Gabriel Moreno Vascon

Os Números de Narayana via Números Triangulares

Orientadora:
Profª. Dra. Irene Magalhães Craveiro

Dourados - MS
Abril de 2025

Gabriel Moreno Vascon

Os Números de Narayana via Números Triangulares

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFGD como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Irene Magalhães Craveiro.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Comissão Examinadora:

Profª. Dra. Irene Magalhães Craveiro (UFGD - Orientadora)
Profª. Dra. Vanderléa Rodriguês (UFGD - Membro titular interno)
Profª. Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico (UEMS - Membro titular externo)

Dourados - MS
Abril de 2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

V331n Vascon, Gabriel Moreno
Os Números de Narayana via Números Triangulares [recurso eletrônico] / Gabriel Moreno Vascon. -- 2025.
Arquivo em formato pdf.

Orientador: Irene Magalhães Craveiro.
Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2025.
Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:
https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio

1. Números de Narayana. 2. Números Triangulares. 3. Números Binomiais. I. Craveiro, Irene Magalhães. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Ministério da Educação
Universidade Federal da Grande Dourados
PROPP - Pró-Reitoria de Ensino de Pós-Graduação e Pesquisa

ATA DA DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE MESTRADO APRESENTADO POR GABRIEL MORENO VASCON, ALUNO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL , ÁREA DE CONCENTRAÇÃO "ENSINO DE MATEMÁTICA".

Aos vinte e cinco dias do mês de abril do ano de dois mil e vinte e cinco, às treze horas, em sessão pública, realizou-se na Universidade Federal da Grande Dourados, a Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado intitulado **"Os Números de Narayana via Números Triangulares"**, apresentado pelo mestrando Gabriel Moreno Vascon, do Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, à Banca Examinadora constituída pelos membros: Prof.ª Dr.ª Irene Magalhaes Craveiro/UFGD (presidente/orientadora), Prof.ª Dr.ª Vanderlea Rodrigues Bazao/UFGD (membro titular interno), Prof.ª Dr.ª Elen Viviani Pereira Spreafico/UFMS (membro titular externo). Iniciados os trabalhos, a presidência deu a conhecer ao candidato e aos integrantes da banca as normas a serem observadas na apresentação do Trabalho de Conclusão de Curso. Após o candidato ter apresentado o seu Trabalho de Conclusão de Curso, os componentes da Banca Examinadora fizeram suas arguições. Terminada a Defesa, a Banca Examinadora, em sessão secreta, passou aos trabalhos de julgamento, tendo sido o candidato considerado __APROVADO________. Nada mais havendo a tratar, lavrou-se a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Dourados/MS, 25 de abril de 2025.

gov.br Documento assinado digitalmente IRENE MAGALHAES CRAVEIRO Data: 29/04/2025 17:45:53-0300 Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Irene Magalhaes Craveiro
Presidente/orientadora

gov.br Documento assinado digitalmente VANDERLEA RODRIGUES BAZAO Data: 30/04/2025 08:43:40-0300 Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Vanderlea Rodrigues Bazao
Membro Titular Interno

gov.br Documento assinado digitalmente ELEN VIVIANI PEREIRA SPREAFICO Data: 29/04/2025 21:57:14-0300 Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Elen Viviani Pereira Spreafico
Membro Titular Externo

Dedico esta dissertação com imensa gratidão aos meus pais, cujos ensinamentos, apoio incondicional e amor me sustentaram em todos os momentos desta jornada.

Agradecimentos

Agradeço aos meus colegas de curso, Suelen e Rômulo, que compartilharam comigo desafios, conquistas e muito aprendizado, contribuindo para meu crescimento pessoal e acadêmico. Também expresso meu sincero reconhecimento para todos os professores, que com sua dedicação e paixão pelo ensino, inspiraram e ampliaram meu horizonte de conhecimento. Por fim, agradeço profundamente à minha orientadora, Prof.ª Dra. Irene Magalhães Craveiro, cuja orientação, paciência e apoio foram fundamentais para a realização deste trabalho. Sem o apoio de todos vocês, esta conquista não seria possível.

"O que sabemos é uma gota;
o que ignoramos é um oceano."
Isaac Newton

Resumo

Esta dissertação investiga os números de Narayana definidos a partir dos números triangulares. O trabalho explora as propriedades algébricas e combinatórias desses números, destacando sua expressão por meio dos coeficientes binomiais e sua conexão com os números de Catalan e os números triangulares, revelando relações profundas na combinatória enumerativa e na teoria dos números. Além disso, o estudo discute a importância desses conceitos na formação do pensamento combinatório, evidenciando sua relevância pedagógica no contexto da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), que enfatiza a resolução de problemas. Ao integrar teoria, histórico e potencial didático, esta pesquisa contribui para uma compreensão aprofundada dos números de Narayana e dos números triangulares, propondo novas perspectivas para o ensino e a aplicação desses conceitos em diversas áreas da matemática.

Palavras-chave: Números de Narayana; Números Triangulares; Números de Catalan.

Abstract

This master thesis investigates the Narayana numbers defined in terms of triangular numbers. The research explores the algebraic and combinatorial properties of these numbers, emphasizing their expression through binomial coefficients and their connection with Catalan numbers and triangular numbers, thereby revealing profound links in enumerative combinatorics and number theory. In addition, the study discusses the importance of these concepts in developing combinatorial thinking, highlighting their pedagogical relevance within the context of the National Common Curricular Base (BRASIL, 2018), which emphasizes problem-solving. By integrating theory, history, and pedagogical potential, this research contributes to a deeper understanding of the Narayana numbers and triangular numbers, offering new perspectives for the teaching and application of these concepts in various areas of mathematics.

Keywords: Narayana Numbers; Triangular Numbers; Catalan Numbers.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 INTRODUÇÃO

A presente dissertação tem como objetivo explorar os números de Narayana a partir de sua relação intrínseca com os números triangulares. De acordo com (BREMMER, 2018), inicialmente, os números de Narayana foram introduzidos e estudados pelo matemático britânico Percy Alexander MacMahon (1854-1929) para, posteriormente, serem redescobertos pelo matemático e estatístico Indo-Canadense Tadepalli Venkata Narayana (1930-1987).

A relevância dos números de Narayana transcende o âmbito puramente teórico, pois eles apresentam estreita conexão com os coeficientes binomiais, aparecendo naturalmente como multiplicadores na expansão $(a + b)^n$, onde a e b são números reais e n é um número natural (DMITRY; VLADIMIR; YURIY, 2022); (CALLAN, 2017); (SIVARAMAN, 2020a). Essa relação revela, por um lado, a riqueza das identidades algébricas que podem ser demonstradas tanto combinatoriamente quanto por métodos puramente algébricos, e, por outro, a profunda ligação entre as estruturas de contagem e as representações geométricas dos números figurados.

Além disso, a dissertação se propõe a discutir a conexão entre os números de Narayana e os números de Catalan – estes últimos descobertos, entre outros, por Leonhard Euler (1707–1783) e posteriormente estudados pelo matemático belga Eugene Charles Catalan (1814–1894) – evidenciando que tais sequências numéricas compartilham propriedades combinatórias similares.

Os números de Catalan possuem aplicações em diversas áreas da matemática, entre essas estão a Geometria, a Álgebra, a Análise e, principalmente, a Combinatória, fonte de estudo da maioria dos trabalhos envolvendo tais números. Uma dessas aplicações estabelece uma relação entre o número central de Narayana e os números de Catalan.

Outro conceito fundamental para o estudo dos números de Narayana é o de números triângulares, uma vez que esses números são utilizados para definir os números de Narayana e várias propriedades são demonstradas a partir dessa definição.

Este trabalho se propõe a apresentar os números de Narayana a partir dos números triangulares e apresentar algumas identidades para os números de Narayana similares a identidades que envolvem o conceito de número binomial, assim como conexões com os números de Catalan.

De forma complementar, este estudo também reflete sobre a importância dos conceitos combinatórios na educação, conforme preconizado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nesse sentido, enfatiza-se que a incorporação de temas como números binomiais e triangulares no ensino não apenas fortalece o pensamento matemático dos estudantes, mas também os prepara para enfrentar desafios complexos de forma criativa e lógica, integrando teoria e prática em contextos reais.

Em suma, ao integrar elementos históricos, teóricos e pedagógicos, o trabalho busca contribuir para uma compreensão mais abrangente dos números de Narayana, elucidando suas propriedades e potencialidades, e propondo novas perspectivas para o ensino e a aplicação desses conceitos em diversas áreas da matemática.

2 OS NÚMEROS BINOMIAIS

Os números binomiais, representados pela notação $\binom{n}{k}$, desempenham um papel fundamental na matemática, especialmente em áreas como combinatória, álgebra, probabilidade e teoria dos números. Na análise combinatória, eles são usados para calcular o número de maneiras de escolher k elementos de um conjunto com n elementos sem considerar a ordem, o que é essencial para resolver problemas de contagem. Ademais, os números binomiais aparecem no desenvolvimento do Teorema Binomial, cujo resultado descreve uma identidade que expande expressões algébricas da forma $(a+b)^n$. Tais resultados também possuem aplicações práticas em campos como a estatística, a computação e a criptografia, onde o entendimento de combinações e probabilidades é crucial. Por meio dessas aplicações, os números binomiais fornecem uma ferramenta poderosa para analisar e resolver problemas complexos em diferentes contextos.

Neste capítulo serão vistos conceitos e propriedades importantes dos números binomiais que têm relação ou que serão aplicadas no estudo dos números de Narayana.

2.1 Os números binomiais: definição e propriedades

De acordo com (BARROS, 2021), os números binomiais ou coeficientes binomiais representam a quantidade de escolhas de k elementos entre n elementos distintos. A leitura desta notação é: combinação de n termos tomados k a k, onde n representa a ordem e k a classe do número binomial, com $n \geq k$ e $n, k \in \mathbb{N}$. Desse modo, temos a seguinte definição:

Definição 2.1 *Sejam $n, k \in \mathbb{Z}$ com $n \geq k \geq 0$, então*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

. No caso de ser $k > n$, define-se $\binom{n}{k} = 0$.

Segue da definição acima que

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = n,$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Dentre os principais resultados que envolvem números binomiais está a relação de Stifel, obtida pela matemático alemão Michael Stifel (1487 - 1567) (CRUZ, 2022). Tal relação pode ser entendida como uma fórmula recursiva para a obtenção dos números que formam o triângulo de Pascal, tópico que será abardado mais adiante. No teorema abaixo é apresentada essa famosa relação.

Teorema 2.2 *Sejam $n, k \geq 0$ inteiros com $n \geq k$, vale que*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Demonstração: Aplicando a Definição 2.1, temos

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

A relação de Stifel, juntamente com o Princípio da Indução Finita (LIMA, 2004), são utilizados para demonstrar que os números $\binom{n}{k}$ são sempre inteiros, sendo n, k inteiros positivos e $n \geq k$. Caso seja $n < k$, já foi visto que $\binom{n}{k} = 0$. Observe o teorema abaixo.

Teorema 2.3 *Sejam $n, k \geq 0$ inteiros com $n \geq k$, então $\binom{n}{k}$ é um número inteiro.*

Demonstração: Vamos utilizar o Segundo Princípio da Indução Finita para mostrar que $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$. Para $k = 0$, temos que $\binom{n}{k} = \binom{n}{0} = 1$ é um número inteiro.

Suponha que $\binom{n}{k} = t_k$ é um número inteiro para todo k natural com $0 \leq k \leq n$, isto é, os números

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}$$

são todos inteiros. Queremos provar que $\binom{n+1}{k}$ é inteiro. Segue do Teorema 2.2 que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Como $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{k-1}$ são inteiros por hipótese de indução, segue que $\binom{n+1}{k} \in \mathbb{Z}$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, os números $\binom{n}{k}$, com $0 \leq k \leq n$, são inteiros.

Também é possível observar uma relação de simetria entre os números binomiais. A relação, do ponto de vista combinatório, estabelece que o número de maneiras de escolher k objetos de um total de n objetos é igual ao número de maneiras de escolher $n-k$ objetos dentre os mesmos n objetos. O Teorema 2.4 garante a existência dessa simetria.

Teorema 2.4 *Para todo $n, k \geq 0$ inteiros com $n \geq k$, temos que*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Demonstração: De fato, segue da Definição 2.1 que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

O próximo resultado estabelece uma relação direta entre os números binomiais $\binom{n}{k}$ e $\binom{n-1}{k-1}$, podendo um ser escrito em função do outro.

Teorema 2.5 *Para todo $n, k \geq 0$ inteiros com $n \geq k$, temos que*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Demonstração: De fato,

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Outra interessante identidade envolvendo números binomiais é o chamado teorema da estrela de David que foi descoberta por Hillman e Hoggatt e publicada em (HILLMAN; HOGGATT, 1973). A identidade recebeu esse nome devido a uma característica interessante destes números que se dispõem graficamente numa estrela de seis pontas ao redor do binomial $\binom{n}{k}$, dentro do triângulo de Pascal. Abaixo é feita a demonstração do teorema. Para mais detalhes sobre essa propriedade, veja (MOCATO, 2021).

Teorema 2.6 *Para todo $n, k \geq 0$ inteiros, $n \geq k$ é válido que*

$$\binom{n}{k}\binom{n+1}{k-1}\binom{n+2}{k+1} = \binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}\binom{n+2}{k}.$$

Demonstração: Temos que,

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k}\binom{n+1}{k-1}\binom{n+2}{k+1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+2)!}\frac{(n+2)!}{(k+1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\frac{(n+2)!}{k!(n-k+2)!} \\
&= \binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}\binom{n+2}{k}.
\end{aligned}$$

A fim de introduzir resultados de aritmética ao estudo dos números binomiais, o próximo teorema estabelece uma relação de divisibilidade entre n e $\binom{n}{k}$, com a condição de que o máximo divisor comum entre n e k seja 1.

Teorema 2.7 *Sejam n, k inteiros com $n \geq k$. Se $mdc(n, k) = 1$, então $n \mid \binom{n}{k}$.*

Demonstração: Segue de (2.5) que

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Donde
$$\binom{n-1}{k-1}n = \binom{n}{k}k.$$

Logo, $n \mid \binom{n}{k} \cdot k$, e como $\text{mdc}(n,k) = 1$, segue que $n \mid \binom{n}{k}$.

O seguinte resultado introduz uma identidade que será útil para a demonstração do Teorema 6.11 que combina conceitos dos números de Catalan e dos números de Narayana.

Teorema 2.8 *Sejam n e k inteiros positivos com $n \geq k$, então*
$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-k+1} = \frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k}.$$

Demonstração: De fato, aplicando, respectivamente, os Teoremas 2.5 e 2.4, temos que
$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-k+1} = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{n-k}$$
$$= \frac{1}{n-k+1}\binom{n}{n-k} = \frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k}.$$

Na seção seguinte será apresentado o teorema binomial, também conhecido como fórmula do binômio de Newton, que é um resultado fundamental da álgebra que descreve a expansão de potências de um binômio. Este teorema possui amplas aplicações, desde a resolução de problemas de combinatória e probabilidade até em áreas como cálculo e análise de séries.

2.2 O teorema binomial

É comum, em matemática, nos depararmos com problemas que requerem a expansão ou desenvolvimento de potências do tipo $(x+a)^n$, sendo x e a números reais e n um inteiro positivo. Alguns exemplos dessas potência são

$$(x+a)^0 = 1,$$
$$(x+a)^1 = x + a,$$
$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a) = (x^2 + 2ax + a^2)(x+a)$$
$$= x^3 + ax^2 + 2ax^2 + 2a^2x + a^2x + a^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

Note que quanto maior for o valor de n, mais complexos e trabalhosos se tornam os cálculos dessas potências. Entretanto, é natural que se queira saber como é o desenvolvimento dessas potências para valores grandes de n, ou ainda, qual será o coefieciente de um determinado termo dessa expansão. A fim de responder essas perguntas, utilizamos um método desenvolvido por Isaac Newton (1643-1727), que ficou conhecido como teorema binomial ou binômio de Newton.

Teorema 2.9 *Sejam x e a números reais e seja n um inteiro positivo. Então*

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p.$$

Demonstração: Vamos mostrar por indução finita que o Binômio de Newton é uma propriedade do número n válida para qualquer $n \geq 1$.

Considere

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p, \ \ n \geq p.$$

Para $n = 1$, temos

$$(x+a)^1 = \binom{1}{0} x^{1-0} a^0 + \binom{1}{1} x^{1-1} a^1 = (x+a).$$

Assim, o resultado é válido para $n = 1$. Suponha que para algum $k \in \mathbb{N}$, seja verdade que

$$(x+a)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p} a^k.$$

Vamos mostrar que o resultado vale para $k+1$. De fato,

$$(x+a)^{k+1} = (x+a)(x+a)^k = (x+a) \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p} a^p =$$

$$= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p+1} a^p + \sum_{p=0}^{k} x^{k-p} a^{p+1}.$$

No primeiro somatório, temos

$$\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p+1} a^p = x^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p+1} a^p.$$

No segundo somatório,

$$\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p} a^{p+1} = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} x^{k-p} a^{p+1} + a^{k+1}.$$

Trocando a variável p por $p-1$ no segundo somatório, obtemos

$$\sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} x^{k-p} a^{p+1} + a^{k+1} = \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p-1} x^{k+1-p} a^p + a^{k+1}.$$

Desse modo, segue que

$$(x+a)^{k+1} = x^{k+1} + a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p+1} a^p + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p-1} x^{k+1-p} a^p.$$

Colocando em evidência o termo $x^{k+1-p}a^p$:

$$(x+a)^{k+1} = x^{k+1} + a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \left[\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} \right] x^{k+1-p} a^p.$$

Aplicando a Definição 2.2, temos

$$(x+a)^{k+1} = x^{k+1} + a^{k+1} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k+1}{p} x^{k+1-p} a^p.$$

Como x^{k+1} é o 0-ésimo termo do somatório e a^{k+1} é o $(k+1)$-ésimo termo, podemos incorporá-los ao somatório modificando o índice $p=1$ para $p=0$ e k para $k+1$, assim

$$(x+a)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} x^{k+1-p} a^p.$$

Logo, o resultado vale para $k+1$. Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, é válido para todo n natural.

Observe que em

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x a^{n-1} + \binom{n}{n} a^n$$

O primeiro termo é $T_1 = T_{0+1} = \binom{n}{0} x^n$, o segundo termo é $T_2 = T_{1+1} = \binom{n}{1} x^{n-1} a$, e prosseguindo dessa maneira, temos que o $(p+1)$-ésimo termo é

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p.$$

A fórmula da igualdade acima permite calcular um termo qualquer de ordem $p+1$ na expansão de $(x+a)^n$. Por exemplo, podemos determinar o 5º termo da expansão de $(x+3)^7$. Teremos

$$T_5 = T_{4+1} = \binom{7}{4} x^{7-4} \cdot 3^4 = 2835x^3.$$

Logo, o 5º termo é $2835x^3$.

A fórmula anterior fornece um meio de calcular o coeficiente de cada termo da expansão do binômio de Newton e, consequentemente, uma forma de calcular a soma desses coeficientes. Entretando, calcular cada coeficiente separadamente e depois somá-los, ou ainda, escrever a expansão do binômio, não são formas recomendadas de se resolver esse problema. Para ilustrar essa situação, vamos calcular a soma dos coeficiente do binômio $(x+3)^5$. Temos que

$$(x+3)^5 = x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243,$$

e a soma dos coeficientes é $1 + 15 + 90 + 270 + 405 + 243 = 1024$.

Porém, esse resultado poderia ser obtido sem a necessidade de efetuar o desenvolvimento binomial, como é abordado em (SILVA, 2013). Como estamos interessados na soma dos coecientes do desenvolvimento binomial, basta considerar que as variáveis do binômio são todas iguais a 1, e, em seguida, resolver as operações indicadas, tendo em vista que a soma dos coecientes de um polinômio $p(x)$ é o valor numérico deste polinômio, para $x = 1$.

Desse modo, para obter a soma dos coeficientes de $(x+3)^5$, olhamos para esse binômio como um polinômio $p(x)$ e calculamos

$$p(1) = (1+3)^5 = 4^5 = 1024.$$

Ao concluirmos as considerações sobre o teorema binomial apresentado no Teorema 2.9, destacamos uma observação importante: esse teorema pode ser provado por indução usando a relação de Stifel (Teorema 2.2). Vejamos o resultado novamente:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k,$$

onde n é um inteiro não negativo e a é um número real não nulo, já que o caso $a = 0$ é trivialmente satisfeito.

Um ponto interessante é que podemos demonstrar, inicialmente, uma versão particular dessa identidade:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k},$$

utilizando o método de indução ou argumentos combinatórios. A partir dessa versão, é possível obter a forma geral como um corolário. Para isso, reescrevemos $(x+a)^n$ como segue

$$(x+a)^n = \left[a\left(\frac{x}{a}+1\right)\right]^n = a^n\left(\frac{x}{a}+1\right)^n.$$

Agora, aplicamos o teorema binomial à expressão $\left(\frac{x}{a}+1\right)^n$:

$$a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{a}\right)^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}}{a^{n-k}}.$$

Simplificando os termos, obtemos

$$a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^{-n+k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} a^k.$$

Dessa forma, a identidade geral é provada como um caso particular do teorema binomial.

O corolário abaixo também tem estreita relação com o triângulo de Pascal, que será apresentado na próxima seção, estabelecendo que a soma dos elementos da $n-$ésima linha do triângulo é dada por 2^n.

Corolário 2.10 *Sejam $n, k \in \mathbb{Z}$ com $n \geq k \geq 0$, temos que*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Demonstração: Fazendo $x = a = 1$ e $p = k$ na expressão do Teorema 2.9, temos

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

O Corolário 2.11 também decorre imediatamente do teorema binomial. Observe:

Corolário 2.11 *Sejam $n, k \in \mathbb{Z}$, com $n \geq k \geq 0$, temos*

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Demonstração: Segue do Teorema 2.9 que

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k. \tag{1}$$

Calculdando a derivada da identidade em 1, temos

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}. \tag{2}$$

Fazendo $x = 1$ em (2), obtemos

$$n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Também segue do teorema binomial a conhecida identidade de Vandermonde. De acordo com (ASKEY, 1987), o resultado é atribuído ao matemático francês Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796), que contribuiu significativamente para a álgebra e a teoria das equações. Contudo, é provável que a identidade fosse conhecida por outros matemáticos antes de sua formulação oficial.

Segundo (GRAHAM; KNUTH; PATASHNIK, 1994), a identidade desempenhou um papel importante no desenvolvimento da combinatória e foi aplicada na resolução de problemas relacionados à teoria das probabilidades e à análise de séries. Também serviu de base para o desenvolvimento de outras relações combinatórias, incluindo generalizações para números multinomiais.

O Teorema 2.12 apresenta a identidade de Vandermonde. A demonstração utiliza igualdade de polinômios, reproduzindo o que foi feito por (KOSHY, 2009).

Teorema 2.12 *Para todo* $m, n, r \geq 0$, *onde* $0 \leq r \leq m, n$, *temos que*

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} \tag{3}$$

Demonstração: Segue do Teorema 2.9 que o coeficiente de x^r para $0 \leq r \leq m+n$ na expansão de $(1+x)^{m+n}$ é igual a $\binom{m+n}{r}$. Por outro lado, temos

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n = \sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}x^{m-s}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^{n-s}.$$

Usando o Teorema 2.4, podemos reescrever

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{s=0}^{m}\binom{m}{m-s}x^{m-s}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{n-s}x^{n-s}.$$

Fazendo $j = m - s$, temos que, para $s = 0$, $j = m$ e para $s = m$, temos $j = 0$. Logo,

$$\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{m-s}x^{m-s} = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j.$$

Analogamente, fazendo $i = n - s$ podemos reescrever

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{n-s}x^{n-s} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i.$$

Logo,

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i. \tag{4}$$

O coeficiente de x^r em $\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$ é igual a

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

Segue de (4) que

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

O Corolário 2.13 é obtido a partir da identidade em (3). O mesmo será fundamental para demonstrar que a soma de cada linha do triângulo de Narayana é um número de Catalan, resultado do capítulo 5.

Corolário 2.13 *Sejam $m, n, s \geq 0$ e $k \leq m-s$, então*

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{s+k}\binom{n}{k} = \binom{m+n}{n+s}$$

Demonstração:

Fazendo $r = m-s$ em (3), temos

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n+m}{m-s} = \sum_{k=0}^{m-s} \binom{n}{k}\binom{m}{m-s-k}$$

Aplicando o Teorema 2.4, segue que

$$\sum_{k=0}^{m-s} \binom{n}{k}\binom{m}{m-s-k} = \sum_{k=0}^{m-s} \binom{n}{k}\binom{m}{s+k}.$$

Como, para $k \geq m-s+1$, $\binom{m}{s+k} = 0$, então

$$\sum_{k=0}^{m-s} \binom{n}{k}\binom{m}{s+k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{m}{s+k}.$$

Logo,

$$\binom{n+m}{n+s} = \binom{n+m}{n+m-(n+s)} = \binom{n+m}{m-s} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{m}{s+k}.$$

Também segue diretamente do Teorema 2.12 o seguinte corolário:

Corolário 2.14 *Seja n um inteiro positivo. Então,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Demonstração: Fazendo $r = m = n$ em (3) e aplicando o Teorema 2.4, temos

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Na seção seguinte será apresentado o triângulo de Pascal, que é uma construção matemática significativa e fascinante, pois suas propriedades abrangem diversos ramos da matemática e possuem aplicações práticas em várias áreas do conhecimento. Essa figura triangular, organizada de forma simétrica e composta por números inteiros, é amplamente conhecida por sua relação com os coeficientes binomiais, utilizados na expansão de potências de binômios. Além disso, o triângulo de Pascal está intrinsecamente ligado à análise combinatória, fornecendo uma representação simples para a contagem de combinações.

2.3 O triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é uma disposição numérica organizada na forma triangular, cujos elementos são gerados por meio da relação do Teorema 2.2. Algebricamente, esses números estão relacionados à expansão do binômio $(1+x)^k$, onde k é um número natural.

Na primeira linha do triângulo, encontra-se a expansão de $(1+x)^0 = 1$, resultando no número 1. A segunda linha contém os coeficientes da expansão $(1+x)^1 = 1+x$, ou seja, os números 1 e 1. A terceira linha é formada pelos coeficientes de $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$, que são $1, 2$ e 1. Esse padrão continua para valores crescentes de k.

Embora o triângulo de Pascal seja comumente associado ao matemático francês Blaise Pascal (1623 - 1662), tal triângulo já era conhecido na China cerca de dois mil anos antes de Pascal. Como destacado por Boyer (1999, p. 140):

> Nas obras chinesas, há cerca de 1.100 referências a sistemas de tabulação para coeficientes binomiais, e é provável que o triângulo aritmético tenha se originado na China aproximadamente nesta época. É interessante observar que a descoberta chinesa do teorema binomial para potências inteiras estava associada, em sua origem, à extração de raízes e não à potenciação (Boyer, 1999, p.140).

O Triângulo de Pascal é formado de maneira recursiva. Os números que delimitam suas bordas à direita e à esquerda são sempre iguais a 1, enquanto os elementos internos são obtidos como a soma dos dois números diretamente acima de cada posição. Por exemplo:

- Na linha 0, o único elemento é 1;
- Na linha 1, os elementos são 1 e 1;
- Na linha 2, os elementos são $1, 2, 1$, onde o 2 é obtido somando $1+1$ da linha anterior;
- Na linha 3, os elementos são $1, 3, 3, 1$, onde $3 = 1+2$ e $3 = 2+1$.

Esse padrão continua indefinidamente, e a relação que descreve o triângulo é a relação do Teorema 2.2, apresentada nesse capítulo. Para que a recorrência seja válida, é necessário definir as condições iniciais:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \forall n \geq 0.$$

As tabelas abaixo mostram triângulos de Pascal, para n e k variando de 0 até 6.

Tabela 1: Triângulo de Pascal

n							
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$
	0	1	2	3	4	5	6
	k						

n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6
	k						

Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que a $n-$ésima linha do triângulo de Pascal possui $n+1$ elementos. Além disso, o primeiro elemento de cada linha é 1, pois são da forma $\binom{n}{0} = 1$, assim como o último elemento também é 1, pois é da forma $\binom{n}{n} = 1$.

Através do triângulo de Pascal é possível visualizar a simetria dos números binomiais. Em cada linha, dois números binomiais equidistantes dos extremos são iguais. Esse resultado foi demonstrado no Teorema 2.4. Há uma diversidade de propriedades possíveis de serem exploradas no triângulo de Pascal. Por exemplo, a soma de cada uma das dez primeiras linhas do triângulo de Pascal, conforme a tabela abaixo.

Tabela 2: Soma das linhas do Triângulo de Pascal.

linha 0	$1 = 2^0$
linha 1	$1 + 1 = 2^1$
linha 2	$1 + 2 + 1 = 2^2$
linha 3	$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$
linha 4	$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4$
linha 5	$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5$
linha 6	$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6$
linha 7	$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 2^7$
linha 8	$1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 2^8$
linha 9	$1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 2^9$

Fonte: Elaborado pelo autor

Em geral, a soma da n-ésima linha do triângulo de Pascal é 2^n. A prova dessa propriedade foi feita no Corolário 2.10. A seção seguinte abordará a série binomial que surge como uma extensão natural do teorema binomial, permitindo a expansão de expressões da forma $(1 + x)^\alpha$, onde α pode ser qualquer número real. Diferentemente do binômio de Newton, que se aplica a expoentes inteiros não negativos, a série binomial utiliza coeficientes generalizados e, em muitos casos, resulta em uma série infinita.

2.4 A série binomial

A série binomial é uma generalização da função polinomial $f(x) = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, onde n é um inteiro positivo. Essa série se estende para o caso de n ser um número real não natural e é chamada de série binomial.

No estudo de séries de funções, utilizando a série de Maclaurin, como pode ser consultado em (STEWART, 2016), o coeficiente binomial generalizado surge como consequência da aplicação dessa série a uma classe de funções que possuem derivadas de qualquer ordem em torno de $x = 0$.

A série de Maclaurin é dada pela fórmula $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, e pode ser aplicada ao caso particular para a função $f(x) = (1 + x)^\alpha$, onde α é um número real. Dessa forma, a expansão para $f(x) = (1+x)^\alpha$ fornece os coeficientes binomiais generalizados como parte da expressão da série.

De fato, a derivada de ordem k da função $f(x) = (1+x)^\alpha$, para todo k inteiro positivo é:

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)(x + 1)^{\alpha - k}$ e assim $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)$.

Portanto,

$$(x + 1)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

onde,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Observe, nesse caso, que $\binom{\alpha}{0} = \frac{f(0)}{0!} = 1.$

Com essas considerações temos a série binomial.

O teorema seguinte é conhecido como Teorema Binomial Generalizado, que consiste na generalização do Teorema 2.9 para um número real qualquer. A demonstração desse resultado pode ser consultada em (FEDORYAEVA, 2023).

Teorema 2.15 *Seja α um número real arbitrário. Então:*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} x^r \tag{5}$$

onde,

$$\binom{\alpha}{r} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-r+1)}{r!}, & se \quad r > 0 \\ 1, & se \quad r = 0. \end{cases}$$

Observamos que quando α é um número inteiro positivo temos o Teorema Binomial clássico, pois $\binom{\alpha}{r} = 0$ se $r > \alpha$. O número $\binom{\alpha}{r}$ é chamado de coeficiente *binomial generalizado.*

De modo geral, a série em (5) converge se $|x| < 1$. Isso ocorre porque os termos $\binom{\alpha}{r}x^r$ tendem a zero rapidamente conforme $r \to \infty$, garantindo a convergência. Por outro lado, para $x = 1$, a série se torna a soma dos coeficientes binomiais generalizados:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r}.$$

Essa série diverge para qualquer $\alpha \neq 0$, pois o termo geral não tende a zero suficientemente rápido. Se for $x = -1$, a série se torna a série alternada:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} (-1)^r.$$

Por sua vez, essa série converge condicionalmente se $\alpha > -1$, mas diverge para $\alpha \leq -1$. Como aplicação de (5), temos o Corolário 2.16.

Corolário 2.16 *Dado um inteiro positivo n e x um número real tal que $|x| < 1$, então*

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_p x^p \tag{6}$$

com $a_p = \binom{n+p-1}{p}.$

Demonstração: Temos que: $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^n = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$. Fazendo $u=-n$ e substituindo x por $-x$ em (5), obtemos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-1)^r(-x)^r \tag{7}$$

Observamos que o coeficiente de x^p em (7) é dado por (vamos reescrevê-lo de maneira conveniente):

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{-n(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-p+1)(-1)^p}{p!}\\
&= \frac{-n(-1)(n+1)(-1)(n+2)\ldots(-1)(n+p-1)(-1)^p}{p!}\\
&= \frac{(-1)^p n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)(-1)^p}{p!}\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)(n-1)!}{p!(n-1)!}\\
&= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots 1}{p!(n-1)!}\\
&= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \binom{n+p-1}{p}.
\end{aligned}$$

O Exemplo 2.17 demonstra como obter a expansão de uma função em série de potências. As séries de potências, por sua vez, são somas infinitas, onde cada termo envolve uma potência de uma variável. De forma geral, uma série de potências pode ser escrita como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, onde a_n são os coefiecientes da série, que podem ser números reais ou complexos, x é a variável e c é o centro da série. A série de potências representa uma função que pode convergir ou divergir dependendo dos valores de x. A região que contém os valores de x para os quais a série converge é chamada intervalo de convergência. Além disso, a série de Maclaurin, para uma função $f(x)$ é uma série de potências, onde $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$ e $c=0$. Um aprofundamento sobre o estudo das séries de potências pode ser encontrado em (STEWART, 2013).

A série geométrica é um exemplo clássico de série de potências, e é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...,$$

sendo o centro da série $c=0$ e os coeficientes são $a_n = 1$ para todo n. A série converge quando $|x|<1$. Nesse caso, ela tem uma soma finita dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

A função escolhida no Exemplo 2.17, para $|z| < \frac{1}{4}$, é a função geradora dos números de Catalan. Esses números e algumas de suas propriedades serão abordados no capítulo 4.

Exemplo 2.17 *Use a série binomial para expandir a função*

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$$

em série de potências.

Solução: Fazendo $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $x = -4z$ na série binomial temos:

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4z)^k =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4k)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdot \ldots \cdot (\frac{1}{2}-k+1)(-4z)^k}{k!}.$$

Assim,

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{(1-(1-4z)^{\frac{1}{2}})}{2z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-k+1)(-4z)^k}{k!}}{2z}$$

$$= \sum +k = 1^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdot \ldots \cdot (\frac{1}{2}-k+1)(-4z)^{k-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1-2}{2})(\frac{1-4}{2})(\frac{1-6}{2})\cdot \ldots \cdot (\frac{1-2k+2}{2})(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdot \ldots \cdot (\frac{3-2k}{2})(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot \ldots \cdot (\frac{2k-3}{2})(-1)^{k-1}(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)(-1)^{k-1}(-1)^{k-1}(-1)^{k-1}(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)}{k!}(z)^{k-1} = \sum_{s=0}^{\infty} 2^s \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2s-1)}{(s+1)!} z^s. \tag{8}$$

Para $k \geq 0$ temos que coeficiente de z^k em $C(z)$ é igual a

$$2^k \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{(k+1)!} = \frac{2^k}{(k+1)!} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)\cdot 2k}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k}.$$

$$\frac{2^k}{(k+1)!k!} \frac{(2k)!}{(2\cdot 1)(2\cdot 2)(2\cdot 3)\cdot \ldots \cdot (2\cdot k)} = \frac{2^k}{(k+1)!} \frac{(2^k)!}{2^k\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}$$

$$\frac{(2^k)!}{(k+1)!k!} = \frac{1}{k+1} \frac{(2k)!}{k!\ k!} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}.$$

Portanto,

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k+1} z^k.$$

Na seguinte seção, será abordada a presença dos números binomiais na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um dos documentos educacionais mais importantes da educação brasileira, e que orienta e define as competências e habilidades a serem trabalhadas nos ensinos fundamental e média em todos os estabelecimentos de ensino do país.

2.5 Os números binomiais na BNCC

Segundo (BRASIL., 2018), o estudo da análise combinatória é fundamental porque desenvolve habilidades relacionadas à resolução de problemas, ao raciocínio lógico e ao pensamento crítico, capacidades essenciais para os alunos enfrentarem situações do mundo real. O conhecimento em análise combinatória é apresentado como uma ferramenta para abordar problemas de contagem e possibilidades, proporcionando uma base sólida para lidar com questões de probabilidade e outras áreas da matemática e ciências afins.

Os números binomiais são mencionados indiretamente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Brasil, especialmente dentro do contexto de ensino de combinatória e probabilidade para o Ensino Fundamental e Médio. O tema faz parte do bloco de conteúdos de Matemática, que busca desenvolver o pensamento combinatório e probabilístico dos estudantes.

Embora não sejam citados textualmente com frequência, os conceitos que envolvem os números binomiais e seu uso aparecem em algumas competências e habilidades da base nacional. Os alunos são incentivados a resolver problemas práticos e a explorar situações em que a análise combinatória é necessária, sendo o coeficiente binomial uma ferramenta matemática fundamental para isso.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC propõe que comece a ser introduzida aos alunos a ideia de combinações e arranjos, que envolvem o conceito de cálculo de combinações e, consequentemente, estão associados aos números binomiais. O objetivo é ajudar os estudantes a resolver problemas de contagem e analisar situações com diferentes possibilidades.

No Ensino Médio, o estudo da combinatória é mais aprofundado, e o conteúdo inclui o cálculo de combinações e arranjos com maior rigor. O número binomial, também conhecido como coeficiente binomial, é utilizado para determinar o número de combinações possíveis de um conjunto de elementos, e isso está diretamente ligado à expansão binomial e à compreensão das propriedades de contagem.

Entre as habilidades que envolvem o raciocínio combinatório e probabilístico no Ensino Fundamental, pode-se destacar:

EF09MA27 - Resolver e elaborar problemas que envolvam contagem de possibilidades, usando raciocínio combinatório, com ou sem o uso de notação específica.

EF09MA28 - Compreender e utilizar o conceito de probabilidade como uma medida da chance de um evento ocorrer, resolvendo e elaborando problemas em contextos diversos.

Já no Ensino Médio, as seguintes habilidades podem ser destacadas:

EM13MAT308 - Compreender e resolver problemas que envolvem contagem, arranjos, permutações e combinações, utilizando raciocínio combinatório para encontrar soluções em situações diversas.

EM13MAT309 - Aplicar princípios da contagem, permutações e combinações em situações contextualizadas, especialmente em situações práticas que exijam análise combinatória.

EM13MAT310 - Compreender os conceitos de probabilidade em eventos aleatórios e independentes, resolvendo problemas que utilizem tais conceitos para calcular a probabilidade de eventos compostos ou simples.

EM13MAT311 - Relacionar os conceitos de probabilidade com situações cotidianas e fenômenos naturais, utilizando raciocínio probabilístico para tomada de decisões ou para compreender fenômenos aleatórios.

Essas habilidades são distribuídas dentro da área de Matemática, e o objetivo principal é que os alunos desenvolvam capacidades para resolver problemas, raciocinar logicamente e tomar decisões em situações do dia a dia e em contextos mais complexos.

Assim, de acordo com (BRASIL., 2018), o estudo de conceitos combinatórios não apenas fortalece o pensamento matemático dos estudantes, mas também prepara-os para lidar com problemas complexos de forma criativa, lógica e prática, conectando conceitos matemáticos com situações cotidianas e profissionais.

3 OS NÚMEROS TRIANGULARES

Os números triangulares são um exemplo dos chamados números figurados, e entre esses, perde em fama apenas para os chamados números quadrados. Segundo (EVES, 2011), os números figurados são caracterizados por um conjunto de pontos que juntos representam certas configurações ou figuras geométricas, construindo uma relação entre a aritmética e a geometria.

Todo número que pode ser escrito como a soma de uma sequência de consecutivos números naturais começando do 1 é um número triangular. Por exemplo, o número 21 é um número triangular. De fato, $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$. A tabela a seguir mostra os números triângulares escritos como soma de números naturais começando pelo 1.

A tabela 3 sugere a necessidade de uma fórmula explícita para a obtenção do n-ésimo número triangular, uma vez que para valores de n grandes, é inviável somar n a todos os naturais anteriores. Na seção a seguir veremos como obter essa fórmula.

3.1 Definições e propriedades

Os números 1, 3, 6, 10, 15, ... são os chamados números triangulares. Na tabela abaixo é possível ver que, à exceção do primeiro, os pontos da figura, organizados de maneira conveniente, sugerem a formação de triângulos equiláteros.

Tabela 3: Números Triangulares

Número Triangular	**Expressão**	**Resultado**
1º	1	1
2º	1+2	3
3º	1+2+3	6
4º	1+2+3+4	10
5º	1+2+3+4+5	15
6º	1+2+3+4+5+6	21
...	...	...
nº	1+2+3+4+...+n	?
...	...	...

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 4: Disposição Geométrica dos Números Triangulares

n	O número triangular T_n	Disposição geométrica de T_n
1	$T_1 = 1$	•
2	$T_2 = 3$	• • •
3	$T_3 = 6$	• • • • • •
4	$T_4 = 10$	• • • • • • • • • •
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que nas figuras dadas na Tabela 4, a partir do primeiro, cada triângulo formado por pontos tem a quantidade de pontos do triângulo anterior mais n mais 1. Desse modo, obtemos a seguinte relação de recorrência para os números triângulares:

$$T_{n+1} = T_n + (n+1), \;\; T_1 = 1 \tag{9}$$

A recorrência acima é linear de primeira ordem. Escrevendo alguns dos seus termos obedecendo sua lei de formação, temos

$$T_2 = T_1 + 2$$

$$T_3 = T_2 + 3$$

$$T_4 = T_3 + 4$$

$$...$$

$$T_n = T_{n-1} + n$$

Somando os termos em cada lado das igualdades e fazendo os possíveis cancelamentos, obtém-se

$$T_n = T_1 + 2 + 3 + ... + n$$

Como $T_1 = 1$ e $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, então

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{10}$$

A fórmula em (10) pode ser usada para determinar o n-ésimo número triângular. A seguir, serão apresentadas algumas propriedades que envolvem os números triângulares.

Proposição 3.1 *Sejam a e b inteiros positivos, temos que*

$$T_{a+b} = T_a + T_b + ab.$$

Demonstração: Segue de (10) que

$$T_{a+b} = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = \frac{(a+b)((a+1)+b)}{2} = \frac{a(a+1)+ab+b((a+1)+b)}{2} =$$
$$= \frac{a(a+1)+ab+b(a+(b+1))}{2} = \frac{a(a+1)+ab+ab+b(b+1)}{2} =$$
$$= \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} + ab = T_a + T_b + ab.$$

Proposição 3.2 *Para todo n inteiro positivo, vale a identidade*

$$T_{n-1} + T_n = n^2.$$

Demonstração: Aplicando (10), temos

$$T_{n-1} + T_n = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} + \frac{n^2+n}{2} = n^2.$$

Proposição 3.3 *Para todo $n > 1$ inteiro, é válido que*

$$T_n - T_{n-1} = n.$$

Demonstração: Temos que,

$$T_n - T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2+n}{2} - \frac{n^2-n}{2} = n.$$

Proposição 3.4 *O quadrado de um número triangular é a igual a soma dos cubos dos n primeiros números naturais, isto é, para todo n inteiro positivo,*

$$T_n^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3.$$

Demonstração: Vamos monstrar por indução em n que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Para $n = 1$, temos $1 = 1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$ e a identidade é verdadeira. Suponha que a igualdade seja válida para algum $k \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que também vale para $k+1$. De fato,

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 &= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 \\
&= (k+1)^2\Big(\frac{k^2}{4} + (k+1)\Big) = (k+1)^2\Big(\frac{k^2+4k+4}{4}\Big) \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.
\end{aligned}$$

Logo, o resultado é válido para $k+1$. Portanto, segue do Princípio da Indução Finita que é válido para todo n natural. Como $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = T_n^2$, então

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = T_n^2.$$

Outras propriedades envolvendo esses números podem ser encontradas em (ROSEN, 2011).

3.2 Relações entre números triangulares e binomiais

Os números triangulares estão intimamente relacionados aos números binomiais, pois podem ser expressos como um caso particular dos coeficientes binomiais.

Teorema 3.5 *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, temos que*

$$T_n = \binom{n+1}{2}.$$

Demonstração: Segue da Definição 2.1 que

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2! \cdot ((n+1)-2)!} = \frac{(n+1)!}{2 \cdot (n-1)!} = \frac{(n+1)\cdot n \cdot (n-1)!}{2 \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = T_n.$$

Com base em (10), temos que

$$\begin{aligned}
T_2 &= 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \binom{3}{2}, \\
T_3 &= 6 = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \binom{4}{2},
\end{aligned}$$

$$T_4 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \binom{5}{2}.$$

O número T_n representa o número de pontos em um triângulo equilátero com n linhas de pontos igualmente espaçados. Enquanto, $\binom{n+1}{2}$ representa o número de pares distintos que podem ser formados com $n+1$ objetos. Em termos combinatórios, calcular T_n como $\binom{n+1}{2}$, mostra que o número triangular é o número de maneiras de conectar dois pontos distintos em um conjunto de $n+1$ pontos. Isso oferece um entendimento prático e aplicável dos números triangulares, especialmente em contextos como análise combinatória e probabilidade.

O Teorema 3.6 é uma identidade interessante demonstrada em (KUHAPATANAKUL; SHANNON, 2021), um trabalho relativamente recente, reforçando que os resultados envolvendo números triangulares continuam em destaque.

Teorema 3.6 *Seja T_n o n-ésimo número triangular. Para todo inteiro positivo k, temos*

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} T_{ki} = kn(kn+k+2) \cdot 2^{n-3}.$$

Demonstração: Vamos demonstrar a identidade através da segunda forma do princípio da indução em n. Para $n = 1$, a identidade é verdadeira. De fato,

$$\sum_{i=1}^{1} \binom{1}{1} T_k = T_k = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{2k(k+1)}{4} = 2k(k+1)\ 2^{-2}$$
$$= k(2k+2)2^{-2} = k(k+k+2)2^{1-3}.$$

Suponha que a identidade seja válida para todo inteiro $n \geq 1$. Utilizando a relação de Stifel, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} T_{ki} &= \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right] T_{ki} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i} T_{ki} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} T_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} T_{ki} + \binom{n}{n+1} T_{k(k+1)} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} T_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} T_{ki} + 0 \cdot T_{k(k+1)} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} T_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} T_{ki} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} T_{ki}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Vamos reescrever $\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} T_{ki}$. Para isso, tome $s = i-1$ que implica $i = s+1$. Agora, se $i = 1$, então $s = 0$ e se $i = n+1$, então $s = n+1-1 = n$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} T_{ki} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} T_{k(s+1)} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} T_{ks+k}.$$

Aplicando a Proposição 3.1, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}T_{ki} &= \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(T_{ks}+T_k+ks\cdot k) = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(T_{ks}+T_k+k^2s)\\
&= \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}T_{ks} + \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}T_k + \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}k^2s\\
&= \sum_{s=1}^{n}T_{ks} + T_0 + T_k\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s} + k^2\sum_{s-0}^{n}\binom{n}{s}s\\
&= \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}T_{ks} + T_k2^n + k^2n2^{n-1}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Substituindo (12) em (11),

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}T_{ki} &= \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}T_{ki} + \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}T_{ks} + 2^n\cdot\frac{k(k+1)}{2} + k^2n2^{n-1} =\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}T_{ki} + 2^{n-1}k(k+1) + k^2n2^{n-1}\\
&= 2kn(kn+k+2)2^{n-3} + 2^{n-2}2k(k+1) + 2^{n-2}kn2k\\
&= kn2^{n-2}(kn+k+2) + kn2^{n-2}2k + 2^{n-2}2k(k+1)\\
&= kn2^{n-2}(kn+k+2+2k) + 2^{n-2}2k(k+1)\\
&= kn2^{n-2}(kn+k+2+2k) + 2^{n-2}2k(k+1)\\
&= kn2^{n-2}[k(n+1)+k+2+k] + 2^{n-2}2k(k+1)\\
&= kn2^{n-2}[k(n+1)+k+2] + k^2n2^{n-2} + 2^{n-2}2k(k+1)\\
&= kn2^{n-2}[k(n+1)+k+2] + k2^{n-2}[kn+2k+2]\\
&= kn2^{n-2}[k(n+1)+k+2] + k2^{n-2}[k(n+1)+k+2]\\
&= k2^{n-2}[n(k(n+1)+k+2) + k(n+1)+k+2]\\
&= k2^{n-2}[(k(n+1)+k+2)(n+1)]\\
&= k2^{n-2}(n+1)(k(n+1)+k+2).
\end{aligned}$$

Logo, o resultado é válido para $n+1$. Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, vale para todo n.

A inclusão do Teorema 3.6 neste trabalho teve como objetivo buscar novas identidades para os números de Narayana, as quais serão desenvolvidas no Capítulo 5 e que são semelhantes à apresentada nesse teorema. Além disso, pretende-se enfatizar que, no Ensino Médio, o professor pode desafiar os alunos interessados com problemas ou conjecturas inéditas.

3.3 Os números triangulares e a BNCC

O estudo de sequências, como as progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG), está intimamente relacionado ao conceito de números triangulares. Essa relação não apenas possui um forte apelo geométrico e combinatório, mas também contribui para o desenvolvimento de habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A expressão em (10), utilizada para determinar o n-ésimo número triangular, trata-se da soma de uma PA de n termos com primeiro termo igual a 1 e razão igual a 1. Isso evidencia a possibilidade de se trabalhar o conceito de números triângulares dentro do contexto das progressões aritméticas na Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza a importância de desenvolver habilidades relacionadas ao pensamento algébrico, ao reconhecimento de padrões e regularidades, e à resolução de problemas. O estudo de sequências, progressões e números figurados, como os números triangulares, permite abordar esses aspectos de forma integrada, como detalharemos a seguir.

Raciocínio Algébrico e Padrões: A identificação de padrões numéricos e a dedução de fórmulas de recorrência para os números triangulares promovem o desenvolvimento de habilidades como a generalização e a abstração, essenciais para o fortalecimento do pensamento matemático.

Conexões Geométricas: O apelo geométrico dos números triangulares permite que os estudantes visualizem a soma de termos em forma de arranjos figurados, estabelecendo conexões visuais e concretas com o conceito abstrato de soma.

Aplicações Combinatórias: Os números triangulares podem ser usados para introduzir ideias de combinatória, como contagem de objetos dispostos em um triângulo ou cálculos de combinatórias básicas.

Os números triangulares podem ser representados geometricamente como pontos dispostos em forma de triângulo, o que oferece um apelo visual para entender o crescimento da sequência. Além disso, é possível explorar conceitos envolvendo recorrências lineares de primeira ordem, uma vez que a fórmula em (10) é obtida a partir da resulação da recorrência em (9).

Isso mostra que cada número triangular é obtido a partir do anterior somando-se um termo adicional, reforçando a ideia de construção sequencial que pode ser explorada em sala de aula para estimular a compreensão das regularidades numéricas e das progressões.

Estudar números triangulares como uma soma de PA tem um potencial didático significativo, pois combina aspectos de contagem (como somas sucessivas), visualização geométrica e exploração algébrica. Esse estudo está alinhado às competências da BNCC, que propõe o desenvolvimento de capacidades para resolver problemas, reconhecer padrões e trabalhar com conceitos algébricos de maneira contextualizada e significativa.

4 NÚMEROS DE CATALAN

Segundo (LIMA, 2021), os números de Catalan foram descobertos pelo matemático e físico suiço Leonhard Euler (1707 - 1783), no século XVIII, enquanto esse investigava o número de possíveis triangulações de um determinado polígono. Outras pesquisas ainda indicam que o matemático mongol Minggatu (1692 - 1764) já utilizava os números de Catalan para expressar séries de expansões senoidais. Entretanto, tais números só ficaram conhecidos pelo nome que têm hoje quando Eugene Charles Catalan (1814-1894) os utilizou em estudos envolvendo o número de maneiras de se colocar parênteses numa expressão e também em pesquisas envolvendo o jogo Torre de Hanói.

De acordo com (CRAVEIRO; TEIXEIRA, 2018), Eugene nasceu em Bruges, na Bélgica, e teve uma infância tranquila. Eugene, ainda aos dez anos, tornou-se aprendiz de joalheiro, mas desistiu da arte por não ter habilidade. Anos mais tarde, sua família mudou-se para Paris e seu pai começou a trabalhar como arquiteto e levava o filho para o trabalho. Essa experiência infuenciou sua vida acadêmica e o início dos seus estudos na Escola École Polytechnique. A vida acadêmica e profissional de Eugene foi tumultuada por seu envolvimento político, republicano e esquerdista, que quase acabou com seu futuro, mas ainda assim, Eugene se tornou um grande especialista em Teoria dos Números e Teoria Combinatória.

Os números de Catalan desempenham um papel fundamental em diversos problemas de contagem e geometria combinatória. Um exemplo notável, descoberto por Euler, está na decomposição de um polígono convexo em triângulos por meio de diagonais que não se cruzam. Para um polígono de $n+2$ lados, o número de maneiras distintas de realizar essa decomposição corresponde ao n-ésimo número de Catalan. Essa relação evidencia a conexão entre a combinatória e a estrutura geométrica dos polígonos, sendo amplamente explorada em matemática discreta. Além disso, essa propriedade dos números de Catalan tem aplicações em áreas como teoria de grafos e análise de algoritmos. Uma discussão mais detalhada sobre esse exemplo pode ser encontrada em (ALTER, 1971) e (KOSHY, 2009).

As aplicações dos números de Catalan são diversas, especialmente na análise combinatória. Uma dessas aplicações estabelece uma relação entre o número central de Narayana e os números de Catalan, que será um dos resultados apresentados no capítulo 6. Na seção seguinte serão apresentadas a definição, algumas propriedades e exemplos envolvendo os números de Catalan.

4.1 Definição, exemplos e propriedades

Definição 4.1 *Os números de Catalan C_n são dados por*

$$\begin{aligned} C_n &= C_{n-1}\cdot C_0 + C_{n-2}\cdot C_1 + C_{n-3}\cdot C_2 + ... + C_1\cdot C_{n-2} + C_0\cdot C_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1-k}\cdot C_k, \qquad (13) \end{aligned}$$

com $n \geq 1$ e $C_0 = 1$.

Segue de (13) que

$C_1 = C_0\cdot C_0 = C_0^2 = 1^2 = 1,$

$C_2 = C_1\cdot C_0 + C_0\cdot C_1 = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 1 + 1 = 2,$

$$C_3 = C_2 \cdot C_0 + C_1^2 + C_0 \cdot C_2 = 2 \cdot 1 + 1^2 + 1 \cdot 2 = 2 + 1 + 2 = 5,$$

$$C_4 = C_3 \cdot C_0 + C_2 \cdot C_1 + C_1 \cdot C_2 + C_0 \cdot C_3 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14.$$

A Definição 4.1 apresenta uma forma recursiva de se obter os números de Catalan. A demonstração desse resultado é feita em (SIVARAMAN, 2020b) utilizando o conceito de “Árvore Binária Enraizada”. Essas são disposições de vértices (pontos) e arestas (linhas) que se conectam, formando “árvores”. A construção feita evidencia que as enumerações desses árvores produzem os números de Catalan, satisfazendo a recorrência em (13). A tabela abaixo mostra os 30 primeiros números de Catalan.

Tabela 5: Números de Catalan

n	C_n	n	C_n
0	1	15	9694845
1	1	16	35357670
2	2	17	129644790
3	5	18	477638700
4	14	19	1767263190
5	42	20	6564120420
6	132	21	24466267020
7	429	22	91482563640
8	1430	23	343059613650
9	4862	24	1289904147324
10	16796	25	4861946401452
11	58786	26	18367353072152
12	208012	27	69533550916004
13	742900	28	263747951750360
14	2674440	29	1002242216651368

Fonte: Elaborado pelo autor

A Proposição 4.2 também está presente em (SIVARAMAN, 2020b), trabalho em que é demonstrada utilizando apenas a recorrência dos números de Catalan. Na prova abaixo também é usada a recorrência, porém são adicionadas mais manipulações algébricas.

Proposição 4.2 *Seja n um número inteiro não negativo. Se n é par, então*

$$C_n = 2 \cdot (C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + ... + C_{\frac{n}{2}-1} \cdot C_{\frac{n}{2}}). \tag{14}$$

Demonstração: Segue de (13) que

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + C_2 \cdot C_{n-3} + ... + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0 \\ &= C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + ... + C_{\frac{n}{2}-2} \cdot C_{\frac{n}{2}+1} + C_{\frac{n}{2}-1} \cdot C_{\frac{n}{2}} \\ &\quad + \\ &\quad C_{\frac{n}{2}} \cdot C_{\frac{n}{2}-1} + C_{\frac{n}{2}+1} \cdot C_{\frac{n}{2}-2} + ... + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0. \end{aligned}$$

Note que as n parcelas do somatório foram divididas em dois blocos com a mesma quantidade de termos, uma vez que n é par. Juntando os termos repetidos, obtemos

$$\begin{aligned} C_n &= 2C_0 \cdot C_{n-1} + 2C_1 \cdot C_{n-2} + ... + 2C_{\frac{n}{2}-1} \cdot C_{\frac{n}{2}} \\ &= 2 \cdot (C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + ... + C_{\frac{n}{2}-1} \cdot C_{\frac{n}{2}}). \end{aligned}$$

Como resultado imediato da Proposição 4.2, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.3 *Dado um número inteiro não negativo n. Se n é par, então C_n é par.*

Demonstração: O fato de n ser par implica, por (14), que $C_n = 2 \cdot (C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + ... + C_{\frac{n}{2}-1} \cdot C_{\frac{n}{2}})$ que, por sua vez, é um número par.

Observe que o a recíproca do Corolário 4.3 não é válida. Um contraexemplo é $C_5 = 42$.

Seguindo um raciocínio análogo àquele adotado na Proposição 4.2, é possível tirar conclusões sobre o valor de C_n quando n é um inteiro não negativo ímpar. Observe:

Proposição 4.4 *Dado um número inteiro não negativo n. Se n é ímpar, então*

$$C_n = 2 \cdot (C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + ... + C_{\frac{(n-3)}{2}} \cdot C_{\frac{(n+1)}{2}}) + C^2_{\frac{(n-1)}{2}}. \tag{15}$$

Demonstração: Segue novamente de (13) que

$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + C_2 \cdot C_{n-3} + ... + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0.$$

Dividindo outra vez em dois blocos, obtemos

$$\begin{gathered} C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + ... + C_{\frac{n-3}{2}} \cdot C_{\frac{n+1}{2}} + C^2_{\frac{n-1}{2}} \\ + \\ C_{\frac{n+1}{2}} \cdot C_{\frac{n-3}{2}} + C_{\frac{n+3}{2}} \cdot C_{\frac{n-3}{2}} + ... + C_{n-2} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0. \end{gathered}$$

Como n é ímpar, o primeiro bloco tem um termo a mais do que o segundo. Podemos tomar esse termo como sendo $C^2_{\frac{n-1}{2}}$. Agora, note que os termos restantes se repetem nos dois blocos. Juntando esses termos, obtemos

$$\begin{aligned} C_n &= 2C_0 \cdot C_{n-1} + 2C_1 \cdot C_{n-2} + ... + 2C_{\frac{n-3}{2}} \cdot C_{\frac{n+1}{2}} + C^2_{\frac{n-1}{2}} \\ &= 2 \cdot (C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + ... + C_{\frac{(n-3)}{2}} \cdot C_{\frac{(n+1)}{2}}) + C^2_{\frac{(n-1)}{2}}. \end{aligned}$$

A recíproca da Proposição 4.4 não é válida, pois $C_5 = 42$ é par e $n = 5$ é ímpar.

Finalmente, a Proposição 4.5 será importante para caracterizar a paridade dos números de Catalan e, consequentemente, do número central de Narayana. Ela introduz uma condição necessária e suficiente para que C_n seja ímpar, além de estabelecer uma relação entre os índices n e $\frac{n-1}{2}$.

Proposição 4.5 *Dado um número inteiro não negativo e ímpar n, então*

$$C_n \text{ é ímpar se, e somente se, } C_{\frac{(n-1)}{2}} \text{ é ímpar.}$$

Demonstração: Suponha C_n ímpar. Seja $w = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + ... + C_{\frac{(n-3)}{2}} \cdot C_{\frac{(n+1)}{2}}$. Como n é ímpar, segue da Proposição 4.4 que

$$C_n = 2w + C^2_{\frac{n-1}{2}}.$$

Como C_n é ímpar por hipótese e $2w$ é par, então, na última igualdade, $C^2_{\frac{n-1}{2}}$ é ímpar, o que implica $C_{\frac{n-1}{2}}$ ímpar.

Reciprocamente, suponha $C_{\frac{n-1}{2}}$ ímpar. Como n é ímpar, então novamente

$$C_n = 2w + C^2_{\frac{n-1}{2}}.$$

Como $C_{\frac{n-1}{2}}$ é ímpar e $2w$ é par, segue que C_n é ímpar.

Com o propósito de evitar cálculos trabalhosos para valores de n grande, surge a necessidade de se obter uma fórmula explícita para os números de Catalan. Isso será feito na seção seguinte.

4.2 Uma fórmula explícita

A fim de se encontrar uma formúla explícita para os números de Catalan, considere a série de potências

$$C(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \tag{16}$$

onde C_n é o n-ésimo termo da sequência de Catalan. Segue de (KOSHY, 2009) o artifício para obter uma fórmula que depende só do número natural n, ou seja, a resolução da recorrência não linear em (13).

Para isso, multiplique z^n em ambos os lados de (16) e some em n, com $n \geq 1$, e adicione C_0 em ambos lados da identidade, como segue,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n + C_0 = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{j=0}^{n-1} C_j C_{n-1-j} + C_0. \tag{17}$$

Utilizando o conceito de produto de séries de potência, obtemos

$$C(z) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j z^j \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-j-1} z + C_0 = z \sum_{j=0}^{n-1} C_j z^j \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-j-1} C_{n-1-j} + C_0. \tag{18}$$

Segue que, $C(z) = zC(z) \cdot C(z) + 1$, isto é, $C(z) = zC(z)^2 + 1$. Ao resolver essa equação quadrática $zC(z)^2 - C(z) + 1 = 0$, obtem-se

$$C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}. \tag{19}$$

Como C_n é sempre um inteiro positivo, escolhemos o sinal negativo. Assim

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}. \tag{20}$$

O próximo passo é determinar uma fórmula explicita para os números de Catalan, utilizando a série binomial, mais precisamente o Exemplo 2.17, ou seja,

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} z^k.$$

Portanto, segue que o n-ésimo número de Catalan C_n, $n \in \mathbb{N}$, é dado por

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{21}$$

A expressão em (21) permite determinar o n-ésimo número de Catalan de maneira simples, recorrendo apenas ao coeficiente binomial. Aplicando-a, temos

$$C_0 = \frac{1}{0+1}\binom{0}{0} = 1, \;\; C_1 = \frac{1}{1+1}\binom{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

$$C_2 = \frac{1}{2+1}\binom{4}{2} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2, \;\; C_3 = \frac{1}{3+1}\binom{6}{3} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5,$$

$$C_4 = \frac{1}{4+1}\binom{8}{4} = \frac{1}{5} \cdot 70 = 14, \;\; C_5 = \frac{1}{5+1}\binom{10}{5} = \frac{1}{6} \cdot 252 = 42.$$

A seção a seguir aborda os números de Mersenne e sua conexão com os números de Catalan. Os números de Mersenne estão intimamente ligados à teoria dos números primos, pois muitos deles são primos, embora nem sempre essa condição seja suficiente.

4.3 Relação entre os números de Catalan e os números de Mersenne

Nesta seção iremos estabelecer um critério para caracterizar a paridade dos números de Catalan a partir dos Números de Mersene. Um fato interessante que iremos pontuar e que dado um $k > 0$, no intervalo cujos extremos inferior é $2^k - 1$ e o superior é $2^{k+1} - 1$ são núneros de Mersene consecutivos os números de Catalan C_n são pares, com $2^k - 1 < n < 2^{k+1} - 1$.

Segundo (OLIVEIRA, 2015), Marin de Mersenne (1588 - 1648) foi um matemático e padre francês que dedicou estudos a números que podem se escritos da forma $2^n - 1$. Mersenne acreditava que estes números eram primos sempre que n era primo.

Definição 4.6 *Os número de Mersenne são números da forma*

$$M_n = 2^n - 1,$$

onde n é um número natural.

Se um número de Mersenne é primo, diz-se que ele é um primo de Mersenne. A proposição a seguir mostra que $2^n - 1$ só tem chance de ser primo quando n for primo.

Proposição 4.7 *Se $2^n - 1$ é primo, então n é primo.*

Demonstração: Suponha que n não seja primo. Temos que existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 \cdot n_2$ com $n_1, n_2 \geq 2$. Como $2^{n_1} - 1$ divide $(2^{n_1})^{n_2} - 1 = 2^{n_1 \cdot n_2} - 1 = 2^n - 1$, segue que $2^n - 1$ não é primo, o que contradiz a hipótese de ele ser primo. Logo, n é primo.

Vale ressaltar que na proposição anterior a reciproca não é verdadeira, isto é, n primo não implica $2^n - 1$ primo. Por exemplo, o número

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

não é primo, apesar de 11 ser primo.

Atualmente, os três maiores primos conhecidos são da forma $M_p = 2^p - 1$ para $p = 74207281$, $p = 77232917$ e $p = 82589933$. Todos eles possuem mais de 20 milhões de dígitos. O maior deles é $2^{82589933} - 1$, descoberto por um grupo de matemáticos — profissionais e amadores — do projeto de pesquisa mundial Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS). Com 24.862.048 dígitos, mais de 1,5 milhão de dígitos a mais do que o segundo colocado. Pertencente a classe dos primos de Mersenne, este é o 51º primo de Mersenne descoberto e já foi apelidado de M82589933.

O Teorema 4.8 introduz um interessentante resultado que caracteriza a paridade dos números de Catalan e envolve os números de Mersene.

Teorema 4.8 *Um número de Catalan C_n é ímpar se, e somente se, n é um número de Mersenne.*

Demonstração: Suponha que C_n é ímpar. Segue do Corolário 4.3 que n é ímpar. Agora, para um n fixo, considere a sequência de números inteiros não negativos:

$$n, \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{4}, \frac{n-7}{8}, \ldots, \frac{n-(2^{m-1}-1)}{2^{m-1}}. \tag{22}$$

Nesse caso, estamos supondo que $\frac{n-1}{2}$ é ímpar, $\frac{\frac{n-1}{2}-1}{2} = \frac{n-3}{4}$ é ímpar, $\frac{\frac{n-3}{4}-1}{2} = \frac{n-7}{8}$ é ímpar, e assim sucessivamente, até $\frac{n-(2^{m-1}-1)}{2^{m-1}}$.

Aplicando a Proposição (4.5) para essa sequência de inteiros não negativos ímpares, temos C_n, $C_{\frac{n-1}{2}}$, $C_{\frac{n-3}{4}}$, ..., $C_{\frac{n-(2^{m-1}-1)}{2^{m-1}}}$ ímpares.

A sequência em (22) é decrescente e limitada por zero. De fato, para $n > 0$, seja a_m o m-ésimo termo da sequência, com $m > 0$. Temos que $a_m = \frac{n-(2^{m-1}-1)}{2^{m-1}} = \frac{n+1}{2^{m-1}} - 1$, então

$$a_{m+1} - a_m = \frac{n+1}{2^m} - 1 - \frac{n+1}{2^{m-1}} + 1 = \frac{n+1}{2^m} - \frac{2(n+1)}{2^m} = \frac{-(n+1)}{2^m} < 0.$$

Assim, $a_{m+1} < a_m$ para todo $m > 0$. Logo, a sequência é monótona decrescente. Por definição, todos os termos da sequência são inteiros não negativos, o que implica que a sequência é limitada inferiormente por zero e superiormente por n. Segue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n-(2^k-1)}{2^k} = 0$, pois $C_0 = 1$. Logo, $n = 2^k - 1$.

Reciprocamente, suponha que n é um número de Mersenne, isto é, $n = 2^k - 1$ para algum k inteiro Suponha, agora, por absurdo, que C_n é par. Considere a sequência decrescente de inteiros ímpares:

$$t_k = 2^k - 1,\ \ t_{k-1} = 2^{k-1} - 1,\ \ t_{k-2} = 2^{k-2} - 1,\ \ ...,\ \ 2^1 - 1.$$

Como t_k é ímpar, então segue da Proposição 4.4 que $C_{t_k} = 2w_k + C^2_{t_{k-1}}$ onde w_k é um número inteiro. Temos, por hipótese de absurdo, que $C_{t_k} = C_{2^k-1} = C_n$ é par, o que implica $C_{t_{k-1}}$ par. Da mesma forma, t_{k-1} é ímpar, e com isso, $C_{t_{k-1}} = 2w_{k-1} + C^2_{t_{k-2}}$ com w_{k-1} inteiro. Assim, $C_{t_{k-2}}$ é par, uma vez que, $C_{t_{k-1}}$ é par. Aplicando esse processo sucessivamente, temos que $C_3 = 2w_2 + C_1^2$ com w_2 inteiro e C_3 par, e isso implica que C_1 é par, o que é uma absurdo, pois $C_1 = 1$. Portanto, C_n é par.

Corolário 4.9 *Seja $n \geq 0$ inteiro. Então, C_n é par, se o somente se, $n \in (2^k-1, 2^{k+1}-1)$ sendo $k \geq 0$ inteiro.*

Demonstração: Suponha C_n par. Então $n \geq 2$. Logo, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n \in [2^k - 1, 2^{k+1} - 1]$. Se for $n = 2^k - 1$ ou $n = 2^{k+1} - 1$, temos, pelo Teorema 4.8, que n é um número de Mersenne e, consequentemente, C_n é ímpar, o que é um absurdo, pois C_n é par por hipótese. Logo, $n \in (2^k - 1, 2^{k+1} - 1)$.

Reciprocamente, suponha $n \in (2^k - 1, 2^{k+1} - 1)$. Como não há outro número de Mersenne em $(2^k - 1, 2^{k+1} - 1)$, então C_n é par.

Para ilustrar o resultado anterior, tomemos $k = 3$. Observe que para todo n no intervalo $(2^3 - 1, 2^4 - 1) = (7, 15)$, C_n é par, como mostra a tabela abaixo.

Tabela 6: Paridade de C_n

n	C_n
7	429
8	**1430**
9	**4862**
10	**16796**
11	**58786**
12	**208012**
13	**742900**
14	**267440**
15	9694845

Fonte: Elaborado pelo autor

4.4 Divisibilidade para C_n

Os números de Catalan apresentam padrões interessantes de divisibilidade, especialmente com relação aos números primos. Essas questões estão intimamente ligadas à teoria dos números e têm aplicações em diversas áreas da matemática discreta e da computação.

Antes do resultado principal serão apresentados alguns resultados de aritmética, entre eles o teorema de Legendre.

Definição 4.10 *Sejam a e b inteiros positivos, representamos por*

$$\left[\frac{a}{b}\right] = q$$

o quociente ou parte inteira da divisão de a por b, ou seja, $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$.

Os exemplos a seguir são aplicações direta da Definição 4.10

Exemplo 4.11 *Sejam m, n números naturais, com $1 \leq n < m$ e p um número primo, temos que*

$$\left[\frac{2p^m - 2}{p^n}\right] = 2p^{m-n} - 1.$$

Solução: Note que $2p^m - 2 = p^n \cdot (2p^{m-n} - 1) + (p^n - 2)$. Assim, segue da definição 3.3 que o quociente da divisão de $2p^m - 2$ por p^n é $q = 2p^{m-n} - 1$ e o resto é $r = p^n - 2$.

Exemplo 4.12 *Sejam m, n números naturais, com $1 \leq n < m$ e p um número primo, temos que*

$$\left[\frac{p^m - 1}{p^n}\right] = p^{m-n} - 1.$$

Como $p^m - 1 = p^n \cdot (p^{m-n} - 1) + (p^n - 1)$, o resultado segue da Definição 4.10.

Proposição 4.13 *Para todo primo p ímpar e $k \geq 1$, vale a igualdade*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2p^k - 2}{p^m}\right] = \frac{2(p^k - 1)}{p - 1} - k.$$

Demonstração: Temos que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2p^k - 2}{p^m}\right] = \left[\frac{2p^k - 2}{p}\right] + \left[\frac{2pk - 2}{p^2}\right] + ... + \left[\frac{2p^k - 2}{p^k}\right] + \left[\frac{2p^k - 2}{p^{k+1}}\right] + ... \tag{23}$$

Note que para $m > k$, o quociente da divisão de $2p^k - 2$ por p^m será sempre zero. Daí, temos em (23)

$$\sum_{m=1}^{k} \left[\frac{2p^k - 2}{p^m}\right] = \left[\frac{2p^k - 2}{p}\right] + \left[\frac{2pk - 2}{p^2}\right] + ... + \left[\frac{2p^k - 2}{p^k}\right] \tag{24}$$

Aplicando o resultado do Exemplo 4.11 em (24), segue que

$$\sum_{m=1}^{k} \left[\frac{2p^k - 2}{p^m}\right] = (2p^{k-1} - 1) + (2p^{k-2} - 1) + ... + (2p - 1) + 1$$

$$= 2(p^{k-1} + p^{k-2} + ... + p + 1) - 2 - (k - 1) + 1 = \frac{2(p^k - 1)}{p - 1} - k.$$

Proposição 4.14 *Para todo primo p ímpar e $k \geq 1$, vale a igualdade*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{p^k - 1}{p^m}\right] = \frac{p^k - p}{p - 1} - (k - 1).$$

Demonstração: Temos que,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{p^k - 1}{p^m}\right] = \left[\frac{p^k - 1}{p}\right] + \left[\frac{p^k - 1}{p^2}\right] + ... + \left[\frac{p^k - 1}{p^{k-1}}\right] + \left[\frac{p^k - 1}{p^k}\right] + ... \tag{25}$$

Note agora que para $m \geq k$ o quociente da divisão de $p^k - 1$ por p^m será sempre zero. Assim, temos em (25)

$$\sum_{m=1}^{k} \left[\frac{p^k - 1}{p^m}\right] = \left[\frac{p^k - 1}{p}\right] + \left[\frac{p^k - 1}{p^2}\right] + ... + \left[\frac{p^k - 1}{p^{k-1}}\right] \tag{26}$$

Aplicando a identidade do Exemplo 4.11 em (26), temos que

$$\sum_{m=1}^{k} \left[\frac{p^k - 1}{p^m}\right] = (p^{k-1} - 1) + (p^{k-2} - 1) + ... + (p^2 - 1) + (p - 1) =$$

$$= p^{k-1} + p^{k-2} + ... + p - (k - 1) = \frac{p^k - p}{p - 1} - (k - 1).$$

O Teorema de Legendre (Teorema 4.15) é um resultado interessante em Teoria dos Números e ele será útil para demonstrar o Teorema 4.16, que é um dos principais do trabalho. O resultado foi obtido pelo matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833) em 1808, e constitui um critério para determinar a potência máxima de um número primo p que divide o fatorial de um número natural n.

Teorema 4.15 *Dado um número natural n e um número primo p, temos que a maior potência de p que divide $n!$, denotado por $E_p(n!)$, é*

$$E_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + ... = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^m}\right]$$

onde $\left[\frac{n}{p^m}\right]$ representa o quociente da divisão de n por p^m, $m = 1, 2, 3, ...$

A demonstração detalhada do resultado acima pode ser consultada em (HEFEZ, 2016).

Pelo Teorema 4.8 é possível notar que para $p = 2$, é verdade que para $k \geq 1$ natural, $p \nmid C_{p^k-1}$. De fato, se $p = 2$, então $p^k - 1$ é um número de Mersenne, o que implica C_{p^k-1} ímpar, logo, $p = 2 \nmid C_{p^k-1}$. O teorema a seguir apresenta uma generalização do resultado anterior para números da forma $p^k - 1$.

Teorema 4.16 *Para todo número primo p e $k \geq 1$ inteiro, é verdade que*

$$p \nmid C_{p^k-1}$$

Demonstração: Se $p = 2$, o resultado segue do Teorema 4.8. Seja p um número primo ímpar. Então, de (21), segue que

$$C_{p^k-1} = \frac{1}{p^k - 1 + 1}\binom{2(p^k-1)}{p^k-1} = \frac{1}{p^k}\binom{2p^k-2}{p^k-1} = \frac{1}{p^k}\frac{(2p^k-2)!}{((p^k-1)!)^2}.$$

Sejam M_1, M_2 e s as maiores potências de p que dividem $(2p^k - 2)!$, $(p^k - 1)!$ e C_{p^k-1}, respectivamente. Do Teorema 4.15, temos

$$M_1 = E_p((2p^k-2)!) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{2p^k-2}{p^m}\right] \text{ e } M_2 = E_p((p^k-1)!) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{p^k-1}{p^m}\right].$$

Segue das Proposições 4.13 e 4.14 que

$$M_1 = \frac{2(p^k-1)}{p-1} - k \quad \text{e} \quad M_2 = \frac{p^k-p}{p-1} - (k-1).$$

Claramente,

$$s = M_1 - 2M_2 - k = \frac{2(p^k-1)}{p-1} - k - 2\Big(\frac{p^k-p}{p-1} - (k-1)\Big) - k =$$

$$= \frac{2(p^k-1) - 2(p^k-p) + 2(k-1)(p-1) - 2k(p-1)}{p-1} =$$

$$= \frac{2p^k - 2 - 2p^k + 2p + 2kp - 2k - 2p + 2 - 2kp + 2k}{p-1} = \frac{0}{p-1} = 0.$$

Ou seja, a maior potência de p que divide C_{p^k-1} é 0. Isso significa que $p \nmid C_{p^k-1}$.

No capítulo seguinte será apresentada um breve histórico dos números de Narayana que formam uma sequência combinatória que aparece em diversas contagens relacionadas a estruturas discretas, como árvores binárias, partições e caminhos em grade. Eles são definidos por uma relação específica envolvendo coeficientes binomiais e estão intimamente ligados aos números de Catalan.

5 HISTÓRICO E APLICAÇÕES DOS NÚMEROS DE NARAYANA

Os números de Narayana, representados como $N(n, r)$, formam um triângulo de números naturais que surgem em diversos problemas de contagem na matemática combinatória. O nome desses números é uma homenagem ao matemático canadense de origem indiana Tadepalli Venkata Narayana (1930-1987), em reconhecimento à sua significativa contribuição ao destacar a importância desses números, particularmente em sua obra sobre a teoria dos caminhos reticulados e suas amplas aplicações em combinatória.

Embora os números que compõem este triângulo possam ter aparecido implicitamente em trabalhos anteriores, foi o trabalho de T. V. Narayana que consolidou seu estudo e demonstrou sua relevância em diversos contextos combinatórios. Suas pesquisas trouxeram à luz as conexões desses números com problemas como a contagem de caminhos de Dyck com um número específico de picos e a enumeração de certas estruturas arbóreas.

Segundo (MOHANDY, 2002), o grande legado de Narayana, apesar de estatístico, está no campo da combinatória enumerativa. Na década de 50, ele publicou um trabalho pioneiro em combinatória de caminhos reticulados, donde resultou uma fórmula explícita para o número de caminhos de $(0, 0)$ a (n, n) que não cruzam a linha $x = y$. Esses números ficaram, mais tarde, conhecidos como "Números de Narayana".

Embora a paixão de Narayana pela combinatória fosse evidente, há uma ironia em seu caminho: apesar de seu grande interesse por essa área, ele também se envolveu no campo dos desenhos adaptativos em estatística. Em sua tese de doutorado, ele apresentou dois modelos sequenciais para estimar a mediana, mas essas ideias não foram publicadas nem exploradas mais a fundo, conforme é apontado por (MOHANDY, 2002). Como resultado, ficaram pouco discutidas nas abordagens atuais sobre métodos adaptativos na estatística, contrastando com o impacto perene de sua combinatória.

Narayana alcançou uma reputação internacional como grande pesquisador em análise combinatória e estatística. Seus trabalhos envolvendo teoria dos torneios, composições, planos de amostragem e caminhos reticulados o estabeleceram como uma autoridade nesses campos da matemática.

Segundo (GRIMALDI, 2012), os números de Narayana são utilizados na contagem de caminhos de Dyck. Um caminho de Dyck de comprimento $2n$ é um caminho no plano cartesiano que começa no ponto $(0,0)$ e termina no ponto $(2n,0)$. Nele, em cada passo, os caminhos são definidos partindo do ponto (m,n) e se deslocando para $(m+1,n+1)$ ou $(m+1,n-1)$. A primeira opção pode ser chamada de passo ascendente (U) e a segunda de passo descendente (D).

Os números $N(n,r)$ são utilizados para calcular o número de caminhos de Dyck com exatamente r picos. Um pico em um caminho de Dyck é um ponto onde um passo ascendente é imediatamente seguido por um passo descendente. Graficamente, é um "topo"da trajetória do caminho.

Para $n = 3$, temos que os caminhos de Dyck de comprimento 6 são: UUUDDD (1 pico), UUDUDD (2 picos), UUDDUD (2 picos), UDUUDD (2 picos) e UDUDUD (3 picos). No capítulo seguinte será introduzida uma fórmula explícita para os números de Narayana que garante que $N(3,1) = 1$ (corresponde a UUUDDD), $N(3,2) = 3$ (corresponde a UUDUDD, UUDDUD, UDUUDD) e $N(3,3) = 1$ (corresponde a UDUDUD).

Os caminhos de Dyck, por sua vez, possuem outras aplicações, o que também implica a relação dos números de Narayana e dos números de Catalan com essas aplicações (GARDNER, 1976). Um exemplo é o número de maneiras de formar triângulos em um polígono convexo de $n+2$ lados que é dado pelo n-ésimo número de Catalan, e cada triangulação pode ser codificada por um caminho de Dyck.

Os números de Narayana $N(n,r)$ também possuem uma aplicação interessante na contagem de árvores enraizadas planas (ordered rooted trees) com n vértices e exatamente r folhas (STANLEY, 1997).

Uma árvore enraizada plana é uma árvore enraizada onde a ordem dos filhos de cada nó é significativa. Uma folha é um vértice de grau 1 (exceto possivelmente a raiz, se a árvore tiver apenas um vértice ou se a raiz tiver grau 1 e $n > 1$).

Como exemplo, considere árvores enraizadas planas com $n = 4$ vértices. Os números de Narayana para $n = 4$ são: $N(4,1) = 1$ (1 árvore com 1 folha - um caminho linear), $N(4,2) = 6$ (6 árvores com 2 folhas), $N(4,3) = 6$ (6 árvores com 3 folhas) e $N(4,4) = 1$ (1 árvore com 4 folhas - todos os nós internos têm grau 2).

É crucial distinguir os conceitos de Sequência de Narayana e Números de Narayana (objeto de estudo desse trabalho), que são dois objetos distintos na matemática combinatória, apesar de compartilharem o nome "Narayana".

Segundo (RAMIREZ; SIRVENT, 2015), a sequência de Narayana, que tem suas origens no trabalho do matemático indiano Narayana Pandit no século XIV. Trata-se de uma sequência de inteiros $N(n)_{n\geq 1}$ definida pela relação de recorrência linear de terceira ordem:

$$N(n) = N(n-1) + N(n-2) + N(n-3),$$

com $N(1) = N(2) = 1$ e $N(3) = 2$. Os primeiros termos da sequência são 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, ... Esta sequência aparece em diversos problemas combinatórios, como a contagem de maneiras de ladrilhar um retângulo 2×n com dominós 1×2 e triminós 1×3 (GUY, 1981).

Os Números de Narayana, como já mencionado, tem esse nome devido a Tadepalli Venkata Narayana. Tais números formam um triângulo de números naturais que possui propriedades similares ao triângulo de Pascal e diversas relações com os números binomiais e os números de Catalan.

Confundir a sequência de Narayana com os números de Narayana pode levar a erros e mal-entendidos significativos ao trabalhar em problemas de combinatória ou ao ler literatura sobre o assunto. As propriedades, as fórmulas de recorrência (no caso da sequência e do triângulo), e as aplicações de cada um são distintas.

A sequência é unidimensional, gerada por uma relação de recorrência envolvendo os três termos precedentes, enquanto os números formam uma estrutura bidimensional (um triângulo) e obedecem a uma relação de recorrência diferente.

A homonímia surge da coincidência do nome "Narayana", referindo-se a dois matemáticos diferentes com esse nome. É essencial estar atento ao contexto para determinar a qual dos dois se está referindo. Ao discutir esses conceitos, é útil especificar "a sequência de Narayana (de Narayana Pandit)" ou "os números de Narayana (de Tadepalli V. Narayana)" para evitar qualquer ambiguidade.

Em resumo, embora ambos os conceitos sejam importantes na combinatória, eles representam objetos matemáticos distintos com diferentes origens, definições e aplicações. A clareza na terminologia é fundamental para uma compreensão precisa.

6 NÚMEROS DE NARAYANA

Na literatura matemática, os números de Narayana, denotados por $N(n, r)$, são frequentemente introduzidos através da fórmula de recorrência $N(n, r) = N(n-1, r-1) + N(n-1, r)$ com condições de fronteira $N(n, 1) = 1$ e $N(n, n) = 1$, para $n \geq 1$. Contudo, no presente trabalho, será adotada uma abordagem distinta, definindo os números de Narayana a partir de sua relação intrínseca com os números triangulares. Será comentada a equivalência entre essa definição baseada nos números triangulares e a formulação recursiva padrão encontrada na literatura, estabelecendo assim uma perspectiva diferente sobre a natureza e as propriedades desses importantes números combinatórios.

Também é comum que os números de Narayana sejam definidos diretamente a partir de uma fórmula explícita. A fórmula a seguir aparece em (F.INC, 2025).

Definição 6.1 *Seja $n > 0$ inteiro e $1 \leq r \leq n$, os números de Narayana são dados por*

$$\overline{N}(n, r) = \frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\binom{n-1}{r-1},$$

com $\overline{N}(0, 0) = 1$.

Para verificar que tal fórmula satisfaz a relação de recorrência dos números de Narayana, veja (GRIMALDI, 2012). O propósito do presente trabalho é definir os números de Narayana partindo do conceito de números triangulares. Desse modo, temos a seguinte definição:

Definição 6.2 *Os números formados a partir de dois inteiros n e r com $n \geq 0$ e $0 \leq r \leq n$ dados por*

$$N(n,r) = \frac{T_n!}{T_r! \cdot T_{n-r}!}, \tag{27}$$

onde T_n é o n-ésimo número triângular, são chamados de números de Narayana.

É possível estabelecer outra relação de recorrência para os números de Narayana, partindo da definição por números triangulares, conforme mostra o Teorema 6.3.

Teorema 6.3 *Os números de Narayana $N(n,r)$ satisfazem a relação de recorrência*

$$N(n,r) = \frac{T_n}{T_r} \cdot N(n-1, r-1) \tag{28}$$

Demonstração: De (27), temos que

$$N(n,r) = \frac{T_n!}{T_r! \cdot T_{n-r}!}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por T_r, obtém-se

$$N(n,r) \cdot T_r = \frac{T_n!}{T_{r-1}! \cdot T_{n-r}!} = \frac{T_{n-1}!}{T_{r-1}! \cdot T_{n-r}!} \cdot T_n = N(n-1, r-1) \cdot T_n.$$

Logo,

$$N(n,r) = \frac{T_n}{T_r} \cdot N(n-1, r-1).$$

Assim como nos números binomiais, é possível verificar uma relação de simetria entre os números de Narayana. Observe o Teorema 6.4.

Teorema 6.4 *Os números de Narayana saisfazem a seguinte relação simétrica:*

$$N(n,r) = N(n, n-r)$$

Demonstração: Segue de (27) que

$$N(n,r) = \frac{T_n!}{T_r! \cdot T_{n-r}!} = \frac{T_n!}{T_{n-r}! \cdot T_r!} = \frac{T_n!}{T_{n-r}! \cdot T_{(n-(n-r))}!} = N(n, n-r).$$

O Teorema 6.5 introduz outra fórmula explicita para os números de Narayana, baseada nos números triangulares e, novamente, em termos do coeficiente binomial.

Teorema 6.5 *Sejam $n \geq 0$ inteiro e $0 \leq r \leq n$, os números de Narayana satisfazem a seguinte relação:*

$$N(n,r) = \frac{1}{n-r+1} \binom{n}{r} \cdot \binom{n+1}{r+1}. \tag{29}$$

Demonstração: Segue de (27) que

$$N(n,r)=\frac{T_n!}{T_r!\cdot T_{n-r}!}=\frac{T_{n-r}!\cdot T_{n-r+1}\cdot T_{n-r+2}\cdot ...\cdot T_{n-1}\cdot T_n}{T_r!\cdot T_{n-r}!}$$

$$=\frac{T_n\cdot T_{n-1}\cdot ...\cdot T_{n-r+2}\cdot T_{n-r+1}}{T_r\cdot T_{r-1}\cdot ...\cdot T_2\cdot T_1}$$

$$=\frac{\frac{(n+1)n}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot ...\cdot\frac{(n-r+2)(n-r+1)}{2}}{\frac{(r+1)r}{2}\cdot\frac{r(r-1)}{2}\cdot ...\cdot\frac{3\cdot 2}{2}\cdot\frac{2\cdot 1}{2}}$$

$$=\frac{(n+1)^2\cdot n^2\cdot(n-1)^2\cdot ...\cdot(n-r+2)^2\cdot(n-r+1)}{(r+1)\cdot r^2\cdot(r-1)^2\cdot ...\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1^2}$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot ...\cdot(n-r+1)}{(r+1)\cdot r\cdot(r-1)\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot ...\cdot(n-r+1)}{r\cdot(r-1)\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{n-r+1}$$

$$=\binom{n+1}{r+1}\cdot\binom{n}{r}\cdot\frac{1}{n-r+1}.$$

Logo,

$$N(n,r)=\frac{1}{n-r+1}\cdot\binom{n}{r}\cdot\binom{n+1}{r+1}$$

.

Teorema 6.6 *As fórmulas explícitas da Definição 6.1 e do Teorema 6.5 são equivalentes.*

Demonstração: Aplicando o Teorema 2.8 na fórmula do Teorema 6.5, temos

$$N(n,r)=\frac{1}{n+1}\cdot\binom{n+1}{n-r+1}\cdot\binom{n+1}{r+1}.$$

Agora, utilizando os Teoremas 2.4 e 2.5, segue que

$$N(n,r)=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n-r+1}\cdot\frac{n+1}{r+1}\binom{n}{r}=\frac{1}{r+1}\binom{n+1}{n-r+1}\binom{n}{r}$$

$$=\frac{1}{r+1}\binom{n+1}{n+1-(n-r+1)}\binom{n}{r}=\frac{1}{r+1}\binom{n+1}{r}\binom{n}{r}=\overline{N}(n+1,r+1).$$

Fazendo $r=0$, temos

$$\overline{N}(n+1,1)=\frac{1}{1+0}\binom{n+1}{0}\binom{n}{0}=1=N(n,0).$$

Fazendo $r=n$, segue que

$$\overline{N}(n+1,r+1)=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{n}\binom{n}{n}=1=N(n,n).$$

Logo, para $n \geq 1$ e $1 \leq r \leq n$, vale que

$$N(n-1, r-1) = \overline{N}(n-1+1, r-1+1) = \overline{N}(n, r) = \frac{1}{r}\binom{n}{r-1}\binom{n-1}{r-1}.$$

Alguns autores, como (DMITRY; VLADIMIR; YURIY, 2022), definem os números de Narayana como

$$N_{n,r} = \frac{1}{n}\binom{n}{r}\binom{n}{r+1},$$

para $n \geq 1$ e $0 \leq r \leq n$. Observe que

$$N_{m,r} = \frac{1}{n}\binom{n}{r}\binom{n}{r+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{n!}{(r+1)r! \cdot (n-r-1)!} = \frac{1}{r+1} \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$$

$$= \frac{1}{r+1}\binom{n}{r}\binom{n-1}{r} = \overline{N}(n+1, r+1).$$

A seção abaixo apresenta o triângulo de Narayana que é uma disposição triangular de números inteiros que generaliza os números de Narayana, assim como o triângulo de Pascal organiza os coeficientes binomiais. Cada entrada do triângulo representa uma contagem combinatória específica, frequentemente relacionada à enumeração de árvores, caminhos reticulados e partições de conjuntos. Sua estrutura reflete padrões simétricos e recorrências que aparecem naturalmente em problemas de combinatória enumerativa

6.1 O triângulo de Narayana

Dados dois números inteiros n e r com $n \geq 0$ e $0 \leq r \leq n$, a partir dos números de Narayana $N(n, r)$, é possível obter o chamado triângulo de Narayana. Para cada valor de n, teremos $r = 0, 1, 2, ..., n$.

Para a primeira linha, fixamos $n = 0$. Desse modo, temos que $r = 0$ e utilizando o Teorema 6.5, temos $N(n, r) = N(0, 0) = 1$.

Para a segunda linha, se $n = 1$, então $r = 0$ ou $r = 1$, donde

$$N(1, 0) = \binom{1+1}{0+1} \cdot \binom{1}{0} \cdot \frac{1}{1-0+1} = \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{0} \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$N(1, 1) = \binom{1+1}{1+1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \frac{1}{1-1+1} = \binom{2}{2} \cdot \binom{1}{1} = 1.$$

Na terceira linha, se $n = 2$, segue que $r = 0$, $r = 1$ ou $r = 2$. Assim,

$$N(2, 0) = \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{0} \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 1,$$

$$N(2, 1) = \binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$

$$N(2,2) = \binom{3}{3} \cdot \binom{2}{2} = 1.$$

Na quarta linha, para $n = 3$, temos $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$ ou $r = 3$. Segue que

$$\begin{aligned} N(3,0) &= \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{0} \cdot \frac{1}{4} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 1, \\ N(3,1) &= \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{3} = 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 6, \\ N(3,2) &= \binom{4}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6, \\ N(3,3) &= 1. \end{aligned}$$

Prosseguindo desse modo, obtém-se as entradas para as linhas do triângulo de Narayana.

Figura 1: Triângulo de Narayana

$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	3	1				
$n=3$	1	6	6	1			
$n=4$	1	10	20	10	1		
$n=5$	1	15	50	50	15	1	
$n=6$	1	21	105	175	105	21	1

Fonte: Elaborado pelo autor

Se lidos da esquerda para a direita e seguindo a ordem das linhas, os números 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 6, 6, 1, 1, 10, 20, 10, 11, 15, 50, 50, 15, 1, ... que aparecem no triângulo formam exatamente a sequência dos números de Narayana.

É possível observar que os números que formam o triângulo da Figura 1, são simétricos com relação a linha vertical central. Esse resultado segue do Teorema 6.4.

Os números 1, 3, 20, 175, ..., todos pertencentes a linha vertical central do triângulo de Narayana, são chamados de números centrais de Narayana. Esses números possuem estreita relação com os números de Catalan, que será abordada em um dos teoremas da próxima seção.

6.2 Propriedades dos números de Narayana

Através dos teoremas abaixo, são apresentadas algumas propriedades que envolvem os números de Narayana. O Teorema 6.7 apresenta uma identidade similar àquela demonstrada no Teorema 2.6 no capítulo de números binomiais.

Teorema 6.7 *Dados n e r inteiros com $n \geq 0$ e $0 \leq r \leq n$, temos que*

$$N(n, r+1) \cdot N(n+1, r) \cdot N(n+2, r+2) = N(n, r) \cdot N(n+1, r+2) \cdot N(n+2, r+1).$$

Demonstração: Segue do Teorema 6.5 que

$$N(n, r+1) \cdot N(n+1, r) \cdot N(n+2, r+2) =$$

$$= \frac{1}{n-r} \cdot \binom{n}{r+1} \cdot \binom{n+1}{r+2} \cdot \frac{1}{n-r+2} \cdot \binom{n+1}{r} \cdot \binom{n+2}{r+1} \cdot \frac{1}{n-r+1} \cdot \binom{n+2}{r+2} \cdot \binom{n+3}{r+3}$$

$$= \binom{n}{r+1} \cdot \frac{1}{n-r+2} \cdot \binom{n+1}{r} \cdot \binom{n+2}{r+1} \cdot \frac{1}{n-r+1} \cdot \binom{n+2}{r+2} \cdot \frac{1}{n-r} \cdot \binom{n+1}{r+2} \cdot \binom{n+3}{r+3}$$

$$= \binom{n}{r+1} \cdot \frac{1}{n-r+2} \cdot \binom{n+1}{r} \cdot \binom{n+2}{r+1} \cdot \frac{1}{n-r+1} \cdot \binom{n+2}{r+2} \cdot \frac{1}{n-r} \cdot \binom{n+1}{r+2} \cdot \binom{n+2}{r+3} \cdot \frac{n+3}{n-r} \tag{30}$$

Como

$$\frac{1}{n-r} \cdot \binom{n+1}{r+2} \cdot \binom{n+2}{r+3} = N(n+1, r+2),$$

Segue, em (30), que

$$N(n, r+1) \cdot N(n+1, r) \cdot N(n+2, r+2) =$$

$$= \binom{n}{r+1} \cdot \frac{1}{n-r+2} \cdot \binom{n+1}{r} \cdot \binom{n+2}{r+1} \cdot \frac{1}{n-r+1} \cdot \binom{n+2}{r+2} \cdot \frac{n+3}{n-r} \cdot N(n+1, r+2)$$

$$= \binom{n}{r+1} \cdot \frac{1}{n-r+2} \cdot \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \cdot \binom{n+2}{r+1} \cdot \frac{1}{n-r+1} \cdot \frac{(n+2)!}{(r+2)!(n-r)!} \cdot \frac{n+3}{n-r} \cdot N(n+1, r+2). \tag{31}$$

Note que

$$\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \cdot \frac{(n+2)!}{(r+2)!(n-r)!} \cdot \frac{n+3}{n-r} = \binom{n+3}{r+2} \frac{(n+1)!}{r!(n-r)(n-r)!}$$

e

$$\frac{1}{n-r+2} \cdot \binom{n+2}{r+1} \cdot \binom{n+3}{r+2} = N(n+2, r+1).$$

Assim, temos em (31)

$$N(n, r+1) \cdot N(n+1, r) \cdot N(n+2, r+2) =$$

$$= \frac{1}{n-r+1} \cdot \binom{n}{r+1} \cdot \frac{(n+1)!}{r!(n-r)(n-r)!} \cdot N(n+1, r+2) \cdot N(n+2, r+1)$$

$$= \frac{1}{n-r+1} \cdot \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{r!(n-r)(n-r)!} \cdot N(n+1, r+2) \cdot N(n+2, r+1)$$

$$= \frac{1}{n-r+1} \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} \cdot \cdot N(n+1, r+2) \cdot N(n+2, r+1)$$

$$= \frac{1}{n-r+1} \cdot \binom{n}{r} \cdot \binom{n+1}{r+1} \cdot N(n+1, r+2) \cdot N(n+2, r+1)$$

$$= N(n, r) \cdot N(n+1, r+2) \cdot N(n+2, r+1).$$

O Teorema 6.8 apresenta um resultado referente aos números da sequência 1, 3, 6, 10, 15, 21, ..., ou seja, os números da forma $N(n, 1)$, que compõem a segunda diagonal do triângulo de Narayana.

Teorema 6.8 *A segunda diagonal do triângulo de Narayana é formada por números triangulares, isto é,*

$$N(n, 1) = T_n$$

Demonstração: Segue do Teorema 6.5 que

$$N(n, 1) = \frac{1}{n} \cdot \binom{n}{1} \cdot \binom{n+1}{2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n+1)n(n-1)!}{2(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n.$$

O Teorema 6.9 estabelece uma condição para que um número de Narayana seja um quadrado perfeito. Na demonstração desse resultado, os números de Catalan surgem naturalmente.

Teorema 6.9 *Os números centrais de Narayana serão quadrados se, e somente se, $2n+1$ for um quadrado.*

Demonstração: Primeiramente, note que os números centrais de Narayana são da forma $N(2n, n)$. Segue do Teorema 6.5 que

$$N(2n,n) = \frac{1}{2n-n+1} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \binom{2n+1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(2n+1)!}{(n+1)! \cdot n!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \cdot (2n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$$

$$= (2n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = (2n+1) \cdot C_n^2,$$

onde C_n é o n-ésimo número de Catalan da Definição 4.1. Assim, os números centrais de Narayana são dados pelo produto $(2n+1) \cdot C_n^2$, onde o segundo termo já é um quadrado. Logo, $N(2n, n)$ será um quadrado se, e somente se, $(2n + 1)$ for um quadrado.

A tabela abaixo ilustra o resultado do Teorema 6.9, com os respectivos números centrais de Narayana para os primeiros quadrados da forma $2n + 1$.

Tabela 7: Números Centrais de Narayana Quadrados Perfeitos

n	C_n	C_n^2	$2n+1$	$(2n+1) \cdot C_n^2 = N(2n,n)$
0	1	1	1	$1 = 1^2$
1	1	1	3	3
2	2	4	5	20
3	5	25	7	175
4	14	196	9	$1764 = 42^2$
...	...	...	...	...
12	208012	43268992144	25	$1081724803600 = 1040060^2$
...	...	...	...	...

Fonte: Elaborado pelo autor

Também é possível determinar a paridade de alguns dos números de Narayana. De acordo com o Teorema 6.10, um número central de Narayana só será ímpar caso satisfaça a condição de ser também um número de Mersenne.

Teorema 6.10 *Um número central de Narayana será ímpar se, e somente se, $n = 0$ ou n é um número de Mersenne.*

Demonstração: Para $n = 0$ temos que $N(2n, n) = N(0, 0) = 1$. Agora, do Teorema 6.9, segue que $N(2n, n) = (2n + 1) \cdot C_n^2$. Como $2n + 1$ é ímpar para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $N(2n, n)$ é ímpar se, e somente se C_n^2 é ímpar, ou seja, se, e somente se, C_n é ímpar. Logo, segue do Teorema 4.8 que $N(2n, n)$ é ímpar se, e somente se, n é um número de Mersenne.

Nos teoremas anteriores, os números de Catalan são utilizados na demonstração como uma ferramenta para provar resultados envolvendo características dos próprios números de Narayana. Já no Teorema 6.11, fica estabelecida uma relação mais direta e explícita entre os números de Narayana e os números de Catalan.

Teorema 6.11 *A soma das entradas de cada linha do triângulo de Narayana é um número de Catalan. Em particular, temos*

$$\sum_{r=0}^{n} N(n,r) = C_{n+1}.$$

Demonstração: Do Teorema 6.5, temos que

$$\sum_{r=0}^{n} N(n,r) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n-r+1} \cdot \binom{n}{r} \cdot \binom{n+1}{r+1}.$$

Utilizando a identidade do Teorema 2.8, temos

$$\sum_{r=0}^{n} N(n,r) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n-r+1} \cdot \binom{n}{r} \cdot \binom{n+1}{r+1} = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{n-r+1} \cdot \binom{n+1}{r+1}.$$

Aplicando o Teorema 2.4 e o Corolário 2.13, obtém-se

$$\sum_{r=0}^{n} N(n,r) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{r=0}^{n} \binom{n+1}{n-r+1} \cdot \binom{n+1}{n-r} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+2} = C_{n+1}.$$

O número C_{n+1} dado pela soma das entradas da n-ésima linha do triângulo de Narayana também indica o número de caminhos de Dyck de comprimento $2n$, conforme foi visto no capítulo anterior.

O Teorema 4.16 apresenta um critério de divisibilidade para os números de Narayana quando divididos por números triangulares.

Teorema 6.12 *Sejam n e r inteiros positivos. Se $mdc(T_n, T_r) = 1$, então $T_n \mid N(n,r)$.*

Demonstração: De fato, segue do Teorema 6.3 que

$$N(n,r) = \frac{T_n}{T_r} \cdot N(n-1, r-1) \implies T_r \cdot N(n,r) = T_n \cdot N(n-1, r-1).$$

Então, $T_n \mid T_r \cdot N(n,r)$. Como $mdc(T_n, T_r) = 1$, segue que

$$T_n \mid N(n,r).$$

Como aplicação do Teorema 6.12, tome os números triangulares $T_6 = 21$ e $T_4 = 10$. Temos que $mdc(21, 10) = 1$. Logo $21 \mid N(21, 10)$. De fato,

$$N(21,10) = \frac{1}{21-10+1} \cdot \binom{21}{10} \cdot \binom{22}{11} = \frac{1}{12} \cdot \frac{21!}{10! \cdot 11!} \cdot \frac{22!}{11! \cdot 11!} =$$

$$= 20734762776 = 21 \cdot 987369656.$$

Assim como feito para os números de Catalan no Teorema 4.16, é possível mostrar que números primos também não dividem certos números de Narayana. O Teorema 6.13 mostra um critério de divisibilidade para os números centrais de Narayana.

Teorema 6.13 *Seja p um número primo e $k \geq 1$ um número inteiro. Então,*

$$p \nmid N(2p^k - 2, p^k - 1).$$

Demonstração: Segue do Teorema 6.9 que

$$N(2p^k - 2, p^k - 1) = N(2(p^k - 1), p^k - 1) = [2(p^k - 1) + 1] \cdot C^2_{p^k-1}.$$

Do Teorema 4.16, temos que $p \nmid C_{p^k-1}$, o que implica $p \nmid C^2_{p^k-1}$.

Por outro lado, $2(p^k - 1) + 1 = 2p^k - 1$. Daí,

$$p^k \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2p^k \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2p^k - 1 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Logo, $p \nmid 2p^k - 1$. Portanto, $p \nmid N(2p^k - 2, p^k - 1)$.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, investigou-se de forma aprofundada os números de Narayana a partir da perspectiva dos números triangulares, estabelecendo conexões robustas entre essas duas sequências combinatórias e demonstrando, por meio de propriedades algébricas e identidades combinatórias, como elas se inter-relacionam com os coeficientes binomiais e os números de Catalan. A partir da expressão clássica dos números triangulares $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, e sua equivalência com $\binom{n+1}{2}$, foi possível revelar que os números de Narayana não apenas refinam a contagem proporcionada pelos números de Catalan, mas também podem ampliar o entendimento das estruturas de contagem que emergem em problemas combinatórios.

O estudo evidenciou que os números de Narayana, inicialmente introduzidos por MacMahon e redescobertos por Tadepalli Venkata Narayana, representam uma ferramenta na combinatória enumerativa, pois possibilitam a decomposição de problemas complexos em subproblemas mais simples. Essa abordagem não só contribuiu para a formalização de novas identidades algébricas, como também reforçou a importância da aplicação de métodos indutivos e recursivos na demonstração de propriedades fundamentais. Dessa maneira, a relação entre os números triangulares e os coeficientes binomiais foi explorada de modo a demonstrar, por exemplo, que o número triangular T_n pode ser visto como o número de maneiras de conectar dois pontos distintos em um conjunto de $n + 1$ pontos, proporcionando assim uma interpretação geométrica que enriquece a compreensão dos fenômenos combinatórios.

Ademais, este trabalho destacou a relevância didática dos conceitos abordados, considerando a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) como referência para a inclusão de temas de análise combinatória e probabilidade no ensino fundamental e médio. A incorporação dos números binomiais e triangulares no currículo educacional revela-se essencial para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, competência indispensável para a formação dos alunos. Assim, a abordagem proposta aqui não apenas contribui para a pesquisa acadêmica, mas também apresenta implicações práticas que podem ser exploradas no contexto escolar, com alunos que queiram aprofundar os estudos matemáticos com orientações e possíveis projetos de iniciação científica, permitindo uma integração entre teoria e prática que potencializa o ensino da matemática.

Durante a pesquisa, foi possível observar que os números de Narayana, apesar de não representarem um tema muito explorado nas discussões contemporâneas, possuem grande potencial para o desenvolvimento de teorias combinatórias e para a aplicação em questões pedagógicas.

A pesquisa sobre as identidades envolvendo os números de Narayana deve continuar, especialmente no que diz respeito a suas aplicações em campos como a teoria das grafos, análise de algoritmos e resolução de problemas que envolvem estruturas geométricas. Espera-se que o estudo realizado aqui inspire novas investigações e aprofunde ainda mais a conexão entre as diversas áreas da matemática que se entrelaçam com os números de Narayana, mostrando o caráter interdisciplinar e inovador da matemática contemporânea.

Portanto, este trabalho não se encerra aqui; ao contrário, ele oferece um possível ponto de partida para futuras pesquisas sobre a combinatória enumerativa, oferecendo resultados que podem ser aplicados tanto em contextos acadêmicos avançados quanto no ensino básico, facilitando a interação dos estudantes com tópicos matemáticos de maneira envolvente e criativa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALTER, R. Some remarks and results on catalan numbers. *Proceedings of the Second Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing - Louisiana State Univertisity*, 1971.

ASKEY, R. *Orthogonal Polynomials and Special Functions*. Madison: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.

BARROS, G. S. *Números binomiais: aplicações ao ensino e extensões*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2021.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educação*. Brasília, DF: MEC, 2018. Acesso em: 15 nov. 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/bncc>.

BREMMER, M. *An Introduction to the Narayana Numbers*. Saskatchewan: Mathematics and Statistics College of Arts and Science University of Saskatchewan - Combinatorics Seminar, 2018.

CALLAN, D. *Generalized Narayana Numbers*. [S.l.], 2017.

CRAVEIRO, I. M.; TEIXEIRA, M. A. G. Uma interpretação combinatória para os números de catalan. *Revista de Divulgação Científica em Ciências Exatas e Tecnológicas-PORANDU*, 2018.

CRUZ, S. S. *Propriedades Aritméticas dos Coeficientes Binomiais)*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará (UFCE), 2022.

DMITRY, K.; VLADIMIR, K.; YURIY, S. On some properties of generalized narayana numbers. *Quaestiones Mathematicae*, v. 45, p. 1949–19630, 2022.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FEDORYAEVA, T. I. On binomial coefficients of real arguments. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, v. 20, p. 514–523, 2023.

F.INC, O. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. 2025. `https://oeis.org`. Acessado em 4 de maio de 2025.

GARDNER, M. Mathematical games: Catalan numbers: An integer sequence that materializes in unexpected places. *Scientific American*, v. 234, p. 120–125, 1976.

GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Massachusetts: 2. ed. Reading - Addison-Wesley, 1994.

GRIMALDI, R. *Fibonacci and Catalan Numbers*. [S.l.]: Wiley, 2012.

GUY, R. K. *Unsolved Problems in Number Theory*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1981.

HEFEZ, A. *Aritmética*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

HILLMAN, A. P.; HOGGATT, V. E. A proof of gould's pascal hexagon conjecture. *The Fibonacci Quarterly*, v. 10, p. 565–568, 1973.

KOSHY, T. *Catalan Numbers with Applications*. New York: Oxford University Press, 2009.

KUHAPATANAKUL, K.; SHANNON, A. G. Binomial coefficients and triangular numbers. *European Journal of Mathematics and Statistics*, v. 2, p. 22–24, 2021.

LIMA, C. G. G. L. *Técnicas de Contagem: do Princípio Fundamental da Contagem às Funções Geradoras*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, 2021.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: 12. ed. Projeto Euclides, IMPA, 2004.

MOCATO, D. G. *Estrela de David no Triângulo de Pascal)*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná (UFPR), 2021.

MOHANDY, S. G. Tadepalli venkata narayana 1930–1987. *Journal od Statistical Planning and Inference*, v. 101, p. 1, 2002.

OLIVEIRA, R. A. *Explorando o universo dos Números Primos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, 2015.

RAMIREZ, J. L.; SIRVENT, V. F. A note on the k-narayana sequence. *Annales Mathematicae et Informaticae*, v. 45, p. 91–105, 2015.

ROSEN, K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications*. New York: McGraw Hill; 7th edition, 2011.

SILVA, S. D. *Estudo do Binômio de Newton*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2013.

SIVARAMAN, R. On some properties of narayana numbers,. *PROTEUS JOURNAL*, v. 11, p. 8–17, 2020.

SIVARAMAN, R. Two interesting results about catalan numbers. *Journal of Scientific Computing*, v. 9, p. 57–58, 2020.

STANLEY, R. P. *Enumerative Combinatorics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997.

STEWART, J. *Cálculo: Volume 2*. São Paulo: Cengage Learning - 7ª Edição, 2013.

STEWART, J. *Calculus: Early Transcendentals*. Boston: 8th ed.- Cengage Learning, 2016.