UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

OS GRUPOS DIEDRAIS E AS ISOMETRIAS DE ROTAÇÃO E REFLEXÃO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Marcos Weslley Vitória Brandão

Orientador: Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida

Feira de Santana

Dezembro de 2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

OS GRUPOS DIEDRAIS E AS ISOMETRIAS DE ROTAÇÃO E REFLEXÃO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Marcos Weslley Vitória Brandão

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida

Feira de Santana
Dezembro de 2025

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado – SISBI UEFS

B818 Brandão, Marcos Weslley Vitória

Os grupos diedrais e as isometrias de rotação e reflexão : uma sequência didática / Marcos Weslley Vitória Brandão. – 2025.

149 f.: il.

Orientadora: Kisnney Emiliano de Almeida.

Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2025.

1. Grupos diedrais. 2. Isometrias. 3. Rotação. 4. Reflexão. 5. GeoGebra. 5. Sequência didática. I. Título. II. Almeida, Kisnney Emiliano de, orient. III. Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). IV. Departamento de Ciências Exatas. V. Universidade Estadual de Feira de Santana.

CDU 514.1:373.5

Luis Ricardo Andrade da Silva - Bibliotecário - CRB-5/1790

Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciencias Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente Marcos Weslley Vitória Brandão do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos dez dias do mês de dezembro de dois mil e vinte e cinco, às 15h30, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: https://meet.google.com/iac-piqx-yxa, da dissertação apresentada sob o título **"OS GRUPOS DIEDRAIS E AS ISOMETRIAS DE ROTAÇÃO E REFLEXÃO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA",** do discente **Marcos Weslley Vitória Brandão,** do Programa de Mestrado Profissional em Matematica em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Kisnney Emiliano de Almeida (Orientador, UEFS), Maurício de Araújo Ferreira (UEFS) e Elen Deise Assis Barbosa (UFBA). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito APROVADO. Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 10 de dezembro de 2025.

gov.br Documento assinado digitalmente
KISNNEY EMILIANO DE ALMEIDA
Data: 28/01/2026 12:12:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida (Orientador, UEFS)

gov.br Documento assinado digitalmente
MAURICIO DE ARAUJO FERREIRA
Data: 29/01/2026 17:18:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira (UEFS)

Documento assinado digitalmente
ELEN DEISE ASSIS BARBOSA
Data: 29/01/2026 21:22:38-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dra. Elen Deise Assis Barbosa (UFBA)

Visto do Coordenador:

Documento assinado digitalmente
JEAN FERNANDES BARROS
Data: 30/01/2026 08:29:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Agradecimentos

Agradeço:

À minha família e aos meus colegas por todo apoio recebido durante minha formação.

Aos meus professores por todo o conhecimento compartilhado e todos ensinamentos fundamentais para a carreira docente.

Ao meu orientador pelos encaminhamentos para a boa condução do trabalho.

À Deus pelo cuidado diário comigo e pela saúde e energia que tem me proporcionado.

Resumo

Esse trabalho propõe uma sequência didática sobre rotações, reflexões e composições de rotações e reflexões de polígonos regulares para alunos do ensino médio. Para isso, foram utilizados o software matemático geogebra e também materiais manipuláveis construídos durante a sequência. O objetivo dessa aplicação é a construção implícita da ideia de grupos diedrais e a verificação das propriedades desse grupo. Com isso, busca-se aprofundar o estudo das transformações geométricas, evidenciando como suas composições geram uma estrutura algébrica subjacente e conectando, de forma intuitiva, conceitos da geometria escolar à álgebra moderna.

Palavras-chaves: grupos diedrais; isometrias; sequência didática.

Abstract

This work proposes a didactic sequence on rotations, reflections, and compositions of rotations and reflections of regular polygons for high school students. For this, the mathematical software GeoGebra and manipulable materials constructed during the sequence were used. The objective of this application is the implicit construction of the idea of dihedral groups and the verification of the properties of this group. With this, it seeks to deepen the study of geometric transformations, highlighting how their compositions generate an underlying algebraic structure and intuitively connecting concepts of school geometry to modern algebra.

Keywords: dihedral groups; isometries; didactic sequence.

Sumário

Introdução

A construção deste trabalho foi feita tendo como principal objetivo permitir o conhecimento dos grupos diedrais de forma lúdica e tecnológica para os alunos do ensino médio. Essa abordagem se mostrou possível por causa da constituição geométrica que esse grupo possui, possibilitando a exploração de objetos de conhecimentos presentes no currículo previsto para o ensino médio como, por exemplo, polígonos regulares, isometrias e permutações. Dessa forma, foi construída uma sequência didática, a qual permitirá que os alunos conheçam a estrutura dos grupos diedrais e algumas propriedades importantes desses grupos sem que seja mencionada a ideia formal algébrica de grupos, mas usando a simples linguagem contextualizada para o ensino médio e usando os conhecimentos presentes nessa fase da educação básica.

O trabalho foi organizado em três capítulos, sendo o primeiro sobre a formalização das isometrias de rotação e reflexão. Para a construção do capítulo foi utizado como principal referência [3]. O capítulo foi iniciado com a formalização das isometrias por meio da definição. Posteriormente, foi provado que a rotação em torno de um ponto, com um ângulo fixo e com um sentido definido (horário ou anti-horário) é uma isometria. Isso também foi provado para a reflexão em torno de uma reta. Ao final, foi mostrado como realizar a rotação de um polígono em torno de um ponto e a reflexão em torno de uma reta no geogebra. O intuito foi agregar uma ideia intuitiva de rotação e reflexão no trabalho após a apresentação formal, possibilitando um entendimento prático de como realizar rotações e reflexões.

O segundo capítulo foi direcionado para a teoria envolvendo grupos diedrais. Para a construção do capítulo foram utilizados como principais referências [2], [4] e [5]. No primeiro capítulo foi feita uma abordagem técnica focada nos grupos diedrais, começando com uma apresentação formal dos grupos em geral por meio de definições, proposições, propriedades e exemplos. Depois disso, foram destacados os grupos de permutações que possibilitam uma interpretação interessante para os grupos diedrais. Finalmente, foram apresentados os grupos diedrais, mostrando a definição, alguns exemplos particulares e o isomorfismo com os subgrupos dos grupos de permutações.

O terceiro capítulo teve como objeto principal a sequência didática cujo objetivo era construir a ideia e explorar propriedades dos grupos diedrais por meio de conhecimentos pertinentes. A primeira parte do capítulo trouxe uma ideia conceitual do que é uma sequência didática em geral e qual o intuito de aplicar uma sequência didática. Para fundamentar essa discussão foi usado [1] como referência. Na parte final do capítulo foram expostas as atividades que compuseram a sequência didática com todos os itens apresentando a resposta final esperada dos participantes, inclusive com imagens ilustrativas do que se espera dos participantes com o uso dos materiais manipuláveis e dos softwares matemáticos.

CAPÍTULO 1

Isometrias de rotação e reflexão

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições e proposições relevantes referentes às isometrias no plano. É importante mencionar que o foco do capítulo são as isometrias de rotação e reflexão, portanto, caso o leitor esteja interessado em saber mais detalhes a respeito das isometrias pode consultar [3], principal referência do capítulo.

1.1 Isometrias

Admitimos que foi fixada uma unidade de comprimento e indicamos como $\overline{AB}$ o comprimento do segmento de reta AB no plano Π, sendo A e B pontos do plano. Escreveremos também $d(A, B)$ em vez de $\overline{AB}$ e diremos que se trata da *distância* do ponto A ao ponto B. Tem-se sempre $\overline{AB} \geq 0$, com $\overline{AB} = 0$ se, e somente se, $A = B$. Além disso, o ponto C pertence ao segmento de reta AB se, e somente se,

$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B).$$

Definição 1.1. Uma isometria entre os planos Π e Π' é uma função

$$T : \Pi \longrightarrow \Pi'$$

que preserva distâncias. Isto significa que, para quaisquer pontos $X, Y \in \Pi$, pondo

$$X' = T(X), \quad Y' = T(Y),$$

tem-se

$$d(X', Y') = d(X, Y).$$

Proposição 1.2. *Toda isometria $T : \Pi \longrightarrow \Pi'$ transforma retas em retas.*

Demonstração. Com efeito, seja $r \subset \Pi$ uma reta. Tomemos dois pontos distintos A e B em r, ponhamos $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ e chamemos de r' a reta no plano Π' que passa pelos pontos A' e B'. Dado qualquer $X \in r$, um dos três pontos A, B e X está entre os outros dois. Digamos que B está entre A e X, ou seja, $B \in AX$. (Os outros dois casos são análogos) Então,

$$\overline{AX} = \overline{AB} + \overline{BX},$$

logo, pondo $X' = T(X)$, obtemos

$$\overline{A'X'} = \overline{A'B'} + \overline{B'X'};$$

portanto, $B' \in A'X'$. Assim, os pontos A', B' e X' são colineares. Isto mostra que

$$X \in r \Rightarrow X' \in r'.$$

Logo, a restrição de T a r é uma isometria entre r e r'. Como toda isometria entre retas é sobrejetiva, tem-se $T(r) = r'$. □

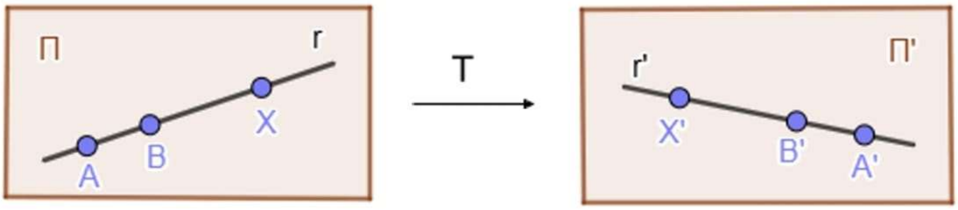


Figura 1.1: Reprodução do autor

Proposição 1.3. *Uma isometria $T : \Pi \longrightarrow \Pi'$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

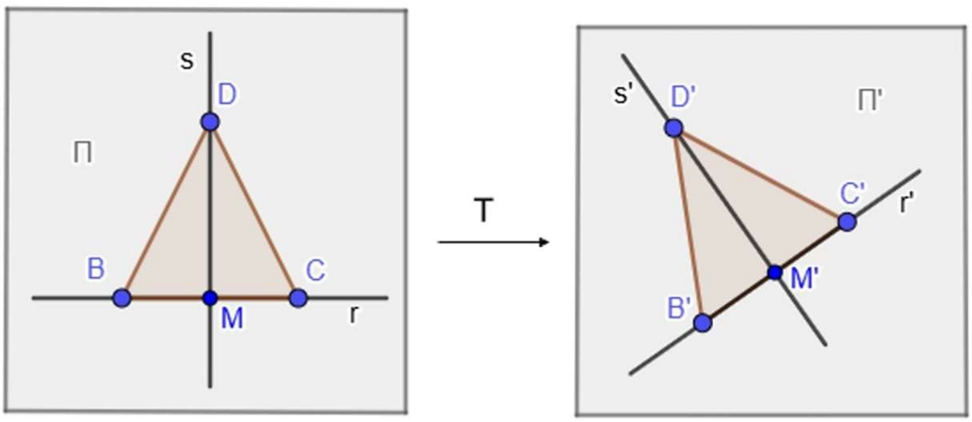


Figura 1.2: Reprodução do autor

Demonstração. Com efeito, dadas as retas perpendiculares r e s em Π, consideremos: o ponto A interseção de r e s, dois pontos B e C em r, equidistantes de A, e um ponto D qualquer sobre s. A isometria T transforma a mediana AD do triângulo isosceles BCD na mediana $A'D'$ do triângulo isosceles $B'C'D'$, logo $A'D'$ é perpendicular a $B'C'$, ou seja, r' é perpendicular a s'. □

Proposição 1.4. *Toda isometria $T : \Pi \longrightarrow \Pi'$ é uma função bijetiva, cuja inversa $T^{-1} : \Pi' \longrightarrow \Pi$ é ainda uma isometria.*

Demonstração. De fato, sejam $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, temos que

$$X \neq Y \quad \Rightarrow \quad d(X,Y) > 0 \quad \Rightarrow \quad d(X',Y') = d(X,Y) > 0 \quad \Rightarrow \quad X' \neq Y'.$$

Daí, temos que

$$X \neq Y \quad \Rightarrow \quad T(X) \neq T(Y).$$

Isso mostra que T é injetiva.

Agora, seja $X' \in \Pi'$ um ponto arbitrário. Traçando uma reta qualquer $r \in \Pi$, temos que a imagem de r por T é uma reta $r' \in \Pi'$. Se $X' \in r'$ então, por definição de imagem, existe $X \in r$ tal que $T(X) = X'$. Caso $X' \notin r'$, seja s' a perpendicular baixada de X' sobre r'. Chamemos de Y' o ponto de interseção de s' com r'. Como $Y' \in r'$, existe $Y \in r$ tal que $T(Y) = Y'$. Consideremos a reta s perpendicular à reta r passando por Y. A imagem de s pela isometria T é perpendicular a r' e contém Y'. Logo, $T(s) = s'$. Como $X' \in s'$, existe $X \in s$ tal que $T(X) = X'$. Como X' é arbitrário, segue que T também é sobrejetiva.

□

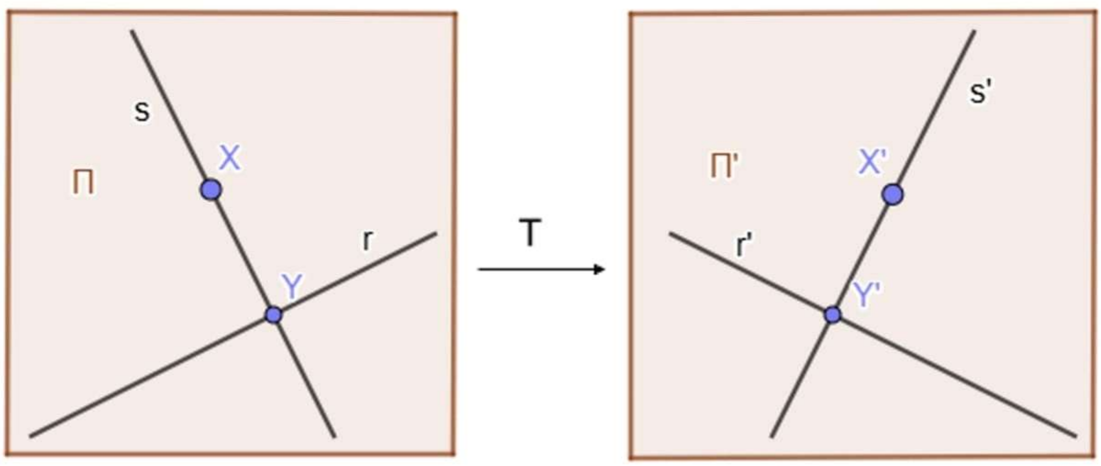


Figura 1.3: Reprodução do autor

Observação 1.5. Se $T : \Pi \longrightarrow \Pi'$ e $S : \Pi' \longrightarrow \Pi''$ são isometrias entre planos então a composta

$$S \circ T : \Pi \longrightarrow \Pi''$$

é também uma isometria.

1.2 Rotações e reflexões

Definição 1.6. (Reflexão em torno de uma reta) seja r uma reta no plano Π. A *reflexão* em torno da reta r é a função $R_T : \Pi \longrightarrow \Pi$ assim definida:

$$\begin{cases} R_T(X) = X, & \forall X \in r \\ R_T(X) = X', & \forall X \notin r \end{cases}$$

sendo r a mediatriz de XX'.

Proposição 1.7. *A função* reflexão $R_T : \Pi \longrightarrow \Pi$ *é uma isometria.*

Demonstração. De fato, para provar que R_T é uma isometria, consideramos dois casos. Primeiro: X e Y estão do mesmo lado da reta r no plano Π. Então traçamos os segmentos XA e $X'A'$, paralelos a r, com A e A' sobre YY'. Os triângulos retângulos XAY e $X'A'Y'$ têm os catetos com o mesmo comprimento logo o mesmo ocorre com suas hiponusas, isto é,

$$\overline{XY} = \overline{X'Y'}.$$

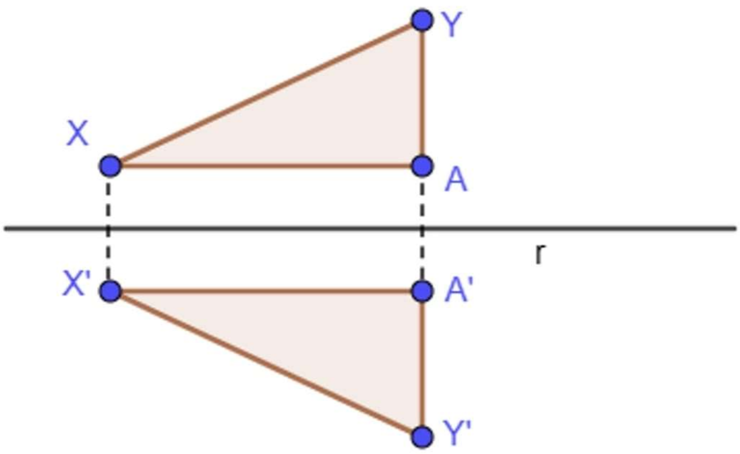


Figura 1.4: Reprodução do autor

Segundo caso: X e Y estão em lados opostos da reta r. Sejam A e B os pontos de interseção de XY e XX' com a reta r. Os triângulos retângulos ABX e ABX' têm o cateto AB em comum e $\overline{BX} = \overline{BX'}$. Logo suas hipotenusas têm o mesmo comprimento:

$$\overline{AX} = \overline{AX'}.$$

Analogamente,

$$\overline{AY} = \overline{AY'}.$$

Assim os triângulos AXX' e AYY' são isósceles, portanto suas medianas são bissetrizes: $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Por outro lado, $\alpha = \beta'$ como ângulos opostos pelo vértice.

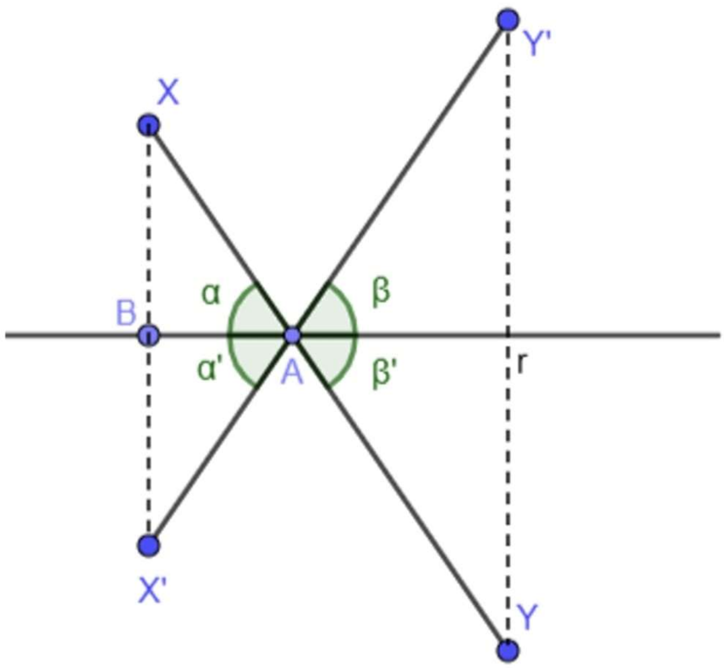


Figura 1.5: Reprodução do autor

Então

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta'.$$

Como $\beta + \beta'$ é o suplemento do ângulo $X\hat{A}Y'$, segue-se que $\alpha + \alpha'$ também é, logo X', A e Y' são colineares. Portanto,

$$\overline{X'Y'} = \overline{X'A} + \overline{AY'} = \overline{XA} + \overline{AY} = \overline{XY}.$$

$\square$

Definição 1.8. (Rotação) Sejam O um ponto tomado no plano Π e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo de vértice O. A *rotação* de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha} : \Pi \longrightarrow \Pi$ assim definida:

$$\begin{cases} \rho_{O,\alpha}(O) = O \\ \rho_{O,\alpha}(X) = X', \quad \forall X \neq O \end{cases}$$

sendo X' o ponto do plano Π tal que

$$d(X, O) = d(X', O), \quad X\hat{O}X = \alpha$$

e o "sentido de rotação"de A para B é o mesmo de X para X'.

A condição $X\hat{O}X' = \alpha$ significa, em termos geométricos, que se tomarmos os pontos A e B tais que

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OX} = \overline{OX'}$$

então $\overline{AB} = \overline{XX'}$. A exigência de que o sentido de rotação de X para X' seja o mesmo que o sentido de A para B é clara intuitivamente e pode ser formulada em termos precisos dizendo-se que os ângulos $B\hat{O}X$ e $A\hat{O}X'$ têm a mesma bissetriz.

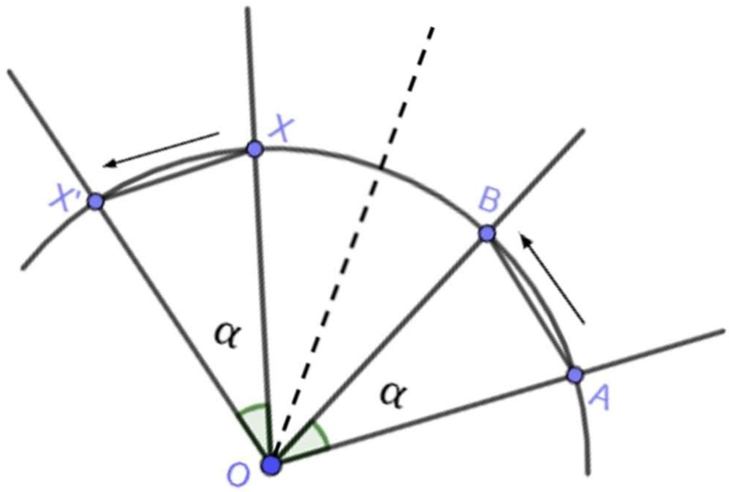


Figura 1.6: Reprodução do autor

Proposição 1.9. *A função* rotação $\rho_{O,\alpha} : \Pi \longrightarrow \Pi$ *é uma isometria.*

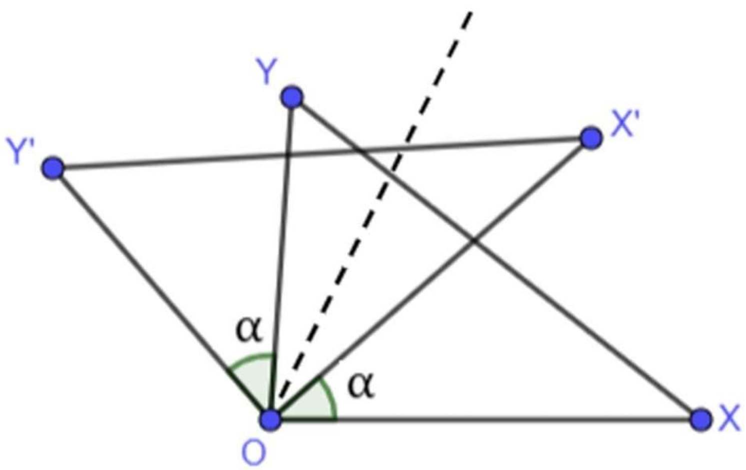


Figura 1.7: Reprodução do autor

Demonstração. De fato, dados os pontos $X, Y \in \Pi$, diferentes de O, sejam X' e Y' suas respectivas imagens pela rotação $\rho_{O,\alpha}$. Como os ângulos $X'\hat{O}Y$ e $X\hat{O}Y'$ têm a mesma bissetriz, segue-se que $X\hat{O}Y = X'\hat{O}Y'$. Sendo $OX = OX'$ e $OY = OY'$, concluímos que os triângulos XOY e $X'OY'$ são congruentes (caso LAL). Logo, $X'Y' = XY$, ou seja, $\rho_{O,\alpha}$ é uma isometria, cujo único ponto fixo é O. □

1.3 Rotações e reflexões no geogebra

Nas seções anteriores foram apresentadas definições e proposições que permitiram um entendimento formal das isometrias de modo geral e particularmente de rotações e reflexões.

Nesta seção as isometrias de rotação e reflexão serão apresentadas de uma forma mais intuitiva e prática. Isso permite uma aproximação maior com as ideias desenvolvidas na educação básica.

1. *Reflexão em torno de uma reta:* para realizar uma reflexão de um polígono em torno de uma reta, no plano cartesiano e usando o geogebra, basta aplicar os seguintes passos:

   a) construa o polígono que será refletido e a reta em torno da qual será feita a reflexão;
   b) clique no botão de reflexão em torno de um eixo na barra de ferramentas do geogebra;
   c) clique na figura e depois clique na reta e a reflexão aparecerá instataneamente.

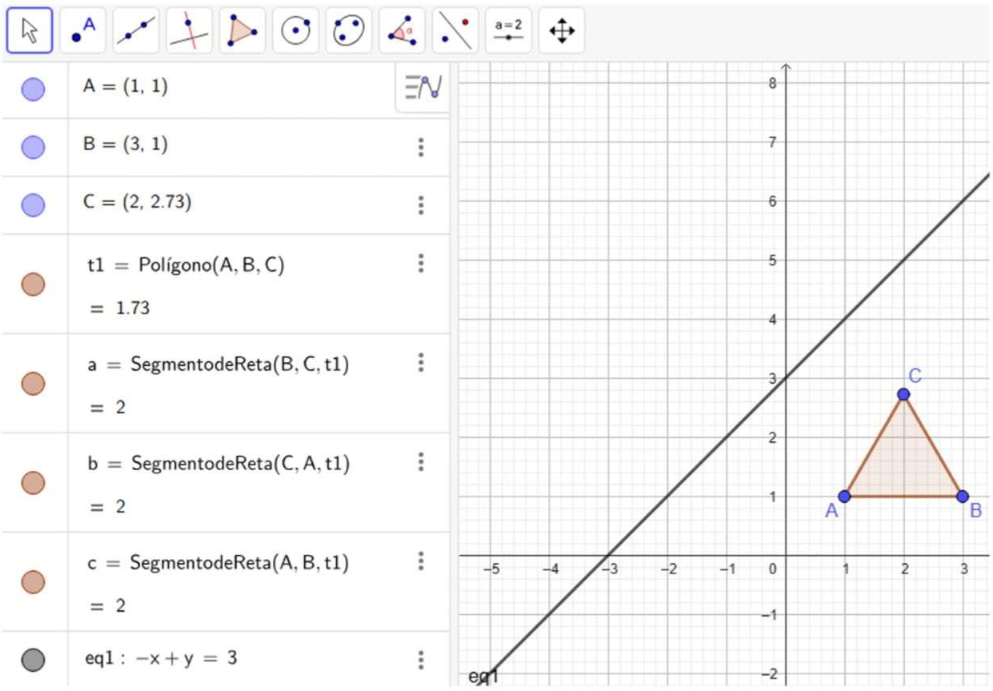


Figura 1.8: Reflexão 1° passo (figura criada pelo autor)

Na figura anterior foram construídos no geogebra o triângulo ABC e a reta $r: -x + y = 3$, sendo $A(1, 1), B(3, 1)$ e $C(2, \sqrt{3} + 1)$ as coordenadas dos vértices.

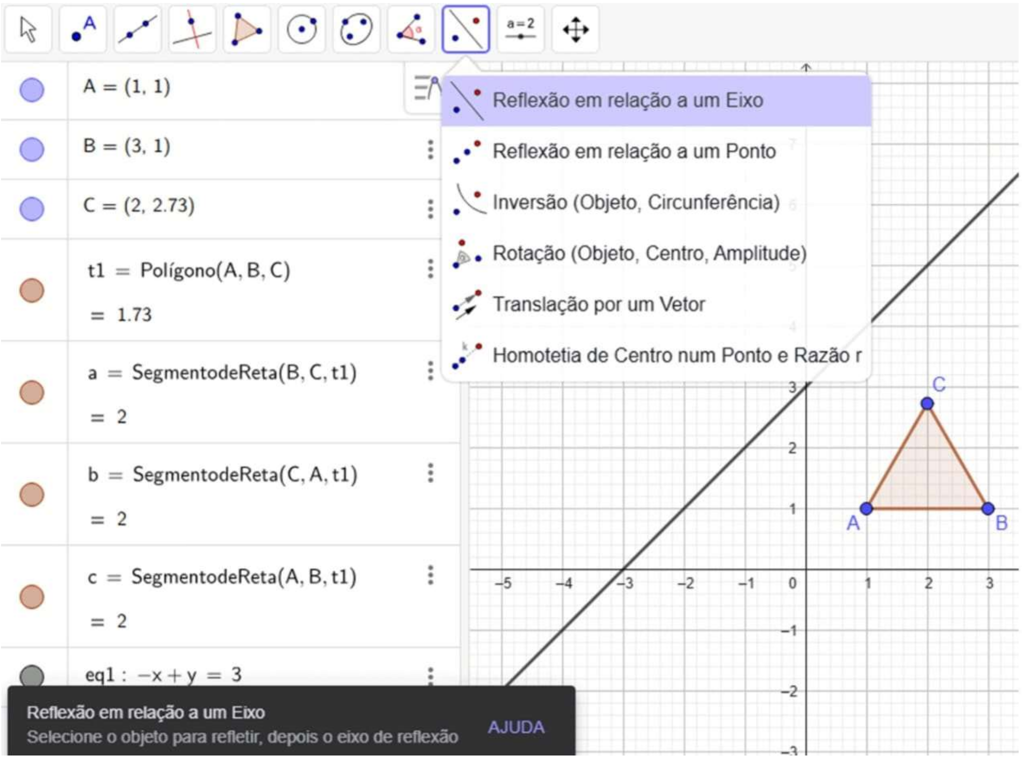


Figura 1.9: Reflexão 2° passo (figura criada pelo autor)

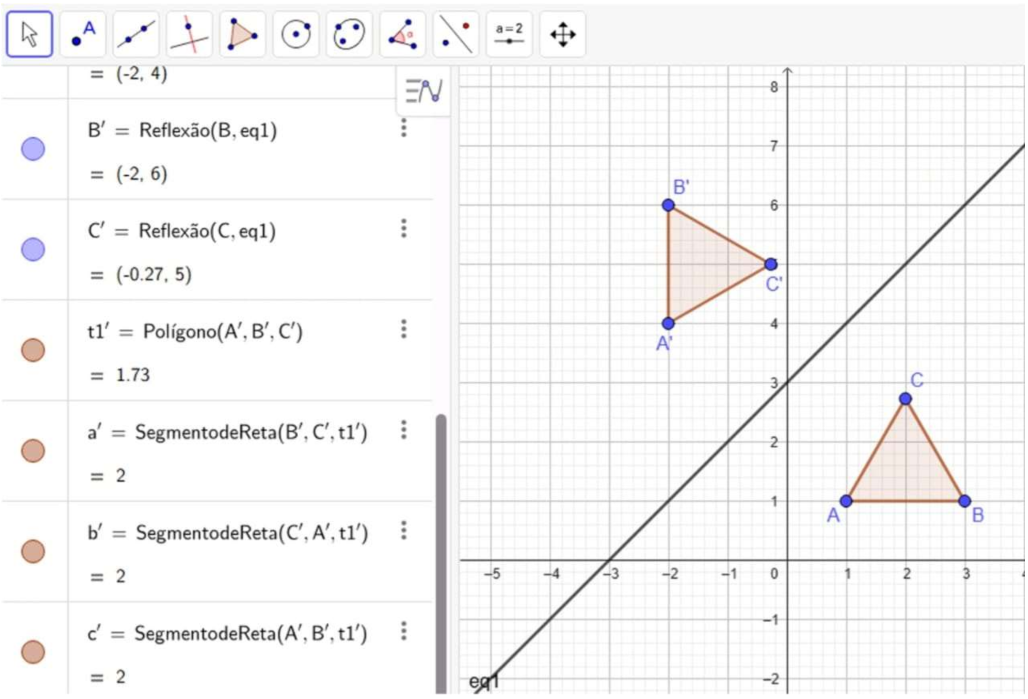


Figura 1.10: Reflexão 3° passo (figura criada pelo autor)

As duas figuras anteriores ilustram os dois próximos passos para realizar a reflexão do triângulo ABC em relação à reta r.

2. *Rotação:* para realizar uma rotação de um polígono em torno de um ponto, com um determinado ângulo, com um determinado sentido (que pode ser horário ou anti-horário) e usando o geogebra, deve-se seguir os seguintes passos:

   a) construa o polígono que será rotacionado e o ponto em relação ao qual será feita a rotação;

   b) clique no botão de rotação na barra de ferramentas do geogebra;

   c) clique na figura e depois no ponto em torno do qual será feita a rotação;

   d) escolha o ângulo de rotação e o sentido de rotação do polígono depois clique em ok.

   As quatro ilustrações representadas abaixo mostram um exemplo de rotação que foi realizada com o triângulo ABC de vértices $A(1,1), B(3,1)$ e $C(2, \sqrt{3}+1)$ em torno do ponto $P(-1,2)$ com um ângulo de 150° no sentido anti-horário. Cada uma delas mostra as ações e os botões que devem ser acionados para efetivar a produção de uma rotação.

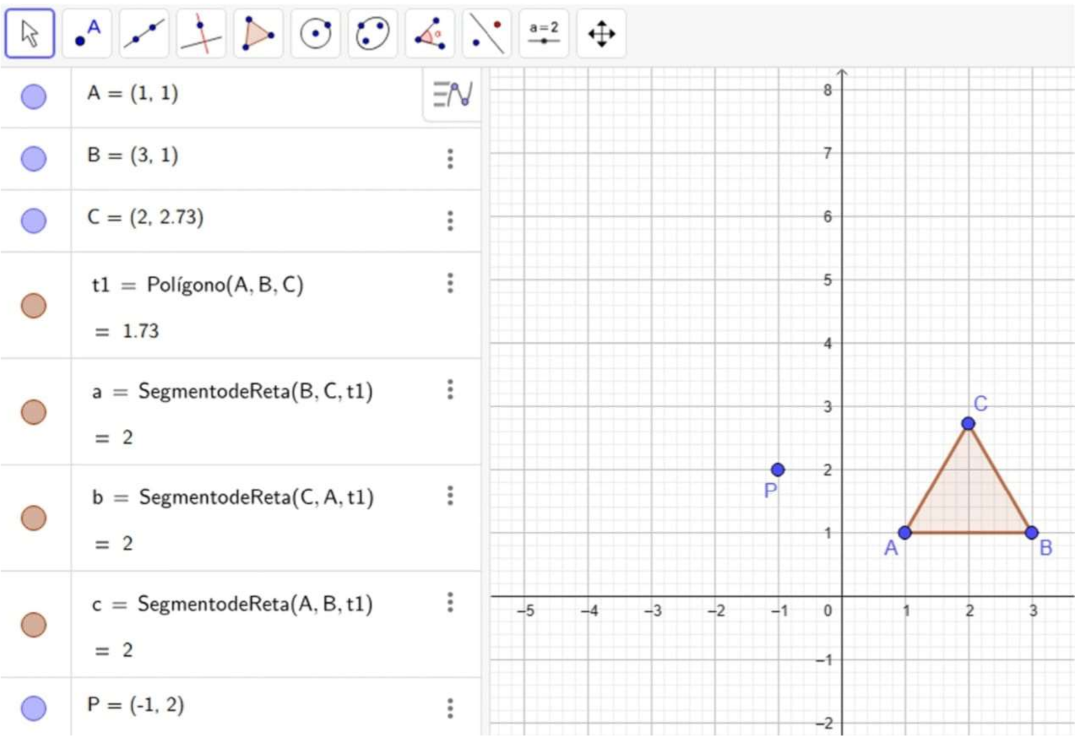


Figura 1.11: Rotação 1° passo (figura criada pelo autor)

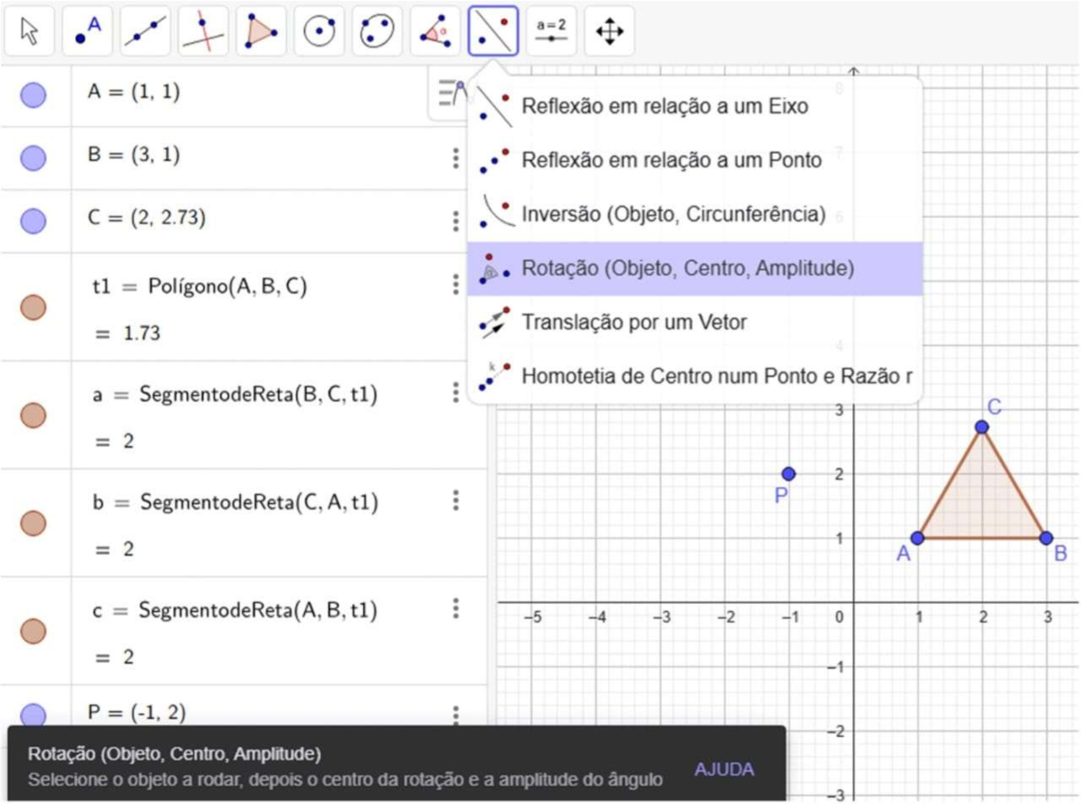


Figura 1.12: Rotação 2° passo (figura criada pelo autor)

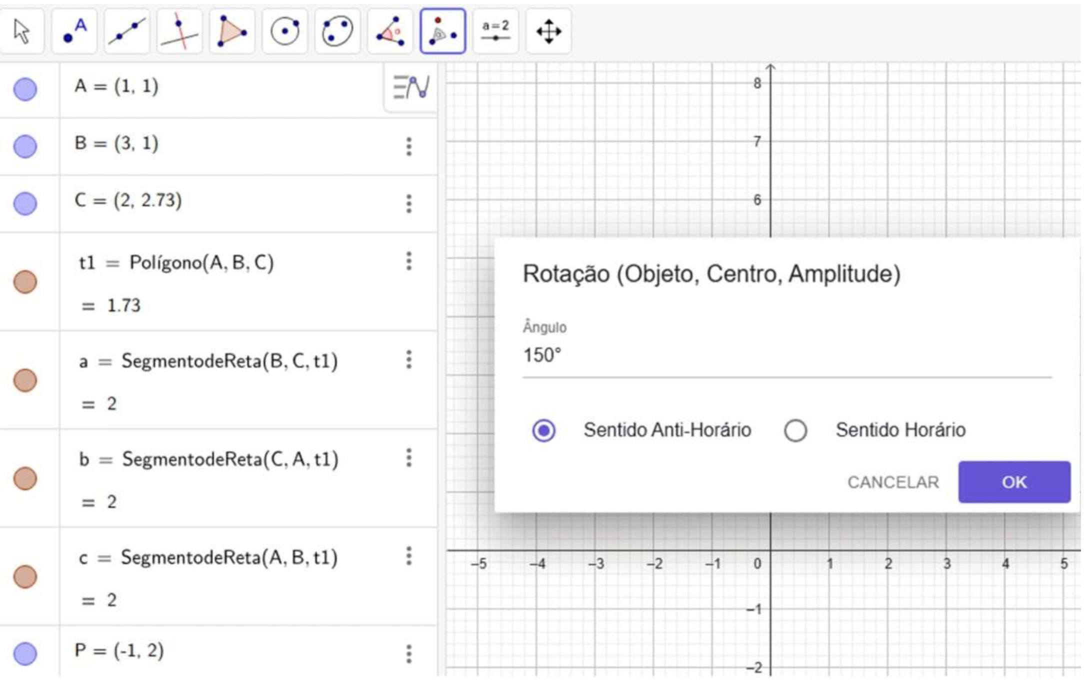


Figura 1.13: Rotação 3° passo (figura criada pelo autor)

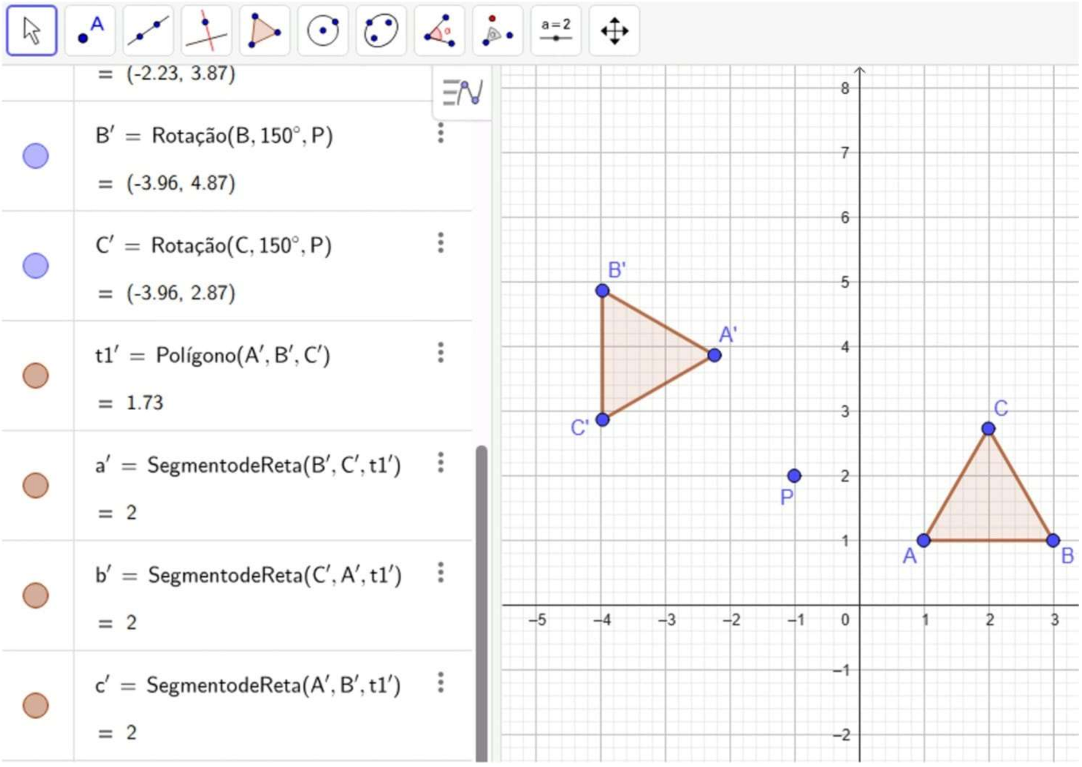


Figura 1.14: Rotação 4° passo (figura criada pelo autor)

CAPÍTULO 2

Grupos diedrais

Os grupos diedrais possuem uma característica geométrica muito importante e que está diretamente relacionada à sua estrutura. Neste capítulo, será realizada uma abordagem dos grupos diedrais mostrando seus principais aspectos constitutivos e algumas de suas mais notáveis propriedades. Mas, antes disso, serão apresentadas a definição de grupos e seus aspectos gerais.

2.1 Grupos e subgrupos

Os grupos são uma estrutura algébrica composta por um conjunto munido de uma operação que satisfaz determinadas propriedades. A seção inicial do capítulo apresentará a definição de grupos e alguns resultados que serão utilizados em outros momentos.

A proposta da seção é de meramente realizar a apresentação dos resultados sem preocupação com as demonstrações. Caso o leitor esteja interessado em verificar as demonstrações das proposições ou teoremas citados deve consultar [2].

Definição 2.1. Um conjunto G com uma operação

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G$$

$$(a, b) \longmapsto a \cdot b$$

é um *grupo* se as condições seguintes são satisfeitas:

1. A operação é associativa, isto é,

   $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, quaisquer que sejam $a, b, c \in G$;

2. Existe um elemento neutro, isto é,

   existe $1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, qualquer que seja $a \in G$;

3. Todo elemento possui um elemento inverso, isto é, qualquer que seja

   $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

Tanto o elemento neutro, quanto o inverso de cada elemento são únicos. Além disso, um grupo G que satisfaça

$$a \cdot b = b \cdot a, \qquad \forall a, b \in G$$

é dito um grupo *abeliano*.

Exemplo 2.2. Consideremos o anel
$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, em que

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

e as operações $+$ e $\cdot$ são definidas como

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y};$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}.$$

Temos que $(\mathbb{Z}_n, +)$ é um grupo abeliano. Esse fato é facilmente verificável pelas propriedades válidas do anel para a operação que também é comutativa.

Para mais detalhes a respeito da definição de anel e sobre o anel $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, veja [2].

Seja $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. O conjunto

$$S_n = \{f : I_n \longrightarrow I_n | f \text{ é uma bijeção}\}$$

com a composição de funções forma um grupo não abeliano. Isso pode ser verificado considerando que a composição de funções é associativa, que a composição com a identidade é a própria função e que a composição de uma bijeção com sua inversa é a identidade. Além disso, sabe-se que a composição não é comutativa.

Definição 2.3. Sejam G um grupo e H um subconjunto não vazio de G. Diz-se que H é um *subgrupo* de G e escreve-se $H \leq G$ (ou $H < G$ se H for próprio) se H é um grupo com a mesma operação de G.

A proposição seguinte apresenta as condições suficientes e necessárias para que um subconjunto H de um grupo G seja um subgrupo.

Proposição 2.4. *Seja H um subconjunto não vazio do grupo G. Então H é um subgrupo de G se e somente se as duas condições seguintes são satisfeitas:*

1. *$h_1 \cdot h_2 \in H$, para cada $h_1, h_2 \in H$;*

2. *$h^{-1} \in H$, para cada $h \in H$.*

Exemplo 2.5. Considere o grupo $(\mathbb{Z}_6, +)$ em que

$$\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}.$$

Temos que $(H, +)$ sendo

$$H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$$

é subgrupo de $(\mathbb{Z}_6, +)$. Para verificar esse fato, basta observar que

$$\overline{2} + \overline{4} = \overline{0}, \quad \overline{2}^2 = \overline{4}, \quad \overline{4}^2 = \overline{2}, \quad \overline{2}^3 = \overline{4}^3 = \overline{0}$$

pois assim, o conjunto é fechado para a operação do grupo $\mathbb{Z}_6$ sendo o elemento neutro e os inversos pertencentes.

As definições a seguir estão relacionadas à ideia de subgrupos gerados. Mais adiante, essa ideia será retomada mostrando que os grupos diedrais possuem subgrupos gerados e eles próprios são também subgrupos gerados.

Definição 2.6. Seja G um grupo e S um subconjunto de G. Nomeia-se por *subgrupo gerado por* S ao subgrupo de G denotado por $\langle S \rangle$ e definido como

$$\langle S \rangle := \{a_1 a_2 \dots a_n \,|\, n \in \mathbb{N}, a_i \in S \cup S^{-1}\},$$

onde $S^{-1} := \{s^{-1} \in G \,|\, s \in S\}$.

Quando o subconjunto S for finito, digamos $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$, utiliza-se a notação $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \rangle$ para designar $\langle S \rangle$. Observa-se também que se $g \in G$, então o subgrupo gerado pelo elemento g pode ser escrito como $\langle g \rangle = \{g^t | t \in \mathbb{Z}\}$.

Exemplo 2.7. Considere o conjunto $S = \{f, g\}$, sendo f e g as bijeções sobre $I_3 = \{1, 2, 3\}$ assim definidas

$$\begin{array}{cc} f : I_3 \longrightarrow I_3; & g : I_3 \longrightarrow I_3 \\ 1 \longmapsto 2 & 1 \longmapsto 1 \\ 2 \longmapsto 3 & 2 \longmapsto 3 \\ 3 \longmapsto 1 & 3 \longmapsto 2. \end{array}$$

Vamos determinar o grupo gerado por S munido da operação de composição de funções. Temos que

$$\begin{array}{ccccc} f^2 = f \circ f & g^2 = g \circ g & f^3 = f^2 \circ f & fg = f \circ g & f^2 g = f^2 \circ g \\ 1 \mapsto 2 \mapsto 3 & 1 \mapsto 1 \mapsto 1 & 1 \mapsto 2 \mapsto 1 & 1 \mapsto 1 \mapsto 2 & 1 \mapsto 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 3 \mapsto 1 & 2 \mapsto 3 \mapsto 2 & 2 \mapsto 3 \mapsto 2 & 2 \mapsto 3 \mapsto 1 & 2 \mapsto 3 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \mapsto 2 & 3 \mapsto 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 1 \mapsto 3 & 3 \mapsto 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 2 \mapsto 1 \end{array}$$

Sendo assim, $f^3 = g^2 = \mathrm{Id}$ (função identidade) e $\mathrm{Id}, f, g, f^2, fg, f^2g$ são seis bijeções distintas. Além disso,

$$\begin{array}{cc} gf = g \circ f & gf^2 = g \circ f^2 \\ 1 \mapsto 2 \mapsto 3 & 1 \mapsto 3 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \mapsto 2 & 2 \mapsto 1 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 1 \mapsto 1 & 3 \mapsto 2 \mapsto 3 \end{array}$$

Dessa forma, fica nítido que $gf = f^2 g$ e $gf^2 = fg$. A partir de tudo isso pode-se mostrar que qualquer outra composição resulta em uma das seis bijeções $\mathrm{Id}, f, g, f^2, fg, f^2g$. Daí,

$$\langle S \rangle = \{\mathrm{Id}, f, g, f^2, fg, f^2 g\}.$$

Definição 2.8. Um grupo G é dito *cíclico* quando ele pode ser gerado por um elemento, isto é, quando $G = \langle g \rangle$, para algum $g \in G$.

Exemplo 2.9. O grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$ é um exemplo de grupo cíclico. Isso decorre do fato de qualquer elemento $\overline{k}$ do grupo poder ser escrito como $\overline{1}+\overline{1}+\cdots+\overline{1}$ (com k parcelas) sendo k inteiro positivo, ou seja,

$$\overline{k} = \overline{k \cdot 1} = k \cdot \overline{1} = \overline{1} + \overline{1} + \cdots + \overline{1},$$

com k parcelas. Dessa forma, $\overline{1}$ é um gerador do grupo, ou seja, $\langle \overline{1} \rangle = (\mathbb{Z}_n, +)$.

Proposição 2.10. *Se G é um grupo cíclico, então G é abeliano.*

Os grupos diedrais que serão estudados aqui são grupos finitos. A definição que segue permite a formalização dessa ideia.

Definição 2.11. A *ordem* de um grupo G é o número de elementos em G; a qual será denotada por $|G|$. Se α é um elemento do grupo G, a *ordem* de α é a ordem do subgrupo gerado por α; a qual será denotada por $O(\alpha)$.

Exemplo 2.12. O grupo gerado pelas bijeções do Exemplo 2.7 tem ordem seis ($|\langle f, g \rangle| = 6$), pois conforme foi visto é composto por seis bijeções distintas

$$\langle f, g \rangle = \{\mathrm{Id}, f, g, f^2, fg, f^2 g\}.$$

Além disso, foi visto que $f^3 = g^2 = \mathrm{Id}$. Logo, a ordem de f é três ($O(f) = 3$) e a ordem de g é dois ($O(g) = 2$). É fácil verificar também que

$$O(f^2) = 3, \quad O(fg) = 2, \quad O(f^2 g) = 2.$$

Proposição 2.13. *Sejam α um elemento do grupo G e $\langle \alpha \rangle$ o subgrupo gerado por α. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) A ordem $O(\alpha)$ é finita;

(ii) Existe $t \geq 1$ tal que $\alpha^t = 1$.

A proposição a seguir é uma consequência direta do Teorema de Lagrange. Para mais informações sobre esse teorema veja [2].

Proposição 2.14. *Seja G um grupo finito e seja $\alpha \in G$. Então, a ordem de α divide a ordem de G.*

Existe um interesse em estabelecer critérios para garantir as condições em que grupos que parecem inicialmente distintos apresentem estruturas com propriedades idênticas. A definição e a proposição que serão mostradas a seguir estabelecem um critério nesse sentido.

Definição 2.15. Sejam $(G, \oplus)$ e $(H, \otimes)$ dois grupos. Uma função $f : G \longrightarrow H$ é um *homomorfismo* se ela é compatível com as estruturas dos grupos, isto é, se para quaisquer $a, b \in G$

$$f(a \oplus b) = f(a) \otimes f(b).$$

Exemplo 2.16. Dados os grupos $(\mathbb{Z}_3, +)$ e $(\mathbb{Z}_6, +)$, considere a seguinte função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_3 &\longrightarrow \mathbb{Z}_6 \\ \overline{0} &\longmapsto \overline{0} \\ \overline{1} &\longmapsto \overline{2} \\ \overline{2} &\longmapsto \overline{4} \end{aligned}$$

Vamos verificar que essa função é um homomorfismo.

De fato, valem as seguintes igualdades

$$f(\overline{1} + \overline{1}) = f(\overline{2}) = \overline{4} = \overline{2} + \overline{2} = f(\overline{1}) + f(\overline{1});$$

$$f(\overline{1} + \overline{2}) = f(\overline{3}) = f(\overline{0}) = \overline{0} = \overline{6} = \overline{2} + \overline{4} = f(\overline{1}) + f(\overline{2});$$

$$f(\overline{2} + \overline{2}) = f(\overline{4}) = f(\overline{1}) = \overline{2} = \overline{8} = \overline{4} + \overline{4} = f(\overline{2}) + f(\overline{2}).$$

Dessa forma, fica verificado que a função é um homomorfismo.

Definição 2.17. Seja $f : (G, \oplus) \longrightarrow (H, \otimes)$ um homomorfismo de grupos. Então, f é dito um isomorfismo, se f é bijetivo.

Nesse caso usa-se a notação $G \cong H$ para indicar que os grupos são isomorfos.

Exemplo 2.18. No Exemplo 2.16 foi mostrado que a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_3 &\longrightarrow \mathbb{Z}_6 \\ \overline{0} &\longmapsto \overline{0} \\ \overline{1} &\longmapsto \overline{2} \\ \overline{2} &\longmapsto \overline{4} \end{aligned}$$

é um homomorfismo. Considerando o subgrupo $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ de $\mathbb{Z}_6$ que é imagem dessa função, $g : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow H$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}_3$ é um isomorfismo.

Os enunciados que serão mostrados a seguir correspondem ao conceito de apresentação. Esse objeto, permite uma representação resumida e direta de um grupo, pois destaca elementos essencias a partir dos quais outras informações são obtidas.

Definição 2.19. Dizemos que $G = \langle X \mid R \rangle$ é uma apresentação do grupo G se G é gerado por X e R é um conjunto de relações satisfeitas pelos elementos de X de tal modo que todas as outras equações satisfeitas por G são consequência das equações de R.

Exemplo 2.20. Seja G o grupo gerado pelas bijeções f e g do Exemplo 2.7. Sabe-se que

$$f^3 = g^2 = \mathrm{Id}, \quad gf = f^2 g.$$

Qualquer outra equação válida em G pode ser verificada a partir dessas informações. Daí,

$$G = \langle f, g \mid f^3 = g^2 = \mathrm{Id},\ gf = f^2 g \rangle$$

é uma apresentação de G.

Para mais detalhes a respeito de apresentações de grupos veja [6].

2.2 Grupos de permutações

Definição 2.21. Seja X um conjunto qualquer. Considere o conjunto

$$S(X) = \{f : X \longrightarrow X \mid f \text{ é uma bijeção}\}.$$

Chama-se de permutação a cada bijeção $f : X \longrightarrow X$ e de conjunto de permutações ao conjunto $S(X)$.

Exemplo 2.22. Se $X = I_3 = \{1, 2, 3\}$, temos que $S(X) = \langle f, g \rangle$, sendo f e g as bijeções definidas por

$$\begin{aligned} f : I_3 &\longrightarrow I_3 \\ 1 &\longmapsto 2 \\ 2 &\longmapsto 3 \\ 3 &\longmapsto 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : I_3 &\longrightarrow I_3 \\ 1 &\longmapsto 1 \\ 2 &\longmapsto 3 \\ 3 &\longmapsto 2 \end{aligned}$$

conforme foi mostrado no Exemplo 2.7.

Proposição 2.23. *O par $(S(X), \circ)$ forma um grupo, sendo a operação "$\circ$" a composição de funções.*

Demonstração. De fato, a composição de funções é associativa, portanto quaisquer que sejam $f_1, f_2, f_3 \in S(X)$ vale que

$$(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3).$$

Além disso, se $Id : X \longrightarrow X$ é a função identidade, ou seja, $Id(x) = x$, qualquer que seja $x \in X$ então para todo $f \in S(X)$

$$(f \circ \mathrm{Id})(x) = f(\mathrm{Id}(x)) = f(x) = \mathrm{Id}(f(x)) = (\mathrm{Id} \circ f)(x)$$

para cada $x \in X$. Logo, $f \circ \mathrm{Id} = f$ e $\mathrm{Id} \circ f = f$, mostrando que a função Id é o elemento neutro do grupo.

Agora, observando que qualquer função bijetiva é invertível, ficam garantidas todas as condições para $(S(X), \circ)$ ser um grupo. □

Observação 2.24. O grupo $(S(X), \circ)$ é chamado de *grupo simétrico de X* ou *grupo de permutações de X*.

Particularmente, para $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $S(X)$ será denotado por S_n e chamado de grupo simétrico ou grupo de permutações de n letras. Além disso, dado $f \in S_n$ é usual representar f através de uma matriz $2 \times n$, da seguinte maneira:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix},$$

ou seja, na primeira linha ficam os elementos de $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e na segunda linha ficam as imagens deles por f. Assim, $i \in X$ e $f(i)$ ficam na mesma coluna.

Exemplo 2.25. Sejam f, g permutações do conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dados por

$$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 3,\ f(4) = 5,\ f(5) = 1.$$

$$g(1) = 5,\ g(2) = 4,\ g(3) = 1,\ g(4) = 2,\ g(5) = 3.$$

Expresse f e g na notação matricial e determine $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ f^{-1} e g^{-1}.

Considerando f e g em suas representações matriciais, temos que

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para fazer a composição de permutações na representação matricial, basta fazer as composições individuais por coluna da direita para a esquerda, por exemplo, se na composição de duas matrizes quaisquer observa-se na matriz da direita que $1 \mapsto i$ e na matriz da esquerda que $i \mapsto j$, obtém-se que a primeira coluna da composição das permutação é

$$\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}.$$

Repetindo o mesmo processo para as outras colunas, obtém-se a matriz completa. Assim, fazendo a composição de f e g, obtemos

$$\begin{aligned} f \circ g &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ f(g(1)) & f(g(2)) & f(g(3)) & f(g(4)) & f(g(5)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ f(5) & f(4) & f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, fazendo a composição entre g e f, obtemos

$$\begin{aligned}
g \circ f &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ g(f(1)) & g(f(2)) & g(f(3)) & g(f(4)) & g(f(5)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ g(2) & g(4) & g(3) & g(5) & g(1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Agora, para determinar as permutações inversas f^{-1} e g^{-1}, basta inverter as linhas das matrizes das permutações f e g e depois ordenar as colunas colocando os elementos da nova primeira linha em ordem crescente.

$$\begin{aligned}
f^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{-1} &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Proposição 2.26. *Seja $n \geq 1$. O grupo de permutações S_n tem $n!$ elementos.*

Demonstração. Seja $f \in S_n$. Temos n possibilidades para a imagem $f(1)$, $(n-1)$ possibilidades para $f(2)$, $(n-2)$ para f_3, $\ldots$, 2 possibilidades para $f(n-1)$ e uma possibilidade para $f(n)$. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, f é uma das

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n!$$

bijeções possíveis. Portanto, $|S_n| = n!$ □

Observação 2.27. O grupo de permutações S_n é abeliano se, e somente se, $n = 1$ ou $n = 2$.

Exemplo 2.28. O grupo de permutações S_3 possui $3! = 6$ elementos. Vamos explorar os elementos de S_3 a fim de obter informações a respeito desse grupo.

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sejam $\alpha = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}$ e $\beta = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}$. Então

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix};$$

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix} = \mathrm{Id};$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix} = \mathrm{Id};$$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix};$$

$$\alpha^2\beta = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix};$$

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix};$$

$$\beta\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}.$$

A tabela multiplicativa fica da seguinte forma

$\cdot$	Id	α	α^2	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$
Id	Id	α	α^2	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$
α	α	α^2	Id	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$	β
α^2	α^2	Id	α	$\alpha^2\beta$	β	$\alpha\beta$
β	β	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	Id	α^2	α
$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	β	$\alpha^2\beta$	α	Id	α^2
$\alpha^2\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	β	α^2	α	Id

Observando as operações entre α e β nota-se facilmente que $\beta\alpha = \alpha^2\beta$ e $\beta\alpha^2 = \alpha\beta$, portanto $\beta\alpha \neq \alpha\beta$ mostrando assim que o grupo S_3 não é abeliano e isso já era esperado pelo que foi dito na Observação 2.27. Além disso, foi verificado que α e β geram o grupo S_3, ou seja, todos os elementos do grupo são produtos finitos de fatores iguais a α ou β. Dessa forma, pode-se escrever o grupo S_3 da seguinte forma

$$S_3 = \{\mathrm{Id}, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}.$$

Exemplo 2.29. Considere o grupo de permutações S_4. Vamos verificar que os elementos σ e τ de S_4, destacados abaixo, geram um subgrupo não abeliano com oito elementos:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,4\,3\,2 \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} = \mathrm{Id};$$

$$\tau^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,4\,3\,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} = \mathrm{Id};$$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,2\,1\,4 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3\tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix};$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}, \quad \tau\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,2\,1\,4 \end{pmatrix}, \quad \tau\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}.$$

A tabela multiplicativa fica da seguinte forma

$\cdot$	Id	σ	σ^2	σ^3	τ	$\sigma\tau$	$\sigma^2\tau$	$\sigma^3\tau$
Id	Id	σ	σ^2	σ^3	τ	$\sigma\tau$	$\sigma^2\tau$	$\sigma^3\tau$
σ	σ	σ^2	σ^3	Id	$\sigma\tau$	$\sigma^2\tau$	$\sigma^3\tau$	τ
σ^2	σ^2	σ^3	Id	σ	$\sigma^2\tau$	$\sigma^3\tau$	τ	$\sigma\tau$
σ^3	σ^3	Id	σ	σ^2	$\sigma^3\tau$	τ	$\sigma\tau$	$\sigma^2\tau$
τ	τ	$\sigma^3\tau$	$\sigma^2\tau$	$\sigma\tau$	Id	σ^3	σ^2	σ
$\sigma\tau$	$\sigma\tau$	τ	$\sigma^3\tau$	$\sigma^2\tau$	σ	Id	σ^3	σ^2
$\sigma^2\tau$	$\sigma^2\tau$	$\sigma\tau$	τ	$\sigma^3\tau$	σ^2	σ	Id	σ^3
$\sigma^3\tau$	$\sigma^3\tau$	τ	$\sigma\tau$	τ	σ^3	σ^2	σ	Id

Podemos destacar os elementos do subgrupo de S_4 gerado por σ e τ e observar alguns fatos a respeito desse subgrupo:

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \{\mathrm{Id}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\}.$$

Note que a ordem de cada elemento do subgrupo divide 8 que é a ordem do subgrupo, conforme foi dito na Proposição 2.14. Além disso, já era esperado que S_4 não fosse abeliano, conforme foi dito na Observação 2.27, ainda assim pode-se notar que as permutações σ e τ não comutam, pois

$$\sigma\tau = \tau\sigma^3 \neq \sigma^3\tau = \tau\sigma.$$

Isso garante também que o subgrupo $\langle \sigma, \tau \rangle$ não é abeliano.

2.3 Grupos diedrais

No capítulo anterior foi definida a noção de isometrias e foi mostrado que a reflexão em torno de uma reta e a rotação em torno de um ponto são exemplos de isometrias. Nesta seção, será estudado um grupo cuja estrutura está fundamentada nessas isometrias.

Definição 2.30. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e seja φ uma isometria $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(X) = X$. Uma *simetria* de X é a isometria φ restrita a X.

Exemplo 2.31. Seja P_n um polígono regular de n lados. Então, qualquer reflexão em torno de um eixo de simetria de P_n é uma simetria.

Demonstração. Seja r um eixo de simetria de P_n. Da Definição 1.6 temos que se $X \in r \cap P_n$, então $R_T(X) = X \in P_n$. Considere agora $Y \in P_n$ tal que $Y \notin r$. Temos que $R_T(Y) = Y'$ sendo r a mediatriz de YY'. Daí, segue que $R_T(Y) = Y' \in P_n$ e podemos concluir que $R_T(P_n) \subset P_n$.

Seja agora X um ponto qualquer de P_n. Escolhendo X' tal que r é mediatriz de XX' temos que $X' \in P_n$ e $X = R_T(X') \in R_T(P_n)$. Segue que $R_T(P_n) = P_n$. $\square$

Exemplo 2.32. Seja P_n um polígono regular de n lados. Então, a rotação de $\frac{2\pi}{n}$, em torno do centro, no sentido anti-horário de P_n é uma simetria.

Demonstração. Seja X' um ponto obtido de uma rotação do ponto X com ângulo de $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ em torno do centro O do polígono regular P_n no sentido anti-horário. Conforme visto na Definição 1.8, temos que (para $X \neq O$)

$$d(X, O) = d(X', O); \quad X\hat{O}X' = \frac{2\pi}{n}.$$

Daí, $\rho_{O,\alpha}(X) = X' \in P_n$. Segue então que $\rho_{O,\alpha}(P_n) \subset P_n$.

Consideremos agora um ponto X qualquer de P_n. Escolhendo o ponto X' tal que $\rho_{O,\alpha}(X') = X$, temos que

$$d(X', O) = d(X, O); \quad X'\hat{O}X = \frac{2\pi}{n}.$$

Daí, $X' \in P_n$ e $X = \rho_{O,\alpha}(X') \in \rho_{O,\alpha}(P_n)$. Segue que $P_n \subset \rho_{O,\alpha}(P_n)$.

Das duas inclusões conclui-se que $\rho_{O,\alpha}(P_n) = P_n$. $\square$

Definição 2.33. Seja $n \geq 3$ um inteiro e seja P_n um polígono regular de n lados no plano $\mathbb{R}^2$. Então há exatamente $2n$ simetrias de P_n:

- n rotações de ângulo $\frac{2k\pi}{n}$ em torno do centro de P_n para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, no sentido anti-horário;
- n reflexões em torno dos eixos de simetria de P_n.

Denotando por r a rotação de $\frac{2\pi}{n}$, o conjunto das rotações é:

$$\{\mathrm{Id}, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}.$$

Agora, se s é a reflexão em torno de um eixo de simetria, de P_n, então todas as outras reflexões são da forma $r^i s$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Assim, se D_n é o conjunto de todas as simetrias de P_n, então ele pode ser escrito da seguinte forma

$$D_n = \{\mathrm{Id}, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, rs, r^2 s, \ldots, r^{n-1}s\}$$

Sendo $r^n = \mathrm{Id}$, $s^2 = \mathrm{Id}$ e $r^{n-1}s = sr$ é possível provar que todas as identidades que o grupo satisfaz derivam dessas, ou seja,

$$D_n = \langle r, s \mid \; r^n = \mathrm{Id}, \; s^2 = \mathrm{Id}, \; rs = sr^{-1} \rangle$$

Proposição 2.34. *O conjunto das simetrias de P_n forma um grupo com a composição de simetrias, denotado por D_n, e chama-se* o grupo diedral *de ordem $2n$.*

Demonstração. De fato, já se sabe que a composição de funções é uma operação associativa, particularmente, como operação do D_n garantimos o primeiro requisito para ser grupo. Além disso, é claro que o elemento Id é a unidade do grupo. Agora, observando que todas as reflexões têm ordem igual 2, já que para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$(r^i s)^2 = r^i s \cdot r^i s = r^i s \cdot s (r^{-1})^i = r^i \cdot (r^{-1})^i = (r \cdot r^{-1})^i = \mathrm{Id},$$

e também que $r^i \cdot r^{n-i} = \mathrm{Id}$, temos que todos os elementos possuem inverso. □

Exemplo 2.35. Vamos conhecer o grupo diedral D_3 e mostrar que esse grupo é isomorfo ao grupo de permutações S_3.

Seja $P_1P_2P_3$ um triângulo equilátero. Sejam E_1, E_2, E_3 as mediatrizes do triângulo e O o baricentro. Vamos considerar o conjunto das transformações que preservam o triângulo, com a operação de composição.

Essas transformações consistem em

- Id, r, r^2: as rotações centradas em O, no sentido anti-horário, de ângulos 0, $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ respectivamente.

- $s, rs, r^2 s$: as reflexões em torno da reta mediatriz E_1, E_2 e E_3 respectivamente

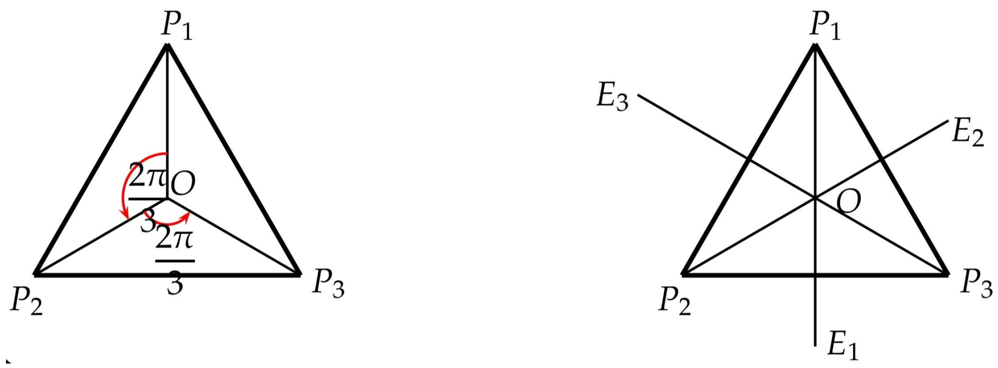


Figura 2.1: Fonte: Yartey, Joseph Nee Anyah. Álgebra II. (2017, p. 70)

Denotamos por D_3 o conjunto dessas seis simetrias do triângulo equilátero:

$$D_3 = \{\mathrm{Id}, r, r^2, s, rs, r^2s\}.$$

Conforme mostrado na Proposição 2.34, D_3 munido da operação de composição de funções é um grupo finito de ordem 6, possuindo a seguinte apresentação

$$\langle r, s \rangle = \{r, s \mid \ r^3 = \mathrm{Id},\ s^2 = \mathrm{Id},\ sr = r^2s\}.$$

Assim, a tabela multiplicativa de D_3 é

$\cdot$	Id	r	r^2	s	rs	r^2s
Id	Id	r	r^2	s	rs	r^2s
r	r	r^2	Id	rs	r^2s	s
r^2	r^2	Id	r	r^2s	s	rs
s	s	r^2s	rs	Id	r^2	r
rs	rs	s	r^2s	r	Id	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^2	r	Id

Comparando a tabela multiplicativa de D_3 com a tabela multiplicativa de S_3, nota-se que r e α se comportam de maneira idêntica e s e β também. Note então que D_3 e S_3 são grupos isomorfos.

De fato, para verificar isso basta considerar o homomorfismo bijetivo

$$\begin{array}{rccc} f & : & D_3 & \longrightarrow & S_3 \\ & & \mathrm{Id} & \mapsto & \mathrm{Id} \\ & & r & \mapsto & \alpha \\ & & r^2 & \mapsto & \alpha^2 \\ & & s & \mapsto & \beta \\ & & rs & \mapsto & \alpha\beta \\ & & r^2s & \mapsto & \alpha^2\beta. \end{array}$$

Assim, fica explícito que $D_3 \cong S_3$.

Foi visto anteriormente que os grupos de permutações S_n para $n \geq 3$ são não abelianos. Com isso, e tendo em vista que D_3 é isomorfo a S_3, temos que D_3 será também não abeliano.

O isomorfismo de D_3 com um grupo de permutações permite uma leitura das simetrias do D_3 por meio das permutações dos vértices do triângulo que podem ser identificados com uma numeração fixa de 1 a 3. Dessa forma, considerando as permutações de S_3 temos as seguintes interpretações

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix} \longrightarrow (P_1 \to P_1,\ P_2 \to P_2,\ P_3 \to P_3) \longrightarrow P_1, P_2 \text{ e } P_3 \text{ permanecem fixos.}$$

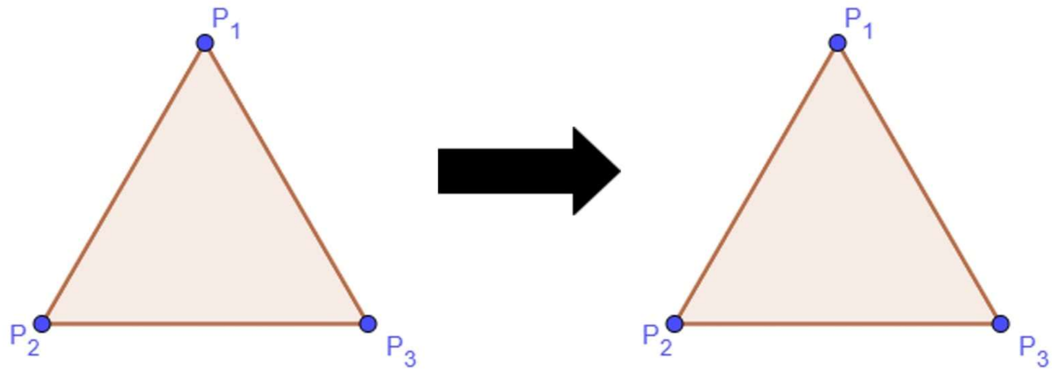


Figura 2.2: Ilustração criada pelo autor

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} \longrightarrow (P_1 \to P_2,\ P_2 \to P_3,\ P_3 \to P_1) \longrightarrow P_1 \text{ vira } P_2,\ P_2 \text{ vira } P_3 \text{ e } P_3 \text{ vira } P_1.$$

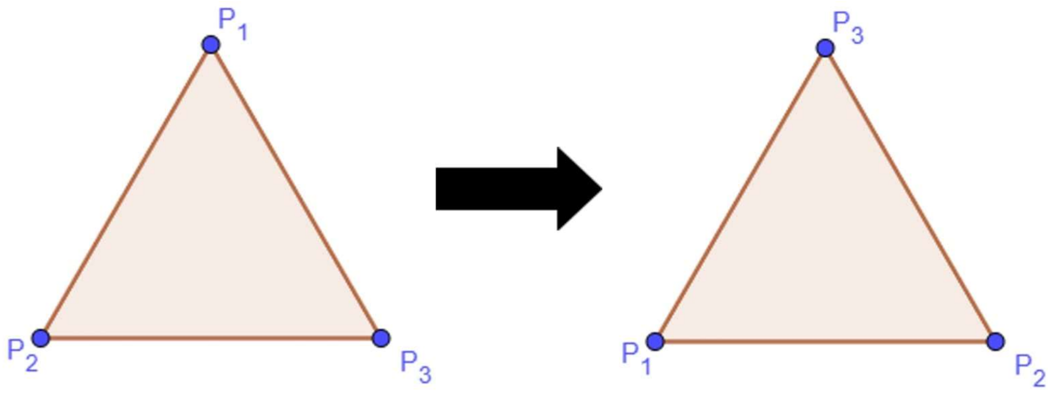


Figura 2.3: Ilustração criada pelo autor

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \longrightarrow (P_1 \to P_3,\ P_2 \to P_1,\ P_3 \to P_2) \longrightarrow P_1 \text{ vira } P_3,\ P_2 \text{ vira } P_1 \text{ e } P_3 \text{ vira } P_2.$$

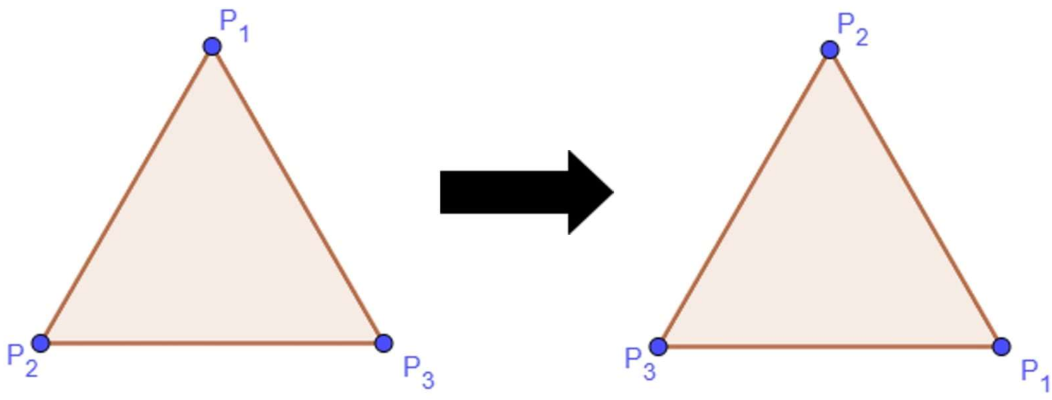


Figura 2.4: Ilustração criada pelo autor

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} \longrightarrow (P_1 \to P_1, P_2 \leftrightarrow P_3) \longrightarrow P_1 \text{ fica fixo, } P_2 \text{ vira } P_3 \text{ e } P_3 \text{ vira } P_2.$$

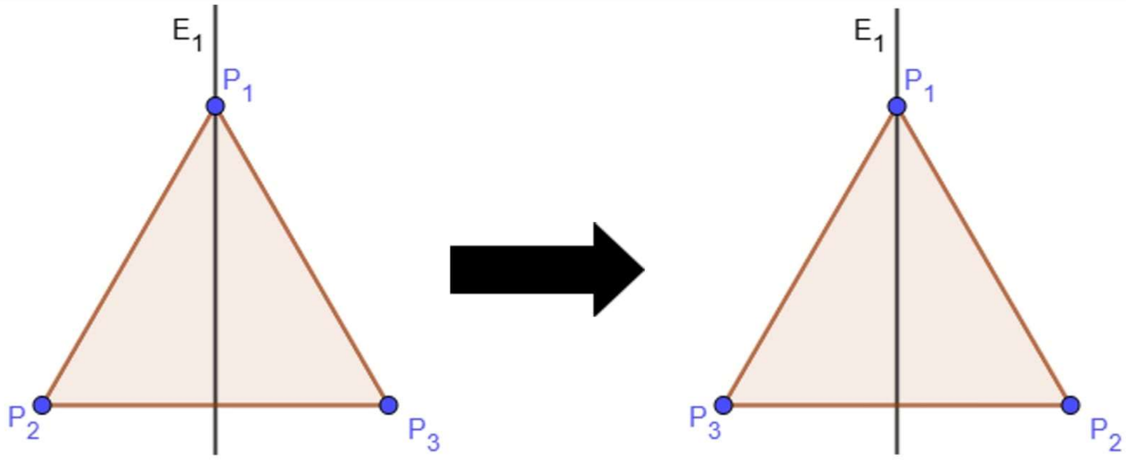


Figura 2.5: Ilustração criada pelo autor

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} \longrightarrow (P_2 \to P_2, P_1 \leftrightarrow P_3) \longrightarrow P_2 \text{ fica fixo, } P_1 \text{ vira } P_3 \text{ e } P_3 \text{ vira } P_1.$$

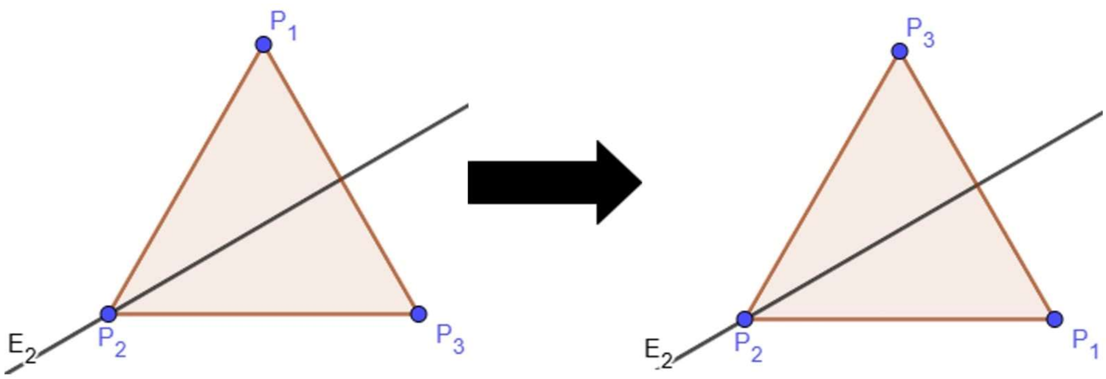


Figura 2.6: Ilustração criada pelo autor

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 2\ 1\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow (P_3 \to P_3, P_1 \leftrightarrow P_2) \longrightarrow P_3 \text{ fica fixo, } P_2 \text{ vira } P_1 \text{ e } P_1 \text{ vira } P_2.$$

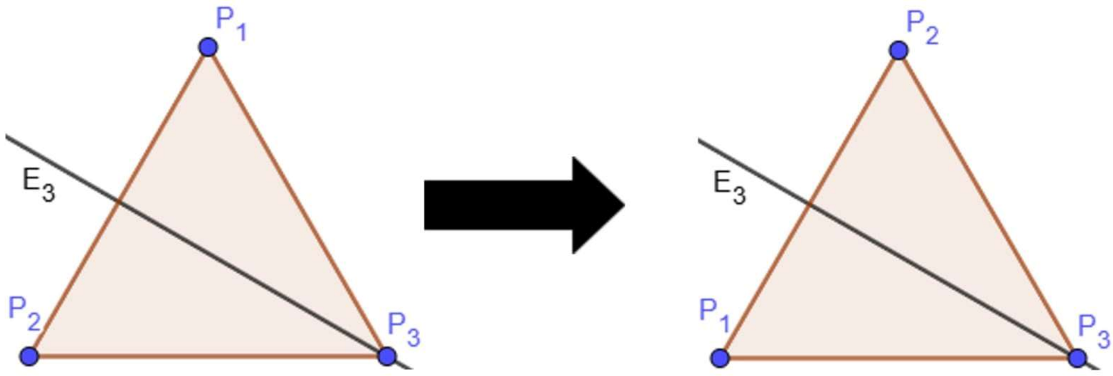


Figura 2.7: Ilustração criada pelo autor

Exemplo 2.36. O D_4 é o grupo diedral das simetrias do quadrado. Neste exemplo, será verificado que D_4 é um grupo de ordem 8 não abeliano e isomorfo a um subgrupo de S_4.

Seja $P_1P_2P_3P_4$ um quadrado. Sejam D_1, D_2 as diagonais e M, N as mediatrizes do quadrado e O o baricentro. Vamos considerar o conjunto das transformações que preservam o quadrado, com a operação de composição.

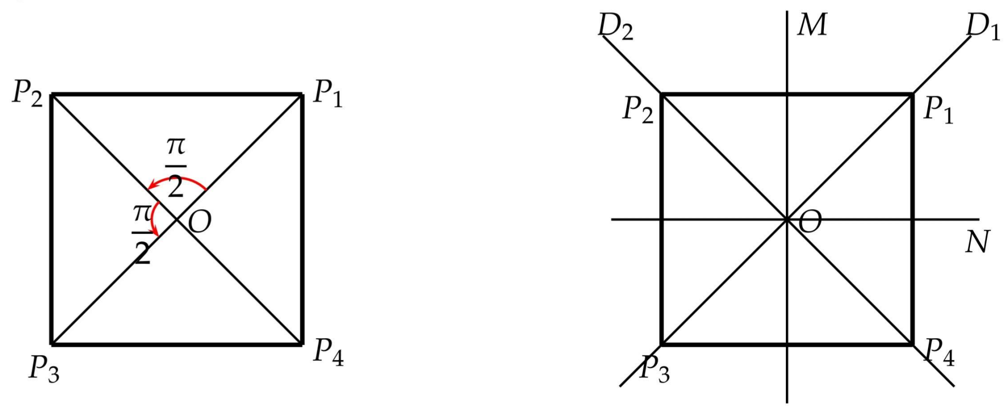


Figura 2.8: Fonte: Yartey, Joseph Nee Anyah. Álgebra II. (2017, p. 72)

Essas transformações consistem em

- $\text{Id}, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\pi}, R_{\frac{3\pi}{2}}$: as rotações centradas em O, no sentido anti-horário, de ângulos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ respectivamente.

- F_1, F_2, F_3, F_4 : as reflexões em torno das retas D_1, D_2, M, N respectivamente.

Denotamos por D_4 o conjunto dessas oito simetrias do quadrado:

$$D_4 = \{\text{Id}, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\pi}, R_{\frac{3\pi}{2}}, F_1, F_2, F_3, F_4\}.$$

Sejam $r = R_{\frac{\pi}{2}}$ e $s = F_3$, então

$$R_\pi = r^2, \quad R_{\frac{3\pi}{2}} = r^3, \quad F_1 = rs, \quad F_2 = r^3s, \quad F_3 = s, \quad F_4 = r^2s.$$

Assim, o grupo D_4 pode ser escrito da seguinte forma

$$D_4 = \{\mathrm{Id}, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}.$$

Para o D_4 valem as seguintes relações $r^4 = \mathrm{Id}$, $s^2 = \mathrm{Id}$ e $sr = r^3s$. Portanto ele pode ser representado da seguinte forma

$$D_4 = \langle r, s \,|\, r^4 = \mathrm{Id}, s^2 = \mathrm{Id}, sr = r^{-1}s \rangle.$$

A tabela multiplicativa do grupo D_4 é a seguinte

$\cdot$	Id	r	r^2	r^3	s	rs	r^2s	r^3s
Id	Id	r	r^2	r^3	s	rs	r^2s	r^3s
r	r	r^2	r^3	Id	rs	r^2s	r^3s	s
r^2	r^2	r^3	Id	r	r^2s	r^3s	s	rs
r^3	r^3	Id	r	r^2	r^3s	s	rs	r^2s
s	s	r^3s	r^2s	rs	Id	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^3s	r^2s	r	Id	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^3s	r^2	r	Id	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^3	r^2	r	Id

Observando a tabela multiplicativa e as propriedades dos elementos do subgrupo de S_4 $\langle \sigma, \tau \rangle$, mostrado no Exemplo 2.29, e comparando com a tabela multiplicativa e propriedades dos elementos de D_4, percebe-se que elas são idênticas. Dessa forma, suspeita-se de que exista um isomorfismo entre esses grupos. Isso, de fato, ocorre e pode ser verificado através do homomorfismo bijetivo destacado.

$$\begin{array}{rccc} f: & D_4 & \longrightarrow & \langle \sigma, \tau \rangle \\ & \mathrm{Id} & \mapsto & \mathrm{Id} \\ & r & \mapsto & \sigma \\ & r^2 & \mapsto & \sigma^2 \\ & r^3 & \mapsto & \sigma^3 \\ & s & \mapsto & \tau \\ & rs & \mapsto & \sigma\tau \\ & r^2s & \mapsto & \sigma^2\tau \\ & r^3s & \mapsto & \sigma^3\tau \end{array}$$

Assim, fica nítido que $D_4 \cong \langle \sigma, \tau \rangle$.

A partir do isomorfismo de D_4 com um subgrupo de S_4, ou seja, um subgrupo de um grupo de permutações, pode-se extrair informações importantes e também enriquecer a interpretação a respeito desse grupo diedral. Por exemplo, infere-se de maneira imediata que D_4 é não abeliano, considerando a Observação 2.27. Além disso, as isometrias do quadrado que formam o D_4 podem ser interpretadas como as permutações dos vértices que preservam a estrutura do quadrado, conforme será mostrado nas imagens a seguir.

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1, P_2$, P_3 e P_4 permanecem fixos.

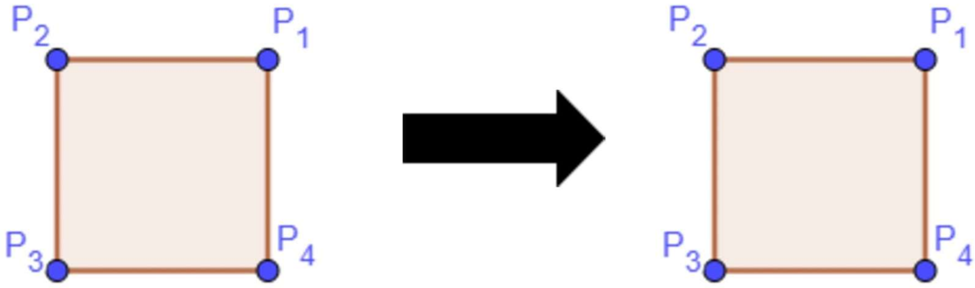


Figura 2.9: Ilustração criada pelo autor

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_2, P_2 vira P_3, P_3 vira P_4 e P_4 vira P_1.

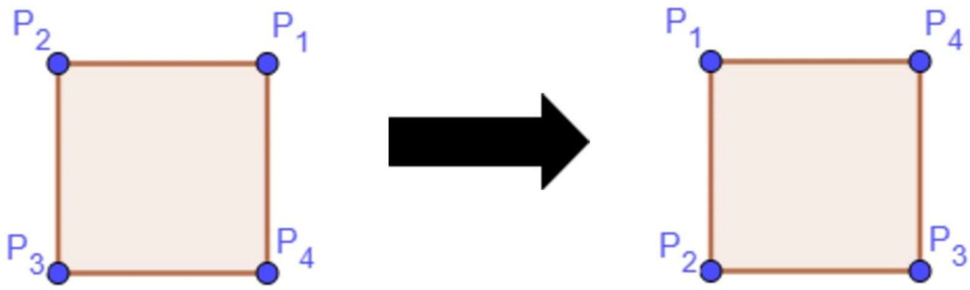


Figura 2.10: Ilustração criada pelo autor

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_3, P_2 vira P_4, P_3 vira P_1 e P_4 vira P_2.

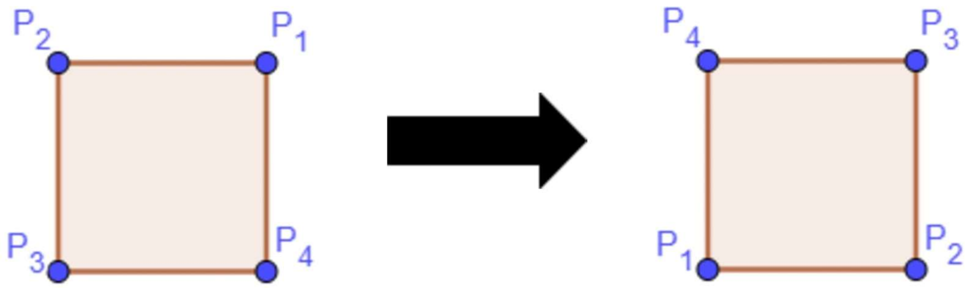


Figura 2.11: Ilustração criada pelo autor

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1 \text{ vira } P_4,\ P_2 \text{ vira } P_1,\ P_3 \text{ vira } P_2 \text{ e } P_4 \text{ vira } P_3.$$

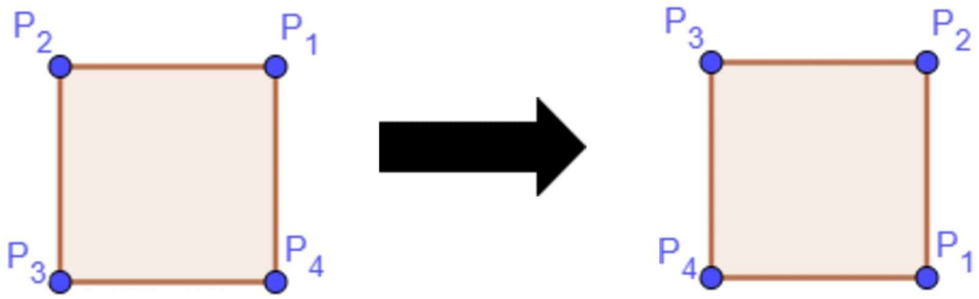


Figura 2.12: Ilustração criada pelo autor

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1 \text{ vira } P_2,\ P_2 \text{ vira } P_1,\ P_3 \text{ vira } P_4 \text{ e } P_4 \text{ vira } P_3.$$

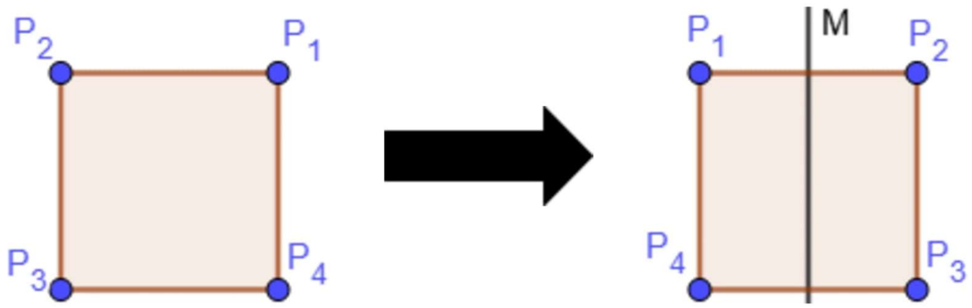


Figura 2.13: Ilustração criada pelo autor

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1 \text{ vira } P_4,\ P_2 \text{ vira } P_3,\ P_3 \text{ vira } P_2 \text{ e } P_4 \text{ vira } P_1.$$

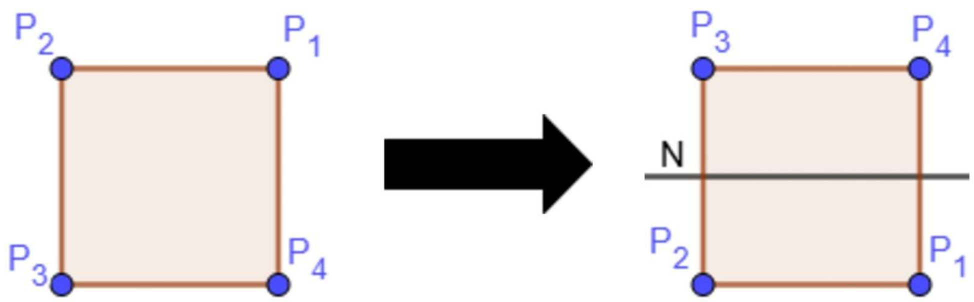


Figura 2.14: Ilustração criada pelo autor

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,4\,3\,2 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1 \text{ fica fixo},\ P_2 \text{ vira } P_4,\ P_3 \text{ fica fixo e } P_4 \text{ vira } P_2.$$

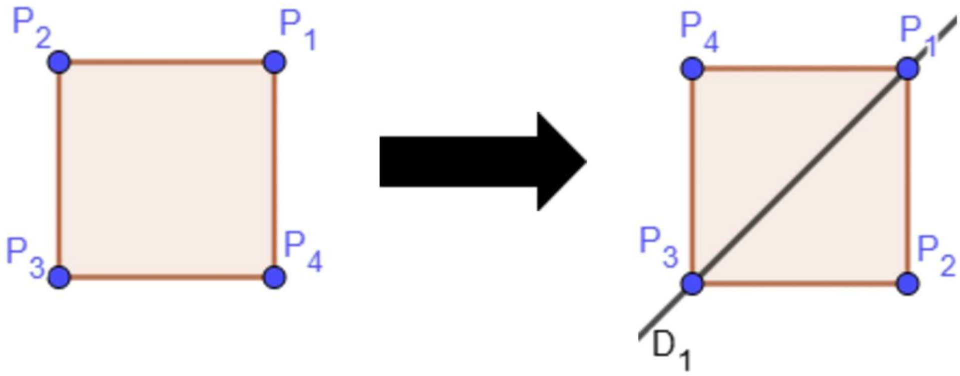


Figura 2.15: Ilustração criada pelo autor

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,2\,1\,4 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_3, P_2 fica fixo, P_3 vira P_1 e P_4 fica fixo.

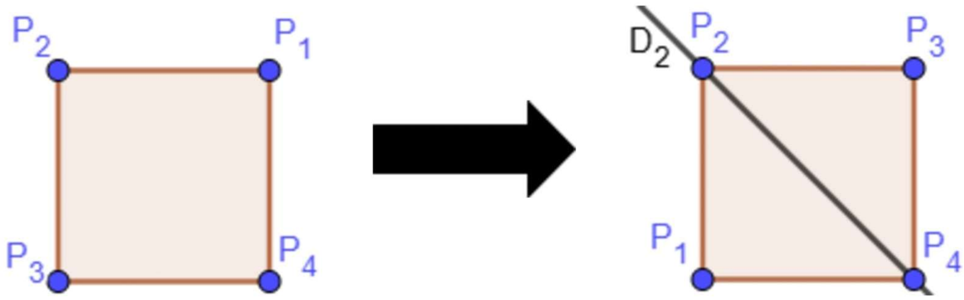


Figura 2.16: Ilustração criada pelo autor

Observando os Exemplos 2.35 e 2.36, é fácil notar algumas propriedades importantes e comuns aos grupos diedrais D_3 e D_4 as quais também são válidas para outros diedrais de ordem maior, conforme será mostrado adiante. Por exemplo, nos dois casos foi possível construir um isomorfismo com um subgrupo de um grupo de permutações mostrando que os grupos diedrais são não abelianos e também que a partir dos isomorfismos pode-se entender as permutações do subgrupo isomorfo como equivalentes às isometrias que preservam a estrutura do polígono regular, sendo algumas associadas às rotações e outras às reflexões. Os exemplos que serão mostrados a seguir confirmarão a validade de tudo isso para os grupos diedrais D_5 e D_6.

Exemplo 2.37. O grupo diedral D_5 é um grupo de ordem 10, isomorfo a um subgrupo do grupo de permutações S_5 e é não abeliano.

De fato, sendo r a rotação de $\frac{2\pi}{5}$ no sentido anti-horário em torno do centro e s a reflexão em torno de um eixo de simetria do pentágono regular, temos que

$$D_5 = \{\mathrm{Id}, r, r^2, r^3, r^4, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s\}.$$

Sejam agora $p = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,4\,5\,1 \end{pmatrix}$ e $q = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix}$ elementos do grupo de permutações S_5. Temos que

$$p^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,4\,5\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,4\,5\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,4\,5\,1\,2 \end{pmatrix};$$

$$p^3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,4\,5\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,4\,5\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,5\,1\,2\,3 \end{pmatrix};$$

$$p^4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,4\,5\,1\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,4\,5\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix};$$

$$p^5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,4\,5\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix};$$

$$q^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix};$$

$$pq = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,4\,5\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,1\,5\,4\,3 \end{pmatrix};$$

$$p^2q = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,4\,5\,1\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,2\,1\,5\,4 \end{pmatrix};$$

$$p^3q = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,5\,1\,2\,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,3\,2\,1\,5 \end{pmatrix};$$

$$p^4q = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix};$$

$$qp = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,4\,5\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}.$$

Observa-se então que

$$p^5 = \mathrm{Id}, \quad q^2 = \mathrm{Id}, \quad qp = p^4q \neq pq.$$

Além disso, é fácil verificar que

$$qp^2 = p^3q, \quad qp^3 = p^2q, \quad qp^4 = pq.$$

Assim, o grupo gerado por p e q é um subgrupo de S_5 que pode ser representado da seguinte forma

$$\langle p, q\rangle = \{\mathrm{Id}, p, p^2, p^3, p^4, q, pq, p^2q, p^3q, p^4q\}.$$

A partir das representações dos grupos $D_5 = \langle r, s\rangle$ e $\langle p, q\rangle$ é fácil notar uma estrutura idêntica para os dois grupos. Para provar que eles realmente são isomorfos, basta considerar o homomorfismo bijetivo

$$\begin{array}{rcccc} f & : & D_5 & \longrightarrow & \langle p, q\rangle \\ & & \mathrm{Id} & \mapsto & \mathrm{Id} \\ & & r & \mapsto & p \\ & & r^2 & \mapsto & p^2 \\ & & r^3 & \mapsto & p^3 \\ & & r^4 & \mapsto & p^4 \\ & & s & \mapsto & q \\ & & rs & \mapsto & pq \\ & & r^2s & \mapsto & p^2q \\ & & r^3s & \mapsto & p^3q \\ & & r^4s & \mapsto & p^4q. \end{array}$$

Dessa forma, fica confirmado que $D_5 \cong \langle p, q\rangle$ e esse fato permite considerações importantes a respeito do D_5. Inicialmente, obtemos que D_5 é não abeliano, pois $pq \neq qp$. Além disso, pode-se fazer uma reinterpretação das simetrias de rotação e reflexão que preservam a estrutura do pentágono regular como as permutações dos vértices que preservam a estrutura da pentágono regular, conforme será mostrado a seguir.

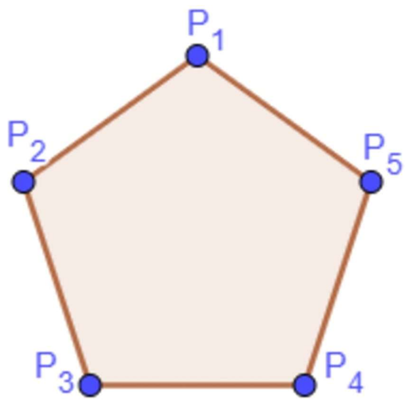


Figura 2.17: Ilustração criada pelo autor

- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ficam fixos $\longrightarrow$ equivalente a uma rotação de 0.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,3\,4\,5\,1 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_2, P_2 vira P_3, P_3 vira P_4, P_4 vira P_5 e P_5 vira P_1 $\longrightarrow$ equivalente a uma rotação de $\frac{2\pi}{5}$.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,4\,5\,1\,2 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_3, P_2 vira P_4, P_3 vira P_5, P_4 vira P_1 e P_5 vira P_2 $\longrightarrow$ equivalente a uma rotação de $\frac{4\pi}{5}$.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,5\,1\,2\,3 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_4, P_2 vira P_5, P_3 vira P_1, P_4 vira P_2 e P_5 vira P_3 $\longrightarrow$ equivalente a uma rotação de $\frac{6\pi}{5}$.

- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_5, P_2 vira P_1, P_3 vira P_2, P_4 vira P_3 e P_5 vira $P_4 \longrightarrow$ equivalente a uma rotação de $\frac{8\pi}{5}$.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ fica fixo, P_2 vira P_5, P_3 vira P_4, P_4 vira P_3 e P_5 vira $P_2 \longrightarrow$ equivalente a uma reflexão em torno do eixo de simetria que passa por P_1.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,2\,1\,5\,4 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_3, P_2 fica fixo, P_3 vira P_1, P_4 vira P_5 e P_5 vira $P_4 \longrightarrow$ equivalente a uma reflexão em torno do eixo de simetria que passa por P_2.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,4\,3\,2\,5 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_5, P_2 vira P_4, P_3 fica fixo, P_4 vira P_2 e P_5 fica fixo $\longrightarrow$ equivalente a uma reflexão em torno do eixo de simetria que passa por P_3.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,1\,5\,4\,3 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_2, P_2 vira P_1, P_3 vira P_5, P_4 fica fixo e P_5 vira $P_3 \longrightarrow$ equivalente a uma reflexão em torno do eixo de simetria que passa por P_4.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,3\,2\,1\,5 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_4, P_2 vira P_3, P_3 vira P_2, P_4 vira P_1 e P_5 fica fixo $\longrightarrow$ equivalente a uma reflexão em torno do eixo de simetria que passa por P_5.

Exemplo 2.38. O grupo diedral D_6 de ordem 12 é isomorfo a um subgrupo do S_6 e é um grupo não abeliano.

Para mostrar esses fatos, pode-se começar considerando a representação do D_6 da forma

$$D_6 = \{\mathrm{Id}, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\},$$

em que r corresponde à rotação de $\frac{\pi}{3}$ no sentido anti-horário em torno do centro e s corresponde à reflexão em torno de um eixo de simetria do hexágono regular.

Consideremos agora os elementos $u = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,6\,1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,6\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix}$ de S_6. Temos que

$$u^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,6\,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,6\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,4\,5\,6\,1\,2 \end{pmatrix};$$

$$u^3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,6\,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,4\,5\,6\,1\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,5\,6\,1\,2\,3 \end{pmatrix};$$

$$u^4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,6\,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,5\,6\,1\,2\,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,6\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix};$$

$$u^5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,6\,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,6\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix};$$

$$u^6 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,6\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,6 \end{pmatrix};$$

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,6\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,6\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,6 \end{pmatrix};$$

$$uv = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,6\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,6\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,1\,6\,5\,4\,3 \end{pmatrix};$$

$$u^2v = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,4\,5\,6\,1\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,6\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,2\,1\,6\,5\,4 \end{pmatrix};$$

$$u^3v = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,5\,6\,1\,2\,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,6\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,3\,2\,1\,6\,5 \end{pmatrix}$$

$$u^4v = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,6\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,6\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,4\,3\,2\,1\,6 \end{pmatrix};$$

$$u^5v = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,6\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix};$$

$$vu = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,6\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,6\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}.$$

Assim, observa-se que

$$u^6 = \mathrm{Id}, \quad v^2 = \mathrm{Id}, \quad vu = u^5v.$$

Além disso, pode-se mostrar facilmente (usando $vu = u^5v$) que

$$vu^2 = u^4v, \quad vu^3 = u^3v, \quad vu^4 = u^2v, \quad vu^5 = uv.$$

Dessa forma, o subgrupo de S_6 gerado pelos elementos u e v pode ser representado da seguinte forma

$$\langle u, v\rangle = \{\mathrm{Id}, u, u^2, u^3, u^4, u^5, v, uv, u^2v, u^3v, u^4v, u^5v\}.$$

Comparando a estrutura e as propriedades do grupo gerado por u e v com a estrutura e as propriedades do D_6 percebe-se que são idênticas. Mas para mostrar que tais grupos são isomorfos é necessário explicitar um isomorfismo entre eles. Considere então o seguinte homomorfismo bijetivo

$$
\begin{array}{rcccc}
f & : & D_6 & \longrightarrow & \langle u, v\rangle \\
 & & \mathrm{Id} & \mapsto & \mathrm{Id} \\
 & & r & \mapsto & u \\
 & & r^2 & \mapsto & u^2 \\
 & & r^3 & \mapsto & u^3 \\
 & & r^4 & \mapsto & u^4 \\
 & & r^5 & \mapsto & u^5 \\
 & & s & \mapsto & v \\
 & & rs & \mapsto & uv \\
 & & r^2s & \mapsto & u^2v \\
 & & r^3s & \mapsto & u^3v \\
 & & r^4s & \mapsto & u^4v \\
 & & r^5s & \mapsto & u^5v
\end{array}
$$

Segue que, de fato, $D_6 \cong \langle u, v\rangle$. Fica nítido a partir de então que D_6 além de ser um grupo não abeliano pode ser reinterpretado como o grupo formado por todas as permutações dos vértices que preservam a estrutura do hexágono regular, conforme será mostrado a seguir.

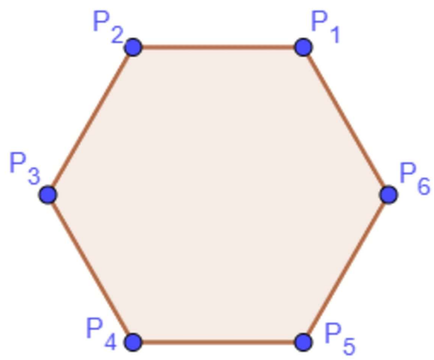


Figura 2.18: Ilustração criada pelo autor

- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,6 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ ficam fixos $\longrightarrow$ equivalente a uma rotação de 0.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,3\,4\,5\,6\,1 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_2, P_2 via P_3, P_3 vira P_4, P_4 vira P_5, P_5 vira P_6 e P_6 vira P_1 $\longrightarrow$ equivalente a uma rotação de $\frac{\pi}{3}$.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,4\,5\,6\,1\,2 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_3, P_2 via P_4, P_3 vira P_5, P_4 vira P_6, P_5 vira P_1 e P_6 vira P_2 $\longrightarrow$ equivalente a uma rotação de $\frac{2\pi}{3}$.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,5\,6\,1\,2\,3 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_4, P_2 via P_5, P_3 vira P_6, P_4 vira P_1, P_5 vira P_2 e P_6 vira P_3 $\longrightarrow$ equivalente a uma rotação de π.

- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,6\,1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_5, P_2 via P_6, P_3 vira P_1, P_4 vira P_2, P_5 vira P_3 e P_6 vira $P_4 \longrightarrow$ equivalente a uma rotação de $\frac{4\pi}{3}$.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_6, P_2 via P_1, P_3 vira P_2, P_4 vira P_3, P_5 vira P_4 e P_6 vira $P_5 \longrightarrow$ equivalente a uma rotação de $\frac{5\pi}{3}$.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,6\,5\,4\,3\,2 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ fica fixo, P_2 via P_6, P_3 vira P_5, P_4 fica fixo, P_5 vira P_3 e P_6 vira $P_2 \longrightarrow$ equivalente a uma reflexão em torno do eixo de simetria que passa por P_1 e P_4.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,1\,6\,5\,4\,3 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_2, P_2 via P_1, P_3 vira P_6, P_4 vira P_5, P_5 vira P_4 e P_6 vira $P_3 \longrightarrow$ equivalente a uma reflexão em torno do eixo de simetria que passa pelo ponto médio do lado P_1P_2.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,2\,1\,6\,5\,4 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_3, P_2 fica fixo, P_3 vira P_1, P_4 vira P_6, P_5 fica fixo e P_6 vira $P_4 \longrightarrow$ equivalente a uma reflexão em torno do eixo de simetria que passa por P_2 e P_5.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,3\,2\,1\,6\,5 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_4, P_2 vira P_3, P_3 vira P_2, P_4 vira P_1, P_5 vira P_6 e P_6 vira $P_5 \longrightarrow$ equivalente a uma reflexão em torno do eixo de simetria que passa pelo ponto médio do lado P_2P_3.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,4\,3\,2\,1\,6 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_5, P_2 vira P_4, P_3 fica fixo, P_4 vira P_2, P_5 vira P_1 e P_6 fica fixo $\longrightarrow$ equivalente a uma reflexão em torno do eixo de simetria que passa por P_3 e P_6.
- $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ vira P_6, P_2 vira P_5, P_3 vira P_4, P_4 vira P_3, P_5 vira P_2 e P_6 vira $P_1 \longrightarrow$ equivalente a uma reflexão em torno do eixo de simetria que passa pelo ponto médio do lado P_3P_4.

Nos exemplos envolvendo os grupos diedrais D_3, D_4, D_5 e D_6 foi mostrado que eles podem ser entendidos como sendo formados por todas as permutações dos vértices que preservam a estrutura do polígono regular, significando que as permutações que preservam a estrutura do polígono são aquelas que correspondem a uma simetria ou a uma composição de simetrias de rotação e reflexão. Assim, o resultado de uma permutação que preserva a estrutura de um polígono é o mesmo de alguma rotação ou de alguma reflexão ou de uma composição destas. Isso ocorre por causa do isomorfismo entre cada um desses diedrais com um subgrupo de um grupo de permutações. No caso do D_3 vimos que todas as permutações preservam o triângulo regular, mas nos outros casos fica nítido que existem permutações que não preservam a estrutura do polígono, ou seja, permutações que não correspondem a nenhuma combinação de simetrias de rotação e reflexão.

Exemplo 2.39. Existem muitas permutações dos vértices dos polígonos regulares que não preservam sua estrutura inicial nos casos de D_4, D_5 e D_6.

De fato, considerando o D_4, vimos que existe um isomorfismo com o subgrupo $\langle \sigma, \tau \rangle$ de S_4. Como a ordem de S_4 é $4! = 24$, existem outras 16 permutações que não fazem parte de $\langle \sigma, \tau \rangle$. Escolhendo a permutação $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,4\,3 \end{pmatrix}$ que não pertence a $\langle \sigma, \tau \rangle$, temos a seguinte interpretação

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,4\,3 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ fica fixo, P_2 fica fixo, P_3 vira P_4 e P_4 vira P_3.

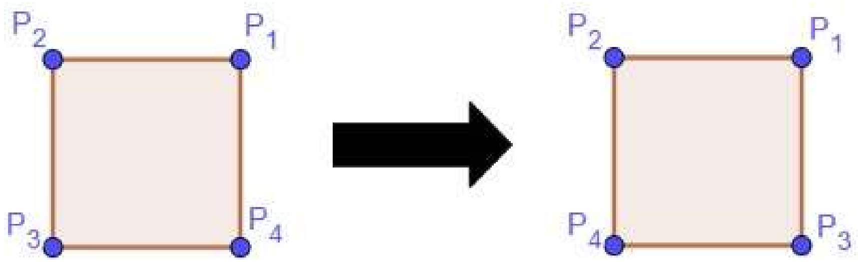


Figura 2.19: Ilustração criada pelo autor

Observe que não é possível partindo do quadrado inicial chegar na posição final por meio de composição de simetrias de rotação e reflexão. Isso ocorre porque a permutação dos vértices nesse caso não pode corresponder a nenhuma isometria, dado que, por exemplo, a distância entre os vértices P_1 e P_3 nos dois quadrados têm medidas distintas e isso mostra que não houve preservação de distância, conforme o enunciado da Definição 1.1.

Considerando agora o D_5, foi mostrado que $D_5 \cong \langle p, q \rangle$. Escolhendo o elemento $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,2\,5\,4\,3 \end{pmatrix}$ que não pertence a $\langle p, q \rangle$ temos a interpretação

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,2\,5\,4\,3 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ fica fixo, P_2 fica fixo, P_3 vira P_5, P_4 fica fixo e P_5 vira P_3.

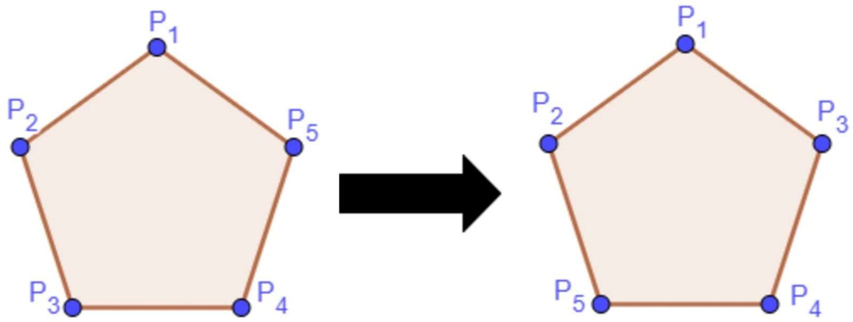


Figura 2.20: Ilustração criada pelo autor

Novamente não existe uma combinação de rotações e reflexões que partindo da primeira configuração de vértices do pentágono regular resulte na segunda configuração. A distância entre os vértices P_1 e P_3 nos dois pentágonos têm medidas distintas e isso mostra que não houve preservação de distância, conforme o enunciado da Definição 1.1. Portanto, já era esperado que tal configuração não correspondesse a alguma simetria.

Finalmente, considerando o $D_6 \cong \langle u, v\rangle$ e escolhendo o elemento $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,6\,5\,4\,3 \end{pmatrix}$ que não pertence a $\langle u, v\rangle$ temos a interpretação

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,6\,5\,4\,3 \end{pmatrix} \longrightarrow P_1$ fica fixo, P_2 fica fixo, P_3 vira P_6, P_4 vira P_5, P_5 vira P_4 e P_6 vira P_3.

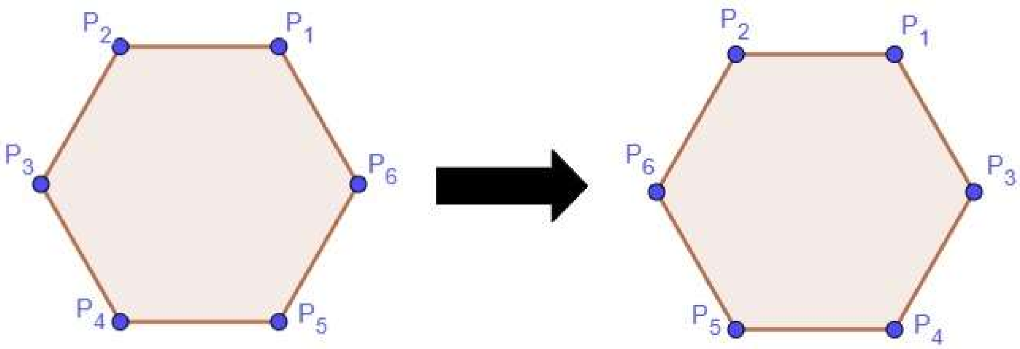


Figura 2.21: Ilustração criada pelo autor

Nesse caso é nítida a impossibilidade de por meio da composição de rotações e reflexões partir do hexágono regular inicial e obter o hexágono regular final. A distância entre os vértices P_1 e P_3 nos dois hexágonos têm medidas distintas e isso mostra que não houve preservação de distância, conforme o enunciado da Definição 1.1. Logo, tal permutação não pode corresponder a alguma simetria.

Observação 2.40. Os exemplos referentes aos grupos diedrais mostrados até aqui permitem deduzir pelo menos duas verdades que podem ser generalizadas para um diedral D_n qualquer. Primeiramente, é fácil notar que D_n é sempre não abeliano, pois sempre vale que (sendo $n \geq 3$)

$$sr = r^{n-1}s \neq rs,$$

em que r corresponde à rotação de $\frac{2\pi}{n}$ no sentido anti-horário em torno do centro e s corresponde à reflexão em torno de um eixo de simetria. Isso decorre do fato de o conjunto

$$\{s, rs, r^2s, \ldots, r^{n-1}s\}$$

ser formado por n reflexões duas a duas distintas.

A outra verdade geral é que dentro de todo grupo de permutações S_n existe uma cópia de D_n, isto é, sempre é possível construir um isomorfismo entre o grupo diedral

D_n e um subgrupo de S_n. Para construir esse isomorfismo, basta considerar a aplicação $f : D_n \longrightarrow S_n$ tal que

$$f(r) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad f(s) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Essa aplicação será um homomorfismo bijetivo, portanto será suficiente para mostrar que D_n é isomorfo a um subgrupo de S_n.

Uma investigação pertinente e interessante envolve a busca de condições para que um elemento de um grupo diedral qualquer comute com todos os outros elementos. Os resultados que serão mostrados a seguir têm o objetivo de averiguar se todos os elementos dos grupos diedrais não satisfazem a comutatividade ou se realmente existem condições em que determinados elementos comutam com todos os outros.

Proposição 2.41. *Seja G um grupo qualquer. Considere o subconjunto*

$$Z(G) = \{x \in G \,|\, xg = gx, \forall g \in G\}.$$

Esse subconjunto forma um grupo com a operação de G, ou seja, ele é um subgrupo de G. Esse subgrupo é chamado de centro *de G e ele é tal que G é abeliano se e somente se $G = Z(G)$.*

Demonstração. De fato, sejam $x, y \in Z(G)$. Então

$$xg = gx, \quad yg = gy, \quad \forall g \in G.$$

Dessa forma

$$(xy)g = x(yg) = x(gy) = (xg)y = (gx)y = g(xy).$$

Isso mostra que xy pertence a $Z(G)$.

Agora, da igualdade $xg = gx$, obtém-se que

$$xg = gx \Rightarrow x^{-1}(xg)x^{-1} = x^{-1}(gx)x^{-1} \Rightarrow (x^{-1}x)gx^{-1} = x^{-1}g(xx^{-1}) \Rightarrow gx^{-1} = x^{-1}g.$$

Isso mostra que x^{-1} pertence a $Z(G)$. Logo, $Z(G) < G$.

□

Proposição 2.42. *Seja n um número natural par e seja $m = n/2$. Então a rotação r^m é o único elemento não trivial de D_n que comuta com todos os outros.*

Demonstração. De fato, é imediato que r^m comuta com todas as outras rotações, bastando mostrar que comuta também com a reflexão s. Para isso, usamos $sr = r^{-1}s$, mostrando que se $n = x + y$, então

$$sr^x = r^{-x}s = r^n r^{-x}s = r^{x+y}r^{-x}s = r^y s.$$

Assim, se $x \neq y$, então

$$sr^x = r^y s \neq r^x s,$$

e se $x = y$, então
$$sr^x = r^x s.$$
Dessa forma, para o caso em que $x = y$ tomamos $m = x$. Observe que é justamente neste caso que obtemos $m = n/2$. E no caso em que $x \neq y$ fica demonstrado que as outras rotações não comutam com a reflexão s. Agora, para mostrar que nenhuma reflexão comuta com todos os outros elementos vamos considerar uma reflexão arbitrária $r^t s$, com $t \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e fazer
$$(r^t s)r = r^t(sr) = r^t r^{n-1} s = r^{t+n-1} s$$
e
$$r(r^t s) = (rr^t)s = r^{t+1} s.$$
Assim,
$$(r^t s)r = r(r^t s) \Leftrightarrow r^{t+n-1} s = r^{t+1} s \Leftrightarrow t + n - 1 = t + 1 \Leftrightarrow n = 2.$$
Mas sabemos que isso é impossível pois para qualquer D_n temos $n \geq 3$. □

Exemplo 2.43. Vamos determinar o centro dos grupos diedrais D_n para $3 \leq n \leq 6$ e depois generalizar os resultados para n qualquer.

Para $n = 3$ ou $n = 5$ temos que nenhuma rotação comuta com a reflexão s, conforme a Proposição 2.42, já que não existe $m = n/2$ natural. Logo, o centro de D_3 e de D_5 são triviais, isto é,
$$Z(D_3) = \{\mathrm{Id}\}, \quad Z(D_5) = \{\mathrm{Id}\}.$$
Para $n = 4$ temos que, além da identidade, apenas a rotação r^2 comuta com todas as outras simetrias. Logo, o centro de D_4 é
$$Z(D_4) = \{\mathrm{Id}, r^2\}.$$
Da mesma forma para $n = 6$ temos que o único elemento não trivial de D_6 que comuta com todos os outros é r^3. Logo, o centro de D_6 é
$$Z(D_6) = \{\mathrm{Id}, r^3\}.$$
Fica claro a partir desses casos e conforme a Proposição 2.42 que de modo geral se n for ímpar, então o centro é de D_n é trivial, ou seja,
$$Z(D_n) = \{\mathrm{Id}\}.$$
Agora se n for par o centro de D_n também possui a rotação r^m com $m = n/2$, ou seja,
$$Z(D_n) = \{\mathrm{Id}, r^m\}.$$
Um problema interessante a respeito dos grupos diedrais é em relação à ordem dos seus elementos. Nos próximos resultados veremos como determinar o número mínimo de cada uma das simetrias para que o polígono regular partindo da posição inicial retorne para a mesma posição. Nesse sentido, faremos uma investigação sobre os padrões da ordem dos elementos dos diedrais.

Proposição 2.44. *Seja r^m uma rotação do grupo diedral D_n com $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e seja $d = \mathrm{mdc}(m, n)$. Então, a ordem de r^m é*

$$O(r^m) = \frac{n}{d}.$$

Demonstração. De fato, como $d = \mathrm{mdc}(m, n)$ temos que existem k_1 e k_2 inteiros tais que $m = dk_1$ e $n = dk_2$. Dessa forma,

$$(r^m)^{n/d} = (r^{dk_1})^{k_2} = (r^{k_1})^{dk_2} = (r^{k_1})^n = \mathrm{Id}\,.$$

Isso mostra que n/d é um múltiplo da ordem de r^m. Para mostrar que se trata da ordem de r^m, deve ser verificado que n/d é o menor valor que satisfaz esse fato, ou seja, qualquer outro inteiro positivo que satisfaz isso será múltiplo de n/d. Suponhamos que o inteiro positivo t seja um número tal que

$$(r^m)^t = \mathrm{Id}\,.$$

Vamos verificar que então t é múltiplo de n/d.

Sabemos da divisão euclidiana que existem únicos inteiros b e l tais que

$$t = (n/d)b + l,$$

com $0 \leq l < n/d$. Daí, obtemos que

$$\mathrm{Id} = (r^m)^t = (r^m)^{(n/d)b+l} = [(r^m)^{n/d}]^b (r^m)^l = r^{ml},$$

e a partir disso temos que ml é múltiplo de n. Pode-se então afirmar que $\mathrm{mmc}(m, n)$ divide ml, pois m divide ml e n divide ml. Agora, como $\mathrm{mmc}(m, n) = mn/d$ conclui-se que mn/d divide ml e então n/d divide l, com $0 \leq l < n/d$. A única maneira de n/d dividir l é se $l = 0$, pois l é estritamente menor que n/d, logo, $l = 0$ e t é múltiplo de n/d. □

Exemplo 2.45. Vamos estudar a ordem das simetrias dos grupos diedrais D_n e interpretar geometricamente esses valores.

Já foi demonstrado na Proposição 2.34 que para cada $i = 1, 2, \ldots, n-1$ temos

$$(r^i s)^2 = \mathrm{Id}\,.$$

Portanto, vemos facilmente que todas as reflexões têm ordem 2. Isso significa que, para qualquer polígono regular, escolhendo um eixo de simetria qualquer basta realizar duas reflexões para que o polígono partindo de uma posição inicial retorne para ela.

No caso das rotações, a Proposição 2.44 permite um entendimento apurado a esse respeito. Foi mostrado na proposição que a ordem da rotação r^m é igual a n/d em que $d = \mathrm{mdc}(m, n)$. Dessa forma, o mínimo de rotações necessárias para que o polígono regular de n lados partindo da posição inicial retorne para ela é igual a n/d. Quando n for um número primo, teremos $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$, portanto nesses casos todas as rotações terão ordem n e todas elas serão geradoras do subgrupo de D_n formado pelas rotações. Isso ocorre nos casos de D_3 e D_5, por exemplo. No caso em que n não é primo, apenas as rotações de expoente coprimo com n serão geradoras do subgrupo de rotações. Vejamos a ordem das rotações de D_4 e D_6.

Para o D_4 temos as seguintes ordens das rotações

$$O(r) = 4, \quad O(r^2) = 2, \quad O(r^3) = 4.$$

Isso significa que com 4 rotações de $\frac{\pi}{2}$, assim como com 2 rotações de π e também com 4 rotações de $\frac{3\pi}{2}$, o quadrado partindo da posição inicial retorna para ela. Além disso, os únicos geradores do subgrupo de rotações de D_4 são r e r^3, ou seja,

$$\langle r \rangle = \langle r^3 \rangle = \{\mathrm{Id}, r, r^2, r^3\} < D_4.$$

Para o D_6 temos as seguintes ordens das rotações

$$O(r) = 6, \quad O(r^2) = 3, \quad O(r^3) = 2, \quad O(r^4) = 3, \quad O(r^5) = 6.$$

Com isso pode-se interpretar que no hexágono regular são necessárias 6 rotações de $\frac{\pi}{3}$, ou 3 rotações de $\frac{2\pi}{3}$, ou 2 rotações de π, ou 3 rotações de $\frac{4\pi}{3}$, ou então 6 rotações de $\frac{5\pi}{3}$ para que ele partindo da posição inicial retorne para ela. Observa-se também que os únicos geradores do subgrupo de rotações de D_6 são r e r^5, ou seja,

$$\langle r \rangle = \langle r^5 \rangle = \{\mathrm{Id}, r, r^2, r^3, r^4, r^5\} < D_6.$$

CAPÍTULO 3

Sequência didática

Nos capítulos anteriores foram desenvolvidas abordagens matemáticas que fundamentam a construção prática educacional que será feita neste capítulo. No primeiro capítulo foi apresentada a ideia de grupos diedrais como sendo uma estrutura algébrica que permite uma interessante leitura geométrica. Além disso, no segundo capítulo mostrou-se de maneira formal a ideia de isometrias de rotação e reflexão, as quais estão relacionadas com a ideia de grupos diedrais. No terceiro capítulo, deseja-se construir um produto educacional (que será uma sequência didática) levando essas ideias, mesmo que de modo implícito e muitas vezes incompleto, para o público da educação básica, mais precisamente para os alunos do ensino médio. As próximas seções mostram um conceito de sequência didática e a construção de uma sequência direcionada para os alunos do ensino médio a respeito das isometrias de rotação e reflexão com a ideia implícita de grupos diedrais.

3.1 O que é uma sequência didática?

Antes de efetuar a construção de uma sequência didática é importante tentar entender do que se trata, isto é, quais os elementos que a compõem, qual a estrutura e qual a finalidade de uma sequência didática. Dessa forma, é interessante buscar autores especialistas que apresentem um conceito desse objeto educacional trazendo elementos constitutivos das sequências didáticas dentro da ideia apresentada por eles.

Para BARBOSA (2002) a sequência didática consiste em uma série de atividades que criam um ambiente que facilita e torna atrativo o ensino de matemática, portanto, as sequências didáticas são um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, sendo organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos (apud MONTEIRO, CASTILHO e SOUZA, 2019, p. 293-294).

Zabala (1998) conceitua a sequência didática como um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos (apud MONTEIRO, CASTILHO e SOUZA, 2019, p. 296).

Considerando os conceitos apresentados pelos autores especialistas citados, nota-se que a estrutura de uma sequência didática é formada por um conjunto de atividades, as quais têm um objetivo de levar o público-alvo a desenvolver o conhecimento de um determinado objeto. É importante levar em consideração o fato de que quanto mais variadas e atrativas são as atividades que compõem a sequência maiores são as chances de que os alunos se sintam estimulados a participar com engajamento. Além disso, é interessante aproveitar o momento de aplicação de uma atividade diferente para explorar recursos educacionais que gerem outras aprendizagens para os participantes como o uso de softwares matemáticos, por exemplo.

3.2 Sequência didática: rotações e reflexões de polígonos regulares

Nesta seção será apresentada uma sequência didática construída com a finalidade de desenvolver conhecimentos e habilidades a respeito das isometrias de rotação e reflexão de polígonos regulares. O objetivo principal da sequência é construir de forma implícita a ideia de grupos diedrais inclusive aprendendo propriedades dessa estrutura algébrica de forma subjacente. O público-alvo da sequência é composto pelos alunos do ensino médio. Vale ressaltar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta a instrução de isometrias no ensino médio por meio da habilidade (EM13MAT105), a qual envolve o objetivo de construção de figuras geométricas com o uso de isometrias. Na montagem da sequência didática buscou-se atividades diversas e com um aspecto inovador em relação à rotina que muitos alunos estão acostumados, fazendo uso, por exemplo, de atividades dinâmicas e de recursos computacionais para incentivar os participantes a se empenharem e se sentirem satisfeitos com o processo sequencial de atividades.

A sequência didática que será apresentada a seguir envolve seis atividades sendo que cada atividade deve ser aplicada em duas aulas, exceto a primeira que deve ocorrer em quatro aulas. Dessa forma, serão necessárias quatorze aulas para a aplicação integral da sequência. Na primeira atividade, os alunos construirão um material manipulável que será utilizado para resolver a sexta atividade. Nas atividades dois e três os alunos revisarão certos conceitos e aprenderão novos conhecimentos os quais serão importantes para atingir o objetivo da sequência. Nas atividades quatro e cinco, os alunos conhecerão o software matemático Geogebra e aprenderão a fazer rotações, reflexões e composições destas com polígonos regulares, além de explorarem propriedades existentes nessa manipulação. Vale ressaltar que o professor aplicador poderá realizar adaptações na sequência de acordo com a sua preferência e a necessidade dos alunos como realizando subsequências da sequência completa que será apresentada. Por exemplo, poderá suprimir as atividades dois e três caso perceba que não é necessária uma revisão realizando uma subsequência formada por quatro atividades cuja duraçao seria de dez aulas. Ou aplicar apenas as atividades um e seis caso queira trabalhar apenas com o material manipulável e não com o geogebra usando apenas seis aulas para aplicar a sequência. Outro exemplo de subsequência ocorre no caso em que o aplicar queira realizar a sequência com foco apenas no uso do Geogebra, situação em que terá que excluir as atividade um e seis. Nesse último caso a duração da subsequência será de oito aulas.

Produto Educacional: sequência didática

1. Título: rotações e reflexões de polígonos regulares com o uso do geogebra e de material manipulável.

2. Público-alvo: alunos do 3° ano do ensino médio.

3. Duração: 14 aulas de 50 minutos.

4. Objetivo geral: construir de forma subjacente a ideia de grupo diedral, conhecendo propriedades importantes dessa estrutura algébrica. Aprender a fazer rotações, reflexões e composições destas por meio do geogebra e também com uso de material manipulável.

5. Competências e habilidades: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

6. Conteúdos: isometrias, polígonos regulares, permutações, funções (composição, inversa), propriedades algébricas de operações.

7. Metodologia: a estratégia utilizada para alcançar os objetivos desejados foi utilizar ferramentas novas para os estudandes, superando a rotina de sala de aula. Nesse sentido, foram utilizados o software matemático Geogebra e materiais manipuláveis para resolver uma sequência de atividades articuladas que a cada passo permitiu o alcance do que foi almejado.

8. Materiais: software matemático Geogebra, material manipulável, computador, datashow, lápis, borracha, folha de ofício, caneta, papelão, listas de atividades, caixas de bombons, cronômetro.

9. Avaliação: a avaliação será processual considerando as produções realizadas durante a aplicação das atividades.

Atividade 1: oficina de montagem de polígonos regulares

- Objetivos:

  → Conhecer um processo de construção de polígonos regulares usando instrumentos de geometria: régua, compasso e transferidor.

  → Construir polígonos regulares com materiais de fácil acesso usando instrumentos de geometria: régua, compasso e transferidor.

  → Interiorizar propriedades importantes dos polígonos regulares por meio dos processos de construção.

- Metodologia:

  → Organização da turma em fileiras em direção para o quadro onde haverá a projeção de slides.

  → Orientações sobre os procedimentos de construção de cada um dos polígonos com slides projetados para instruir todos simultaneamente.

  → Construção conjunta de polígonos regulares usando os materiais disponibilizados para todos.

- Avaliação:

  A expectativa é de que os alunos mostrem comprometimento nos processos de construção dos polígonos, portanto espera-se que haja grande compatibilidade entre as orientações dadas sobre a estrutura dos polígonos mostradas nos slides e o produto final que os alunos entregarão.

- Materiais:

  Computador, datashow, papelão, régua, compasso, transferidor, lápis, borracha, tesoura, cola e folhas de ofício coloridas e brancas e palitos de dente.

- Duração:

  A atividade ocorrerá em quatro aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  Usando um pedaço de papelão e seguindo as instruções mostradas nos slides, os alunos irão desenhar um triângulo equilátero, um quadrado, um pentágono regular e um hexágono regular. Em seguida eles irão recortar as figuras usando as tesouras disponíveis. Depois com papel ofício colorido eles cobrirão as figuras escolhendo uma mesma cor para cada uma delas (por exemplo, azul). Os vértices dos polígonos serão indicados seguindo a ordem alfabética, em ambos os lados, de acordo com o número de vértices que o polígono possuir. Também será necessária a construção de uma base para realizar as isometrias. Isso será feito em uma folha de ofício branca na qual serão feitas marcações dos vértices em uma posição fixa inicial para o polígono, além dos eixos de simetria dele.

  Os métodos de construção dos polígonos estão indicados abaixo.

  → Triângulo equilátero (10 cm de lado)

  1. Use a régua para traçar uma linha com mais de 10 cm.
  2. Marque um ponto A no início da linha traçada.
  3. Com uma abertura de 10 cm no compasso e com a ponta centrada em A marque um ponto B sobre a linha.
  4. Mantendo a abertura de 10 cm e com o compasso centrado em A, faça um arco no semiplano superior à linha. Mantendo a abertura de 10 cm e com o compasso centrado em A, faça um arco no semiplano superior à linha.
  5. Com a abertura de 10 cm e com o compasso centrado em B, faça um arco no semiplano superior à linha.
  6. Marque o ponto C determinado pelo encontro dos arcos no semiplano superior à linha.

7. Com a régua ligue os pontos A e C formando o segmento AC.
8. Com a régua ligue os pontos B e C formando o segmento BC.

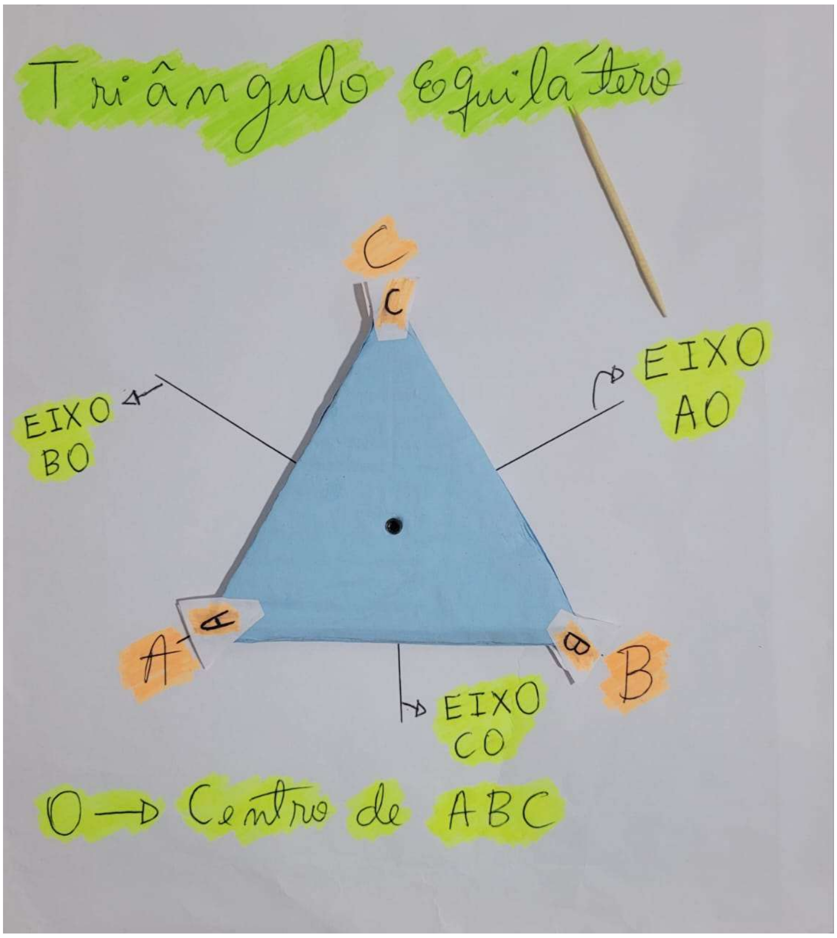


Figura 3.1: Triângulo equilátero e base para isometrias construídos

→ Quadrado (10 cm de lado)

1. Use a régua para traçar uma linha com mais de 10 cm.
2. Marque um ponto A na linha traçada.
3. Com uma abertura de 10 cm no compasso e com a ponta centrada em A marque um ponto B sobre a linha.
4. Com o compasso centrado no ponto A e uma abertura de 3 cm, marque os pontos A' e A" sobre a linha que equidistam 3 cm de A.

5. Com o compasso centrado em A' e abertura de 4 cm trace o arco no semiplano superior à linha.
6. Com o compasso centrado em A" e abertura de 4 cm trace o arco no semiplano superior à linha.
7. Marque o ponto C' determinado pela interseção dos arcos centrados em A' e A".
8. Trace a reta AC' e com compasso centrado em A e abertura de 10 cm marque o ponto C sobre AC' no semiplano superior à AB.
9. Proceda de maneira análoga para determinar o ponto D.
10. Ligue os pontos A, B, C e D formando o quadrado.

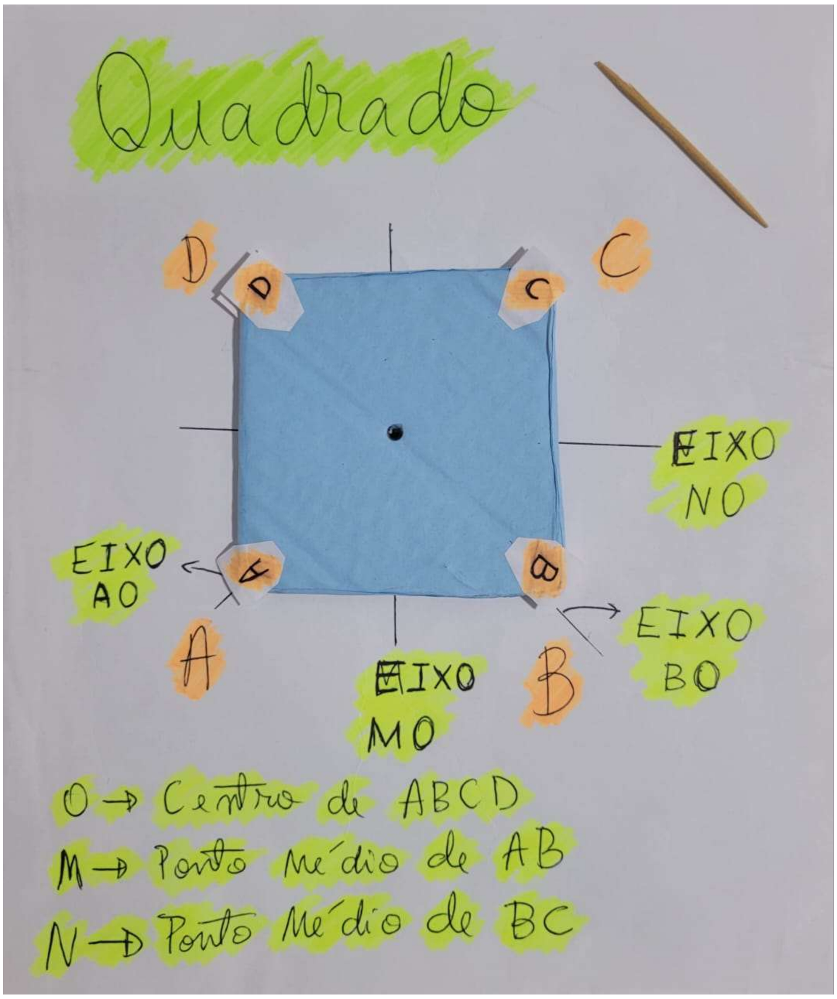


Figura 3.2: Quadrado e base para isometrias construídos

$\rightarrow$ Pentágono regular (10 cm de lado)

1. Use a régua para traçar uma linha com mais de 10 cm.
2. Marque um ponto A na linha traçada.
3. Com uma abertura de 10 cm no compasso e com a ponta centrada em A marque um ponto B sobre a linha.
4. Mantendo a abertura de 10 cm, centre o compasso em A e trace a circunferência de 10 cm de raio (C_1). Depois centre o compasso em B e trace outra circunferência de raio 10 cm (C_2).
5. Sendo C o ponto superior e D o ponto inferior de interseção entre as circunferências, trace a semirreta de origem D que passa por C. Sendo C o ponto superior e D o ponto inferior de interseção entre as circunferências, trace a semirreta de origem D que passa por C.
6. Trace a circunferência cujo centro é D e o raio mede 10 cm (C_3). Depois destaque os pontos E ($C_1 \cap C_3$) e F ($C_2 \cap C_3$), sendo eles as interseções da atual circunferência com as duas anteriores.
7. Marque o ponto G, sendo ele a interseção da circunferência C_3 com a semirreta de origem D que passa por C. Depois trace as retas EG e FG.
8. Marque o ponto H determinado pela interseção entre C_1 e FG e o ponto I determinado pela interseção entre C_2 e EG de tal forma que $G \in FH$ e $G \in EI$.
9. Trace uma circunferência centrada em H cujo raio é igual a 10 cm (C_4), depois trace uma circunferência centrada em I cujo raio é igual a 10 cm (C_5).
10. Marque o ponto J, interseção de C_4 com a semirreta de origem D que passa por C (sendo $C \in GJ$).
11. Ligue os pontos A, B, I, J e H formando o pentágono regular de lado 10 cm.

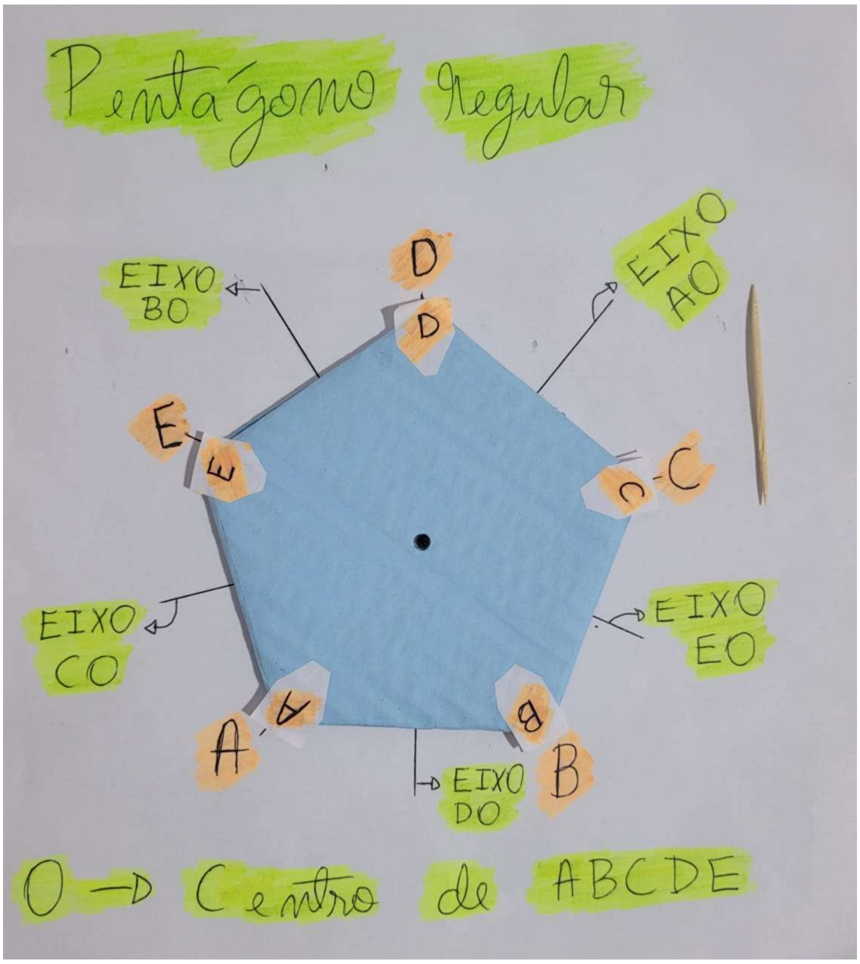


Figura 3.3: Pentágono regular e base para isometrias construídos

→ Hexágono regular (10 cm de lado)

1. Use a régua para traçar uma linha com mais de 10 cm.
2. Marque um ponto A na linha traçada.
3. Com uma abertura de 10 cm no compasso e com a ponta centrada em A marque um ponto B sobre a linha.
4. Trace a circunferência centrada em A de raio 10 cm depois trace a circunferência centrada em B de raio 10 cm.
5. Marque o ponto O, sendo ele a interseção das circunferências no semiplano superior à reta AB.
6. Trace a circunferência c centrada em O de raio 10 cm.
7. A partir do ponto B e mantendo a abertura de 10 cm do compasso, trace sobre a circunferência c os pontos C, D,

E e F de moda a dividir c em 6 partes iguais.

8. Ligue os pontos A, B, C, D, E e F formando o hexágono regular de lado 10 cm.

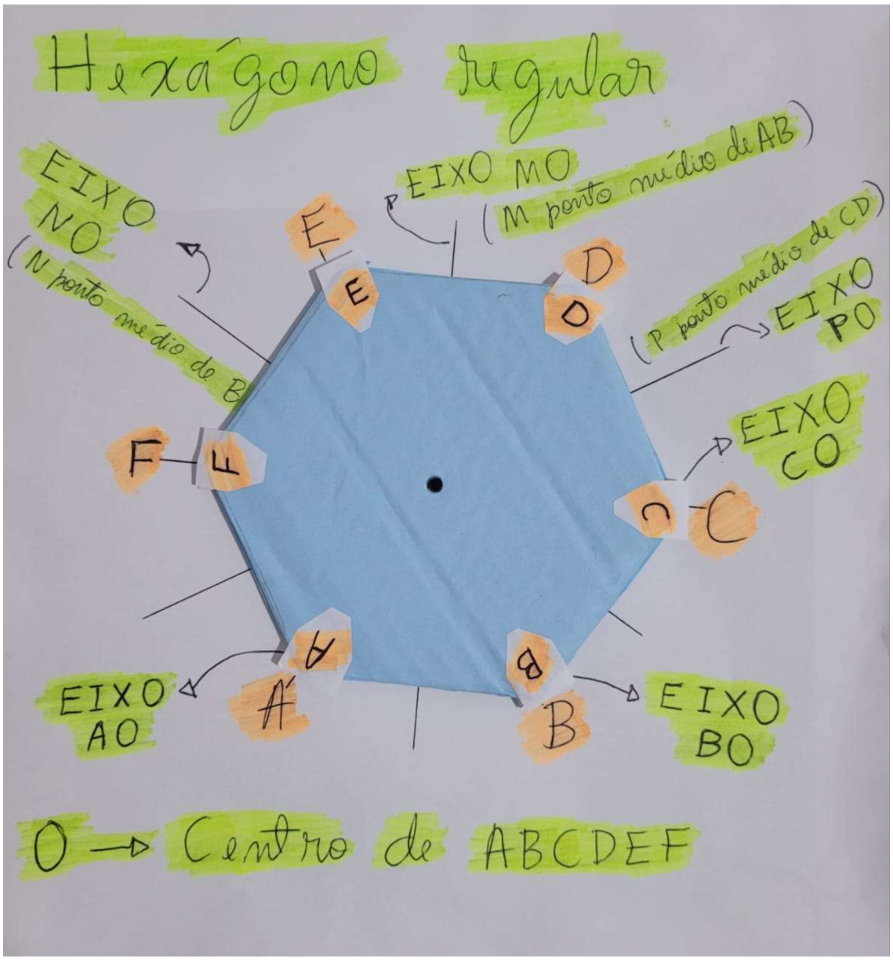


Figura 3.4: Hexágono regular e base para isometrias construídos

Atividade 2: Revisando conceitos importantes

- Objetivos:

  → Revisar características e propriedades importantes a respeito dos polígonos regulares.

  → Compreender os processos necessários para realizar rotações e reflexões.

  → Realizar rotações, reflexões e composições destas em polígonos regulares.

- Metodologia:

  → Uso do laboratório de informática escolar disponibilizando computadores com internet e acesso individual.

  → Atividade criada e disposta no google forms a qual deve ser compartilhada para o email de cada aluno.

  → Uso livre da internet para pesquisar eventuais dúvidas sobre a atividade.

  → Apresentação final das respostas corretas das questões, mostrando o enunciado e a expectativa de resposta.

- Avaliação:

  Os alunos serão avaliados de acordo com as respostas dadas no formulário, observando qual era a expectativa de resposta e a que foi colocada.

- Materiais:

  Computadores com acesso à internet, datashow, lápis, borracha, folha de ofício.

- Duração:

  A atividade ocorrerá em duas aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  Os alunos serão encaminhados para o laboratório de informática da escola. Todos serão orientados a acessar o e-mail pessoal onde encontrarão um link de acesso ao formulário de atividade. O link será enviado pelo professor ao email pessoal de cada um dos alunos participantes. O professor irá projetar a tela do seu computador com o datashow para apresentar aos alunos a versão final de resposta esperada. Isso ocorrerá após todos os alunos finalizarem a resolução da atividade.

  A seguir será apresentado o formulário de atividade aplicada na aula.

  1 - Considerando os seus conhecimentos sobre polígonos regulares analise as afirmações abaixo.

  I - Os polígonos regulares possuem todos os lados congruentes.

  II - Os ângulos internos de um polígono regular nem sempre são congruentes.

  III - O triângulo equilátero, o quadrado e o trapézio são exemplos de polígonos regulares.

  IV - O centro de um polígono regular coincide com o centro do círculo circunscrito a ele.

  Pode-se afirmar que são verdadeiras as afirmações

  a) I, II e III

  b) I, III e IV

  c) I e IV

  d) II e III

  e) I, II, III e IV

  Resposta: alternativa c)

  2 - A respeito das isometrias de rotação e reflexão, julgue as afirmações a seguir.

I - Um tipo de simetria possível é a reflexão axial em que ocorre o espelhamento de uma figura em relação a uma reta.

II - Para realizar uma rotação é necessário determinar o ponto em torno do qual ocorrerá a rotação, o ângulo de rotação e o sentido de rotação.

III - Os sentidos possíveis de rotação no plano são horário e anti-horário.

IV - Os polígonos regulares possuem eixos de simetria que são retas que passam pelo centro deles e os dividem em partes espelhadas em relação a elas.

Pode-se afirmar que são verdadeiras as afirmações

a) I, II e III

b) I, III e IV

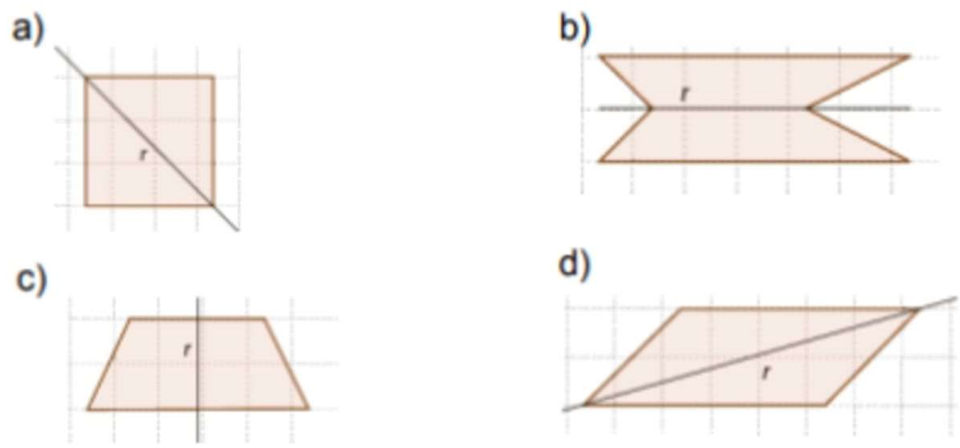
c) I e IV

d) II e III

e) I, II, III e IV

Resposta: alternativa e)

3 - (adapatada de [1]) Qual dentre as figuras abaixo não apresenta simetria em relação à reta r?



[1] https://brainly.com.br/tarefa/36016294

Resposta: alternativa d)

4 - (adapatada de [2]) Marque a alternativa que indica corretamente a isometria que ocorreu da figura F_1 para a figura F_2.

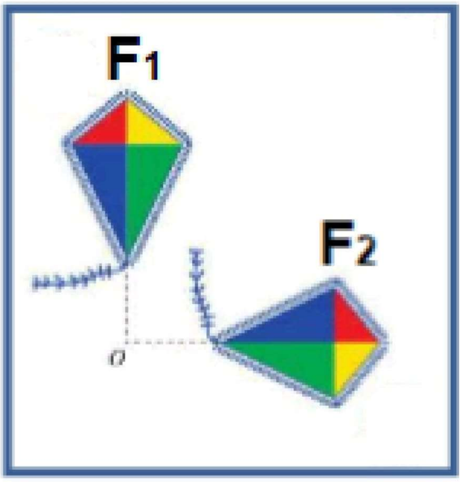


Figura 3.5: Ilustração da isometria de F_1 para F_2

a) Rotação em relação ao ponto O de 270º no sentido anti-horário.

b) Rotação em relação ao ponto O de 90º no sentido anti-horário.

c) Reflexão em relação ao ponto O de 270º no sentido horário.

d) Rotação em relação ao ponto O de 180º no sentido anti-horário.

e) Translação em relação ao ponto O de 90º no sentido anti-horário.

Resposta: alternativa a)

5 - Nos quadros A, B e C da figura ocorreram transformações geométricas. A sequência correta de isometrias em A, B e C é, respectivamente,

[2]https://pt.scribd.com/presentation/329627366/1-Isometrias

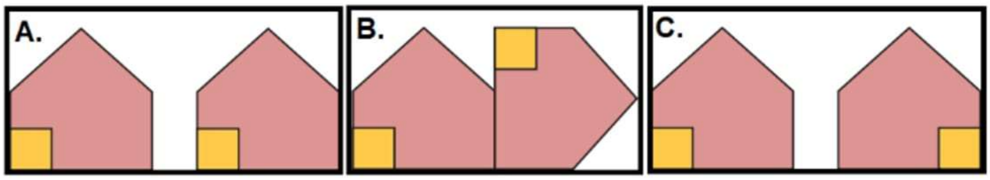


Figura 3.6: Ilustração da sequência isometrias

a) rotação, translação e reflexão.

b) translação, reflexão e rotação.

c) reflexão, translação e rotação.

d) translação, rotação e reflexão.

e) rotação, reflexão e translação.

Resposta: alternativa d)

6 - (ENEM 2018 - adaptada) A figura de coração destacada abaixo sofreu uma rotação de 45º no sentido anti-horário em relação ao ponto A. Depois sofreu uma reflexão em relação a reta vertical r.

Figura 3.7: Ilustração do coração, do ponto A e da reta r

A posição final da figura após a aplicação das isometrias é

a) 

b) 

c) 

d) 

Resposta: alternativa a)

Atividade 3: Quiz interativo

- Objetivos:

  → Avaliar veracidade de enunciados a respeito dos polígonos regulares e das isometrias de rotação e reflexão.

  → Desenvolver o aspecto competitivo aliado ao processo de aprendizagem de conteúdo.

  → Interiorizar propriedades importantes dos polígonos regulares e das isometrias de rotação e reflexão.

- Metodologia:

  → Turma organizada em duas equipes com metade da quantidade total de alunos em cada equipe.

  → Condução da atividade pelo professor que orientará todo o processo, inclusive as perguntas que serão feitas para cada equipe.

  → Projeção das perguntas em tela com datashow para que as duas equipes possam visualizar a questão colocada.

  → Apresentação de gabarito na tela projetada para cada pergunta feita e explicação do professor após a resposta dada pela equipe.

- Avaliação:

  Após a conclusão da atividade espera-se que os alunos participantes consigam diferenciar enunciados válidos dos inválidos tanto para polígonos regulares quanto para isometrias de rotação e reflexão. Além disso, os alunos serão avaliados pelo empenho demonstrado durante a realização da atividade.

- Materiais:

  Computador, datashow, cronômetro, lápis, borracha, papel de ofício, quatro caixas de bombons.

- Duração:

  A atividade ocorrerá em duas aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  A turma será dividida em duas equipes com a mesma quantidade de participantes ou com uma das equipes com um participante a mais (caso haja uma quantidade ímpar de alunos). O professor responsável pela aplicação da atividade conduzirá as perguntas em dez rodadas sendo que em cada rodada será feita uma pergunta a cada equipe. As cinco primeiras rodadas envolverão perguntas sobre polígonos regulares, as cinco últimas envolverão perguntas sobre isometrias de rotação e reflexão. Cada pergunta valerá 10 pontos para a primeira equipe perguntada e caso esta erre ou não saiba poderá ser repondida pela outra equipe valendo 5 pontos. A equipe que fizer mais pontos no fim das dez rodadas será a vencedorá, mas caso as duas equipes terminem com a mesma pontuação após as dez rodadas, a competição terminará empatada. Caso haja vencedor a premiação será quatro caixas de bombons para a equipe vencedora e caso termine empatado a premiação será dividida para as duas equipes (duas caixas de bombom para cada equipe). O tempo para responder cada pergunta será de no máximo dois minutos e trinta segundos, sendo cronometrado após cada pergunta e as equipes poderão realizar consultas para responder as perguntas.

  Primeira rodada

  a) Qual é o nome do polígono regular de três lados?
     Resposta: triângulo equilátero
  b) Qual é o nome do polígono regular de quatro lados?
     Resposta: quadrado

  Segunda rodada

a) Quanto mede cada ângulo interno de um pentágono regular?

Resposta: 108°

b) Quanto mede cada ângulo interno de um hexágono regular?

Resposta: 120°

Terceira rodada

a) Qual a medida do raio da circunferência inscrita em um polígono regular?

Resposta: medida do apótema do polígono regular

b) Qual a medida do raio da circunferência circunscrita em um hexágono regular?

Resposta: medida do lado do polígono regular

Quarta rodada

a) Qual a medida do diâmetro da circunferência inscrita em um quadrado cuja diagonal mede 6cm?

Resposta: $3\sqrt{2}$ **cm**

b) Qual a medida do raio da circunferência circunscrita em um triângulo equilátero cuja altura mede 6cm?

Resposta: 4 cm

Quinta rodada

a) Qual a medida da área do círculo circunscrito a um quadrado de lado 10cm?

Resposta: $50\pi\ cm^2$

b) Qual a medida da área do círculo inscrito a um quadrado de lado 10cm?

Resposta: $25\pi\ cm^2$

Sexta rodada

a) Quais são os dois sentidos de rotação possíveis?

Resposta: horário e anti-horário

b) Quantos eixos de simetria o quadrado possui?

Resposta: 4 eixos de simetria

Sétima rodada

a) Qual rotação do ponto P(1, 0) é equivalente à reflexão de P em torno da reta x = 2 no plano cartesiano?

Resposta: rotação de 180° em torno do ponto (2, 0) no sentido horário ou anti-horário

b) Se a distância entre P e P', simétricos em relação à r, é 10cm, então qual a distância entre P' e r?

Resposta: 5cm

Oitava rodada

a) Quais as coordenadas dos pontos simétricos ao ponto P(1, 2) em relação aos eixos x e y do plano cartesiano, repectivamente?

Resposta: P'(-1, 2) e P"(1, -2)

b) Qual rotação do ponto P(1, 1) equivale à reflexão de P em relação à bissetriz dos quadrantes pares (y = -x) no plano cartesiano?

Resposta: rotação de 180° em torno da origem no sentido horário ou anti-horário

Nona rodada

a) Quantas rotações sucessivas de 120° em torno da origem e no sentido anti-horário são necessárias para partindo do ponto P(1, 1) retornar para P?

Resposta: 3 rotações

b) Quantas rotações sucessivas de 90° em torno da origem e no sentido anti-horário são necessárias para partindo do ponto P(1, 1) retornar para P?

Resposta: 4 rotações

Décima rodada

a) Quais as coordenadas do ponto P' obtido a partir da rotação de 90° em relação à origem no sentido anti-horário do ponto P(1, 1)

Resposta: P'(-1, 1)

b) Qual rotação do ponto P(1, 1) é equivalente à reflexão de P em relação ao eixo OX do plano cartesiano?

Resposta: rotação de 90° em relação à origem no sentido horário

Atividade 4: Aprendendo a fazer construções no geogebra

- Objetivos:

  → Representar polígonos regulares usando o software matemático Geogebra.

  → Conhecer um método prático para localizar o centro de um polígono regular usando o software matemático geogebra.

  → Desenvolver a capacidade de realizar rotações e reflexões axiais de polígonos regulares usando o software matemático Geogebra.

- Metodologia:

  → Uso do laboratório de informática da escola com acesso individual dos alunos aos computadores com internet.

  → Atividade impressa distribuída para cada aluno solicitando as construções de acordo com algumas condições.

  → Apresentação dos processos no Geogebra por meio da projeção da tela do computador do professor de modo que todos possam ver cada procedimento necessário para responder a atividade.

  → Acompanhamento individual para confirmar se todos aprenderam os processos e prestar suporte àqueles que não conseguirem compreender.

- Avaliação:

  Durante a apresentação dos procedimentos necessários para a construção das figuras no geogebra, espera-se que os alunos consigam executar os processos de maneira compatível com aquilo que foi apresentado, portanto, cada um deles será avaliado de acordo com essa compatibilidade.

- Materiais:

Computadores com acesso à internet para uso individual dos alunos e do professor, datashow, atividade impressa, folha de ofício, lápis e borracha.

- Duração:

  A atividade ocorrerá em duas aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  Os alunos serão orientados a acessarem o software matemático Geogebra em três guias diferentes do navegador e acompanhando as questões da atividade impressa eles irão aprender a construir polígonos regulares de um modo prático e a realizarem rotações e reflexões com os polígonos construídos. Para fazer as construções, os alunos irão acompanhar as orientações do professor que, projetando sua tela por meio de datashow, mostrará aos alunos como eles devem proceder para executar as construções.

  A seguir será apresentada a atividade aplicada na aula.

  1 - Usando o software matemático Geogebra faça as construções solicitadas em cada item abaixo.

  a) Use o Geogebra da primeira guia para construir um triângulo equilátero ABC sabendo que A(-1, 0), B(1, 0). Depois determine o ponto D, centro do triângulo ABC.

  Resposta:

  (i) usando a entrada marque os pontos A(-1, 0) e B(1, 0).

  (ii) clique no botão "polígono regular", depois clique nos pontos A e B.

  (iii) preencha com 3 na opção "número de vértices"

  (iv) Marque o ponto C determinado na construção do triângulo equilátero.

  (v) clique na opção polígono e forme o triângulo ABC equilátero.

(vi) clique na opção "circunferência (três pontos)", depois clique nos pontos A, B e C.

(vii) clique na opção "ponto médio ou centro", depois clique na circunferência formada no passo anterior.

(viii) marque o ponto D formado no passo anterior.

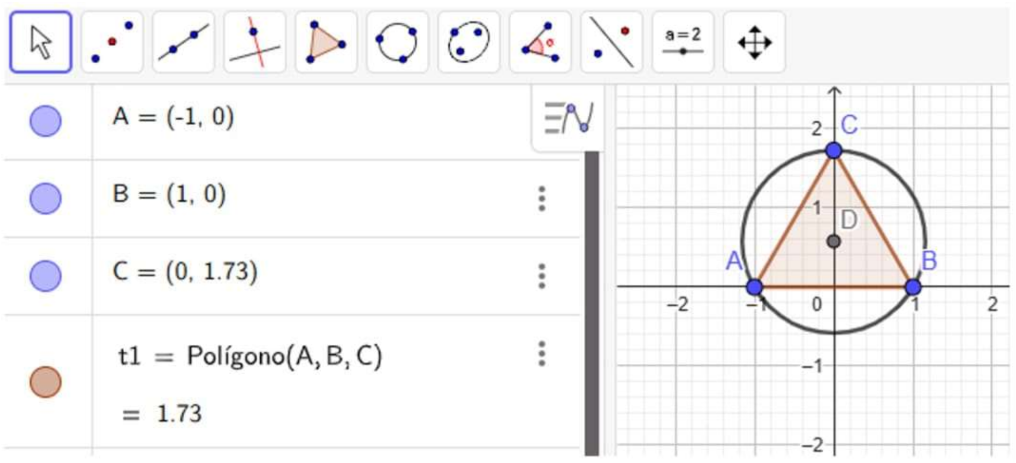


Figura 3.8: Triângulo equilátero ABC e centro D (ilustração criada pelo autor)

b) Na segunda guia construa um quadrado ABCD sabendo que A(-1, 0), B(1, 0). Depois determine o ponto E, centro do quadrado ABCD.

Resposta:

(i) usando a entrada marque os pontos A(-1, 0) e B(1, 0).

(ii) clique no botão "polígono regular", depois clique nos pontos A e B.

(iii) preencha com 4 na opção "número de vértices"

(iv) Marque os pontos C e D determinados na construção do quadrado.

(v) clique na opção polígono e forme o quadrado ABCD.

(vi) clique na opção "circunferência (três pontos)", depois clique nos pontos A, B e C.

(vii) clique na opção "ponto médio ou centro", depois clique na circunferência formada no passo anterior.

(viii) marque o ponto E formado no passo anterior.

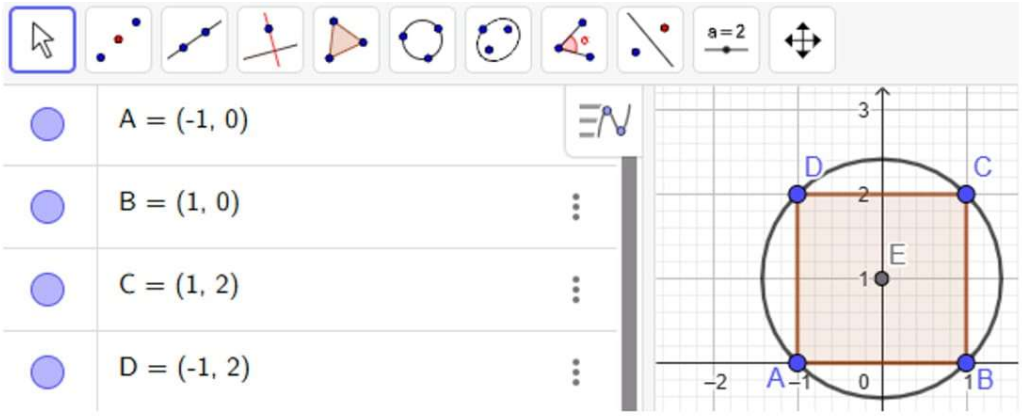


Figura 3.9: Quadrado ABCD e centro E (ilustração criada pelo autor)

c) Construa um pentágono regular ABCDE na terceira guia sabendo que A(-1, 0), B(1, 0). Depois determine o ponto F, centro do pentágono ABCDE.

Resposta:

(i) usando a entrada marque os pontos A(-1, 0) e B(1, 0).

(ii) clique no botão "polígono regular", depois clique nos pontos A e B.

(iii) preencha com 5 na opção "número de vértices"

(iv) Marque os pontos C, D e E determinados na construção do pentágono regular.

(v) clique na opção polígono e forme o pentágono regular ABCDE.

(vi) clique na opção "circunferência (três pontos)", depois clique nos pontos A, B e C.

(vii) clique na opção "ponto médio ou centro", depois clique na circunferência formada no passo anterior.

(viii) marque o ponto F formado no passo anterior.

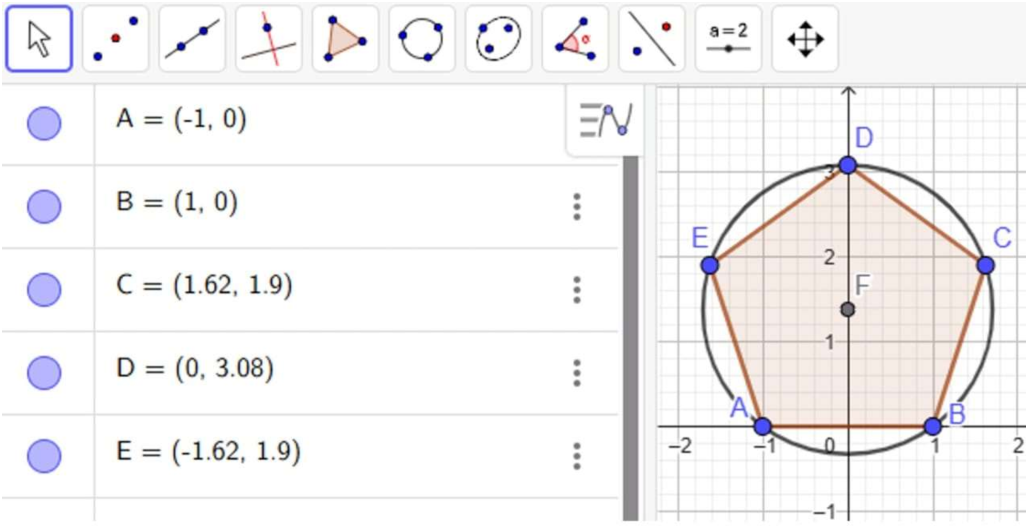


Figura 3.10: Pentágono regular ABCDE e centro F (ilustração criada pelo autor)

2 - Sabe-se que para fazer uma rotação de uma figura são necessários ângulo, sentido e ponto em torno do qual ocorrerá a rotação. Sendo assim, realize as rotações solicitadas nos itens a seguir.

a) Três rotações no triângulo equilátero, sendo a primeira de 30° no sentido anti-horário em torno do centro, a segunda de 60° no sentido horário em torno do centro e a terceira de 45° no sentido anti-horário em torno do centro.

Resposta:

(i) clique no botão "rotação (ponto, centro, amplitude)".

(ii) clique na parte interna do triângulo ABC, depois clique no ponto D.

(iii) preencha o espaço "ângulo"com o ângulo de rotação (30°, 45° e 60°).

(iv) escolha o sentido de rotação clicando em "horário"ou "anti-horário".

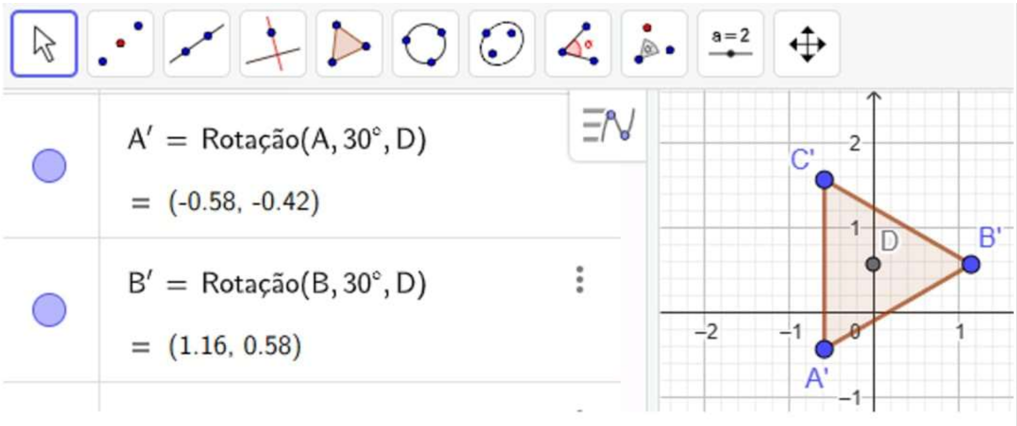


Figura 3.11: Rotação de ABC de 30° em relação à D no sentido anti-horário.

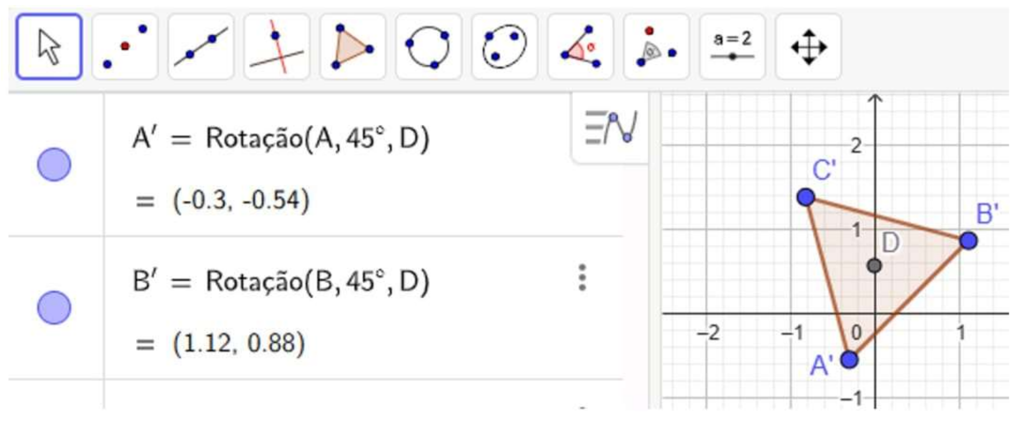


Figura 3.12: Rotação de ABC de 45° em relação à D no sentido anti-horário.

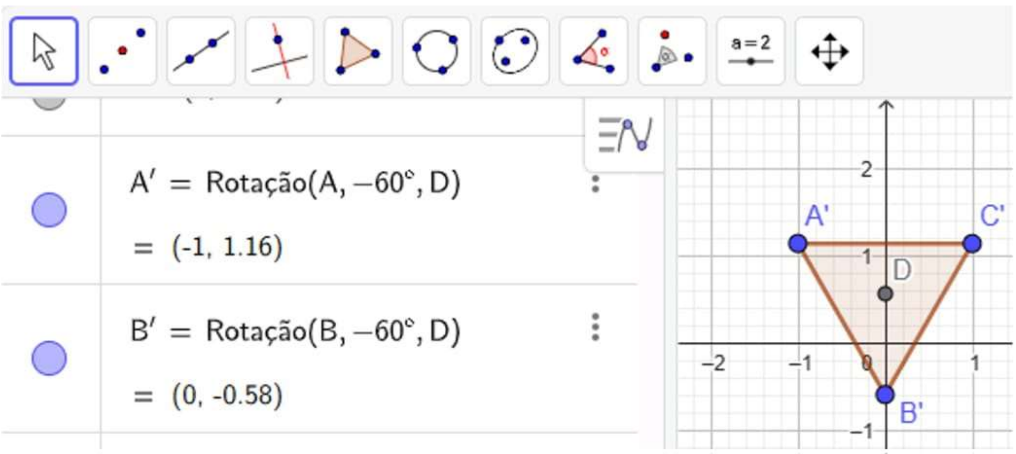


Figura 3.13: Rotação de ABC de 60° em relação à D no sentido horário.

b) Três rotações no quadrado, sendo a primeira de 50° no sentido anti-horário em torno do centro, a segunda de 35° no sentido anti-horário em torno do centro e a terceira de 40° no sentido horário em torno do centro.

Resposta:

(i) clique no botão "rotação (ponto, centro, amplitude)".

(ii) clique na parte interna do quadrado ABCD, depois clique no ponto E.

(iii) preencha o espaço "ângulo"com o ângulo de rotação (50°, 35° e 40°).

(iv) escolha o sentido de rotação clicando em "horário"ou "anti-horário".

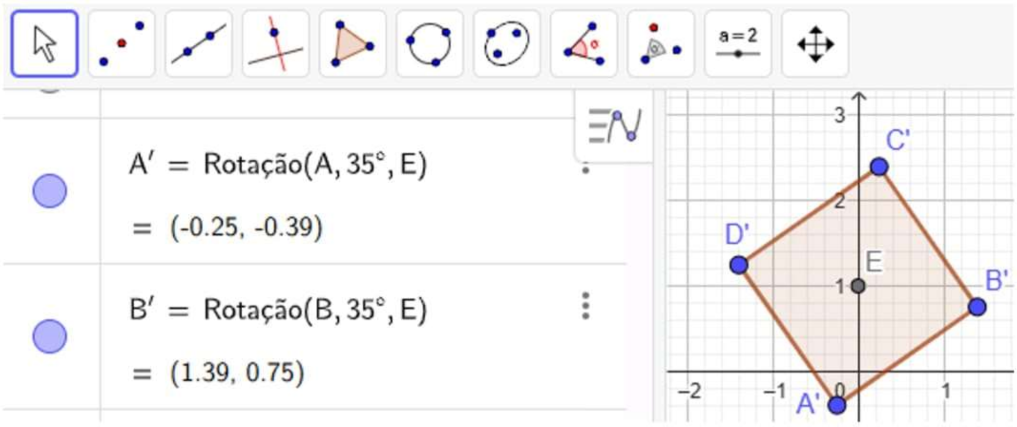


Figura 3.14: Rotação de ABCD de 35° em relação à E no sentido anti-horário.

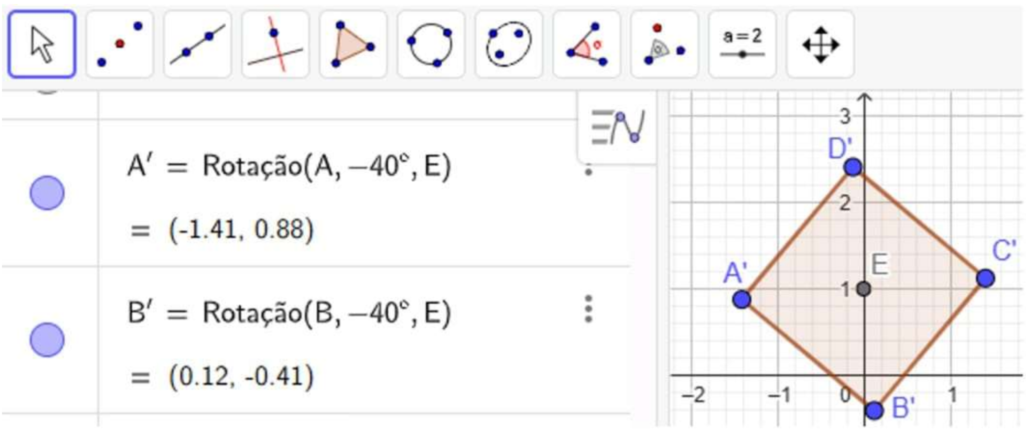


Figura 3.15: Rotação de ABCD de 40° em relação à E no sentido horário.

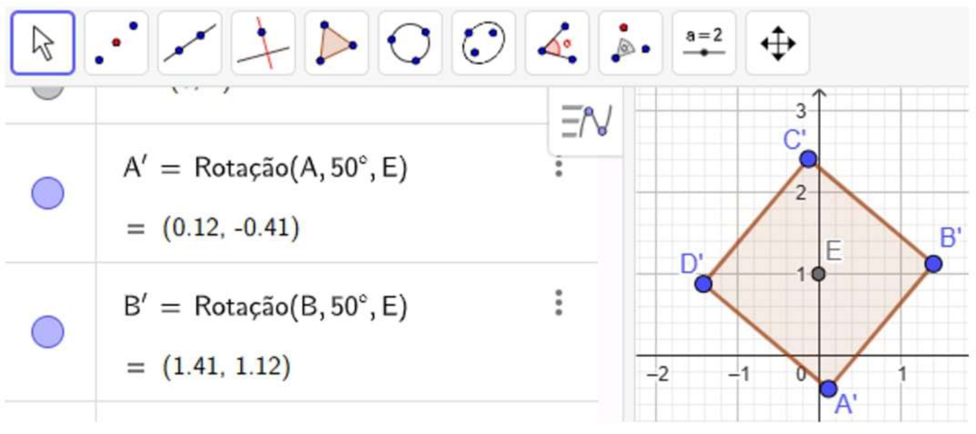


Figura 3.16: Rotação de ABCD de 50° em relação à E no sentido anti-horário.

c) Três rotações no pentágono regular, sendo a primeira de 70° no sentido horário em torno do centro, a segunda de 20° no sentido anti-horário em torno do centro e a terceira de 85° no sentido anti-horário em torno do centro.

Resposta:

(i) clique no botão "rotação (ponto, centro, amplitude)".

(ii) clique na parte interna do pentágono regular ABCDE, depois clique no ponto F.

(iii) preencha o espaço "ângulo"com o ângulo de rotação.

(iv) escolha o sentido de rotação clicando em "horário"ou "anti-horário".

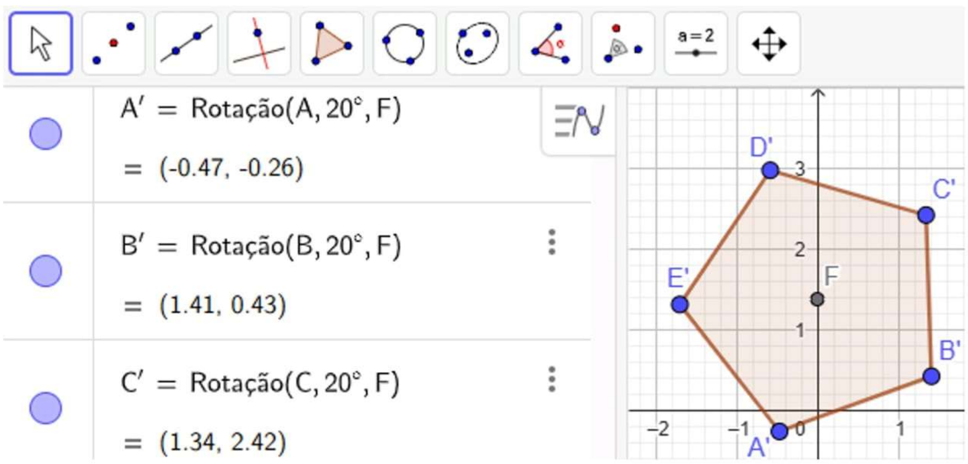


Figura 3.17: Rotação de ABCDE de 20° em relação à F no sentido anti-horário.

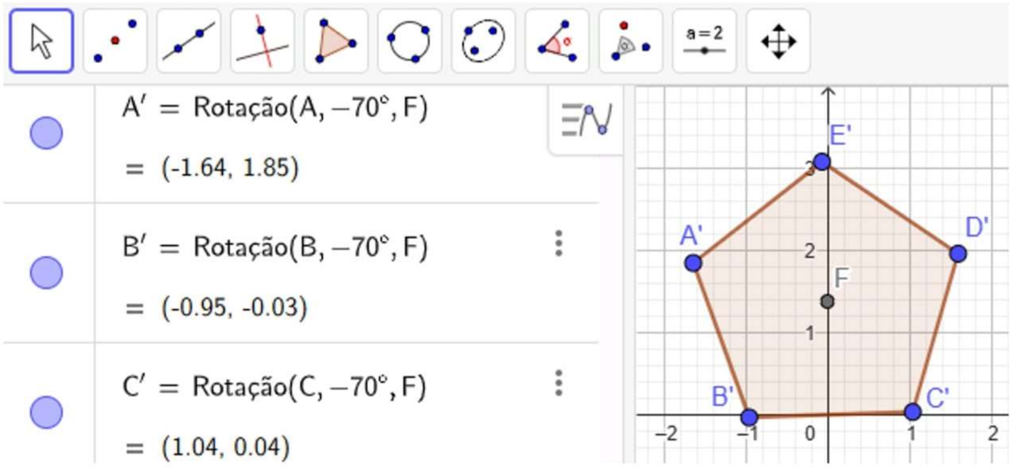


Figura 3.18: Rotação de ABCDE de 70° em relação à F no sentido horário.

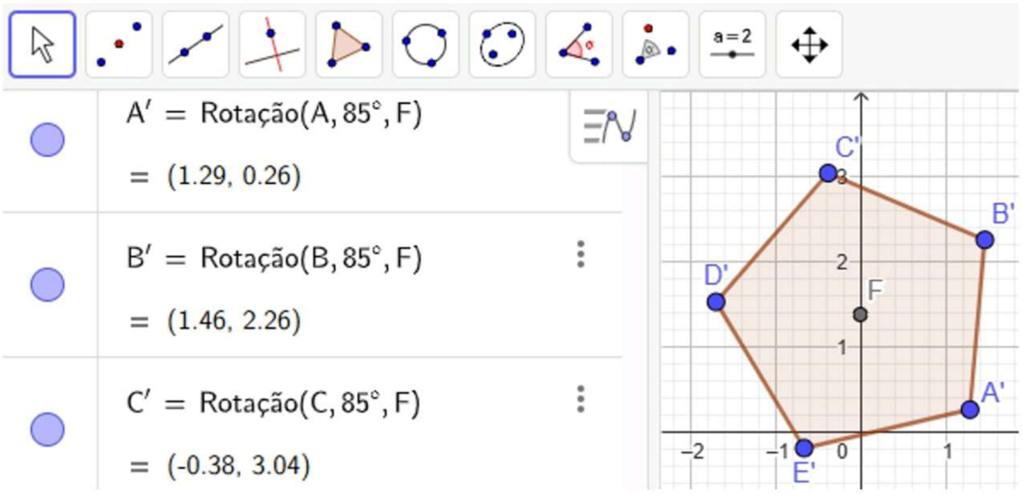


Figura 3.19: Rotação de ABCDE de 85° em relação à F no sentido anti-horário.

3 - Por meio do geogebra e considerando os seus conhecimentos de reflexão de figuras, realize as construções solicitadas nos itens.

a) Construa o eixo de simetria do triângulo equilátero que passa pelos pontos A (vértice) e D (centro), depois realize uma reflexão do triângulo em relação ao eixo.

Resposta:

(i) clique no botão "reta (dois pontos)", depois clique nos pontos A e D.

(ii) clique no botão "reflexão em relação a um eixo".

(iii) clique na parte interna do triângulo, depois clique na reta que passa por A e D.

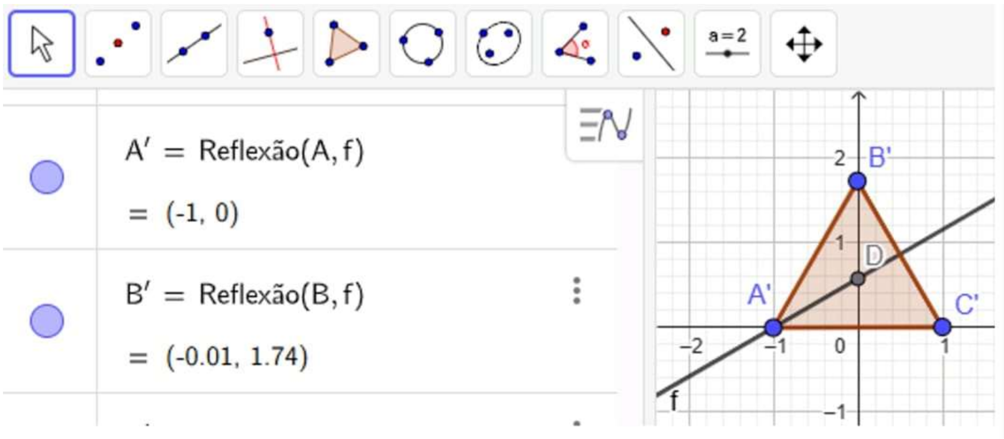


Figura 3.20: Reflexão de ABC em relação ao eixo AD

b) Construa o eixo de simetria do quadrado que passa pelos pontos A (vértice) e E (centro), depois realize uma reflexão do quadrado em relação ao eixo.

Resposta:

(i) clique no botão "reta (dois pontos)", depois clique nos pontos A e E.

(iii) clique no botão "reflexão em relação a um eixo".

(iv) clique na parte interna do quadrado, depois clique na reta que passa por A e E.

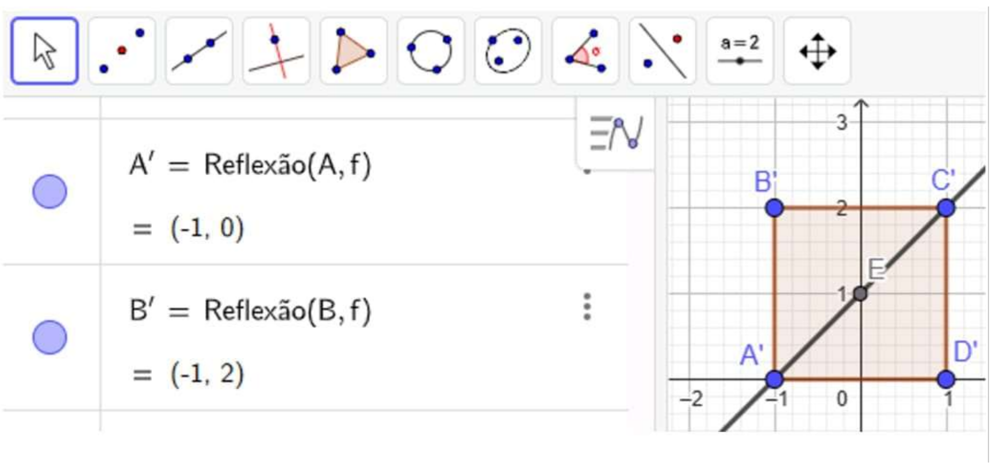


Figura 3.21: Reflexão de ABCD em relação ao eixo AE

c) Construa o eixo de simetria do quadrado que passa pelos pontos M (ponto médio do lado AB) e E (centro), depois realize uma reflexão do quadrado em relação ao eixo.

Resposta:

(i) construa o quadrado ABCD, conforme o item b) da questão 1.

(ii) determine o centro E do polígono, conforme o item b) da questão 1.

(iii) clique no botão “ponto médio ou centro”, depois clique nos pontos A e B.

(iv) marque as coordenadas do ponto determinado no passo anterior, nomeando-o como ponto M.

(v) clique nos botão “reta (dois pontos)”, depois clique nos pontos M e E.

(vi) clique no botão “reflexão em relação a um eixo”.

(vii) clique na parte interna do quadrado, depois clique na reta determinada no passo anterior.

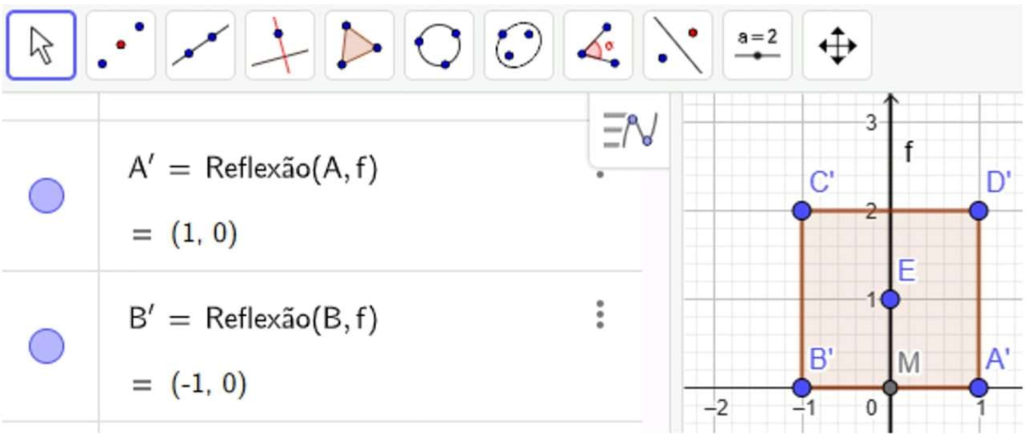


Figura 3.22: Reflexão de ABCD em relação ao eixo ME

d) Construa o eixo de simetria do pentágono regular que passa pelos pontos A (vértice) e F (centro), depois realize uma reflexão do pentágono em relação ao eixo.

Resposta:

(i) clique no botão "reta (dois pontos)", depois clique nos pontos A e F.

(iii) clique no botão "reflexão em relação a um eixo".

(iv) clique na parte interna do triângulo, depois clique na reta que passa por A e F.

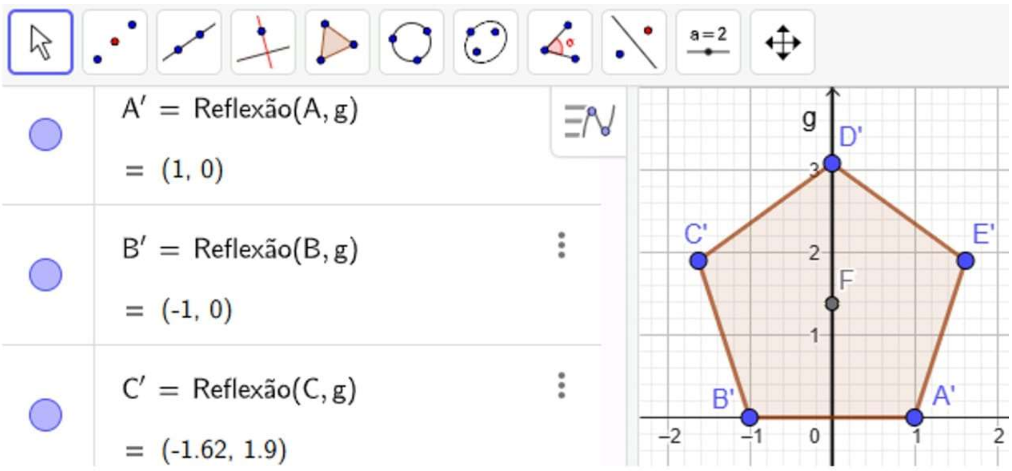


Figura 3.23: Reflexão de ABCDE em relação ao eixo AF

Atividade 5: Verificando proposições por meio do geogebra

- Objetivos:

  → Verificar a validade de enunciados relacionados a rotações e reflexões de polígonos regulares.

  → Desenvolver a capacidade de utilizar o Geogebra como ferramenta para verificação de propriedades relacionadas a rotações e reflexões de polígonos regulares.

  → Generalizar propriedades verificadas para casos particulares de polígonos regulares como também válidas para polígonos com um número qualquer de lados.

- Metodologia:

  → A aula ocorrerá em um laboratório com computadores suficientes para acesso individual dos alunos e com acesso à internet.

  → O ministrante deve ter um computador disponível com internet e projetar a sua tela de forma ampliada para orientar os processos que os alunos devem realizar.

  → Utilizando o software matemático Geogebra, o ministrante orientará os alunos nos processos de verificação de propriedades elencadas em uma atividade.

- Avaliação:

  Os alunos serão avaliados a partir do comprometimento na participação da atividade, bem como da correspondência entre o resultado encontrado por cada um deles e a resposta considerada correta.

- Materiais:

Computadores com acesso à internet, datashow atividade impressa, folhas de ofício (3 unidades para cada um), lápis, borracha e caneta.

- Duração:

  A atividade ocorrerá em duas aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  Os alunos serão encaminhados para o laboratório escolar com acesso individual a computadores com internet. Cada um deve receber uma atividade impressa que será aplicada na aula. Inicialmente, os alunos irão responder a atividade por conta própria com o auxílio do Geogebra e sugestões do ministrante mostrando como construir os processos. Após a conclusão da resolução dos alunos, o professor apresentará as respostas corretas e utilizará o Geogebra para mostrar os procedimentos necessários para responder cada uma das questões.

  A seguir será apresentada a atividade aplicada na aula.

  1 - Considere os seus conhecimentos a respeito de rotações de um polígono regular e responda as perguntas a seguir.

  a) Realizando três rotações de 120° no sentido anti-horário de triângulo equilátero em torno de seu centro obtém-se uma posição diferente da inicial? Explique.

  Resposta: Não. Após três rotações de 120° no sentido anti-horário em torno do centro, o triângulo equilátero retornará para a posição inicial.

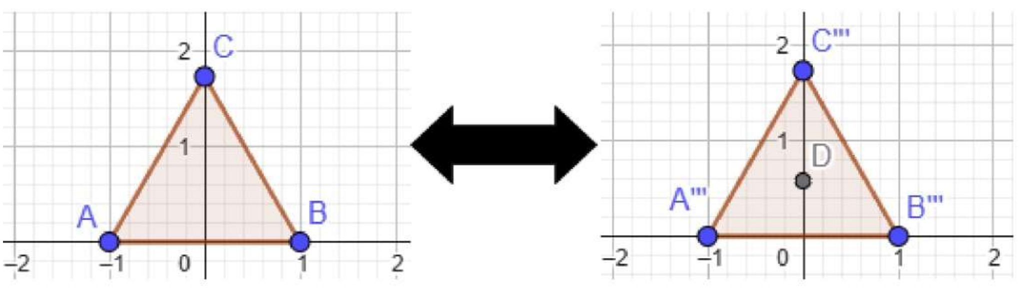


Figura 3.24: Ilustração do resultado da aplicação tripla de rotações

b) Após a aplicação de quatro rotações de 90° no sentido anti-horário de um quadrado em torno de seu centro obtém-se uma posição diferente da inicial? Explique.

Resposta: Não. Após quatro rotações de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, o quadrado retornará para a posição inicial.

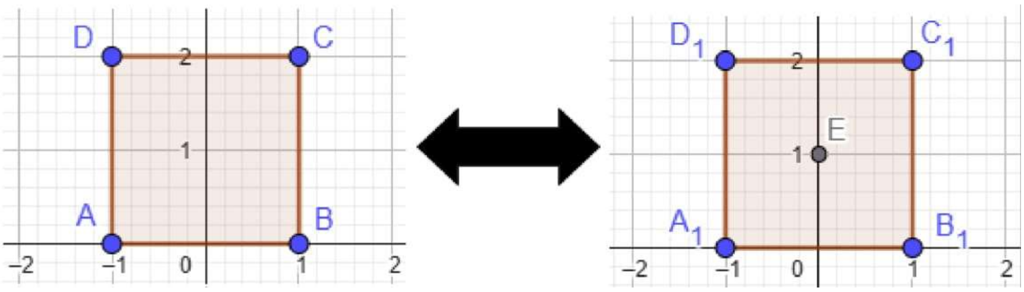


Figura 3.25: Ilustração do resultado da aplicação quádrupla de rotações

c) Com qual ângulo, com cinco rotações em torno de seu centro, um pentágono regular retornaria para a posição inicial?

Resposta: Como o pentágono regular tem 5 lados, o ângulo procurado é $360°/5 = 72°$, conforme o padrão observado nos casos anteriores.

d) A partir dos casos anteriores, como você faria para encontrar o ângulo de rotação e o número mínimo de rotações para um polígono regular de n lados?

Resposta: Observando os padrões dos casos anteriores, para um polígono de n lados o ângulo será $360°/n$ com

um mínimo de n rotações para que o polígono retorne para a posição inicial.

2 - A respeito das reflexões e dos eixos de simetria de um polígono regular, responda os itens a seguir.

a) Determine todos os eixos de simetria de um triângulo equilátero e depois indique o número mínimo de reflexões em torno de cada um deles para o triângulo retornar para a posição inicial.

Resposta: O triângulo equilátero tem três eixos de simetria e basta duas reflexões em torno de cada eixo para que ele retorne para a posição inicial.

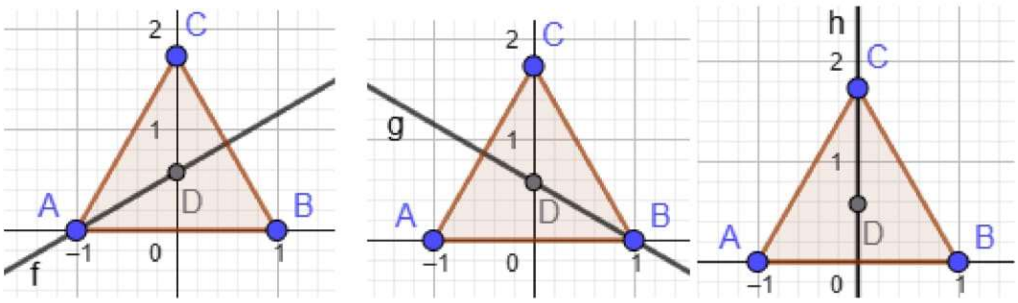


Figura 3.26: Ilustração dos eixos de simetria do triângulo equilátero

b) Quantos eixos de simetria um quadrado possui? Quantas reflexões em torno de cada um deles são necessárias para que ele retorne para a posição inicial?

Resposta: O quadrado tem quatro eixos de simetria e basta duas reflexões em torno de cada eixo para que ele retorne para a posição inicial.

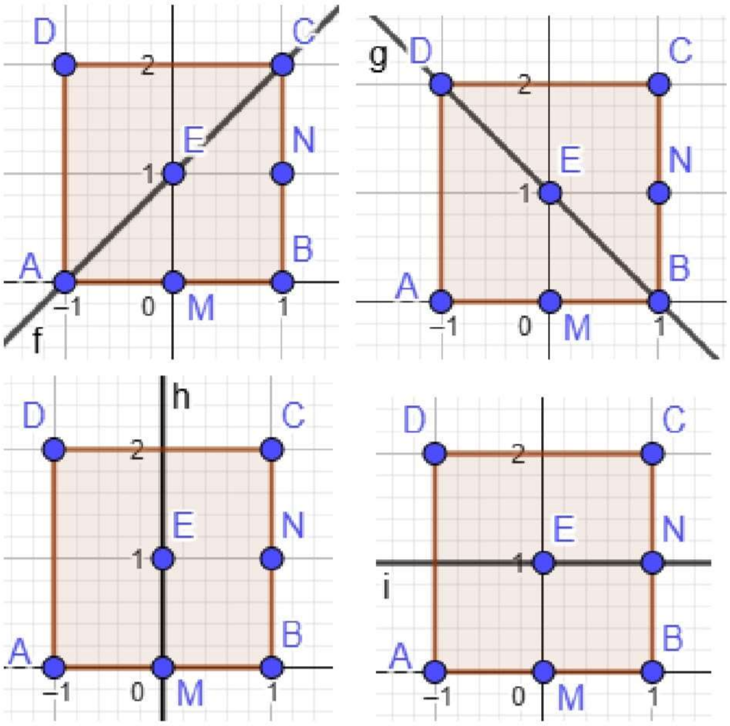


Figura 3.27: Ilustração dos eixos de simetria do quadrado

c) O que você pensa a respeito do número de eixos de simetria de um pentágono? E sobre as reflexões em torno de cada um deles? (Dica: considere o número de lados do polígono regular e os casos anteriores)

Resposta: Observando os casos anteriores é possível intuir que o número de eixos de simetria de um polígono de n lados é n. Além disso, é fácil imaginar que basta duas reflexões para que o polígono retorne para a posição inicial.

3 - Julgue as afirmativas a seguir como verdadeiras ou falsas.

a) Em um triângulo equilátero é possível, com apenas uma reflexão em torno do eixo de simetria g: BD, posicionar o triângulo de maneira idêntica à posição que teria após uma rotação de 120° no sentido anti-horário em torno do centro D, seguida de uma reflexão em torno do eixo f: AD.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

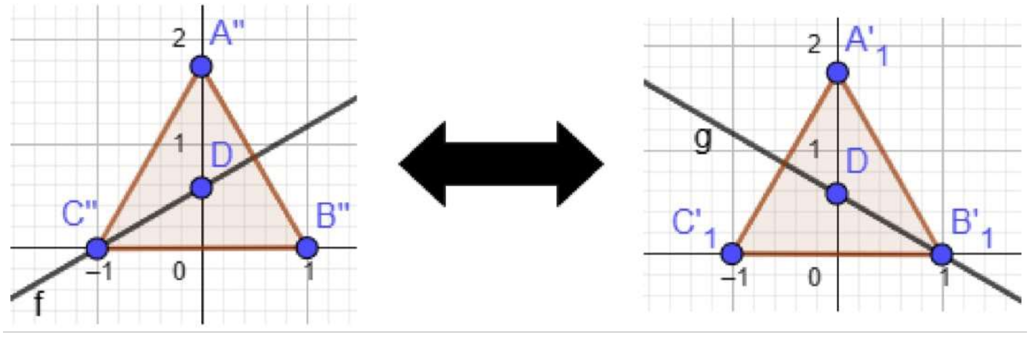


Figura 3.28: Comparação entre os resultados da composição e da reflexão

b) Fazendo duas rotações sucessivas de 120° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão de em torno do eixo f: AD, não seria possível com apenas uma reflexão em torno do eixo h: CD, posicionar o triângulo equilátero ABC de formas idênticas.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: ( ) Verdadeiro (x) Falso

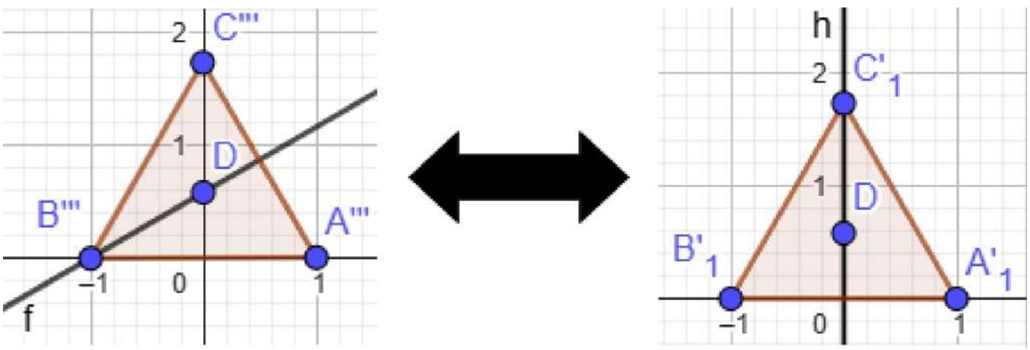


Figura 3.29: Comparação entre os resultados da composição e da reflexão

c) Para um triângulo equilátero, uma rotação de 120° no sentido anti-horário em torno da origem equivale a alguma reflexão em torno de um eixo de simetria e duas rotações sucessivas (nas mesmas condições da anterior) resulta no mesmo posicionamento gerado por outra reflexão feita em torno de outro eixo.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: ( ) Verdadeiro (x) Falso

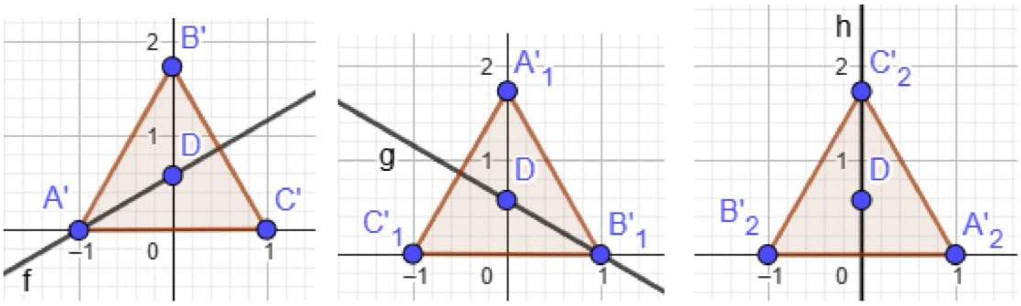


Figura 3.30: Reflexões do triângulo equilátero

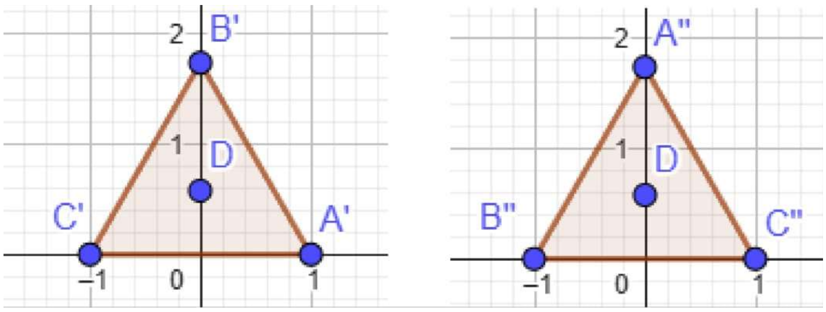


Figura 3.31: Rotações do triângulo equilátero

d) Para um quadrado após realizar uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguida de uma reflexão em torno do eixo de simetria f: AE, é possível determinar um outro eixo de simetria que resulta na mesma posição após uma única reflexão em torno dele.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

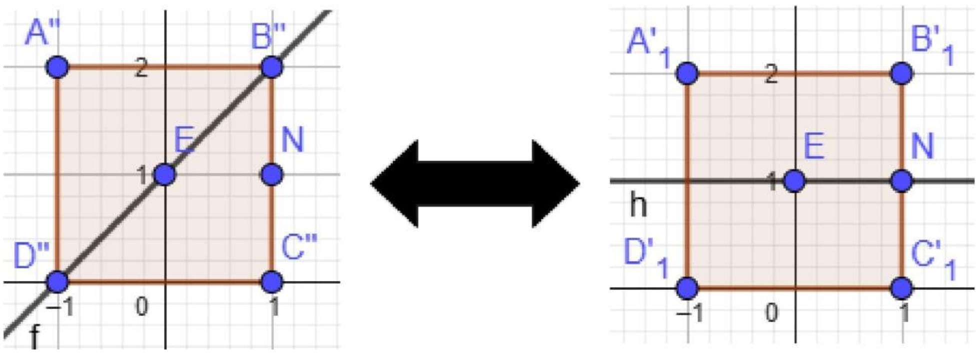


Figura 3.32: Comparação entre os resultados da composição e da reflexão

e) Duas rotações sucessivas de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão em torno do eixo f: AE gera a mesma posição do quadrado obtido de uma reflexão em torno do eixo i: BD.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

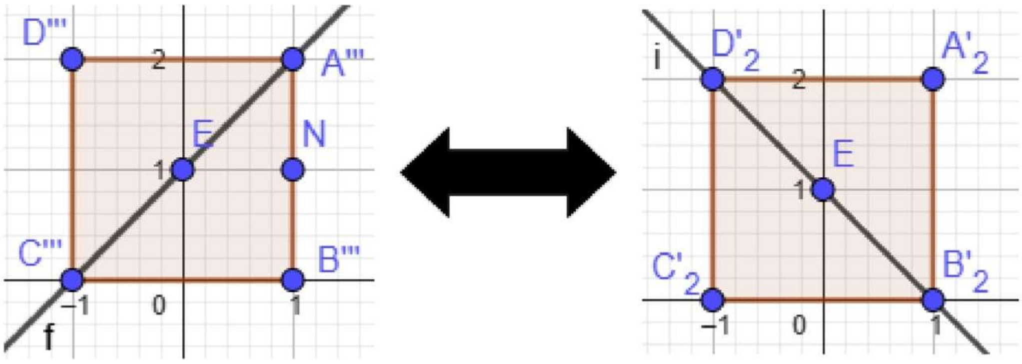


Figura 3.33: Comparação entre os resultados da composição e da reflexão

f) Três rotações sucessivas de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão em torno do eixo f: AE gera a mesma posição do quadrado obtido de uma reflexão em torno do eixo h: ME.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

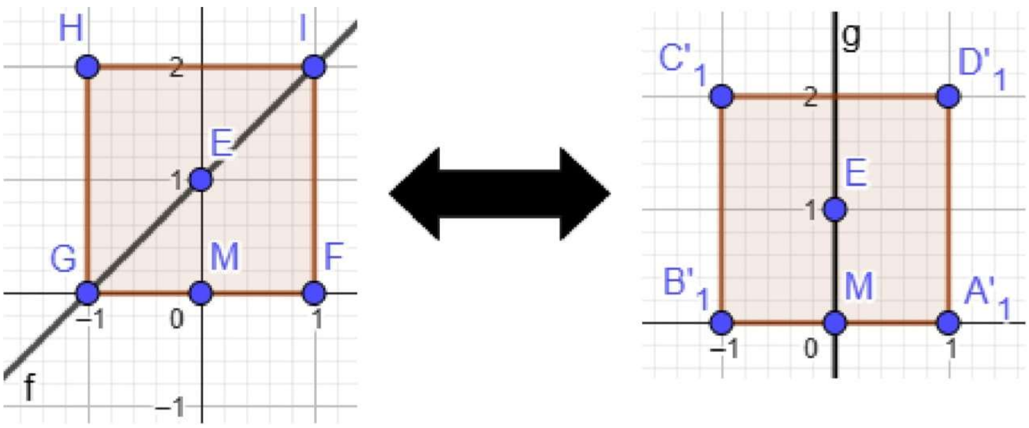


Figura 3.34: Comparação entre os resultados da composição e da reflexão

Atividade 6: Rotações e reflexões de polígonos regulares com material manipulável

- Objetivos:

  → Conhecer um método alternativo para verificação de propriedades válidas a respeito de rotações, reflexões e composições destas em polígonos regulares.

  → Demonstrar propriedades válidas a respeito de rotações, reflexões e composições destas em polígonos regulares com o uso de materiais manipuláveis.

  → Valorizar o uso de materiais manipuláveis, entendendo-o como um importante instrumento de verificação da veracidade de proposições.

- Metodologia:

  → Resolução de atividade impressa disponibilizada para cada aluno.

  → Uso dos polígonos regulares construídos na oficina para responder a atividade.

  → Orientações do professor sobre a utilização dos polígonos para responder as atividades.

- Avaliação:

  Os alunos serão avaliados de acordo com o uso adequado do material manipulável e o nível de coerência das respostas dadas em cada uma das questões da atividade. Além disso, espera-se que os alunos demonstrem comprometimento com a realização da atividade.

- Materiais:

  Polígonos regulares construídos na oficina, lista de atividades impressa, lápis, borracha, caneta, folhas de ofício (4 para cada aluno).

- Duração:

  A atividade ocorrerá em duas aulas de cinquenta minutos.

- Desenvolvimento:

  Os alunos receberão a atividade impressa e folhas de ofício em branco para responder as questões. Uma das folhas em branco deve ser usada como suporte para realizar as simulações de rotações e reflexões dos polígonos. Eles irão escolher uma posição inicial para colocar os polígonos no papel e, usando o lápis ou a caneta, irão marcar os vértices no papel, indicando a letra que corresponde a cada vértice. Além disso, também serão esboçados os eixos de simetria dos polígonos, com o uso de lápis e régua, a fim de facilitar a visualização das reflexões. A partir daí, bastará movimentar a figura dentro do espaço de suporte, esboçado na folha em branco, para responder as questões da lista de atividades.

  A seguir será apresentada a atividade aplicada na aula.

  1 - Considerando as rotações no sentido anti-horário em torno do centro do polígono, as reflexões em torno dos eixos de simetria e usando os polígonos construídos na aula anterior, responda os itens a seguir.

  a) Qual ângulo de rotação no sentido anti-horário em torno do centro determinaria uma rotação equivalente a uma permutação dos vértices A, B e C do triângulo equilátero, fazendo com que o vértice A vire o B, o B vire o C e o C vire o A? E qual seria o ângulo que geraria uma rotação equivalente à permutação dos vértices em que A vira C, B vira A e C vira B?

  Resposta: O ângulo procurado, no primeiro caso, é 120°, conforme observado com o uso do material manipulável. Já no segundo caso, o ângulo de rotação seria 240° ou, ainda, duas rotações sucessivas de 120°.

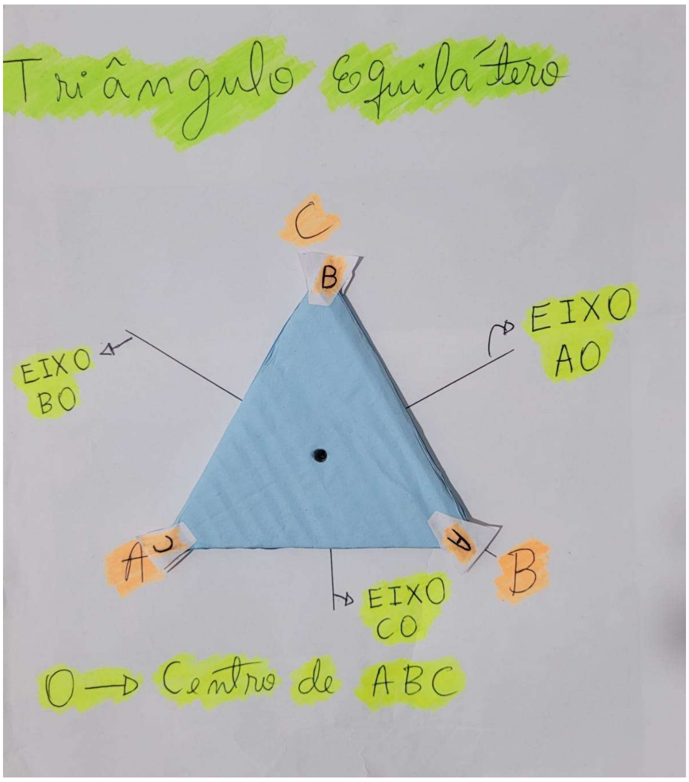


Figura 3.35: Posicionamento do triângulo após a primeira permutação.

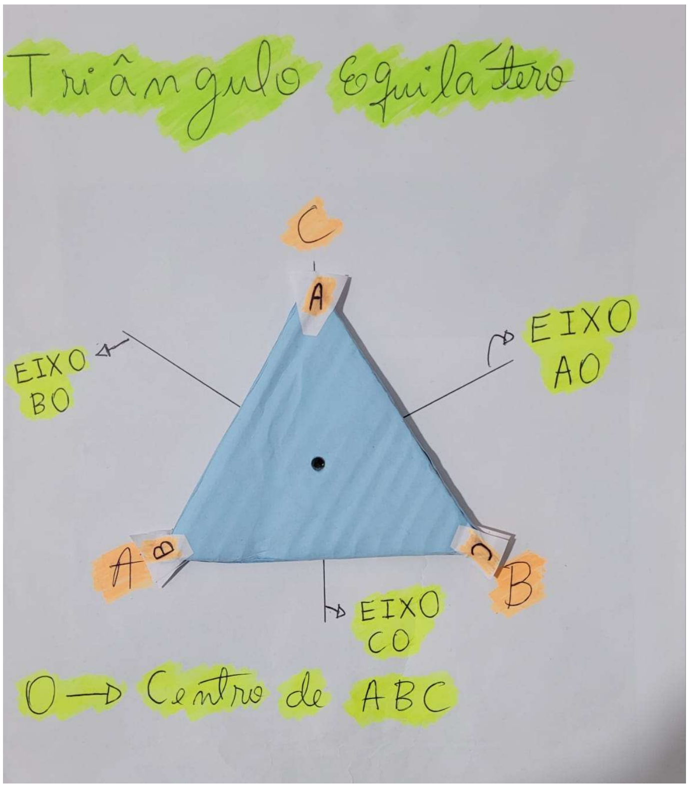


Figura 3.36: Posicionamento do triângulo após a segunda permutação.

b) Qual ângulo de rotação no sentido anti-horário em torno do centro desenvolveria uma rotação idêntica a uma permutação dos vértices A, B, C e D do quadrado, em que o vértice A vira o B, o B vira o C, o C vira o D e o D vira o A? E o ângulo da rotação idêntica à permutação em que A vira C, B vira D, C vira A e D vira B? Qual seria o ângulo de rotação que geraria uma rotação idêntica à permutação em que A vira D, B vira A, C vira B e D vira C?

Resposta: Note que na primeira permutação o ângulo será 90°, conforme observado com o uso do material manipulável. No segundo caso, o ângulo de rotação seria 180° ou, então, duas rotações sucessivas de 90°. Já no terceiro caso, a rotação seria de 270° ou, então, três rotações sucessivas de 90°.

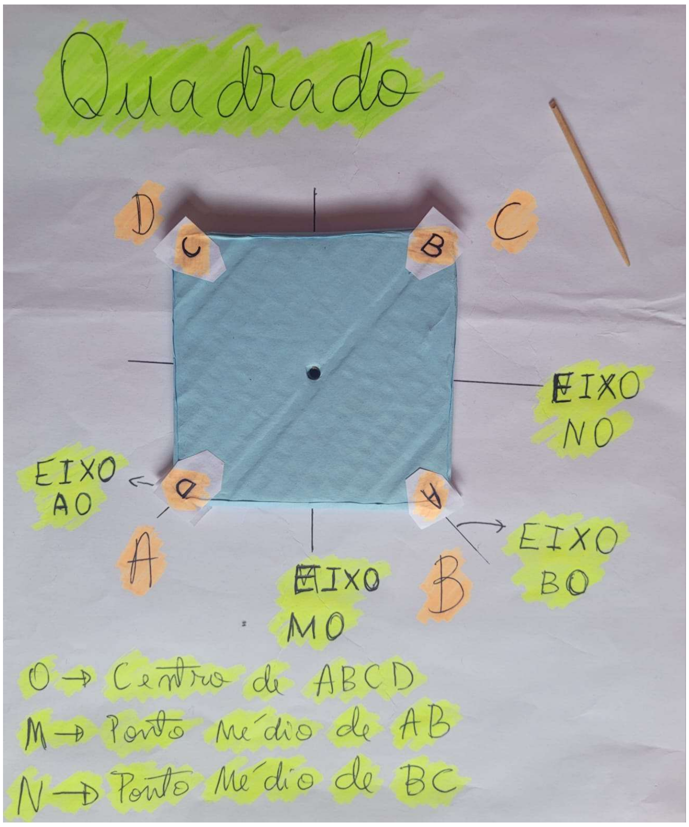


Figura 3.37: Posicionamento do quadrado após a primeira permutação.

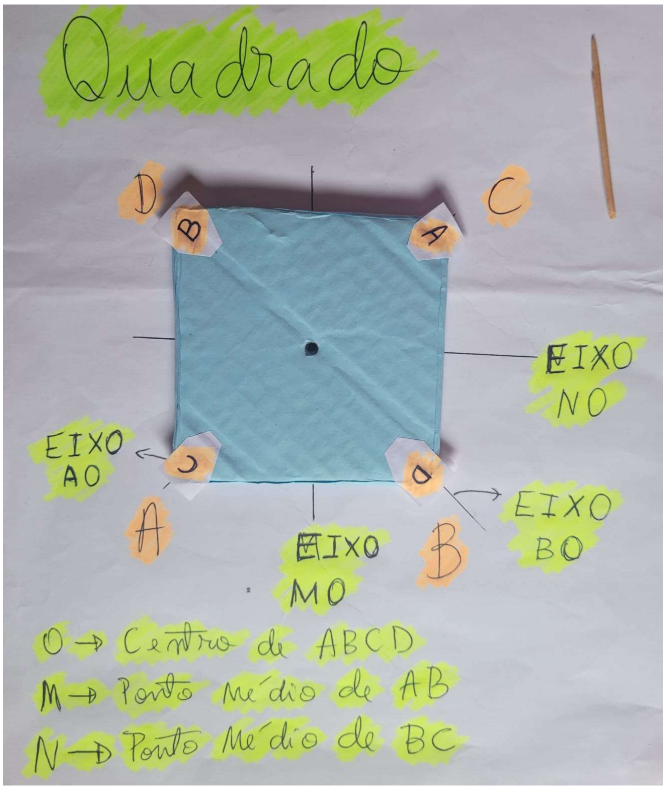


Figura 3.38: Posicionamento do quadrado após a segunda permutação.

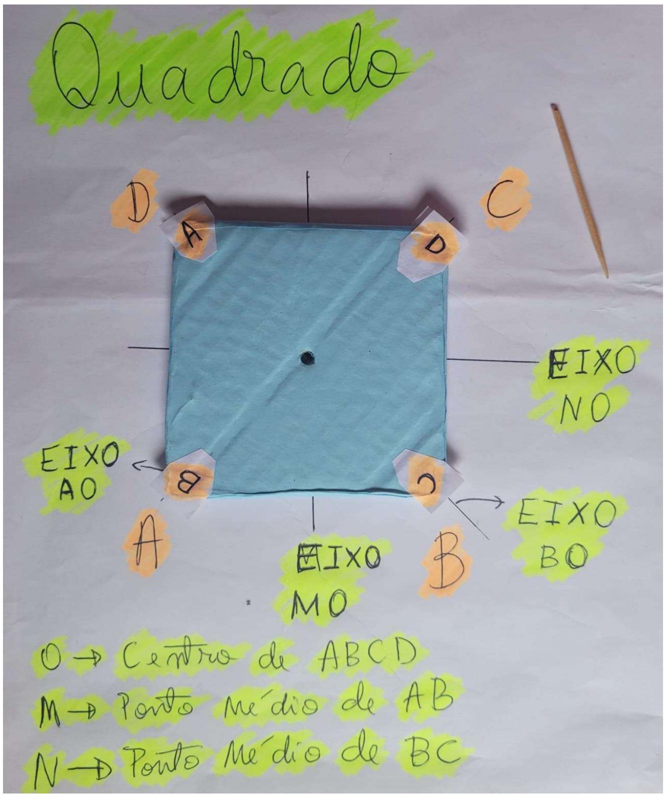


Figura 3.39: Posicionamento do quadrado após a terceira permutação.

c) No caso do pentágono regular, qual ângulo de rotação geraria uma rotação correspondente à permutação dos vértices A, B, C, D e E fazendo A virar B, B virar C, C virar, D virar E e E virar A? Qual seria o ângulo para a rotação que corresponderia à permutação em que A vira C, B vira D, C vira E, D vira A e E vira B? E o ângulo para a rotação corresponder à permutação em que A vira D, B vira E, C vira A, D vira B e E vira C? Determine também o ângulo em que a rotação corresponde à permutação em que A vira E, B vira A, C vira B, D vira C e E vira D.

Resposta: Note que na primeira permutação o ângulo será 72°, conforme observado com o uso do material manipulável. No segundo caso, o ângulo de rotação seria 144° ou, então, duas rotações sucessivas de 72°. No terceiro caso, a rotação seria de 216° ou, então, três rotações sucessivas de 72°. Já no quarto caso, o ângulo seria de 288° ou, então, quatro rotações sucessivas de 72°.

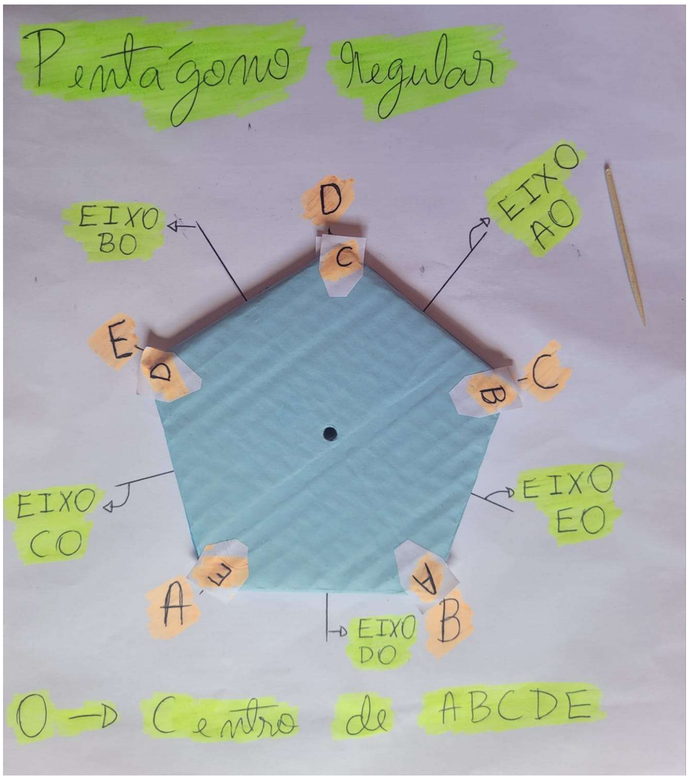


Figura 3.40: Posicionamento do pentágono após a primeira permutação.

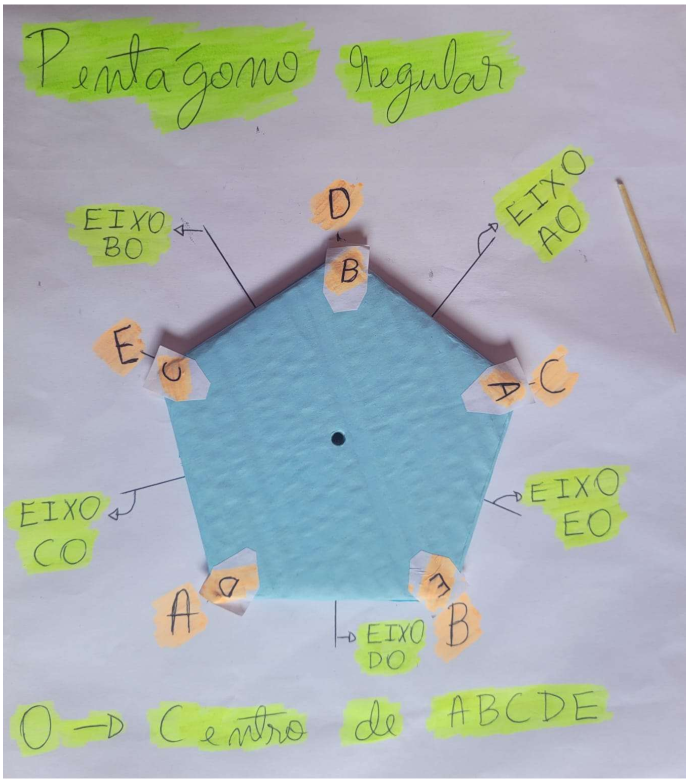


Figura 3.41: Posicionamento do pentágono após a segunda permutação.

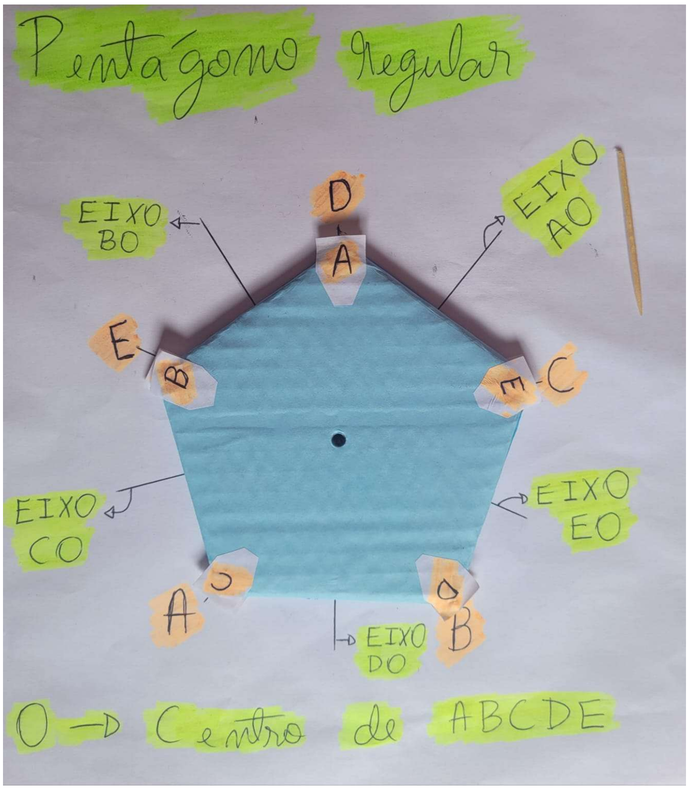


Figura 3.42: Posicionamento do pentágono após a terceira permutação.

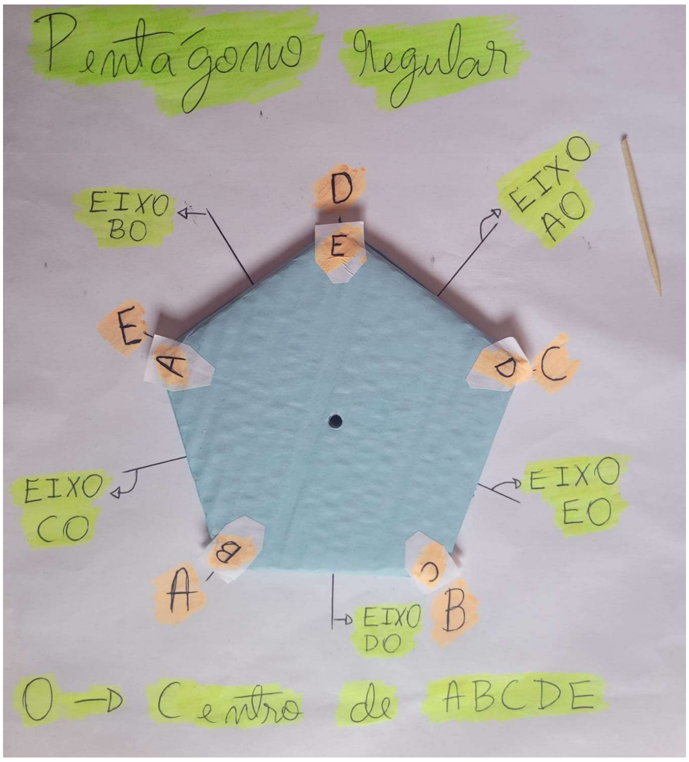


Figura 3.43: Posicionamento do pentágono após a quarta permutação.

d) O que ocorre com o posicionamento de cada um dos vértices dos polígonos regulares após uma rotação cujo ângulo é igual a 360° dividido pelo número de lados do polígono?

Resposta: Observando os padrões anteriores, pode-se concluir que rotações sucessivas de 360°/n no sentido anti-horário em torno do centro do polígono regular de n lados, correspondem a algumas permutações dos vértices.

e) Considerando os itens anteriores verifique quais permutações dos vértices correspodem às rotações de 60°, 120°, 180°, 240° e 300° no hexágono regular.

Resposta:

(i) A permutação correspondente à rotação de 60° é aquela em que A vira B, B vira C, C vira D, D vira E, E vira F e F vira A.

(ii) A permutação correspondente à rotação de 120° é

aquela em que A vira C, B vira D, C vira E, D vira F, E vira A e F vira B.

(iii) A permutação correspondente à rotação de 180° é aquela em que A vira D, B vira E, C vira F, D vira A, E vira B e F vira C.

(iv) A permutação correspondente à rotação de 240° é aquela em que A vira E, B vira F, C vira A, D vira B, E vira C e F vira D.

(v) A permutação correspondente à rotação de 240° é aquela em que A vira F, B vira A, C vira B, D vira C, E vira D e F vira E.

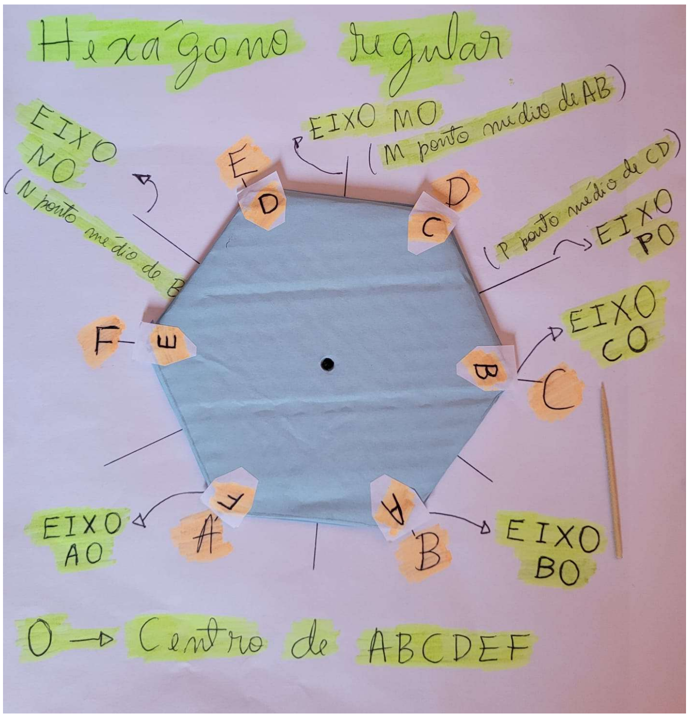


Figura 3.44: Posição dos vértices após a primeira rotação

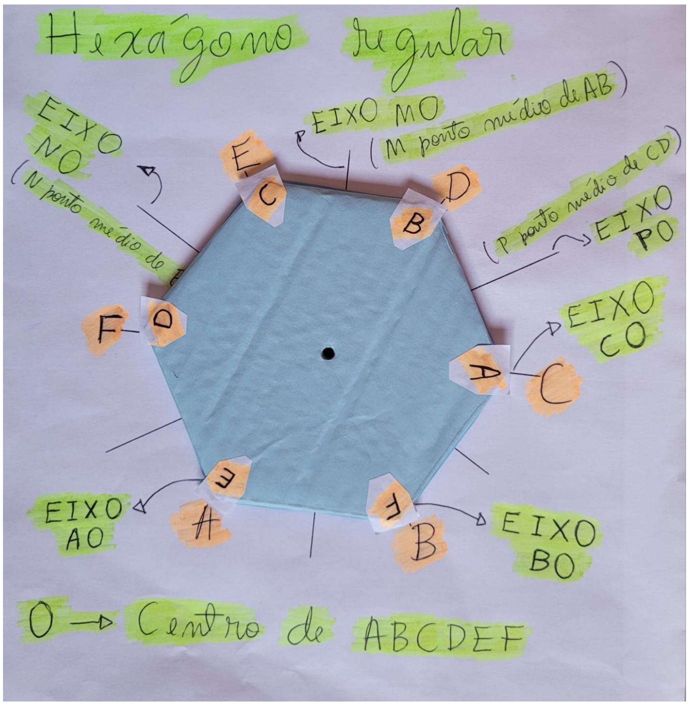


Figura 3.45: Posição dos vértices após a segunda rotação

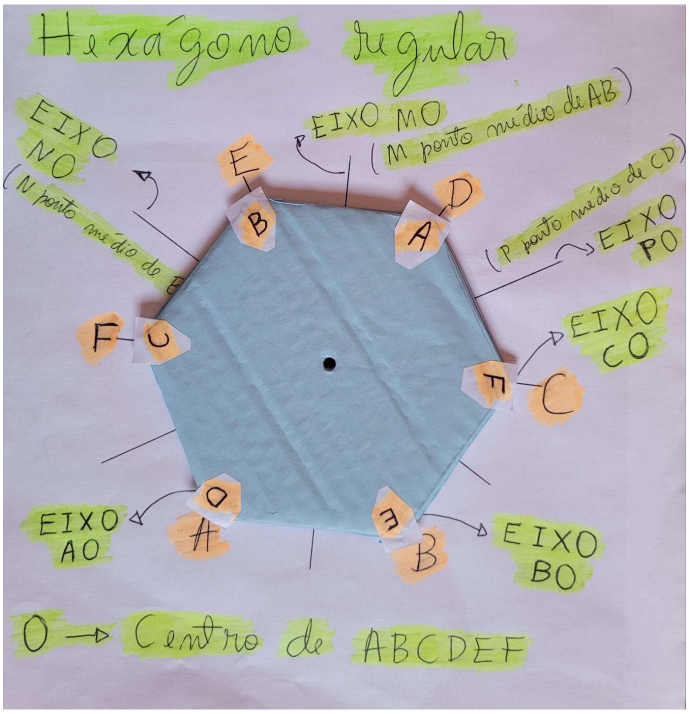


Figura 3.46: Posição dos vértices após a terceira rotação

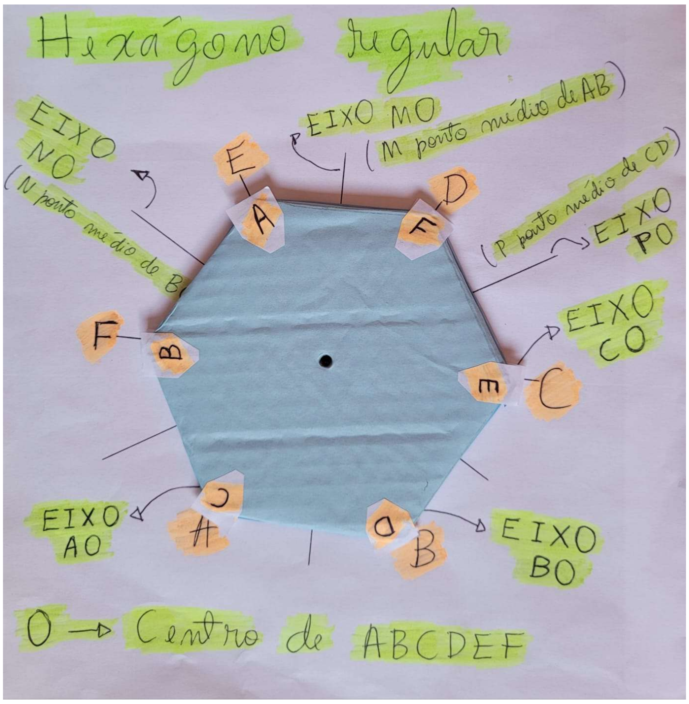


Figura 3.47: Posição dos vértices após a quarta rotação

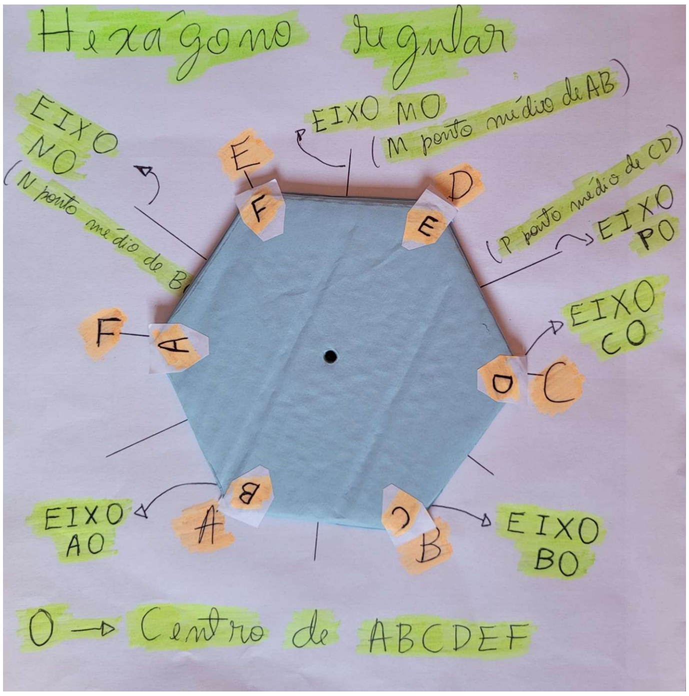


Figura 3.48: Posição dos vértices após a quinta rotação

2 - Usando os materiais construídos na atividade inicial e aplicando os seus conhecimentos sobre rotações e reflexões de polígonos

regulares, faça o que for pedido em cada item a seguir.

a) No triângulo equilátero, indique o eixo de simetria em torno do qual deve ser realizada uma reflexão para que a posição final seja equivalente a uma permutação dos vértices em que A fica fixo, B vira C e C vira B. Indique também a rotação em que B fica fixo, A vira C e C vira e a outra em que C fica fixo, A vira B e B vira A.

Resposta: Note que a primeira permutação de vértices é equivalente à reflexão do triângulo em torno do eixo AO (sendo O o centro do triângulo). Além disso, os eixos BO e CO são, respectivamente, os eixos de simetria das reflexões em que B fica fixo na que C fica fixo.

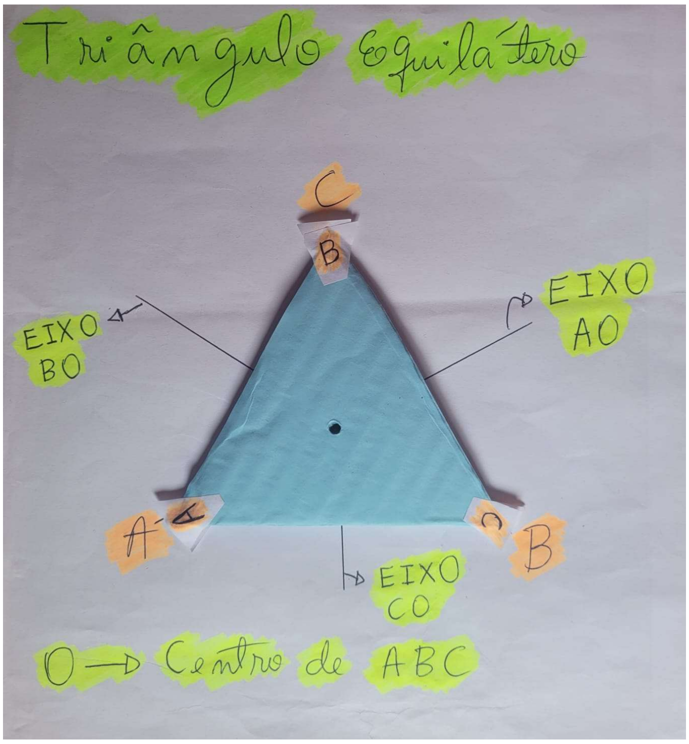


Figura 3.49: Posicionamento do triângulo após a primeira permutação

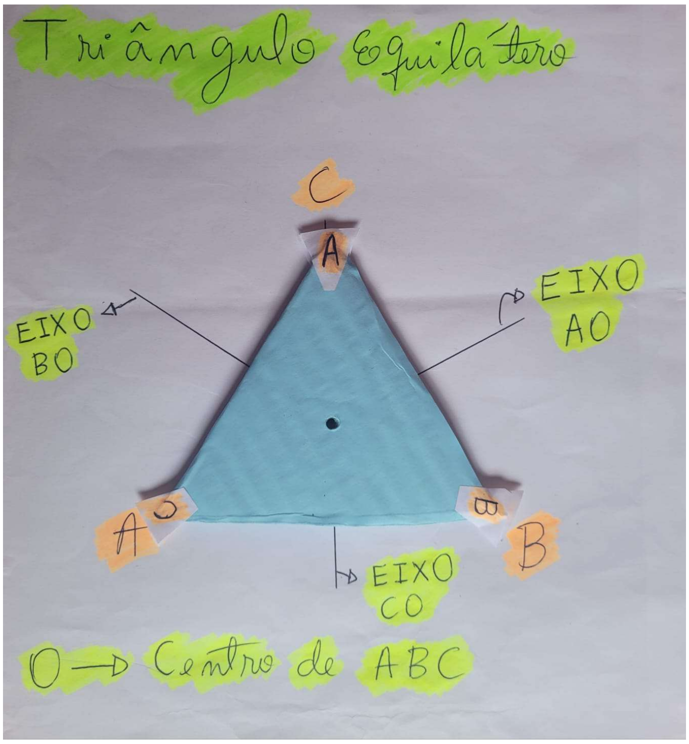


Figura 3.50: Posicionamento do triângulo após a segunda permutação

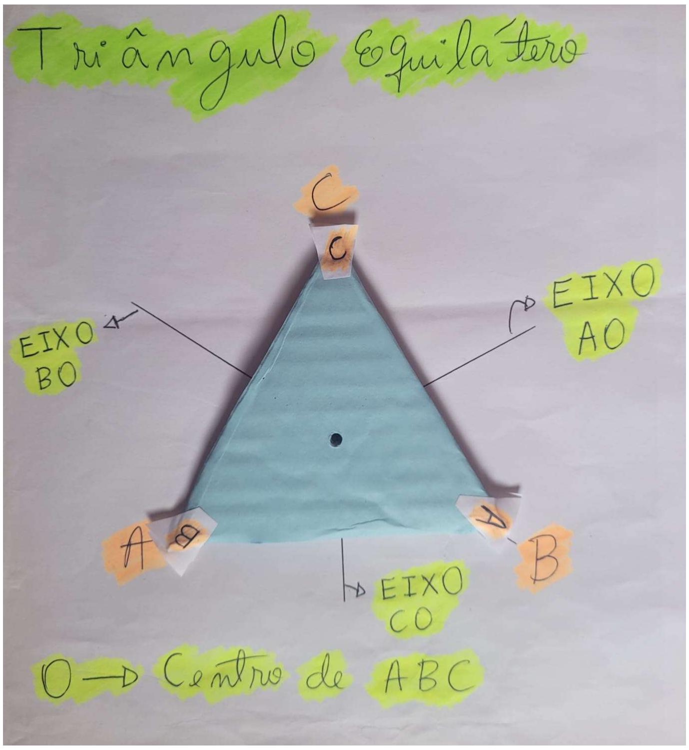


Figura 3.51: Posicionamento do triângulo após a terceira permutação

b) Associe no quadrado as reflexões em torno dos eixos de simetria com as permutações dos vértices A, B, C e D. Realize cada reflexão e observe como cada vértice muda de posição.

Resposta: Sejam E o centro do quadrado, M o ponto médio do lado AB e N o ponto médio do lado BC. Então, temos as seguintes associações:

(i) a reflexão em torno do eixo AE equivale à permutação em que A e C ficam fixos, B vira D e D vira B;

(ii) a reflexão em torno do eixo BE equivale à permutação em que B e D ficam fixos, A vira C e C vira A;

(iii) a reflexão em torno do eixo de simetria ME equivale à permutação A vira B, B vira A, C vira D e D vira C;

(iv) a reflexão em torno do eixo de simetria NE equivale à permutação em que A vira D, B vira C, C vira B e D vira A.

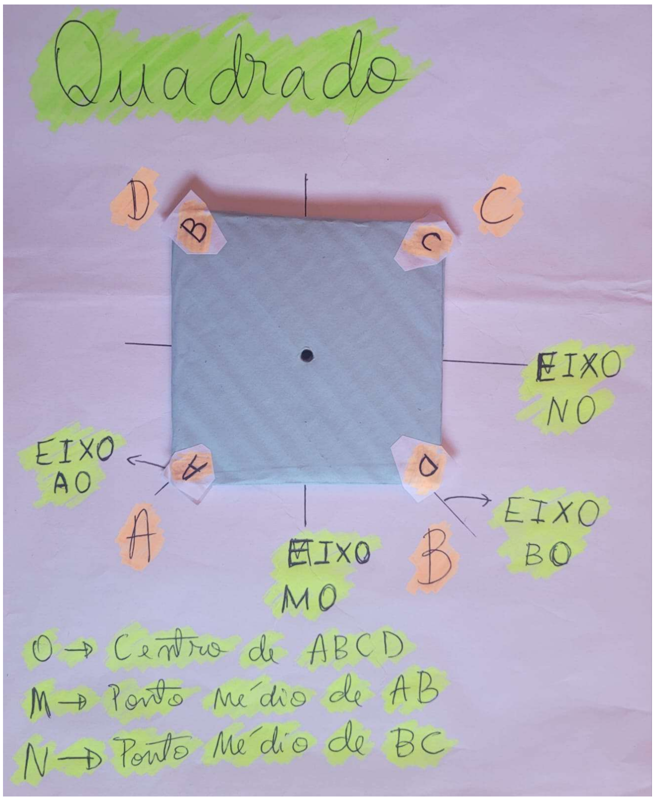


Figura 3.52: Posicionamento do quadrado após a primeira permutação

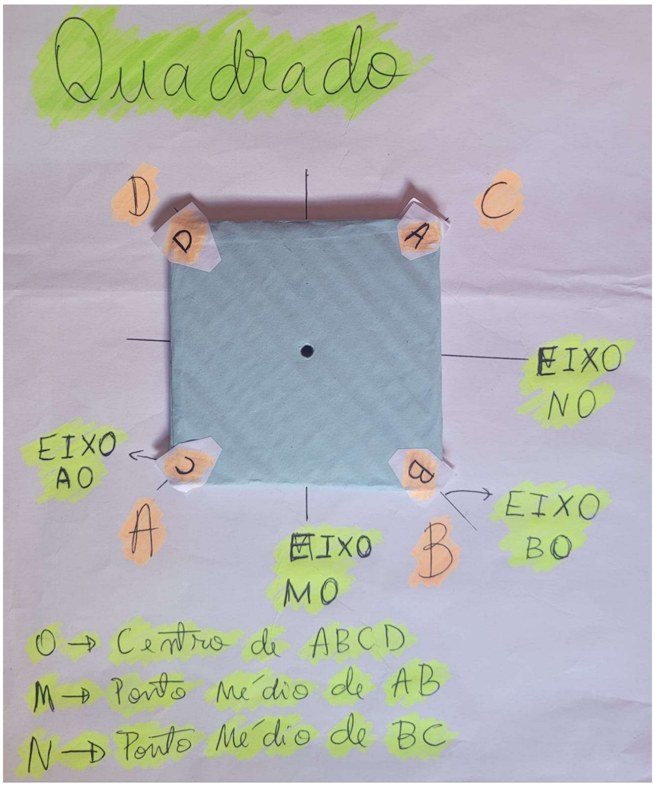


Figura 3.53: Posicionamento do quadrado após a segunda permutação

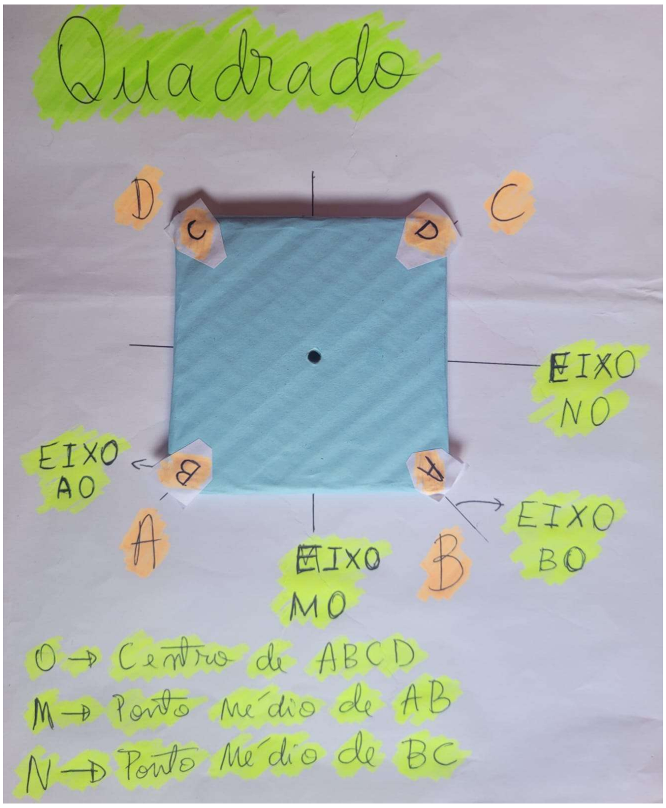


Figura 3.54: Posicionamento do quadrado após a terceira permutação

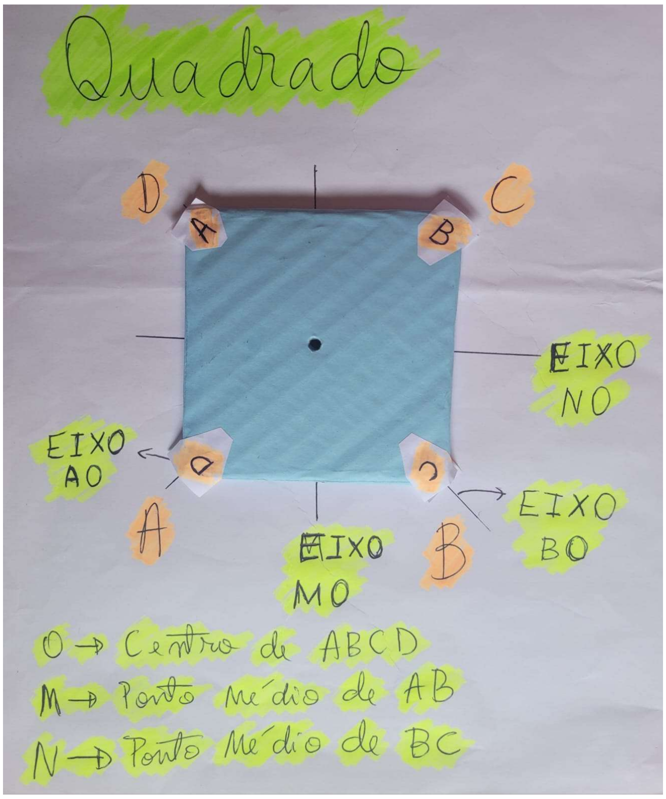


Figura 3.55: Posicionamento do quadrado após a quarta permutação

c) Considerando um pentágono regular, associe cada reflexão em torno de um eixo de simetria com alguma permutação dos vértices A, B, C, D e E.

Resposta: Seja o ponto O o centro do pentágono. Temos que:

(i) a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A fica fixo, B vira E, C vira D, D vira C e E vira B;

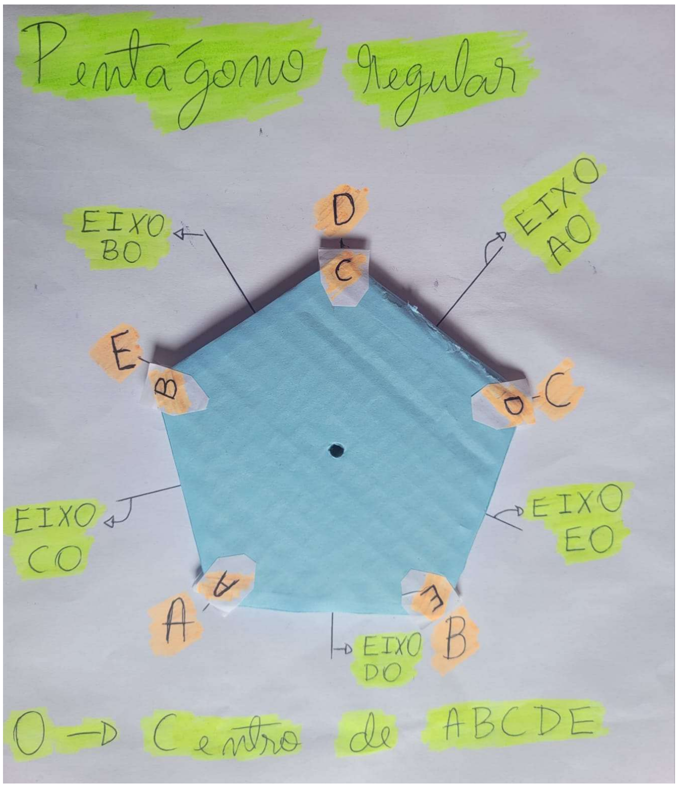


Figura 3.56: Posicionamento do pentágono após a primeira permutação

(ii) a reflexão em torno do eixo BO está associada à permutação em que B fica fixo, A vira C, C vira A, D vira E e E vira D;

(iii) a reflexão em torno do eixo CO está associada à permutação em que C fica fixo, A vira E, B vira D, D vira B e E vira A;

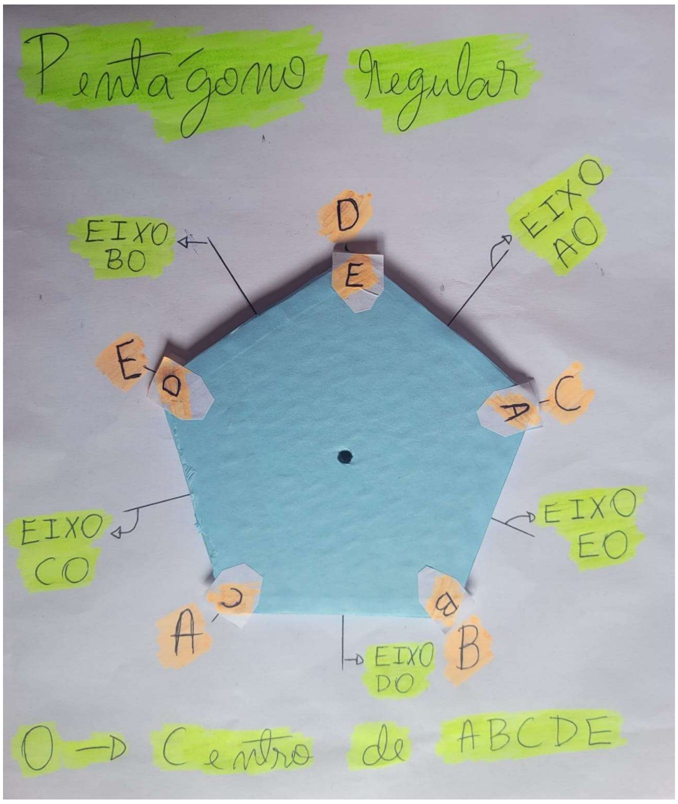


Figura 3.57: Posicionamento do pentágono após a segunda permutação

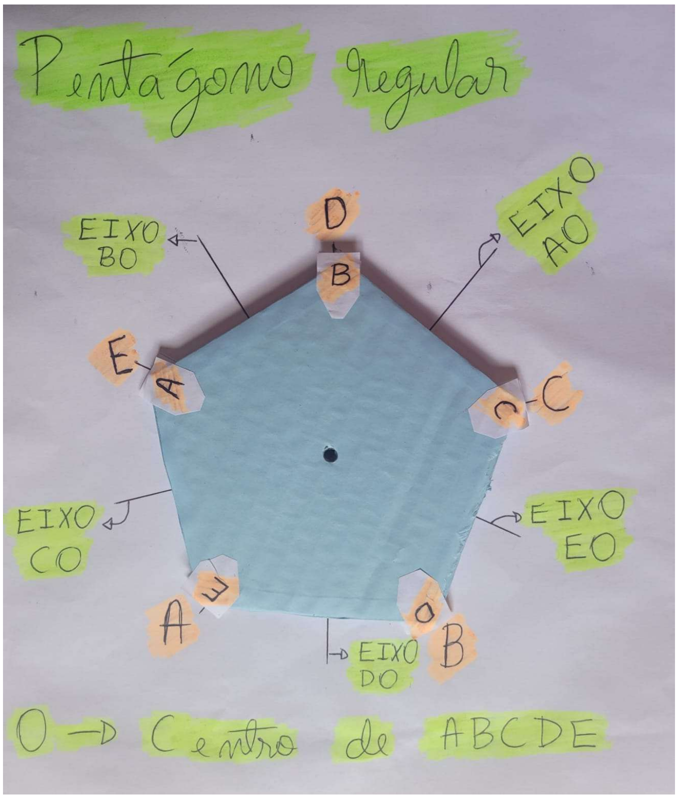


Figura 3.58: Posicionamento do pentágono após a terceira permutação

(iv) a reflexão em torno do eixo DO está associada à permutação em que D fica fixo, A vira B, B vira A, C vira E e E vira C;

(v) a reflexão em torno do eixo EO está associada com a permutação em que E fica fixo, A vira D, B vira C, C vira B e D vira A.

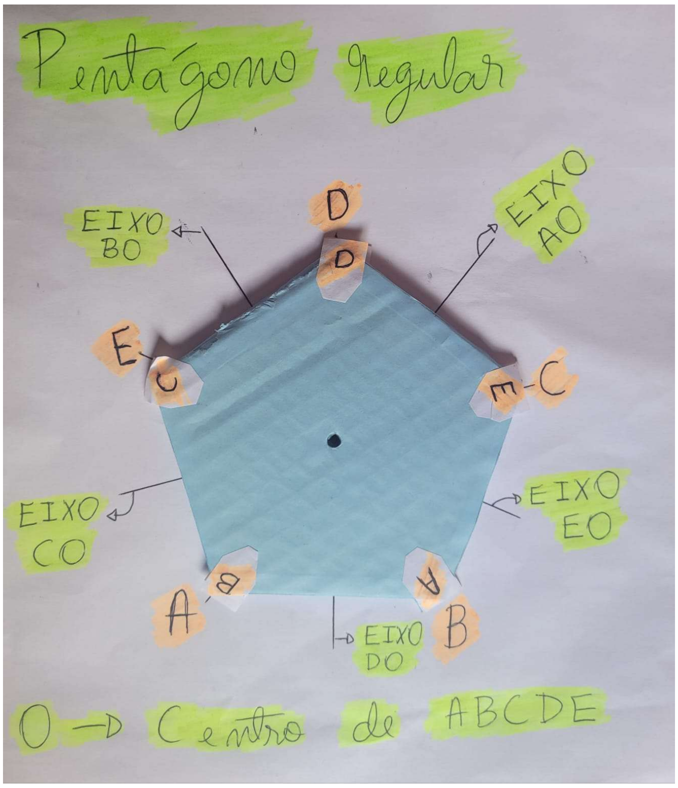


Figura 3.59: Posicionamento do pentágono após a quarta permutação

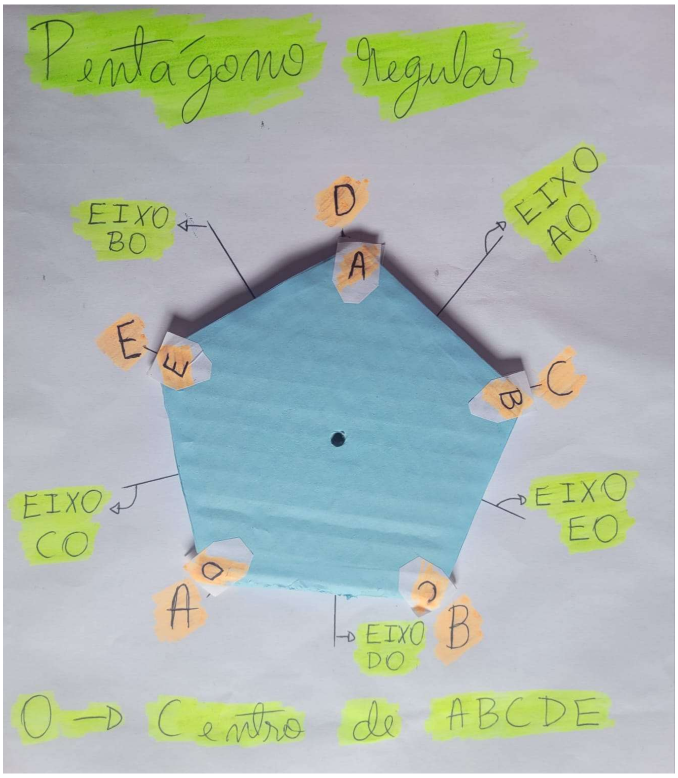


Figura 3.60: Posicionamento do pentágono após a quinta permutação

d) Considerando um hexágono regular, associe cada reflexão em torno de um eixo de simetria com alguma permutação dos vértices A, B, C, D, E e F.

Resposta: Sejam o ponto O o centro do hexágono, M o ponto médio de AB, N o ponto médio de BC e P o ponto médio de CD. Temos que:

(i) a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A e D ficam fixos, B vira F, C vira E, E vira C e F vira B;

(ii) a reflexão em torno do eixo BO está associada à permutação em que B e E ficam fixos, A vira C, C vira A, D vira F e F vira D;

(iii) a reflexão em torno do eixo CO está associada à permutação em que C e F ficam fixos, A vira E, B vira D, D vira B e E vira A;

(iv) a reflexão em torno do eixo MO está associada à permutação em que A vira B, B vira A, C vira F, D vira E, E vira D e F vira C;

(v) a reflexão em torno do eixo NO está associada com a permutação em que A vira D, B vira C, C vira B, D vira A, E vira F e F vira E.

(vi) a reflexão em torno do eixo PO está associada com a permutação em que A vira F, B vira E, C vira D, D vira C, E vira B e F vira A.

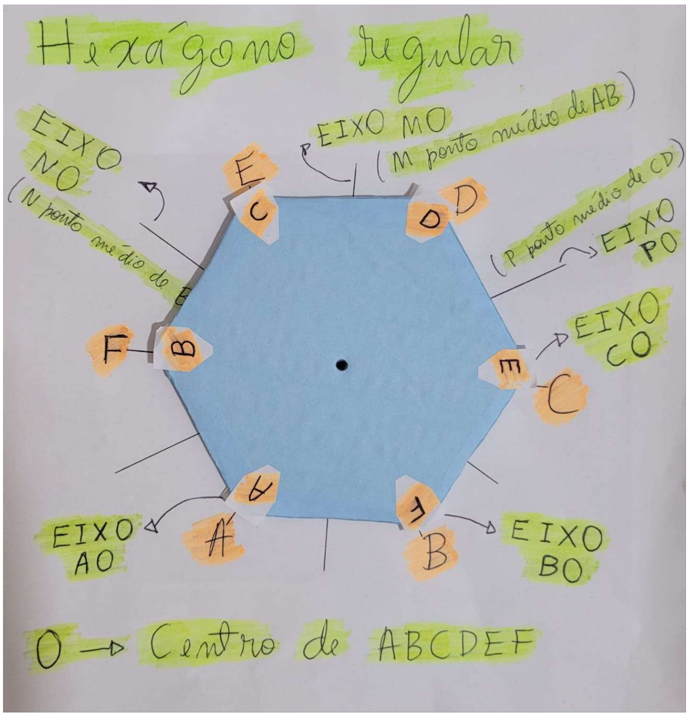


Figura 3.61: Posição dos vértices após a primeira reflexão

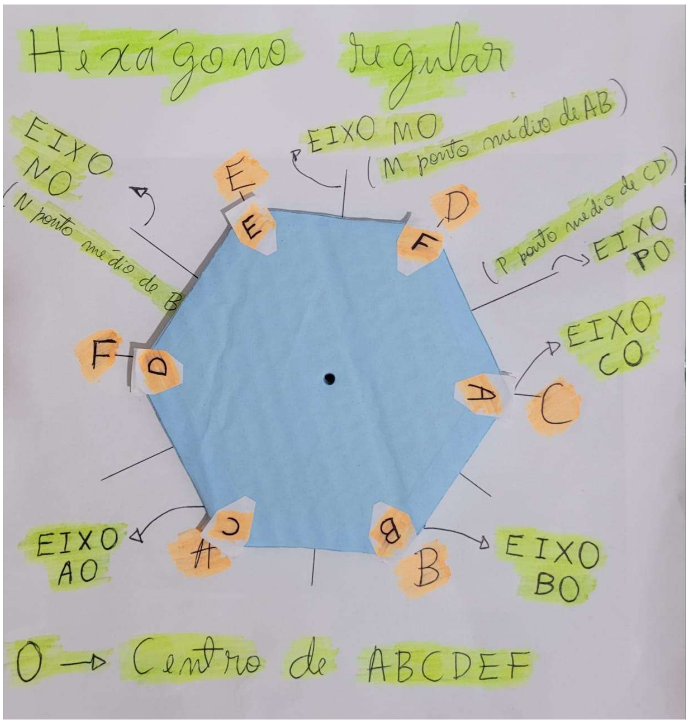


Figura 3.62: Posição dos vértices após a segunda reflexão

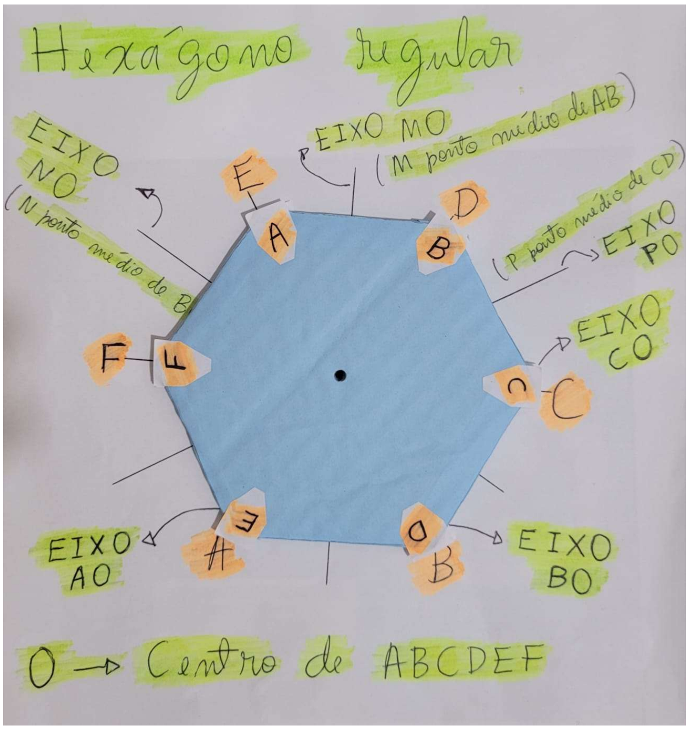


Figura 3.63: Posição dos vértices após a terceira reflexão

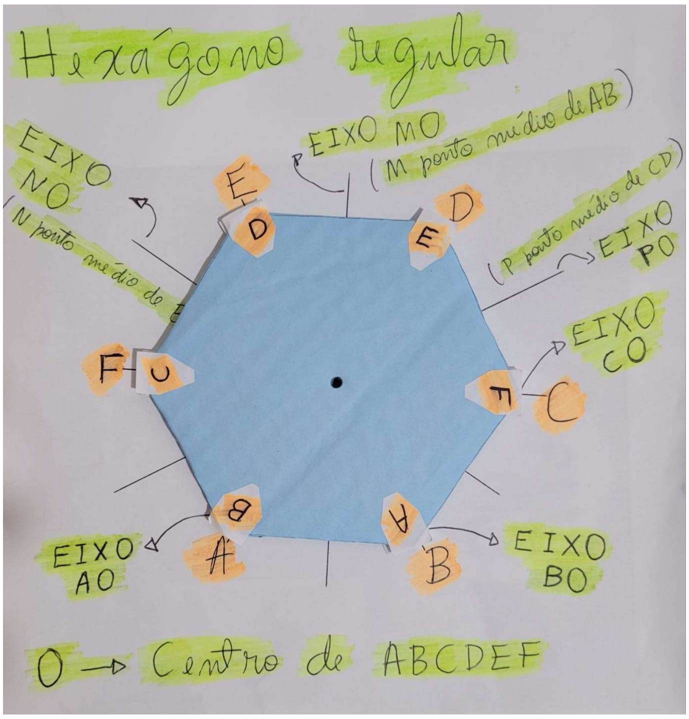


Figura 3.64: Posição dos vértices após a quarta reflexão

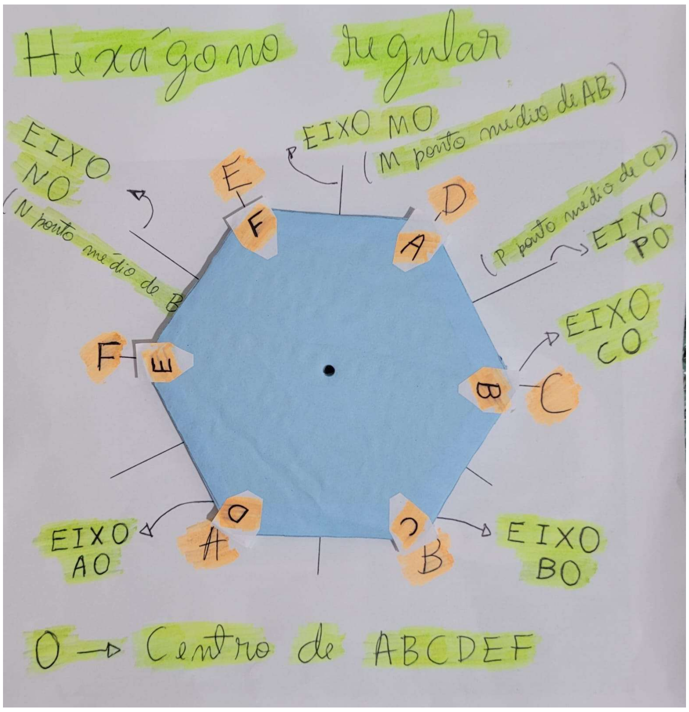


Figura 3.65: Posição dos vértices após a quinta reflexão

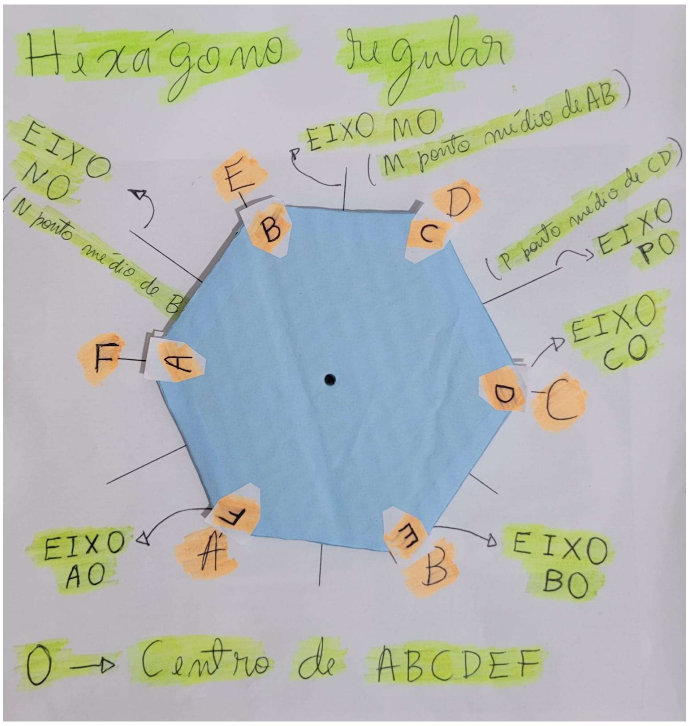


Figura 3.66: Posição dos vértices após a sexta reflexão

e) Verifique que são necessárias três rotações de 120° para o triângulo equilátero, quatro rotações de 90° para o quadrado e cinco de 72° para o pentágono retornarem para a posição inicial.

Resposta: De fato, após cada movimentação descrita no enunciado partido da posição inicial, observa-se que os polígonos retornam para a posição inicial.

f) Quantas rotações de 60° do hexágono regular seriam necessárias para que ele partindo da posição inicial na folha em branco retornasse para ela?

Resposta: Observando os padrões do item anterior fica fácil estimar que são necessários n movimentos de rotação com um ângulo de 360°/n para o polígono regular de n lados retornar à posição inicial. Particularmente, para o hexágono regular seriam necessárias 6 rotações de 60° para que ele retorne à posição inicial.

g) Verifique que realizando duas reflexões em torno de qualquer eixo de simetria dos polígonos regulares construídos o resultado é a posição inicial do polígono na folha.

Resposta: De fato, após realizar duas reflexões consecutivas em torno de qualquer eixo de simetria observa-se que o polígono retorna para a posição inicial.

3 - Considerando as composições entre as rotações em torno da origem no sentido anti-horário e as reflexões em torno de um eixo de simetria de um polígono regular, responda cada item a seguir.

a) Indique as permutações dos vértices do triângulo equilátero associadas às composições entre as rotações 120° e 240° e a reflexão em torno do eixo AO (sendo O o centro).

Resposta: Temos as seguintes associações:

(i) a composição entre a rotação de 120° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que B fica fixo, A vira C e C vira A;

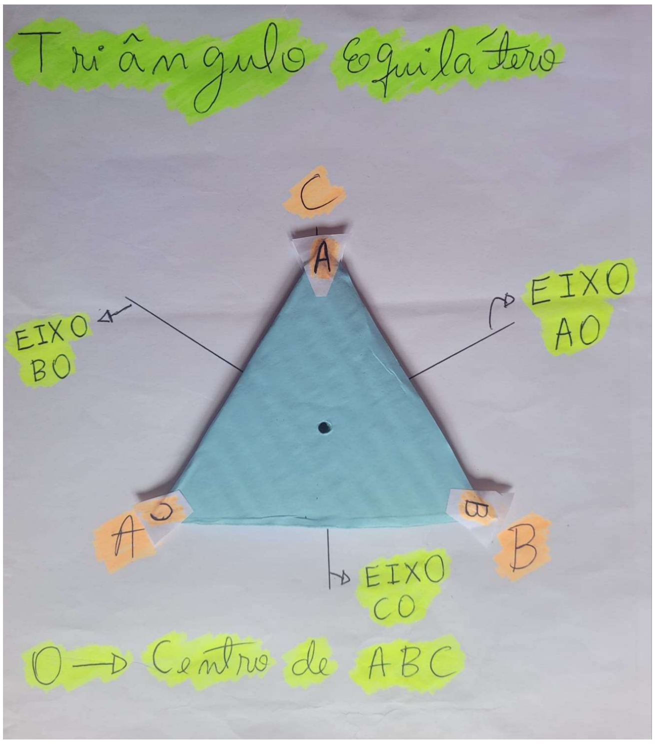


Figura 3.67: Triângulo após a composição da rotação com a reflexão

(ii) a composição entre a rotação de 240° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que C fica fixo, A vira B e B vira A.

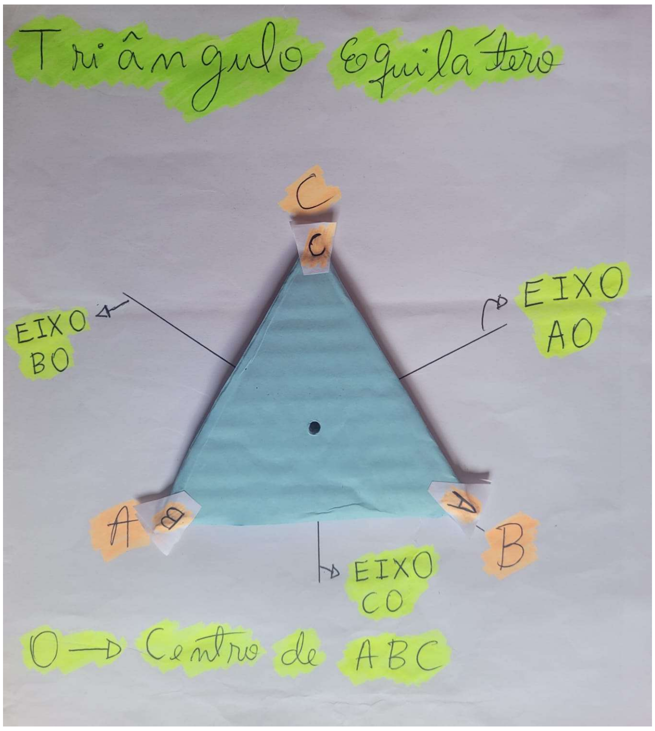


Figura 3.68: Triângulo após a composição da rotação com a reflexão

b) Faça uma associação entre as permutações dos vértices e a composição de rotações de 90°, 180° e 270° com a reflexão em torno do eixo AO (sendo O o centro).

Resposta: Temos as seguintes associações:

(i) a composição entre a rotação de 90° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A vira D, B vira C, C vira B e D vira A;

(ii) a composição entre a rotação de 180° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que B e D ficam fixos, A vira C e C vira A;

(iii) a composição entre a rotação de 180° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A

vira B, B vira A, C vira D e D vira C;

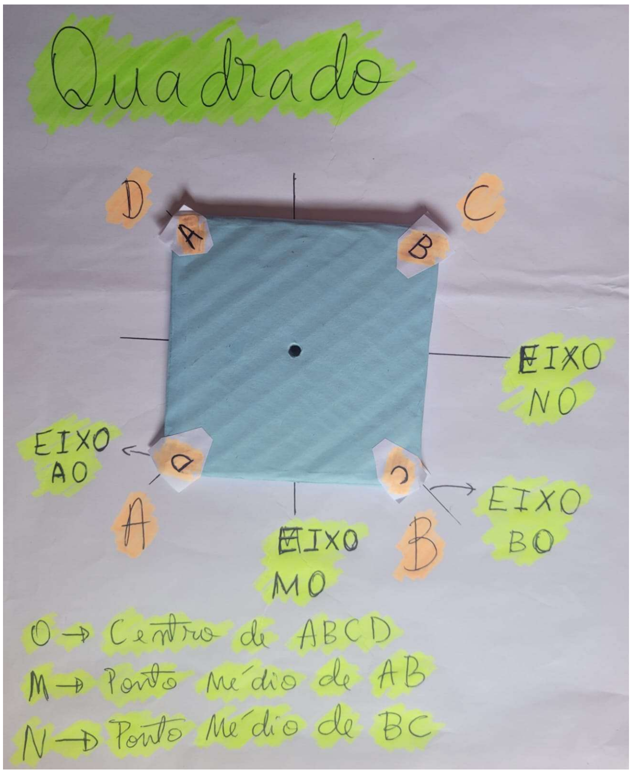


Figura 3.69: Posicionamento após a primeira composição no quadrado

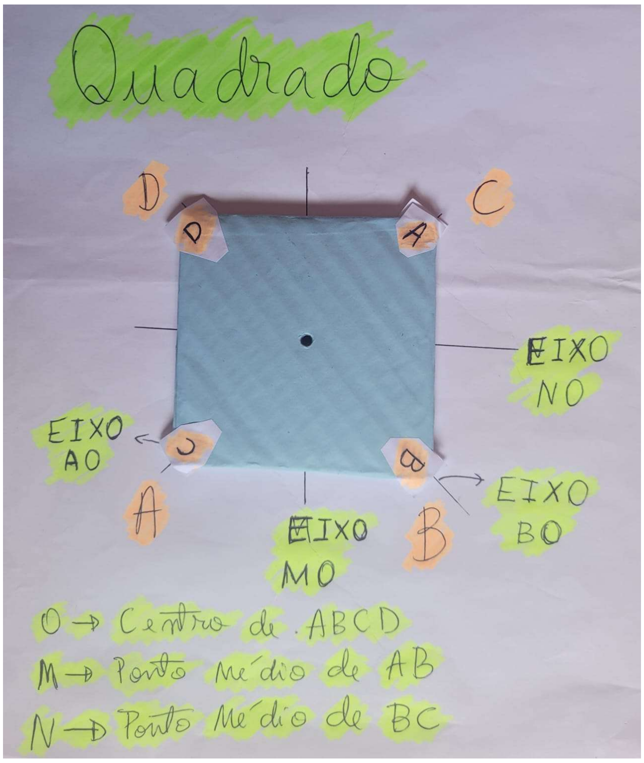


Figura 3.70: Posicionamento após a segunda composição no quadrado

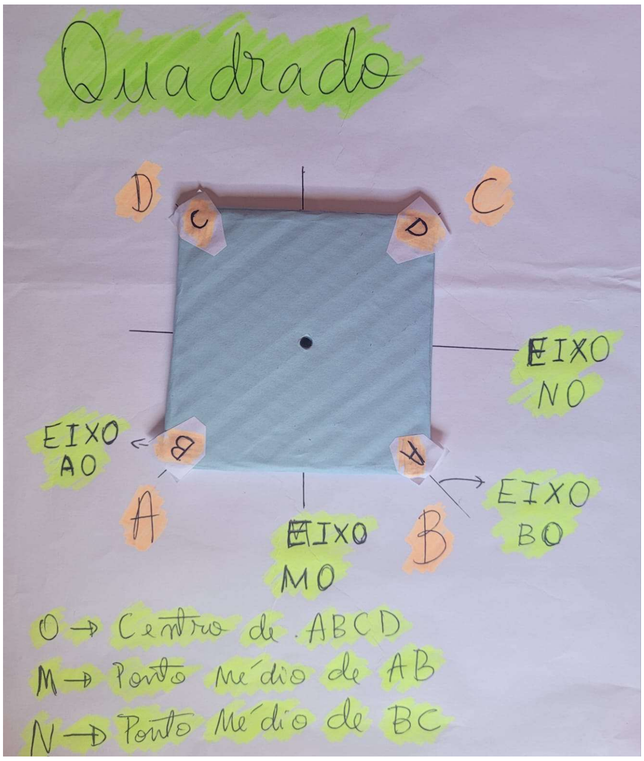


Figura 3.71: Posicionamento após a terceira composição do quadrado

c) Para um pentágono regular, determine as permutações dos vértices que estão associadas a cada composição de rotação de 72°, 144°, 216° e 288° com a reflexão em torno do eixo de simetria AO (sendo O o centro).

Resposta: Temos as seguintes associações:

(i) a composição entre a rotação de 72° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que C fica fixo, A vira E, B vira D, D vira B e E vira A;

(ii) a composição entre a rotação de 144° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que E fica fixo, A vira D, B vira C, C vira B, D vira A;

(iii) a composição entre a rotação de 216° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que B fica fixo, A vira C, C vira A, D vira E e E vira D;

(iv) a composição entre a rotação de 288° e a reflexão em

torno do eixo AO está associada à permutação em que D fica fixo, A vira B, B vira A, C vira E e E vira C;

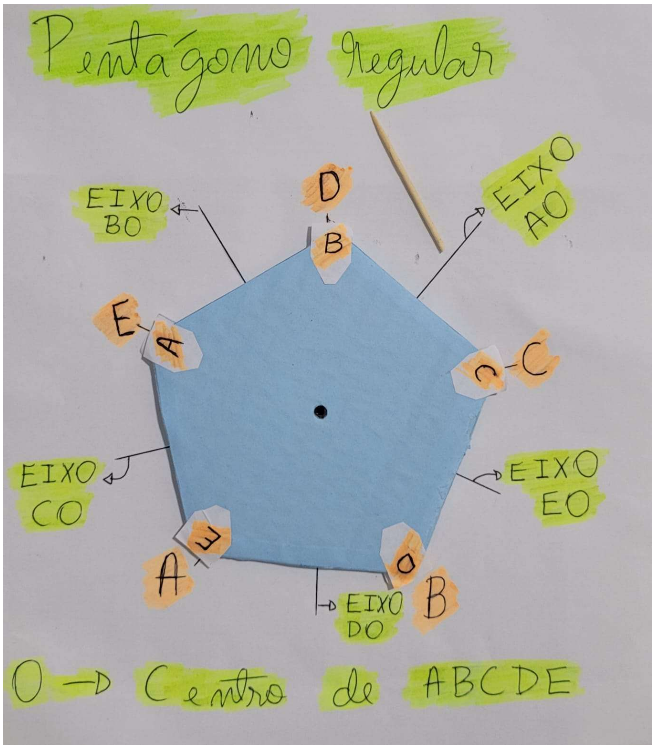


Figura 3.72: Posição dos vértices após a primeira composição

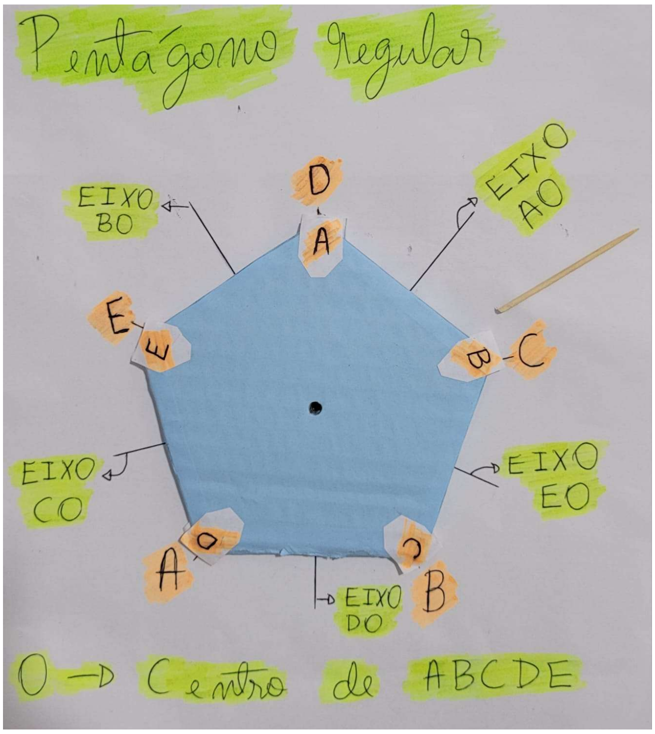


Figura 3.73: Posição dos vértices após a segunda composição

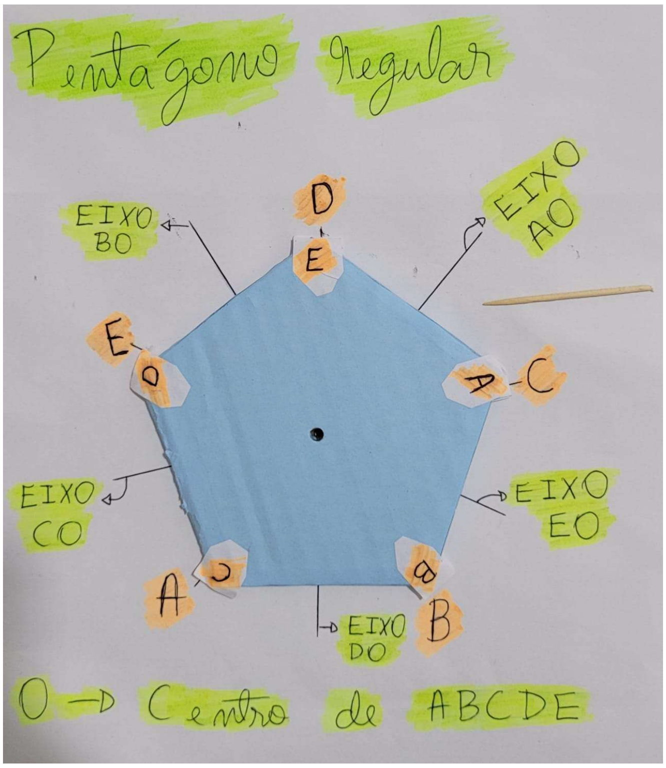


Figura 3.74: Posição dos vértices após a terceira composição

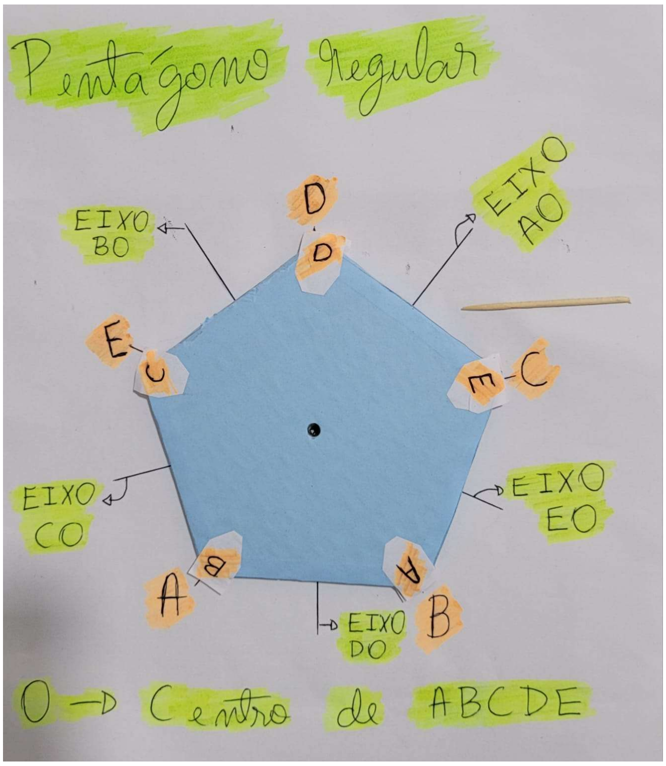


Figura 3.75: Posição dos vértices após a quarta composição

d) Para um hexágono regular, determine as permutações dos vértices que estão associadas a cada composição de rotação de 60°, 120°, 180°, 240° 300° com a reflexão em torno do eixo de simetria AO (sendo O o centro).

Resposta: Temos as seguintes associações:

(i) a composição entre a rotação de 60° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A vira F, B vira E, C vira D, D vira C e E vira B e F vira A;

(ii) a composição entre a rotação de 120° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que C e F ficam fixos, A vira E, B vira D, D vira B e E vira A;

(iii) a composição entre a rotação de 180° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A vira D, B vira C, C vira B, D vira A, E vira F e F vira E;

(iv) a composição entre a rotação de 240° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que B e E ficam fixos, A vira C, C vira A, D vira F e F vira D;

(v) a composição entre a rotação de 300° e a reflexão em torno do eixo AO está associada à permutação em que A vira B, B vira A, C vira F, D vira E, E vira D e F vira C;

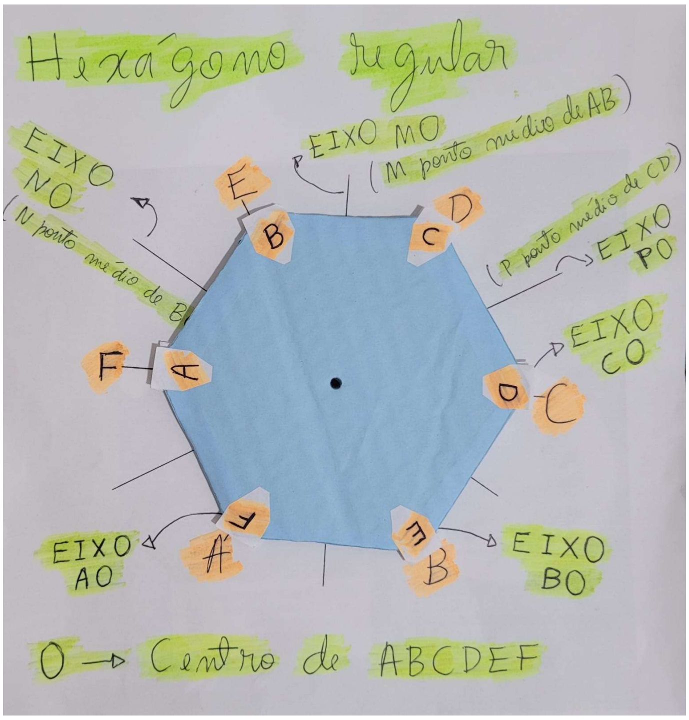


Figura 3.76: Posição dos vértices após a primeira composição

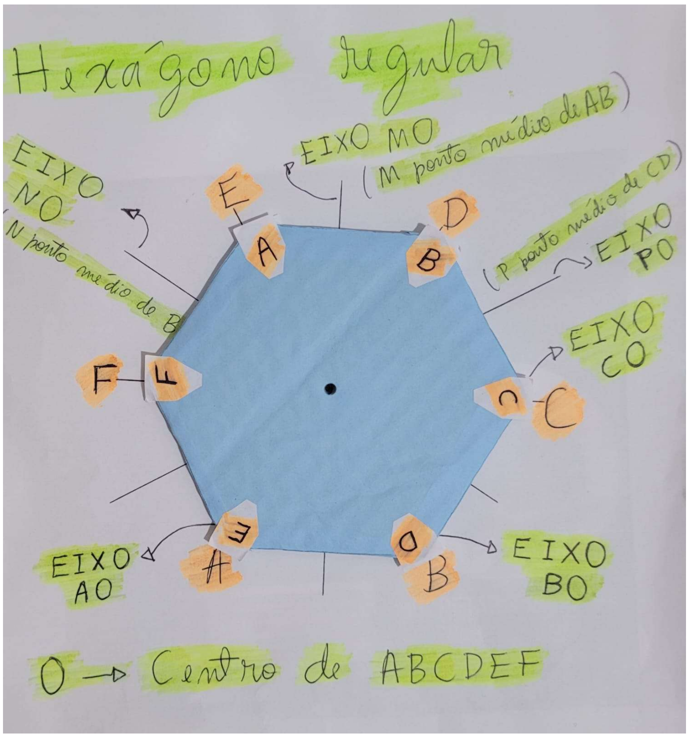


Figura 3.77: Posição dos vértices após a segunda composição

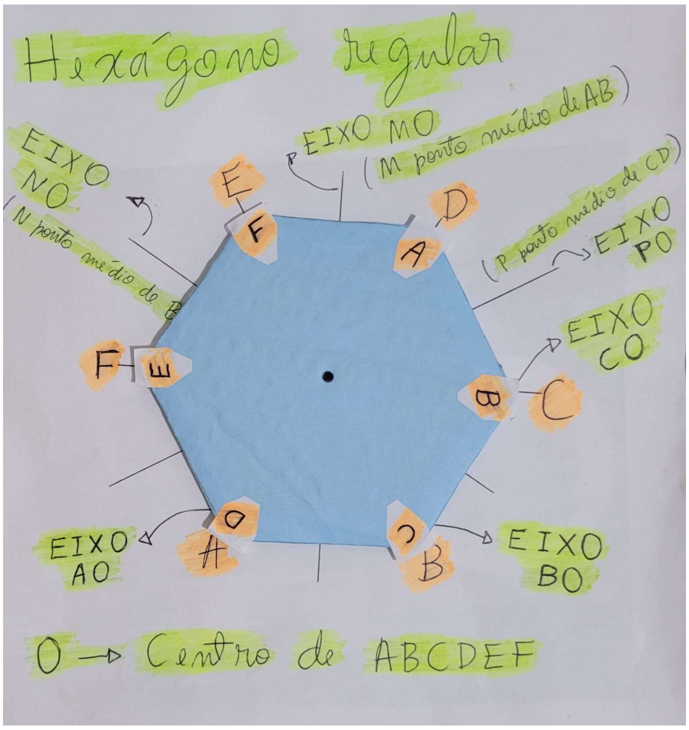


Figura 3.78: Posição dos vértices após a terceira composição

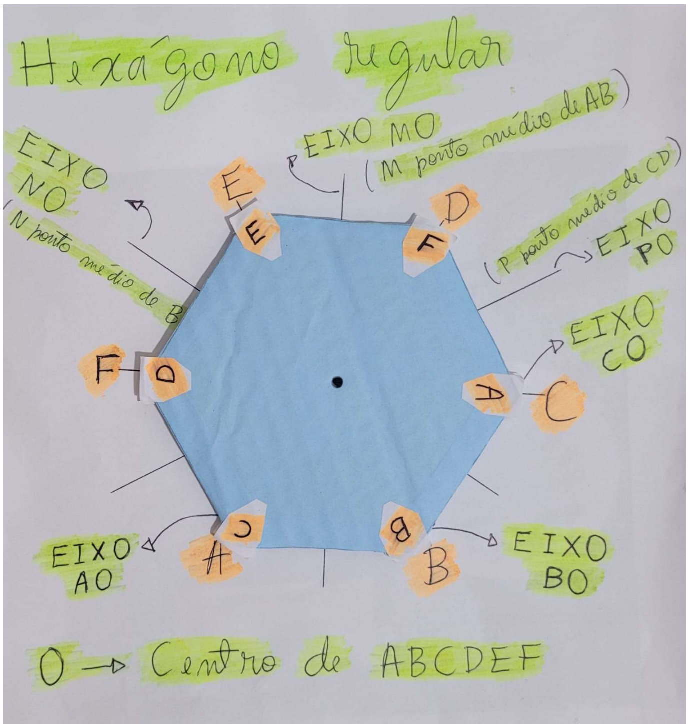


Figura 3.79: Posição dos vértices após a quarta composição

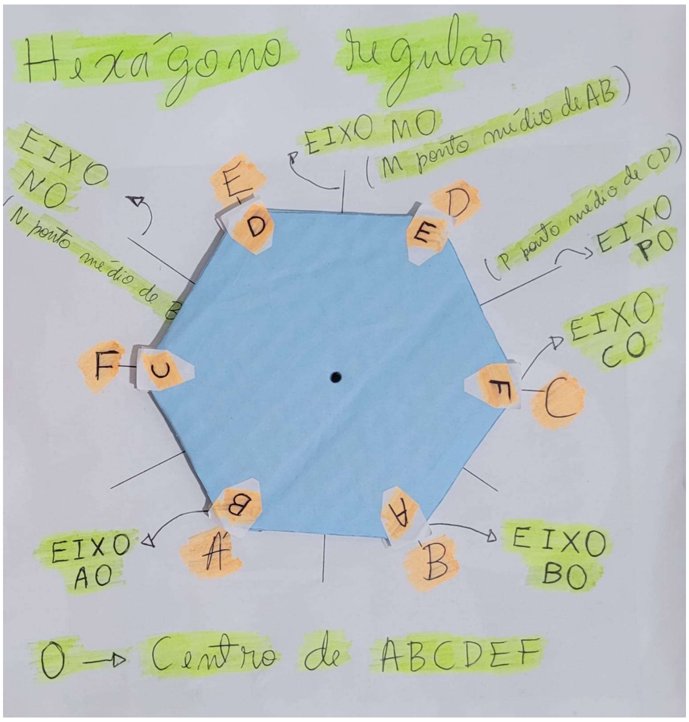


Figura 3.80: Posição dos vértices após a quinta composição

e) Considerando um triângulo equilátero, quantas permutações dos vértices são possíveis? É sempre possível associar uma permutação nesse caso com uma rotação, reflexão ou composição destas? Verifique.

Resposta: Como há três vértices (A, B e C), pode-se pensar em seis permutações de vértices possíveis. Nesse caso, todas as permutações estão associadas a alguma rotação, reflexão ou composição destas, conforme foi mostrado nas questões anteriores.

f) Quantas permutações há dos vértices de um quadrado? Todas elas podem ser identificadas com alguma rotação, reflexão ou composição destas? Verifique se a permutação em que C e D ficam fixos, A vira B e B vira A corresponde a alguma rotação, reflexão ou composição.

Resposta: Sabendo há quatro vértices (A, B, C e D), teremos 24 permutações possíveis. Usando o material ma-

nipulável é possível verificar que nenhuma isometria corresponde a essa permutação e isso mostra que nem toda permutação pode ser identificada com alguma rotação, reflexão ou composição.

g) Considerando agora um pentágono regular, determine o número de permutações dos vértices e verifique se a permutação em que B, D e E ficam fixos, A vira C e C vira A pode ser associada a alguma rotação, reflexão ou composição destas. Depois responda se é sempre possível associar uma permutação a alguma isometria.

Resposta: Como são cinco vértices (A, B, C, D e E), temos que há 120 permutações possíveis. Com o apoio do material manipulável é possível verificar que a permutação indicada no enunciado não corresponde a nenhuma isometria, logo nem toda permutação poderá ser identificada com uma rotação, reflexão ou composição.

4 - Julgue as afirmações a seguir como verdadeira ou falsa, considerando os seus conhecimentos sobre rotações (em relação ao centro no sentido anti-horário) e reflexões (em torno de um eixo de simetria) de polígonos regulares. Caso a afirmativa seja falsa, escreva o enunciado correspondente que está correto.

a) Se forem realizadas duas rotações de 120° em um triângulo equilátero e depois for realizada uma reflexão em torno do eixo de simetria AO, a posição do triângulo será idêntica caso a ordem seja invertida, ou seja, reflexão (mesmo eixo) seguida de duas rotações de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: ( ) Verdadeiro (x) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é falsa.

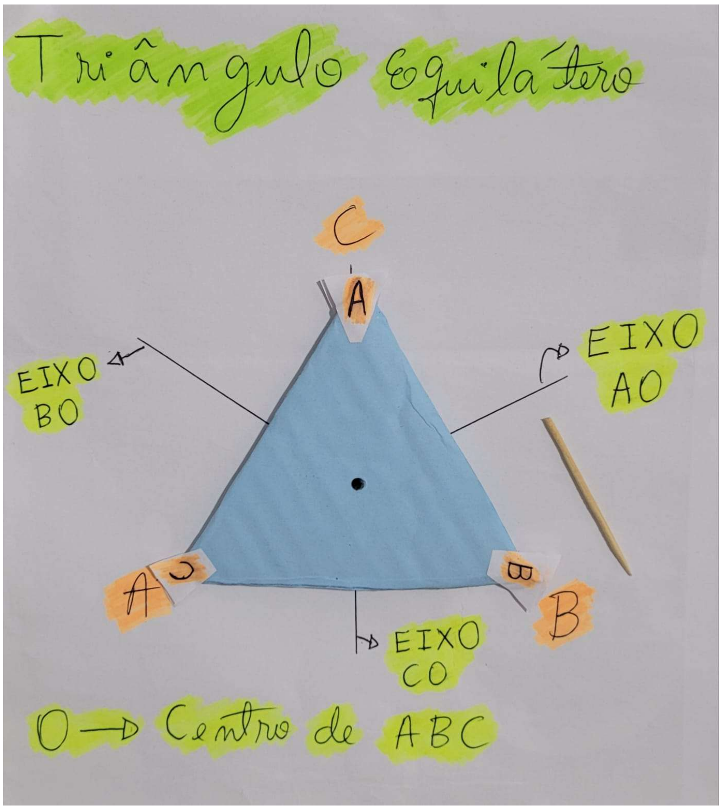


Figura 3.81: Posição do triângulo após reflexão seguida de dupla rotação

b) Para um quadrado, vale que duas rotações de 90° seguido de uma reflexão (em torno de AO) resulta na mesma posição que uma reflexão (mesmo eixo) seguida de duas rotações de 90°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é verdadeira.

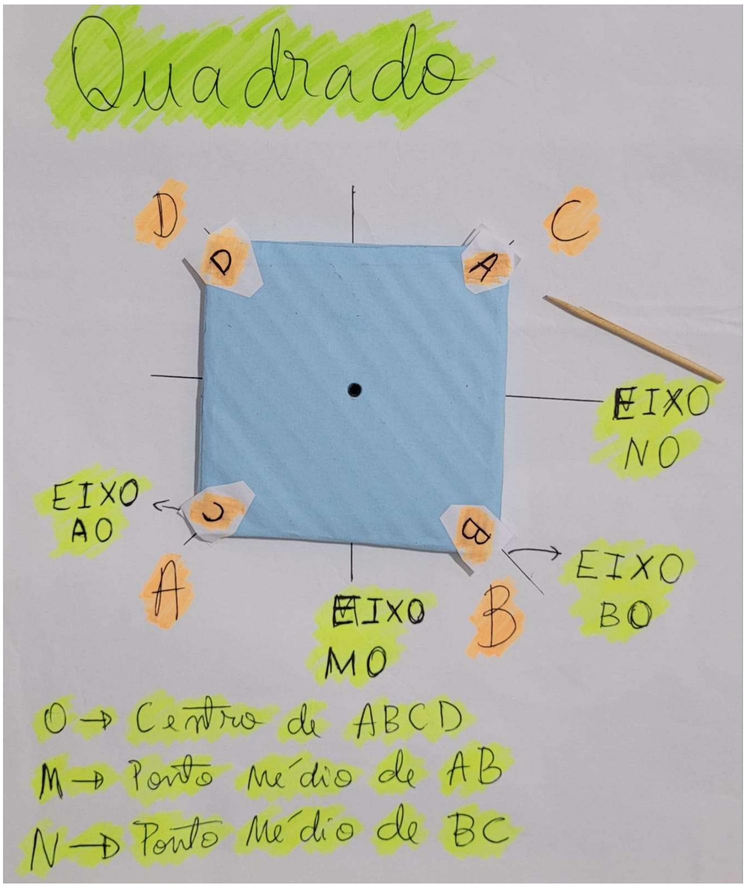


Figura 3.82: Posição do quadrado após qualquer das duas composições citadas

c) Fazendo duas rotações de 72° e depois uma reflexão (em torno de AO) em um pentágono regular, obtém-se a mesma posição de uma reflexão seguida de duas rotações de 72°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: ( ) Verdadeiro (x) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é falsa.

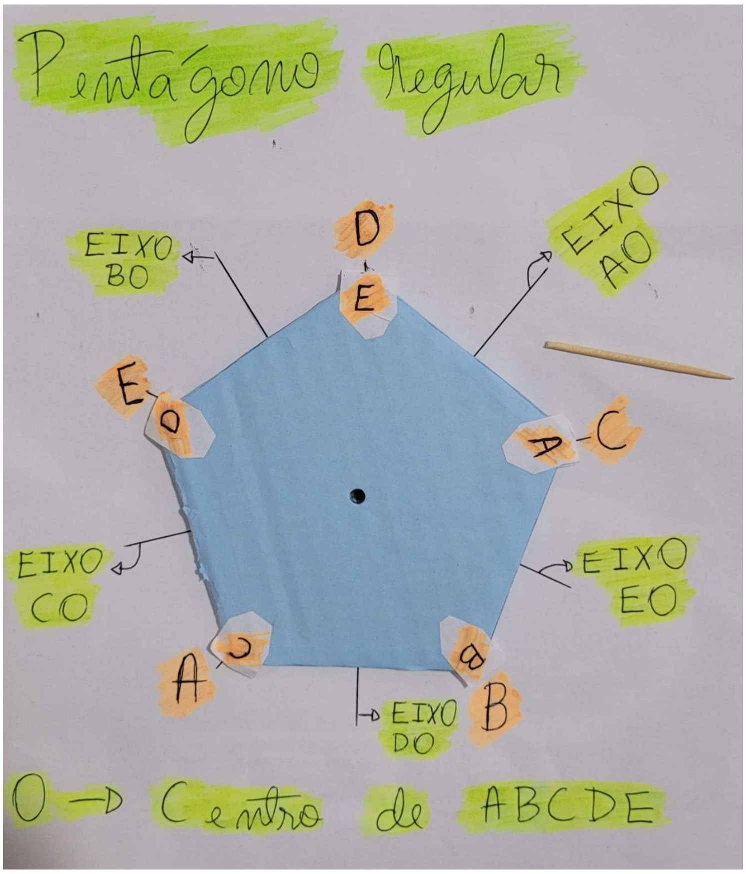


Figura 3.83: Posição do pentágono após reflexão seguida de dupla rotação

d) Fazendo duas rotações de 120° e depois uma reflexão em torno do eixo de simetria AO de um triângulo equilátero, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é verdadeira.

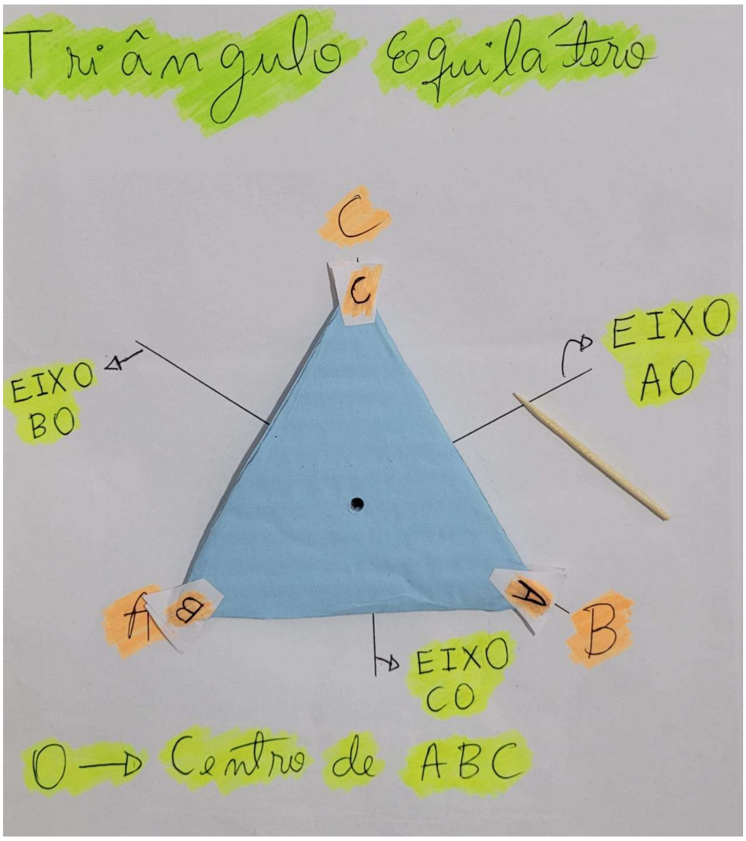


Figura 3.84: Posição do triângulo após qualquer das duas composições

e) Fazendo três rotações de 90° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um triângulo quadrado, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 90°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é verdadeira.

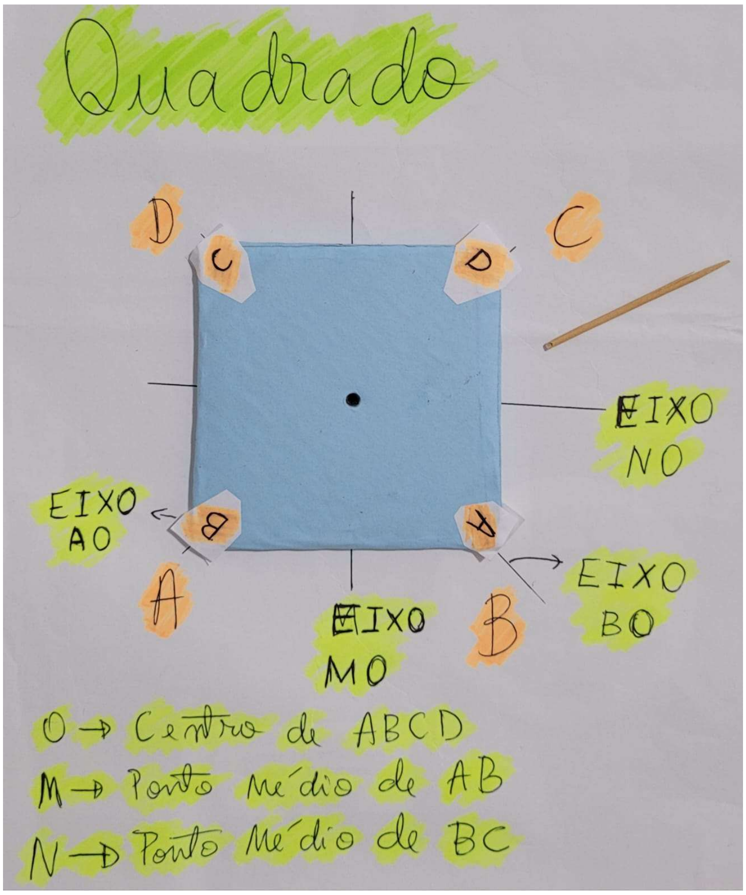


Figura 3.85: Posição do quadrado após qualquer das duas composições

f) Fazendo quatro rotações de 72° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um pentágono regular, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 72°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: (x) Verdadeiro ( ) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é verdadeira.

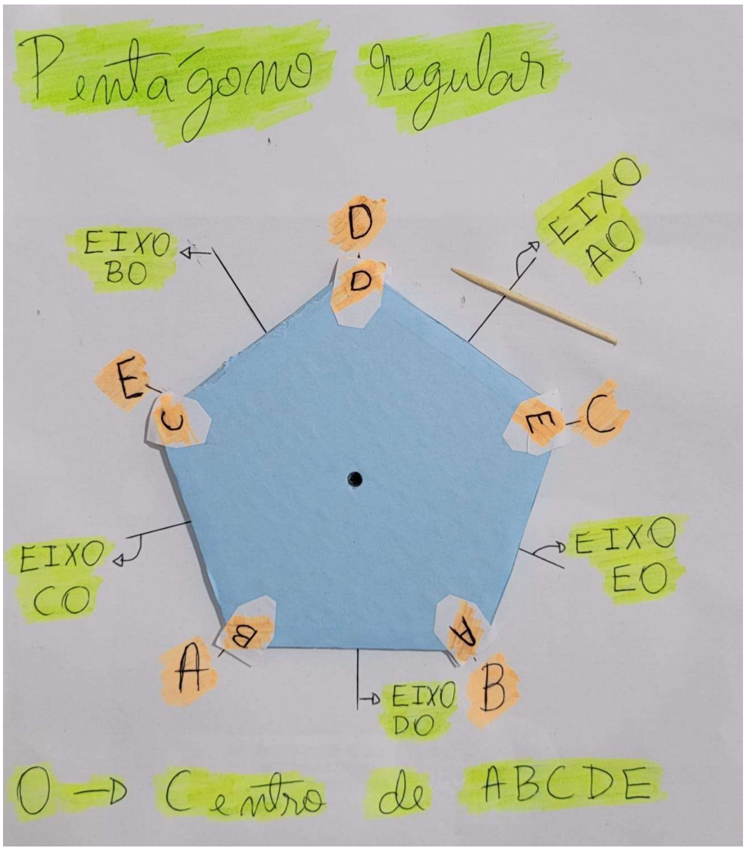


Figura 3.86: Posição do pentágono após qualquer das duas composições

g) Fazendo cinco rotações de 60° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um hexágono regular, a posição final será diferente caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Resposta: ( ) Verdadeiro (x) Falso

Comparando a posição final das duas composições, observa-se que a afirmação é verdadeira.

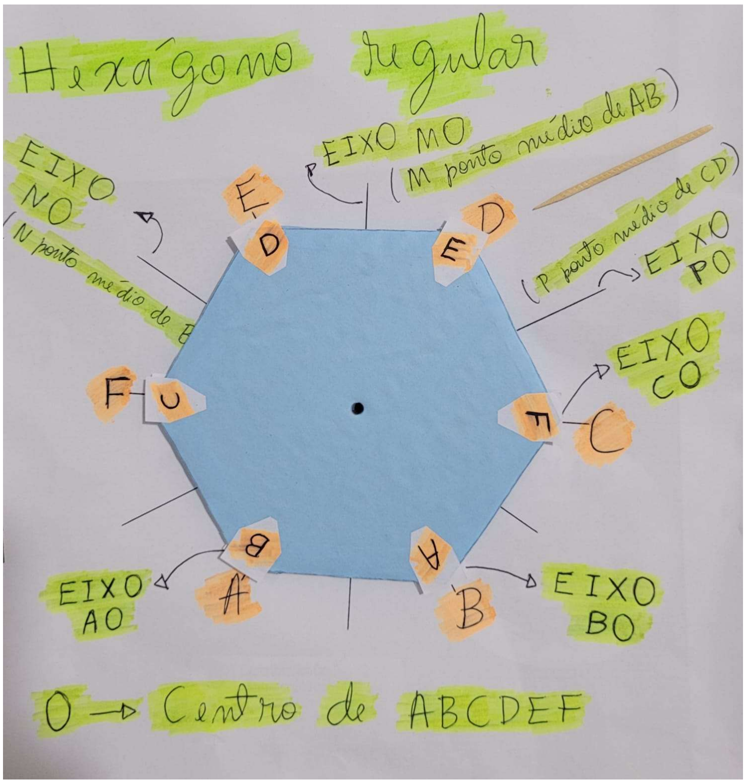


Figura 3.87: Posição do hexágono após qualquer das duas composições

5 - Considerando as rotações dos polígonos regulares em torno do centro no sentido anti-horário e a reflexão em torno dos eixos de simetria, responda os itens a seguir.

a) Fixando um eixo de reflexão e realizando rotações de 120° no triângulo equilátero, indique quantas configurações posicionais distintas existem após a aplicação de rotações, reflexões e composições destas. Esboce as configurações distintas representando as variações de posição dos vértices nos desenhos.

Resposta: Usando os polígonos construídos (material manipulável), pode-se verificar que há três rotações (0°, 120° e 240°), uma reflexão (em torno de AD) e duas composições (rotações de 120° e 240° com a reflexão), gerando no total seis configurações distintas. Qualquer outra reflexão ou composição invertendo a ordem gera uma configuração igual a alguma delas.

b) Esboce todas as configurações posicionais distintas e indique quantas existem após a aplicação de rotações, reflexões e composições destas em quadrados, sendo as rotações de 90° e o eixo de reflexão fixo.

Resposta: Com o uso do material manipulável, pode-se verificar que há quatro rotações (0°, 90°, 180° e 270°), uma reflexão (em torno do eixo AE) e três composições (rotações de 90°, 180° e 270° com a reflexão), totalizando oito configurações possíveis. É verificável, ainda, que qualquer outra reflexão ou composição com ordem invertida gera uma das oito configurações já listadas.

c) Aplicando rotações de 72° e mantendo um eixo de reflexão fixo em um pentágono regular, represente por meio de desenhos todas as configurações de rotações, reflexões e composição destas e indique quantas representações distintas existem.

Resposta: Por meio do material manipulável, pode-se verificar que há cinco rotações (0°, 72°, 144°, 216° e 288°), uma reflexão (em torno do eixo AF) e quatro composições (rotações de 72°, 144°, 216° e 288° com a reflexão), gerando m, total de dez configurações. Além disso, é fácil verificar que qualquer outra reflexão ou composição com ordem invertida gera uma das oito configurações já listadas.

d) Observe o total de configurações distintas que existem ao realizarmos rotações de 60°, reflexões (eixo fixo) e composições destas em um hexágono regular. Represente por meio de desenhos e indique quantas configurações distintas existem neste caso.

Resposta: Novamente com o uso do material manipulável, é possível verificar que há seis rotações (0°, 60°, 120°, 180°, 240° e 300°), uma reflexão (em torno de AH, sendo H o

centro) e cinco composições (rotações de 60°, 120°, 180°, 240° e 300° com a reflexão), gerando um total de doze configurações. Aplicando-se outras reflexões e alterando a ordem das composições os resultados obtidos são iguais aos já listados

e) Quantas configurações distintas você acredita que existem após a aplicação de rotações de (360°/n), reflexões (eixo fixo) e composições destas para um polígono regular de n lados?

Resposta: Observando os padrões nos itens anteriores, é possível estimar que haverá n rotações ((360°/n)i, para todo i = 0, 1, ..., n - 1), uma reflexão em torno de um eixo de simetria e n - 1 composições (as rotações (360°/n)i, para todo i = 1, 2, ..., n - 1 com a reflexão), totalizando 2n configurações possíveis.

Considerações finais

O objetivo principal do trabalho desenvolvido é permitir que alunos do ensino médio tenham a oportunidade de conhecer um objeto muito importante dentro da teoria de grupos sem que haja a necessidade do uso da linguagem formal e abstrata da álgebra. Além disso, percebeu-se a oportunidade de explorar objetos do conhecimento que fazem parte do currículo previsto para o ensino médio e que são pouco explorados na prática de sala de aula. Diante desse cenário, foi construída uma sequência didática que envolveu conhecimentos a respeito de polígonos regulares, isometrias (principalmente rotações e reflexões) e um pouco de análise combinatória (permutação). O conjunto de atividades permitiu que os alunos participantes conhecessem os grupos de isometrias de um polígono regular (ou grupos diedrais) de forma subjacente e só discutindo sobre objetos previstos no seu currículo escolar. A sequência didática mostrou-se também uma oportunidade para diversificar as ferramentas de ensino, pois foram muito úteis e pertinentes a tecnologia com a utilização de softwares matemáticos e a ludicidade com o uso dos materiais manipuláveis, possibilitando que os alunos aprendam de forma variada, considerando a estrutura de aula costumeiramente realizada em sala com mera exposição de conteúdos.

Referências Bibliográficas

[1] ANAIS DO I CONGRESSO DE CIÊNCIA, EDUCAÇÃO E PESQUISA TECNOLÓGICA, 2015, Brasília. ELABORAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ENSINAR BOTÂNICA, UTILIZANDO O ENFOQUE DA PESQUISA DIRIGIDA, 2016.

[2] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. *Elementos de álgebra.* Rio de Janeiro: Impa, 2001.

[3] LIMA, Elon Lages. Isometrias. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, c1996. 94 p. (Coleção do professor de matemática, 12).

[4] MILNE, J. S. *Group Theory.* Version, 1996.

[5] ROTMAN, Joseph J. *An Introduction to the Theory of Groups.* Springer Science & Business Media, 2012.

[6] ROCHA, Saimon. GRUPO DIEDRAL INFINITO: DEFINIÇÃO, PROPRIEDADES E SUBGRUPOS. Orientador: Kisnney Emiliano de Almeida. 2016. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2016.

CAPÍTULO 4

APÊNDICES

APÊNDICE A

Questionário da atividade 5 da sequência didática

1 - Considere os seus conhecimentos a respeito de rotações de um polígono regular e responda as perguntas a seguir.

a) Realizando três rotações de 120° no sentido anti-horário de triângulo equilátero em torno de seu centro obtém-se uma posição diferente da inicial? Explique.

b) Após a aplicação de quatro rotações de 90° no sentido anti-horário de um quadrado em torno de seu centro obtém-se uma posição diferente da inicial? Explique.

c) Com qual ângulo, com cinco rotações em torno de seu centro, um pentágono regular retornaria para a posição inicial?

d) A partir dos casos anteriores, como você faria para encontrar o ângulo de rotação e o número mínimo de rotações para um polígono regular de n lados?

2 - A respeito das reflexões e dos eixos de simetria de um polígono regular, responda os itens a seguir.

a) Determine todos os eixos de simetria de um triângulo equilátero e depois indique o número mínimo de reflexões em torno de cada um deles para o triângulo retornar para a posição inicial.

b) Quantos eixos de simetria um quadrado possui? Quantas reflexões em torno de cada um deles são necessárias para que ele retorne para a posição inicial?

c) O que você pensa a respeito do número de eixos de simetria de um pentágono? E sobre as reflexões em torno de cada um deles? (Dica: considere o número de lados do polígono regular e os casos anteriores)

3 - Julgue as afirmativas a seguir como verdadeiras ou falsas.

a) Em um triângulo equilátero é possível, com apenas uma reflexão em torno do eixo de simetria g: BD, posicionar o triângulo de maneira idêntica à posição que teria após uma rotação de 120° no sentido anti-horário em torno do centro D, seguida de uma reflexão em torno do eixo f: AD.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

b) Fazendo duas rotações sucessivas de 120° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão de em torno do eixo f: AD, não seria possível com apenas uma reflexão em torno do eixo h: CD, posicionar o triângulo equilátero ABC de formas idênticas.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

c) Para um triângulo equilátero, uma rotação de 120° no sentido anti-horário em torno da origem equivale a alguma reflexão em torno de um eixo de simetria e duas rotações sucessivas (nas mesmas condições da anterior) resulta no mesmo posicionamento gerado por outra reflexão feita em torno de outro eixo.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

d) Para um quadrado após realizar uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguida de uma reflexão em torno do eixo de simetria f: AE, é possível determinar um outro eixo de simetria que resulta na mesma posição após uma única reflexão em torno dele.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

e) Duas rotações sucessivas de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão em torno do eixo f: AE gera a mesma posição do quadrado obtido de uma reflexão em torno do eixo i: BD.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

f) Três rotações sucessivas de 90° no sentido anti-horário em torno do centro, seguido de uma reflexão em torno do eixo f: AE gera a mesma posição do quadrado obtido de uma reflexão em torno do eixo h: ME.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

APÊNDICE B

Questionário da atividade 6 da sequência didática

1 - Considerando as rotações no sentido anti-horário em torno do centro do polígono, as reflexões em torno dos eixos de simetria e usando os polígonos construídos na aula anterior, responda os itens a seguir.

a) Qual ângulo de rotação no sentido anti-horário em torno do centro determinaria uma rotação equivalente a uma permutação dos vértices A, B e C do triângulo equilátero, fazendo com que o vértice A vire o B, o B vire o C e o C vire o A? E qual seria o ângulo que geraria uma rotação equivalente à permutação dos vértices em que A vira C, B vira A e C vira B?

b) Qual ângulo de rotação no sentido anti-horário em torno do centro desenvolveria uma rotação idêntica a uma permutação dos vértices A, B, C e D do quadrado, em que o vértice A vira o B, o B vira o C, o C vira o D e o D vira o A? E o ângulo da rotação idêntica à permutação em que A vira C, B vira D, C vira A e D vira B? Qual seria o ângulo de rotação que geraria uma rotação idêntica à permutação em que A vira D, B vira A, C vira B e D vira C?

c) No caso do pentágono regular, qual ângulo de rotação geraria uma rotação correspondente à permutação dos vértices A, B, C, D e E fazendo A virar B, B virar C, C virar, D virar E e E virar A? Qual seria o ângulo para a rotação que corresponderia à permutação em que A vira C, B vira D, C vira E, D vira A e E vira B? E o ângulo para a rotação corresponder à permutação em que A vira D, B vira E, C vira A, D vira B e E vira C? Determine também o ângulo em que a rotação corresponde à permutação em que A vira E, B vira A, C vira B, D vira C e E vira D.

d) O que ocorre com o posicionamento de cada um dos vértices dos polígonos regulares após uma rotação cujo ângulo é igual a 360° dividido pelo número de lados do polígono?

e) Considerando os itens anteriores verifique quais permutações dos vértices correspodem às rotações de 60°, 120°, 180°, 240° e 300° no hexágono regular.

2 - Usando os materiais construídos na atividade inicial e aplicando os seus conhecimentos sobre rotações e reflexões de polígonos regulares, faça o que for pedido em cada item a seguir.

a) No triângulo equilátero, indique o eixo de simetria em torno do qual deve ser realizada uma reflexão para que a posição final seja equivalente a uma permutação dos vértices em que A fica fixo, B vira C e C vira B. Indique também a rotação em que B fica fixo, A vira C e C vira e a outra em que C fica fixo, A vira B e B vira A.

b) Associe no quadrado as reflexões em torno dos eixos de simetria com as permutações dos vértices A, B, C e D. Realize cada reflexão e observe como cada vértice muda de posição.

c) Considerando um pentágono regular, associe cada reflexão em torno de um eixo de simetria com alguma permutação dos vértices A, B, C, D e E.

d) Considerando um hexágono regular, associe cada reflexão em torno de um eixo de simetria com alguma permutação dos vértices A, B, C, D, E e F.

e) Verifique que são necessárias três rotações de 120° para o triângulo equilátero, quatro rotações de 90° para o quadrado e cinco de 72° para o pentágono retornarem para a posição inicial.

f) Quantas rotações de 60° do hexágono regular seriam necessárias para que ele partindo da posição inicial na folha em branco retornasse para ela?

g) Verifique que realizando duas reflexões em torno de qualquer eixo de simetria dos polígonos regulares construídos o resultado é a posição inicial do polígono na folha.

3 - Considerando as composições entre as rotações em torno da origem no sentido anti-horário e as reflexões em torno de um eixo de simetria de um polígono regular, responda cada item a seguir.

a) Indique as permutações dos vértices do triângulo equilátero associadas às composições entre as rotações 120° e 240° e a reflexão em torno do eixo AO (sendo O o centro).

b) Faça uma associação entre as permutações dos vértices e a composição de rotações de 90°, 180° e 270° com a reflexão em torno do eixo AO (sendo O o centro).

c) Para um pentágono regular, determine as permutações dos vértices que estão associadas a cada composição de rotação de 72°, 144°, 216° e 288° com a reflexão em torno do eixo de simetria AO (sendo O o centro).

d) Para um hexágono regular, determine as permutações dos vértices que estão associadas a cada composição de rotação de 60°, 120°, 180°, 240° 300° com a reflexão em torno do eixo de simetria AO (sendo O o centro).

e) Considerando um triângulo equilátero, quantas permutações dos vértices são possíveis? É sempre possível associar uma permutação nesse caso com uma rotação, reflexão ou composição destas? Verifique.

f) Quantas permutações há dos vértices de um quadrado? Todas elas podem ser identificadas com alguma rotação, reflexão ou composição destas? Verifique se a permutação em que C e D ficam fixos, A vira B e B vira A corresponde a alguma rotação, reflexão ou composição.

g) Considerando agora um pentágono regular, determine o número de permutações dos vértices e verifique se a permutação em que B, D e E ficam fixos, A vira C e C vira A pode ser associada a alguma rotação, reflexão ou composição destas. Depois responda se é sempre possível associar uma permutação a alguma isometria.

4 - Julgue as afirmações a seguir como verdadeira ou falsa, considerando os seus conhecimentos sobre rotações (em relação ao centro no sentido anti-horário) e reflexões (em torno de um eixo de simetria) de polígonos regulares. Caso a afirmativa seja falsa, escreva o enunciado correspondente que está correto.

a) Se forem realizadas duas rotações de 120° em um triângulo equilátero e depois for realizada uma reflexão em torno do eixo de simetria AO, a posição do triângulo será idêntica caso a ordem seja invertida, ou seja, reflexão (mesmo eixo) seguida de duas rotações de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

b) Para um quadrado, vale que duas rotações de 90° seguido de uma reflexão (em torno de AO) resulta na mesma posição que uma reflexão (mesmo eixo) seguida de duas rotações de 90°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

c) Fazendo duas rotações de 72° e depois uma reflexão (em torno de AO) em um pentágono regular, obtém-se a mesma posição de uma reflexão seguida de duas rotações de 72°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

d) Fazendo duas rotações de 120° e depois uma reflexão em torno do eixo de simetria AO de um triângulo equilátero, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

e) Fazendo três rotações de 90° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um triângulo quadrado, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 90°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

f) Fazendo quatro rotações de 72° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um pentágono regular, a posição final será a mesma caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 72°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

g) Fazendo cinco rotações de 60° e depois um reflexão em torno do eixo de simetria AO de um hexágono regular, a posição final será diferente caso seja a aplicada primeiro a reflexão (mesmo eixo) seguida de apenas uma rotação de 120°.

( ) Verdadeiro ( ) Falso

5 - Considerando as rotações dos polígonos regulares em torno do centro no sentido anti-horário e a reflexão em torno dos eixos de simetria, responda os itens a seguir.

a) Fixando um eixo de reflexão e realizando rotações de 120° no triângulo equilátero, indique quantas configurações posicionais distintas existem após a aplicação de rotações, reflexões e composições destas. Esboce as configurações distintas representando as variações de posição dos vértices nos desenhos.

b) Esboce todas as configurações posicionais distintas e indique quantas existem após a aplicação de rotações, reflexões e composições destas em quadrados, sendo as rotações de 90° e o eixo de reflexão fixo.

c) Aplicando rotações de 72° e mantendo um eixo de reflexão fixo em um pentágono regular, represente por meio de desenhos todas as configurações de rotações, reflexões e composição destas e indique quantas representações distintas existem.

d) Observe o total de configurações distintas que existem ao realizarmos rotações de 60°, reflexões (eixo fixo) e composições destas em um hexágono regular. Represente por meio de desenhos e indique quantas configurações distintas existem neste caso.

e) Quantas configurações distintas você acredita que existem após a aplicação de rotações de (360°/n), reflexões (eixo fixo) e composições destas para um polígono regular de n lados?