonutrientes, a alface apresenta uma variedade significativa de características morfológicas e genéticas. Sua história remonta ao Egito antigo, onde foi cultivada pela primeira vez. Hoje, é apreciada não apenas por seu uso culinário, mas também por suas aplicações na medicina, ajudando em condições como dor, problemas estomacais, inflamações e infecções do trato urinário.

Figura 69: Alface



Fonte: <https://depositphotos.com/br/photos/alface-cortada.html>

Figura 70: Ramificações da folha de alface



Fonte: <https://depositphotos.com/br/photos/alface-cortada.html>>

A folha de alface é um exemplo notável de como a geometria hiperbólica se manifesta na natureza, refletindo adaptações funcionais importantes. Sua estrutura foliar, caracterizada por bordas onduladas e uma disposição expandida, maximiza a área de superfície exposta à luz solar, essencial para a fotossíntese. A dupla curvatura presente nas folhas de alface confere um enrijecimento de suas bordas (Firmo C. D. S.)[15].

### 7.3.2 Euphorbia Abyssinica (Cacto)

De acordo com Cavalcante, [7], os cactos são plantas que vivem muito bem sem água, geralmente não possuem flores, mas apresentam espinhos e caules suculentos. Existem muitas espécies de cactos no Brasil e no mundo, que aparecem nas paisagens semiáridas e estão sempre verdes. A espécie de cacto *Euphorbia abyssinica* possui área nativa no nordeste do Sudão até a Somália. Trata-se de uma árvore suculenta que cresce principalmente em biomas de deserto ou arbustos secos. Também é conhecida como *cato vela do deserto* e gosta de sol, podendo atingir até 10 metros de altura. Possui também, pequenos espinhos agrupados [20].

Figura 71: Ondulação na folha de cacto



Livro: *Crocheting adventures with hyperbolic planes* - Daina Taimina (2018)

Figura 72: Cacto



Fonte:

<<https://powo.science.kew.org>>

É possível perceber a curvatura negativa presente nas bordas da folha de cacto. Além disso, o crescimento de cactos segue um padrão de ramificação que pode lembrar a estrutura hiperbólica, com a planta se expandindo de maneira que otimiza a exposição ao ambiente sem ocupar mais espaço do que o necessário. Essa expansão é útil na captação de luz solar, já que a área se torna maior.

### 7.3.3 *Ilex aquifolium* L. (Azevinho)

O azevinho, cientificamente denominado *Ilex aquifolium* L., pertence à família Aquifoliaceae. Esta espécie é popularmente conhecida por vários outros nomes, como azevim, azevinho-espinhoso, espinha-sempre-verde, zebro, picafolha, pica-rato, visqueiro, aquifólio, teio e vidreiro (Monteiro [24]).

As folhas do azevinho são alternadas, coriáceas, com formato que varia de ovado a lanceolado, podendo alcançar até 10 cm de comprimento e 5 cm de largura. A face superior das folhas é brilhante e de cor verde escura, enquanto a face inferior apresenta uma tonalidade mais opaca. A forma das folhas também varia ao longo da planta: nos ramos mais velhos e na parte inferior, as folhas possuem espinhos, enquanto nos ramos mais novos e na parte superior, as folhas são desprovidas de espinhos. Essa variação na aparência das folhas serve como um mecanismo de defesa contra herbívoros [31].

Figura 73: Folha de Azevinho adulto abaixo e uma folha jovem



Fonte: <<https://bucolico-anonimo.blogspot.com/2014/02/os-picos-das-folhas-do-azevinho.html>>

Figura 74: Azevinho com sua folha e frutos



Fonte:  
<<https://revistajardins.pt/encanto-do-azevinho/>>

Observe que a curvatura negativa na folha de azevinho aumenta a medida que a

planta vai envelhecendo, como é possível perceber na imagem 72. Essa curvatura fica evidente nas bordas formadas para a criação dos espinhos da folha.

#### 7.3.4 *Celosia argentea* (Crista de galo)

*Celosia argentea* var. *cristata* é uma variedade da espécie *Celosia argentea*, pertencente à família *Amaranthaceae*, que inclui plantas tanto comestíveis quanto ornamentais. A espécie *Celosia argentea* é dividida em dois grupos principais: o grupo Plumosa e o grupo Cristata. Este último é conhecido por suas flores coloridas e de forma peculiar, que se assemelham à cabeça de um galo [11].

De acordo com Anderson Porto [11], as folhas da *Celosia* são elípticas, estreitas e alongadas, com as laterais mais curvadas e uma ponta estreita, podendo ser verdes ou apresentar tonalidades vermelha, as extremidades são densas, planas e aveludadas, com formato semelhante à crista de galo.

Figura 75: Flor Crista de Galo



Fonte: <<https://www.sitiodamata.com.br/especies-de-plantas/crista-de-galo-celosia-argentea.html>>

Na figura acima, é possível perceber semelhanças visuais com a pseudoesfera descrita por Beltrami, e as bordas são onduladas e possuem uma curvatura negativa, parecendo uma superfície que se expande em todas as direções, similar ao conceito da pseudoesfera.

Figura 76: Ondulação da flor Crista de Galo



Fonte: <<https://superuniversodasplantas.com.br/crista-de-galo/>>

### 7.3.5 *Brugmansia suaveolens* (Trombeta de anjo)

A *Brugmansia suaveolens* é uma planta pertencente à família Solanaceae, originária de regiões tropicais da América do Sul, incluindo o Brasil, onde é encontrada em florestas de planície, margens de rios e áreas urbanas. Trata-se de uma árvore que pode atingir entre 1,8 e 4,6 metros de altura, com folhas ovais que chegam a medir até 25 cm de comprimento e 15,2 cm de largura, crescendo mais robusta em locais sombreados. Suas flores, com formato de trompete ou corneta possui fragrância doce, têm cerca de 30 cm de comprimento e apresentam cores variadas, como amarelo, laranja, creme ou rosa, sendo as mais comuns as de coloração branca (Lusweti, A., Wabuye, E., Ssegawa, P., & Mauremootoo, J.) [2].

Figura 77: Flor Trombeta de Anjo



Fonte: <[https://www.picturethisai.com/pt/wiki/Brugmansia\\_suaveolens.html](https://www.picturethisai.com/pt/wiki/Brugmansia_suaveolens.html)>

Analisando as imagens acima, a flor exibe uma estrutura que pode ser compa-

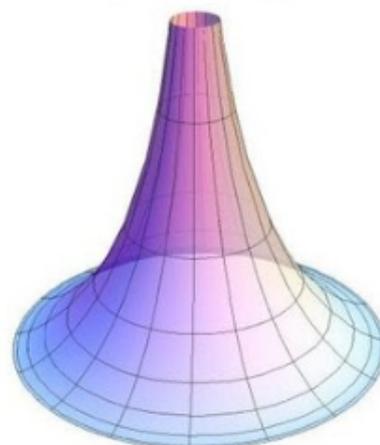
Figura 78: Trombeta de anjo



Fonte:

<<https://florescoloridas.com.br/flores/flor-trombeta-de-anjo/>>

Figura 79: Pseudoesfera



Fonte:

<<http://www.matematica.seed.pr.gov.br>>

rada visualmente à pseudoesfera, especialmente devido à sua forma curvada e a volumosa expansão das pétalas. A pseudoesfera, uma superfície com curvatura negativa, é caracterizada por sua estrutura esférica distorcida, que se expande para fora em uma curvatura negativa e o mesmo pode ser observado na pétala da flor.

Quando observamos a flor da trombeta de anjo, suas pétalas formam uma espécie de trompete ou corneta, apresentam uma curvatura que pode ser associada à forma de uma pseudoesfera. A abertura da flor, com suas bordas onduladas e arredondadas, criando uma forma que parece se expandir para fora de maneira fluida e orgânica como o modelo de Beltrami.

### 7.3.6 Lírio de Chama (*Gloriosa Superba*)

A *Gloriosa Superba* mais conhecida como Lírio de Chama, é da família Colchicaceae. A faixa nativa desta espécie é Tropical, mais particularmente aparece na África do Sul e Oceano Índico Ocidental. Cresce principalmente no bioma tropical seco. É usada como veneno e remédio, tem usos ambientais e chama atenção por sua beleza exótica. É interessante frisar que esta planta é venenosa e tóxica o suficiente para causar mortes humanas e animais se ingerida [21].

As pétalas do Lírio são longas, estreitas e onduladas, que se curvam para trás, dando à planta a aparência de uma chama. Essa característica torna as flores muito

Figura 80: Lírio de Chama



Fonte: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Gloriosa\\_superba](https://en.wikipedia.org/wiki/Gloriosa_superba)>

atraentes para polinizadores, como beija-flores e insetos. A forma das pétalas pode ajudar a planta a resistir ao vento ou a outras condições adversas, como a umidade excessiva. Além disso, a curvatura das pétalas pode reduzir a evaporação excessiva de água das flores em climas quentes.

Esse formato da pétala pode ser comparado as formas que aparecem em geometria hiperbólica, onde as curvas possuem curvatura negativa e remete ao crescimento exponencial do espaço. Assim, as pétalas onduladas podem, em uma analogia visual, lembrar as curvas hiperbólicas.

## 7.4 Platelminhos

O Filo Platyhelminthes, conhecido como o filo dos vermes achatados, engloba animais invertebrados com corpo achatado apresentando simetria bilateral. Esses organismos, também chamados de platelmintos, podem ser de vida livre, habitando ambientes aquáticos ou terrestres, como é o caso das planárias, ou podem ser parasitas de outros

seres vivos, incluindo os seres humanos [29].

Figura 81: Espécies de platelmintos



Fonte: <<https://lkcnhm.nus.edu.sg/app/uploads/2018/10/2018nis077-125.pdf>>

A imagem apresenta as seguintes espécies de Platelminotos: (A) *Pseudobiceros fulgor*; (B) *Pseudobiceros hancockanus*; (C) *Pseudobiceros hymanae*; (D) *Pseudobiceros stellae*; (E) (F) (G) e (H) *Pseudobiceros*.

Todos eles possuem um corpo achatado que se estende rapidamente formando as curvas e ondulação nas bordas, uma característica que pode ser associada à curvatura negativa do plano hiperbólico. Esse achatamento é uma adaptação que otimiza a superfície do organismo, facilitando a troca de nutrientes e a absorção em um espaço limitado. A simetria bilateral dos platelmintos também pode ser comparada à estrutura geométrica do plano hiperbólico, pois proporciona um equilíbrio simétrico que permite uma distribuição eficiente dos recursos.

As ondulações, que apresentam curvatura negativa, no corpo dos platelmintos ajudam na locomoção utilizando menos energia.

## 8 Proposta de Aula e Oficina

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta de aula e uma oficina, ambas elaboradas com base nos conceitos discutidos ao longo do trabalho, ou seja, desejamos que nosso trabalho sirva como um material completo para introdução da Geometria Hiperbólica, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior.

A proposta de aula é voltada para alunos do Ensino Médio, com o objetivo de explorar a geometria hiperbólica de maneira acessível, relacionando-a com as formas da natureza e utilizando os modelos da professora Daina Taimina. A oficina, por sua vez, oferece uma abordagem prática e criativa, permitindo que os participantes explorem essas ideias de forma mais imersiva, utilizando o crochê como ferramenta para entender a geometria hiperbólica e suas manifestações naturais, tendo como público alvo os alunos da Educação básica, do Ensino Superior, professores e amantes da Geometria.

### 8.1 Proposta de Aula: “Explorando a Geometria Hiperbólica na Natureza”

**Objetivo da Aula:** Introduzir e explorar o conceito de geometria hiperbólica, utilizando modelos geométricos criados pela professora Daina Taimina. Relacionar a geometria hiperbólica com formas naturais, como corais, lesmas marinhas, plantas e flores, para demonstrar como a matemática pode ser observada no mundo ao nosso redor. Promover a interdisciplinaridade, conectando conceitos matemáticos com biologia e arte.

**Público-alvo:** Alunos da 3ª Série do Ensino Médio .

**Conteúdo:** Introdução à geometria hiperbólica.

Curvatura e como ela se aplica a formas geométricas e naturais.

Exemplos de formas naturais que exibem características da geometria hiperbólica.

Conceitos fundamentais de Geometria Hiperbólica Plana.

**Duração da Aula:** Aproximadamente 4 a 5 aulas.

1. Apresentação das Formas da Natureza e Análise das Ondulações (20 minutos)

**Objetivo:** Estimular a observação das formas naturais, destacando suas caracte-

rísticas e ondulações.

- Apresente **imagens** de diferentes formas naturais, como corais, plantas, lesmas e platelmintos. Você pode utilizar imagens de organismos que exibem padrões geométricos evidentes, como corais e plantas que seguem padrões curvos.
- **Divisão em grupos:** Divida os alunos em grupos e peça que cada grupo pesquise sobre um dos grupos de seres vivos: plantas (com foco nas espécies apresentadas), corais, lesmas marinhas e platelmintos.
- **Apresentação dos resultados:** Cada grupo deve apresentar o que encontrou sobre a forma de vida e as características desses organismos. O objetivo é que eles identifiquem as ondulações, formas curvas e padrões geométricos nos organismos que pesquisaram.

**Discussão em grupo:** Após as apresentações, o professor deve conduzir a discussão para que os alunos percebam que há uma característica comum entre esses seres vivos: **as ondulações**.

- **Perguntas para os alunos:** Quais formas e padrões geométricos vocês conseguiram identificar nas formas naturais que pesquisaram? Como as ondulações podem ser benéficas para os corais, que são filtradores, e para os outros seres vivos apresentados?

**Conclusão da etapa:** O professor deve enfatizar como as ondulações são características visíveis nesses organismos e como elas desempenham um papel importante em suas funções vitais.

## 2. A Natureza e a Geometria

**Objetivo:** Relacionar a natureza com a geometria, destacando como certos organismos exibem padrões geométricos.

- Explique aos alunos que a relação entre geometria e formas naturais é uma questão antiga e fundamental para entender o mundo ao nosso redor.
- Apresente o vídeo *“10 Provas Incríveis de Que a Geometria da Natureza é perfeita e surpreendente”* que mostra vários exemplos de como a geometria se manifesta de maneira impressionante na natureza.

**Discussão sobre o vídeo:** Após o vídeo, abra espaço para que os alunos compartilhem suas impressões e observações. Pergunte o que eles acharam mais interessante e se conseguiram identificar mais exemplos de padrões geométricos nas formas naturais.

**Relação com as ondulações:** Durante essa discussão, o professor deve direcionar os alunos para observarem a **forma** das ondulações nas imagens e vídeos, preparando o terreno para a introdução do conceito de **curvatura** na próxima etapa.

### 3. Introdução ao Conceito de Curvatura (15 minutos)

**Objetivo:** Apresentar o conceito de curvatura e como ele explica as ondulações observadas na natureza.

- Explique que a curvatura é um conceito matemático que nos ajuda a entender como as formas se curvam ou se dobram. Diferencie a **curvatura positiva** (como na superfície de uma esfera) da **curvatura negativa** (como na geometria hiperbólica, onde as linhas paralelas se afastam).
- **Relacionando com a natureza:** Retome os exemplos discutidos anteriormente (corais, plantas, lesmas) e mostre como as ondulações e curvaturas desses organismos são vitais para seu funcionamento. A curvatura negativa, por exemplo, é observada na superfície de certos corais, e essa curvatura ajuda na filtração da água.
- **Exemplo visual:** Mostre figuras ou modelos que exemplifiquem a diferença entre curvaturas positivas e negativas, como uma esfera e um modelo de crochê hiperbólico (por exemplo, da professora Daina Taimina). Os alunos podem visualizar como as curvas e ondulações podem ser explicadas matematicamente.

### 4. As curvaturas e as formas da Natureza nos corais de crochê

Apresentar o projeto do Recife de corais e sua história, frisando a influência da professora Daina Taimina.

Explorar os modelos de corais hiperbólicos (Pseudoesfera, Disco de Poincaré, Bola de futebol Hiperbólica e Modelo dos Anéis).

Apresente os modelos de crochê desenvolvidos pela professora Daina Taimina.

Levar alguns modelos de corais para que os alunos possam manipular é essencial nessa etapa.

Explique como esses modelos representam visualmente características de uma geometria diferente da qual eles já conhecem (Geometria Euclidiana).

## 5. Introdução a Geometria Hiperbólica

Introduzir a Geometria Não Euclidiana - Geometria Hiperbólica com a sua história de forma que os alunos possam entender todo o processo e sejam imersos nessa descoberta. A introdução da geometria não euclidiana é uma jornada fascinante e instigante, que pode ser abordada de maneira a capturar o interesse dos alunos e permitir que eles entendam todo o processo histórico e conceitual.

Nessa etapa é importante usar recursos visuais, como slides, para que os alunos conheçam os personagens envolvidos.

Nessa mesma etapa pode-se apresentar os modelos utilizados em Geometria Hiperbólica e alguns dos resultados e definições de Geometria Hiperbólica Plana.

## 6. Encerramento e Discussão

- **Reflexão final:** Pergunte aos alunos o que aprenderam sobre a Geometria hiperbólica e como isso pode ser aplicado para entender as formas naturais. Discuta como a geometria pode ser observada em muitos aspectos do mundo natural.
- **Pergunta para reflexão:** Como o estudo da curvatura pode nos ajudar a entender melhor os organismos naturais, como corais e plantas, que vimos hoje?

## 7. Avaliação

A avaliação pode ser feita durante a discussão e apresentação dos grupos, observando se os alunos conseguiram identificar corretamente as características geométricas nas formas naturais e compreender a relação entre essas formas e a curvatura.

## 8.2 Proposta de Oficina: “Entre Laços e Curvas: Geometria Hiperbólica, Crochê e as Formas da Natureza”

**Objetivo da Oficina:** Oferecer uma experiência prática e imersiva para aprender sobre a geometria hiperbólica, suas propriedades e aplicações na natureza. Estimular a criatividade e o pensamento interdisciplinar, conectando a matemática, a biologia e a arte, por meio da criação de modelos e da observação de formas naturais que seguem padrões geométricos hiperbólicos.

**Público-alvo:** Estudantes do Ensino Médio, professores ou interessados em geometria, biologia e arte.

**Duração:** 3 horas (ou conforme a disponibilidade do público).

**Materiais Necessários:**

- Modelos impressos ou imagens dos modelos de crochê da professora Daina Taimina.
- Linha de crochê, tesouras e agulhas.

### 1. Boas-vindas e Introdução ao Tema

Breve introdução ao conceito de geometria hiperbólica (história e modelos de planos hiperbólicos). Explique a curvatura negativa de forma acessível e como ela aparece no plano hiperbólico. Pergunte aos participantes se já ouviram falar de geometria não-euclidiana e se conseguem identificar padrões geométricos em formas da natureza.

### 2. Conexão com a Natureza: Exemplos de Corais e Outras Formas Naturais

Nessa etapa, o objetivo é explorar a geometria hiperbólica nas formas naturais, discutindo corais, lesmas marinhas, plantas e flores que exibem características dessa geometria. Apresente imagens ou vídeos sobre organismos naturais que apresentam padrões geométricos relacionados à geometria hiperbólica. Explique como esses padrões podem ser entendidos por meio da matemática. Pergunte aos participantes sobre suas observações e percepções sobre como a geometria pode ser vista no mundo natural. Incentive-os a refletirem sobre outros exemplos que podem conhecer.

### 3. Oficina Prática: Criando Modelos Hiperbólicos

Nesse momento, o objetivo é permitir que os participantes experimentem criar seus

próprios modelos de geometria hiperbólica, usando o crochê ou outro material de modelagem simples. Explique como a professora Daina Taimina usa o crochê para representar modelos geométricos complexos. Os participantes poderão aprender a fazer modelos simples que representem curvaturas hiperbólicas (no próximo capítulo apresentamos alguns modelos e o passo a passo para construí-los). Forneça linhas coloridas, agulhas e instruções básicas para que eles criem pequenas amostras de crochê que se assemelham a formas hiperbólicas. Dê espaço para que os participantes experimentem e explorem os próprios modelos, ajudando-os conforme necessário.

#### 4. **Discussão e Exposição dos Modelos Criados**

Permita que os participantes compartilhem suas criações e discutam o processo de elaboração dos modelos, refletindo sobre como a geometria hiperbólica pode ser aplicada a diferentes áreas, incluindo a matemática, biologia e arte.

**Atividade de Exposição:** Organize os modelos criados pelos participantes em uma área de exposição. Cada grupo ou participante pode explicar o que criou, qual a relação com a geometria hiperbólica e como a natureza inspirou seus modelos.

**Discussão Final:** Incentive uma conversa sobre as conexões feitas durante a oficina, abordando questões como a interdisciplinaridade, como a geometria é observada na natureza e a utilidade desses modelos na educação e na compreensão da matemática.

#### 5. **Encerramento e Reflexões Finais**

Faça perguntas para os participantes refletirem sobre o que aprenderam durante a oficina e como a geometria pode ser aplicada em outras áreas do conhecimento.

### 8.2.1 Modelos de Corais Hiperbólicos de Crochê

Nesta seção, vamos apresentar alguns modelos de plano hiperbólico que se assemelham a corais e o passo a passo para sua construção. Todas as informações foram retiradas do *Institute For Figuring* [19].

#### Modelo 1: Plano Hiperbólico

Figura 82: Modelo 1: Plano Hiperbólico



Fonte: *Institute For Figuring*

**PASSO 1:** Para fazer um plano hiperbólico básico de crochê, comece com uma linha de pontos corrente. Recomendamos 15 ou 20 pontos para sua primeira tentativa.

**PASSO 2:** Após a linha de correntes, comece a primeira carreira fazendo crochê em 5 pontos, depois aumente no sexto ponto. (Você pode usar ponto baixo, meio ponto alto ou ponto alto, conforme preferir.) Continue repetindo este padrão: faça 5 pontos altos, aumente 1; faça 5 pontos altos, aumente 1, seguindo assim até o final da carreira.

**PASSO 3:** Vire e repita o padrão na próxima carreira e em todas as carreiras subsequentes.

## Modelo 2: Plano Hiperbólico Mais Crescido

Em nosso primeiro modelo, a taxa de aumento é de 1 em cada 5 pontos. Para fazer um modelo mais franzido, aumente mais rapidamente. Em nosso próximo modelo, a taxa de aumento é de 1 em cada 4 pontos.

Figura 83: Modelo 2: Plano Hiperbólico Mais Crescido



Fonte: *Institute For Figuring*

**PASSO 1:** Comece com uma linha de pontos corrente.

**PASSO 2:** Após a linha de correntes, comece a primeira carreira fazendo 3 pontos altos e aumentando no quarto ponto. Continue repetindo o padrão: faça 3 pontos altos, aumente 1; faça 3 pontos altos, aumente 1.

### Modelo 3: Pseudoesfera

Neste modelo, você faz crochê hiperbólico em volta de um círculo.

Figura 84: Modelo 3: Pseudoesfera



Fonte: *Institute For Figuring*

**PASSO 1:** Comece com uma linha de correntes.

**PASSO 2:** Após uma dúzia de pontos, você precisa transformar a linha em um círculo. Para fazer isso, faça 3 pontos de crochê na última corrente e então junte esse grupo de pontos em um pequeno cone.

**PASSO 3:** Comece a fazer crochê ao redor da borda do cone, aumentando em uma taxa regular. Aqui a taxa de aumento é de 1 em cada 3 pontos.

#### Modelo 4: Outra Pseudoesfera

Figura 85: Modelo 4: Outra Pseudoesfera



Fonte: *Institute For Figuring*

Aqui a taxa de aumento é de 1 em cada 2 pontos, então o modelo franze mais rápido. Se você aumentar em uma taxa regular, sempre alcançará uma forma matematicamente perfeita. Esta forma é o equivalente hiperbólico de um cone; sua ponta se estende até o infinito. Não é necessário fazer uma pseudoesfera perfeita se você quiser fazer corais de crochê.

**PASSO 1:** Faça crochê em 4 correntinhas.

**PASSO 2:** Junte as correntinhas em um círculo.

**PASSO 3:** Comece a fazer crochê em volta do círculo, aumentando em uma taxa regular aumentando um ponto em cada ponto.

### Modelo 5: Plano Hiperbólico Duplo

Aqui você faz crochê hiperbólico em ambos os lados de uma linha, trabalhando em um padrão de “pista de corrida”.

Figura 86: Modelo 5: Plano Hiperbólico Duplo



Fonte: *Institute For Figuring*

**PASSO 1:** Comece com uma linha de correntes.

**PASSO 2:** Faça crochê ao longo de um lado da corrente, aumentando em uma taxa regular. (Neste modelo, aumenta-se 1 em cada 2 pontos.)

**PASSO 3:** No final da carreira, aumente 5 pontos na última corrente, depois vire e volte ao longo do outro lado, continuando a aumentar na mesma taxa.

**PASSO 4:** Continue o crochê hiperbólico ao redor da borda da pista de corrida em todas as carreiras seguintes. Esta forma, semelhante a uma alga marinha, é, na verdade, dois planos hiperbólicos unidos.

## Modelo 6: Coral Hiperbólico

Figura 87: Modelo 6: Coral Hiperbólico



Fonte: *Institute For Figuring*

**PASSO 1:** Para obter esta forma bonita, comece com uma linha de 15 correntinhas.

**PASSO 2:** Na primeira carreira, faça crochê em volta da corrente em ambos os lados, aumentando em cada ponto.

**PASSO 3:** Na segunda carreira, aumente em 2 de 3 pontos.

**PASSO 4:** Na terceira carreira, aumente em cada segundo ponto.

**PASSO 5:** Na quarta carreira, aumente em cada terceiro ponto. E assim por diante.

Vale lembrar que organismos vivos são sempre irregulares. Para obter corais com a aparência natural, tente variar a taxa de aumento dentro do modelo.

## 9 Considerações Finais

Ao longo desta pesquisa, buscamos estudar a construção histórica da geometria hiperbólica e suas diversas representações, cujo objetivo principal está em pontuar as semelhanças dessa geometria com elementos da natureza, como as formas encontradas em plantas e corais, bem como os benefícios dessas características para a vida desses organismos.

Um ponto central do nosso estudo foi a forma como a professora Daina Taimina utilizou o crochê para representar o plano hiperbólico, oferecendo uma maneira única de visualizar conceitos matemáticos abstratos. Esse modelo físico tem um grande valor pedagógico, pois transforma a geometria hiperbólica, algo que, à primeira vista, pode parecer aos alunos distante e difícil de compreender, pela dificuldade de visualização, em algo concreto e acessível.

Ao observarmos as formas geométricas presentes na natureza, como as que encontramos em várias espécies nos corais, percebemos que a geometria hiperbólica não é apenas uma abstração matemática, mas algo que se manifesta no mundo ao nosso redor e que essa manifestação é essencial para esses corais realizarem a captura e absorção de nutrientes necessários. Para as lesmas marinhas essa estrutura corporal, com características do plano hiperbólico, contribui para a locomoção. Essa conexão entre teoria matemática e observações naturais torna mais tangível, enriquece entendimento, traz significado e torna a matemática mais atraente aos olhos dos estudantes. Quando vemos esses padrões em corais, por exemplo, conseguimos compreender de forma mais profunda como a geometria hiperbólica funciona, não apenas nos livros, mas no mundo real.

A representação do plano hiperbólico através do crochê é um excelente exemplo de como podemos usar modelos físicos para ajudar na visualização de conceitos abstratos. O crochê de Taimina permite que os alunos toquem e explorem fisicamente a geometria.

A inclusão da geometria hiperbólica no currículo escolar, como aparece no Referencial Curricular do Paraná, justifica ainda mais a necessidade de se explorar essa área do conhecimento com os estudantes.

Esperamos que este estudo contribua para a valorização das Geometrias Não Euclidianas na Educação Básica, em especial a Geometria Hiperbólica, e não somente no

ensino, mas na apreciação de suas conexões com o mundo natural. E que, por meio de modelos físicos como o crochê, os alunos e educadores possam explorar e entender a beleza e a aplicabilidade dessa área da matemática de uma maneira mais acessível e criativa. Salientamos ainda, que desejamos que nosso trabalho possa servir de material didático para aulas de Geometria Hiperbólica.

## Referências

- [1] AGUSTINI, Edson. *Introdução à geometria hiperbólica plana*. Uberlândia: FAMAT UFU; CEAD UFU, 2022. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/25207>>. Acesso em: 18 jan. 2025.
- [2] LUSWETI, Agnes; WABUELE, Emily; SSEGAWA, Paul; MAUREMOOTOO, John. *Título do Trabalho ou Artigo*. National Museums of Kenya, Makerere University, BioNET-INTERNATIONAL Secretariat - UK. Ano de publicação.
- [3] ALMEIDA, Maria Judite; NOBRE, Alexandra; MACIEL, Marina; FORJAZ, Antônia; AGUIAR, Cristina Almeida. *Stitch by stitch the science fills the space*. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, v. 55, p. 935-944, 2012. Elsevier.
- [4] ARCARI, Inédio. *Um Texto de Geometria Hiperbólica*. 2008. Disponível em: <[http://www.im.ufrj.br/~gelfert/cursos/2017-1-GeoNEuc/N\\_ArcariInedio.pdf](http://www.im.ufrj.br/~gelfert/cursos/2017-1-GeoNEuc/N_ArcariInedio.pdf)>. Acesso em: 18 jan. 2025.
- [5] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2017. Disponível em: <<http://www.mec.gov.br/>>. Acesso em: 18 jan. 2025.
- [6] BRAZ, Fernanda Martins. *História da Geometria Hiperbólica*. UFMG, 2009.
- [7] CAVALCANTE, Arnóbio de Mendonça Barreto; DE VASCONCELOS, Gabriella Carla Leite. *Comércio legal de cactos ornamentais: oportunidade para uso sustentável no semiárido do Brasil*. *Revista Econômica do Nordeste*, v. 47, n. 1, p. 9-20, 2016.
- [8] CESAD UFS. *Morfologia Interna e Externa dos Vegetais*. Disponível em: <[https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalogo/18060316022012Morfologia\\_Interna\\_e\\_E](https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalogo/18060316022012Morfologia_Interna_e_E)>. Acesso em: 18 jan. 2025.
- [9] CITRUS REEF. *Types of Coral Reef Species*. Disponível em: <[https://www.citrusreef.com/blogs/news/types-of-coral-reef-species?srsIid=AfmBOopCEl1Vb1XWinHyjSkRtu42\\_Z1SzJmOOaofleW7XZogO3uaiRsT](https://www.citrusreef.com/blogs/news/types-of-coral-reef-species?srsIid=AfmBOopCEl1Vb1XWinHyjSkRtu42_Z1SzJmOOaofleW7XZogO3uaiRsT)>. Acesso em: 18 nov. 2024.
- [10] STAFF OF THE CORAL REEF ALLIANCE (CORAL). *Introduction to Coral Reef Ecosystems, Threats, and Solutions*. Coral Reef Alliance, 2003.

- [11] PORTO, Anderson. "Crista de Galo (Celósia Cristata)." *Tudo Sobre Plantas*, 23 dez. 2013. Disponível em: <<https://tudosobreplantas.wordpress.com/tag/crista-de-galo/>>. Acesso em: 19 jan. 2025.
- [12] EUCLIDES. *Os elementos de Euclides*. Editora Unesp, 2009.
- [13] FERREIRA FILHO, José Roberto. *Geometria fractal: da natureza para a sala de aula*. 2015. Universidade Federal de Sergipe.
- [14] FIOLEAIS, Carlos. *O estranho mundo dos fractais*. Futuro: ciência, novas tecnologias, gestão, n. 24-25, p. 20-23, 1989. Acácio Gomes.
- [15] FIRMO, Céio da Silveira. *Estruturas tubulares enrijecidas por superfícies de dupla curvaturas (hiperbólicas)*. 2003.
- [16] HENDERSON, David W.; TAIMINA, Daina. Crocheting the hyperbolic plane. *Mathematical Intelligencer*, v. 23, n. 2, p. 17-27, 2001. Springer-Verlag.
- [17] HENDERSON, David W.; TAIMINA, Daina. *Experiencing geometry*. Em: Euclidean and non-Euclidean with history. New York: Cornell University, 2005.
- [18] HENDERSON, Daina T. *Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes: Tactile Mathematics, Art and Craft for All to Explore, Second Edition*. 2. ed. CRC Press, 2018. ISBN 978-1138301153.
- [19] INSTITUTE FOR FIGURE. Disponível em: <<https://www.theiff.org/>>. Acesso em: 8 mar. 2025.
- [20] KEW SCIENCE. *Taxon: urn:lsid:ipni.org:names:345491-1*. Disponível em: <<https://powo.science.kew.org/taxon/urn:lsid:ipni.org:names:345491-1>>. Acesso em: 11 jan. 2025.
- [21] KEW SCIENCE. (s.d.). *Taxon: 535953-1*. Plants of the World Online. Recuperado de <<https://powo.science.kew.org/taxon/urn:lsid:ipni.org/names:535953-1#higherclassification>>.
- [22] HENDERSON, Daina T. *Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes: Tactile Mathematics, Art and Craft for All to Explore, Second Edition*. 2. ed. CRC Press, 2018. ISBN 978-1138301153.

- [23] MAESTRO VIRTUALE. *Gastrópodes: Características, Reprodução e Alimentação*. Disponível em: <<https://maestrovirtuale.com/gastropodes-caracteristicas-reproducao-e-alimentacao/>>. Acesso em: 20 dez. 2024.
- [24] MONTEIRO, P. R. *Da semente se faz a árvore – Reprodução por semente de árvores e arbustos autóctones*. Cadernos Quercus, v. 06, p. 86, 2010. Castelo Branco.
- [25] NOUMEDEM, JAK; DJEUSSI, DE; HRITCU, L; MIHASAN, M; KUETE, V. *Lactuca sativa*. Em: Medicinal spices and vegetables from Africa. Elsevier, 2017. p. 437-449.
- [26] NUDIBRANCH DOMAIN. *Ardeadoris symmetrica*. Disponível em: <<https://nudibranchdomain.org/product/ardeadoris-symmetrica/>>. Acesso em: 10 jan. 2025.
- [27] PAUL, William. *William P. Thurston, 1946–2012. Notices of the AMS*, v. 62, n. 11, 2015.
- [28] PARANÁ. *Referencial Curricular para o Novo Ensino Médio*. 2020. Disponível em: <<https://www.educacao.pr.gov.br/>>. Acesso em: 18 jan. 2025.
- [29] "Filo Platyhelminthes." *Só Biologia*. Virtuoso Tecnologia da Informação, 2008-2025. Consultado em: 19 out. 2025, às 15:42. Disponível em: <<https://www.sobiologia.com.br/conteudos/Reinos2/bioplattelmintos.php>>.
- [30] PROLOsčić, Valentina. *Models of Hyperbolic Geometry*. Tese de doutorado, Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics, 2021. Disponível em: <<http://www.mathos.hr/>>.
- [31] REVISTA JARDINS. *Encanto do Azevinho*. Disponível em: <<https://revistajardins.pt/encanto-do-azevinho/>>. Acesso em: 18 jan. 2025.
- [32] ROBERTS, Siobhan. *The Crochet Coral Reef Keeps Spawning, Hyperbolically*. *The New York Times*, 15 jan. 2024, atualizado em 16 jan. 2024. Disponível em: <<https://www.nytimes.com/2024/01/15/science/mathematics-crochet-coral.html>>.
- [33] SALIN, Eliana Bevilacqua. *Geometria Espacial: A aprendizagem através da construção de sólidos geométricos e da resolução de problemas*. Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 6, p. 35-43, 2013.

- [34] SAMPAIO, Cássia F.; SILVA, Amanda G. da. *Uma introdução à biomatemática: a importância da transdisciplinaridade entre biologia e matemática*. Anais... VI Colóquio: Educação e Contemporaneidade, São Cristóvão-SE, Brasil, 2012.
- [35] SAMUCO, José Maria Eduardo et al. *A gênese da geometria hiperbólica*. Porto: Universidade do Porto, Faculdade de Ciências, Departamento de..., 2005.
- [36] SEA SLUG FORUM. *Glosatro*. Disponível em: <http://www.seaslugforum.net/find/glosatro>. Acesso em: 25 nov. 2024.
- [37] SEA SLUG FORUM. *Gloscrue*. Disponível em: <http://www.seaslugforum.net/find/gloscrue>. Acesso em: 18 out. 2024.
- [38] SILVA, Alessandra Querino; SILVA, Aline Regina; CALFA, Ana Regina; RODRIGUES, Rodrigo Soares; ALVES, Rosana. *Matemática como Instrumento de Ensino e Aprendizagem da Matemática (TA)*. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011.
- [39] WERTHEIM, Christine; WERTHEIM, Margaret. *Hyperbolic Crochet Coral Reef Project*. 2005. Projeto de arte matemática sobre corais hiperbólicos. Disponível em: <http://www.hyperboliccrochetcoralreef.org/>.
- [40] WERTHEIM, Margaret; WERTHEIM, Christine. *Crochet Coral Reef: Toxic Seas*. Disponível em: <https://madmuseum.org/press/releases/crochet-coral-reef-toxic-seas-margaret-and-christine-wertheim-and-institute-figuring>. Acesso em: 18 jan. 2025.
- [41] WIKIPEDIA. *Ardeadoris cruenta*. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Ardeadoris\\_cruenta](https://en.wikipedia.org/wiki/Ardeadoris_cruenta). Acesso em: 20 jan. 2025.
- [42] WIKIPEDIA. *Gastropoda*. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Gastropoda>. Acesso em: 18 jan. 2025.
- [43] WIKIPEDIA. *Gastropoda*. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Gastropoda>. Acesso em: 18 jan. 2025.