Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Faculdade de Formação de Professores
Unidade São Gonçalo

Robson dos Santos Praxede

Aritmética Modular e Educação Matemática: Uma Proposta Didática a Partir do Design Residual

Rio de Janeiro
2025

Robson dos Santos Praxede

Aritmética Modular e Educação Matemática: Uma Proposta Didática a Partir do Design Residual

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Adriana Juzga León

Rio de Janeiro

2025

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

D979 dos Santos Praxede, Robson
Aritmética Modular e Educação Matemática: Uma Proposta Didática a Partir do Design Residual / Robson dos Santos Praxede. – Rio de Janeiro, 2025-
160 f.

Orientador: Prof. Dra. Adriana Juzga León
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Unidade, Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores, 2025.

1. Algoritmo da divisão.. 2. Congruência modular.. 3. Polígono estrelado.. I. Prof. Dra. Adriana Juzga León. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Unidade. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Assinatura Data

Robson dos Santos Praxede

Aritmética Modular e Educação Matemática: Uma Proposta Didática a Partir do Design Residual

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 27 de novembro de 2025.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
ADRIANA JUZGA LEON
Data: 27/11/2025 20:00:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Dra. Adriana Juzga León (Orientadora)
Faculdade de Formacão de Professores – UERJ

Documento assinado digitalmente
ALIRIO GOMEZ GOMEZ
Data: 27/11/2025 20:15:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alirio Gómez Gómez
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Documento assinado digitalmente
DAFNE CAMPOS LIMA BESSADES PEREIRA
Data: 27/11/2025 20:36:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Dra. Dafne Campos Lima Bessades Pereira
Universidade Federal de Juiz de Fora

831873d1-2820-4bdf-bed8-2ed2f1dee34b
Assinado digitalmente por 831873d1-2820-4bdf-bed8-2ed2f1dee34b
ND: CN=831873d1-2820-4bdf-bed8-2ed2f1dee34b
Razão: Fábio Silva de Souza
Localização:
Data: 2025.11.28 18:14:10-03'00'
Foxit PDF Reader Versão: 2025.2.1

Prof. Dr. Fabio Silva de Souza
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Documento assinado digitalmente
LEOMAQUES FRANCISCO SILVA BERNARDO
Data: 28/11/2025 14:29:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo
Universidade Federal de Campina Grande

Documento assinado digitalmente
MARIA LUIZA OLIVEIRA SANTOS
Data: 28/11/2025 14:36:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Maria Luiza Oliveira Santos
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro
2025

DEDICATÓRIA

Minha esposa, Rafaela, que foi meu alicerce e incentivadora para o meu crescimento profissional.

AGRADECIMENTOS

A minha gratidão, em primeiro lugar, é ao meu Deus, Criador de todas as coisas, que com Suas mãos mede os céus a palmos e se assenta sobre a redondeza da terra. A Ele, que é a fonte de toda sabedoria e poder, rendo honra e louvor.

À minha amada esposa, Rafaela Praxede, que com amor me deu todo o apoio necessário para continuar e compreender o propósito do mestrado em minha vida. Esta formação tem grande mérito dela.

À minha família, que muitas vezes precisou compreender minhas ausências para que eu pudesse me dedicar aos estudos.

À Profª. Dra. Adriana Juzga León, que transformou minha mentalidade em muitos aspectos relacionados ao tema da pesquisa. Sua orientação, experiências e dedicação foram fundamentais para minha formação, sendo uma professora exemplar e comprometida.

Agradeço também a todos os professores que fazem parte do PROFMAT da Faculdade de Formação de Professores - FFP, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, pela valiosa contribuição em meu aprendizado.

Aos colegas de turma, que junto comigo enfrentaram desafios e venceram mais esta etapa.

Não poderia também deixar de agradecer ao meu amigo, professor Veriano Catinin, em quem me espelho desde a minha formação na graduação. Ele me preparou para o Exame Nacional de Admissão (ENA) e o Exame Nacional de Qualificação (ENQ), sempre me oferecendo suporte, ânimo e palavras motivadoras ao longo desta jornada até a conclusão.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”

– *Carl Friedrich Gauss*

RESUMO

DOS SANTOS PRAXEDE, R.S.P. *Aritmética Modular e Educação Matemática: Uma Proposta Didática a Partir do Design Residual.* 2025. 160 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores) – Unidade São Gonçalo, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2025.

Este trabalho apresenta uma proposta didática de ensino que aproxima a aritmética modular da prática geométrica, com uma abordagem motivadora que busca tornar o aprendizado mais dinâmico e estimulante, incentivando a compreensão e a exploração de construções geométricas, como polígonos estrelados, mandalas e designs de resíduos, com atenção à sua estrutura e características. O trabalho também aborda aspectos históricos e teóricos relacionados à teoria dos números, introduzindo elementos essenciais, como relações, classes de equivalência, divisibilidade, o algoritmo da divisão, congruências e classes modulares, bem como demonstrações e teoremas que sustentam essas construções matemáticas, oferecendo a base necessária para o desenvolvimento das aplicações e construções propostas. Além disso, o GeoGebra também é utilizado como ferramenta para construir e visualizar essas figuras, permitindo uma análise prática e interativa.

Palavras-chave: Algoritmo da divisão. Congruência modular. Polígono estrelado. Design de resíduos.

ABSTRACT

DOS SANTOS PRAXEDE, R.S.P. *Modular Arithmetic and Mathematics Education: A Didactic Proposal Based on Residue Design.* 2025. 160 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores) – Unidade São Gonçalo, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2025.

This final project presents a didactic teaching proposal that connects modular arithmetic with geometric practice through a motivating approach aimed at making learning more dynamic and engaging. It encourages the understanding and exploration of geometric constructions such as stars polygons, mandalas, and residue designs, focusing on their structures and characteristics. The research also addresses historical and theoretical aspects related to number theory, introducing essential concepts such as relations, equivalence classes, divisibility, the division algorithm, congruences, and modular classes. Additionally, it presents demonstrations and theorems that support these mathematical constructions, providing the necessary foundation for the development of the proposed applications and activities. Moreover, GeoGebra is employed as a tool for constructing and visualizing these figures, enabling practical and interactive analysis.

Keywords: Division algorithm. Modular congruence. Star polygon. Residue design.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Aritmética Modular ocupa um lugar especial dentro da Teoria dos Números, sendo um dos temas mais expressivos e significativos da Matemática. Desde os estudos de Carl Friedrich Gauss, no início do século XIX, esse campo tem se mostrado essencial para compreender fenômenos numéricos que envolvem periodicidade e simetria. Embora seja amplamente reconhecida por suas aplicações em diversas áreas, como criptografia, computação e teoria da informação, sua presença no ensino básico ainda é limitada e, muitas vezes, tratada de maneira abstrata, sem conexões com o que o aluno vivencia ou pode visualizar concretamente.

Diante dessa realidade, este trabalho propõe uma abordagem didática que busca aproximar a Aritmética Modular da prática geométrica, promovendo uma aprendizagem mais visual, interativa e significativa. A ideia é articular conceitos aritméticos com construções geométricas, explorando figuras como polígonos estrelados, mandalas e designs de resíduos, que surgem naturalmente das relações entre números inteiros e módulos. Essa proposta desperta o interesse do estudante e incentiva uma percepção mais ampla da Matemática, compreendida também como forma de arte, em que número, simetria e beleza se unem em expressão visual e criativa.

A motivação para desenvolver esta pesquisa vem da necessidade de repensar o modo como conteúdos matemáticos mais abstratos são apresentados em sala de aula. A partir da observação da prática docente, percebe-se que muitos alunos têm dificuldade em compreender conceitos como divisibilidade, resto e congruência, justamente por não encontrarem neles um sentido visual ou prático. Ao unir a aritmética à geometria, pretende-se oferecer uma nova perspectiva de ensino, na qual o estudante possa construir, experimentar e interpretar padrões por meio de imagens e simetrias. O uso do GeoGebra é parte essencial desse processo, pois possibilita representar e explorar dinamicamente as relações modulares.

Além do aspecto visual e motivador, esta pesquisa também se fundamenta na ideia de que o ensino da Matemática deve estimular o pensamento investigativo. O aluno, ao construir uma figura modular, não apenas observa um resultado artístico, mas é levado a formular perguntas, identificar regularidades e compreender propriedades numéricas por trás daquilo que vê. Assim, o conteúdo deixa de ser apenas uma aplicação mecânica de regras e passa a ter um caráter exploratório e reflexivo, que valoriza a compreensão conceitual.

Partindo dessas considerações, o problema que orienta este estudo pode ser apresentado pela seguinte pergunta: Como a utilização de construções geométricas baseadas na Aritmética Modular, com apoio do software GeoGebra, pode contribuir para tornar o ensino desse conteúdo mais visual, dinâmico e significativo no contexto da Educação Matemática?

O objetivo principal é propor e analisar uma abordagem didática para o ensino da Aritmética Modular que integre construções geométricas e o uso do GeoGebra, favorecendo a compreensão conceitual e o interesse dos estudantes pela Matemática. Para alcançar esse propósito, revisam-se os fundamentos teóricos da Aritmética Modular ; investiga-se o potencial da visualização geométrica como recurso pedagógico; desenvolvem-se atividades exploratórias com o GeoGebra; e analisam-se as contribuições da proposta a partir de sua aplicação em contextos de ensino.

A pesquisa, de natureza qualitativa e caráter exploratório, foi organizada em duas etapas complementares. A primeira correspondeu a um estudo bibliográfico da história da teoria de números e, da teoria referente à Aritmética Modular. A segunda etapa envolveu a elaboração e aplicação da proposta didática baseada no design residual, utilizando o GeoGebra para a construção de figuras geométricas associadas às congruências modulares. As atividades foram desenvolvidas com alunos do Ensino Médio e licenciandos em Matemática, e a análise dos resultados considerou as observações realizadas pelo autor ao aplicar as atividades propostas e as respostas aos questionários aplicados após as oficinas.

O texto está organizado de forma a conduzir o leitor do contexto teórico à aplicação prática da proposta. No primeiro capítulo, apresenta-se um panorama histórico da Teoria dos Números e do desenvolvimento das congruências modulares, destacando o percurso conceitual que vai desde os problemas de divisibilidade na Antiguidade até a formulação sistematizada de Gauss. Esse resgate histórico busca evidenciar o valor formativo e conceitual da Aritmética Modular.

O segundo capítulo discute as noções fundamentais de relações e classes de equivalência. São abordadas as principais propriedades das relações e sua importância no estudo de estruturas matemáticas de natureza diversa, fornecendo a base teórica necessária para a compreensão e estudo das congruências modulares.

No terceiro capítulo, são tratados os principais aspectos da aritmética dos números inteiros, com ênfase nos conceitos de divisibilidade, algoritmo da divisão, algoritmo de Euclides e propriedades das congruências. Além das demonstrações e exemplos, este capítulo estabelece o elo entre os fundamentos teóricos e a abordagem prática proposta posteriormente.

O quarto capítulo constitui o núcleo central da pesquisa e apresenta a proposta didática baseada no design residual, em consonância com as orientações da *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*, que valoriza o desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação e da capacidade de estabelecer conexões entre diferentes representações matemáticas. Nele são descritos o processo de elaboração das atividades, o uso do software GeoGebra e as etapas de aplicação com os estudantes. As análises realizadas buscam compreender como as construções geométricas contribuem para a aprendizagem dos conceitos de congruência e divisibilidade, e como a visualização pode tornar o estudo da Aritmética Modular mais envolvente e acessível.

Por último, os anexos reúnem os materiais utilizados nas oficinas, os registros produzidos pelos participantes e os instrumentos de coleta de dados. Esses documentos complementam o estudo e possibilitam que outros pesquisadores e professores possam reproduzir ou adaptar a proposta em diferentes contextos educacionais.

Assim, o trabalho busca contribuir para o ensino da Matemática ao propor uma forma de trabalhar a Aritmética Modular que valoriza a visualização, a criatividade e o pensamento investigativo. Mais do que apresentar um conteúdo, o objetivo é mostrar que aprender Matemática pode ser uma experiência viva, prazerosa e inspiradora, em que teoria e prática se unem na construção do conhecimento.

1 ORIGENS HISTÓRICAS DA TEORIA DOS NÚMEROS E DAS CONGRUÊNCIAS MODULARES

Neste capítulo, será apresentada uma breve descrição histórica da Teoria dos Números, com ênfase no desenvolvimento dos estudos sobre divisibilidade e congruências ao longo do tempo. Nosso objetivo é destacar o contexto em que essas ideias surgiram, as contribuições de diferentes matemáticos e as circunstâncias históricas que favoreceram seu avanço, evidenciando a importância desse campo para o progresso da Matemática e para suas inúmeras aplicações em diversas áreas. As definições e conceitos formais relacionados a esses temas serão abordados em capítulo posterior, de modo que aqui privilegiaremos a perspectiva histórica e o papel desses tópicos na evolução do pensamento matemático.

1.1 Origem da Teoria dos Números

A origem da Teoria dos Números remonta à Antiguidade, quando as primeiras civilizações já demonstravam interesse pelas propriedades e relações entre os números inteiros. Registros históricos indicam que egípcios e babilônios, por volta de 2000 a.C., utilizavam técnicas aritméticas avançadas para resolver problemas práticos, como partilhas, medições e cálculos astronômicos. Contudo, foi na Grécia Antiga que esses estudos adquiriram um caráter mais sistemático e teórico, especialmente a partir das contribuições da Escola Pitagórica, que via nos números a essência da harmonia e da ordem do universo, atribuindo-lhes também um significado filosófico. O princípio de Pitágoras (570–495 a.C.) era expresso na afirmação de que "o número é a essência das coisas". Os números naturais, as frações positivas e suas propriedades foram estudados de forma pioneira pelos pitagóricos em meados do século VI a.C., que dedicaram especial atenção às questões de divisibilidade, analisando com rigor os números pares e ímpares e desenvolvendo uma teoria sobre tais classes, posteriormente incorporada por Euclides em sua célebre obra *Os Elementos*.

Os pitagóricos também se interessaram pela relação entre um número e a soma de seus divisores. Se a soma de todos os divisores fosse maior que o próprio número, este era denominado *abundante*; se fosse menor, era chamado *deficiente*; e, se fosse exatamente igual, recebia o nome de *perfeito*. Introduziram ainda o conceito de *números amigáveis*, que consistem em pares de números nos quais a soma dos divisores de um deles corresponde exatamente ao outro, e vice-versa.

Na obra *Os Elementos*, escrita por Euclides de Alexandria por volta de 300 a.C., encontram-se treze volumes — denominados “Livros” — que reúnem, de forma sistemática, o conhecimento matemático acumulado até sua época. O conteúdo é apresentado a partir de definições, postulados e axiomas, seguidos de proposições (teoremas), constituindo o mais antigo registro conhecido da aplicação do método axiomático que chegou até nós.

Figura 1 - Página de título da primeira versão em inglês dos
Elementos de Euclides, de Sir Henry Billingsley (1570).

Fonte: STANFORD, Charles Thomas. Página de título da primeira versão em inglês dos Elementos de Euclides. Wikimedia Commons, 1570.

Os Livros VII, VIII e IX de *Os Elementos* são dedicados à Teoria dos Números. Para os gregos da época, a palavra “número” designava o que hoje chamamos de número natural, e, nesses livros, cada número era representado por um segmento de reta. Assim, Euclides referia-se a um número como AB e não empregava as expressões “é múltiplo de” ou “é dividido por”, mas sim “é medido por” ou “mede”. O modelo concreto de número utilizado por Euclides consistia em um segmento de reta de comprimento igual ao valor numérico, tomando como unidade de medida um comprimento arbitrário u; por exemplo, o número 7 era representado como um segmento AB de comprimento $7u$.

Figura 2 - Modelo concreto do número de Euclides

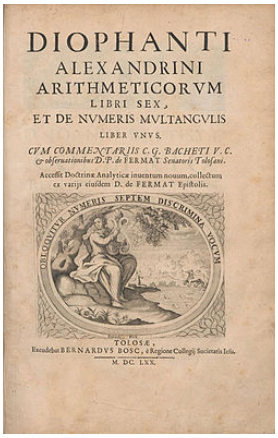
Fonte: Vidigal, (28, p.52)

Uma característica fundamental dos números inteiros é que um deles nem sempre divide exatamente o outro, e Euclides interessou-se particularmente pelo estudo dessa relação, desenvolvendo a teoria da divisibilidade. Nos Livros VII, VIII e IX de *Os Elementos*, encontram-se resultados sobre a aritmética dos inteiros que permanecem válidos e úteis até os dias atuais. Entre eles destaca-se o que hoje conhecemos como *Lema da Divisão de Euclides*, segundo o qual, dados dois números inteiros a e $b > 0$, é sempre possível expressar a na forma $a = bq + r$, onde q é o quociente e r é o resto, com $0 \leq r < b$. Esse resultado constitui a base para o desenvolvimento da aritmética modular, permitindo formalizar o conceito de congruências e conduzindo, entre outros desdobramentos, ao *Teorema Chinês do Resto.*

A divisão de um inteiro por um divisor positivo, ao produzir quociente e resto, estabelece uma relação entre quatro números — dividendo, divisor, quociente e resto — e o estudo dessas relações abre caminho para um dos ramos mais importantes da Teoria dos Números: a aritmética modular. Este campo tem aplicações práticas notáveis, como na determinação de endereços de memória em sistemas computacionais e nos processos de codificação e decodificação de mensagens.

Alguns séculos após Euclides, por volta de 250 d.C., o matemático grego Diofanto de Alexandria contribuiu de maneira significativa para a Teoria dos Números. Em sua obra *Arithmetica* ("Ciência dos Números"), composta originalmente por treze volumes, dos quais apenas seis sobreviveram, Diofanto concentrou-se na teoria algébrica dos números e no estudo de equações, hoje conhecidas como *diofantinas.* A coletânea reunia 130 problemas, cujas soluções exigiam técnicas engenhosas, muitas das quais permaneceram incompletas ou desconhecidas por séculos, especialmente no caso de equações diofantinas exponenciais. Considerado *o pai da álgebra*, Diofanto exerceu influência profunda sobre o pensamento matemático, inspirando avanços que se estenderiam por muitos séculos.

Figura 3 - Página de título da edição de 1670 de Arithmetica de Diofanto, traduzida por Claude-Gaspard Bachet e com comentários de Pierre de Fermat


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Fonte: SWETZ, Frank J. Mathematical Treasure: Bachet's Arithmetic of Diophantus. Mathematical Association of America, 2000.

1.2 A Teoria dos Números na Idade Média

Com o declínio do Império Romano e a transição para a Idade Média, parte significativa do conhecimento matemático grego correu o risco de se perder. No entanto, a tradição indiana e, sobretudo, o florescimento científico no mundo islâmico desempenharam papel decisivo na preservação, tradução e expansão dessas ideias. Na Índia, matemáticos como Aryabhata (476–550) e Brahmagupta (598–668) desenvolveram métodos algébricos e introduziram avanços notáveis, como o uso sistemático do zero e a consolidação da notação decimal posicional, elementos que transformariam profundamente os cálculos aritméticos. No período medieval, difundiu-se também o método de *riscar*, possivelmente de origem hindu, como forma mais utilizada de realizar divisões (Wall, 2014). Tal técnica consistia em sucessivas tentativas de encontrar múltiplos aproximados do divisor, riscá-los do dividendo e prosseguir com as parcelas restantes, até obter o quociente e o resto. Por exemplo, na operação $1987 \div 32$, a aplicação do método de riscar leva ao quociente 62 e ao resto 3, o que, na notação algébrica moderna, se expressa como $1987 = 62 \times 32 + 3$. De maneira equivalente, podemos reinterpretar o procedimento na base decimal, decompondo o dividendo como $1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 1$ e aproximando cada parcela com múltiplos adequados de 32, o que conduz ao mesmo resultado.

No mundo islâmico, estudiosos como Al-Khwarizmi (c. 780–850) e Al-Kindi (c. 801–873) traduziram para o árabe as obras de Euclides e Diofanto, incorporando-as a um corpo mais amplo de conhecimentos herdados também da tradição indiana. Al-Khwarizmi, em particular, teve papel central na disseminação do sistema de numeração hindu-arábico e no desenvolvimento de métodos algébricos que se tornariam referência na matemática medieval. Essa intensa atividade intelectual resultou em tratados originais que exploravam propriedades dos números inteiros, algoritmos de cálculo e ideias precursoras da aritmética modular.

A partir do século XII, com as traduções realizadas em centros como Toledo e Palermo, esses textos árabes chegaram à Europa medieval, reintroduzindo e enriquecendo o legado da Antiguidade clássica. Essa circulação de ideias não apenas preservou os fundamentos da Teoria dos Números, mas também preparou o terreno para o seu florescimento durante o Renascimento, quando nomes como Fermat, Euler e Gauss dariam início a uma nova era para esse campo da matemática.

1.3 A Teoria dos Números no século XIX

Com o advento do Renascimento e o fortalecimento do espírito científico na Europa, a Teoria dos Números começou a se consolidar como um campo de estudo autônomo. Entre os pioneiros desse movimento destaca-se Pierre de Fermat (1607–1665), magistrado e matemático francês que, inspirado pela leitura de *Arithmetica* de Diofanto, passou a investigar propriedades dos números inteiros e a formular enunciados ousados, muitos dos quais sem fornecer demonstrações completas. Entre suas contribuições notáveis estão o *Pequeno Teorema de Fermat*, que estabelece um importante critério para congruências envolvendo números primos, e o célebre *Último Teorema de Fermat*, que permaneceria sem demonstração rigorosa por mais de três séculos até ser provado por Andrew Wiles em 1994. Fermat também explorou ideias precursoras da teoria das probabilidades e incentivou a correspondência matemática como meio de circulação de descobertas, influenciando diretamente gerações posteriores de matemáticos. Sua obra marcou o início de um período fértil para a Teoria dos Números, que encontraria em Euler e Gauss alguns de seus maiores expoentes.

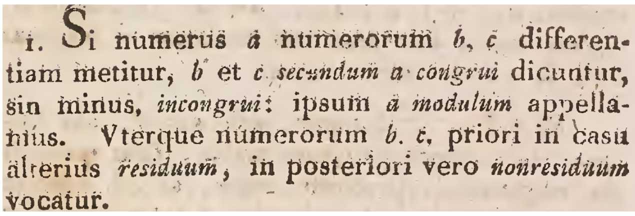
Leonhard Euler (1707–1783), matemático suíço, deu continuidade às ideias de Fermat e foi responsável por sistematizar e expandir significativamente a Teoria dos Números. Euler introduziu conceitos fundamentais, como a função totiente $\varphi(n)$, que associa a cada inteiro positivo n a quantidade de inteiros positivos menores do que n que são coprimos com n, estudou propriedades dos números primos e desenvolveu métodos avançados para resolver congruências e equações diofantinas. Seus trabalhos proporcionaram não apenas generalizações de resultados de Fermat, mas também estabeleceram ferramentas essenciais para o desenvolvimento da aritmética modular e da análise combinatória. Além disso, Euler foi pioneiro na exploração de séries infinitas e produtos envolvendo números primos, conectando a Teoria dos Números a outras áreas da matemática, como a álgebra e a análise. Seu legado consolidou a Teoria dos Números como um campo sistemático, rigoroso e fértil para investigações futuras, preparando o terreno para a obra monumental de Carl Friedrich Gauss no século XIX.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855), matemático alemão, consolidou a Teoria dos Números como disciplina rigorosa e sistemática em sua obra *Disquisitiones Arithmeticae* (1801). Nesse trabalho, Gauss introduziu a notação moderna para congruências e desenvolveu métodos gerais para o estudo das propriedades dos números inteiros, incluindo a teoria dos resíduos quadráticos, a distribuição de números primos e a solução de equações diofantinas. Ele estabeleceu princípios fundamentais da aritmética modular, proporcionando um formalismo claro e unificado, que até hoje serve de base para pesquisas em matemática pura e aplicada. A abordagem de Gauss combinava rigor lógico, generalidade e clareza de exposição, marcando uma ruptura com o estilo mais exploratório de seus predecessores e permitindo que a Teoria dos Números se tornasse um campo autônomo, coerente e central na matemática moderna.

Na passagem do século XVIII para o XIX, Gauss era amplamente considerado o "príncipe dos matemáticos" por seus contemporâneos. Para ele, a matemática representava elegância e harmonia, e a Teoria dos Números recebia especial atenção e estima. Gauss afirmava que "A Matemática é a rainha das ciências, e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática" (BURTON, 2016, p. 63). Em sua obra clássica *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), Gauss apresentou formalmente a definição de congruência, que se mostrou essencial para a Teoria dos Números e suas múltiplas aplicações. Tal definição permite a formalização da aritmética do relógio e a resolução de diversos problemas envolvendo periodicidade. A definição de congruência apresentada a seguir foi retirada da edição espanhola do livro de Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*:

Definição 1.3.1. *(16, p.7) Se um número a divide a diferença dos números b e c, dizemos que b e c são congruentes de acordo com o módulo a; se não forem, dizemos que são incongruentes; o número a é chamado de módulo. Ambos os números b e c, no primeiro caso, são chamados um resíduo do outro e, no segundo caso, não resíduos.*

Figura 4 - Definição original de congruência de Gauss, 1801



1. Si numerus *a* numerorum *b*, *c* differentiam metitur, *b* et *c secundum a congrui* dicuntur, sin minus, *incongrui*: ipsum *a modulum* appellamus. Vterque numerorum *b*, *c*, priori in casu alterius *residuum*, in posteriori vero *nonresiduum* vocatur.

Fonte: Disquisitiones Arithmeticae, 1801. p1. (15).

1.4 A Teoria dos Números na época moderna

Na época moderna, a Teoria dos Números consolidou-se como um campo central da matemática, caracterizado pela coexistência de pesquisa puramente teórica e de aplicações práticas relevantes. Entre as principais linhas de investigação destacam-se a *Teoria Analítica dos Números*, que utiliza ferramentas da análise matemática para estudar a distribuição dos números primos; a *Aritmética Modular*, que investiga propriedades de números inteiros em relação a restos de divisões; a teoria algébrica dos números e a geometria aritmética. Problemas clássicos, como a *Conjectura de Goldbach*, que propõe que todo número par maior que dois é a soma de dois primos, continuam a inspirar pesquisas profundas. A Teoria dos Números também se conecta com outras áreas da Matemática, como a *combinatória*, na contagem e estruturação de conjuntos numéricos, e a *teoria dos grafos*, na modelagem de relações entre números ou estruturas aritméticas. Paralelamente, a disciplina encontra aplicações diretas em criptografia, algoritmos de computação, codificação de informações e segurança digital, nas quais problemas de fatoração de números grandes e congruências desempenham papel fundamental.

O leitor interessado em aprofundar-se nos aspectos históricos da Teoria dos Números pode recorrer a diversas obras que abordam o desenvolvimento desta disciplina desde a Antiguidade até a era contemporânea. Para a Antiguidade e o período clássico, obras como A History of Mathematics de Carl B. Boyer (4) e Mathematics and Its History de John Stillwell (26) apresentam análises detalhadas sobre Euclides, os pitagóricos e Diofanto. Para a Idade Média, destacam-se estudos sobre a tradição matemática islâmica, como Mathematics in the Medieval Islamic World de J. L. Berggren (3), que explora as contribuições de Al-Khwarizmi e outros matemáticos árabes na preservação e expansão do conhecimento grego e indiano. Quanto à época moderna, obras como Number Theory: An Approach through History from Hammurapi to Legendre de André Weil (30) e The Higher Arithmetic de H. Davenport (8) contextualizam os avanços introduzidos por Fermat, Euler e Gauss, incluindo a consolidação da aritmética modular, o desenvolvimento da teoria algébrica dos números e a formulação de problemas clássicos, como a Conjectura de Goldbach. Essas leituras permitem ao leitor compreender não apenas os resultados matemáticos, mas também o contexto cultural, social e científico em que surgiram, oferecendo uma perspectiva completa e enriquecedora sobre a trajetória da Teoria dos Números.

2 PRELIMINARES CONCEITUAIS PARA O ESTUDO DAS CONGRUÊNCIAS: RELAÇÕES E CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Neste capítulo, serão apresentadas algumas definições fundamentais, essenciais para a correta compreensão desta dissertação e para o desenvolvimento dos estudos relacionados às congruências. Iniciaremos abordando o conceito de relação e suas principais propriedades, com especial ênfase nas relações de equivalência, cuja compreensão revela-se central para o estudo das congruências. Esse conceito permitirá interpretar as congruências não apenas como operações aritméticas sobre números inteiros, mas também como estruturas matemáticas com propriedades próprias, oferecendo um entendimento mais profundo e abstrato de sua natureza e aplicações.

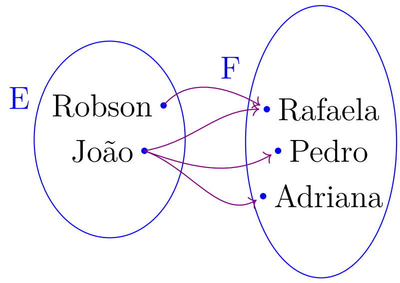
As referências base para todos os conceitos estudados neste capítulo são os livros de Domingues (9) , Rosen (23), Ayres (13) e Vidigal (28).

2.1 Relações

Iniciamos definindo, de maneira intuitiva, o conceito de relação como uma correspondência entre dois conjuntos não vazios. Para ilustrar essa ideia de forma concreta, considere o seguinte exemplo da relação “é professor de” entre dois conjuntos de indivíduos. Nesse caso, cada elemento de um conjunto pode estar relacionado a um ou mais elementos do outro conjunto, representando vínculos profissionais que ocorrem na vida cotidiana.

Exemplo 2.1.1. *Consideremos os conjuntos de indivíduos* $E = \{Robson, João\}$ *e* $F = \{Rafaela, Pedro, Adriana\}$*. Suponhamos que existam relações é professor de entre os elementos desses conjuntos, conforme indicado a seguir: Robson é professor de Rafaela; João é professor de Rafaela, Pedro e Adriana. Observe que, essa relação pode ser representada de maneira visual por meio do seguinte diagrama de flechas, no qual cada elemento de* E *é conectado por uma seta aos elementos de* F *com os quais mantém a relação é professor.*

Figura 5 - Exemplo intuitivo de relação



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Observe que a afirmação "Robson é professor de Rafaela" pode ser representada de maneira equivalente como a dupla ordenada (Robson, Rafaela). Seguindo essa ideia, é possível descrever toda a relação é professor de no exemplo anterior por meio do conjunto de pares ordenados:

$$R = \{(Robson, Rafaela), (João, Rafaela), (João, Pedro), (João, Adriana)\}.$$

Essa representação permite tratar a relação de um outro jeito, tornando explícito quais elementos de um conjunto estão relacionados a quais elementos do outro, e servirá como base para a definição formal do conceito de relação.

Antes de apresentarmos a definição formal de relação, é importante relembrar o conceito de produto cartesiano entre dois conjuntos.

Definição 2.1.1 (Produto cartesiano)**.** *Sejam E e F dois conjuntos não vazios. O **produto cartesiano de** E **por** F é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), com $x \in E$ e $y \in F$. Denotamos este produto cartesiano por $E \times F$, ou seja,*

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ e } y \in F\}.$$

Além disso, dois pares ordenados (x, y) e (u, v) são iguais, $(x, y) = (u, v)$, se, e somente se, $x = u$ e $y = v$.

Definição 2.1.2 (Relação binária)**.** *Uma **relação binária** R (ou simplesmente, relação) entre os conjuntos E e F é um subconjunto do produto cartesiano $E \times F$, ou seja,*

$$R \subseteq E \times F.$$

*Dizemos também que R **é uma relação de** E **sobre** F. Quando $E = F$, dizemos que R é uma relação definida sobre E.*

A notação $a\,R\,b$ ("a relaciona-se com b segundo R") indica que $(a, b) \in R$. Caso $(a, b) \notin R$, escrevemos $a \not R\, b$.

A seguir, apresentamos alguns exemplos que nos permitem esclarecer esse conceito.

Exemplo 2.1.2. *Sejam os conjuntos* $E = \{0, 1, 2, 3\}$ *e* $F = \{4, 5, 6\}$*. O produto cartesiano* $E \times F$ *está dado por*

$$E \times F = \{(0,4),(0,5),(0,6),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}.$$

Observe que, uma relação de E *em* F *é um subconjunto do produto cartesiano* $E \times F$*. Os seguintes são alguns exemplos de relações de* E *em* F*:*

i) $R_1 = \{(0,4),(0,5),(0,6)\}$*;*

ii) $R_2 = \{(0,4),(1,4),(1,5),(2,6)\}$*;*

iii) $R_3 = \{(2,5),(3,6)\}$.

Exemplo 2.1.3. *Considere os conjuntos* $A = \{0, 1, 2\}$ *e* $B = \{1, 2, 3\}$*, cujo produto cartesiano é*

$$A \times B = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}.$$

Esse produto reúne todos os pares ordenados possíveis entre os elementos de A *e* B*.*

Definimos a relação

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y \text{ é par}\}.$$

Analisando os pares, observamos que apenas aqueles cuja soma é par pertencem à relação:

$$R = \{\cancel{(0,1)},(0,2),\cancel{(0,3)},(1,1),\cancel{(1,2)},(1,3),\cancel{(2,1)},(2,2),\cancel{(2,3)}\}.$$

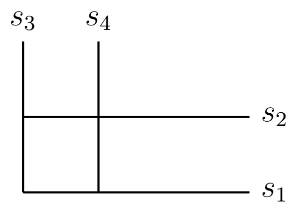
Portanto, os elementos que satisfazem a relação são:

$$(0,2),(1,1),(1,3) \text{ e } (2,2), \text{ isto é, } R = \{(0,2),(1,1),(1,3),(2,2)\}.$$

As relações podem surgir em diferentes contextos e áreas da Matemática, assumindo significados e aplicações variadas. Elas aparecem, por exemplo, em situações que envolvem comparação, correspondência, ordem ou equivalência entre elementos de um conjunto. No exemplo a seguir, apresentamos uma relação de caráter geométrico.

Exemplo 2.1.4. *Seja* $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ *o conjunto de segmentos de reta no plano* $\mathbb{R}^2$ *dado na figura 6: Em* S *definimos a relação* R *mediante*

Figura 6 - Exemplo relação no plano cartesiano $\mathbb{R}$



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

$$s_i \, R \, s_j \quad \textit{se, e somente se, } s_i \textit{ é paralelo a } s_j.$$

A relação R *inclui todos os pares de segmentos que são paralelos entre si, ou seja,*

$$R = \{(s_1, s_1), (s_1, s_2), (s_2, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3), (s_3, s_4), (s_4, s_3), (s_4, s_4)\}.$$

Visando introduzir uma nova forma de representar as relações, apresentamos a seguir a definição de dígrafo.

Definição 2.1.3 (Grafo - dígrafo)**.** *Um **grafo orientado**, ou simplesmente **dígrafo**, é constituído por um conjunto* V *de vértices e um conjunto* E *de pares ordenados de elementos de* V*, chamados **arestas**.*

Em uma aresta $(a, b) \in E$*, o vértice* a *é denominado **vértice inicial** e o vértice* b *é denominado **vértice final**.*

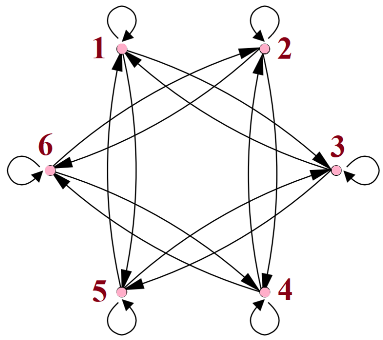
Os dígrafos servem como uma forma visual e intuitiva de representar relações binárias entre elementos de um conjunto. Cada vértice do dígrafo corresponde a um elemento do conjunto, e cada **aresta orientada** (a, b) indica que o par (a, b) pertence à relação R. Assim, a direção da aresta representa o sentido da relação entre os elementos: uma aresta que parte de a e chega a b significa que a se relaciona com b.

Exemplo 2.1.5. *Considere* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e a relação binária* R *definida por*

$$R = \{(x, y) \in A \times A \;\; | \;\; (x - y) = 2k, \quad \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}.$$

A relação R *é representada pelo dígrafo na Figura 7.*

Figura 7 - Exemplo dígrafo de uma relação



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

2.2 Relações e Classes de equivalência

Dentre as diversas relações que podem ser estabelecidas entre elementos de um conjunto, destacam-se as relações de equivalência, por seu papel fundamental em várias áreas da Matemática como a geometria, a álgebra e a teoria dos conjuntos, pois fornece uma base formal para a noção de "ser igual em certo sentido". Nesta seção, definimos as relações de equivalência e apresentamos suas principais propriedades.

Definição 2.2.1 (Relação de equivalência)**.** *Seja R uma relação definida sobre um conjunto não vazio E. Dizemos que R é uma* ***relação de equivalência*** *se satisfaz as seguintes propriedades, para todos $a, b, c \in E$:*

i) ***Reflexiva:*** *aRa, para todo $a \in E$;*

ii) ***Simétrica:*** *Se aRb, então bRa;*

iii) ***Transitiva:*** *Se aRb e bRc, então aRc.*

A seguir alguns exemplos de relações de equivalência.

Exemplo 2.2.1. *A relação de igualdade sobre $\mathbb{R}$ é um exemplo clássico de relação de equivalência, pois satisfaz as três propriedades fundamentais:*

i) Reflexiva: Todo número real é igual a si mesmo. Ou seja, $a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

ii) Simétrica: Se um número real a é igual a b, então b também é igual a a. Isto mostra que a ordem dos elementos não altera a igualdade: para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a = b$ temos imediatamente que $b = a$.

iii) Transitiva: Se a é igual a b e b é igual a c, então a é igual a c. Ou seja, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a = b$ e $b = c$ implica que $a = c$.

Portanto, a igualdade em $\mathbb{R}$ é uma relação de equivalência, pois satisfaz reflexividade, simetria e transitividade de maneira natural.

Exemplo 2.2.2 (Relação de congruência entre triângulos no plano)**.** *Seja $\mathcal{T}$ o conjunto de todos os triângulos no plano bidimensional $\mathbb{R}^2$. Definimos a relação R em $\mathcal{T}$ por*

$$R = \{(T_1, T_2) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \mid T_1 \text{ é congruente a } T_2\},$$

Em outras palavras, $T_1 \, R \, T_2$ quando existe uma isometria do plano (i.e., uma composição de translação, rotação e/ou reflexão) que envia T_1 sobre T_2.

Observe que, a relação R é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{T}$, pois:

i) R é Reflexiva: Todo triângulo T é congruente a si mesmo (a isometria identidade mostra TRT).

ii) R é simétrica: Se T_1 é congruente a T_2, então existe uma isometria f com $f(T_1) = T_2$; sua inversa f^{-1} é também uma isometria que leva T_2 em T_1, logo T_2RT_1.

iii) R é transitiva: Se T_1RT_2 e T_2RT_3 então há isometrias f e g com $f(T_1) = T_2$ e $g(T_2) = T_3$; a composição $g \circ f$ é uma isometria que leva T_1 em T_3, logo T_1RT_3.

Notemos que, nem toda relação é uma relação de equivalência.

Definição 2.2.2 (Relação antissimétrica)**.** *Seja R uma relação definida sobre um conjunto não vazio E. Dizemos que R é uma **relação antissimétrica** se sempre que aRb e bRa, então $a = b$.*

Se consideramos, por exemplo, E como uma classe de conjuntos e definimos em E a relação R dada pela inclusão de conjuntos (isto é, $A \, R \, B$ se e somente se $A \subseteq B$) temos que a relação R é antissimétrica e não é simétrica. Desse modo, temos um exemplo de relação que não é uma relação de equivalência.

A seguir, definimos o conceito de classe de equivalência, o qual possibilita agrupar elementos relacionados por uma relação de equivalência.

Definição 2.2.3 (Classe de equivalência)**.** *Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto E. Seja $a \in E$. A **classe de equivalência de** a**, módulo** R, é o subconjunto $\bar{a} \subseteq E$ formado por todos os elementos b que estão relacionados com a pela relação R:*

$$\bar{a} = \{b \in E \quad | \quad bRa\}.$$

Observe que, $\bar{a} \neq \emptyset$ pois, $a \in \bar{a}$ uma vez que a relação R é de equivalência.

O conjunto formado por todas classes de equivalência módulo R será indicado por E/R e chamado **conjunto quociente de E por R**. Isto é,

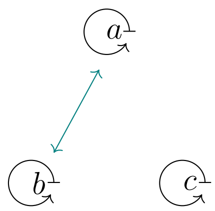
$$E/R = \{\bar{a} \quad | \quad a \in E\}.$$

Exemplo 2.2.3. *Seja $E = \{a, b, c\}$. Em E considere a relação:*

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}.$$

O dígrafo que representa esta relação é a Figura 8. Observe que, R é de fato uma relação de equivalência.

Figura 8 - Exemplo de Relação de Equivalência



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Neste exemplo, as classes de equivalência, módulo R, são $\bar{a} = \{a, b\}$, $\bar{b} = \{a, b\}$ e $\bar{c} = \{c\}$. O conjunto quociente está dado por $E/R = \{\{a, b\}, \{c\}\}$.

Proposição 2.2.1. *Seja R uma relação de equivalência definida sobre um conjunto não vazio E. Sejam $a, b \in E$. Então, as seguintes proposições são equivalentes:*

i) $a\,R\,b$;

ii) $a \in \bar{b}$;

iii) $b \in \bar{a}$;

iv) $\bar{a} = \bar{b}$.

Demonstração. Vamos provar a sequência de implicações $i) \to ii) \to iii) \to iv) \to i)$.

$i) \to ii)$ É uma consequência de definição de classe de equivalência.

$ii) \to iii)$ Como $a \in \overline{b}$, então aRb. Logo, da simetria de R, segue que bRa e, portanto, $b \in \overline{a}$.

$iii) \to iv)$ Se $b \in \overline{a}$, da definição de classe de equivalência segue que bRa.

Seja $x \in \overline{a}$. Logo xRa e, como bRa, da simetria de R, segue que aRb. Da transitividade de R temos que xRb. Logo, $x \in \tilde{a}$ e, portanto, $\overline{a} \subseteq \overline{b}$.

Seja $y \in \overline{b}$. Logo, yRb e como por hipótese bRa, da transitividade de R, segue que yRa. Assim, $y \in \overline{a}$ e, portanto, $\overline{b} \subseteq \overline{a}$.

Portanto, $\overline{a} = \overline{b}$.

$iv) \to i)$ Seja $x \in \overline{a} = \overline{b}$. Então xRa e xRb. Pela simetria de R, temos aRx e, pela transitividade, temos que aRb.

□

Definição 2.2.4 (Partição de um conjunto)**.** *Seja E um conjunto não vazio. Dizemos que uma família $\Im$ de subconjuntos não vazios de E é uma **partição** de E se satisfaz as seguintes condições:*

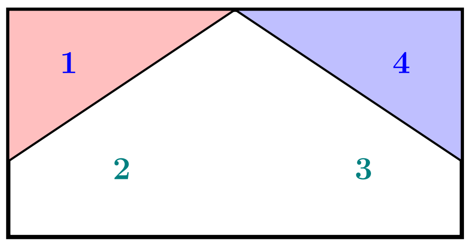
i) quaisquer dois subconjuntos distintos de $\Im$ são disjuntos;

ii) a união de todos os elementos de $\Im$ é igual a E, ou seja,

$$\bigcup_{A \in \Im} A = E.$$

Exemplo 2.2.4. *Seja $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Observe que, $\Im = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ é uma partição do conjunto E.*

Figura 9 - Exemplo de Partição



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Nos resultados a seguir, demonstraremos que toda relação de equivalência definida sobre um conjunto E induz naturalmente uma partição desse conjunto, agrupando seus elementos em classes de equivalência disjuntas. De forma recíproca, também mostraremos que toda partição de E determina uma relação de equivalência em E, na qual dois elementos estão relacionados se, e somente se, pertencem ao mesmo subconjunto da partição. Assim, existe uma correspondência biunívoca entre relações de equivalência e partições de um conjunto.

Proposição 2.2.2. *Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto E, então E/R é uma partição de E.*

Demonstração. Para provar que E/R é uma partição de E, precisamos verificar duas condições:

1. Quaisquer dois elementos distintos de E/R são disjuntos. Para tal fim, sejam $\bar{a}, \bar{b} \in E/R$ tais que $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$. Então existe $x \in \bar{a} \cap \bar{b}$, ou seja, xRa e xRb. Pela simetria de R, aRx, e pela transitividade, aRx e xRb implicam aRb. Logo, da Proposição 2.2.1, segue que $\bar{a} = \bar{b}$.

   Assim, quaisquer duas classes de equivalência ou são disjuntas ou coincidem.

2. Devemos provar que $\bigcup_{a \in E} \bar{a} = E$. Primeiramente, observemos que, para cada $a \in E$, $\bar{a} \subseteq E$, portanto
$$\bigcup_{a \in E} \bar{a} \subseteq E.$$
   Além disso, para cada $x \in E$, pela reflexividade de R, xRx. Logo, $x \in \bar{x}$ e, portanto, $x \in \bigcup_{a \in E} \bar{a}$. Assim,
$$E \subseteq \bigcup_{a \in E} \bar{a}.$$
   Uma vez que $\bigcup_{a \in E} \bar{a} \subseteq E$ e $E \subseteq \bigcup_{a \in E} \bar{a}$ segue que
$$\bigcup_{a \in E} \bar{a} = E.$$

Portanto, E/R é uma partição de E. □

Proposição 2.2.3. *Se $\Im$ é uma partição do conjunto E, então existe uma relação R de equivalência sobre E tal que $E/R = \Im$.*

Demonstração. Seja R a relação sobre E definida por:

$$xRy \quad \text{se, e somente se, } \exists\ A \in \Im \text{ tal que } x \in A \text{ e } y \in A,$$

ou seja, x está relacionado com y se existe um subconjunto A da partição $\Im$ ao qual pertencem x e y. Provaremos que R é uma relação de equivalência.

i) Para todo $x \in E$, existe um subconjunto $A \subset E$ tal que $A \in \Im$ e $x \in A$; portanto, xRx. Logo, R é reflexiva.

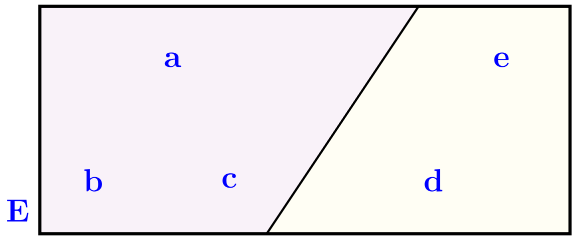
ii) Se x e y são elementos quaisquer de E tais que xRy, então $x, y \in A$, para algum $A \in \Im$. Segue que $y, x \in A$, e portanto yRx. Logo, R é simétrica.

iii) Sejam $x, y, z \in E$ tais que xRy e yRz. Isso significa que $x, y \in A$ e $y, z \in B$, para certos $A, B \in \Im$. Então $y \in A \cap B$, e como $\Im$ é uma partição, isto é, seus conjuntos são disjuntos dois a dois ou iguais, segue que $A = B$. Portanto, $x, z \in A$, o que implica xRz. Logo, R é transitiva.

□

Exemplo 2.2.5. *Seja* $E = \{a, b, c, d, e\}$. *Consideremos a partição* $\Im = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$ *de* E.

Figura 10 - Um outro exemplo de uma partição de um conjunto



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Observe que, seguindo o método indicado na demonstração anterior podemos definir em E *a relação de equivalência:*

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (a, c), (c, a), (d, d), (d, e), (e, d), (e, e)\}.$$

3 ARITMÉTICA DOS NÚMEROS INTEIROS: DIVISIBILIDADE, CONGRUÊNCIAS E CLASSES RESIDUAIS

Neste capítulo, são apresentados conceitos fundamentais da teoria dos números que servirão de base para a compreensão aprofundada das congruências modulares e sua aplicação didática. Iniciamos com a noção de divisibilidade e suas propriedades, passando pelo algoritmo da divisão e o conceito de máximo divisor comum (MDC), até chegar à definição formal de congruência. A seguir, abordamos as principais propriedades das congruências e, por fim, exploramos a congruência linear, essencial para a resolução de equações no conjunto dos inteiros.

A exposição dos conteúdos segue as abordagens e demonstrações presentes no livros de Hefez (17), Santos (24) e Domingues (9), que oferecem uma base sólida e acessível para o estudo da aritmética dos inteiros sob uma perspectiva tanto formal quanto aplicada.

3.1 Divisibilidade e Algoritmo da Divisão

Definição 3.1.1 (Divisor)**.** *Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que b* ***divide*** *a (ou que b* ***é um divisor de*** *a ou que a* ***é um múltiplo de*** *b) se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = a$. Para indicar que a divide b, usaremos a notação $a \mid b$. Logo, a negação é $a \nmid b$, ou seja, a não divide b.*

Nos números inteiros $\mathbb{Z}$, definimos a seguinte relação por:

$$b\,R\,a \quad \text{se, e somente se,} \quad b \mid a.$$

As seguintes proposições mostram algumas das principais propriedades satisfeitas por esta relação.

Proposição 3.1.1. *Seja $a \in \mathbb{Z}$. Então, $a \mid a$.*

Demonstração. De fato, observe que $a = a \cdot 1$, para todo $a \in \mathbb{Z}$ e, portanto, $a \mid a$. □

Proposição 3.1.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $a \mid b$ e $b \mid a$, então $a = \pm b$.*

Demonstração. Se $a \mid b$ então $b = a \cdot k'$ para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Analogamente, se $b \mid a$ então $a = b \cdot k''$ para algum $k'' \in \mathbb{Z}$. Operando obtemos $b = ak' = (bk'')k'$, então $b = b \cdot (k'' \cdot k')$ e daí $1 = (k'' \cdot k')$. Portanto, $k'' = k' = \pm 1$, o que implica em $a = \pm b$. □

Proposição 3.1.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $a \mid b$ e $b \mid c$ então $a \mid c$.*

Demonstração. Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então

$$\begin{aligned} b &= ak' \quad \text{para algum } k' \in \mathbb{Z}; \\ c &= bk'' \quad \text{para algum } k'' \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo, $c = bk'' = (ak')k'' = a(k'k'')$ e, portanto, $a|c$. □

Proposição 3.1.4. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (bx + cy)$, quaisquer que sejam os inteiros x e y.*

Demonstração. Se $a \mid b$ então $b = a \cdot k'$ para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Multiplicando os elementos desta igualdade por x obtemos $bx = axk'$. Analogamente se $a \mid c$ então $c = a \cdot k''$ para algum $k'' \in \mathbb{Z}$. Multiplicando por y, temos que $cy = ayk''$. Logo, somando membro a membro obtemos:

$$bx + cy = axk' + ayk''$$

e, daí $bx + cy = a(xk' + yk'')$. Portanto, $a \mid (bx + cy)$. □

Proposição 3.1.5. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $a \cdot c \mid b \cdot d$.*

Demonstração. Se $a \mid b$ e $c \mid d$ então

$$\begin{aligned} b &= ak' \quad \text{para algum } k' \in \mathbb{Z} \\ d &= ck'' \quad \text{para algum } k'' \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro obtemos:
$bd = (ak')(ck'')$ e daí $bd = (ac)(k'k'')$. Portanto, $ac \mid bd$. □

Observe que, em particular, a relação "ser divisor de", definida nos números inteiros, não é uma relação de equivalência, pois não satisfaz a propriedade de simetria. A Tabela 1 apresenta um resumo das propriedades dessa relação.

Tabela 1 - Principais propriedades da relação "ser divisor de" em $\mathbb{Z}$

Propriedade	**Descrição**
Reflexiva	Sim, ver Proposição 3.1.1.
Simétrica	Não é simétrica. Por exemplo, $2 \mid 4$, mas $4 \nmid 2$.
Transitiva	Sim, ver Proposição 3.1.3.

Mesmo quando um número inteiro não divide exatamente outro, é sempre possível realizar a divisão entre eles. A diferença, nesse caso, é a existência de um número adicional, denominado resto. Essa possibilidade é assegurada pelo Algoritmo da Divisão, apresentado e demonstrado no teorema a seguir, o qual constitui a base para o Algoritmo de Euclides, que será estudado na próxima seção.

> "O procedimento de Euclides baseia-se em um resultado tão fundamental que muitas vezes é tomado como óbvio: o teorema da divisão. De forma geral, esse teorema afirma que um número inteiro a pode ser dividido por um inteiro positivo b, de modo que o resto da divisão seja menor que b".(6, p.173).

Teorema 3.1.1 (Algoritmo da Divisão)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Então, existem inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r \quad e \quad 0 \leq r < |b|.$$

Nessas condições, os inteiros q e r são únicos, sendo chamados, respectivamente, de ***quociente*** *e* ***resto da divisão euclidiana*** *de a por b.*

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a > 0$. Há duas possibilidades a considerar:

1. Se b é múltiplo de a, então existe um inteiro q tal que

$$b = a \cdot q.$$

   Nesse caso, o resto da divisão é $r = 0$.

2. Caso contrário, b não é múltiplo de a. Assim, b encontra-se entre dois múltiplos consecutivos de a, isto é,

$$a \cdot q < b < a \cdot (q + 1),$$

   para algum inteiro q.

   Subtraindo $a \cdot q$ em toda a desigualdade, obtemos:

$$0 < b - a \cdot q < a \cdot (q + 1) - a \cdot q \quad \Rightarrow \quad 0 < b - a \cdot q < a.$$

   Definindo $r = b - a \cdot q$, temos:

$$b = a \cdot q + r, \quad \text{com } 0 < r < a.$$

Das duas situações acima, concluímos que, dados dois inteiros a e b, com $a > 0$, sempre existem inteiros q e r tais que

$$b = a \cdot q + r, \quad \text{onde } 0 \leq r < a.$$

O caso em que $a < 0$ é análogo. $\square$

3.2 Algoritmo de Euclides

Antes de introduzir o Algoritmo de Euclides, que constitui um dos principais resultados da Teoria dos Números, apresentamos alguns conceitos e resultados fundamentais que servirão de base para sua compreensão.

Definição 3.2.1 (Máximo divisor comum). *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Dizemos que $d \in \mathbb{Z}$ é um* ***divisor comum*** *de a e b quando $d \mid a$ e $d \mid b$. O maior dentre todos os divisores comuns de a e b é denominado* ***máximo divisor comum****, ou simplesmente* ***MDC*** *de a e b, é denotado por MDC(a, b) ou (a, b).*

O seguinte resultado, conhecido como Identidade de Bézout, nomeada em homenagem ao matemático francês Étienne Bézout (1730–1783), estabelece uma relação fundamental entre o máximo divisor comum de dois inteiros e as suas combinações lineares, mostrando que o MDC pode ser expresso como uma soma de múltiplos inteiros desses números.

Proposição 3.2.1 (Identidade de Bézout). *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e seja $d = (a, b)$ o máximo divisor comum de a e b. Então, existem inteiros x_0 e y_0 tais que*

$$d = ax_0 + by_0.$$

Os inteiros x_0 e y_0 são chamados de ***coeficientes de Bézout*** *correspondentes a a e b.*

Demonstração. Considere o conjunto de todas as combinações lineares de a e b:

$$S = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

O conjunto S contém números positivos, negativos e o zero. Seja $c \in S$ o menor inteiro positivo do conjunto, ou seja, $c = ax_0 + by_0$ para alguns $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$.

Vamos provar que $c \mid a$ e $c \mid b$. Suponha, por absurdo, que $c \nmid a$. Pelo Algoritmo da Divisão, existem inteiros q e r tais que

$$a = cq + r, \quad 0 < r < c.$$

Então,

$$r = a - cq = a - (ax_0 + by_0)q = a(1 - qx_0) + b(-qy_0).$$

Portanto, r também é uma combinação linear de a e b. Isso é um absurdo, pois r é um inteiro positivo menor que c, e c foi escolhido como o menor elemento positivo de S. Logo, $c \mid a$. De forma análoga, provamos que $c \mid b$.

Escrevendo $(a, b) = d$, existem inteiros k_1 e k_2 tais que

$$a = dk_1 \quad \text{e} \quad b = dk_2.$$

Então,

$$c = ax_0 + by_0 = dk_1x_0 + dk_2y_0 = d(k_1x_0 + k_2y_0),$$

ou seja, $d \mid c$. Assim, temos $d \leq c$ com $c, d > 0$. Por definição de d como o maior divisor em comum de a e b, não é possível que $d < c$, logo $d = c$.

Concluímos, portanto, que

$$(a, b) = d = c = ax_0 + by_0,$$

ou seja, o máximo divisor comum de a e b pode ser expresso como uma combinação linear de a e b. □

Proposição 3.2.2. *Sejam $a, b, t \in \mathbb{Z}$ com $t > 0$. Então $(ta, tb) = t(a, b)$.*

Demonstração. Da Proposição 3.2.1, segue que (ta, tb) é o menor número positivo da forma

$$atx + bty, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Observe que, este valor é t vezes o menor valor positivo que pode ser escrito como uma combinação linear da forma

$$ax + by, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Da Proposição 3.2.1, segue também que, este último número é (a, b) e, portanto, $(ta, tb) = t(a, b)$. □

Proposição 3.2.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $c > 0$ e a e b são divisíveis por c, então $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{1}{c}(a, b)$.*

Demonstração. Da Proposição 3.2.2, segue que $(ta, tb) = t(a, b)$ para todo $t \in \mathbb{Z}^+$. Por outro lado, como $c \mid a$ e $c \mid b$, temos que $\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \in \mathbb{Z}$. Logo, substituindo a e b por $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$, respectivamente, e considerando $t = c$ na expressão $(ta, tb) = t(a, b)$, obtemos:

$$\left(c \cdot \frac{a}{c}, c \cdot \frac{b}{c}\right) = c\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right).$$

Portanto, $(a, b) = c\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ e, daí, $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{1}{c}(a, b)$. □

Definição 3.2.2 (Números relativamente primos)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a e b são **relativamente primos** ou **primos entre si**, se $(a, b) = 1$.*

Proposição 3.2.4. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Então $\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1$, ou seja, os números $\frac{a}{(a,b)}$ e $\frac{b}{(a,b)}$ são primos entre si.*

Demonstração. Se $(a, b) = 1$, isso significa que a e b são relativamente primos, ou seja, não possuem divisores comuns além de 1 e a afirmação é trivial.

Suponhamos, agora, que a e b não sejam relativamente primos, isto é, $(a,b) = k$ com $k \in \mathbb{Z}^*$ e $k \neq 1$.

Considere agora $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = d$. Da Proposição 3.2.2, temos que

$$(a,b) = \left(k \cdot \frac{a}{k}, k \cdot \frac{b}{k}\right) = k \cdot \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = k \cdot d.$$

Como $(a,b) = k$, segue que $k = k \cdot d$, o que implica $d = 1$. Portanto, $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = 1$, ou seja, $\frac{a}{k} = \frac{a}{(a,b)}$ e $\frac{b}{k} = \frac{b}{(a,b)}$ são relativamente primos. □

Proposição 3.2.5. *Sejam $a, b, x \in \mathbb{Z}$. Então, $(a,b) = (a, b + ax)$.*

Demonstração. Seja $d = (a,b)$. Logo, da Proposição 3.2.1, segue que existem inteiros x_0 e y_0 tais que

$$ax_0 + by_0 = d, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{Z},$$

e daí

$$d = ax_0 - axy_0 + by_0 + axy_0 = a(x_0 - xy_0) + (b + ax)y_0.$$

Ou seja, d pode ser escrito como uma combinação linear de a e $b + ax$. Por outro lado, se $f = (a, b + ax)$, da Proposição 3.2.1, segue que existem x_1 e y_1 inteiros tais que

$$f = ax_1 + (b + ax)y_1, \quad x_1, y_1 \in \mathbb{Z},$$

e, de fato f é a menor combinação linear de a e $b + ax$. Assim $f \leq d$. Operando em $f = ax_1 + (b + ax)y_1$ obtemos

$$f = ax_1 + (b + ax)y_1 = ax_1 + by_1 + axy_1 = a(x_1 + xy_1) + by_1, \; x_1, y_1 \in \mathbb{Z}.$$

Logo, f também é combinação linear de a e b e da minimalidade de d segue que $d \leq f$. Portanto, $f = d$. □

Proposição 3.2.6. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $c \neq 0$. Se $(a,b) = 1$ e $a \mid bc$ então $a \mid c$.*

Demonstração. Como $(a,b) = 1$, da Identidade de Bézout 3.2.1, segue que existem $x, y \in \mathbb{Z}$, tais que $ax + by = 1$. Multiplicando esta igualdade por c, temos que $acx + bcy = c$. Por outro lado, $a \mid ac$, e, por hipótese, $a \mid bc$. Logo, da Proposição 3.1.4, segue que $a \mid acx + bcy$. E, portanto, $a \mid c$. □

Proposição 3.2.7. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $a = bq + r$ com $q, r \in \mathbb{Z}$, então $(a,b) = (b,r)$.*

Demonstração. Da igualdade $a = bq + r$, qualquer divisor comum de b e r também divide a, pois se $d \mid b$ e $d \mid r$, então $d \mid (bq + r) = a$. Portanto, todo divisor comum de b e r é também divisor de a.

Por outro lado, se d é um divisor comum de a e b, segue de $r = a - bq$ que $d \mid r$. Logo, os conjuntos de divisores comuns de $\{a, b\}$ e $\{b, r\}$ coincidem.

Como o máximo divisor comum é sempre positivo, conclui-se que $(a, b) = (b, r)$. $\square$

O Algoritmo de Euclides é um método simples e eficiente para determinar o máximo divisor comum (MDC) entre dois números inteiros. Ele se baseia em divisões sucessivas, substituindo o número maior pelo resto, até que esse resto seja zero. O último resto diferente de zero é o MDC. Esse procedimento é importante porque simplifica cálculos e demonstrações sobre divisibilidade, sendo amplamente utilizado na Matemática.

Teorema 3.2.1 (Algoritmo de Euclides)**.** *Sejam $r_0 = a$ e $r_1 = b$ inteiros não negativos, com $b \neq 0$. Aplicando sucessivamente o algoritmo da divisão, obtém-se:*

$$r_j = q_{j+1} r_{j+1} + r_{j+2}, \quad 0 \leq r_{j+2} < r_{j+1},$$

para $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, e $r_{n+1} = 0$. Nessas condições, o máximo divisor comum de a e b é o último resto não nulo, isto é,

$$(a, b) = r_n.$$

Demonstração. Aplicando o algoritmo da divisão a $r_0 = a$ e $r_1 = b$, obtemos:

$$r_0 = q_1 r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Em seguida, dividimos r_1 por r_2, obtendo:

$$r_1 = q_2 r_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2.$$

Prosseguindo de forma sucessiva, temos a sequência:

$$\begin{aligned}
r_0 &= q_1 r_1 + r_2, & 0 &\leq r_2 < r_1,\\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3, & 0 &\leq r_3 < r_2,\\
r_2 &= q_3 r_3 + r_4, & 0 &\leq r_4 < r_3,\\
&\vdots & &\\
r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n, & 0 &\leq r_n < r_{n-1},\\
r_{n-1} &= q_n r_n + 0. & &
\end{aligned}$$

Observe que cada resto satisfaz

$$0 \leq r_{j+2} < r_{j+1},$$

de modo que a sequência

$$r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$$

é precisamente decrescente de inteiros positivos. Como não é possível existir uma sequência infinita de inteiros não negativos precisamente decrescente, o desenvolvimento não pode continuar indefinidamente. Assim, após um número finito de passos, algum resto deve ser igual a zero, ou seja, existe n tal que $r_{n+1} = 0$. Portanto, o algoritmo necessariamente termina.

Da última igualdade, temos $(r_{n-1}, r_n) = r_n$. Da Proposição 3.2.7, segue que $(r_{j-1}, r_j) = (r_j, r_{j+1})$ para todo j. Assim, retrocedendo na sequência, obtemos:

$$(r_n, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_{n-2}) = \cdots = (r_1, r_0) = (a, b).$$

Portanto, o máximo divisor comum de a e b é o último resto não nulo da sequência, ou seja,

$$(a, b) = r_n.$$

□

A Tabela 2 resume as etapas envolvidas no Algoritmo de Euclides para calcular o máximo divisor comum de dois números inteiros.

Tabela 2 - Resumo dos passos do Algoritmo de Euclides para o cálculo do MDC

Passo	**Descrição**
1	Dado dois inteiros a e b ($a > b > 0$), divide-se a por b.
2	Determina-se o quociente q e o resto r da divisão: $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$.
3	Se $r = 0$, então o MDC é b.
4	Caso contrário, substitui-se $a \leftarrow b$ e $b \leftarrow r$.
5	Repete-se o processo até que o resto seja zero.
6	O último resto não nulo é o **máximo divisor comum** de a e b.

Exemplo 3.2.1. *Vamos determinar* $(1126, 522)$.

Aplicando o Algoritmo de Euclides temos que

$$\begin{aligned} 1126 &= 2 \times 522 + 82 \\ 522 &= 6 \times 82 + 30 \\ 82 &= 2 \times 30 + 22 \\ 30 &= 1 \times 22 + 8 \\ 22 &= 2 \times 8 + 6 \\ 8 &= 1 \times 6 + 2 \\ 6 &= 3 \times 2 + 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2 = (2,6) = (6,8) = (8,22) = (22,30) = (30,82) = (82,522) = (522,1126).$$

3.3 Congruências

Nesta seção, estudaremos o conceito de congruência entre números inteiros, uma das ideias mais importantes da aritmética. Para isso, faremos uso dos conceitos e resultados previamente apresentados sobre divisibilidade, algoritmo da divisão e restos da divisão euclidiana. Mostraremos como a noção de congruência surge naturalmente desses fundamentos e como ela define uma das relações de equivalência mais relevantes em Teoria dos Números.

Definição 3.3.1 (Congruência)**.** *Seja $m \in \mathbb{Z}^+$, $m \geq 2$. Dizemos que os inteiros a e b são **congruentes módulo** m se m divide $a - b$. Para denotar que a é côngruo com b, módulo m, escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$. Assim,*

$$a \equiv b \pmod{m} \ \Leftrightarrow \ m|(a-b).$$

Ou equivalentemente

$$a \equiv b \pmod{m} \ \Leftrightarrow \ a - b = mk, \quad \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 3.3.1. *Vamos determinar se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa:*

i) $45 \equiv 24 \pmod{7}$.

ii) $37 \equiv 37 \pmod{8}$.

iii) $17 \equiv 12 \pmod{4}$.

Solução:

i) *De fato,* 45 *é congruente a* 24 *módulo* 7*, pois:* $45 - 24 = 21$.
Observe que 21 *é múltiplo de* 7*, uma vez que* $21 = 7 \cdot 3$. *Logo a afirmação é verdadeira.*

ii) *De fato,* 37 *é congruente a* 37 *módulo* 8*, pois:* $37 - 37 = 0$.
Observe que 0 *é múltiplo de* 8*, uma vez que* $0 = 8 \cdot 0$. *Logo a afirmação é verdadeira.*

iii) *Observe que* 17 *não é congruente a* 12 *módulo* 4*, pois* $17 - 12 = 5$ *e,* 4 *não divide* 5. *Logo, a afirmação iii) é falsa.*

Seja $m \in \mathbb{Z}^+$, $m \geq 2$. No conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, definimos a relação

$$a\, R\, b \quad \text{se, e somente se,} \quad a \equiv b \pmod{m}.$$

Na seguinte proposição mostramos que esta relação é de fato uma relação de equivalência.

Proposição 3.3.1. *Seja* $m \in \mathbb{Z}^+$*, com* $m \geq 2$. *Para quaisquer* $a, b, c \in \mathbb{Z}$*, valem as seguintes propriedades:*

i) *(Reflexividade)* $a \equiv a \pmod{m}$*;*

ii) *(Simetria)* $a \equiv b \pmod{m}$*, então* $b \equiv a \pmod{m}$*;*

iii) *(Transitividade)* $a \equiv b \pmod{m}$ *e* $b \equiv c \pmod{m}$*, então* $a \equiv c \pmod{m}$.

Demonstração. i) (Reflexividade) Como $a - a = 0$ e $m \mid 0$, segue que $m \mid (a - a)$. Portanto, $a \equiv a \pmod{m}$ e a relação é reflexiva.

ii) (Simetria) Suponha que $a \equiv b \pmod{m}$. Isso significa que $m \mid (a - b)$, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = mk$. Consequentemente, $b - a = -mk$, e como $-k \in \mathbb{Z}$, temos que $m \mid (b - a)$. Assim, $b \equiv a \pmod{m}$ e a relação é simétrica.

iii) (Transitividade) Suponha que $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$. Então, existem $k, k' \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a - b = mk \quad \text{e} \quad b - c = mk'.$$

Somando essas duas igualdades, obtemos

$$a - c = m(k + k').$$

Como $k + k' \in \mathbb{Z}$, concluímos que $m \mid (a - c)$, isto é, $a \equiv c \pmod{m}$. Portanto, a relação é transitiva.

□

Uma vez demonstrado que a relação “ser congruente a módulo m” é uma relação de equivalência, é natural se perguntar qual é a classe de equivalência associada a cada número inteiro nessa relação. Antes de responder a essa questão, apresentamos algumas propriedades adicionais de interesse sobre as congruências.

Proposição 3.3.2. *Seja $m \in \mathbb{Z}^+$, $m \geq 2$. Para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ valem as seguintes propriedades:*

i) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

ii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

iii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$.

Demonstração. i) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, existem $k, k' \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a - b = mk \quad \text{e} \quad c - d = mk'.$$

Consideremos a diferença:

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d).$$

Substituindo as igualdades acima, obtemos:

$$(a + c) - (b + d) = mk + mk' = m(k + k').$$

Como $k + k' \in \mathbb{Z}$, segue que $m \mid [(a + c) - (b + d)]$. Portanto,

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}.$$

ii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então existem $k, k' \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$a - b = mk \quad \text{e} \quad c - d = mk'.$$

Consideremos a diferença:

$$ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c - d) + d(a - b).$$

Substituindo as igualdades acima, obtemos:

$$ac - bd = a(mk') + d(mk) = m(ak' + dk).$$

Assim, $m \mid (ac - bd)$ e, portanto, $ac \equiv bd \pmod{m}$.

iii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = mk$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por c, temos:

$$ac - bc = m(ck).$$

Logo, $m \mid (ac - bc)$ e, portanto, $ac \equiv bc \pmod{m}$.

$\square$

Corolário 3.3.1. *Sejam $m \in \mathbb{Z}^+$, $m \geq 2$ e $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, com $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Procedemos por indução sobre n.

i) Provamos que a propriedade vale para $n = 1$:

$$a^1 \equiv b^1 \pmod{m}.$$

ii) Assumimos que a propriedade vale para n, ou seja,

$$a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

e provamos para $n + 1$. Usando o item *ii*), na Proposição 3.3.2, temos que $a^n \cdot a \equiv b^n \cdot b \pmod{m}$ e, portanto, $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod{m}$.

$\square$

Na Definição 2.2.3, foi apresentado o conceito de classe de equivalência de um elemento $a \in E$, módulo uma relação de equivalência R definida sobre E. Vimos que esse conceito consiste no conjunto $\bar{a} = \{b \in E \mid bRa\}$. Na definição a seguir, aplicamos esse conceito ao contexto específico da relação de equivalência "ser congruente a, módulo m".

Definição 3.3.2 (Classe de Equivalência módulo m)**.** *Seja $a \in \mathbb{Z}$. A **classe de equivalência de** a **módulo** m ou, **classe de congruência de** a **módulo** m denotada por $\overline{a}$, é o conjunto:*

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{m}\}.$$

Proposição 3.3.3. *Seja $m \in \mathbb{Z}$, com $m \geq 2$. O conjunto quociente $\mathbb{Z}/R$ onde relação R é definida por:*

$$a\,R\,b \quad \textit{se, e somente se,} \quad a \equiv b \pmod{m}$$

possui exatamente m classes de congruência distintas. A saber,

$$\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}.$$

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{Z}$. Aplicando o algotimo da divisão (ver Teorema 3.1.1) para a e m, temos que existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a = mq + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < m.$$

Logo,

$$a - r = qm$$

Portanto, $a \equiv r \pmod{m}$. Logo, $a\,R\,r$ e pela implicação $i) \to iv)$, na Proposição 2.2.1, segue que $\bar{a} = \bar{r}$. Como $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, temos que:

$$\mathbb{Z}/R = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}.$$

Suponhamos que existam duas classes, $\overline{r}$ e $\overline{s}$, iguais em $\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \ldots,\ \overline{m-1}\}$, $0 < r\ ,\ s < m$ representadas por elementos r e s com $r < s$. Logo, $\overline{r} = \overline{s}$ e pela implicação $iv) \to i)$, na Proposição 2.2.1, temos que rRs, ou seja,

$$r \equiv s \pmod{m}.$$

De $r \equiv s \pmod{m}$ segue que $m \mid (s - r)$. Mas, isto implicaria que $m < s - r$ o que é uma contradição, pois $0 < s - r < m$. Portanto, $\bar{r} \neq \bar{s}$.

Concluímos que $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$ é constituído por exatamente m elementos distintos dois a dois, ou seja,

$$\mathbb{Z}/R = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}.$$

□

Exemplo 3.3.2. *Descrição das classes de congruência módulo* 4.

Da proposição 3.3.3, segue que as classes de congruência módulo 4 *são:*

$$\bar{0}, \qquad \bar{1}, \qquad \bar{2}, \quad e \quad \bar{3}.$$

A classe do 0 *esta dada explicitamente por:*

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv 0 \pmod{4}\} \\
&= \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 0 = 4k, \quad \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{b \in \mathbb{Z} \mid b = 4k + 0, \quad \textit{para algum } k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

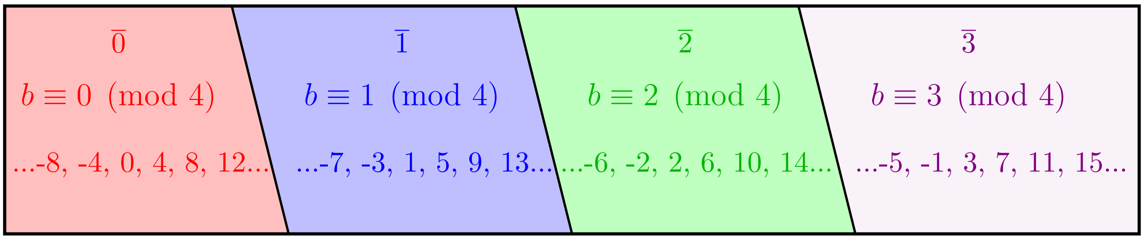
Assim, $\bar{0}$ *é o conjunto formado por todos os números inteiros que deixam resto* 0 *quando divididos por* 4*. Analogamente,* $\bar{1}$ *é formado por todos os números inteiros que deixam* *resto* 1 *quando divididos por* 4*;* $\bar{2}$ *é formado por todos os números inteiros que deixam resto* 2 *quando divididos por* 4 *e* $\bar{3}$ *é formado por todos os números inteiros que deixam resto* 3 *quando divididos por* 4*.*

Por outro lado, na Proposição 2.2.2, vimos que toda relação de equivalência induz uma partição sobre um conjunto e que cada uma das partes dessa partição corresponde precisamente às classes de equivalência de seus elementos. Portanto, com a relação

$$a\,R\,b \quad \textit{se, e somente se,} \quad a \equiv b \pmod{4},$$

obtemos uma partição de $\mathbb{Z}$

Figura 11 - Partição de $\mathbb{Z}$ induzida por $a \equiv b \pmod 4$



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

O exemplo anterior nos mostra como as congruências e as classes de congruência constituem ferramentas poderosas que permitem particionar o conjunto dos números inteiros em subconjuntos com propriedades em comum, dentro dos quais é possível escolher qualquer representante. Observe que, por exemplo, na classe $\bar{0}$ poderíamos igualmente escolher o representante 8, representando essa classe como $\bar{8}$, e obteríamos exatamente o mesmo subconjunto de elementos.

As congruências e o estudo de suas classes vão muito além de um procedimento algébrico repetitivo ou mecânico: elas formam um dos conceitos fundamentais da Teoria dos Números e desempenham um papel central em diversas áreas da Matemática.

A seguir definimos um tipo especial de equação que envolve congruências.

Definição 3.3.3 (Congruência linear)**.** *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}$*. Uma **congruência linear** é uma equação da forma*

$$ax \equiv b \pmod{m},$$

com $m \in \mathbb{Z}^+$*,* $m \geq 2$*.*

Proposição 3.3.4. *A equação* $ax \equiv b \pmod m$ *tem solução se, e somente se,* $d = (a, m)$ *divide* b*.*

Demonstração. Suponha que a equação $ax \equiv b \pmod{m}$ possui uma solução, digamos $x_0 \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$ax_0 \equiv b \pmod{m}.$$

Daí $ax_0 - b = mk$ ou, equivalentemente, $b = ax_0 - mk$. Mas, $d = (a, m)$, portanto $d \mid b$.

Reciprocamente, se $d \mid b$ temos que $b = dk$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Da Identidade de Bézout (ver Proposição 3.2.1), segue que existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que

$$d = ar + sm.$$

Mas, $b = dk$ e, portanto $b = (ar + sm)k$. Operando obtemos $b - a(rk) = (sk)m$, ou seja, $a(rk) \equiv b \pmod{m}$. Portanto, $x_0 = rk$ é solução de $ax \equiv b \pmod{m}$. □

Definição 3.3.4. *Seja $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, e seja $a \in \mathbb{Z}$. Dizemos que um inteiro b é o* ***inverso multiplicativo de** a **módulo*** m *se*

$$a \cdot b \equiv 1 \pmod{m}.$$

O inverso multiplicativo de a módulo m existe se, e somente se, $(a, m) = 1$. De fato, o inverso de a módulo m é uma solução da equação $ax \equiv 1 \pmod{m}$ e como visto na Proposição 3.3.4 esta equação possui solução se, e somente se, $(a, m) = 1$.

Exemplo 3.3.3. *Encontrar o inverso multiplicativo de* 4 *módulo* 13.

O inverso de 4 *módulo* 13 *existe, pois* $(4, 13) = 1$. *Escrevendo* 1 *como combinação linear de* 4 *e* 13 *temos*

$$1 = 13 + 4 \cdot (-3).$$

Ou seja,

$$4 \cdot (-3) - 1 = -13.$$

Logo, $4 \cdot (-3) \equiv 1 \pmod{13}$. *Isto é,* $x = -3$ *é uma solução da equação* $4 \cdot x \equiv 1 \pmod{13}$ *e, portanto,* $x = -3$ *é o inverso de* 4 *módulo* 13. *Observe que:*

$$-3 \equiv 10 \pmod{13}.$$

Portanto, o inverso de 4 *módulo* 13 *é* 10.

Para resolver uma congruência linear $ax \equiv b \pmod{m}$, procedemos da seguinte forma:

1. Calcule $d = (a, m)$.
2. Verifique se $d \mid b$.
   i) Se $d \nmid b$, a congruência não possui solução (Proposição 3.3.4).

ii) Se $d \mid b$, então há exatamente d soluções incongruentes módulo m.

3. Divida a congruência por d, obtendo uma forma equivalente:

$$a'x \equiv b' \pmod{m'},$$

onde $a' = \dfrac{a}{d}$, $b' = \dfrac{b}{d}$ e $m' = \dfrac{m}{d}$.

4. Como $(a', m') = 1$, existe o inverso multiplicativo de a' módulo m', denotado por $(a')^{-1}$. Multiplicando ambos os lados da congruência por esse inverso, obtemos a solução principal:

$$x \equiv a'^{-1}b' \pmod{m'}.$$

5. As demais soluções módulo m são obtidas adicionando múltiplos de m':

$$x \equiv a'^{-1}b' + km' \pmod{m}, \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, d-1.$$

Exemplo 3.3.4. *Vamos resolver a congruência linear* $3x \equiv 6 \pmod{15}$.
Seguindo os passos acima:

1. *Calculamos* $d = (a, m)$. *Ou seja,*

$$d = (3, 15) = 3.$$

2. *Como* $3 \mid 6$, *i.e.,* $d \mid b$ *segue que há exatamente 3 soluções congruentes módulo 15.*

3. *Dividindo a congruência por* 3, *obtemos a forma equivalente:*

$$x \equiv 2 \pmod{5},$$

onde $1 = \dfrac{3}{3}$, $2 = \dfrac{6}{3}$ *e* $5 = \dfrac{15}{3}$.

4. *Observe que, neste caso em particular, o inverso multiplicativo de* 1 *módulo* 5 *existe, pois* $(1, 5) = 1$ *e coincide com* 1. *Mas, multiplicando ambos os lados da congruência por esse inverso temos exatamente a mesma equação, assim a solução principal da equação está dada por*

$$x \equiv 2 \pmod{5}.$$

5. *As demais soluções módulo* 15 *são obtidas adicionando múltiplos de* 5. *Isto é,*

$$x \equiv 2 + 5k \pmod{15}, \qquad \textit{para } k = 0, 1, 2,$$

são as soluções da equação $3x \equiv 6 \pmod 5$. *Ou seja,*

$$x \equiv 2 \pmod{15}, \qquad x \equiv 2+5 = 7 \pmod{15}, \qquad x \equiv 2+10 = 12 \pmod{15}.$$

4 PROPOSTA DIDÁTICA COM DESIGN RESIDUAL: CONGRUÊNCIAS MODULARES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo, apresentamos detalhadamente uma proposta pedagógica voltada ao ensino de congruências modulares na educação básica, fundamentada em abordagens didáticas investigativas e interdisciplinares. A proposta busca integrar conteúdos da Teoria dos Números a elementos visuais, como mandalas e padrões geométricos gerados por meio do chamado design residual, promovendo o desenvolvimento do raciocínio matemático, da criatividade e da sensibilidade estética dos estudantes. Além da descrição minuciosa da atividade, este capítulo também apresenta os questionários aplicados com o objetivo de recolher percepções sobre a proposta, tanto de uma turma do ensino básico quanto de uma turma de graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Formação de Professores da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Os dados gerais obtidos a partir das respostas desses questionários são analisados de forma a oferecer subsídios para a reflexão sobre a eficácia e o potencial formativo da proposta aplicada em diferentes contextos educacionais.

4.1 Aritmética Modular na Formação Docente e no Ensino Básico: Justificativas Didáticas e Curriculares

A teoria das congruências modulares, tradicionalmente inserida apenas em níveis mais avançados da educação matemática, tem ganhado crescente atenção de pesquisadores e educadores como um conteúdo de grande valor conceitual e formativo para alunos da educação básica. No Brasil, onde a matemática escolar ainda é fortemente marcada por práticas mecânicas e algoritmos descontextualizados, a introdução de congruências modulares no ensino fundamental e médio pode representar uma via eficaz para desenvolver o raciocínio matemático, a compreensão de estruturas numéricas e a conexão entre diferentes áreas da matemática, como a aritmética e a álgebra.

Segundo Beltrán e Rodríguez (2019), a aritmética modular "pode ser considerada como um ponto de partida no uso de equações algébricas", promovendo uma abordagem mais integrada dos conteúdos matemáticos e estimulando a participação ativa dos estudantes em tarefas de natureza investigativa. Os autores defendem que o ensino de congruências desde o início do ensino médio contribui não apenas para a motivação dos alunos, mas também para o reconhecimento de aplicações históricas e modernas das congruências, como na criptografia, no cálculo de calendários e na teoria dos códigos. Como afirmam, "apesar de sua inegável importância, a aritmética modular está amplamente ausente dos currículos escolares” (2, p.3), indicando uma lacuna curricular que precisa ser enfrentada.

A implementação do ensino de congruências também oferece a oportunidade de ressignificar o ensino da divisão inteira, tradicionalmente tratado de forma algorítmica e mecânica. Ao abordar o algoritmo da divisão a partir da ideia de restos e classes de equivalência, os estudantes desenvolvem uma compreensão mais profunda e conceitual dos números inteiros. Como apontam Jörissen et al. (2019), uma das pedras angulares para a aprendizagem significativa da Teoria dos Números é “conectar congruências lineares com equações lineares na álgebra, para evitar noções procedimentais” (18). Esta transição, do algorítmico ao conceitual, é fundamental para preparar os alunos para desafios futuros em matemática e em outras áreas.

Do ponto de vista da formação docente, a relevância da teoria dos números elementar, onde se situam as congruências modulares, também é reconhecida como componente essencial na formação inicial dos professores de matemática. Wing Yee Lo (2020) afirma categoricamente: “uma compreensão profunda da teoria elementar dos números deve ser abordada na formação docente” (19, p.13), enfatizando que essa compreensão vai além da simples transmissão de conteúdo: trata-se de capacitar os futuros professores a diagnosticar concepções equivocadas dos alunos, propor atividades significativas e articular diferentes domínios matemáticos em sua prática pedagógica.

Nesse sentido, é necessário que os cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil incluam o estudo das congruências modulares não apenas como conteúdo matemático formal, mas também como tema de investigação didática. É importante que os licenciandos reflitam sobre o papel dessas ideias no desenvolvimento cognitivo dos alunos, questionem a rigidez do ensino baseado em algoritmos sem compreensão e proponham sequências didáticas que explorem, por exemplo, o conceito de resto como classe de equivalência, o comportamento cíclico das operações modulares, aplicações em situações reais, ou o uso de representações visuais, como tabelas e diagramas circulares.

Além disso, a abordagem investigativa e contextualizada das congruências contribui para formar professores mais críticos, criativos e conscientes da matemática como construção histórica e cultural, ampliando seu repertório metodológico e sua capacidade de despertar o interesse dos alunos pelo raciocínio matemático. A superação do ensino centrado apenas na técnica mecânica da divisão inteira abre espaço para uma matemática viva, significativa e interligada com o mundo contemporâneo.

Uma vez estudados os conceitos de relação de equivalência, divisibilidade e congruências, assim como suas principais propriedades, apresenta-se, a seguir, uma fundamentação didática para a atividade proposta, a qual será detalhada em seção posterior. Trata-se de uma atividade baseada na construção de *mandalas, estrelas e padrões geométricos* gerados por meio de *congruências modulares e design residual*, cuja intenção é evidenciar as conexões entre a matemática e elementos estéticos e culturais.

Essa fundamentação busca demonstrar como tais conteúdos podem se articular com as competências e habilidades previstas na *BNCC - Base Nacional Comum Curricular*, documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos da educação básica no Brasil devem desenvolver ao longo da escolarização. Além de contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático, o objetivo é mostrar que, mesmo não estando explicitamente previstos nos documentos oficiais, conteúdos como as congruências modulares podem ser abordados de maneira significativa, interdisciplinar e contextualizada, enriquecendo o repertório conceitual e didático dos estudantes e professores.

O Novo Ensino Médio, implantado nas escolas públicas brasileiras, permite o aprofundamento do ensino da matemática por meio da ampliação da carga horária, incluindo momentos de reforço escolar e o itinerário formativo "Matemática para a Vida". Essa abertura no currículo proporciona oportunidades para que os estudantes se envolvam de forma mais significativa com os conteúdos matemáticos, conforme destacado por Wall (29, p.vii):

> "Ideias matemáticas não são assuntos para serem repetidos superficialmente. Em vez disso, é preciso se envolver com elas e explorá-las, pois são feitas para serem entendidas em ação. Muitas vezes, o fazer matemático se torna um pouco como atravessar correndo um belo parque só porque é um atalho para o nosso destino. Ao contrário da criança que anda lentamente, nós raramente nos demoramos a examinar uma flor especial ou caminhar impulsivamente por um desvio tortuoso. Economizamos tempo, mas a nossa experiência é empobrecida".

A proposta pedagógica apresentada enfatizará também o uso da tecnologia, alinhando-se à *Competência Geral 5 da BNCC*, que incentiva a compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais de forma crítica e ética, permitindo ao estudante comunicar-se, resolver problemas e exercer protagonismo na vida pessoal e coletiva (5, p.9).

No Ensino Fundamental, a articulação entre os diferentes campos da matemática — Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade — deve possibilitar que os estudantes relacionem observações empíricas do mundo real a representações como tabelas, figuras e esquemas. Essa associação favorece o desenvolvimento de habilidades como indução, conjectura e dedução, além de promover o uso da matemática para resolver problemas contextualizados (5, p.265).

A proposta também dialogará com a *Competência Geral 3*, voltada à compreensão das relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da matemática e de outras áreas do conhecimento, contribuindo para o desenvolvimento da autonomia intelectual e da confiança na construção do conhecimento matemático (5, p.267).

Quanto ao campo de Números, a BNCC defende o desenvolvimento do pensamento numérico e a ampliação da compreensão sobre os significados das operações, por meio da resolução de problemas com números naturais, inteiros, racionais e reais em diversos contextos escolares e sociais (5, p.527).

Embora as congruências modulares não estejam formalmente incluídas nos documentos curriculares oficiais, a BNCC permite uma organização curricular flexível, que possibilita a abordagem de conteúdos de forma interdisciplinar e contextualizada. Entre as habilidades com as quais a proposta pedagógica poderá dialogar, destacam-se:

i) (EM13MAT507): Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de fórmulas e resolução de problemas;

ii) (EM13MAT405): Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática;

iii) (EM13MAT315): Investigar e registrar, por meio de fluxogramas, algoritmos que resolvem problemas (5, p.544).

Dessa forma, a proposta pedagógica que será apresentada a seguir busca integrar o estudo das congruências modulares e da divisibilidade a uma prática didática interdisciplinar e visualmente estimulante, fundamentada em atividades que envolvem a construção de padrões geométricos, como mandalas e estrelas, por meio do design residual. Trata-se de uma abordagem que promove a articulação entre conceitos matemáticos, raciocínio lógico, uso da tecnologia e sensibilidade estética, contribuindo para uma experiência de aprendizagem mais rica, significativa e culturalmente conectada.

4.2 Orientações Pré-Atividade: Algoritmo para Construção das Figuras com Congruências

Nesta seção é apresentada um guia prático com o algoritmo geral para a construção de figuras como estrelas, mandalas e formas baseadas em design residual utilizando congruências modulares. A orientação detalha os procedimentos técnicos e as etapas necessárias para gerar as figuras, servindo como *referência direta para os professores ou responsáveis pela aplicação da atividade em sala de aula.* Recomenda-se que este guia seja revisitado com atenção antes da realização da proposta com os alunos, de modo a garantir fluidez e clareza durante a condução da atividade. Parte-se do pressuposto de que o aplicador já possui familiaridade com o conceito de congruência e suas propriedades básicas, uma vez que este conhecimento é essencial para compreender a lógica subjacente às construções apresentadas a seguir.

4.2.1 Construção de Estrelas de n pontas

Considere dois números naturais n e k tais que $1 < k < n-1$ e $\text{mdc}(n,k) = 1$. Definimos uma **estrela de parâmetros** (n,k), ou simplesmente uma **estrela** (n,k), como uma figura geométrica formada pela união de segmentos de reta conectando vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência, segundo uma regra específica de ligação baseada em congruência módulo n.

Inicialmente, divide-se uma circunferência em n partes iguais, marcando-se n pontos igualmente espaçados, que representarão os vértices da estrela. A cada ponto $x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ associa-se o ponto $(x+k) \pmod{n}$, traçando-se um segmento de reta entre eles. Este processo é repetido iterativamente a partir de um ponto inicial, de modo que a cada passo se avança k unidades, no sentido horário, sobre a circunferência, utilizando-se a aritmética modular.

Introduzindo a variável $t \in \mathbb{N}$, que representa o número de passos realizados a partir da posição inicial (denotada por 0). A posição de cada vértice visitado pode então ser descrita pela expressão:

$$x = t \cdot k \pmod{n}.$$

O procedimento de construção consiste em iniciar na posição 0 e, sucessivamente, conectar os pontos nas posições 0, k, $2k$, $3k$, ..., até que se retorne ao ponto inicial. Este retorno ocorre quando, para algum inteiro positivo t, tem-se:

$$x + t \cdot k \equiv x \pmod{n}.$$

Subtraindo x de ambos os lados da congruência, obtém-se:

$$t \cdot k \equiv 0 \pmod{n},$$

o que significa que o produto $t \cdot k$ é divisível por n, ou seja:

$$n \mid t \cdot k.$$

Assim, o menor inteiro positivo t que satisfaz essa condição é:

$$t = \frac{n}{\mathrm{mdc}(n, k)}.$$

Portanto, a estrela gerada será uma figura única e contínua (isto é, conectada em um único ciclo) se, e somente se, $\mathrm{mdc}(n, k) = 1$.

Simetria na Construção:

Observa-se ainda que, se (n, k) define uma estrela, então $(n, n-k)$ também o faz. De fato, um salto de $n - k$ unidades no sentido anti-horário equivale a um salto de k unidades no sentido horário, uma vez que:

$$n - k \equiv -k \pmod{n}.$$

Analogamente, para um vértice inicial v, tem-se:

$$n - v \equiv -v \pmod{n}.$$

Logo,

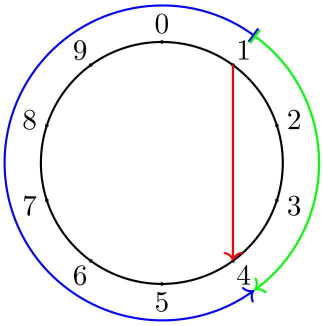
$$(n - v)(n - k) \equiv (-v)(-k) \equiv v \cdot k \pmod{n}.$$

Exemplo ilustrativo: Considere $n = 10$, $k = 3$ e vértice inicial $v = 1$. Então:

$$\begin{aligned} 10 - 1 = 9 &\equiv -1 \pmod{10}, \\ 10 - 3 = 7 &\equiv -3 \pmod{10}, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot 7 = 63 \equiv 3 \pmod{10}.$$

A figura a seguir ilustra a equivalência entre o salto de $k = 3$ unidades no sentido horário e o salto de $n - k = 7$ unidades no sentido anti-horário, ambos partindo do vértice 1 e chegando ao vértice 4.

Figura 12 - Simetria na construção



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Dessa forma, conclui-se que o mapeamento:

$$x \mapsto y \equiv x + (n - k) \pmod{n}$$

também representa uma aresta válida da estrela gerada por (n, k), evidenciando a simetria do processo construtivo.

Exemplo 4.2.1 (Estrela $(8, 3)$)**.** *Seja $n = 8$ o número de vértices e $k = 3$ o passo utilizado na construção da estrela. Como $\operatorname{mdc}(8, 3) = 1$, é possível construir um polígono estrelado, isto é, uma figura conexa, na qual todos os vértices serão visitados exatamente uma vez antes de retornar ao ponto de partida.*

Considerando os vértices numerados de 0 a 7, e utilizando o mapeamento $x \mapsto y \equiv x + k \pmod{n}$, temos a seguinte sequência de iterações, onde $x = t \cdot k \pmod{n}$:

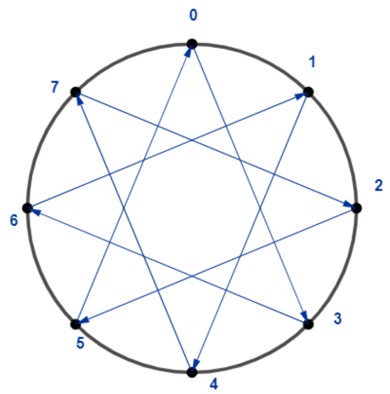
- $x = 0 \cdot 3 = 0 \Rightarrow y \equiv 0 + 3 \equiv 3 \pmod{8}$
- $x = 1 \cdot 3 = 3 \Rightarrow y \equiv 3 + 3 \equiv 6 \pmod{8}$
- $x = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow y \equiv 6 + 3 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{8}$
- $x = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow y \equiv 9 + 3 \equiv 12 \equiv 4 \pmod{8}$
- $x = 4 \cdot 3 = 12 \Rightarrow y \equiv 12 + 3 \equiv 15 \equiv 7 \pmod{8}$
- $x = 5 \cdot 3 = 15 \Rightarrow y \equiv 15 + 3 \equiv 18 \equiv 2 \pmod{8}$
- $x = 6 \cdot 3 = 18 \Rightarrow y \equiv 18 + 3 \equiv 21 \equiv 5 \pmod{8}$
- $x = 7 \cdot 3 = 21 \Rightarrow y \equiv 21 + 3 \equiv 24 \equiv 0 \pmod{8}$

Portanto, a sequência de conexões entre os vértices, que define as arestas do polígono estrelado, é dada por:

$$0 \mapsto 3 \mapsto 6 \mapsto 1 \mapsto 4 \mapsto 7 \mapsto 2 \mapsto 5 \mapsto 0.$$

Observa-se que o caminho retorna ao vértice inicial após 8 etapas, percorrendo todos os vértices exatamente uma vez. Isso confirma que o polígono gerado é uma estrela completa de parâmetros $(8, 3)$.

Figura 13 - Estrela $(8, 3)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

A seguir, apresentamos um exemplo ilustrativo para o caso em que $\text{mdc}(n, k) \neq 1$. Nessas circunstâncias, a construção do polígono não resulta em uma figura estrelada, mas sim em múltiplos ciclos disjuntos, cada um formando um polígono regular. O número desses ciclos será igual a $\text{mdc}(n, k)$, e cada um conterá exatamente $\dfrac{n}{\text{mdc}(n, k)}$ vértices. Tal comportamento decorre da impossibilidade de gerar um ciclo único que percorra todos os vértices da circunferência com um único passo k.

Exemplo 4.2.2. *Considere o caso em que o número de vértices é* $n = 12$ *e o passo utilizado na construção é* $k = 2$. *Observa-se que* $\text{mdc}(12, 2) \neq 1$. *Portanto, o procedimento de ligação iterativa não gera um polígono estrelado, mas sim um conjunto de polígonos regulares desconexos.*

Os vértices estão numerados de 0 *a* 11 *ao longo da circunferência. Aplicando o mapeamento* $x \mapsto y \equiv x + k \pmod{12}$, *e iniciando na posição* $x = 0$, *obtemos a seguinte sequência:*

- $x = 0 \Rightarrow y \equiv 0 + 2 \equiv 2 \pmod{12}$
- $x = 2 \Rightarrow y \equiv 2 + 2 \equiv 4 \pmod{12}$
- $x = 4 \Rightarrow y \equiv 4 + 2 \equiv 6 \pmod{12}$

- $x = 6 \Rightarrow y \equiv 6 + 2 \equiv 8 \pmod{12}$
- $x = 8 \Rightarrow y \equiv 8 + 2 \equiv 10 \pmod{12}$
- $x = 10 \Rightarrow y \equiv 10 + 2 \equiv 12 \equiv 0 \pmod{12}$

Constata-se que a trajetória retorna ao ponto inicial 0 *após percorrer apenas os vértices de índice par. Assim, para incluir os demais vértices, é necessário iniciar um novo ciclo a partir do vértice* 1*, aplicando novamente a mesma regra de mapeamento:*

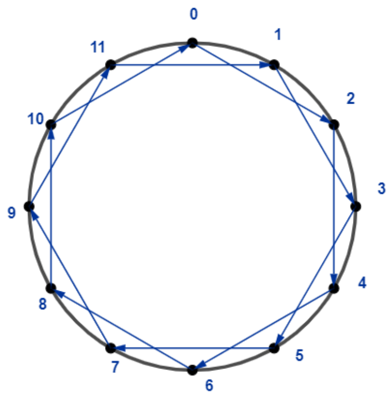
- $x = 1 \Rightarrow y \equiv 1 + 2 \equiv 3 \pmod{12}$
- $x = 3 \Rightarrow y \equiv 3 + 2 \equiv 5 \pmod{12}$
- $x = 5 \Rightarrow y \equiv 5 + 2 \equiv 7 \pmod{12}$
- $x = 7 \Rightarrow y \equiv 7 + 2 \equiv 9 \pmod{12}$
- $x = 9 \Rightarrow y \equiv 9 + 2 \equiv 11 \pmod{12}$
- $x = 11 \Rightarrow y \equiv 11 + 2 \equiv 13 \equiv 1 \pmod{12}$

Dessa forma, obtêm-se dois ciclos distintos, cada um correspondendo a um polígono regular inscrito, como segue:

$$0 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 8 \mapsto 10 \mapsto 0,$$
$$1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 7 \mapsto 9 \mapsto 11 \mapsto 1.$$

Tal construção evidencia que, quando $\mathrm{mdc}(n, k) \neq 1$*, a figura resultante não é uma estrela, mas sim a união de* $\mathrm{mdc}(n, k)$ *polígonos regulares disjuntos, cada um contendo* $\dfrac{n}{\mathrm{mdc}(n, k)}$ *vértices.*

Figura 14 - Polígono Regular $(12, 2)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

4.2.2 Construção de Design de Resíduos

O design de resíduos consiste em uma construção geométrica fundamentada na aritmética modular, em que se considera um par de inteiros (m, n) tais que $1 \leq n < m$ e $mdc(m, n) = 1$. Sobre uma circunferência, distribuem-se $m - 1$ pontos igualmente espaçados. Cada ponto x é conectado a um ponto y, definido pela congruência:

$$y \equiv n \cdot x \pmod{m}.$$

A conexão dos pares $\big(x, n \cdot x \pmod{m}\big)$ dá origem a padrões visuais simétricos e a representações geométricas interessantes.

A construção do design de resíduos (m, n), para $1 \leq n < m$ e $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$, pode ser realizada conforme os seguintes passos:

1. Fixar o módulo m.
2. Escolher um valor n tal que $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$.
3. Dividir uma circunferência em $m-1$ partes iguais, marcando $m-1$ pontos igualmente espaçados sobre ela. Numerar os pontos de 1 até $m - 1$.
4. Para cada ponto x, conectar ao ponto y determinado pela congruência:

$$y \equiv n \cdot x \pmod{m}.$$

Após conectar todos os pares $\big(x, n \cdot x \pmod{m}\big)$, as linhas entrelaçadas formarão padrões geométricos simétricos.

Exemplo 4.2.3. *Vamos construir o design de resíduos para o par* $(m, n) = (19, 9)$.
Seguindo os passos estabelecidos:

1. *Fixamos* $m = 19 \pmod{19}$.
2. *Escolhemos* $n = 9$*, para o qual* $\mathrm{mdc}(19, 9) = 1$.
3. *Dividimos a circunferência em* 18 *partes iguais, marcando e numerando os pontos de* 1 *até* 18.
4. *Aplicamos a congruência*

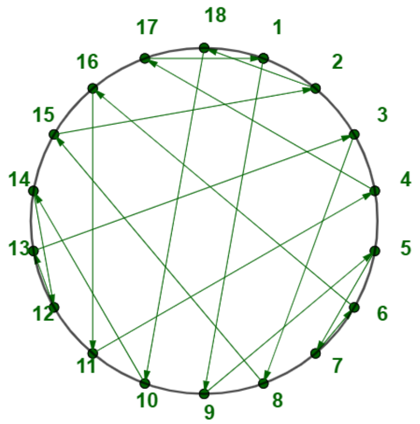
$$y \equiv 9 \cdot x \pmod{19}, \quad \textit{para cada} \quad x \in \{1, 2, \ldots, 18\}.$$

Calculando as correspondências, temos:

- $x = 1$: $y \equiv 9 \cdot 1 = 9 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (1, 9)$;
- $x = 2$: $y \equiv 18 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (2, 18)$;
- $x = 3$: $y \equiv 27 \equiv 8 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (3, 8)$;
- $x = 4$: $y \equiv 36 \equiv 17 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (4, 17)$;
- $x = 5$: $y \equiv 45 \equiv 7 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (5, 7)$;
- $x = 6$: $y \equiv 54 \equiv 16 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (6, 16)$;
- $x = 7$: $y \equiv 63 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (7, 6)$;
- $x = 8$: $y \equiv 72 \equiv 15 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (8, 15)$;
- $x = 9$: $y \equiv 81 \equiv 5 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (9, 5)$;
- $x = 10$: $y \equiv 90 \equiv 14 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (10, 14)$;
- $x = 11$: $y \equiv 99 \equiv 4 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (11, 4)$;
- $x = 12$: $y \equiv 108 \equiv 13 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (12, 13)$;
- $x = 13$: $y \equiv 117 \equiv 3 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (13, 3)$;
- $x = 14$: $y \equiv 126 \equiv 12 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (14, 12)$
- $x = 15$: $y \equiv 135 \equiv 2 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (15, 2)$;
- $x = 16$: $y \equiv 144 \equiv 11 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (16, 11)$;
- $x = 17$: $y \equiv 153 \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (17, 1)$;
- $x = 18$: $y \equiv 162 \equiv 10 \pmod{19} \Rightarrow (x, y) = (18, 10)$.

Por fim, conectam-se todos os pares (x, y) *obtidos para formar o design de resíduos correspondente ao par* $(19, 9)$.

Figura 15 - Design de Resíduos $(19, 9)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Exemplo 4.2.4. *Vamos construir o design de resíduos para o par* $(m, n) = (11, 7)$.

Seguindo os passos estabelecidos:

1. *Fixamos* $m = 11 \pmod{11}$.
2. *Escolhemos* $n = 7$, *e observamos que* $\text{mdc}(11, 7) = 1$.
3. *Dividimos a circunferência em* $(11 - 1 = 10)$ *partes iguais, marcando* $(11 - 1 = 10)$ *pontos igualmente espaçados ao longo da circunferência e os enumeramos de* 1 *até* 10.
4. *Aplicamos a congruência* $y \equiv 7 \cdot x \pmod{11}$.

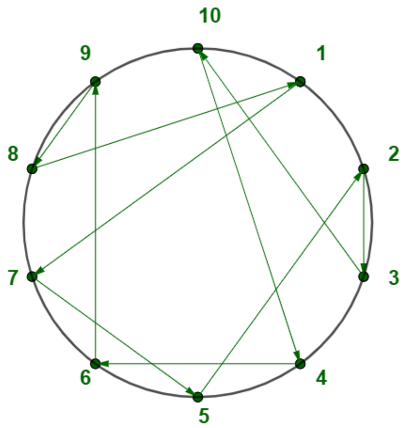
Calculando, obtemos:

- $x = 1$; $y \equiv 7 \cdot 1 \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow (x, y) = (1, 7)$;
- $x = 2$; $y \equiv 7 \cdot 2 \equiv 14 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow (x, y) = (2, 3)$;
- $x = 3$; $y \equiv 7 \cdot 3 \equiv 21 \equiv 10 \pmod{11} \Rightarrow (x, y) = (3, 10)$;
- $x = 4$; $y \equiv 7 \cdot 4 \equiv 28 \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow (x, y) = (4, 6)$;
- $x = 5$; $y \equiv 7 \cdot 5 \equiv 35 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow (x, y) = (5, 2)$;
- $x = 6$; $y \equiv 7 \cdot 6 \equiv 42 \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow (x, y) = (6, 9)$;
- $x = 7$; $y \equiv 7 \cdot 7 \equiv 49 \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow (x, y) = (7, 5)$;
- $x = 8$; $y \equiv 7 \cdot 8 \equiv 56 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (x, y) = (8, 1)$;
- $x = 9$; $y \equiv 7 \cdot 9 \equiv 63 \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow (x, y) = (9, 8)$;

- $x = 10$; $y \equiv 7 \cdot 10 \equiv 70 \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow (x, y) = (10, 4)$.

Conectando todos os pares $\big(x, 7.x \pmod{11}\big)$ *obtemos o desing de resíduos desejado.*

Figura 16 - Design de Resíduos $(11, 7)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

4.2.3 Construção de Mandalas Modulares

As mandalas modulares constituem construções geométricas fundamentadas na aritmética modular. Considere um número inteiro $m \geq 2$, e distribua-se os pontos numerados de 0 até $m - 1$ igualmente ao redor de uma circunferência, iniciando-se na posição 0 e seguindo o sentido horário. Cada ponto x é conectado a um ponto y, definido pela congruência análoga àquela utilizada no design de resíduos:

$$y \equiv n \cdot x \pmod{m}.$$

A estrutura resultante depende diretamente do valor do máximo divisor comum entre m e n:

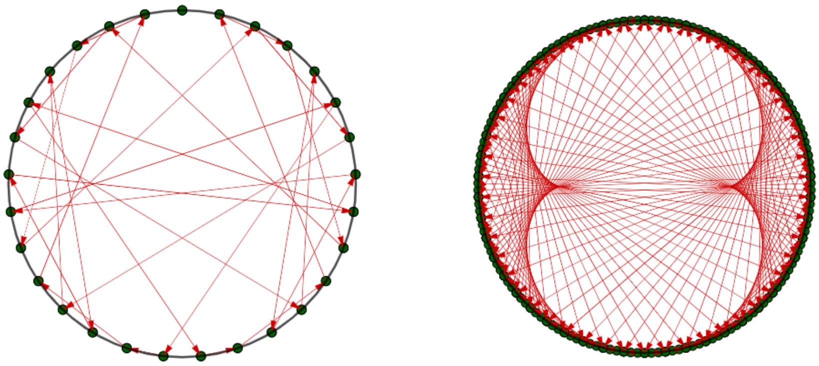
- Se $\text{mdc}(m, n) = 1$, o traçado interliga todos os pontos, formando um ciclo único e produzindo padrões fechados mais complexos.
- Se $\text{mdc}(m, n) \neq 1$, os ciclos são independentes e a mandala se decompõe simetricamente em múltiplos ciclos menores.

A conexão dos pares $(x, y) = \big(x, n \cdot x \pmod{m}\big)$ gera padrões visuais que evidenciam propriedades geométricas de simetria e harmonia.

Numa mandala modular, m representa o número total de pontos dispostos na circunferência, n é o multiplicador modular que define as conexões, x é o ponto de origem e y é o ponto de destino, calculado por meio da congruência módulo m.

Ao comparar as figuras obtidas para diferentes valores de m, observa-se que, para valores menores, a mandala apresenta um conjunto disperso de segmentos; enquanto para valores maiores de m, a forma geométrica torna-se mais definida e visualmente complexa.

Figura 17 - Mandala $(29, 3)$ e $(150, 3)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Para construir uma mandala (m, n), com $m \geq 2$, siga os seguintes passos:

1°) Vamos fixar m (m é o módulo).

2°) Podemos escolher qualquer valor de n como um valor fixo.

3°) Divida uma circunferência em m partes iguais, marcando m pontos igualmente espaçados ao longo da circunferência. Numere os pontos de 0 até $m - 1$.

4°) Cada ponto x na circunferência será conectado ao ponto y, definido por:

$$y \equiv n \cdot x \pmod{m}.$$

Associe todos os pares $(x, y) = \big(x, n \cdot x \pmod{m}\big)$, os segmentos representarão formas geométricas.

Exemplo 4.2.5. *Construção da mandala modular* $(16, 6)$.

Vamos construir uma mandala modular com $m = 16$ *pontos e multiplicador* $n = 6$. *Seguindo os passos descritos anteriormente:*

1. *Fixamos o valor de* $m = 16$*, ou seja, trabalharemos no sistema módulo* 16.
2. *Escolhemos* $n = 6$*. Como* $\mathrm{mdc}(16, 6) \neq 1$*, espera-se que a mandala resultante possua múltiplos ciclos desconexos.*

3. *Dividimos uma circunferência em* 16 *partes iguais, marcando os pontos de* 0 *a* 15*, igualmente espaçados ao longo do contorno.*

4. *Para cada ponto* $x \in \{0, 1, \ldots, 15\}$*, aplicamos a congruência:*

$$y \equiv 6 \cdot x \pmod{16},$$

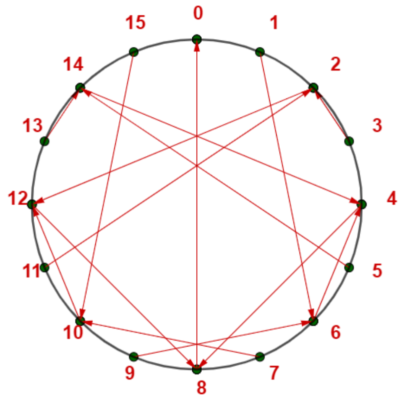
obtendo os pares (x, y) *que serão conectados.*

Os valores obtidos são os seguintes:

- $x = 0$: $y \equiv 6 \cdot 0 = 0 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$;
- $x = 1$: $y \equiv 6 \cdot 1 = 6 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (1, 6)$;
- $x = 2$: $y \equiv 12 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (2, 12)$;
- $x = 3$: $y \equiv 18 \equiv 2 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (3, 2)$;
- $x = 4$: $y \equiv 24 \equiv 8 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (4, 8)$;
- $x = 5$: $y \equiv 30 \equiv 14 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (5, 14)$;
- $x = 6$: $y \equiv 36 \equiv 4 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (6, 4)$;
- $x = 7$: $y \equiv 42 \equiv 10 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (7, 10)$;
- $x = 8$: $y \equiv 48 \equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (8, 0)$;
- $x = 9$: $y \equiv 54 \equiv 6 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (9, 6)$;
- $x = 10$: $y \equiv 60 \equiv 12 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (10, 12)$;
- $x = 11$: $y \equiv 66 \equiv 2 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (11, 2)$;
- $x = 12$: $y \equiv 72 \equiv 8 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (12, 8)$;
- $x = 13$: $y \equiv 78 \equiv 14 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (13, 14)$;
- $x = 14$: $y \equiv 84 \equiv 4 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (14, 4)$;
- $x = 15$: $y \equiv 90 \equiv 10 \pmod{16} \Rightarrow (x, y) = (15, 10)$.

Portanto, a mandala modular $(16, 6)$ *é formada conectando todos os pares* $\big(x, 6x \pmod{16}\big)$*, conforme listado acima. Como o máximo divisor comum entre* m *e* n *é diferente de* 1*, a figura gerada se decomporá em múltiplos ciclos distintos, refletindo uma simetria segmentada ao longo da circunferência.*

Figura 18 - Mandala $(16, 6)$

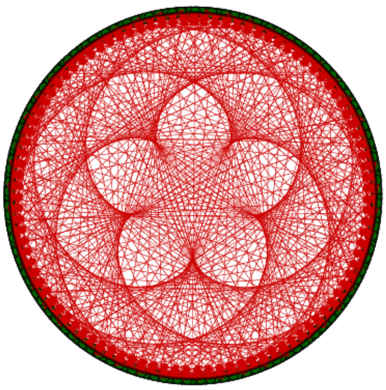


Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

No exemplo a seguir, a imagem da mandala foi construída utilizando uma simulação desenvolvida pelo autor no software GeoGebra (disponível no link: `https://www.geogebra.org/classic/fqcghuwk`). Considerando-se um valor elevado para o número de pontos, com $m > 50$, optou-se por omitir a numeração dos vértices a fim de preservar a clareza visual da figura.

Exemplo 4.2.6. *Construir uma mandala modular* $(500, 302)$.

Figura 19 - Mandala $(500, 302)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

4.3 Atividade/Proposta Didática Baseada em Congruências Modulares

O desenvolvimento desta atividade será realizado no Ensino Básico e para Licenciandos em Matemática que já tenham cursado Álgebra I em **quatro etapas interdependentes e progressivas**, com o objetivo de favorecer a compreensão conceitual, a exploração visual e a participação ativa dos alunos. A proposta busca articular conteúdos matemáticos com elementos estéticos e culturais, promovendo uma aprendizagem significativa e integrada.

Na **primeira etapa**, os alunos serão convidados a **observar e analisar diferentes figuras geométricas visuais, como mandalas, polígonos estrelados e padrões obtidos por meio do design residual**. O foco será estabelecer uma conexão inicial entre matemática e arte, chamando atenção para os padrões, os saltos regulares e a continuidade dos segmentos que formam essas figuras. Essa introdução visual tem o objetivo de despertar o interesse dos alunos e criar um ambiente favorável à investigação.

A **segunda etapa** retoma o conceito de divisão não exata, **explorando com os alunos como todo número inteiro pode ser representado por meio de um quociente e um resto**. Essa etapa é fundamental para preparar o terreno conceitual da próxima, pois permite visualizar a ideia de resto como algo significativo, e não apenas como resultado mecânico de um cálculo.

Na **terceira etapa**, será introduzido o conceito de congruência entre números inteiros, com base na ideia de que dois números são congruentes quando deixam o mesmo resto ao serem divididos por um mesmo número. **A relação entre divisão não exata e congruência será trabalhada com exemplos e exercícios simples**, buscando desenvolver uma compreensão conceitual antes de partir para a construção prática.

A **quarta etapa** será dedicada à construção das figuras geométricas com base nas congruências modulares. Os alunos utilizarão folhas de atividades contendo tabelas e circunferências (disponíveis no Anexo B), que os guiarão passo a passo na criação de padrões visuais. Essa etapa permite **aplicar os conceitos estudados de forma prática, visual e criativa, aproximando a matemática da experiência concreta dos estudantes** e valorizando a estética no raciocínio matemático.

As atividades propostas foram planejadas a partir de experiências em sala de aula e buscam oferecer aos alunos um ambiente propício à exploração, à construção de sentido e à articulação entre teoria e prática. Professores, monitores ou demais interessados na aplicação da atividade em sala de aula poderão acessar, no Anexo A deste trabalho, o material didático correspondente a cada uma das etapas, bem como as folhas com as respostas das atividades. No Anexo B encontram-se as folhas de atividades destinadas aos alunos, para o desenvolvimento das tarefas e a realização das construções.

Tabela 3 - Sugestão de tempo pedagógico para cada etapa

Etapas	**Tempo**
Etapa 1	10 minutos
Etapa 2	20 minutos
Etapa 3	20 minutos
Etapa 4	50 minutos

4.3.1 Primeira Etapa: Apresentação das figuras e Motivação Inicial

Nesta etapa inicial, o objetivo é despertar o interesse dos alunos e estabelecer conexões entre a matemática e a arte por meio da observação de figuras visuais geradas com base em congruências modulares. O professor ou responsável pela atividade deverá apresentar aos alunos exemplos de figuras como estrelas, mandalas e padrões criados por design residual, destacando sua beleza, simetria e regularidade.

As figuras podem ser apresentadas de duas formas, dependendo da disponibilidade de recursos da escola ou local de aplicação: Por meio das imagens impressas que compõem a tabela de exemplos visuais disponibilizada nos anexos desta dissertação. Ou, preferencialmente, por meio de simulações digitais interativas desenvolvidas pelo autor da proposta, disponíveis de forma gratuita através dos links:

Tabela 4 - Links das simulações/apps das construções geométricas no Geogebra

Construção Geométrica	**Link da Simulação/App no Geogebra**
Estrela com n Pontas	`https://www.geogebra.org/classic/yfcrudwm`
Design de Resíduos	`https://www.geogebra.org/classic/awgpey2h`
Mandala Modular	`https://www.geogebra.org/classic/fqcghuwk`

Ao apresentar as figuras, é recomendável que o professor varie os exemplos, mostrando diferentes configurações (quantidade de pontos, tipos de ligações, padrões cíclicos etc.), de modo a evidenciar a diversidade das formas possíveis e estimular a curiosidade dos alunos.

Durante essa apresentação, é importante fazer uma fala motivadora, situando a atividade do dia como uma oportunidade para criar figuras semelhantes com ajuda da matemática. Uma sugestão de abordagem seria dizer: *“Hoje, vamos aprender a fazer desenhos como esses aqui. Eles parecem só arte, mas são feitos com matemática! Vamos descobrir como ideias como resto de divisão e regularidade nos ajudam a construir essas figuras lindas e simétricas.”*

Essa contextualização inicial tem papel fundamental na construção de sentido para a atividade, contribuindo para o engajamento dos alunos e para a valorização da matemática como linguagem também expressiva e criativa.

4.3.2 Segunda Etapa: Exploração da Divisão Não Exata e Tabela de Restos

Nesta etapa, o foco será introduzir ou retomar com os alunos o conceito de **divisão não exata**, que servirá como base para a compreensão posterior das *congruências modulares*. O professor deverá iniciar a explicação apresentando a ideia de que, para quaisquer números naturais D e $d \neq 0$, existem **únicos** números naturais q (quociente) e r (resto) tais que

$$D = q \cdot d + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < d.$$

Onde:

- D é o **dividendo** e d é o **divisor**;
- q é o **quociente** da divisão de D por d;
- r é o **resto** dessa divisão.

Um exemplo simples pode ser utilizado para ilustrar:

Exemplo 4.3.1. *Dividindo* 38 *por* 7*, temos:*

$$\begin{array}{r|l} 38 & 7 \\ \hline 3 & 5 \end{array}$$

ou seja,

$$38 = 5 \cdot 7 + 3.$$

Portanto, o quociente é 5 *e o resto é* 3*.*

A seguir, o professor deverá propor aos alunos uma atividade prática: o **preenchimento de uma tabela de restos**, com os resultados das divisões dos **primeiros 16 números naturais (de 0 a 15)** por diferentes divisores: 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Essa tabela encontra-se disponível na folha de atividades (ver Anexo B).

De acordo com a dinâmica da turma, essa atividade poderá ser realizada de forma **individual ou em grupos pequenos**, preferencialmente com até **três alunos por grupo**. O trabalho em grupo pode favorecer a discussão entre os colegas e o levantamento de hipóteses sobre padrões observados nos restos.

Exercício 4.3.1. *Preencha a tabela abaixo com os restos da divisão dos números naturais de* 0 *a* 15 *pelos divisores indicados:*

Tabela 5 - Atividade com restos da divisão

Número Natural	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resto da divisão por 2	0	1	0	1	0	1	0	1								
Resto da divisão por 3	0	1	2	0	1	2	0									
Resto da divisão por 4	0	1	2	3												
Resto da divisão por 5																
Resto da divisão por 6																
Resto da divisão por 7																

Após o preenchimento, o professor deverá apresentar a **tabela com os resultados corretos**, discutindo com os alunos os eventuais erros cometidos e reforçando a lógica do cálculo do resto. Esta etapa é essencial para que os alunos percebam os **padrões cíclicos** que surgem nos restos. Observação que será muito útil nas próximas etapas da atividade.

Solução: Efetuando as divisões encontraremos:

Tabela 6 - Respostas atividade com restos da divisão

Número Natural	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resto da divisão por 2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Resto da divisão por 3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
Resto da divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
Resto da divisão por 5	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
Resto da divisão por 6	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3
Resto da divisão por 7	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1

Para concluir esta etapa, o professor poderá também introduzir uma aplicação simples e contextualizada, como a contagem de dias da semana com base na divisão não exata. O objetivo é reforçar que a divisão com resto **não é apenas um processo mecânico**, mas possui utilidade concreta em diversas situações do cotidiano.

Exercício 4.3.2. *O ano de 2025 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?*

Solução: Dividindo 365 por 7, obtemos quociente 52 e resto 1, ou seja:

$$365 = 52 \cdot 7 + 1.$$

Isso significa que o dia 1° de janeiro de 2026 será **um dia após** a quarta-feira — ou seja, uma **quinta-feira**. Logo, o dia **31 de dezembro de 2025** cairá em uma **quarta-feira**.

Observação: Para anos **não bissextos** (com 365 dias), o ano começa e termina no mesmo dia da semana. Já nos **anos bissextos** (366 dias), o último dia do ano cai **dois dias após** o dia da semana inicial, pois:

$$366 = 52 \cdot 7 + 2.$$

É interessante que o professor ou responsável pela atividade leve um **calendário impresso ou projetado em sala de aula**, para que os alunos possam verificar e confirmar a resposta, conectando assim a teoria à prática.

Figura 20 - Calendário 2025

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Essa abordagem auxilia na compreensão do significado do **resto da divisão**, mostrando como ele aparece de forma natural em contextos cotidianos e estimulando a valorização da matemática como ferramenta para compreender o mundo.

4.3.3 Terceira Etapa: Do Resto à Congruência: Explorando um Novo Conceito

Nesta etapa, o professor deverá introduzir formalmente o conceito de congruência a partir da ideia de divisão não exata e dos restos obtidos. A conexão com a etapa anterior é fundamental: a congruência modular surge como uma generalização da ideia de “mesmo resto” nas divisões por um mesmo número. Esta transição ajuda os alunos a perceberem que, na matemática, conceitos aparentemente simples como a divisão podem ter interpretações mais abstratas e amplas.

O professor pode iniciar explicando que, dado um número inteiro positivo m, dizemos que dois números inteiros a e b são **congruentes módulo** m quando m divide a diferença $a - b$. A notação utilizada é:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid (a-b).$$

Essa condição equivale a dizer que $(a-b) = m \cdot q$, para algum número inteiro q. O professor pode também apresentar o significado dos símbolos usados:

- $\equiv$ significa "é congruente a";
- $\not\equiv$ significa "não é congruente a";
- $\pmod{m}$ indica que estamos considerando divisões por m;
- $\mid$ significa "divide";
- $\nmid$ significa "não divide".

A seguir, o professor pode apresentar exemplos simples e relacionar cada congruência ao *resto* da divisão:

Exemplo 4.3.2. *Vamos determinar se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa:*

a) $14 \equiv 8 \pmod{3}$

b) $45 \equiv 24 \pmod{7}$

c) $23 \equiv 9 \pmod{4}$

Solução:

a) De fato, 14 *é congruente a* 8 *módulo* 3*, pois:* $14 - 8 = 6$.
Observe que 6 *é múltiplo de* 3*, uma vez que* $6 = 3 \cdot 2$*. Logo a afirmação é verdadeira.*

b) De fato, 45 *é congruente a* 24 *módulo* 7*, pois:* $45 - 24 = 21$.
Observe que 21 *é múltiplo de* 7*, uma vez que* $21 = 7 \cdot 3$*. Logo a afirmação é verdadeira.*

c) Observe que, 23 *não é congruente a* 9 *módulo* 4*, pois* $23 - 9 = 14$ *e,* 4 *não divide* 14*. Logo, a afirmação c) é falsa.*

Para consolidar o conteúdo, propõe-se o seguinte exercício aos alunos:

Exercício 4.3.3. *Verifique cada uma das congruências abaixo:*

a) $19 \equiv 7 \pmod{6}$

b) $34 \equiv 11 \pmod{5}$

c) $52 \equiv 16 \pmod 9$

Soluções esperadas:

a) $6 \mid (19-7) \Rightarrow 6 \mid 12$
(Resto 1 em ambos. Verdadeira).

b) Como $5 \nmid (34-11) \Rightarrow 5 \nmid 23 \Rightarrow 34 \not\equiv 11 \pmod 5$.
(Restos diferentes. Falsa).

c) $9 \mid (52-16) \Rightarrow 9 \mid 36$
(Resto 7 em ambos. Verdadeira).

Essa introdução à congruência pode ser enriquecida com exemplos que façam sentido para os estudantes, mostrando que dois números diferentes podem "pertencer à mesma classe de restos" em divisões por um mesmo número. Isso abrirá caminho para as construções visuais que virão na próxima etapa da atividade.

4.3.4 Quarta Etapa: Arte com Congruências - Construção das Figuras

Nesta etapa, o professor guiará os alunos na construção de figuras geométricas baseadas na aritmética modular: polígonos estrelados, designs de resíduos e mandalas. O objetivo é aplicar os conceitos de divisão não exata e congruência em contextos visuais, reforçando a conexão entre Matemática e Arte.

Importante: Para facilitar as construções, os alunos utilizarão *folhas de atividades contendo tabelas e circunferências* — disponíveis no Anexo B deste trabalho. Isso permitirá que façam as marcações e conexões manualmente, favorecendo a compreensão prática dos conceitos.

A seguir, um roteiro passo a passo para o professor conduzir cada construção:

4.3.5 Construção do Polígono Estrelado

Metodologia sugerida:

1. Explique a ideia de formar uma estrela ligando pontos igualmente espaçados numa circunferência.
2. Apresente os parâmetros n (número de pontas) e k (salto entre vértices).

3. Mostre as condições para a construção válida:

$$1 < k < n - 1 \quad \text{e} \quad \text{mdc}(n, k) = 1.$$

4. Oriente os alunos a utilizarem as circunferências impressas para dividir em n partes iguais e numerar os pontos de 0 a $n - 1$.

5. Instrua-os a preencherem as tabelas com os valores calculados de:

$$x = t \cdot k, \quad y \equiv x + k \pmod{n}, \quad t = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

6. Finalmente, conectar os pontos indicados para formar a estrela. Orientando aos alunos com a indicação que $t = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ corresponde aos vértices numerados da circunferência e, cada conexão $x \to y$ representa uma aresta da estrela.

Após apresentar os passos, construa junto com os alunos a seguinte estrela:

Exemplo 4.3.3. *O número de pontas da estrela está definido como $n = 7$ e o salto como $k = 3$. Como $\text{mdc}(7, 3) = 1$, podemos construir um polígono estrelado com vértices numerados de 0 até $n - 1 = 6$.*

Utilizando a fórmula das conexões:

$$x = t \cdot k, \quad y \equiv x + k \pmod{n},$$

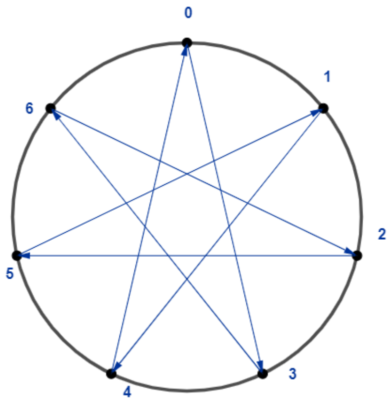
onde $t = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, calculamos as conexões entre os vértices:

- $x = 0 \cdot 3 = 0 \mapsto y \equiv 0 + 3 \equiv 3 \pmod{7}$
- $x = 1 \cdot 3 = 3 \mapsto y \equiv 3 + 3 \equiv 6 \pmod{7}$
- $x = 2 \cdot 3 = 6 \mapsto y \equiv 6 + 3 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$
- $x = 3 \cdot 3 = 9 \mapsto y \equiv 9 + 3 \equiv 12 \equiv 5 \pmod{7}$
- $x = 4 \cdot 3 = 12 \mapsto y \equiv 12 + 3 \equiv 15 \equiv 1 \pmod{7}$
- $x = 5 \cdot 3 = 15 \mapsto y \equiv 15 + 3 \equiv 18 \equiv 4 \pmod{7}$
- $x = 6 \cdot 3 = 18 \mapsto y \equiv 18 + 3 \equiv 21 \equiv 0 \pmod{7}$

Portanto, o polígono estrelado terá a seguinte sequência de vértices e arestas:

$$0 \to 3 \to 6 \to 2 \to 5 \to 1 \to 4 \to 0.$$

Figura 21 - Polígono Estrelado $(7, 3)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

4.3.6 Construção de Design de Resíduos

Nesta construção, enfatize que cada conexão representa a multiplicação módulo m, visualizada na circunferência.

Metodologia sugerida:

1. Explique aos alunos que devem fixar o módulo m.
2. Escolher n tal que $1 \leq n < m$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$.
3. Usar as folhas de atividades para dividir a circunferência em $m - 1$ partes iguais e numerar os pontos de 1 a $m - 1$.
4. Preencher as tabelas com os pares:

$$(x, y), \quad y \equiv n \cdot x \pmod{m}.$$

5. Conectar os pontos conforme indicado.

Após apresentar os passos, construa junto com os alunos o seguinte design de resíduos:

Exemplo 4.3.4. *Para construir um design de resíduo* $(17, 5)$*, seguimos os passos indicados e obtemos:*

1. *Fixamos* $m = 17 \pmod{17}$.
2. *Escolhemos* $n = 5$. *Como* $\text{mdc}(17, 5) = 1$*, podemos continuar.*

3. *Dividimos a circunferência em* 16 *partes iguais, marcando 16 pontos igualmente espaçados. Numeramos os pontos de* 1 *até* 16.

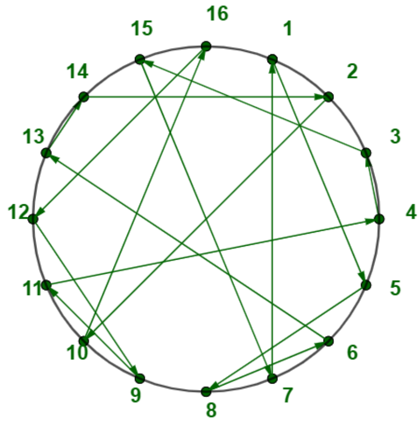
4. *Aplicamos a congruência* $y \equiv 5x \pmod{17}$, *para cada* $x = 1, 2, \ldots, 16$.

Calculamos os pares (x, y) *conforme a congruência:*

- $x = 1$; $y \equiv 5 \cdot 1 \equiv 5 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (1, 5)$;
- $x = 2$; $y \equiv 5 \cdot 2 \equiv 10 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (2, 10)$;
- $x = 3$; $y \equiv 5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv 15 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (3, 15)$;
- $x = 4$; $y \equiv 5 \cdot 4 \equiv 20 \equiv 3 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (4, 3)$;
- $x = 5$; $y \equiv 5 \cdot 5 \equiv 25 \equiv 8 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (5, 8)$;
- $x = 6$; $y \equiv 5 \cdot 6 \equiv 30 \equiv 13 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (6, 13)$;
- $x = 7$; $y \equiv 5 \cdot 7 \equiv 35 \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (7, 1)$;
- $x = 8$; $y \equiv 5 \cdot 8 \equiv 40 \equiv 6 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (8, 6)$;
- $x = 9$; $y \equiv 5 \cdot 9 \equiv 45 \equiv 11 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (9, 11)$;
- $x = 10$; $y \equiv 5 \cdot 10 \equiv 50 \equiv 16 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (10, 16)$;
- $x = 11$; $y \equiv 5 \cdot 11 \equiv 55 \equiv 4 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (11, 4)$;
- $x = 12$; $y \equiv 5 \cdot 12 \equiv 60 \equiv 9 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (12, 9)$;
- $x = 13$; $y \equiv 5 \cdot 13 \equiv 65 \equiv 14 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (13, 14)$;
- $x = 14$; $y \equiv 5 \cdot 14 \equiv 70 \equiv 2 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (14, 2)$;
- $x = 15$; $y \equiv 5 \cdot 15 \equiv 75 \equiv 7 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (15, 7)$;
- $x = 16$; $y \equiv 5 \cdot 16 \equiv 80 \equiv 12 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (16, 12)$.

Agora, basta conectar todos os pares $(x, y) = \big(x, 5x \pmod{17}\big)$ *ao longo da circunferência para formar o design de resíduo.*

Figura 22 - Design de Resíduos $(17, 5)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

4.3.7 Construção de Mandalas

Explique que aqui não é necessário que $\text{mdc}(m, n) = 1$, o que pode gerar padrões com repetições e múltiplas conexões e, que devemos escolher $m \geq 2$.

Metodologia sugerida:

1. Fixar m e escolher qualquer n positivo.

2. Dividir a circunferência impressa em m partes iguais, numerando de 0 até $m - 1$.

3. Preencher as tabelas com os pares (x, y), onde:

$$y \equiv n \cdot x \pmod{m}$$

4. Conectar os pontos correspondentes para visualizar o padrão.

Exemplo 4.3.5. *Para construir uma mandala* $(12, 3)$*, seguimos os passos indicados e obtemos:*

1. *Fixamos* $m = 12$*, ou seja, estamos trabalhando no módulo 12.*

2. *Escolhemos* $n = 3$*. Note que* $\text{mdc}(12, 3) \neq 1$*, mas ainda assim é possível construir a mandala.*

3. *Dividimos a circunferência em 12 partes iguais, marcando os pontos de* 0 *até* 11*.*

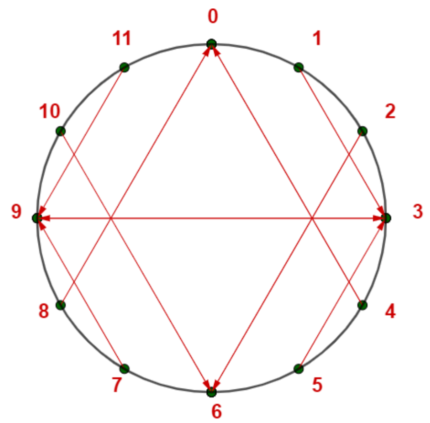
4. *Aplicamos a congruência* $y \equiv 3x \pmod{12}$*, para cada* $x = 0, 1, \ldots, 11$*.*

Calculamos os pares (x, y)*:*

- $x = 1$; $y \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (1, 3)$;
- $x = 2$; $y \equiv 3 \cdot 2 \equiv 6 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (2, 6)$;
- $x = 3$; $y \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (3, 9)$;
- $x = 4$; $y \equiv 3 \cdot 4 \equiv 12 \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (4, 0)$;
- $x = 5$; $y \equiv 3 \cdot 5 \equiv 15 \equiv 3 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (5, 3)$;
- $x = 6$; $y \equiv 3 \cdot 6 \equiv 18 \equiv 6 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (6, 6)$;
- $x = 7$; $y \equiv 3 \cdot 7 \equiv 21 \equiv 9 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (7, 9)$;
- $x = 8$; $y \equiv 3 \cdot 8 \equiv 24 \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (8, 0)$;
- $x = 9$; $y \equiv 3 \cdot 9 \equiv 27 \equiv 3 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (9, 3)$;
- $x = 10$; $y \equiv 3 \cdot 10 \equiv 30 \equiv 6 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (10, 6)$;
- $x = 11$; $y \equiv 3 \cdot 11 \equiv 33 \equiv 9 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (11, 9)$.

Agora, conecte todos os pares $(x, y) = \big(x, 3x \pmod{12}\big)$ *na circunferência para formar a mandala modular.*

Figura 23 - Mandala $(12, 3)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

No caso das mandalas, os desenhos resultantes tornam-se cada vez mais atrativos e complexos à medida que aumentamos os valores de m e n. Essa variedade de padrões é um excelente recurso para despertar o interesse dos alunos pela matemática por meio da arte e da simetria.

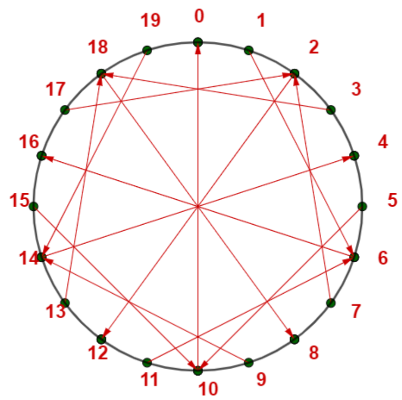
Para facilitar a visualização desses padrões, sugerimos que o professor utilize os links indicados na Tabela 4, que direcionam para mandalas já construídas no GeoGebra.

Por exemplo, recomendamos apresentar as mandalas:

- Mandala $(20, 6)$, que evidencia padrões com repetições simétricas simples;
- Mandala $(502, 302)$, que apresenta uma estrutura visual surpreendente e intrincada, resultado de um módulo elevado.

Esses exemplos podem ser explorados tanto para análise estética quanto para discussões matemáticas mais profundas sobre aritmética modular, simetria e periodicidade.

Figura 24 - Mandala $(20, 6)$



Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Para encerrar a atividade, o professor pode convidar os alunos a compartilharem suas construções e observações. É importante destacar que, ao longo da proposta, os estudantes exploraram conceitos de aritmética modular, construíram diferentes tipos de figuras como polígonos estrelados, designs de resíduos e mandalas e perceberam como a matemática pode estar presente em padrões visuais belos e surpreendentes.

4.4 Implementação da Atividade / Proposta Didática

A implementação da atividade proposta foi realizada em dois contextos distintos, a fim de avaliar sua aplicabilidade e potencial pedagógico. O primeiro contexto envolveu uma turma de 17 alunos do 3º ano do Ensino Médio, com idades compreendidas entre 17 e 19 anos, permitindo observar a recepção da proposta por estudantes do ensino básico. O segundo contexto foi constituído por alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Formação de Professores da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), preferencialmente matriculados nas disciplinas de Álgebra I ou Álgebra II, possibilitando analisar a compreensão e o engajamento de futuros professores frente à abordagem baseada em congruências modulares.

4.4.1 Implementação da Atividade no Ensino Médio

No dia *26 de setembro de 2025*, foi aplicada a oficina/atividade, proposta neste trabalho, no *Colégio Estadual Salvador de Mendonça* em Itaboraí-RJ com a turma *3003 do 3º ano do ensino médio*, composta por *17 alunos*, com idades entre 17 e 19 anos.

A aplicação ocorreu conforme o planejado, seguindo as etapas descritas na proposta didática apresentada nas seções anteriores. No início, alguns alunos demonstraram certa dificuldade em compreender como seria possível construir figuras a partir de cálculos envolvendo divisões não exatas, mas, à medida que as orientações eram retomadas e exemplificadas, o entendimento foi se consolidando.

Durante a explicação, destacou-se a importância da **estrutura e da lógica presentes nas figuras**, bem como a relação entre o conceito de **resto da divisão** e a **ideia de congruência**. O preenchimento da tabela de restos contribuiu de forma significativa para que os estudantes percebessem regularidades e compreendessem que o resto é sempre menor que o divisor. Esse reconhecimento foi essencial para o avanço nas etapas seguintes da oficina.

À medida que os alunos se familiarizavam com os cálculos de congruência e suas propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva, foi possível observar um progresso notável na autonomia e na confiança com que realizavam as atividades. As discussões em grupo mostraram-se produtivas, especialmente quando os próprios alunos começaram a estabelecer conexões entre os conceitos estudados e situações cotidianas, como a contagem de dias em um calendário e a identificação de anos bissextos.

A observação coletiva das regularidades emergentes nas construções despertou curiosidade e engajamento, revelando uma aprendizagem significativa e contextualizada.

Ao final, foram apresentadas as simulações e applets desenvolvidos no software GeoGebra, evidenciando como a tecnologia pode ser uma aliada no estudo das congruências, permitindo construir figuras obedecendo às condições matemáticas exploradas na oficina. Essa etapa proporcionou uma compreensão mais **visual e prática da matemática**, reforçando o potencial da proposta para integrar teoria e experimentação.

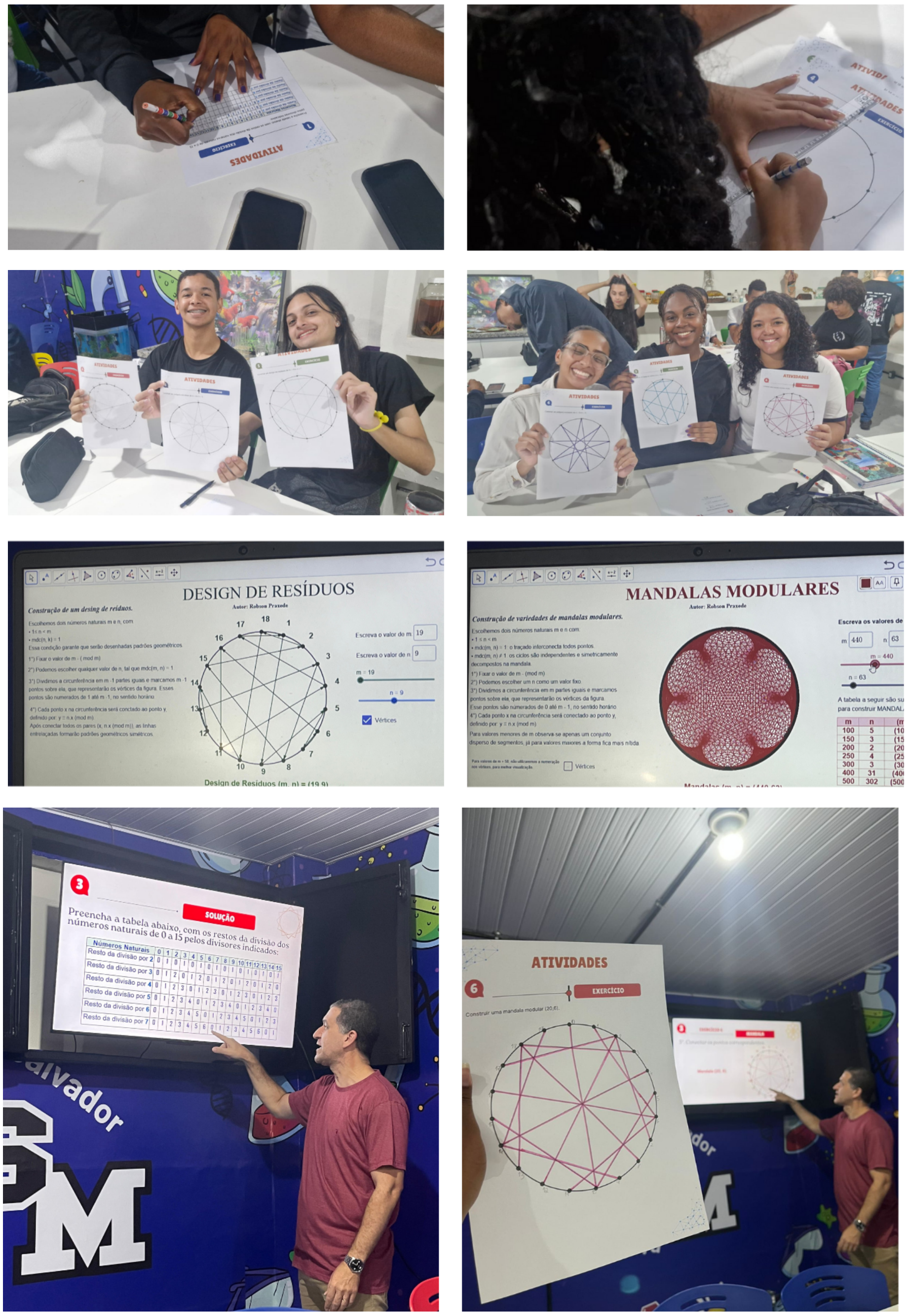
De modo geral, a oficina mostrou-se **muito produtiva**, despertando interesse e envolvimento dos alunos. Alguns manifestaram surpresa e curiosidade ao questionar: *"Professor, isso é matéria de faculdade?"*, comentário que evidencia o caráter inovador da atividade em relação às experiências matemáticas que geralmente vivenciam no ensino médio.

Na seguinte Figura, são apresentadas imagens da aplicação da oficina. Os termos de autorização de uso de imagem foram devidamente recolhidos e arquivados pelo autor.

Figura 25 - Registro da oficina/atividade realizada com alunos do 3º ano do ensino médio do Colégio Estadual Salvador de Mendonça

Fonte: Fotografia do autor (2025).

Figura 26 - Registro da oficina/atividade realizada com alunos do 3º ano do ensino médio do Colégio Estadual Salvador de Mendonça



Fonte: Fotografia do autor (2025).

4.4.2 Implementação da Atividade no Ensino Superior (Licenciandos em Matemática)

No mesmo dia, *26 de setembro de 2025*, a proposta também foi aplicada na *Faculdade de Formação de Professores da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (FFP/UERJ)*, em São Gonçalo (RJ), com uma turma composta por *11 alunos do curso de Licenciatura em Matemática*, cuja média de idade era de 23 anos.

A oficina seguiu as mesmas etapas descritas na proposta didática e aplicadas previamente à turma do ensino médio, mantendo a sequência de apresentação das figuras, definições, exemplos e condições necessárias à construção de cada uma delas. Entretanto, por se tratar de estudantes de licenciatura, o desenvolvimento da atividade assumiu um caráter mais **reflexivo e investigativo**, favorecendo discussões sobre o **potencial pedagógico** da proposta e suas possíveis adaptações para o ensino básico.

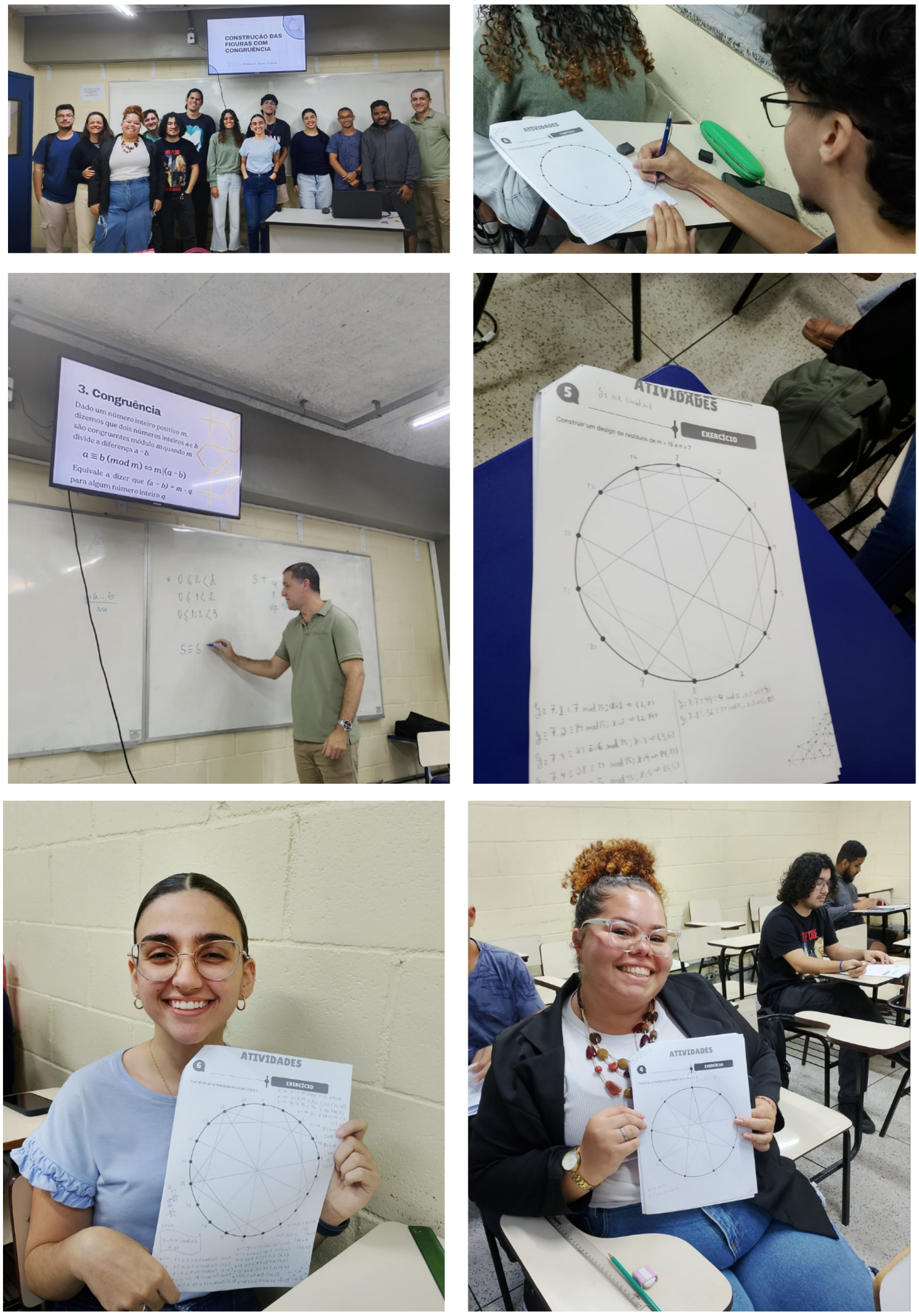
Os licenciandos demonstraram rápida assimilação dos conceitos e se envolveram de maneira ativa nas etapas de construção, uma vez que o conteúdo de congruência já lhes era familiar. Essa familiaridade permitiu que explorassem o tema de forma mais autônoma, enfatizando aspectos didáticos e metodológicos, além da própria execução dos cálculos e construções. As trocas entre os participantes revelaram um olhar voltado não apenas à resolução das tarefas, mas também à análise das estratégias de ensino que poderiam ser empregadas em sala de aula.

Na etapa final, realizou-se a exploração do software GeoGebra, da mesma forma que na atividade anterior, destacando-se como os recursos tecnológicos potencializam o entendimento visual e geométrico das congruências. Os licenciandos aproveitaram esse momento para testar novas construções, propor variações das figuras e discutir as possibilidades de uso do programa em contextos escolares.

De modo geral, a aplicação com os licenciandos evidenciou que, mesmo em um grupo com conhecimento prévio sobre o conteúdo e familiaridade com ferramentas digitais, a proposta se mostrou **enriquecedora e desafiadora**, estimulando a criatividade, o raciocínio lógico e a reflexão sobre a prática docente. Essa experiência reforça o caráter formativo da oficina, tanto no aprofundamento conceitual quanto na construção de perspectivas pedagógicas voltadas ao ensino da Matemática.

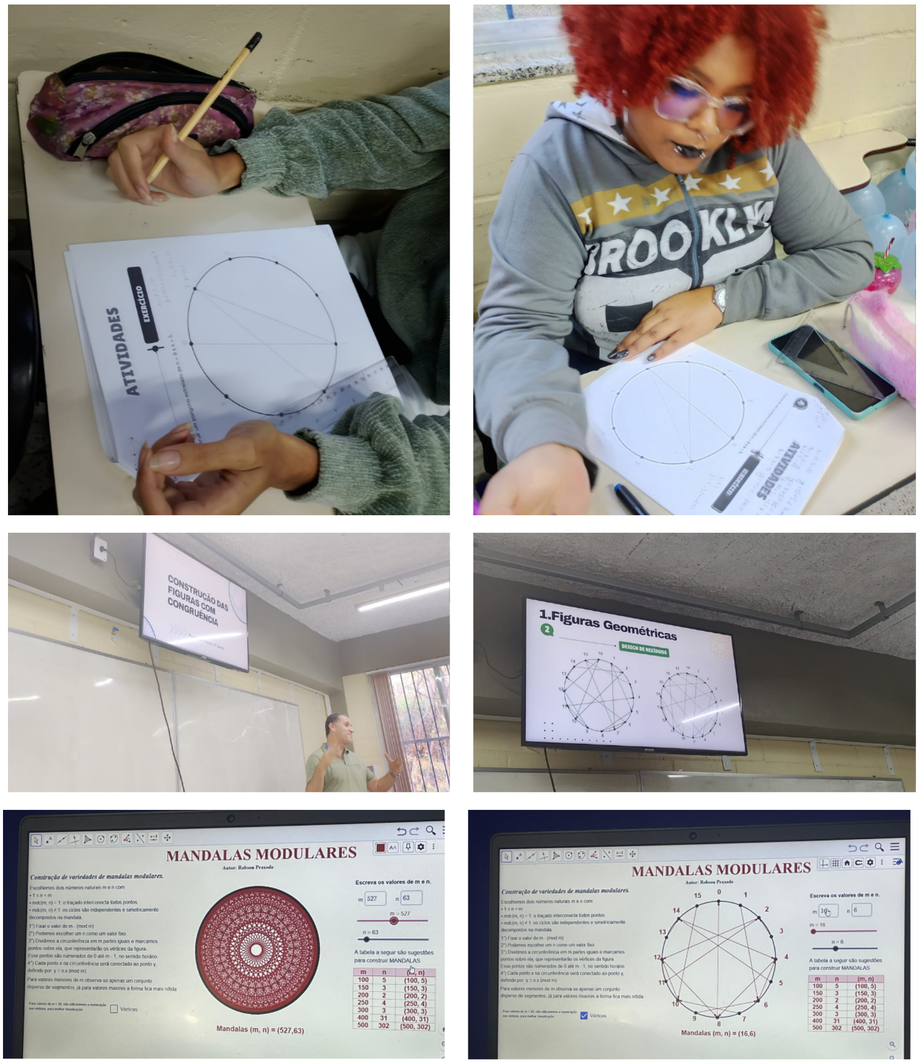
Na Figura, a seguir, são apresentadas fotos e registros da atividade realizada com os licenciandos em Matemática da FFP.

Figura 27 - Registro da oficina/atividade realizada com licenciandos em Matemática na FFP/UERJ.



Fonte: Fotografia do autor (2025).

Figura 28 - Registro da oficina/atividade realizada com licenciandos em Matemática na FFP/UERJ



Fonte: Fotografia do autor (2025).

4.5 Percepções sobre a Atividade

Com o objetivo de avaliar as percepções sobre a proposta desenvolvida, foram aplicados dois questionários logo após a realização das atividades com os participantes. O primeiro foi direcionado a uma turma do ensino básico, buscando compreender como os alunos se engajaram com a experiência e interpretaram os conceitos trabalhados. O segundo foi aplicado a graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da FFP/UERJ, com a intenção de captar a visão de futuros professores sobre a aplicabilidade didática e o potencial formativo da abordagem. Nesta seção, apresentamos de maneira geral os resultados obtidos a partir desses questionários.

4.5.1 Questionário aplicado aos alunos de Ensino Médio e análise dos resultados

As perguntas do questionário foram cuidadosamente formuladas para abranger aspectos cognitivos, afetivos e pedagógicos da experiência. Este instrumento de coleta está diretamente relacionado ao tema central desta dissertação, buscando compreender como os conceitos abstratos da aritmética modular podem ser explorados de maneira concreta, visual e interdisciplinar em sala de aula.

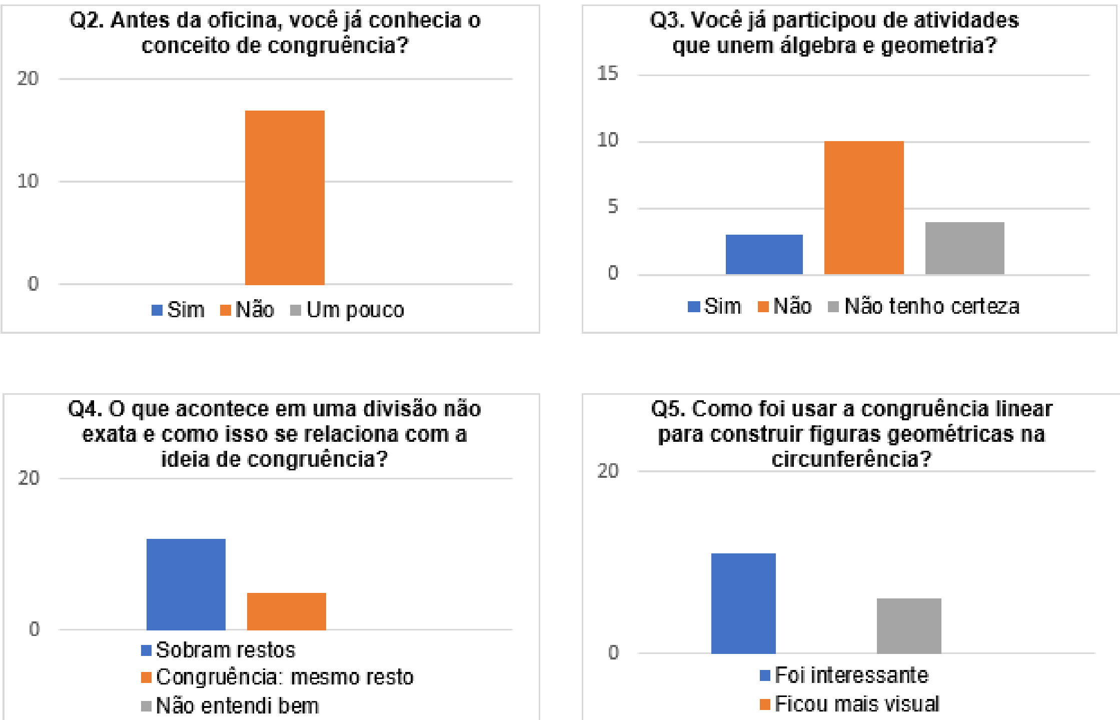
Inicialmente, são coletadas informações básicas dos alunos, o que permite traçar perfis. Em seguida, as questões exploram o conhecimento prévio (perguntas 2 e 3), a compreensão de conceitos matemáticos associados à congruência e à divisão com resto (pergunta 4), e a aplicabilidade desses conceitos em construções visuais utilizando ferramentas digitais como o GeoGebra (perguntas 5 e 6). Também se busca identificar as preferências dos alunos quanto às atividades propostas (pergunta 7) e verificar o impacto dessas experiências na compreensão e motivação para o aprendizado matemático (perguntas 8 e 9). Por fim, a última questão (10) investiga a percepção dos estudantes sobre a relevância e aplicabilidade da abordagem adotada, visando avaliar se ela contribui para tornar a matemática mais acessível e significativa.

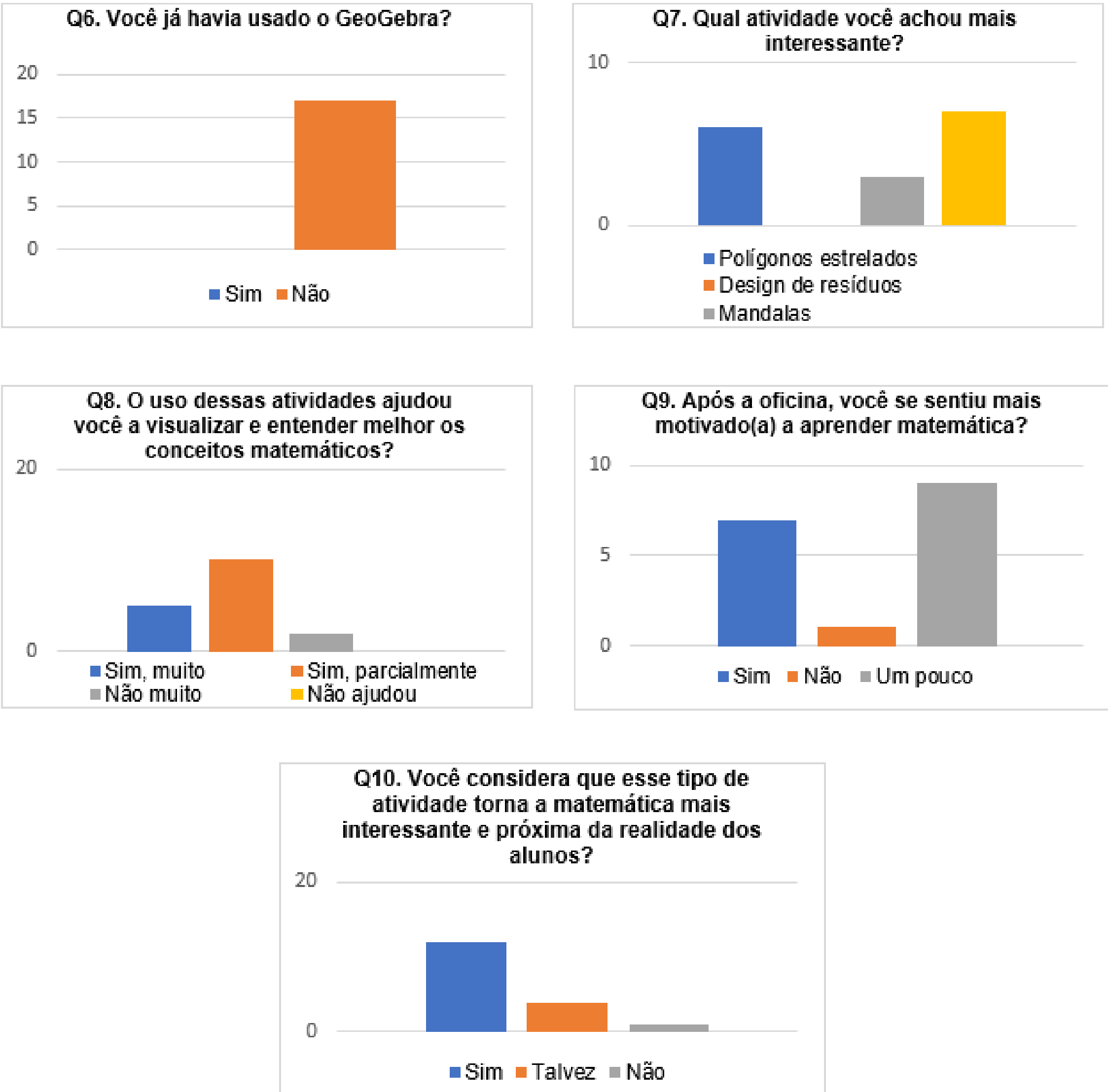
Se optou majoritariamente por perguntas de seleção (fechadas), com alternativas cuidadosamente elaboradas, a fim de facilitar a tabulação, a análise estatística e a posterior apresentação dos resultados de forma clara e objetiva. Essa escolha metodológica permite comparar as respostas entre os participantes, identificar padrões e avaliar de maneira mais sistemática os efeitos da proposta didática sobre o processo de ensino-aprendizagem. Dessa forma, o questionário se mostra pertinente e bem alinhado com os objetivos da pesquisa, fornecendo subsídios importantes para a análise do impacto pedagógico da oficina. Ele permite verificar se o uso do design residual e de representações visuais associadas à aritmética modular favorece uma aprendizagem mais significativa, lúdica e conectada ao cotidiano dos alunos, além de oferecer indicadores para possíveis melhorias na proposta didática apresentada.

Ressalta-se que o questionário aplicado, em sua íntegra, encontra-se disponibilizado no Anexo C, e que as versões respondidas pelos alunos estão reunidas no Anexo D, de modo a assegurar a transparência do processo metodológico e possibilitar futuras análises por parte de outros pesquisadores.

Na Figura 29, apresentam-se as respostas dos alunos em formato de diagrama de barras, o que possibilita uma visualização clara e objetiva da distribuição das escolhas realizadas.

Figura 29 - Respostas dos alunos ao questionário aplicado no ensino médio em formato de diagrama de barras





Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

A análise das respostas do questionário permitiu identificar aspectos significativos da oficina e compreender como os alunos perceberam a proposta didática. Os resultados mostraram que nenhum dos participantes da oficina aplicada no ensino médio possuía conhecimento prévio sobre o conceito de congruência, e que a maioria nunca havia participado de atividades que integrassem Álgebra e Geometria. Esse dado reforça a pertinência da abordagem adotada, uma vez que a articulação entre diferentes campos da Matemática, embora essencial para o desenvolvimento de um pensamento mais integrado, ainda é pouco explorada nas práticas escolares.

Neste ponto da análise do questionário, destaca-se o que descrevem autores como D'Amore (7) e Fiorentini e Lorenzato (12), que indicam como a fragmentação do ensino matemático tende a dificultar a construção de significados pelos estudantes. Propostas que buscam estabelecer pontes entre áreas distintas favorecem a compreensão e a mobilização de diferentes registros de representação, tal como o executado na proposta didática apresentada neste trabalho.

Quando questionados sobre a divisão não exata e sua relação com a congruência, a maior parte dos alunos conseguiu associar corretamente o conceito ao resto da divisão, enquanto um grupo menor o relacionou à definição formal. Essa diversidade de respostas sugere que a oficina possibilitou diferentes níveis de compreensão conceitual. Assim, mesmo sem domínio formal inicial, os alunos foram capazes de estabelecer conexões coerentes com suas experiências anteriores, demonstrando uma compreensão funcional do conceito e um caminho gradual em direção à formalização.

De acordo com Ausubel (1), o aprendizado promovido nesta atividade pode ser classificado como aprendizagem significativa, pois o novo conhecimento foi incorporado de maneira conectada às ideias pré-existentes dos alunos. Em outras palavras, eles não apenas memorizaram procedimentos, mas entenderam como os conceitos se relacionam e podem ser aplicados, o que favorece a retenção e a utilização do conhecimento em contextos variados.

As respostas referentes às atividades práticas revelaram uma avaliação amplamente positiva. Todos os alunos destacaram o uso da congruência na construção de figuras geométricas como um fator motivador, com menções frequentes à construção de polígonos estrelados como a etapa mais envolvente. Outro dado relevante foi que nenhum aluno do ensino médio havia utilizado o software GeoGebra anteriormente, tornando a oficina o primeiro contato com a ferramenta. Segundo os relatos, o uso do programa facilitou a visualização das propriedades estudadas, permitindo experimentar, testar e comprovar relações matemáticas de maneira dinâmica. O ambiente interativo proporcionado pelo

GeoGebra ampliou o engajamento dos alunos, transformando o espaço da sala de aula em um ambiente investigativo, no qual o erro e a experimentação assumiram papel construtivo.

De modo geral, as respostas ao questionário indicam que a oficina foi bem recebida pelos participantes e alcançou seus objetivos formativos. A maioria dos alunos afirmou que as atividades facilitaram a compreensão e a visualização dos conceitos de congruência, além de aumentarem a motivação pelo estudo da Matemática. A proposta mostrou-se eficaz como estratégia didática capaz de articular teoria e prática, promovendo não apenas o domínio conceitual, mas também uma mudança na atitude dos alunos diante da Matemática. Ao aproximar o conteúdo de sua aplicação concreta e estimular a investigação, a oficina contribuiu para o desenvolvimento de um pensamento matemático mais reflexivo e integrado, em consonância com as perspectivas contemporâneas da Educação Matemática.

4.5.2 Questionário aplicado a alunos de Licenciatura em Matemática e análise dos resultados

O questionário dos licenciandos em Matemática foi elaborado com o propósito de coletar suas impressões, percepções e experiências acerca da proposta didática vivenciada durante a oficina. As perguntas foram cuidadosamente estruturadas para contemplar diferentes dimensões da aprendizagem, possibilitando uma análise ampla sobre a relevância pedagógica e o potencial de aplicação dessa prática no contexto escolar.

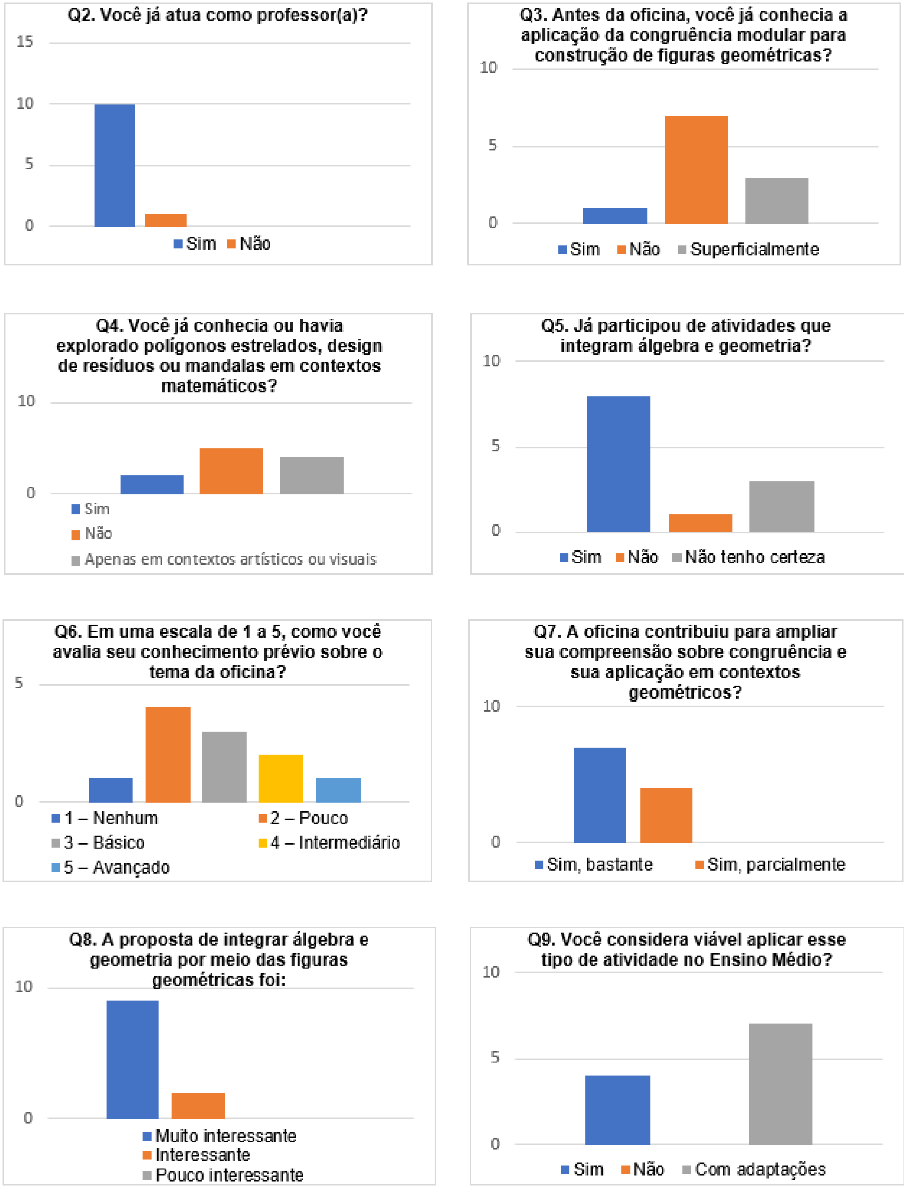
A primeira parte reúne questões de caráter geral, voltadas para identificar o perfil dos participantes e suas experiências prévias. Em seguida, a seção de conhecimento prévio e percepções sobre a oficina busca avaliar o impacto da atividade na compreensão de conceitos matemáticos e na articulação entre álgebra e geometria. Por fim, a seção dedicada ao uso de tecnologias digitais tem como objetivo investigar o papel de ferramentas como o GeoGebra e o pensamento computacional na mediação dos conteúdos e na promoção de aprendizagens mais significativas.

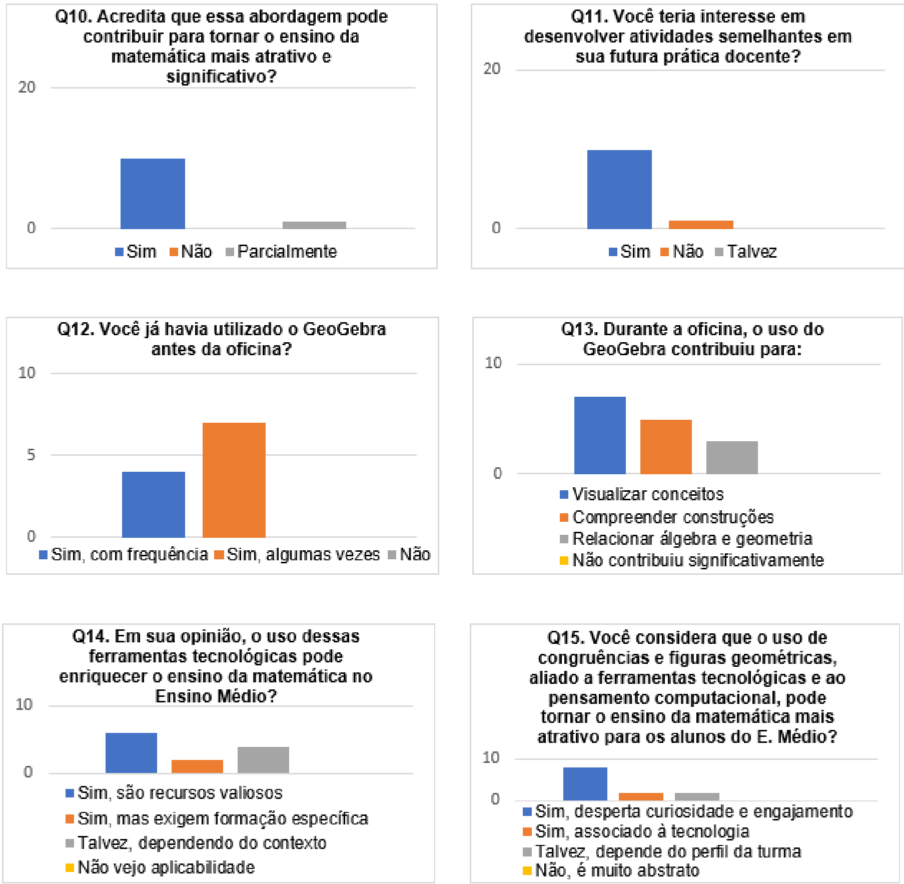
Essa divisão visa facilitar a análise das respostas e compreender, de forma sistemática, como diferentes aspectos, conhecimentos anteriores, percepções sobre a proposta e uso de tecnologias, interagem na formação inicial docente e na construção de práticas pedagógicas inovadoras para o ensino da Matemática.

Destaca-se que o questionário aplicado, em sua íntegra, encontra-se disponibilizado no Anexo E, e que as versões respondidas pelos licenciandos estão reunidas no Anexo F.

A Figura 30 apresenta as respostas dos licenciandos organizadas em diagrama de barras, o que torna a visualização da distribuição das escolhas mais clara e acessível.

Figura 30 - Respostas dos alunos ao questionário aplicado na Licenciatura em Matemática em formato de diagrama de barras





Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Na análise do questionário aplicado aos alunos do curso de Licenciatura observou-se que a maioria dos participantes já atua como professor, o que influenciou a percepção sobre as atividades. Em relação ao conhecimento prévio, poucos demonstraram familiaridade com a aplicação da congruência modular na construção de figuras geométricas, predominando respostas negativas ou superficiais. Situação semelhante ocorreu quanto ao contato com polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas, sendo que parte dos estudantes os conhecia apenas em contextos artísticos, sem associação direta ao conteúdo matemático. Por outro lado, mais da metade já havia participado de atividades que integravam álgebra e geometria, embora a autoavaliação sobre o domínio do tema tenha indicado níveis entre "pouco" e "básico", com apenas um aluno classificando-se em nível avançado.

Quanto às contribuições da oficina, todos os licenciandos afirmaram ter ampliado a compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos, destacando a integração entre álgebra e geometria por meio das figuras geométricas como uma abordagem "muito interessante". A aplicação da proposta no Ensino Médio foi considerada viável, embora sete alunos tenham apontado a necessidade de adaptações. De forma geral, quase todos reconheceram que a oficina pode tornar o ensino da Matemática mais atrativo e significativo, e dez participantes manifestaram interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente. Esses resultados reforçam o potencial de práticas que articulam teoria, prática e investigação.

Em relação ao uso de tecnologias digitais, observou-se que todos os licenciandos já possuíam familiaridade com o GeoGebra. Os participantes destacaram que a ferramenta contribuiu para visualizar conceitos geométricos, compreender a construção das figuras e estabelecer relações entre álgebra e geometria. Nas questões 13, 14 e 15, alguns alunos assinalaram mais de uma alternativa, indicando opiniões diferentes sobre a aplicação das tecnologias. Um participante comentou que a viabilidade do uso do software *"depende também da escola conseguir fornecer o necessário"*, evidenciando a importância de considerar as condições reais de implementação no contexto escolar. A utilização do GeoGebra ilustra como a visualização e a manipulação de representações geométricas podem favorecer a compreensão de conceitos abstratos e a construção de significados, conforme apontado por autores como Duval (11).

Por fim, a análise mostra que grande parte dos licenciandos avaliou positivamente a combinação entre congruências, figuras geométricas, pensamento computacional e tecnologias digitais, reconhecendo seu potencial para despertar curiosidade, engajamento e tornar o ensino mais atrativo. Ao mesmo tempo, os participantes destacaram a necessidade de adequações conforme o perfil da turma e os recursos disponíveis, reforçando a importância de contextualizar a aplicação de metodologias inovadoras ao ambiente escolar concreto.

CONCLUSÃO

Os fundamentos da Aritmética Modular, envolvendo relações de equivalência, divisibilidade e congruências com suas propriedades, constituem uma ferramenta essencial para a compreensão dos números inteiros. Eles permitem enxergar os inteiros separados como se fossem "gavetas" ou classes residuais, nas quais cada número ocupa um lugar específico de forma cíclica. Essa perspectiva evidencia que o resto da divisão euclidiana não é apenas um cálculo, mas uma maneira de estruturar os inteiros em padrões simétricos, facilitando a compreensão de congruências lineares e das relações entre os números. Dessa forma, os conceitos estudados fornecem uma base teórica sólida para analisar e representar sistematicamente os inteiros, ressaltando a estrutura lógica da Aritmética Modular e sua aplicabilidade em representações visuais e exploratórias.

Com base nesses fundamentos, a proposta desenvolvida nesta dissertação mostrou-se eficaz para tornar o estudo da Aritmética Modular mais compreensível, interessante e visualmente envolvente. A conexão entre conceitos aritméticos e construções geométricas permitiu que os alunos observassem padrões, relações e simetrias de forma concreta, contribuindo para a compreensão conceitual e a valorização da Matemática como uma experiência criativa. O uso do GeoGebra revelou-se um recurso pedagógico essencial, possibilitando a experimentação dinâmica e a exploração visual das congruências modulares.

Durante a aplicação, observou-se que os alunos inicialmente apresentaram dificuldades em compreender que uma divisão não exata ocorre quando o resto não é zero. Muitos forneceram respostas incorretas, como números decimais ou o dividendo menor que o divisor. Esse desafio evidenciou a importância de organizar a aplicação da proposta de forma gradual, em etapas, permitindo que os estudantes entendessem cada conceito antes de avançar para o próximo. Assim, sugere-se que as atividades sejam realizadas uma etapa por aula, em vez de serem concentradas em dois tempos de 50 minutos, reforçando a aprendizagem de forma consistente.

Para a construção das figuras geométricas, especialmente das circunferências, recomenda-se o uso do compasso, conforme os recursos disponíveis. Essa prática permite posicionar os pontos igualmente espaçados. Além disso, contribui para a percepção dos padrões e fortalecendo a simetria e representação visual. A combinação de etapas graduais, exploração prática e recursos visuais mostrou-se eficiente para engajar os alunos e estimular o pensamento investigativo.

Em síntese, esta pesquisa reforça que metodologias que integram aritmética, geometria e tecnologia podem transformar a aprendizagem da Matemática, tornando-a mais significativa e prazerosa. A Aritmética Modular, quando apresentada de forma visual e interativa, não apenas se torna mais acessível, como também evidencia sua dimensão estética e criativa. Espera-se que os resultados aqui apresentados sirvam de referência para práticas pedagógicas inovadoras, capazes de despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes, consolidando conceitos matemáticos de maneira concreta e envolvente.

REFERÊNCIAS

1 AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Plátano, 2003.

2 BELTRÁN, M. P.; RODRÍGUEZ, R. G. **Modular arithmetic in the high school math classroom**. [*S. l.: s. n.*], 2019. Acesso em: 18 set. 2025. Disponível em: `https://www.researchgate.net/publication/371123371`.

3 BERGGREN, J. L. **Mathematics in the Medieval Islamic World**. London: Variorum, 1986.

4 BOYER, Carl B. **A History of Mathematics**. 2nd. New York: John Wiley & Sons, 1991.

5 BRASIL. **Ministério da Educação.** Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018. p. 600.

6 BURTON, David M. **The history of mathematics : an introduction**. New York: McGraw-Hill, 2011.

7 D'AMORE, B. **Didática da Matemática**. São Paulo: Ática, 2007.

8 DAVENPORT, H. **The Higher Arithmetic: An Introduction to the Theory of Numbers**. 8th. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

9 DOMINGUES, Higino. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Saraiva, 2018.

10 DURIS, Viliam. Fundamental Contributions in the History of Number Theory. **Acta Mathematica Nitriensia**, v. 8, n. 1, p. 01–10, 2022.

11 DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Edição: S. D. Machado. Campinas: Papirus, 2003.

12 FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2012.

13 FRANK AYRES, Jr. **Álgebra Moderna**. México: McGraw-Hill, 2003.

14 FREIRE, Benedito Tadeu Vasconcelos. **Notas de Aula Teoria dos Números**. Rio Grande do Norte: Ciência Moderna, 2009.

15 GAUSS, Carl Friedrich. **Disquisitiones arithmeticae**. (1863). Lipsiae: [*s. n.*], 1801. p. 714.

16 GAUSS, Carl Friedrich. **Disquisitiones arithmeticae**. (1863). Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1995. p. 495.

17 HEFEZ, Abramo. **Elementos de aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de matemática, 2005.

18 JÖRISSEN, B. *et al.* How do students revisit school mathematics in modular arithmetic? Conditions and affordances of the transition to tertiary mathematics with a focus on learning processes. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**, v. 5, p. 248–269, 2019. Acesso em: 18 set. 2025. Disponível em: `https://link.springer.com/article/10.1007/s40753-019-00088-3`.

19 LO, Wing Yee. Unpacking mathematics pedagogical content knowledge for elementary number theory: The case of arithmetic word problems. **Mathematics**, v. 8, n. 10, p. 1750, 2020. Acesso em: 18 set. 2025. Disponível em: `https://www.mdpi.com/2227-7390/8/10/1750`.

20 MCCOOEY, David. **Poliedros visuais**: Kepler-Poinsot Polyhedra. [*S. l.*]: https://dmccooey.com/polyhedra/KeplerPoinsot.html, Acesso em: 23 jul. 2025, 2015.

21 OBMEP. **Tópicos Adicionais**: Aritmética Modular. Rio de Janeiro: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/5oeoy5b8w0gso.pdf, Acesso: 14/07/2025, s.d.

22 PORTO, P. R. C. **A aritmética modular das estrelas e dos chryzodes**. 1. ed. Curitiba, Paraná: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2024.

23 ROSEN, Kenneth H. **Matemática discreta e suas aplicaços**. 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2010. p. 982.

24 SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1998. p. 103.

25 STANFORD, Charles Thomas. **Página de título da primeira versão em inglês dos Elementos de Euclides, de Sir Henry Billingsley (1570)**. [*S. l.: s. n.*], 1570. Wikipedia: a enciclopédia livre. Acesso em: 13 out. 2025. Licença: Domínio público. Disponível em: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Title_page_of_Sir_Henry_Billingsley%27s_first_English_version_of_Euclid%27s_Elements,_1570_(560x900).jpg`. Acesso em: 13 out. 2025.

26 STILLWELL, John. **Mathematics and Its History**. 2nd. New York: Springer, 2002.

27 SWETZ, Frank J. **Mathematical Treasure: Bachet's Arithmetic of Diophantus**. [*S. l.: s. n.*], 2000. Mathematical Association of America. Inclui a edição de 1670 de Bachet dos Livros I a VI da *Arithmetica* de Diofanto, com comentários de Pierre de Fermat. Acesso em: 13 out. 2025. Disponível em: https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-bachets-arithmetic-of-diophantus.

28 VIDIGAL, Angela et al. **Fundamentos de Álgebra**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005. p. 201.

29 WALL, H. S. **Number Theory: Classical and Modern**. New York: Springer, 2014.

30 WEIL, André. **Number Theory: An Approach through History from Hammurapi to Legendre**. Boston: Birkhäuser, 1984.

ANEXO A – Material didático e folhas com respostas das

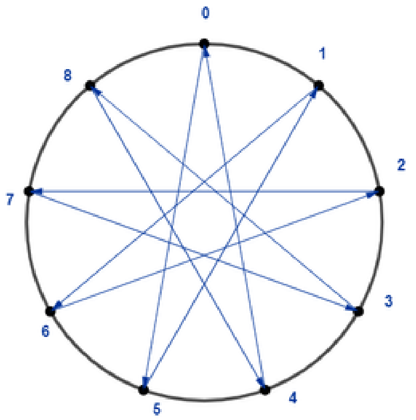
Material didático elaborado para a aplicação da proposta em sala de aula, contemplando os recursos necessários a cada etapa da atividade. Nele encontram-se tanto as instruções destinadas aos alunos quanto as folhas de respostas correspondentes, de modo a fornecer suporte completo para a reprodução e o acompanhamento da prática por professores, monitores ou demais interessados.

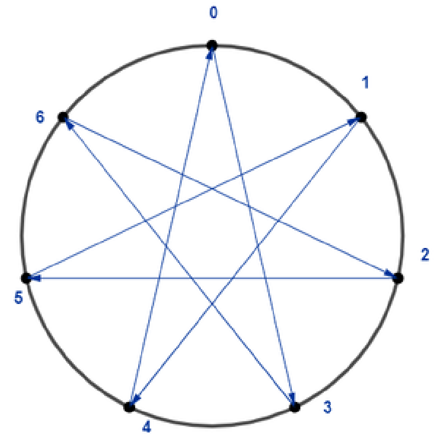
1ºETAPA

FIGURAS GEOMÉTRICAS

1

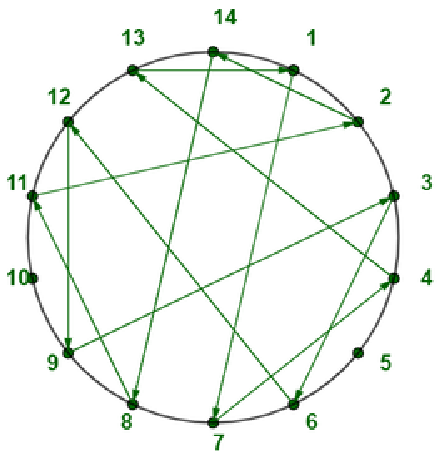
POLÍGONO ESTRELADOS

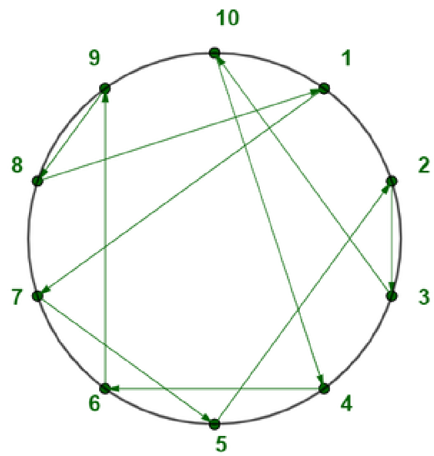




2

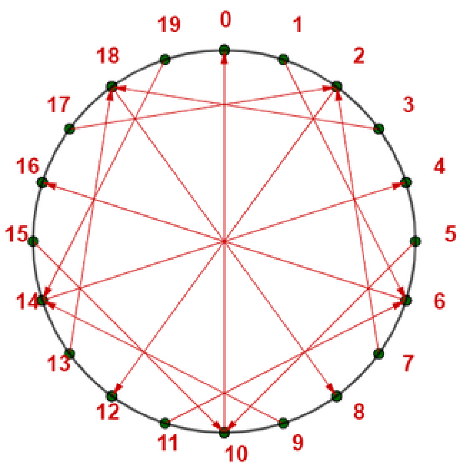
DESIGN DE RESÍDUOS

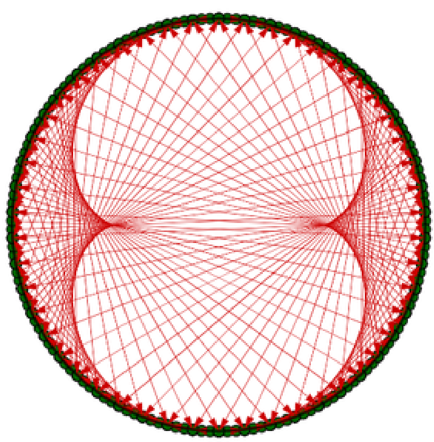




3

MANDALAS





2ºETAPA

DIVISÃO NÃO EXATA

1

DIVISÃO NÃO EXATA

$$D = q \cdot d + r \text{ com } 0 \leq r < d$$

- ***D*** é o dividendo e ***d*** é o divisor;
- ***q*** é o quociente da divisão de ***D*** por ***d***;
- ***r*** é o resto dessa divisão.

2

EXEMPLO

Dividindo 38 por 7, temos:

$$\begin{array}{r|l} 38 & 7 \\ \hline 3 & 5 \end{array}$$

ou seja, 38 = 5.7+3

Portanto, o quociente é 5 e o resto é 3.

ANOTAÇÕES

1

EXERCÍCIO

Preencha a tabela abaixo, com os restos da divisão dos números naturais de 0 a 15 pelos divisores indicados:

Números Naturais	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resto da divisão por 2	0	1	0	1	0	1	0	1								
Resto da divisão por 3	0	1	2	0	1	2	0									
Resto da divisão por 4	0	1	2	3												
Resto da divisão por 5																
Resto da divisão por 6																
Resto da divisão por 7																

2ºETAPA

DIVISÃO NÃO EXATA

2

EXERCÍCIO

O ano de 2025 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

RASCUNHO

3ºETAPA

CONGRUÊNCIA

1

CONGRUÊNCIA

Dado um número inteiro positivo m, dizemos que dois números inteiros a e b são ***congruentes módulo*** m quando m divide a diferença $a - b$.

2

NOTAÇÃO

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (a-b)$$

Equivale a dizer que $(a - b) = m \cdot q$, para algum número inteiro q.

3

SÍMBOLOS

- $\equiv$ significa "é congruente a";
- $\not\equiv$ significa "não é congruente a";
- (*mod m)* indica que estamos considerando divisões por m;
- $\mid$ significa "divide";
- $\nmid$ significa "não divide".

4

OBSERVE QUE:

- $a \equiv a \pmod{m}$.
- Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$.
- Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$.

3ºETAPA

CONGRUÊNCIA

1 EXEMPLO

Verifique as congruências abaixo:

a) $14 \equiv 8 \ (mod\ 3) \Leftrightarrow \ 3|(14-8) \Leftrightarrow \ 3|6$

(Veja que, ao dividir 14 por 3, o resto é 2, e que, ao dividir 8 por 3, o resto também é 2).

b) $45 \equiv 24 \ (mod\ 7) \Leftrightarrow 7|(45-24) \Leftrightarrow 7|21$

(Veja que, ao dividir 45 por 7, o resto é 3, e que, ao dividir 24 por 7, o resto também é 3).

c) $23 \equiv 9 \ (mod\ 4) \Leftrightarrow 4|(23-9) \Leftrightarrow 4 \nmid 14$

(Veja que, ao dividir 23 por 4, o resto é 3, e que, ao dividir 9 por 4, o resto é 1).

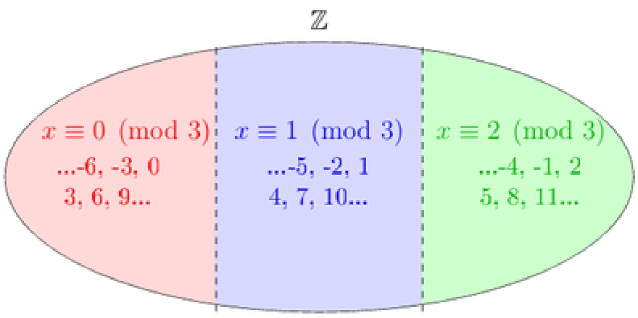
Portanto, $23 \not\equiv \ 9 \ (mod\ 4)$.

ANOTAÇÕES

2 EXEMPLO

ANOTAÇÕES

Ao dividirmos um número x por 3, ele pode deixar como resto apenas 0, 1 ou 2.



PARTIÇÃO

3 EXERCÍCIO

Verifique as congruências abaixo:

a) $19 \equiv 7 \ (mod\ 6)$

b) $34 \equiv 11 \ (mod\ 5)$

c) $52 \equiv 16 \ (mod\ 9)$

RASCUNHO

4ºETAPA

CONSTRUÇÃO DE FIGURAS COM CONGRUÊNCIAS

1 POLÍGONO ESTRELADO

1°. Explique aos alunos que é possível formar estrelas ligando pontos igualmente espaçados em uma circunferência.

2°. Introduza as letras n (quantidade de pontos/pontas) e k (salto entre os vértices).

3°. Mostre que a construção só é válida quando:

- $1 < k < n-1$
- $\text{mdc}(n,k)=1$

4°. Peça que os alunos utilizem as circunferências impressas, dividam em n partes iguais e numerem os pontos de 0 a n−1.

5°. Oriente-os a preencher as tabelas com os valores:

$$x=t.k,\ \ y \equiv x+k \pmod{n},\ t=0,1,\dots,n-1$$

6°. Construção da estrela: Os alunos devem conectar os pontos da circunferência seguindo as conexões x→y, lembrando que t indica os vértices numerados.

ANOTAÇÕES

2 DESIGN DE RESÍDUOS

1°. Explique aos alunos que devem fixar o módulo m.

2°. Escolher n tal que $1 \leq n < m$ e $\text{mdc}(m,n) = 1$.

3°. Usar as folhas de atividades para dividir a circunferência em $m - 1$ partes iguais e numerar os pontos de 1 a m−1.

4°. Preencher as tabelas com os pares:

$$(x, y),\ y \equiv n \cdot x \pmod{m}$$

5°. Conectar os pontos conforme indicado.

3 MANDALAS

1°. Fixar m e escolher qualquer n positivo.

2°. Dividir a circunferência impressa em m partes iguais, numerando de 0 até $m - 1$.

3°. Preencher as tabelas com os pares (x,y), onde:

$$y \equiv n \cdot x \pmod{m}$$

4°.Conectar os pontos correspondentes para visualizar o padrão.

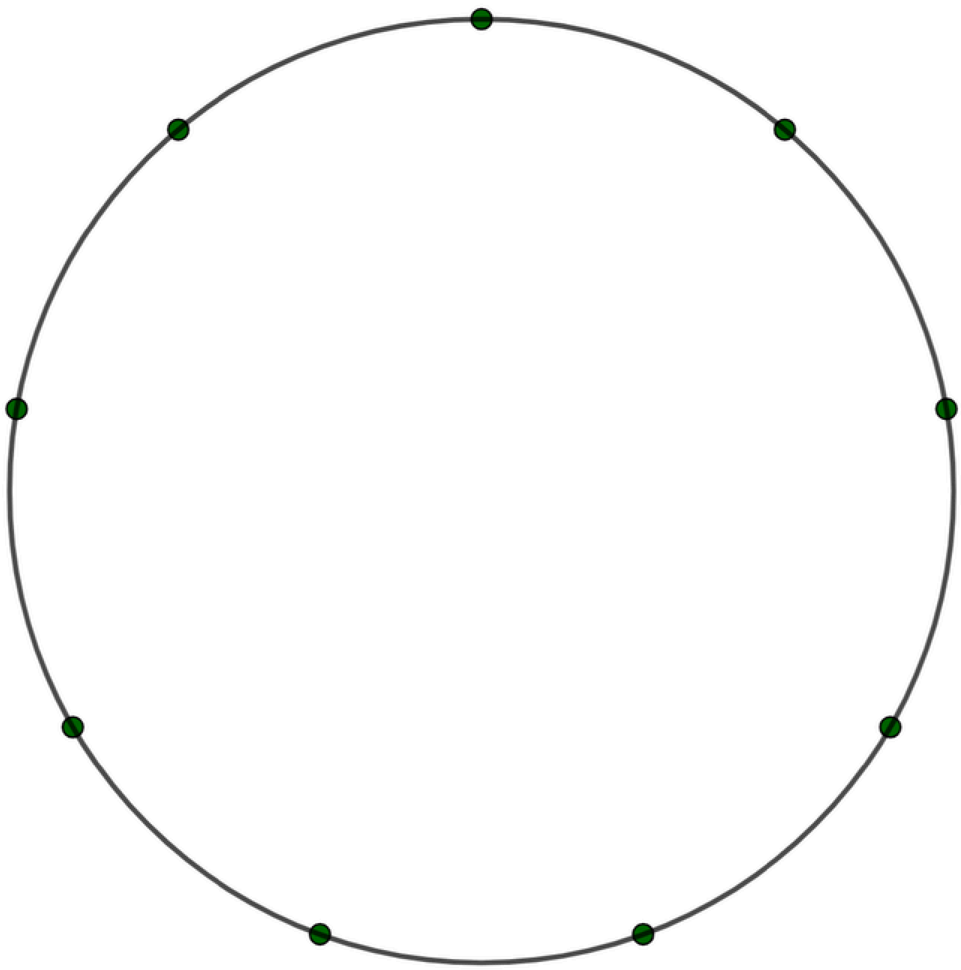
4°ETAPA

CONSTRUÇÃO DE FIGURAS COM CONGRUÊNCIAS

4

EXERCÍCIO

Construir um polígono estrelado de n = 9 e k = 5.



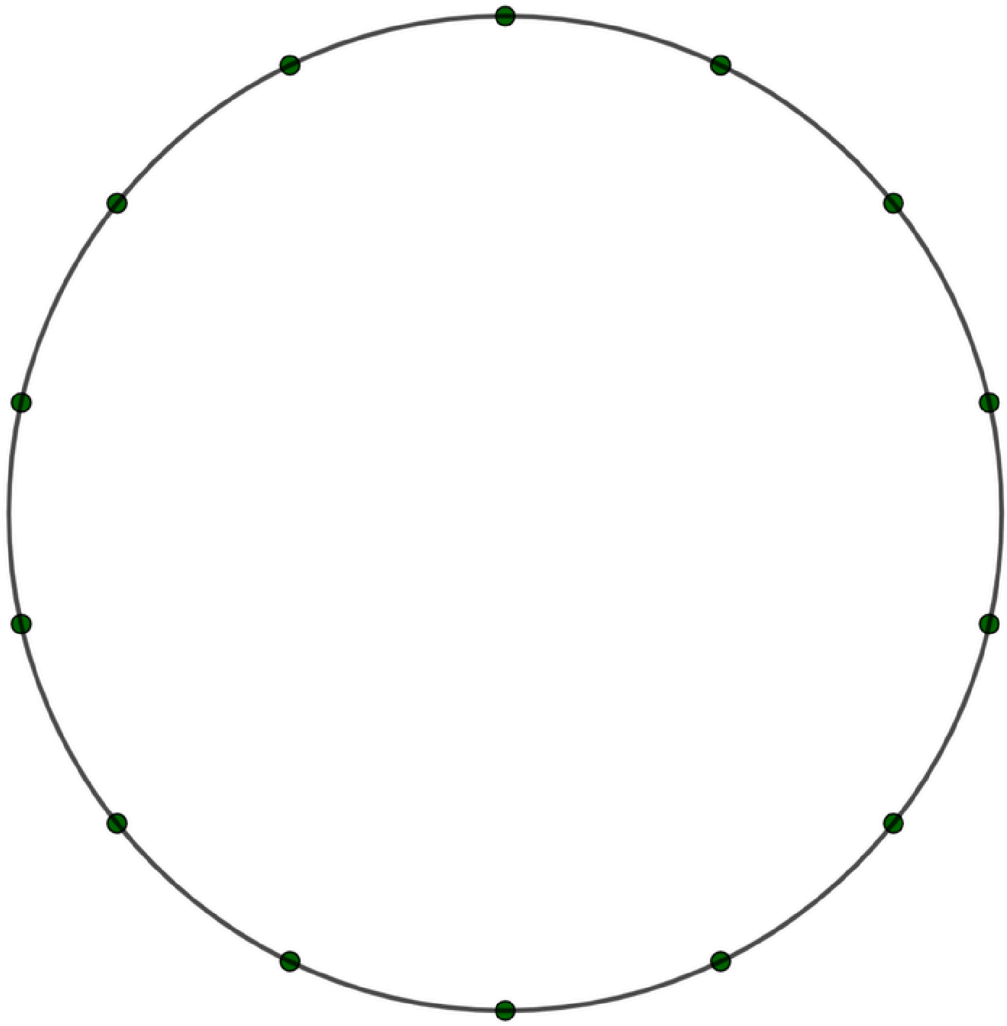
4°ETAPA

CONSTRUÇÃO DE FIGURAS COM CONGRUÊNCIAS

5

EXERCÍCIO

Construir um design de resíduos de m = 15 e n = 7



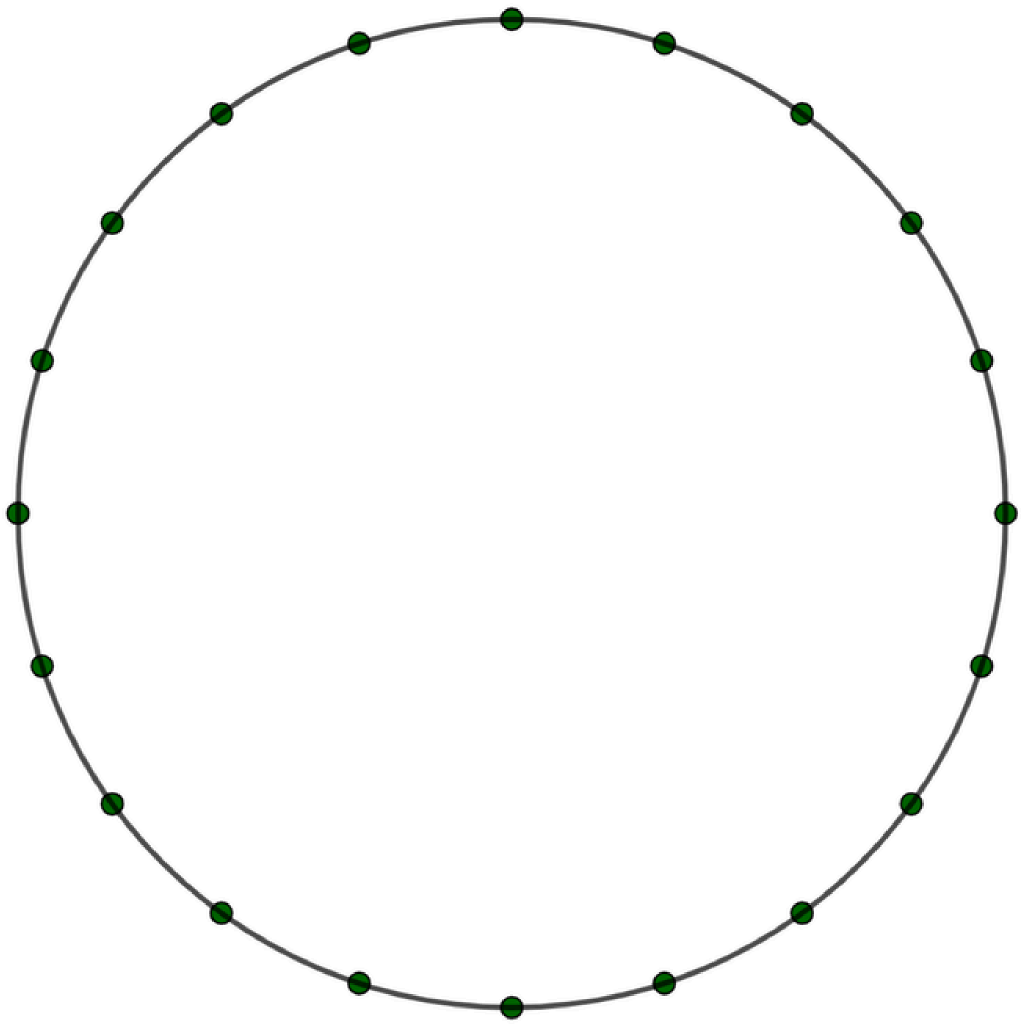
4°ETAPA

CONSTRUÇÃO DE FIGURAS COM CONGRUÊNCIAS

6

EXERCÍCIO

Construir uma mandala modular (20,6).



SOLUÇÕES

1

Preencha a tabela abaixo: com os restos da divisão dos números naturais de 0 a 15 pelos divisores indicados:

Números Naturais	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resto da divisão por 2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Resto da divisão por 3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
Resto da divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
Resto da divisão por 5	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
Resto da divisão por 6	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3
Resto da divisão por 7	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1

2

O ano de 2025 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

Dividindo 365 por 7, obtemos quociente 52 e resto 1, ou seja:

$$365 = 52.7+1$$

Isso significa que o dia 1° de Janeiro de 2026 será um dia após a quarta-feira — ou seja, uma quinta-feira. Logo, o dia 31 de dezembro de 2025 cairá em uma quarta-feira.

Observação: Para anos não bissextos (com 365 dias), o ano começa e termina no mesmo dia da semana. Já nos anos bissextos (366 dias), o último dia do ano cai dois dias após o dia da semana inicial, pois:

$$366 = 52.7+2$$

dezembro de 2025

D	S	T	Q	Q	S	S
30	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	1	2	3

SOLUÇÕES

3

Verifique as congruências abaixo:

a) $19 \equiv 7$ (*mod 6*) $\Leftrightarrow 6|(19-7) \Leftrightarrow 6 \mid 12$
(Ao dividir 19 por 6, o resto é 1, e que, ao dividir 7 por 6, o resto também é 1).

b) $34 \equiv 11$ (*mod 5*) $\Leftrightarrow 5|(34-11) \Leftrightarrow 5 \nmid 23$
(Ao dividir 34 por 5, o resto é 4, e que, ao dividir 11 por 4, o resto é 3).
Portanto, $34 \not\equiv 11$ (*mod 5*).

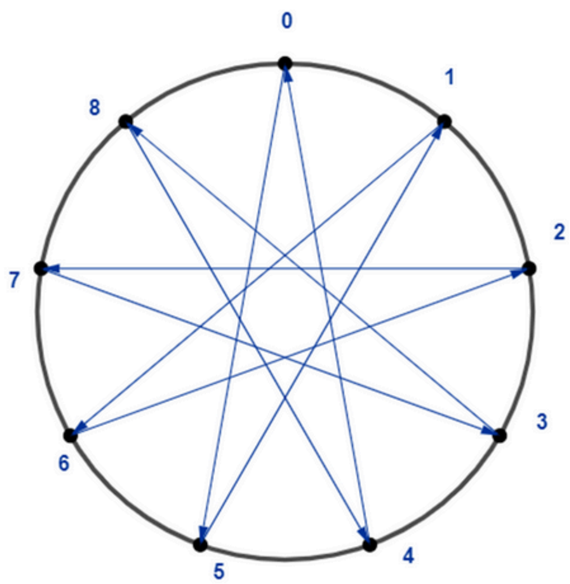
c) $52 \equiv 16$ (*mod 9*) $\Leftrightarrow 9|(52-16) \Rightarrow 9 \mid 36$
(Ao dividir 52 por 9, o resto é 7, e que, ao dividir 16 por 9, o resto também é 7).

4

Construir um polígono estrelado de n = 9 e k = 5.

- $x = 0 \cdot 5 = 0 \Rightarrow y \equiv 0 + 5 \equiv 5 \pmod 9$
- $x = 1 \cdot 5 = 5 \Rightarrow y \equiv 5 + 5 \equiv 10 \equiv 1 \pmod 9$
- $x = 2 \cdot 5 = 10 \Rightarrow y \equiv 10 + 5 \equiv 15 \equiv 6 \pmod 9$
- $x = 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow y \equiv 15 + 5 \equiv 20 \equiv 2 \pmod 9$
- $x = 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow y \equiv 20 + 5 \equiv 25 \equiv 7 \pmod 9$
- $x = 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow y \equiv 25 + 5 \equiv 30 \equiv 3 \pmod 9$
- $x = 6 \cdot 5 = 30 \Rightarrow y \equiv 30 + 5 \equiv 35 \equiv 8 \pmod 9$
- $x = 7 \cdot 5 = 35 \Rightarrow y \equiv 35 + 5 \equiv 40 \equiv 4 \pmod 9$
- $x = 8 \cdot 5 = 40 \Rightarrow y \equiv 40 + 5 \equiv 45 \equiv 0 \pmod 9$

Polígono Estrelado (9, 5)



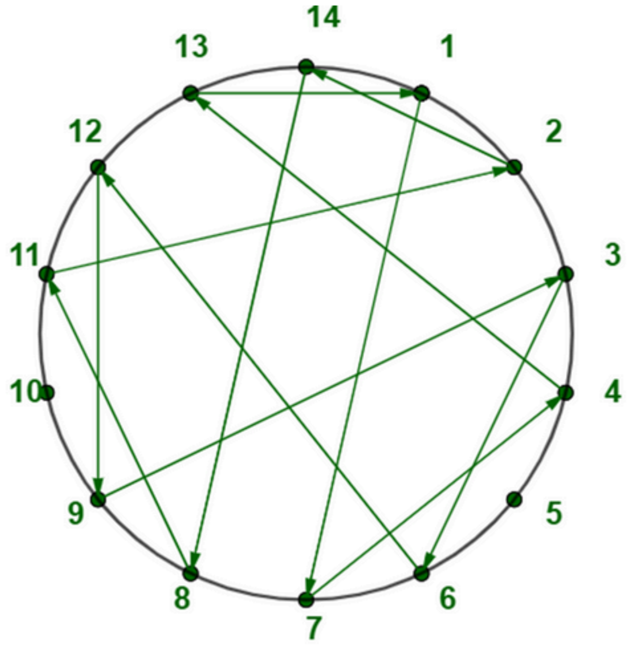
SOLUÇÕES

5

Construir um design de resíduos de m = 15 e n = 7.

- $x = 1$: $y \equiv 7 \cdot 1 = 7 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (1, 7)$;
- $x = 2$: $y \equiv 7 \cdot 2 = 14 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (2, 14)$;
- $x = 3$: $y \equiv 7 \cdot 3 = 21 \equiv 6 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (3, 6)$;
- $x = 4$: $y \equiv 7 \cdot 4 = 28 \equiv 13 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (4, 13)$;
- $x = 5$: $y \equiv 7 \cdot 5 = 35 \equiv 5 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (5, 5)$;
- $x = 6$: $y \equiv 7 \cdot 6 = 42 \equiv 12 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (6, 12)$;
- $x = 7$: $y \equiv 7 \cdot 7 = 49 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (7, 4)$;
- $x = 8$: $y \equiv 7 \cdot 8 = 56 \equiv 11 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (8, 11)$;
- $x = 9$: $y \equiv 7 \cdot 9 = 63 \equiv 3 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (9, 3)$;
- $x = 10$: $y \equiv 7 \cdot 10 = 70 \equiv 10 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (10, 10)$;
- $x = 11$: $y \equiv 7 \cdot 11 = 77 \equiv 2 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (11, 2)$;
- $x = 12$: $y \equiv 7 \cdot 12 = 84 \equiv 9 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (12, 9)$;
- $x = 13$: $y \equiv 7 \cdot 13 = 91 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (13, 1)$;
- $x = 14$: $y \equiv 7 \cdot 14 = 98 \equiv 8 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (14, 8)$.

Design de Resíduos (15, 7)

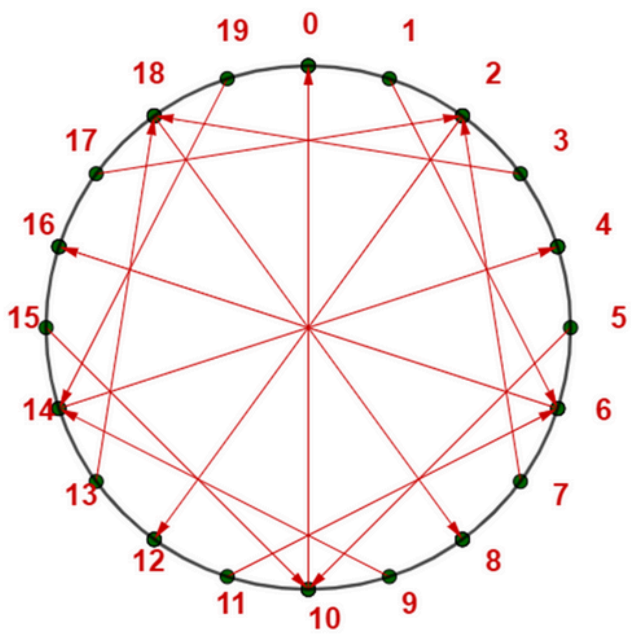


6

Construir uma mandala modular (20, 6).

- $x = 1; y \equiv 6 \cdot 1 \equiv 6 \ (mod\ 20) \Rightarrow (1, 6)$
- $x = 2; y \equiv 6 \cdot 2 \equiv 12 \ (mod\ 20) \Rightarrow (2, 12)$
- $x = 3; y \equiv 6 \cdot 3 \equiv 18 \ (mod\ 20) \Rightarrow (3, 18)$
- $x = 4; y \equiv 6 \cdot 4 \equiv 4 \ (mod\ 20) \Rightarrow (4, 4)$
- $x = 5; y \equiv 6 \cdot 5 \equiv 10 \ (mod\ 20) \Rightarrow (5, 10)$
- $x = 6; y \equiv 6 \cdot 6 \equiv 16 \ (mod\ 20) \Rightarrow (6, 16)$
- $x = 7; y \equiv 6 \cdot 7 \equiv 2 \ (mod\ 20) \Rightarrow (7, 2)$
- $x = 8; y \equiv 6 \cdot 8 \equiv 8 \ (mod\ 20) \Rightarrow (8, 8)$
- $x = 9; y \equiv 6 \cdot 9 \equiv 14 \ (mod\ 20) \Rightarrow (9, 14)$
- $x = 10; y \equiv 6 \cdot 10 \equiv 0 \ (mod\ 20) \Rightarrow (10, 0)$
- $x = 11; y \equiv 6 \cdot 11 \equiv 6 \ (mod\ 20) \Rightarrow (11, 6)$
- $x = 12; y \equiv 6 \cdot 12 \equiv 12 \ (mod\ 20) \Rightarrow (12, 12)$
- $x = 13; y \equiv 6 \cdot 13 \equiv 18 \ (mod\ 20) \Rightarrow (13, 18)$
- $x = 14; y \equiv 6 \cdot 14 \equiv 4 \ (mod\ 20) \Rightarrow (14, 4)$
- $x = 15; y \equiv 6 \cdot 15 \equiv 10 \ (mod\ 20) \Rightarrow (15, 10)$
- $x = 16; y \equiv 6 \cdot 16 \equiv 16 \ (mod\ 20) \Rightarrow (16, 16)$
- $x = 17; y \equiv 6 \cdot 17 \equiv 2 \ (mod\ 20) \Rightarrow (17, 2)$
- $x = 18; y \equiv 6 \cdot 18 \equiv 8 \ (mod\ 20) \Rightarrow (18, 8)$
- $x = 19; y \equiv 6 \cdot 19 \equiv 14 \ (mod\ 20) \Rightarrow (19, 14)$

Mandala (20, 6)



ANEXO B – Folhas de atividades para os alunos

Folhas de atividades destinadas aos alunos, contendo os exercícios e instruções necessárias para o desenvolvimento das tarefas propostas, bem como para a realização das construções previstas na atividade.

ATIVIDADES

1

EXERCÍCIO

Preencha a tabela abaixo, com os restos da divisão dos números naturais de 0 a 15 pelos divisores indicados:

Números Naturais	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resto da divisão por 2	0	1	0	1	0	1	0	1								
Resto da divisão por 3	0	1	2	0	1	2	0									
Resto da divisão por 4	0	1	2	3												
Resto da divisão por 5																
Resto da divisão por 6																
Resto da divisão por 7																

ATIVIDADES

2

EXERCÍCIO

O ano de 2025 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

RASCUNHO

ATIVIDADES

3

EXERCÍCIO

Verifique as congruências abaixo:

a) $19 \equiv 7 \ (mod\ 6)$

b) $34 \equiv 11 \ (mod\ 5)$

c) $52 \equiv 16 \ (mod\ 9)$

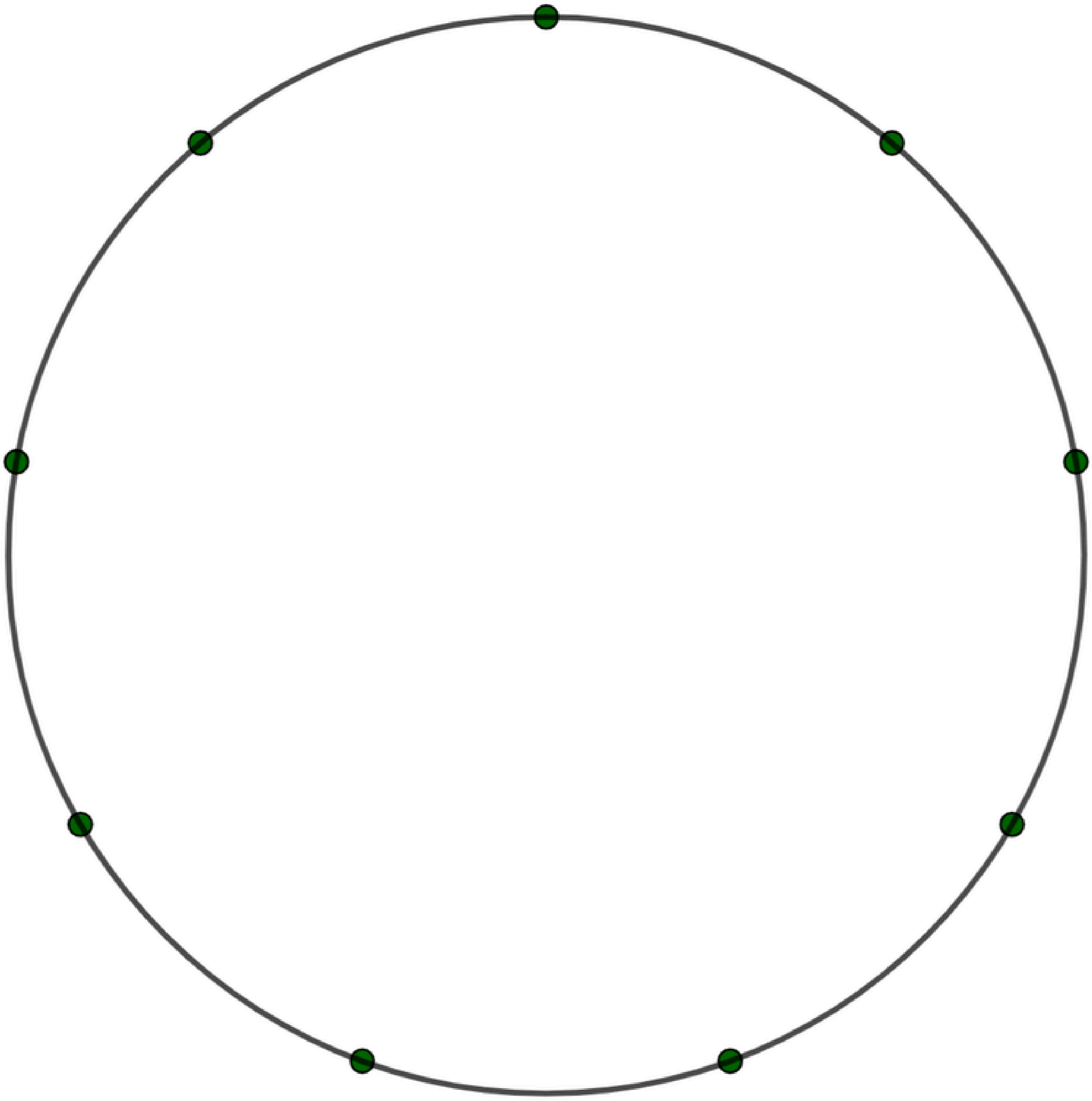
RASCUNHO

ATIVIDADES

4

EXERCÍCIO

Construir um polígono estrelado de n = 9 e k = 5.

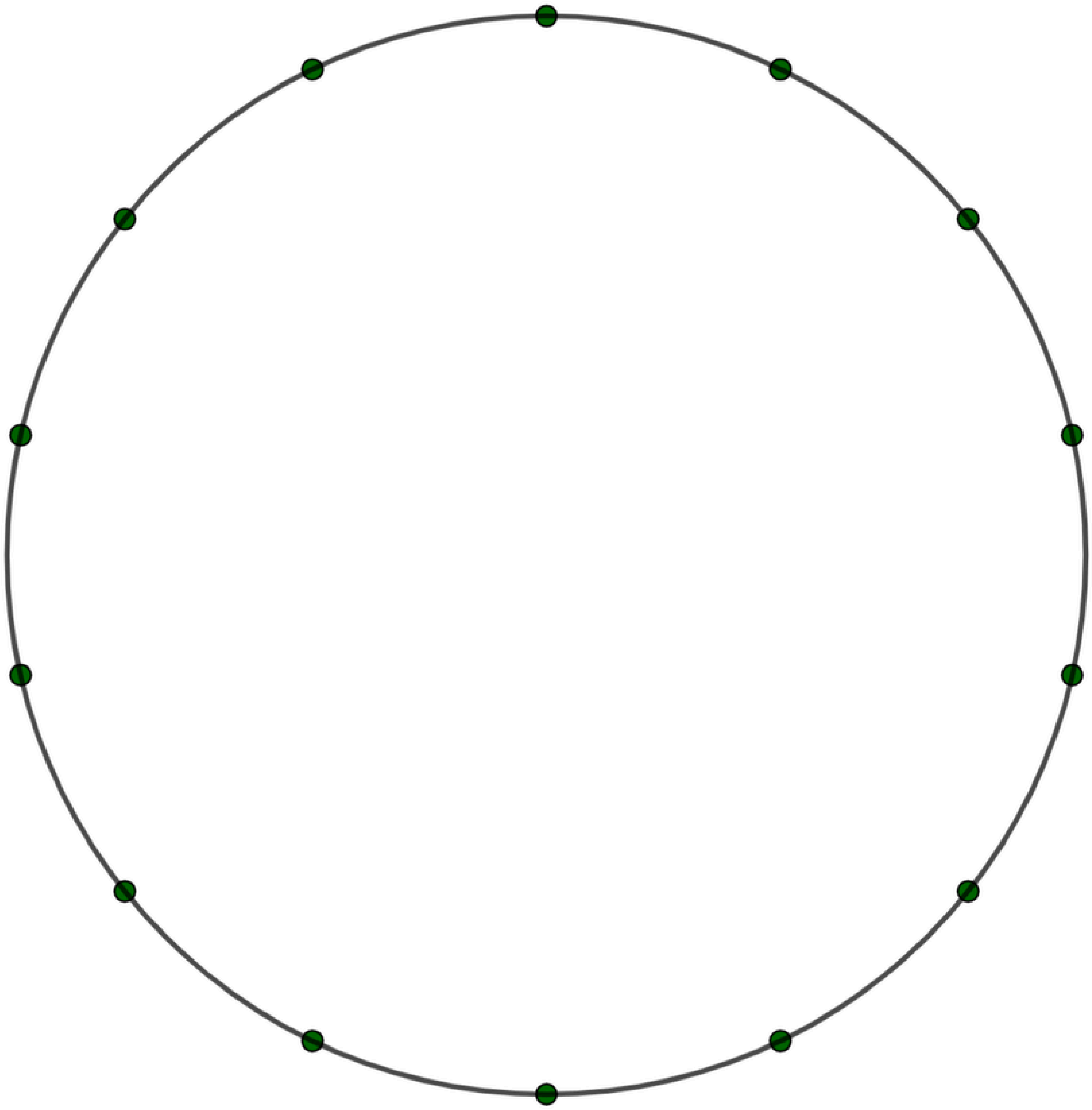


ATIVIDADES

5

EXERCÍCIO

Construir um design de resíduos de m = 15 e n = 7

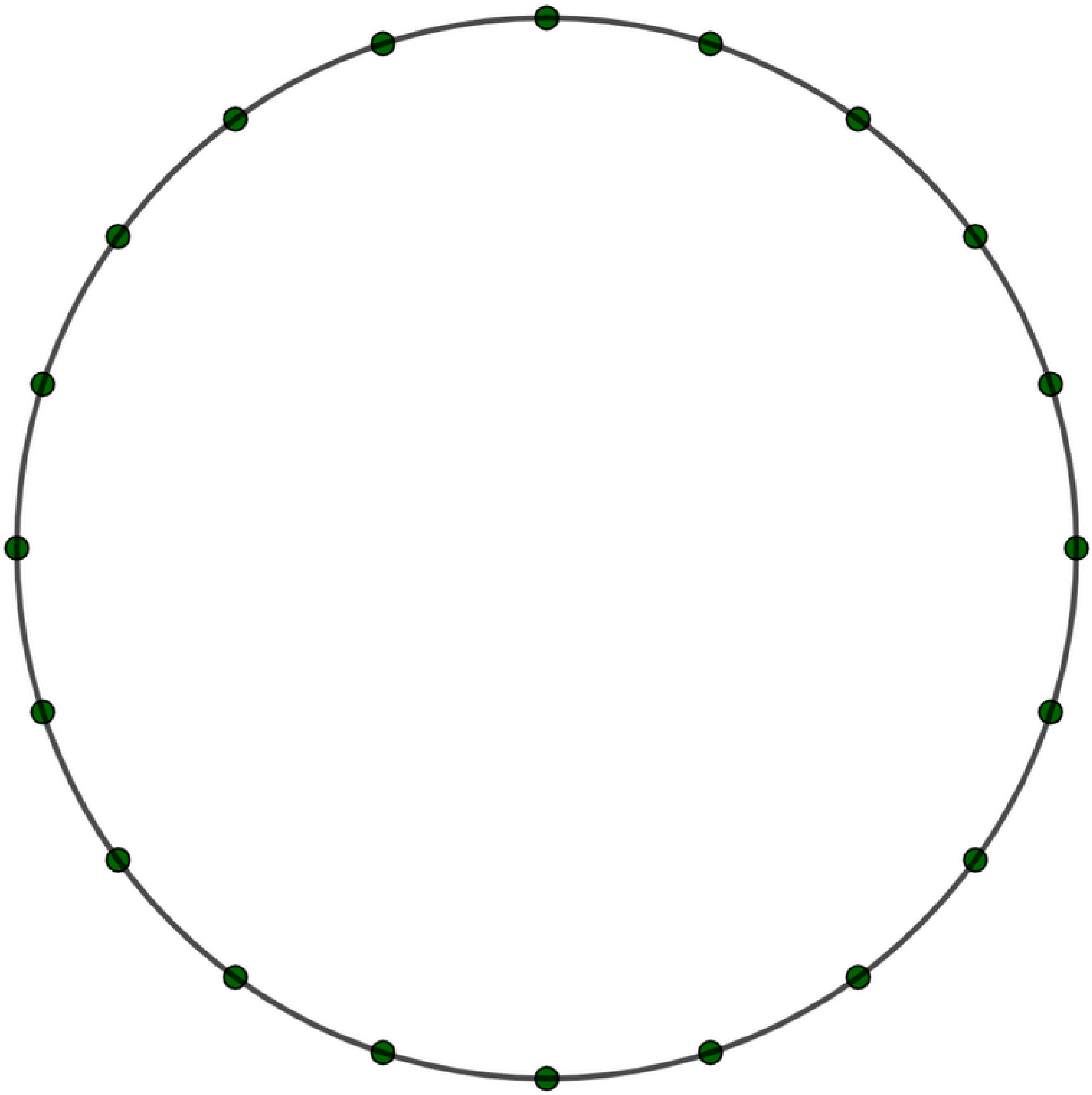


ATIVIDADES

6

EXERCÍCIO

Construir uma mandala modular (20,6).



ANEXO C – Questionário aplicado no Ensino Médio

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: ____

Idade: ________

Turma/Série: ____________________

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

☐ Sim ☐ Não ☐ Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

☐ Sim ☐ Não ☐ Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

☐ Sobram restos

☐ Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)

☐ Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

☐ Foi interessante

☐ Ficou mais visual

☐ Ajudou a entender melhor

☐ Ainda achei difícil

6) Você já havia usado o GeoGebra?

☐ Sim ☐ Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

☐ Construção de polígonos estrelados

☐ Design de resíduos

☐ Mandalas

☐ Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a visualizar e entender melhor os conceitos matemáticos?

☐ Sim, muito

☐ Sim, parcialmente

☐ Não muito

☐ Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

☐ Sim ☐ Não ☐ Um pouco

10) Você considera que esse tipo de atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

☐ Sim ☐ Talvez ☐ Não

ANEXO D – Questionário aplicado no Ensino Médio - Respostas

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Paulo Victor de Medeiros Calv[illegible]

Idade: 18

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

(X) Sim ( ) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(X) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

( ) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
(X) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

(X) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
( ) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a visualizar e entender melhor os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito (X) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

(X) Sim ( ) Não ( ) Um pouco

10) Você considera que esse tipo de atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: LUANNY S. FRANCO

Idade: 18

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim ( ) Não (X) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(X) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

(X) *Foi interessante*
( ) Ficou mais visual
( ) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) *Sim* (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

(X) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
( ) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a visualizar e *entender melhor* os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito ( ) Sim, parcialmente

(X) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

10) *Você considera que esse tipo de* atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Geovana Mel A da Silva

Idade: 18

Turma/Série: 3003 / 3º

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (x) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim (x) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(x) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

(x) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
( ) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (x) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

(x) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
( ) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a *visualizar* e *entender melhor* os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito (x) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

( ) Sim ( ) Não (x) Um pouco

10) *Você considera que esse tipo de* atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

( ) Sim (x) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Carlos Eduardo Ferrão Neves

Idade: 17

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não (/) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim ( ) Não (X) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

( ) Sobram restos
(X) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

(X) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
( ) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

( ) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
(X) Mandalas
( ) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a visualizar e *entender melhor* os conceitos matemáticos?

(X) Sim, muito ( ) Sim, parcialmente
( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

( ) Sim ( ) Não (X) Um pouco

10) *Você considera que esse tipo de* atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Beatriz Bittencourt Melo da Silva

Idade: 17

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim (X) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(X) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

( ) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
(X) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

(X) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
( ) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a *visualizar* e *entender* melhor os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito (X) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

( ) Sim ( ) Não (X) Um pouco

10) *Você considera que esse tipo de* atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

( ) Sim (X) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Kauana Laudelino Tatagiba

Idade: 17

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (x) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim (x) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(x) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

(x) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
( ) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (x) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

( ) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
(x) Mandalas
( ) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a *visualizar* e *entender melhor* os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito (x) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

( ) Sim ( ) Não (x) Um pouco

10) *Você considera que esse tipo de atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?*

( ) Sim (x) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: wesley barbosa silva

Idade: 18

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim (X) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(X) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

(X) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
( ) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

( ) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
(X) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a visualizar e entender melhor os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito (X) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

( ) Sim ( ) Não (X) Um pouco

10) Você considera que esse tipo de atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: kAilhy da Silva Gomes

Idade: 18

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim (X) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(X) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

(X) *Foi interessante*
( ) Ficou mais visual
( ) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) *Sim* (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

(X) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
( ) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você *a visualizar e entender melhor* os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito (X) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

(X) Sim ( ) Não ( ) Um pouco

***10) Você considera que esse tipo de* atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?**

( ) Sim ( ) Talvez (X) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Thiago meireles de mattos

Idade: 18

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

(X) Sim ( ) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(X) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

(X) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
( ) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

(X) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
( ) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a visualizar e entender melhor os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito (X) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

(X) Sim ( ) Não ( ) Um pouco

10) Você considera que esse tipo de atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Nathan Costa Figueiredo

Idade: 18

Turma/Série: 3º ano / 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

(X) Sim ( ) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

( ) Sobram restos
(X) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

(X) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
( ) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

( ) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
( ) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a *visualizar* e *entender melhor* os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito (X) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

(X) Sim ( ) Não ( ) Um pouco

10) *Você considera que esse tipo de* atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Pipper moreira Neves

Idade: 19

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim (X) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(X) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

( ) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
(X) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

( ) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
(X) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a *visualizar* e *entender melhor* os conceitos matemáticos?

(X) Sim, muito ( ) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

(X) Sim ( ) Não ( ) Um pouco

10) *Você considera que esse tipo de* atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Nayara Júlia

Idade: 19

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim (X) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(X) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

( ) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
(X) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

( ) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
(X) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a visualizar e entender melhor os conceitos matemáticos?

(X) Sim, muito ( ) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

(X) Sim ( ) Não ( ) Um pouco

10) Você considera que esse tipo de atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: [illegible]

Idade: 17

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim (X) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(X) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

( ) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
(X) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

( ) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
(X) Mandalas
( ) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a visualizar e entender melhor os conceitos matemáticos?

(X) Sim, muito ( ) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

( ) Sim ( ) Não (X) Um pouco

10) Você considera que esse tipo de atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Eduarda da Silva Gonzaga

Idade: 18

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim (X) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

(X) Sobram restos
( ) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

( ) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
(X) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

( ) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
(X) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a *visualizar* e *entender* melhor os conceitos matemáticos?

(X) Sim, muito ( ) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

(X) Sim ( ) Não ( ) Um pouco

10) Você considera que esse tipo de atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Rayssa V. Araujo Madeira

Idade: 17

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim (X) Não ( ) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

( ) Sobram restos
(X) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

(X) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
( ) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

( ) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
(X) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a visualizar e entender melhor os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito (X) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

( ) Sim ( ) Não (X) Um pouco

10) Você considera que esse tipo de atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: Vitória

Idade: 19

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim ( ) Não (X) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

( ) Sobram restos
(X) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

(X) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
( ) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

( ) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
(X) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a visualizar e entender melhor os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito ( ) Sim, parcialmente

(X) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

( ) Sim ( ) Não (X) Um pouco

10) *Você considera que esse tipo de* atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

( ) Sim (X) Talvez ( ) Não

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este questionário faz parte de uma pesquisa acadêmica que busca compreender como atividades envolvendo congruência, polígonos estrelados, design de resíduos, mandalas e a integração entre álgebra e geometria.

Sua participação neste questionário é muito importante para avaliar a experiência vivida, identificar os impactos da oficina na sua aprendizagem e levantar sugestões para aprimorar ou modificar estas atividades.

1) Informações Gerais

Nome: [redacted]

Idade: 17

Turma/Série: 3003

2) Antes da oficina, você já conhecia o conceito de congruência?

( ) Sim (X) Não ( ) Um pouco

3) Você já participou de atividades que unem álgebra e geometria?

( ) Sim ( ) Não (X) Não tenho certeza

4) O que acontece em uma divisão não exata e como isso se relaciona com a ideia de congruência?

( ) Sobram restos
(X) Congruência: números têm o mesmo resto na divisão por um número fixo (módulo)
( ) Não entendi bem a relação

5) Como foi usar a congruência linear para construir figuras geométricas na circunferência?

(X) Foi interessante
( ) Ficou mais visual
( ) Ajudou a entender melhor a congruência
( ) Ainda achei difícil de compreender

6) Você já havia usado o GeoGebra?

( ) Sim (X) Não

7) Qual atividade você achou mais interessante?

( ) Construção de polígonos estrelados
( ) Design de resíduos
( ) Mandalas
(X) Todas foram interessantes

8) O uso dessas atividades ajudou você a visualizar e entender melhor os conceitos matemáticos?

( ) Sim, muito (X) Sim, parcialmente

( ) Não muito ( ) Não ajudou

9) Após a oficina, você se sentiu mais motivado(a) a aprender matemática?

( ) Sim ( ) Não (X) Um pouco

10) Você considera que esse tipo de atividade torna a matemática mais interessante e próxima da realidade dos alunos?

(X) Sim ( ) Talvez ( ) Não

ANEXO E – Questionário aplicado na Licenciatura em Matemática

QUESTIONÁRIO PARA ALUNOS DE LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome(opcional): ____

Idade: __________

Curso/Período: ____________________

2) Você já atua como professor(a)? ☐ Sim ☐ Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da oficina, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

☐ Sim ☐ Não ☐ Superficialmente

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

☐ Sim ☐ Não ☐ Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

☐ Sim ☐ Não ☐ Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

☐ 1 - Nenhum
☐ 2 - Pouco
☐ 3 - Básico
☐ 4 - Intermediário
☐ 5 - Avançado

7) A oficina contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

☐ Sim, bastante ☐ Sim, parcialmente
☐ Pouco ☐ Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

☐ Muito interessante
☐ Interessante
☐ Pouco interessante
☐ Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

☐ Sim ☐ Não ☐ Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

11) Você teria interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente?

☐ Sim ☐ Não ☐ Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

12) Você já havia utilizado o GeoGebra antes da oficina?

☐ Sim, com frequência
☐ Sim, algumas vezes
☐ Não

13) Durante a oficina, o uso do GeoGebra contribuiu para:

☐ Visualizar melhor os conceitos geométricos
☐ Compreender a construção das figuras
☐ Relacionar álgebra e geometria
☐ Não contribuiu significativamente

14) Em sua opinião, o uso dessas ferramentas tecnológicas pode enriquecer o ensino da matemática no Ensino Médio?

☐ Sim, são recursos valiosos
☐ Sim, mas exigem formação específica
☐ Talvez, dependendo do contexto escolar
☐ Não vejo aplicabilidade

15) Você considera que o uso de congruências e figuras geométricas, aliado a ferramentas tecnológicas e ao pensamento computacional, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os alunos do Ensino Médio?

☐ Sim, desperta curiosidade e engajamento
☐ Sim, especialmente quando associado à tecnologia
☐ Talvez, dependendo do perfil da turma
☐ Não, o tema é muito abstrato para os alunos
☐ Não tenho opinião formada

ANEXO F – Questionário aplicado na Licenciatura em Matemática - Respostas

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DA LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome (opcional): Gabriel de Aguiar Santos Henrique

Idade: 21

Curso/Período: matemática / 5º

2) Você já atua como professor(a)? (✓) Sim ( ) Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da oficina, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

( ) Sim ( ) Não (✓) Superficialmente

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

( ) Sim

(✓) Não

( ) Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

(✓) Sim ( ) Não ( ) Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

( ) 1 – Nenhum

( ) 2 – Pouco

(✓) 3 – Básico

( ) 4 – Intermediário

( ) 5 – Avançado

7) A oficina contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

(✓) Sim, bastante ( ) Sim, parcialmente

( ) Pouco ( ) Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

(✓) Muito interessante

( ) Interessante

( ) Pouco interessante

( ) Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

( ) Sim ( ) Não (✓) Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

(✓) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

1) Você teria interesse em desenvolver tividades semelhantes em sua futura rática docente?

X) Sim ( ) Não ( ) Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

2) Você já havia utilizado o GeoGebra ntes da oficina?

) Sim, com frequência

X Sim, algumas vezes

) Não

3) Durante a oficina, o uso do eoGebra contribuiu para:

X) Visualizar melhor os conceitos eométricos

X) Compreender a construção das figuras

) Relacionar álgebra e geometria

) Não contribuiu significativamente

4) Em sua opinião, o uso dessas erramentas tecnológicas pode nriquecer o ensino da matemática no nsino Médio?

X) Sim, são recursos valiosos

) Sim, mas exigem formação específica

X) Talvez, dependendo do contexto scolar

depende também da escola conseguir fornecer o necessario

) Não vejo aplicabilidade

5) Você considera que o uso de ongruências e figuras geométricas, liado a ferramentas tecnológicas e ao ensamento computacional, pode ornar o ensino da matemática mais trativo para os alunos do Ensino lédio?

) Sim, desperta curiosidade e ngajamento

X) Sim, especialmente quando associado tecnologia

) Talvez, dependendo do perfil da turma

( ) Não, o tema é muito abstrato para os alunos

( ) Não tenho opinião formada

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DA LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome (opcional): Renata Martins

Idade: 29

Curso/Período: Matemática / 5º período

2) Você já atua como professor(a)? ( ) Sim (X) Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da oficina, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

( ) *Sim* (X) Não ( ) *Superficialmente*

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

( ) Sim

(X) Não

( ) Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

(X) Sim ( ) Não ( ) Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

( ) 1 – Nenhum

( ) 2 – Pouco

(X) 3 – Básico

( ) 4 – Intermediário

( ) 5 – Avançado

7) A oficina contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

(X) *Sim, bastante* ( ) *Sim, parcialmente*

( ) Pouco ( ) Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

(X) Muito interessante

( ) Interessante

( ) Pouco interessante

( ) Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

( ) Sim ( ) Não (X) Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

(X) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

11) Você teria interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente?

(X) Sim ( ) Não ( ) Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

12) Você já havia utilizado o GeoGebra antes da oficina?

( ) Sim, com frequência

(X) Sim, algumas vezes

( ) Não

13) Durante a oficina, o uso do GeoGebra contribuiu para:

(X) Visualizar melhor os conceitos geométricos

( ) Compreender a construção das figuras

( ) Relacionar álgebra e geometria

( ) Não contribuiu significativamente

14) Em sua opinião, o uso dessas ferramentas tecnológicas pode enriquecer o ensino da matemática no Ensino Médio?

( ) Sim, são recursos valiosos

( ) Sim, mas exigem formação específica

(X) Talvez, dependendo do contexto escolar

( ) Não vejo aplicabilidade

15) Você considera que o uso de congruências e figuras geométricas, aliado a ferramentas tecnológicas e ao pensamento computacional, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os alunos do Ensino Médio?

(X) Sim, desperta curiosidade e engajamento

( ) Sim, especialmente quando associado à tecnologia

( ) Talvez, dependendo do perfil da turma

( ) Não, o tema é muito abstrato para os alunos

( ) Não tenho opinião formada

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DA LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome (opcional): João Vitor dos Santos de Castro

Idade: 23

Curso/Período: matemática / 8º

2) Você já atua como professor(a)? (X) Sim ( ) Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da oficina, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

( ) Sim (X) Não ( ) Superficialmente

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

( ) Sim

(X) Não

( ) Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

( ) Sim ( ) Não (X) Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

( ) 1 – Nenhum

(X) 2 – Pouco

( ) 3 – Básico

( ) 4 – Intermediário

( ) 5 – Avançado

7) A oficina contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

(X) Sim, bastante ( ) Sim, parcialmente

( ) Pouco ( ) Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

(X) Muito interessante

( ) Interessante

( ) Pouco interessante

( ) Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

(X) Sim ( ) Não ( ) Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

(X) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

11) Você teria interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente?

(X) Sim ( ) Não ( ) Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

12) Você já havia utilizado o GeoGebra antes da oficina?

(X) Sim, com frequência

( ) Sim, algumas vezes

( ) Não

13) Durante a oficina, o uso do GeoGebra contribuiu para:

(X) Visualizar melhor os conceitos geométricos

( ) Compreender a construção das figuras

( ) Relacionar álgebra e geometria

( ) Não contribuiu significativamente

14) Em sua opinião, o uso dessas ferramentas tecnológicas pode enriquecer o ensino da matemática no Ensino Médio?

(X) Sim, são recursos valiosos

( ) Sim, mas exigem formação específica

( ) Talvez, dependendo do contexto escolar

( ) Não vejo aplicabilidade

15) Você considera que o uso de congruências e figuras geométricas, aliado a ferramentas tecnológicas e ao pensamento computacional, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os alunos do Ensino Médio?

( ) Sim, desperta curiosidade e engajamento

( ) Sim, especialmente quando associado à tecnologia

(X) Talvez, dependendo do perfil da turma

( ) Não, o tema é muito abstrato para os alunos

( ) Não tenho opinião formada

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DA LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome (opcional): Thaíssa Ohfelippe

Idade: 20

Curso/Período: 6° período

2) Você já atua como professor(a)? (X) Sim ( ) Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da oficina, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

( ) Sim ( ) Não (X) Superficialmente

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

(X) Sim

( ) Não

( ) Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

(X) Sim ( ) Não ( ) Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

( ) 1 – Nenhum

(X) 2 – Pouco

( ) 3 – Básico

( ) 4 – Intermediário

( ) 5 – Avançado

7) A oficina contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

(X) Sim, bastante ( ) Sim, parcialmente

( ) Pouco ( ) Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

(X) Muito interessante

( ) Interessante

( ) Pouco interessante

( ) Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

(X) Sim ( ) Não ( ) Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

(X) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

11) Você teria interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente?

(X) Sim   ( ) Não   ( ) Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

12) Você já havia utilizado o GeoGebra antes da oficina?

( ) Sim, com frequência

(X) Sim, algumas vezes

( ) Não

13) Durante a oficina, o uso do GeoGebra contribuiu para:

(X) Visualizar melhor os conceitos geométricos

(X) Compreender a construção das figuras

(X) Relacionar álgebra e geometria

( ) Não contribuiu significativamente

14) Em sua opinião, o uso dessas ferramentas tecnológicas pode enriquecer o ensino da matemática no Ensino Médio?

(X) Sim, são recursos valiosos

( ) Sim, mas exigem formação específica

( ) Talvez, dependendo do contexto escolar

( ) Não vejo aplicabilidade

15) Você considera que o uso de congruências e figuras geométricas, aliado a ferramentas tecnológicas e ao pensamento computacional, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os alunos do Ensino Médio?

(X) Sim, desperta curiosidade e engajamento

(X) Sim, especialmente quando associado à tecnologia

( ) Talvez, dependendo do perfil da turma

( ) Não, o tema é muito abstrato para os alunos

( ) Não tenho opinião formada

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DA LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome (opcional): Lorena de Azevedo Panema

Idade: 22

Curso/Período: Matemática - 10

2) Você já atua como professor(a)? (X) Sim ( ) Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da oficina, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

(X) Sim ( ) Não ( ) Superficialmente

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

( ) Sim

( ) Não

(X) Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

( ) Sim ( ) Não (X) Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

( ) 1 – Nenhum

( ) 2 – Pouco

(X) 3 – Básico

( ) 4 – Intermediário

( ) 5 – Avançado

7) A oficina contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

(X) Sim, bastante ( ) Sim, parcialmente

( ) Pouco ( ) Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

(X) Muito interessante

( ) Interessante

( ) Pouco interessante

( ) Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

( ) Sim ( ) Não (X) Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

(X) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

11) Você teria interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente?

(X) Sim ( ) Não ( ) Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

12) Você já havia utilizado o GeoGebra antes da oficina?

( ) Sim, com frequência

(X) Sim, algumas vezes

( ) Não

13) Durante a oficina, o uso do GeoGebra contribuiu para:

(X) Visualizar melhor os conceitos geométricos

( ) Compreender a construção das figuras

( ) Relacionar álgebra e geometria

( ) Não contribuiu significativamente

14) Em sua opinião, o uso dessas ferramentas tecnológicas pode enriquecer o ensino da matemática no Ensino Médio?

(X) Sim, são recursos valiosos

( ) Sim, mas exigem formação específica

( ) Talvez, dependendo do contexto escolar

( ) Não vejo aplicabilidade

15) Você considera que o uso de congruências e figuras geométricas, aliado a ferramentas tecnológicas e ao pensamento computacional, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os alunos do Ensino Médio?

(X) Sim, desperta curiosidade e engajamento

( ) Sim, especialmente quando associado à tecnologia

( ) Talvez, dependendo do perfil da turma

( ) Não, o tema é muito abstrato para os alunos

( ) Não tenho opinião formada

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DA LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome (opcional): Pedro Paulo S. da Silva

Idade: 23

Curso/Período: Matemática / 9º período

2) Você já atua como professor(a)? (X) Sim ( ) Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da oficina, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

( ) Sim (X) Não *( ) Superficialmente*

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

( ) Sim

(X) Não

( ) Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

( ) Sim ( ) Não (X) Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

(X) 1 – Nenhum

( ) 2 – Pouco

( ) 3 – Básico

( ) 4 – Intermediário

( ) 5 – Avançado

7) A oficina contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

(X) *Sim, bastante* *( ) Sim, parcialmente*

( ) Pouco ( ) Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

( ) Muito interessante

(X) Interessante

( ) *Pouco interessante*

( ) Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

( ) Sim ( ) Não (X) Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

(X) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

11) Você teria interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente?

(X) Sim ( ) Não ( ) Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

12) Você já havia utilizado o GeoGebra antes da oficina?

( ) Sim, com frequência

(X) Sim, algumas vezes

( ) Não

13) Durante a oficina, o uso do GeoGebra contribuiu para:

( ) Visualizar melhor os conceitos geométricos

(X) Compreender a construção das figuras

(X) Relacionar álgebra e geometria

( ) Não contribuiu significativamente

14) Em sua opinião, o uso dessas ferramentas tecnológicas pode enriquecer o ensino da matemática no Ensino Médio?

( ) Sim, são recursos valiosos

( ) Sim, mas exigem formação específica

(X) Talvez, dependendo do contexto escolar

( ) Não vejo aplicabilidade

15) Você considera que o uso de congruências e figuras geométricas, aliado a ferramentas tecnológicas e ao pensamento computacional, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os alunos do Ensino Médio?

(X) Sim, desperta curiosidade e engajamento

( ) Sim, especialmente quando associado à tecnologia

( ) Talvez, dependendo do perfil da turma

( ) Não, o tema é muito abstrato para os alunos

( ) Não tenho opinião formada

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DA LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome (opcional): [illegible]

Idade: 21

Curso/Período: [illegible]

2) Você já atua como professor(a)? (X) Sim ( ) Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da *oficina*, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

( ) Sim ( ) Não (X) Superficialmente

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

( ) Sim

( ) Não

(X) Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

(X) Sim ( ) Não ( ) Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

( ) 1 – Nenhum

( ) 2 – Pouco

( ) 3 – Básico

(X) 4 – Intermediário

( ) 5 – Avançado

7) A *oficina* contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

( ) Sim, bastante (X) Sim, parcialmente

( ) Pouco ( ) Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

(X) Muito interessante

( ) Interessante

( ) Pouco interessante

( ) Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

( ) Sim ( ) Não (X) Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

(X) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

11) Você teria interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente?

(X) Sim ( ) Não ( ) Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

12) Você já havia utilizado o GeoGebra antes da oficina?

( ) Sim, com frequência

(X) Sim, algumas vezes

( ) Não

13) Durante a oficina, o uso do GeoGebra contribuiu para:

( ) Visualizar melhor os conceitos geométricos

(X) Compreender a construção das figuras

( ) Relacionar álgebra e geometria

( ) Não contribuiu significativamente

14) Em sua opinião, o uso dessas ferramentas tecnológicas pode enriquecer o ensino da matemática no Ensino Médio?

( ) Sim, são recursos valiosos

(X) Sim, mas exigem formação específica

( ) Talvez, dependendo do contexto escolar

( ) Não vejo aplicabilidade

15) Você considera que o uso de congruências e figuras geométricas, aliado a ferramentas tecnológicas e ao pensamento computacional, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os alunos do Ensino Médio?

(X) Sim, desperta curiosidade e engajamento

( ) Sim, especialmente quando associado à tecnologia

( ) Talvez, dependendo do perfil da turma

( ) Não, o tema é muito abstrato para os alunos

( ) Não tenho opinião formada

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DA LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome (opcional): ______________________

Idade: 24

Curso/Período: Licenciatura Matemática (8º período)

2) Você já atua como professor(a)? ( ) Sim (X) Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da oficina, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

( ) Sim (X) Não ( ) *Superficialmente*

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

(X) Sim

( ) Não

( ) Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

(X) Sim ( ) Não ( ) Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

( ) 1 – Nenhum

(X) 2 – Pouco

( ) 3 – Básico

( ) 4 – Intermediário

( ) 5 – Avançado

7) A oficina contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

( ) Sim, bastante (X) Sim, parcialmente

( ) Pouco ( ) Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

( ) Muito interessante

(X) *Interessante*

( ) Pouco interessante

( ) Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

(X) Sim ( ) Não ( ) Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

( ) Sim ( ) Não (X) Parcialmente

11) Você teria interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente?

( ) Sim (X) Não ( ) Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

12) Você já havia utilizado o GeoGebra antes da oficina?

( ) Sim, com frequência

(X) Sim, algumas vezes

( ) Não

13) Durante a oficina, o uso do GeoGebra contribuiu para:

(X) Visualizar melhor os conceitos geométricos

( ) Compreender a construção das figuras

( ) Relacionar álgebra e geometria

( ) Não contribuiu significativamente

14) Em sua opinião, o uso dessas ferramentas tecnológicas pode enriquecer o ensino da matemática no Ensino Médio?

( ) Sim, são recursos valiosos

( ) Sim, mas exigem formação específica

(X) Talvez, dependendo do contexto escolar

( ) Não vejo aplicabilidade

15) Você considera que o uso de congruências e figuras geométricas, aliado a ferramentas tecnológicas e ao pensamento computacional, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os alunos do Ensino Médio?

( ) Sim, desperta curiosidade e engajamento

( ) Sim, especialmente quando associado à tecnologia

(X) Talvez, dependendo do perfil da turma

( ) Não, o tema é muito abstrato para os alunos

( ) Não tenho opinião formada

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DA LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome (opcional): Robson Ribeiro da Silva

Idade: 23

Curso/Período: Matemática / 7º Período

2) Você já atua como professor(a)? (X) Sim ( ) Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da oficina, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

( ) *Sim* (X) Não ( ) *Superficialmente*

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

( ) Sim

( ) Não

(X) Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

( ) Sim (X) Não ( ) Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

( ) 1 – Nenhum

( ) 2 – Pouco

( ) 3 – Básico

(X) 4 – Intermediário

( ) 5 – Avançado

7) A oficina contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

(X) *Sim, bastante* ( ) *Sim, parcialmente*

( ) Pouco ( ) Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

(X) Muito interessante

( ) Interessante

( ) *Pouco interessante*

( ) Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

(X) Sim ( ) Não ( ) Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

(X) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

11) Você teria interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente?

(X) Sim ( ) Não ( ) Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

12) Você já havia utilizado o GeoGebra antes da oficina?

( ) Sim, com frequência

(X) Sim, algumas vezes

( ) Não

13) Durante a oficina, o uso do GeoGebra contribuiu para:

( ) Visualizar melhor os conceitos geométricos

( ) Compreender a construção das figuras

(X) Relacionar álgebra e geometria

( ) Não contribuiu significativamente

14) Em sua opinião, o uso dessas ferramentas tecnológicas pode enriquecer o ensino da matemática no Ensino Médio?

(X) Sim, são recursos valiosos

( ) Sim, mas exigem formação específica

( ) Talvez, dependendo do contexto escolar

( ) Não vejo aplicabilidade

15) Você considera que o uso de congruências e figuras geométricas, aliado a ferramentas tecnológicas e ao pensamento computacional, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os alunos do Ensino Médio?

(X) Sim, desperta curiosidade e engajamento

( ) Sim, especialmente quando associado à tecnologia

( ) Talvez, dependendo do perfil da turma

( ) Não, o tema é muito abstrato para os alunos

( ) Não tenho opinião formada

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DA LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome (opcional): Márcio Ricardo B. S. Mendes

Idade: 22

Curso/Período: Matemática / 8º período

2) Você já atua como professor(a)? (X) Sim ( ) Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da oficina, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

( ) Sim (X) Não ( ) Superficialmente

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

( ) Sim

( ) Não

(X) Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

(X) Sim ( ) Não ( ) Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

( ) 1 – Nenhum

( ) 2 – Pouco

( ) 3 – Básico

( ) 4 – Intermediário

(X) 5 – Avançado

7) A oficina contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

( ) Sim, bastante (X) Sim, parcialmente

( ) Pouco ( ) Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

(X) Muito interessante

( ) Interessante

( ) Pouco interessante

( ) Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

( ) Sim ( ) Não (X) Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

(X) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

11) Você teria interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente?

(X) Sim ( ) Não ( ) Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

12) Você já havia utilizado o GeoGebra antes da oficina?

(X) Sim, com frequência

( ) Sim, algumas vezes

( ) Não

13) Durante a oficina, o uso do GeoGebra contribuiu para:

( ) Visualizar melhor os conceitos geométricos

(X) Compreender a construção das figuras

( ) Relacionar álgebra e geometria

( ) Não contribuiu significativamente

14) Em sua opinião, o uso dessas ferramentas tecnológicas pode enriquecer o ensino da matemática no Ensino Médio?

(X) Sim, são recursos valiosos

( ) Sim, mas exigem formação específica

( ) Talvez, dependendo do contexto escolar

( ) Não vejo aplicabilidade

15) Você considera que o uso de congruências e figuras geométricas, aliado a ferramentas tecnológicas e ao pensamento computacional, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os alunos do Ensino Médio?

(X) Sim, desperta curiosidade e engajamento

( ) Sim, especialmente quando associado à tecnologia

( ) Talvez, dependendo do perfil da turma

( ) Não, o tema é muito abstrato para os alunos

( ) Não tenho opinião formada

CONGRUÊNCIAS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DA LICENCIATURA

Sua participação, respondendo este questionário, é essencial para avaliar a relevância didática da proposta, identificar potencialidades e desafios, e contribuir para a construção de práticas pedagógicas mais significativas e inovadoras no ensino da matemática.

1) Informações Gerais

Nome (opcional): Vitória Bizerra Melo

Idade: 22

Curso/Período: Matemática - 8º período

2) Você já atua como professor(a)? (x) Sim ( ) Não

Conhecimento Prévio

3) Antes da oficina, você já conhecia a aplicação da congruência modular para construção de figuras geométricas?

( ) Sim (x) Não ( ) Superficialmente

4) Você já conhecia ou havia explorado polígonos estrelados, design de resíduos ou mandalas em contextos matemáticos?

( ) Sim

(x) Não

( ) Apenas em contextos artísticos ou visuais

5) Já participou de atividades que integram álgebra e geometria?

(x) Sim ( ) Não ( ) Não tenho certeza

6) Em uma escala de 1 a 5, como você avalia seu conhecimento prévio sobre o tema da oficina?

( ) 1 – Nenhum

(x) 2 – Pouco

( ) 3 – Básico

( ) 4 – Intermediário

( ) 5 – Avançado

7) A oficina contribuiu para ampliar sua compreensão sobre congruência e sua aplicação em contextos geométricos?

( ) Sim, bastante (x) Sim, parcialmente

( ) Pouco ( ) Não

8) A proposta de integrar álgebra e geometria por meio das figuras geométricas foi:

(x) Muito interessante

( ) Interessante

( ) Pouco interessante

( ) Não vi relação

9) Você considera viável aplicar esse tipo de atividade no Ensino Médio?

( ) Sim ( ) Não (x) Com adaptações

10) Acredita que essa abordagem pode contribuir para tornar o ensino da matemática mais atrativo e significativo?

(x) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

11) Você teria interesse em desenvolver atividades semelhantes em sua futura prática docente?

(X) Sim ( ) Não ( ) Talvez

Sobre o uso de tecnologias digitais

12) Você já havia utilizado o GeoGebra antes da oficina?

( ) Sim, com frequência

(X) Sim, algumas vezes

( ) Não

13) Durante a oficina, o uso do GeoGebra contribuiu para:

(X) Visualizar melhor os conceitos geométricos

( ) Compreender a construção das figuras

( ) Relacionar álgebra e geometria

( ) Não contribuiu significativamente

14) Em sua opinião, o uso dessas ferramentas tecnológicas pode enriquecer o ensino da matemática no Ensino Médio?

( ) Sim, são recursos valiosos

(X) Sim, mas exigem formação específica

( ) Talvez, dependendo do contexto escolar

( ) Não vejo aplicabilidade

15) Você considera que o uso de congruências e figuras geométricas, aliado a ferramentas tecnológicas e ao pensamento computacional, pode tornar o ensino da matemática mais atrativo para os alunos do Ensino Médio?

(X) Sim, desperta curiosidade e engajamento

( ) Sim, especialmente quando associado à tecnologia

( ) Talvez, dependendo do perfil da turma

( ) Não, o tema é muito abstrato para os alunos

( ) Não tenho opinião formada