



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

HYDERLAND DE OLIVEIRA MENDES

O TEOREMA DE MORH-MASCHERONI E SUA APLICAÇÃO NA INVERSÃO
GEOMÉTRICA

FORTALEZA - CEARÁ

2025

HYDERLAND DE OLIVEIRA MENDES

O TEOREMA DE MORH-MASCHERONI E SUA APLICAÇÃO NA INVERSÃO
GEOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

FORTALEZA - CEARÁ

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Mendes, Hyderland de Oliveira
O Teorema de Morh-Macheroni e Sua Aplicação Na Aplicação
[recurso eletrônico] / Hyderland de Oliveira Mendes. - 2025.
83 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado
Profissional Em Matemática Rede Nacional, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro.
1. Morh-Mascheroni. 2. Inversão. 3. Geometria. I. Título.

HYDERLAND DE OLIVEIRA MENDES

O TEOREMA DE MORH-MASCHERONI E SUA APLICAÇÃO NA INVERSÃO
GEOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática de Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovado em 09 de setembro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro (Orientador)

Universidade Estadual do Ceará - UECE

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro

Universidade Estadual do Ceará - UECE

Prof. Dr. Nicolas Alcântara de Andrade

Instituto Federal de Educação e Tecnologia do Ceará - IFCE

À minha família, por me promover aos estágios mentais cuja esperança floresce sempre que a terra pouco se aduba. Sempre será por nós.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer aos meus pais, Hamilton Mendes e Antonia Mendes, pelo amor, cuidado e pela luta de criar-me. Tudo que faço é para vocês sentirem orgulho. Agradeço aos meus irmãos Gerland, Phelippe, Mário e Henrique pelo molde ajustado de ser eu quem sou.

De forma amorosa e saudosa, agradeço ao meu irmão Tiago Técio, que se estiver me vendo, é, com certeza, o mais feliz de todos em quaisquer dos mundos que existam. Sempre te amarei, irmão. Ao pilar da minha vida, agradeço a minha amada esposa, Gilmara Beatriz, pela força, pelo carinho, amor e por ser o arrimo que nossa família se apoia. Te amo.

Aos meus filhos, Hyderland Filho e Louise Beatriz, agradeço por existirem. Por serem como são. A vocês dois, meu amor infinito. Agradeço ao meu amigo de longa data e companheiro neste curso de mestrado, Robério Bacelar, que tanto me ajudou do início ao fim. Obrigado, amigo querido. Agradeço aos professores, Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro e Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro pela inspiração e por colocar, didaticamente neste curso, o sarrafo tão alto. Esta dissertação foi escrita por todos vocês e por cada aluno a quem me dediquei.

“A ordem e a conexão das ideias é a mesma que a ordem e a conexão das coisas.”

(Baruch Spinoza)

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo principal explorar a transformação geométrica conhecida como inversão no plano e apresentar uma abordagem didática para o Teorema de Mohr-Mascheroni, que afirma que toda construção geométrica possível com régua e compasso pode ser realizada com o uso exclusivo do compasso. Para tal, inicia-se com a exposição de conceitos fundamentais da geometria plana, como congruência e semelhança de figuras, que sustentam as construções ao longo do texto. Em seguida, apresenta-se a reta de Euler como exemplo de propriedade geométrica clássica. O estudo da inversão é tratado de forma detalhada, abordando suas definições, propriedades, tipos e aplicações em problemas geométricos, evidenciando sua potência como ferramenta de resolução. A partir disso, introduz-se o Teorema de Mohr-Mascheroni, incluindo uma de suas demonstrações formais. Por fim, são apresentados exemplos práticos de construções realizadas apenas com o compasso, tanto no contexto da inversão quanto em construções clássicas da geometria euclidiana. A dissertação busca, além da fundamentação teórica, oferecer contribuições didáticas que possam auxiliar no ensino e na compreensão desses temas no contexto da educação matemática.

Palavras-chave: inversão geométrica; construções com compasso; Teorema de Mohr-Mascheroni; geometria euclidiana; transformações no plano; ensino de geometria; construções geométricas.

ABSTRACT

This dissertation aims to explore the geometric transformation known as inversion in the plane and to present a didactic approach to the Mohr-Mascheroni Theorem, which states that any geometric construction possible with a straightedge and compass can be carried out using only a compass. The work begins with a review of fundamental concepts in plane geometry, such as congruence and similarity, which support the constructions developed throughout the text. It then presents Euler's line as an example of a classical geometric property. The study of inversion is addressed in detail, including its definitions, properties, types, and applications in solving geometric problems, highlighting its power as a problem-solving tool. The Mohr-Mascheroni Theorem is then introduced, along with a formal proof. Finally, practical examples of constructions performed using only a compass are presented, both in the context of inversion and in classical Euclidean constructions. In addition to providing a theoretical foundation, the dissertation offers didactic contributions that can support the teaching and understanding of these topics in the context of mathematics education.

Keywords: geometric inversion; compass constructions; Mohr-Mascheroni theorem; euclidean geometry; plane transformations; geometry teaching; geometric constructions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Congruência de Triângulos	17
Figura 2 – Caso L.A.L	17
Figura 3 – Caso A.L.A	18
Figura 4 – Caso L.L.L	18
Figura 5 – Caso L.A.AOPOSTO	18
Figura 6 – Semelhança de Triângulos.....	19
Figura 7 – Caso A.A.A	19
Figura 8 – Caso L.A.L	20
Figura 9 – Caso L.L.L	20
Figura 10 – Teorema Fundamental da Proporcionalidade (TFP).....	20
Figura 11 – Recíproca do TFP	21
Figura 12 – Segmentos Tangentes.....	21
Figura 13 – A Bissetriz.	22
Figura 14 – Circunferência Inscrita	22
Figura 15 – O ex-círculo	23
Figura 16 – A Mediatriz	23
Figura 17 – Simétrico de um Ponto	24
Figura 18 – Pontos Colineares	24
Figura 19 – Reta de Euler.....	25
Figura 20 – Triângulo Medial.....	27
Figura 21 – Colinearidade dos pontos.....	27
Figura 22 – Círculo de 9 pontos 1.....	28
Figura 23 – Círculo de 9 pontos 2.....	29
Figura 24 – Pontos homólogos.....	31
Figura 25 – Inversão de P a i (1).....	32
Figura 26 – Inversão de P a i (2).....	33
Figura 27 – Inverso de A (1).....	34
Figura 28 – Inverso de A (2).....	35
Figura 29 – Inverso de dois pontos.....	36
Figura 30 – Inversão de reta por O	37
Figura 31 – Inversão de ângulo 1.....	39

Figura 32 – Inversão de ângulo 2.....	39
Figura 33 – Inversão de Circunferência.....	40
Figura 34 – Ortogonalidade com i	41
Figura 35 – Ângulos preservados entre duas circunferências de Inversão.....	42
Figura 36 – Divisão Harmônica.....	43
Figura 37 – Inversão de centro de circunferência 1.....	45
Figura 38 – Inversão de centro de circunferência 2.....	46
Figura 39 – Circunferência de inversão $i(O, r)$	47
Figura 40 – Inverso do centro C de um círculo c (exterior).....	47
Figura 41 – Inverso do centro C de um círculo c (interior).....	48
Figura 42 – Projeção estereográfica.....	49
Figura 43 – Mecanismo de Peaucellier-Linkin.....	51
Figura 44 – Teorema de Ptolomeu(ida).....	52
Figura 45 – O círculo de nove pontos 1.....	54
Figura 46 – O círculo de nove pontos 2.....	54
Figura 47 – . O círculo de nove pontos 3.....	55
Figura 48 – O círculo de nove pontos 4.....	56
Figura 49 – O círculo de nove pontos 5.....	57
Figura 50 – Problema 1.....	59
Figura 51 – Problema 2.....	60
Figura 52 – Problema 3.1.....	61
Figura 53 – Problema 3.2.....	62
Figura 54 – Problema 4.....	63
Figura 55 – Problema 5.....	65
Figura 56 – Problema 6.....	66
Figura 57 – Problema 7.....	67
Figura 58 – Problema 8.....	68
Figura 59 – Exemplo 7.1.....	70
Figura 60 – Exemplo 7.2.....	71
Figura 61 – Problema 7.3.....	73
Figura 62 – Problema 7.4 (1).....	74
Figura 63 – Exemplo 7.4 (2).....	75
Figura 64 – Exemplo 7.4 (3).....	76
Figura 65 – Exemplo 7.4 (4).....	77

Figura 66 – Exemplo 8.1	78
Figura 67 – Exemplo 8.2.....	80
Figura 68 – Exemplo 8.3.....	81

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	NOÇÕES BÁSICAS	16
2.1	Quadro de Notações	16
2.2	Casos de congruência	17
2.3	Primeiro caso de congruência ou caso L.A.L	17
2.4	Segundo caso de congruência ou caso A.L.A	18
2.5	Terceiro caso de congruência ou caso L.L.L	18
2.6	Quarto caso de congruência ou caso L.A.AOPOSTO	18
2.7	Casos de semelhança de triângulos	19
2.8	Primeiro caso de semelhança ou caso A.A.A	19
2.9	Segundo caso de semelhança ou caso L.A.L	20
2.10	Terceiro caso de semelhança ou caso L.L.L	20
2.11	Teorema fundamental da proporcionalidade e sua recíproca	20
2.12	Circunferência	21
2.13	A bissetriz	22
2.14	Incírculo e ex-incírculo	22
2.15	A mediatriz	23
2.16	Simétrico de um ponto	24
3	A RETA DE EULER	24
3.1	A reta de Euler	25
3.2	O círculo de nove pontos	28
4	A INVERSÃO NO PLANO	30
4.1	Inversão no plano	30
4.2	Inversão de um ponto (circunferência)	31
4.3	Inversão de retas e circunferências	36
4.4	Ângulos e inversão	38
4.5	Divisão harmônica e inversão	42
4.6	Inversos do centro de circunferência	45
5	INVERSÃO: APLICAÇÕES	48
5.1	Projeção estereográfica	49
5.2	Mecanismo de Peaucellier-Lipkin	50
5.3	Prova de teoremas por inversão	52

5.3.1	Teorema de Ptolomeu	52
5.3.2	Teorema de Feuerbach (círculo de nove pontos)	53
6	O TEOREMA DE MORH-MASCHERONI	58
6.1	Problema 1	59
6.2	Problema 2	60
6.3	Problema 3	61
6.4	Problema 4	61
6.5	Problema 5	63
6.6	Problema 6	65
6.7	Problema 7	66
6.8	Problema 8	67
7	EXEMPLOS DO USO DO TEOREMA DE MORH-MASCHERONI	68
7.1	Exemplo 7.1	69
7.2	Exemplo 7.2	70
7.3	Exemplo 7.3	72
7.4	Exemplo 7.4	73
8	INVERSÃO E MORH-MASCHERONI	77
8.1	Exemplo 8.1	78
8.2	Exemplo 8.2	79
8.3	Exemplo 8.3	80
9	CONCLUSÕES	81
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	82

1 INTRODUÇÃO

A geometria sempre desempenhou um papel central no ensino da matemática, não apenas como campo de estudo, mas como linguagem visual e lógica que permite desenvolver o raciocínio dedutivo, a criatividade e a precisão. Dentro desse universo, as construções geométricas com régua e compasso são parte fundamental da tradição matemática e, ainda hoje, encantam professores e alunos pela sua simplicidade formal e profundidade conceitual.

Neste cenário, duas abordagens se destacam não apenas pelo interesse teórico que despertam, mas pelo potencial que oferecem para enriquecer a prática pedagógica: a **inversão geométrica** e o **Teorema de Mohr-Mascheroni**. A inversão, apesar de pouco explorada no ensino básico, é uma transformação poderosa que revela simetrias ocultas, simplifica problemas complexos e promove uma visão mais ampla da geometria. Ao transformar circunferências em retas e vice-versa, ela instiga a curiosidade dos estudantes e convida à investigação.

Já o Teorema de Mohr-Mascheroni — que afirma que toda construção com régua e compasso pode ser realizada apenas com o compasso — apresenta-se como um desafio elegante à intuição, despertando fascínio e abrindo espaço para discussões profundas sobre o que é essencial em uma construção geométrica. Trazer esse teorema para a sala de aula, mesmo que em contextos mais introdutórios, é uma forma de valorizar a investigação, a argumentação e a construção do conhecimento matemático de forma ativa.

Esta dissertação busca justamente explorar essas ideias - inversão e construções com o uso exclusivo do compasso - com foco em seu potencial didático. O trabalho inicia com uma revisão dos conceitos fundamentais da geometria plana, passa por construções clássicas como a reta de Euler, aprofunda os fundamentos da inversão e culmina na apresentação e demonstração do Teorema de Mohr-Mascheroni. Nos capítulos finais, são apresentados exemplos práticos que ilustram a aplicação dessas ferramentas em problemas geométricos, sempre com a preocupação de tornar o conteúdo acessível e significativo para o contexto educacional.

Mais do que um estudo teórico, esta dissertação é também uma proposta: mostrar que a geometria pode - e deve - ser redescoberta como campo de criação, investigação e encantamento. Tanto para quem ensina, quanto para quem aprende.

Em tempos em que o ensino da matemática é frequentemente reduzido à repetição de procedimentos e à resolução mecânica de exercícios, revisitar construções geométricas - sobretudo aquelas feitas apenas com o compasso - é um gesto de resistência pedagógica e valorização da beleza matemática. Ao explorar temas como a inversão e o Teorema de Mohr-

Mascheroni, esta dissertação pretende também oferecer aos professores da Educação Básica subsídios teóricos e práticos para enriquecer suas aulas, estimulando o pensamento geométrico, a argumentação e a autonomia intelectual dos alunos. Afinal, ensinar geometria é, em alguma medida, ensinar a olhar o mundo com mais forma, lógica e encantamento.

2 NOÇÕES BÁSICAS

Este capítulo reúne os principais conceitos da geometria plana que servirão de base para os desenvolvimentos posteriores da dissertação. Inicia-se com a definição de distância entre dois pontos, passando pela apresentação dos casos clássicos de congruência e semelhança de triângulos, fundamentais para o estudo das transformações geométricas. Em seguida, são retomados teoremas elementares, como o da proporcionalidade, bem como propriedades e construções associadas à circunferência, à bissetriz, à mediatriz, aos pontos notáveis do triângulo (como o incentro e os ex-incentros) e à simetria em relação a um ponto. Ao consolidar essas noções, o capítulo fornece o vocabulário geométrico necessário para a compreensão da inversão no plano e do Teorema de Mohr-Mascheroni, temas centrais desta pesquisa.

2.1 Quadro de notações

Notação: Sejam A e B pontos no plano.

AB denota a distância de A e B .

\overline{AB} denota um segmento.

ΔABC denota um triângulo.

\hat{B} denota um ângulo de vértice B .

$\mathcal{C}(O, r)$ denota o centro da circunferência \mathcal{C} de centro em O e raio r .

$\hat{A} \cong \hat{B}$ denota a congruência dos ângulos A e B .

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ denota que os triângulos, ΔABC e ΔDEF , são semelhantes.

\widehat{AOB} denota o ângulo de centro em O .

$d(P, \overline{OA})$ denota a distância do ponto P ao segmento \overline{OA} .

\overrightarrow{OC} denota a semirreta de origem em O .

\overleftrightarrow{AB} denota uma reta.

2.2 Casos de congruência

Um triângulo é um polígono de três lados que pode ser classificado como equilátero, isósceles e escaleno a depender das medidas dos seus lados, e ainda em retângulo, acutângulo, obtusângulo e equiângulo de acordo com as medidas dos seus ângulos.

Definição 2.1: Dois triângulos são congruentes quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que quaisquer pares de lados correspondentes e quaisquer pares de ângulos correspondentes sejam congruentes, ou seja, possuírem a mesma medida.

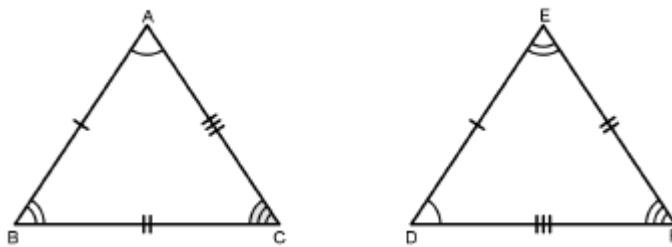


Figura 1: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

A congruência é uma relação de equivalência, isto é, é reflexiva, simétrica e transitiva.

Apresentaremos, a seguir, alguns casos de congruência. Para demonstração desses casos, o leitor pode ver em DULCE, O. POMPEU, J. N. **Fundamentos da matemática elementar 9: Geometria plana**. Ed. Atual, 7. Ed. São Paulo, SP, 1993.

2.3 Primeiro caso de congruência ou caso L.A.L.

Dados dois triângulos ΔABC e ΔDEF , se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

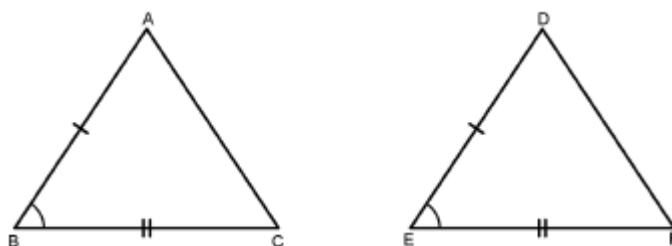


Figura 2

2.4 Segundo caso de congruência ou caso A.L.A.

Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

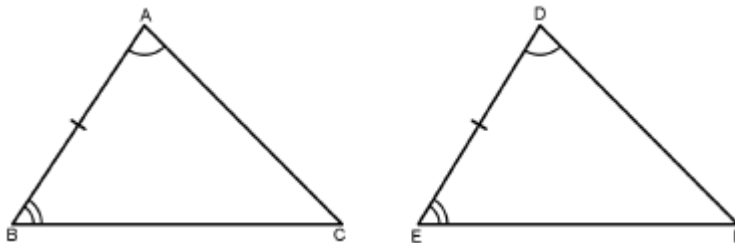


Figura 3

2.5 Terceiro caso de congruência ou caso L.L.L.

Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, ou seja, se dois triângulos possuem os três lados correspondentes congruentes então eles são congruentes.

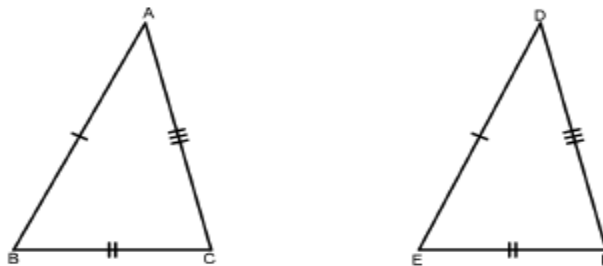


Figura 4

2.6 Quarto caso de congruência ou Caso L.A.Aoposto.

Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

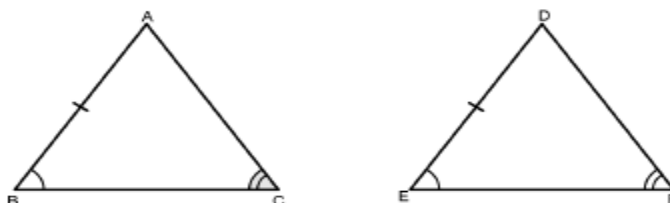


Figura 5

2.7 Casos de semelhança de triângulos

Definição 2.2: Seja S uma correspondência biunívoca entre os vértices dos triângulos ABC e DEF . Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência S é uma **semelhança**, e dizemos que os triângulos são semelhantes. Assim denotados: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Exemplo 2.1: Sejam ABC e DEF triângulos semelhantes.

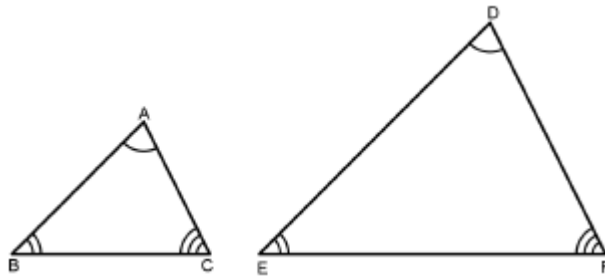


Figura 6

Então, temos que $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, e também que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = k$. Em que k é um número real positivo e não nulo, o qual chamamos de **razão de proporcionalidade** ou **razão de semelhança entre os triângulos**.

Desta feita, como na congruência, existem condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, as quais apresentamos a seguir (para demonstração desses casos, o leitor pode ver em [2]):

2.8 Primeiro caso de semelhança ou caso A.A.A.

Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

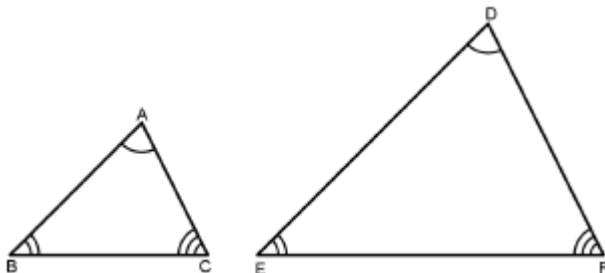


Figura 7

2.9 Segundo caso de semelhança ou caso L.A.L .

Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\hat{B} = \hat{E}$, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

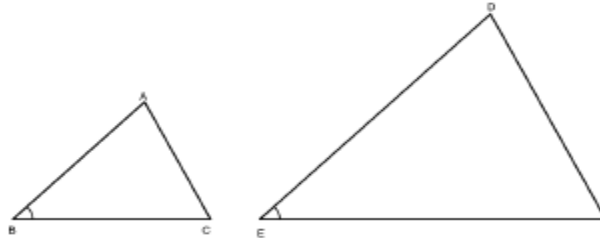


Figura 8

2.10 Terceiro caso de semelhança ou caso L.L.L .

Dados dois triângulos ABC e DEF . Se os seus lados satisfazem a relação $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

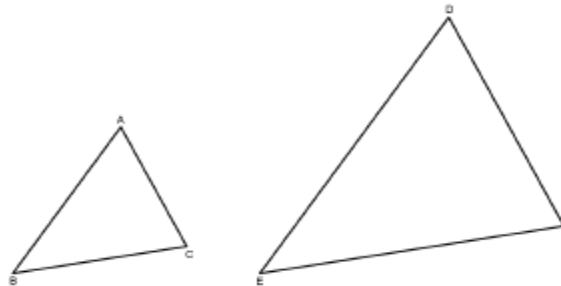


Figura 9

2.11 Teorema fundamental da proporcionalidade e sua recíproca

Teorema 2.1: Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela os divide na mesma razão.

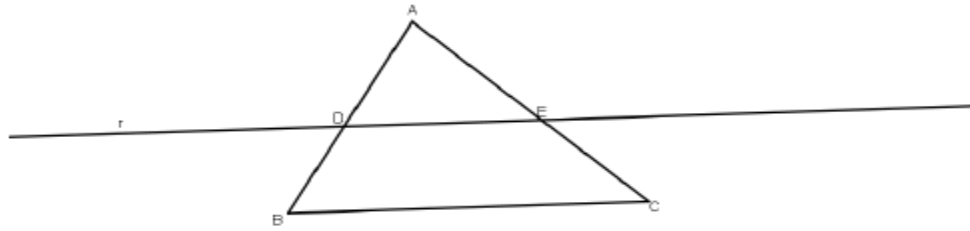


Figura 10

Na figura 10, a reta r é paralela a reta que contém o segmento de reta BC , além do mais ela intercepta os outros dois lados do triângulo ABC nos pontos D e E . Afirmar que o segmento de reta DE divide os lados do triângulo em uma mesma razão é o mesmo que dizer que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = k$, em que $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Teorema 2.2: Recíproca do Teorema Fundamental da Semelhança. Se uma reta intercepta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão, então esta é paralela ao terceiro lado, ou seja, se $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, então \overleftrightarrow{DE} é paralela a \overleftrightarrow{BC} (figura 11).

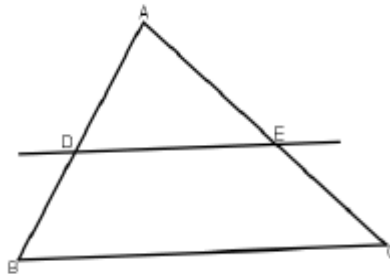


Figura 11

2.12 Circunferência

Consideraremos $\mathcal{C}(O, r)$ como sendo a circunferência de centro O e de raio r . A seguir, apresentaremos o teorema que relaciona as retas tangentes a uma circunferência que se encontram em um determinado ponto.

Teorema 2.3: Os dois segmentos tangentes a uma circunferência, $\mathcal{C}(O, r)$, partindo de um mesmo ponto exterior, são congruentes e formam ângulos congruentes com a reta que une o ponto exterior ao ponto O .

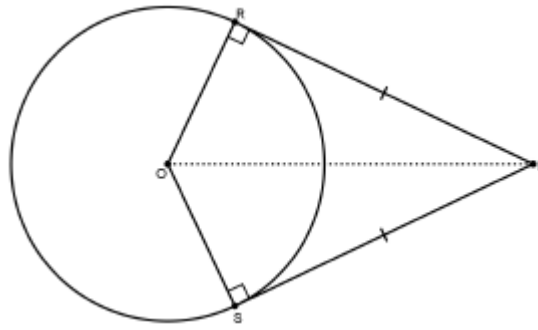


Figura 12

2.13 A bissetriz

(Teorema) Definição 2.3: A **bissetriz** de um ângulo \widehat{AOB} é a semirreta \overrightarrow{OC} tal que, para todo ponto P pertencente a \overrightarrow{OC} , têm-se:

$$d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$$

onde $d(P, r)$ denota a distância do ponto P à reta r . Assim, a bissetriz é o conjunto dos pontos que são equidistantes dos lados OA e OB do ângulo. Em termos de medida angular, a semirreta \overrightarrow{OC} divide o ângulo \widehat{AOB} em dois ângulos congruentes, isto é:

$$\widehat{AOC} \cong \widehat{COB}$$

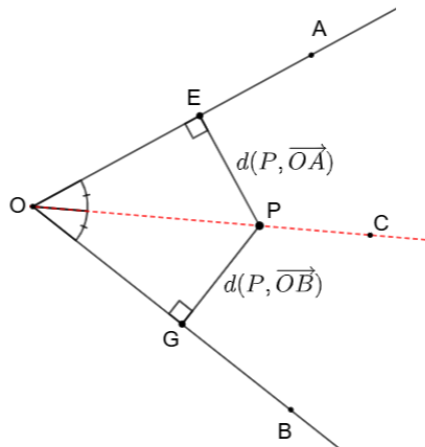


Figura 13

2.14 Incírculo e ex-incírculo

Definição 2.4: Seja ABC um triângulo. As bissetrizes internas se encontram em um ponto I , o qual denominamos de **incentro**. A circunferência cujo centro coincide com I e é tangente aos lados desse triângulo é denominada **circunferência inscrita ou incírculo**.

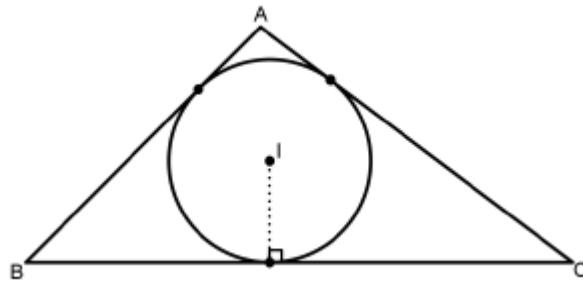


Figura 14

Definição 2.5: Seja ABC um triângulo. Um círculo tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados \overline{AB} e \overline{AC} é dito **ex-incírculo** relativo ao vértice A . Já o seu centro é chamado **ex-incentro**, denotado por I_A , e seu raio de **ex-inraio**.

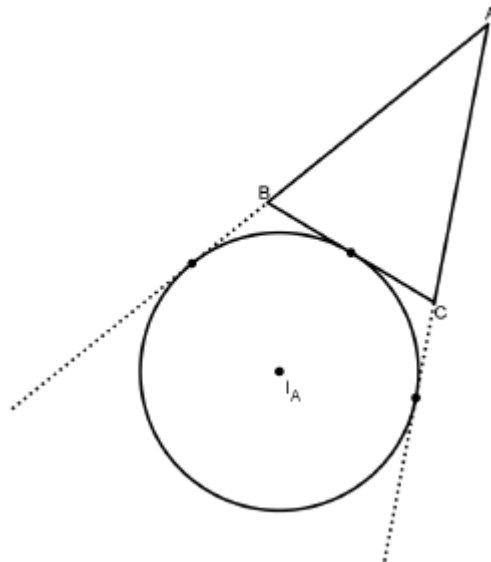


Figura 15

2.15 A mediatriz

Definição 2.6: A **mediatriz** de um segmento \overline{AB} é a reta perpendicular ao segmento e que contém seu ponto médio.

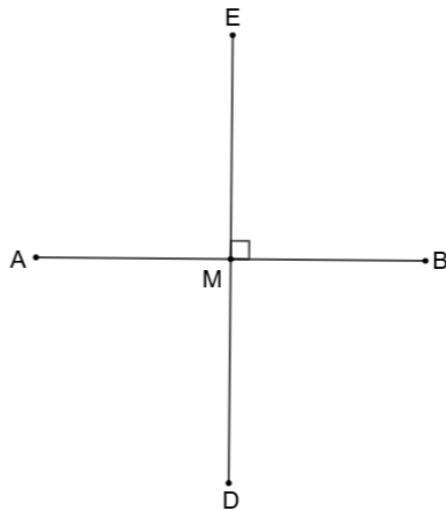


Figura 16

2.16 Simétrico de um ponto

Sejam uma reta r e P um ponto não pertencente a r . Tomemos a reta perpendicular, s , a reta r que passa pelo P . Em seguida, um ponto P' pertencente s tal que $PM = P'M$, em que M é ponto de interseção das duas retas. Denotamos P' como simétrico de P em relação à reta r .

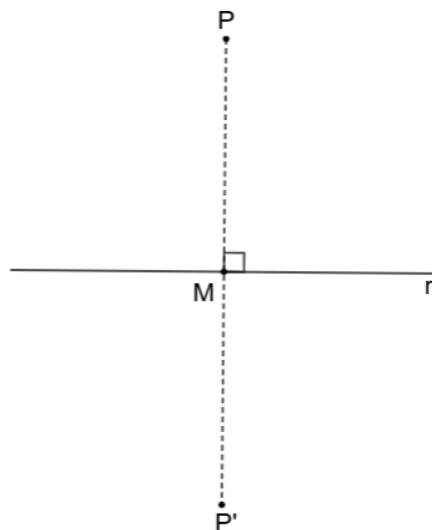


Figura 17

Definimos o simétrico de um ponto em relação a outro ponto O como o ponto P' tal que $PO = P'O$. Além do mais, esses três pontos são colineares.

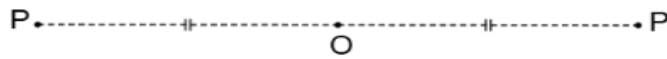


Figura 18

3 A RETA DE EULER

Neste capítulo, é abordada a reta de Euler, um dos elementos notáveis da geometria do triângulo. Apresenta-se inicialmente o conceito da reta de Euler, destacando sua construção e os pontos notáveis que a compõem - o ortocentro, o baricentro e o circuncentro -, cuja colinearidade é rigorosamente demonstrada. O capítulo também introduz o triângulo medial, construído a partir dos pontos médios dos lados de um triângulo dado, e explora sua relação com a reta de Euler. Por fim, é discutido o círculo dos nove pontos, também conhecido como circunferência de Feuerbach, que passa por pontos notáveis do triângulo e se conecta diretamente à reta de Euler e ao triângulo medial. Este conjunto de resultados fornece uma base rica para o estudo de simetrias e configurações geométricas que serão aprofundadas nos capítulos seguintes.

3.1 A reta de Euler

Antes de enunciar o Teorema de Euler, vamos a algumas proposições. As demonstrações para este fato pode se encontrar em EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Proposição 3.1. (Circuncentro – O). O Circuncentro de um triângulo é o ponto de encontro das mediatrizes de seus lados.

Proposição 3.2. (Baricentro - G). O baricentro de um triângulo é o encontro das três medianas de um triângulo.

Proposição 3.3. (Ortocentro – H) O ortocentro é o ponto de interseção das retas suporte das alturas de um triângulo.

Teorema 3.1. (Teorema de Euler) Os três pontos notáveis de um triângulo: baricentro(G), ortocentro(H) e circuncentro(O) são colineares, além disso a distância entre o baricentro e o ortocentro é duas vezes menor que a distância entre o baricentro e circuncentro (figura 19).

Observação: O baricentro sempre estará entre o circuncentro e o ortocentro, com exceção ao triângulo equilátero, pois neste caso os pontos coincidem.

A prova da existência da reta de Euler significa demonstrar que o baricentro, ortocentro e circuncentro são colineares. Assim, dois lemas serão enunciados para auxiliar no processo.

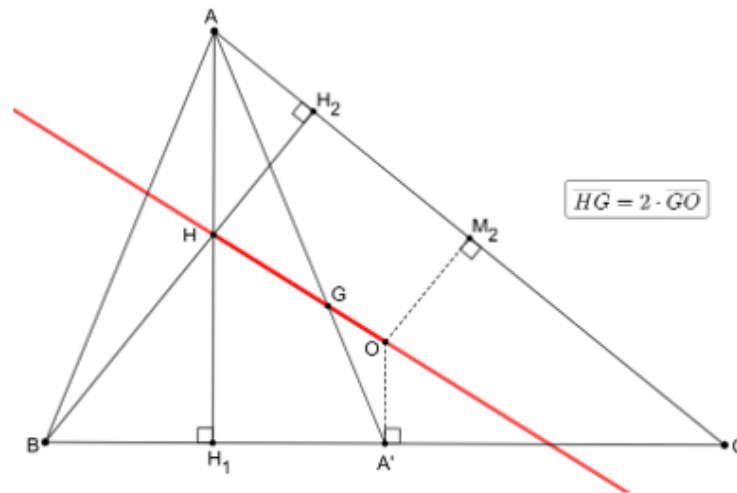


Figura 19

Lema 3.1. Os segmentos que ligam os pontos médios do lado do ΔABC são metade do comprimento do terceiro lado paralelo. O triângulo formado por todos esses três segmentos é o ΔPQR , semelhante ao ΔABC . Dessa forma, o circuncentro do ΔABC coincide com o ortocentro do ΔPQR (Figura 20).

Demonstração.

1 - Cada segmento que liga o pontos médios é metade do terceiro lado e paralelo a ele:

Pelo Teorema do Ponto Médio: se P e Q são pontos médios de BC e CA , então o segmento PQ é paralelo a BA e $|PQ| = \frac{1}{2}|BA|$. Analogamente:

$$PQ \parallel AB \text{ e } |PQ| = \frac{1}{2}|AB|,$$

$$QR \parallel BC \text{ e } |QR| = \frac{1}{2}|BC|,$$

$$RP \parallel CA \text{ e } |RP| = \frac{1}{2}|CA|.$$

Logo, ΔPQR é semelhante a ΔABC com razão 1 : 2.

2 - O circuncentro de ΔABC é o ortocentro de ΔPQR

Seja O o circuncentro de $\triangle ABC$. Por definição, O é a interseção da mediatrizes de AB, BC e CA .

Considere o lado BC :

- A mediatriz de BC é a reta perpendicular a BC que passa pelo ponto médio de BC , ou seja, passa por P e é perpendicular a BC .
- Como O pertence à mediatriz de BC , as retas OP e a mediatriz coincidem; portanto OP é perpendicular a BC .

Mas QR é paralelo a BC (item 1), então OP é também perpendicular a QR . Assim, a reta que une O a P é uma altura do triângulo PQR passando por P .

Repetindo o mesmo raciocínio para os outros lados:

- A mediatriz de CA passa por Q e por O , logo $OQ \perp CA$. Como $RP \parallel CA$, temos $OQ \perp RP$; assim OQ é a altura do $\triangle PQR$ pelo vértice Q .
- A mediatriz de AB passa por R e por O , logo $OR \perp AB$. Como $PQ \parallel AB$, temos $OR \perp PQ$; assim OR é a altura do $\triangle PQR$ pelo vértice R .

Portanto as três alturas do triângulo $\triangle PQR$ se cortam em O . Ou seja, O é o ortocentro de $\triangle PQR$.

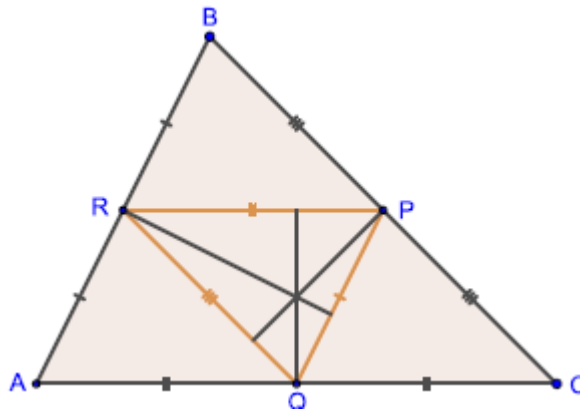


Figura 20

Lema 3.2. Observando a figura 21 notamos que BK é a altura que contém o ortocentro do triângulo ABC , BE é a mediana que contém o baricentro, ED é a mediatriz que é perpendicular a AC e contém o circuncentro do $\triangle ABC$. Consideraremos o baricentro de G , o ortocentro de H e o circuncentro de O . Sejam \overline{GH} e \overline{GO} , vamos provar que ambos pertencem a mesma linha. Assim, podemos provar que $\widehat{BHG} = \widehat{EOG}$ o que só ocorre se H, G e O forem colineares, uma vez que O e E estarão em lados opostos a mediana.

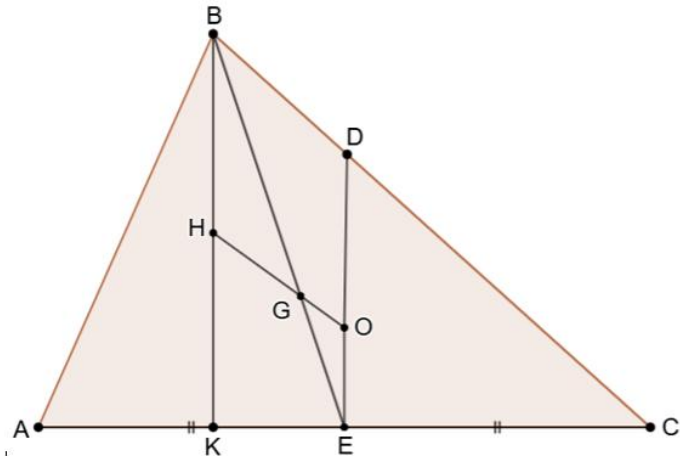


Figura 21

Para provar que esses ângulos são congruentes, mostraremos que o ΔBHG e ΔEOG são triângulos semelhantes.

Vamos apontar três pontos:

Ponto 1: A altura e a mediatriz são paralelas, porque as duas são perpendiculares a \overline{AC} .

Ponto 2: \overline{HG} e \overline{OG} estão em uma proporção 2 por 1, pela propriedade do baricentro.

Ponto 3: Se considerarmos o ΔPQR no ΔABC (figura 20), percebemos que \overline{BH} e \overline{EO} são correspondentes do ΔPQR e ao ΔABC . Dessa forma, pelo Lema 3.1, temos que $\overline{BH} : \overline{EO} = 2 : 1$.

3.2 O círculo de nove pontos

Notações utilizadas:

A, B e C são vértices do triângulo;

A', B' e C' são os pontos médios dos lados BC, AC e AB , respectivamente;

D, E e F são os pés das alturas relativas aos lados BC, AC e AB respectivamente;

H o ortocentro:

Sendo H o ortocentro:

- K é o ponto médio do segmento AH ;
- L é o ponto médio do segmento BH ;
- M é o ponto médio do segmento CH ;
- N é o ponto médio do segmento HO .

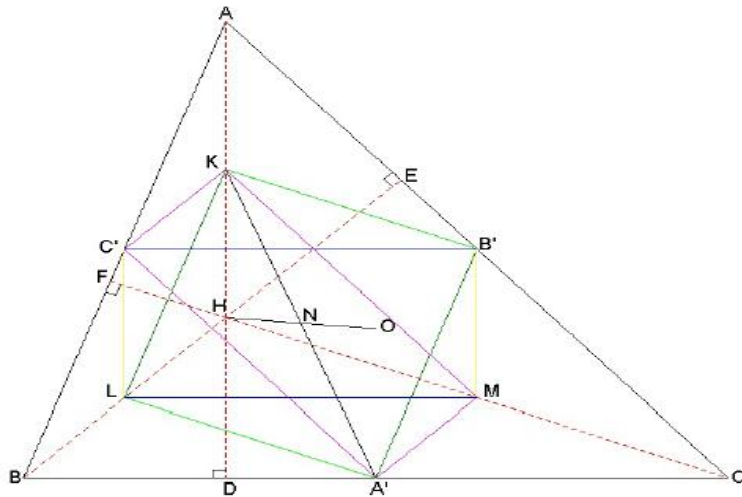


Figura 22

Algumas linhas da figura 22, para uma melhor clareza, foram retiradas e outras adicionadas, tendo assim a figura 23. Siga admitindo que K, L e M são os pontos médios dos segmentos AH, BH e CH , respectivamente, contidos nas três alturas.

Como BC é um lado comum aos triângulos ABC e HBC , e, C', B' e L, M , respectivamente, pontos médios dos outros lados, temos:

$$\begin{cases} C'B' \parallel BC & e & \overline{C'B'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \\ LM \parallel BC & e & \overline{LM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \end{cases} \Rightarrow \overline{C'B'} = \overline{LM}$$

De forma similar, sendo AH um lado comum aos triângulos BAH e CAH :

$$\begin{cases} C'L \parallel AH & e & \overline{C'L} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} \\ B'M \parallel AH & e & \overline{B'M} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} \end{cases} \Rightarrow \overline{C'L} = \overline{B'M}$$

Dessa forma, $B'C'LM$ é um paralelogramo e, como $BC \perp AH$, $B'C'LM$ é um retângulo.

De forma similar. $A'B'KL$ é um retângulo, como $C'A'MK$. Então, $A'K, B'L, C'M$ são diâmetros de um círculo. Como na figura 23:

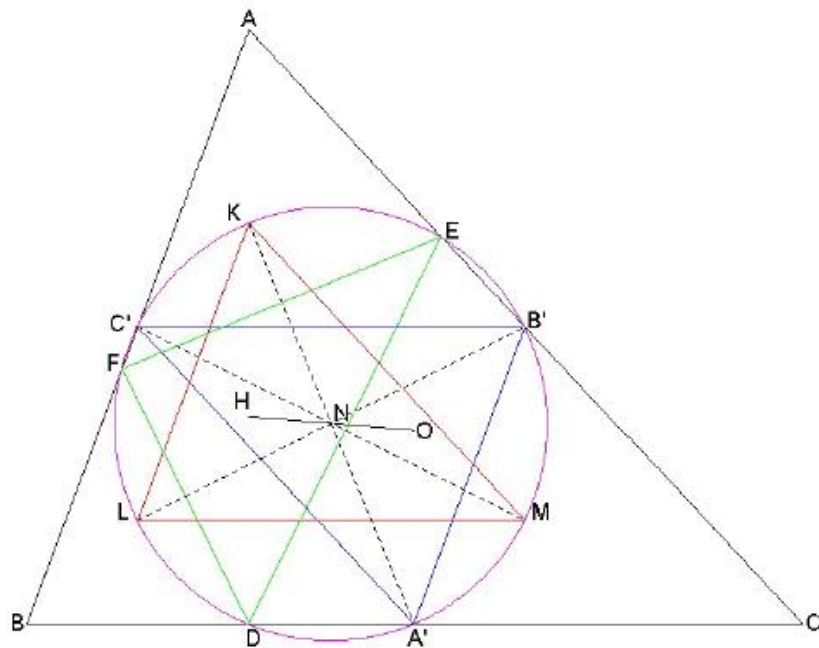


Figura 23

Como $A'\widehat{D}K$ é um ângulo reto, este círculo ($A'K$ como diâmetro) passa por D . Da mesma forma, passa E e F . Resumindo:

Teorema 3.2. Os pés de três alturas de um triângulo qualquer, os pontos médios dos três lados e os pontos médios dos segmentos dos três vértices compreendidos entre o ortocentro e circuncentro, todos pertencem no mesmo círculo de $\frac{1}{2}R$ (figura 23).

Este círculo é chamado de *Círculo dos Nove Pontos*. Uma vez que os três pontos K, L, M são diametralmente opostos a A', B', C' , qualquer um dos dois triângulos KLM e $A'B'C'$ pode ser derivado do outro por uma rotação de 180° sobre o centro deste círculo. Podemos perceber que esta meia-volta, a qual transporta os dois triângulos congruentes, também deve alternar seus ortocentros, H e O . Assim, o centro do círculo de nove pontos é o ponto médio de HO , o qual já assumimos ser N em preparação como centro do *Círculo dos Nove Pontos*. Ou seja:

Teorema 3.3. *O centro do Círculo de Nove Pontos pertence à Reta de Euler, no ponto médio do segmento cujas extremidades são o ortocentro e o circuncentro.*

4 A INVERSÃO NO PLANO

Este capítulo introduz a inversão como uma transformação geométrica no plano com propriedades notáveis e aplicações poderosas na resolução de problemas. Para tal, utilizou-

se como referência o livro “Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações”. Parte-se da definição formal da inversão em relação a uma circunferência, explorando a imagem de pontos e figuras sob essa transformação. São analisados casos específicos, como a inversão de retas e circunferências, bem como o comportamento dos ângulos sob inversão - tema essencial para a preservação de certas relações geométricas. A divisão harmônica é abordada como estrutura invariável sob inversão, reforçando a profundidade da simetria envolvida nesse processo. Por fim, o capítulo discute a inversão do centro de uma circunferência, ampliando a compreensão das relações entre pontos e figuras transformadas. Esses fundamentos são indispensáveis para o capítulo seguinte, que trata das aplicações práticas da inversão geométrica.

4.1 Inversão no plano

Tomando um plano l e neste um ponto fixo O , uma correspondência pode ser estabelecida nos demais pontos do plano dado da seguinte forma: para qualquer ponto A , tomemos um A' , sobre a reta OA , de sorte que temos.

$$OA \cdot OA' = K$$

Onde K é uma constante não nula. Denotamos A e A' como pontos homólogos. Desta feita, podemos chamar a referida correspondência de **inversão de centro O e potência de inversão K** . Cabe o adendo que, dadas as condições, teremos **módulo da inversão de K** .

Logo, toda inversão será definida se tivermos o centro e a potência (ou centro e um par de pontos homólogos), cuja característica, além de estarem alinhados com o centro, devem observar se o produto das distâncias a ele é a mesma, com o correspondente sinal, da potência de inversão.

Exemplo 4.1: Tomamos o centro O e potência $K = 2$, um ponto A com homólogo A' situado sobre a reta AO , tal que $OA \cdot OA' = 2$. Óbvio que se $K = -2$, teremos $OA \cdot OA' = -2$.

Na figura 24, O é o centro, A é um ponto, A' é seu homólogo e K é a potência. Temos:

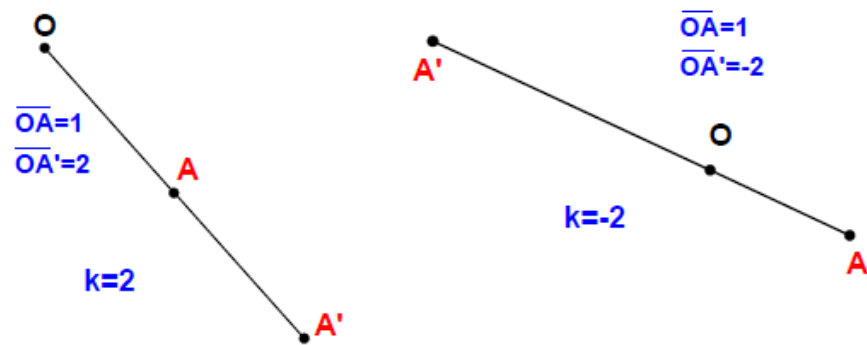


Figura 24

Caso a potência de inversão seja positiva ($k > 0$), A e A' estão do mesmo lado do centro e caso contrário ($k < 0$), os referidos pontos homólogos estarão em lados distintos do centro.

4.2 Inversão de um ponto (circunferência):

Definição 4.1: Dados um plano l , uma circunferência $i \in l$, com centro O e raio r , e um ponto $P \in l$, o ponto P' que pertence a semirreta \overrightarrow{OP} e satisfaz

$$OP' \cdot OP = r^2$$

é chamado inverso de P em relação a i (figura 25). O ponto O é chamado **centro de inversão** e i é chamada de circunferência de inversão. Outra forma de notação seria

$$P' = Inv(P, i)$$

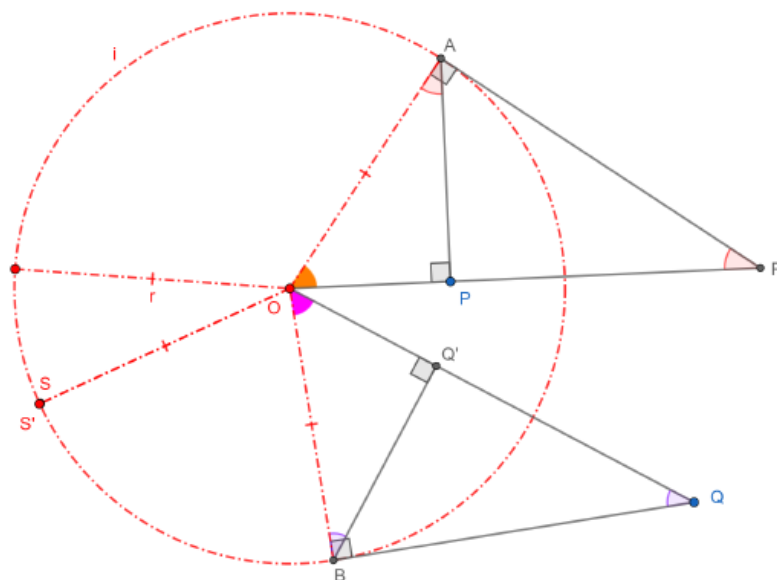


Figura 25

Os pontos sobre a circunferência de inversão são invariantes, ou seja, quando $S \in i \Rightarrow S' = S$. Além disso, $P = (Inv(Inv(P, i), i))$.

Obs.: Os pontos no exterior de i são transformados em pontos do interior de i e os interiores em exteriores.

- Para uma melhor compreensão do exposto, traremos a construção (com régua e compasso) desses pontos nos dois casos possíveis:

Caso 1 – Construir, com régua e compasso, o inverso do ponto P , quando P é interior a circunferência de inversão i de centro O .

Construção:

Passo 1: Traçar a semirreta OP .

Passo 2: Traçar uma perpendicular a OP passando por P e marcar no ponto A na interseção desta com i .

Passo 3: Construir o segmento OA . Traçar uma tangente a i passando por A e marcar o ponto P' na interseção desta com a reta OP .

Como $\widehat{AOP} = \widehat{AOP'}$ (comum) e $\widehat{OPA} = \widehat{OP'A} = 90^\circ$ tem-se:

$$\Delta OPA \sim \Delta OP'A.$$

Então:

$$\frac{AP}{P'A} = \frac{AO}{P'O} = \frac{PO}{AO} \Rightarrow OP \cdot OP' = OA^2 = r^2.$$

Caso 2 – Construir, com régua e compasso, o inverso do ponto Q , quando Q é exterior a circunferência de inversão i de centro O .

Passo 1: Traçar a semirreta OQ .

Passo 2: Traçar uma tangente a i partindo de Q e marcar o ponto de tangência B . Construir o segmento OB .

Passo 3: Marcar Q' como a projeção ortogonal de B sobre OQ .

Analogamente ao caso anterior

$$OQ \cdot OQ' = OB^2 = r^2.$$

- Agora, exporemos a construção do inverso do ponto P , dentro ou fora da circunferência i e centro O , apenas com régua e compasso (figura 26).

Passo 1 – Com centro em P e raio PO construir a circunferência c . Marcar o ponto A em uma das interseções entre i e c .

Passo 2 – Com centro em A e raio AO construir a circunferência d . Marcar o ponto P' na interseção de semirreta OP com d .

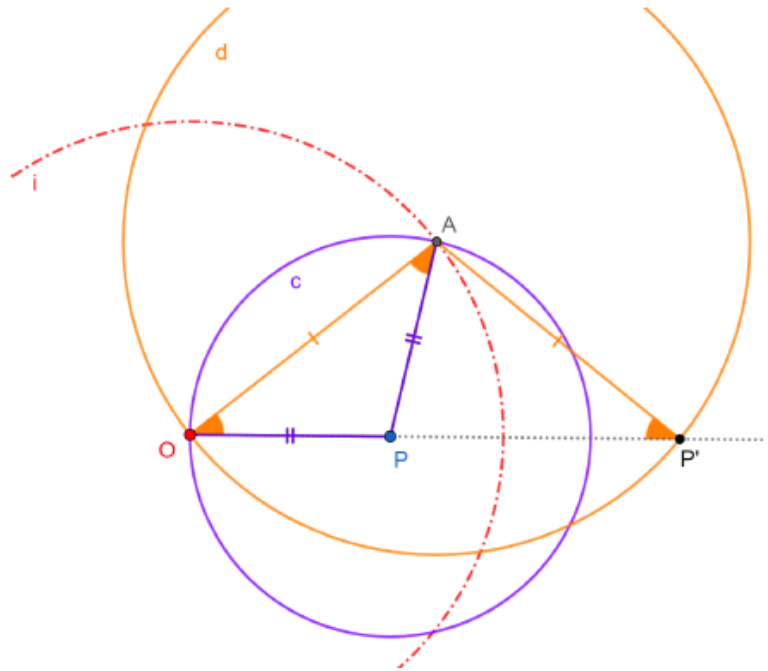


Figura 26

Temos que os triângulos OPA e $OP'A$ são isósceles por construção, logo:

$$\widehat{OAP} = \widehat{AOP} = \widehat{AP'O}.$$

Como $\angle AOP = \angle AOP'$ (comum) e $\widehat{OAP} = \widehat{OP'A}$ tem-se:

$$\Delta OAP \sim \Delta OP'A$$

Então:

$$\frac{OA}{OP'} = \frac{OP}{OA} \Rightarrow OP \cdot OP' = OA^2$$

A seguir, mais um exemplo:

- Construir o inverso do ponto A , dentro ou fora, da circunferência de inversão i de centro O e raio OB .

Passo 1: Traçar a reta OA e marcar o ponto $C = OA \cap i$, com C entre O e A ou entre O e A' .

Passo 2: Traçar a reta BC e a reta $BA = h$.

Passo 3: Construir a reta h' , reflexão da reta h em relação a reta BC . Marcar o ponto $A' = h' \cap OA$.

Por construção obtêm-se:

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'BC},$$

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB}.$$

Vamos mostrar em dois casos:

Caso 1 (figura 27) – Quando A é interno a i temos:

$$\widehat{OCB} = \widehat{OA'B} + \widehat{A'BC},$$

$$\widehat{OBC} = \widehat{OA'B} + \widehat{ABC},$$

$$\widehat{OBA} + \widehat{ABC} = \widehat{OA'B} + \widehat{ABC}$$

Assim, temos $\widehat{OBA} = \widehat{OA'B}$.

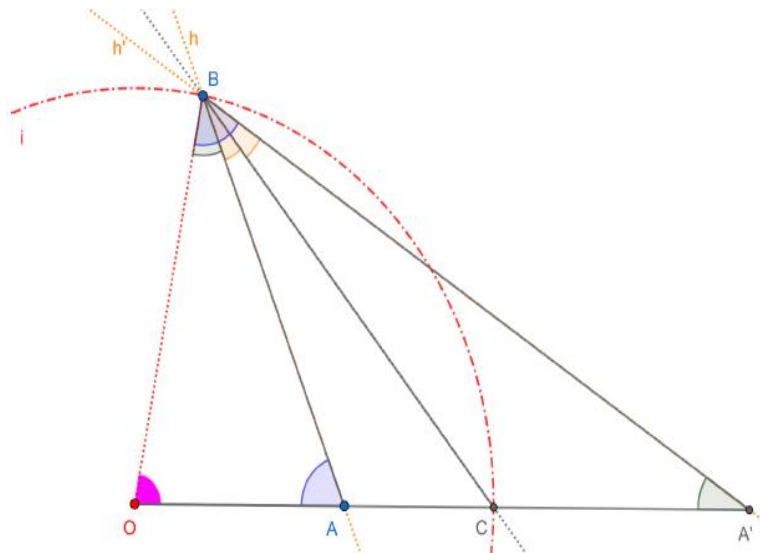


Figura 27

Caso 2 (figura 28) – Quando A é externo a i :

$$\widehat{OCB} = \widehat{OAB} + \widehat{ABC},$$

$$\widehat{OBC} = \widehat{OBA'} + \widehat{A'BC},$$

$$\widehat{OBA'} + \widehat{A'BC} = \widehat{OAB} + \widehat{A'BC},$$

Assim, temos $\widehat{OBA'} = \widehat{OAB}$

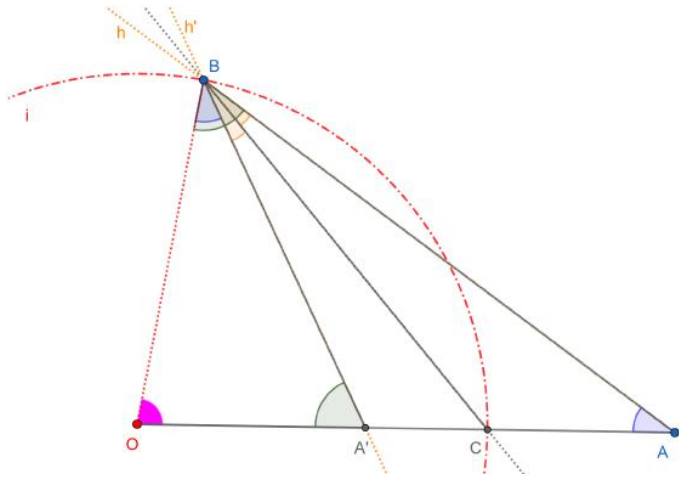


Figura 28

Adicionalmente, valendo nos dois casos, $\widehat{BOA} = \widehat{A'OB}$ (comum). Segue que:

$$\Delta OAB \sim \Delta OBA'.$$

Assim, $OA \cdot OA' = OB^2$.

Proposição 4.1 – (Propriedade dos inversos de dois pontos). Considera-se uma circunferência de inversão i de centro O e raio r (figura 29). Sejam P, Q , (não colineares com O e diferentes deste) e $P' = \text{Inv}(P, i)$ e $Q' = \text{Inv}(Q, i)$. Então $\Delta OPQ \sim \Delta OQ'P'$ e

$$Q'P' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ.$$

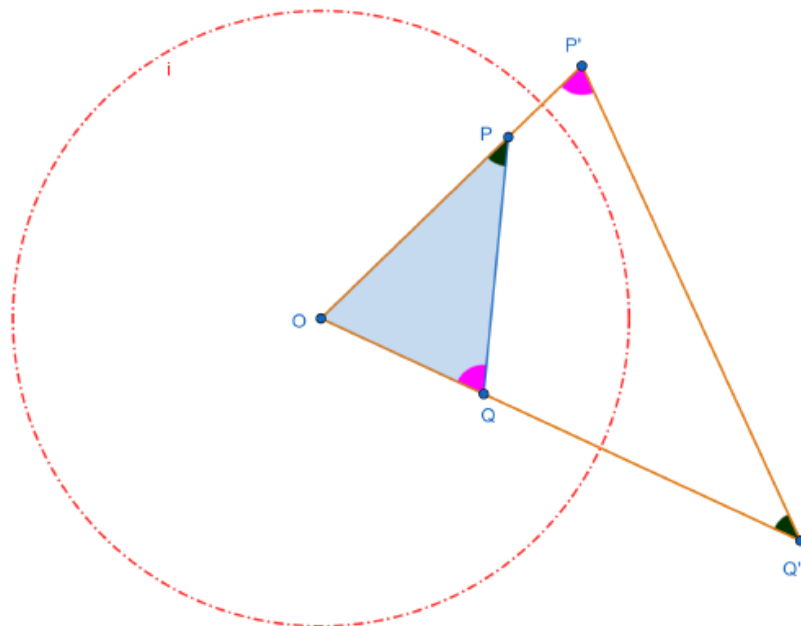


Figura 29

Demonstração:

Dado que

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = r^2$$

Ou seja,

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$$

Como $\widehat{QOP} = \widehat{Q'OP'}$ (comum), pelo critério de semelhança LAL (lado-ângulo-lado), temos que $\Delta OPQ \sim \Delta OQ'P'$. Assim,

$$\widehat{OQP} = \widehat{OP'Q'}.$$

Ou seja,

$$\frac{OQ}{OP'} = \frac{PQ}{Q'P'}$$

Ao pôr $Q'P'$ em evidência e dado que $OP' = \frac{r^2}{OP}$, chegamos em

$$Q'P' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ.$$

4.3 Inversão de retas e circunferências

Agora, diferente do primeiro momento, se apresenta os inversos de lugares geométricos, ou seja, um conjunto de pontos, ao invés de pontos isolados.

Definição 4.1 (Inversa de Lugar Geométrico). Dados um plano l e um lugar geométrico $f \in l$, o lugar geométrico $f' \in l$, é chamado inverso de f quando $P \in f$, se e somente se, o ponto $P' \in f'$.

Embora $P' \neq P$ em geral, existem casos em que LG não muda após a inversão.

Proposição 4.2 – (Inversão de reta que passa por O) A inversa h' de uma reta h que passa pelo centro de inversão O é ela mesma.

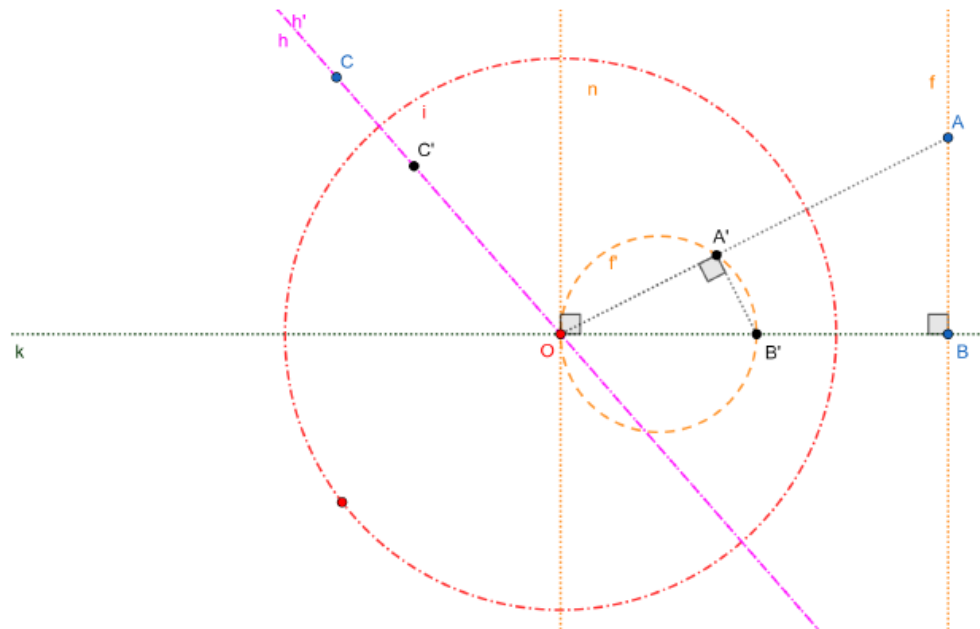


Figura 30

A demonstração se reporta a **Definição 4.1**: os pontos no interior de i e sobre a semirreta OC transformam-se nos pontos no exterior de i e vice-versa.

Proposição 4.3 – (Inversão de reta que não passa por O). A inversa f' de uma reta f que não passa por O é uma circunferência que passa por O (figura 30). No mais, a reta n , tangente a f' em O , é paralela a f .

Para esta demonstração deve-se construir uma reta k perpendicular a f passando pelo centro de inversão O . Marcar o ponto $B = k \cap f$ e escolher um ponto arbitrário $A \in f (A \neq B)$. Sejam $A' = Inv(A, i)$ e $B' = Inv(B, i)$.

Como vimos na **Proposição 4.1** tem-se $\Delta OAB \sim \Delta OB'A'$. Segue que $\widehat{OA'B'} = \widehat{OBA} = 90^\circ$. Do fato de $\widehat{OA'B'} = 90^\circ$, para todo $A \in f (A \neq B)$, o ponto A' pertence a circunferência f' de diâmetro OB' .

Reciprocamente, dado um ponto $A' \in f' (A' \neq B' \text{ e } A' \neq O)$ tem-se $\widehat{OA'B'} = 90^\circ$ (pois OB' é diâmetro de f'). Pela **Proposição 4.1** segue que $\Delta OB'A' \sim \Delta OAB$. Portanto, $\widehat{OBA} = \widehat{OA'B'} = 90^\circ$. Como $\widehat{OBA} = 90^\circ$, para todo $A' \in f' (A' \neq B' \text{ e } A' \neq O)$, todo ponto A está contido numa reta perpendicular ao segmento OB . Como $O \in f'$, por convenção, $\infty = Inv(O, i)$ o qual pertence a f .

Agora, por absurdo, suponha que as retas f e n não sejam paralelas. Assim, existe o ponto $P = (f \cap n) \neq \infty$. Então, $P' \in f' \cap n'$. Como a reta n passa por O . Pela **Proposição 4.2**, segue que $n' = n$ e $P' \in f' \cap n (P' \neq O, \text{ pois } P \neq \infty)$. Ou seja, tanto P' quanto O são

pontos diferentes que pertencem a interseção de f' e n . Como n não seria tangente a f' , temos uma contradição.

Proposição 4.4 – (Inversão de circunferência que passa por O). A inversa de uma circunferência f' que passa pelo ponto de inversão O é uma reta $f = Inv(f', i)$ (figura 30). Pode-se acrescentar que a reta n , tangente a f' em O , é paralela com f .

Demonstração. Segue diretamente da **Proposição 4.3** e da propriedade:

$$Inv(Inv(P, i), i) = Inv(P', i) = P.$$

4.4 Ângulos e inversão

O ângulo entre duas circunferências que se intersectam num ponto é definido como sendo igual ao ângulo formado pelas suas retas tangentes no mesmo ponto. Quando este ângulo é de 90° , as duas circunferências são ditas ortogonais.

Proposição 4.5 – Sejam f e g duas retas que não passam por O e intersectam-se no ponto P formando um ângulo α . Considera-se uma inversão relativa a uma circunferência i centrada em O . Então o ângulo entre f' e g' em $P' = Inv(P, i)$ é α , onde f' é a inversa de f e g' é a inversa de g .

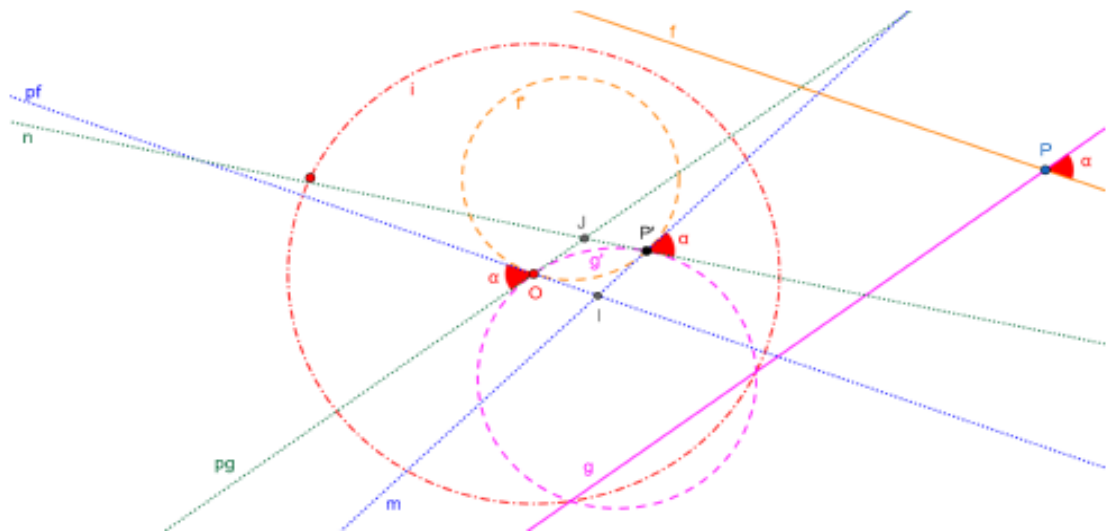


Figura 31

A demonstração vem do fato de como as retas f e g não passam por O transformam-se, pela inversão, nas circunferências f' e g' passando por O . Sejam pf e pg as retas tangentes a f' e g' em O . Pela **Proposição 4.3**, temos $pg \parallel g$ e $pf \parallel f$. Assim, o ângulo pf e pg em O é α . Consideram-se as retas m e n , tangentes em $P' = Inv(P, i)$ a f' e g' ,

respectivamente. Sejam $I = pf \cap m$ e $J = pg \cap n$. Como os triângulos IOP' e JOP' são isósceles de base OP' o ângulo entre m e n também é α .

Proposição 4.6 - (Inversão de circunferência que não passa por O). A inversa de uma circunferência d que não passa pelo centro de inversão O é outra circunferência d' (figura 32). Adicionalmente, as retas tangentes externas comuns de d e d' passam por O . Isto é, o ponto O é o centro de homotetia externo de d e d' .

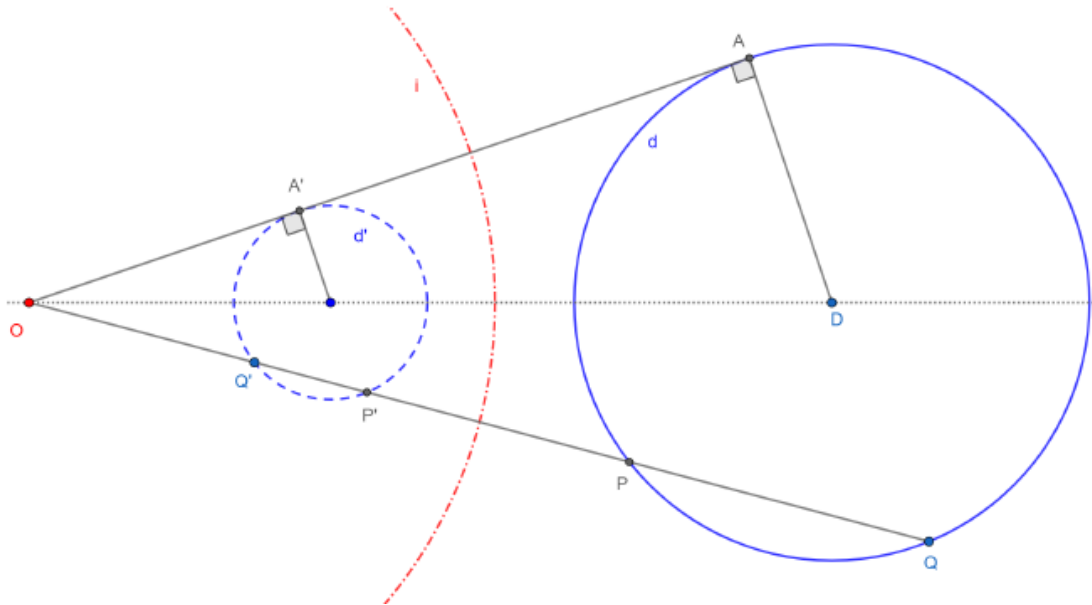


Figura 32

Demonstração.

Seja uma circunferência de inversão i de centro O e raio r . Seja um ponto $Q \in d$, P a segunda interseção da reta OQ com d , $P' = Inv(P, i)$, $Q' = Inv(Q, i)$ e OA um segmento tangente a d . A potência do ponto O relativa a d não depende da posição específica de Q e pode ser escrita como:

$$OQ \cdot OP = Pot_d(O) = OA^2.$$

Por outro lado, como P e P' são um par de inversão vale

$$OP' \cdot OP = r^2.$$

Dividindo as duas últimas equações encontra-se

$$\frac{OQ}{OP'} = \frac{Pot_d(O)}{r^2} = \frac{OA^2}{r^2} = cte.$$

Ou seja, independentemente da posição do ponto Q sobre a circunferência d a razão OQ/OP' . Ou seja, os pontos Q e P' são homólogos. Com isto, d' é outra circunferência e uma tangente a d também o será a d' . O resultado continua sendo válido quando $P = Q$, pois neste caso $OP = OQ = OA$.

Corolário 4.1 – (Inversão preserva os ângulos entre circunferências) Sejam f e g duas circunferências que se intersectam no ponto P formando um ângulo α . Considera-se uma inversão relativa a uma circunferência i centrada em O . Sejam f' e g' as inversas de f e g , respectivamente. Assim, o ângulo formado entre f' e g' no ponto $P' = Inv(P, i)$ é α . Ou seja, a inversa preserva os ângulos formados entre duas circunferências (figura 33). Chegamos ao mesmo resultado quando tratamos de uma reta e uma circunferência.

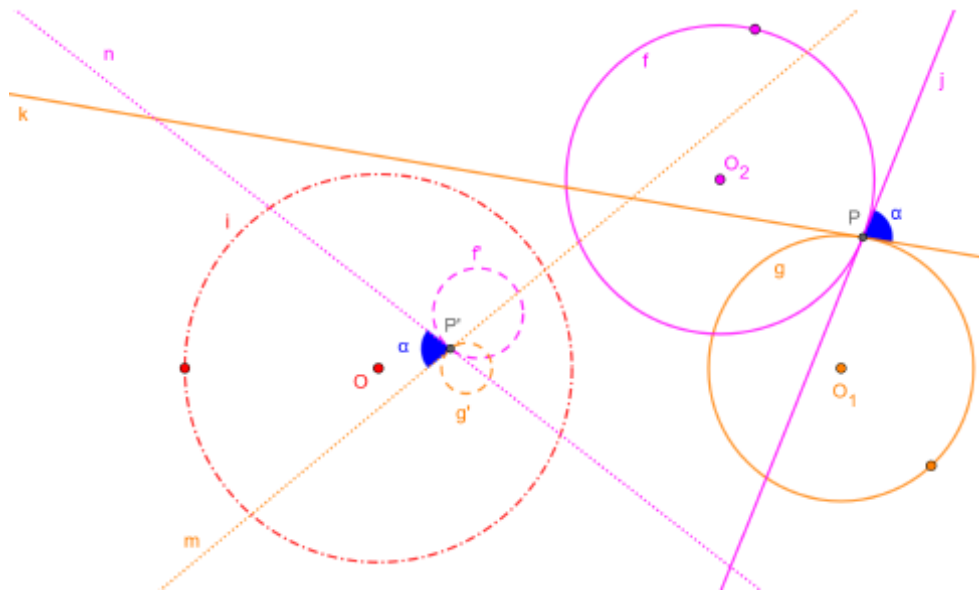


Figura 33

A demonstração vem do fato do ângulo formado entre duas circunferências ser definido pelo ângulo formado pelas suas retas tangentes no ponto de interseção. Assim, o resultado usa a **Proposição 4.5**. O ângulo entre as retas j e k em P é o mesmo que o ângulo entre as retas m e n em $P' = Inv(P, i)$.

Proposição 4.7 - (Ortogonalidade com i de circunferência por P e P'). Qualquer circunferência d que passe por um ponto P e seu inverso P' , respeito a circunferência i , é ortogonal com i (Figura 34).

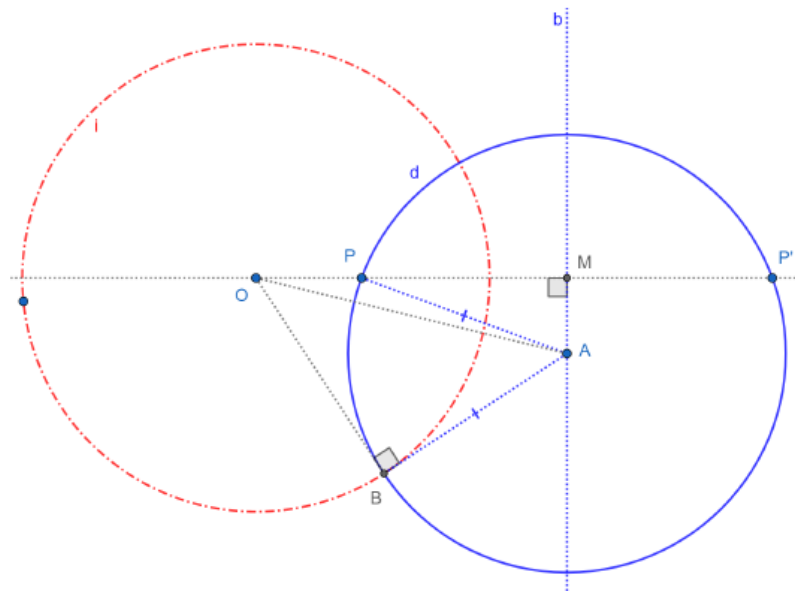


Figura 34

Demonstração. Por serem inversos em relação a i vale que:

$$OP \cdot OP' = OB^2.$$

Sendo M ponto médio de PP' tem-se:

$$OM = \frac{OP' + OP}{2},$$

$$PM = \frac{OP' - OP}{2}$$

Quer-se provar que:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2.$$

Mas $AB = AP$ e pelo Teorema de Pitágoras no ΔOMA segue:

$$OM^2 + AM^2 = OB^2 + AP^2.$$

De $OM = \frac{OP' + OP}{2}$ e do Teorema de Pitágoras no ΔAPM tem-se:

$$\left(\frac{OP' + OP}{2}\right)^2 + AM^2 = OB^2 + PM^2 + AM^2.$$

Simplificando e usando $PM = \frac{OP' - OP}{2}$ encontra-se:

$$\left(\frac{OP' + OP}{2}\right)^2 = OB^2 + \left(\frac{OP' - OP}{2}\right)^2.$$

Desenvolvendo os quadrados e simplificando volta-se a

$$OP \cdot OP' = OB^2.$$

Conclui-se que vale $OA^2 = OB^2 + AB^2$. Pela inversa do Teorema de Pitágoras a proposição fica provada.

Proposição 4.8 – (Inversão entre circunferências ortogonais). Consideram-se duas circunferências c e d ortogonais. A inversa d' de d relativa a c é ela mesma. Isto é, $d' = Inv(d, c) = d$. Analogamente, $Inv(c, d) = c$. Também vale que: $B = Inv(D, c) = Inv(C, d)$ (figura 35).

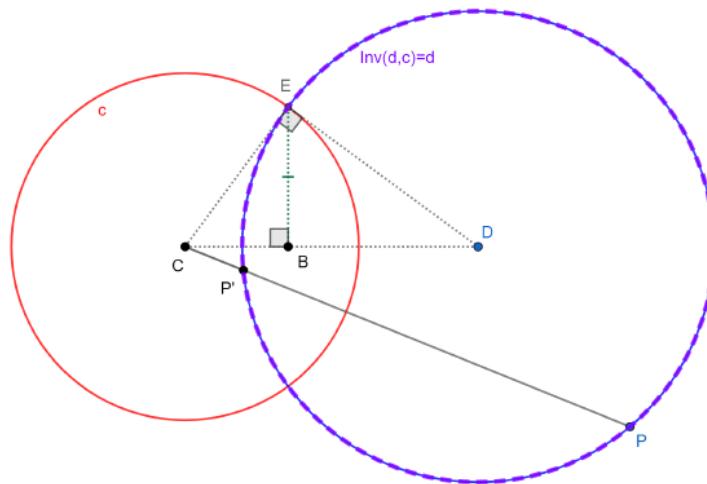


Figura 35

Demonstração.

Seja $P \in d$. Esta é uma recíproca da **Proposição 4.7**. Como c e d são ortogonais. Então $P' = Inv(P, c) \in d$. Para a segunda parte basta analisar o $\triangle CED$, retângulo em E devido a ortogonalidade, e ter em mente os procedimentos de construção de pontos inversos.

4.5 Divisão harmônica e inversão

Definição 4.2 – A divisão harmônica ocorre quando um segmento de reta é dividido por um ponto interno e um ponto externo, de forma que as razões das partes resultantes sejam iguais. Ou seja, se um segmento AB é dividido internamente em M e externamente em N , então a razão AM/MB é igual a razão AN/NB .

Proposição 4.9 - (Divisão Harmônica e Inversão) Os pontos P e Q dividem harmonicamente o segmento BC se, e somente se, P e Q são pares inversamente relativo a uma circunferência i de diâmetro BC . Ou seja, sendo O o ponto médio de BC e $r = OB = OC$ vale:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC} \Leftrightarrow PO \cdot QO = r^2.$$

Adicionalmente, as circunferências de centros BC e PQ são ortogonais.

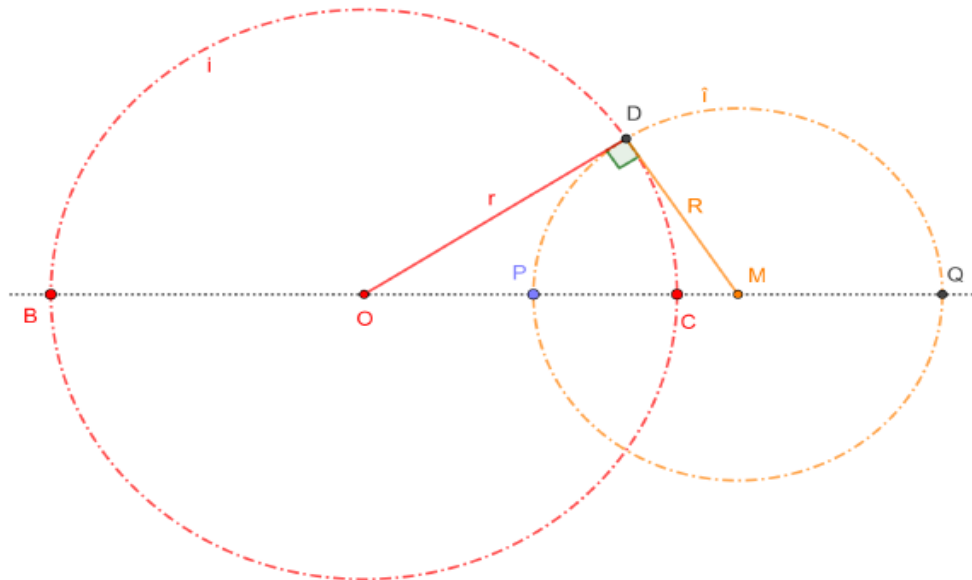


Figura 36

Demonstração.

Será feita a prova do caso $P \in OC$. Quando $P \in BO$ a demonstração é análoga.

Vale que:

A razão entre os segmentos \overline{PB} e \overline{PC} pode ser expressa em função da posição de P em relação ao ponto médio O do segmento BC , com $r = \overline{OB} = \overline{OC}$.

$$\text{Assim, temos } \frac{PB}{PC} = \frac{PO+r}{r-PO}.$$

De forma análoga, a razão QB/QC , para um ponto Q do outro lado de O , é:

$$\frac{QO+r}{QO-r} = \frac{QB}{QC}$$

Logo, se P e Q dividem harmonicamente o segmento \overline{BC} , então:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC} \Leftrightarrow \frac{PO+r}{r-PO} = \frac{QO+r}{QO-r}.$$

Multiplicando cruzado, obtemos:

$$(PO+r)(QO-r) = (QO+r)(r-PO),$$

Expandindo ambos os lados:

Lado esquerdo:

$$PO \cdot QO - PO \cdot r + r \cdot QO - r^2$$

Lado direito:

$$QO \cdot r - QO \cdot PO + r^2 - r \cdot PO$$

Simplificando os dois lados, observamos que os termos se reorganizam simetricamente e a igualdade só é satisfeita se:

$$PO \cdot QO = r^2$$

Ou seja, P e Q são pontos inversos em relação à circunferência i de raio r , centrada em O .

Seja agora M o ponto médio do segmento \overline{PQ} , com $R = \overline{PM} = \overline{MQ}$. Da igualdade:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC} \Leftrightarrow \frac{CP}{CQ} = \frac{BP}{BQ}$$

Obtemos, por meio da razão cruzada, que $CM \cdot BM = R^2$, ou seja, os pontos B e C também são pares de inversão em relação à circunferência \hat{i} , de diâmetro PQ .

Pelo que foi demonstrado na **Proposição 4.7**, circunferências que passam por pares de inversão são ortogonais. Logo, i e \hat{i} são ortogonais.

4.6 Inversos do centro de circunferência

Proposição 4.10 – Seja i uma circunferência de inversão de centro O e c uma circunferência de centro C que não passa por O . Seja f a reta que passa por O e C . Seja \hat{O} o inverso de O em relação a c ($\hat{O} = \text{inv}(O, c)$) e c' o inverso de c em relação a i ($c' = \text{Inv}(c, i)$). Então o inverso de \hat{O} em relação a i , o ponto $C_1 = \text{Inv}(\hat{O}, i)$, será o centro de c' . Isto é, $C_1 = \text{Inv}(\text{Inv}(O, c), i)$.

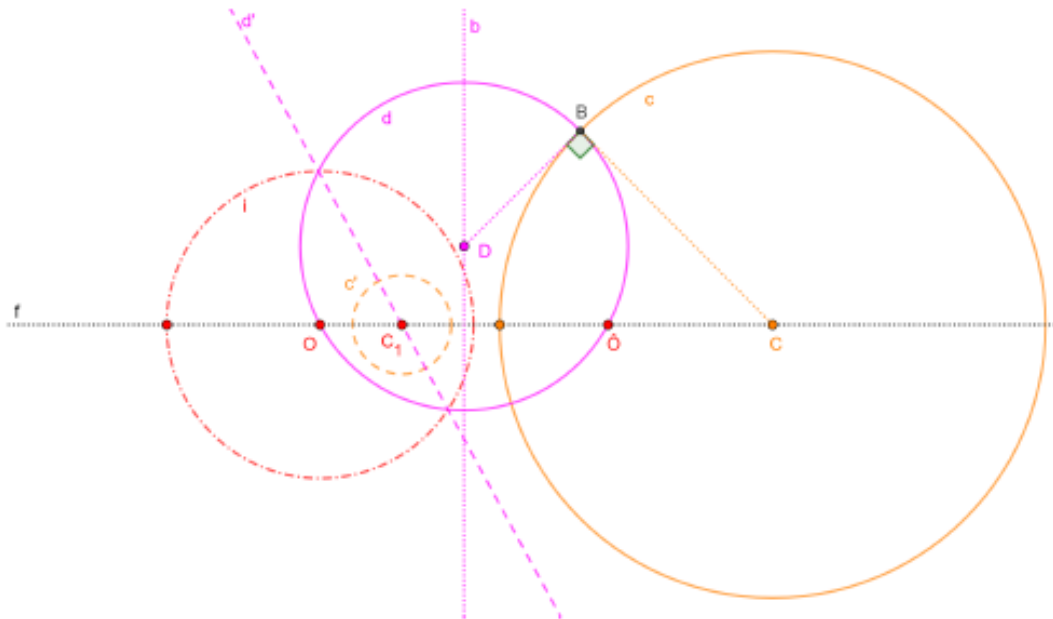


Figura 37

A inversa d' de d em relação a i é uma reta, pois d passa pelo centro de inversão O . Segundo o **Corolário 4.1**, como d e c são ortogonais, d' e c' também serão. Temos que $C_1 \in f$

uma vez que \hat{O} e C_1 são um par de pontos inversos em relação a i e $\hat{O} \in f$. A reta f passa por O , logo a inversa dela em relação a i é a mesma. Assim, $C_1 = d' \cap f' = d' \cap f$.

Proposição 4.11 - Dada uma circunferência de inversão $i(O, r)$. O centro O'' da circunferência inversa c' , de uma reta c que não passa por O , é obtido em duas etapas. Primeiro é feita a reflexão do ponto O relativo a reta c . Segundo, a inversão do ponto O' relativo a i : $O'' = Inv(O', i)$.

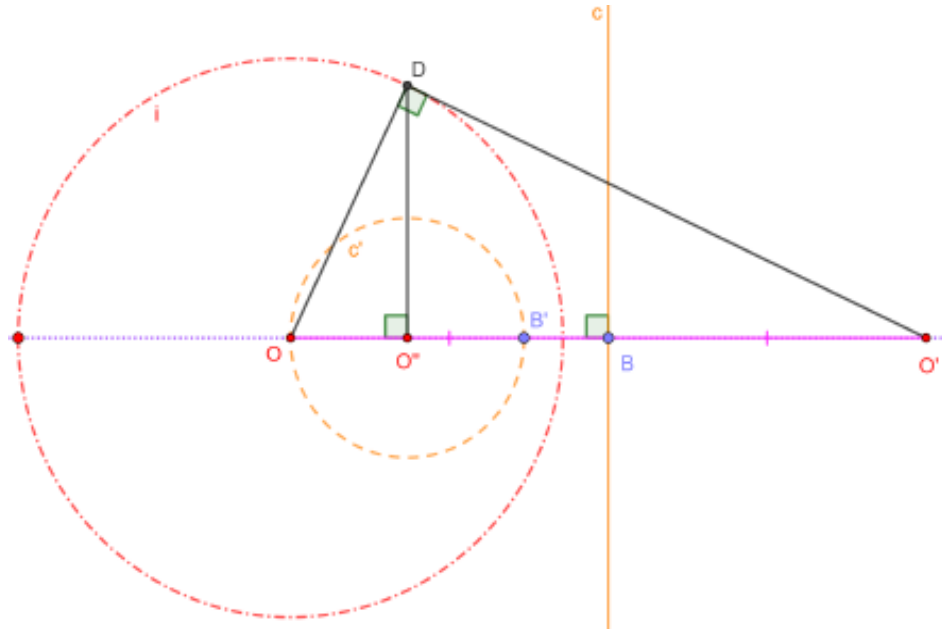


Figura 38

A reflexão do ponto O relativo a reta c pode ser considerada como inversão relativo a uma circunferência de raio infinito. Assim, segundo a **Proposição 4.10**, temos também: $O'' = Inv(Inv(O, c), i)$.

A demonstração segue da relação fundamental da inversão, onde $OB \cdot OB' = r^2$, sendo B um ponto da reta c e B' sua inversa à circunferência i . Como O' é o reflexo de O em relação à reta c , o ponto B pertence ao segmento OO' , e temos:

$$OO' = 2OB \Rightarrow OB = \frac{OO'}{2}$$

Substituindo essa expressão na equação de inversão:

$$\left(\frac{OO'}{2}\right) \cdot OB' = r^2 \Rightarrow OO' \cdot OB' = 2r^2$$

Como também vale, pela definição de inversão do ponto O' , que:

$$r^2 = OO' \cdot OO''$$

Segue-se que:

$$OO'' = \frac{OB'}{2}$$

Conforme o desejado.

Proposição 4.12 - Tenhamos uma circunferência de inversão $i(O, r)$. O inverso de centro C de um círculo $c(C, CA)$ em que o centro de inversão $O \in c$, é simétrico de O com relação a $c' = Inv(c, i)$.

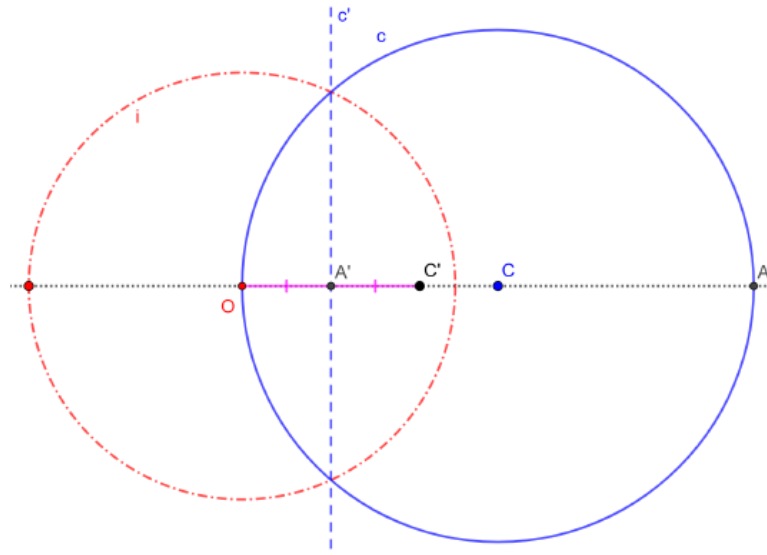


Figura 39

A demonstração segue da **Definição 4.1**:

$$r^2 = OC \cdot OC' = OA \cdot OA'$$

Como $OA = 2 \cdot OC$, temos que:

$$OC' = 2 \cdot OA'$$

Proposição 4.13 - O inverso do centro C de um círculo c , em que o centro de inversão O está no exterior de c , é o ponto médio dos pontos de tangência das retas c' que passam por O .

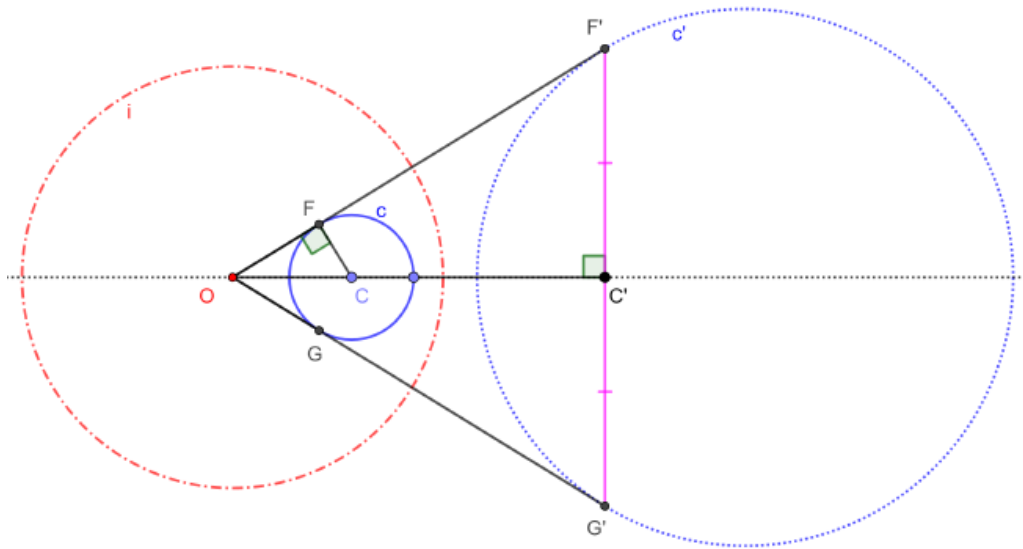


Figura 40

Demonstração. Segue do fato que $F' = Inv(F)$ e $C' = Inv(C)$ e pela **Proposição 4.1**, tem-se:

$$\Delta OFC \sim \Delta OC'F'.$$

Logo, $\widehat{OC'F'} = \widehat{OFC} = 90^\circ$. Isto é OC' é mediatriz do $\Delta OF'G'$ e $F'G' = C'G'$.

Proposição 4.14 - O inverso do centro C de um círculo c , em que o centro de inversão O está no interior de c , é a interseção das retas tangentes a $c' = Inv(c, i)$ pelas interseções da perpendicular a OC passando por O .

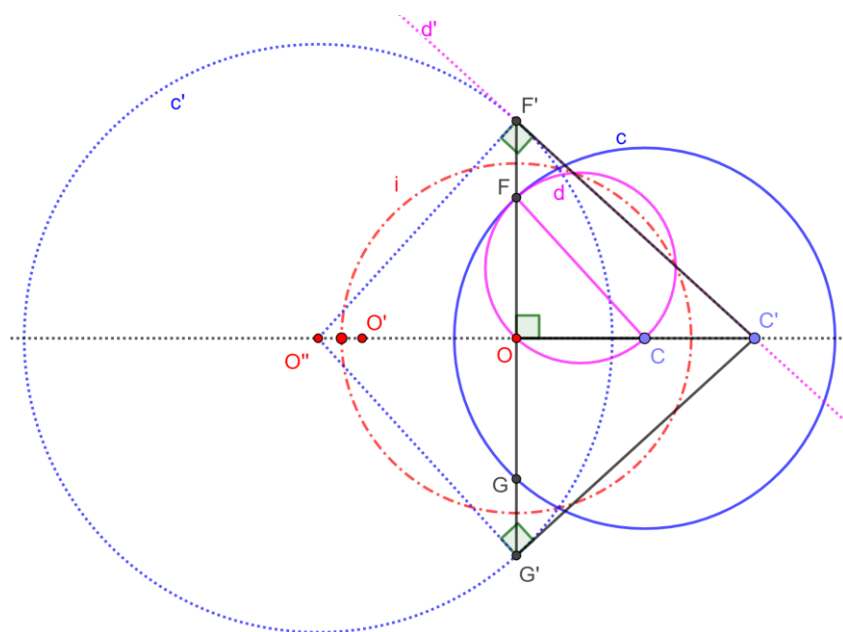


Figura 41

Demonstração. Vem de uma circunferência d circunscrita ao $\triangle OCF$. Como $\widehat{COF} = 90^\circ$ segue FC é diâmetro de d . Logo, d e c são tangentes em F . Sendo $F' = \text{Inv}(F, i)$ têm-se que d' e c' são tangentes em F' . Sejam $O' = \text{Inv}(O, c)$ e $O'' = \text{Inv}(O', i)$. Pela **Proposição 4.10**, temos que O'' é o centro de c' e $\widehat{O''F'C'} = 90^\circ$.

5 INVERSÃO: APLICAÇÕES

Este capítulo explora aplicações significativas da inversão geométrica, destacando seu poder como ferramenta de resolução e simplificação de problemas clássicos. Inicialmente, apresenta-se a projeção estereográfica, uma aplicação da inversão com forte impacto em geometria esférica e em representações no plano. Em seguida, é analisado o mecanismo de Peaucellier-Lipkin, dispositivo mecânico notável por realizar a conversão de movimento circular em movimento retilíneo, cuja fundamentação teórica se apoia na inversão. O capítulo conclui com a demonstração de importantes teoremas da geometria plana por meio dessa transformação, incluindo o Teorema de Ptolomeu e o Teorema de Feuerbach. As demonstrações ilustram a eficiência da inversão na reorganização das relações geométricas, revelando estruturas e simetrias ocultas nas configurações originais.

5.1 Projeção estereográfica

Numa Projeção Estereográfica, qualquer ponto P na superfície de uma esfera, por exemplo a Terra, é representado sobre um plano tangente a ela, por outro ponto P' .

Na **figura 42**, a circunferência t , de centro C , representa um corte transversal da superfície da Terra. Suponha-se que o ponto de tangência seja o “polo Sul” S . A semirreta que parte “polo Norte” N e passa por $P \in t$ intercepta uma perpendicular ao segmento NS em P' .

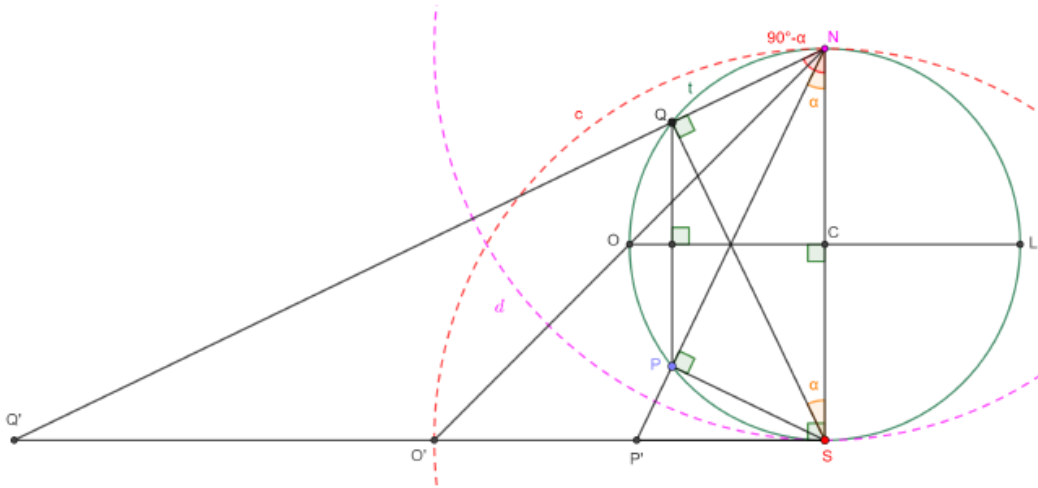


Figura 42

Proposição 5.1 - Os pontos P e P' formam um par inversivo relativo à circunferência d com centro em N e raio NS (Figura 42).

Demonstração. Seja $\widehat{SNP} = \alpha$. Do triângulo NPS , retângulo em P , temos:

$$NP = NS \cos(\alpha).$$

Da mesma forma, no triângulo NSP' , retângulo em S , temos:

$$\cos(\alpha) = \frac{NS}{NP'}.$$

Ao juntar as duas últimas equações, teremos:

$$NP \cdot NP' = NS^2.$$

Ou seja, P e P' são inversos relativos a d .

Seja o ponto Q a reflexão de P relativa a uma perpendicular a NS passando por C (projecção ortogonal do equador da Terra). Pela **Proposição 5.1** vale que Q e sua Projecção Estereográfica Q' formam um par inversivo relativo a d (figura 42).

Proposição 5.2. Os pontos P' e Q' formam um par inversivo relativo a circunferência c com centro em S e raio NS (figura 42).

Demonstração. Pela simetria reflexiva, temos $\widehat{QSN} = \alpha$. Do triângulo SQN , retângulo em Q , segue que:

$$\widehat{SNQ} = 90^\circ - \alpha.$$

Do triângulo NPS , retângulo em P , chega-se a:

$$SP = NS \sin(\alpha).$$

Da mesma maneira, do triângulo NSP' , retângulo em S , tem-se:

$$\tan(\alpha) = \frac{SP'}{NS}.$$

Como também, do triângulo NSQ' , retângulo em S , vem:

$$\frac{1}{\operatorname{tang}(\alpha)} = \operatorname{tang}(90^\circ - \alpha) = \frac{SQ'}{NS}.$$

Utilizando-se de manipulação nas duas últimas equações, chegamos em:

$$SP' \cdot SQ' = NS^2.$$

Ou seja, P' e Q' são inversos relativos a c .

5.2 Mecanismo de Peaucellier-Lipkin.

O inversor de Peaucellier-Lipkin foi inventado em 1864 e é o primeiro mecanismo plano capaz de transformar movimento de rotação em movimento retilíneo perfeito, e vice-versa.

Na **figura 43**, podem ser vistas seis barras de comprimento fixo com as restrições de $OA = OC$ e $AB = BC = CD = DA$. Ou seja, as quatro últimas formam um losango. Além disso, o ponto O é fixo. Há a restrição de que o ponto B deve mover-se apenas ao longo de uma circunferência d , centrada em J (ponto da mediatriz do segmento OB), por uma outra barra de comprimento fixo BJ .

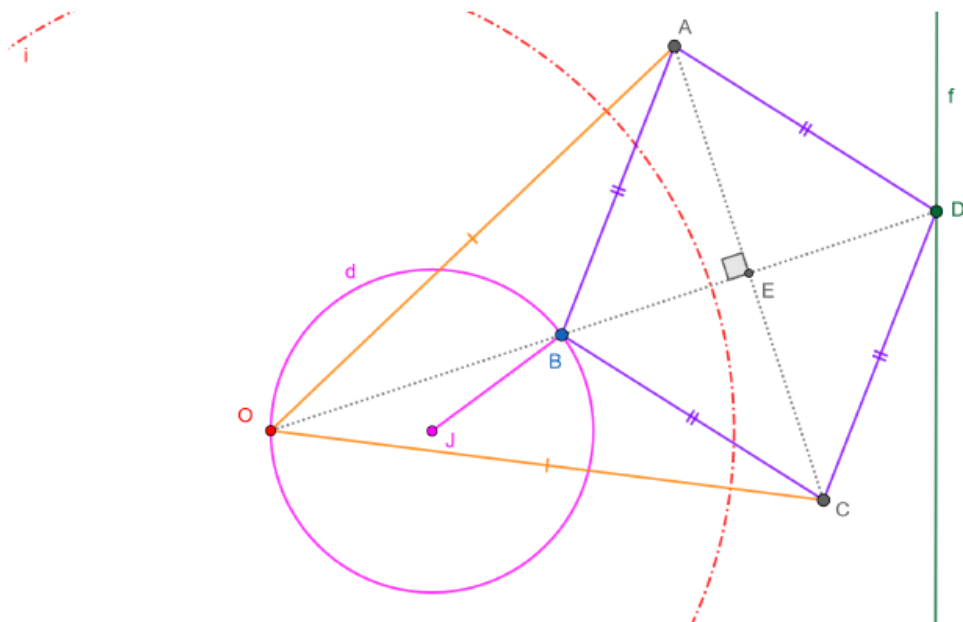


Figura 43

Assim, necessariamente, o ponto D deverá se mover ao longo da linha f . De forma análoga, se o ponto D tivesse a restrição de mover-se ao longo de uma linha, que não passa por

O , então o ponto B teria necessariamente que mover-se ao longo de um círculo (passando por O).

Seja E o ponto de encontro das diagonais do losango $ABCD$. Obtemos que $BE = ED$ e $\widehat{BEA} = 90^\circ$. Então:

$$OB \cdot OD = (OE - BE)(OE + BE),$$

$$OB \cdot OD = OE^2 - BE^2.$$

Somando e subtraindo EA^2 , temos:

$$OB \cdot OD = (OE^2 + EA^2) - (BE^2 + EA^2).$$

Pelo Teorema de Pitágoras nos triângulos OEA e BEA chegamos:

$$OB \cdot OD = OA^2 - AB^2 = r^2.$$

Realmente, se AO e OB forem barras rígidas, com $AO > AB$, a última igualdade pode-se escrever como o quadrado de um número r . Isto é,

$$r = \sqrt{OA^2 - AB^2}.$$

Assim, a equação $OB \cdot OD = r^2$ significa que existe uma circunferência i , de raio r e centrada em O , para a qual os pontos B e D são pares inversos. A inversa da circunferência d , que passa pelo centro de inversão, é uma reta f que não passa por O . Ou seja, se $B \in d$, então $D \in f$. Vale também a recíproca. Esses resultados foram provados na **Proposição 4.3** e na **Proposição 4.4**.

5.3 Prova de teoremas por inversão

5.3.1 Teorema de Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C., Alexandria, Egito) publicou o tratado “Almagesto” de treze livros os quais defendiam a teoria geocêntrica do movimento dos planetas, a Lua e o Sol. Esta prevaleceu por mais de 1400 anos, até que Nicolau Copérnico revolucionou a Astronomia com o modelo heliocêntrico em 1543. No livro 1 do “Almagesto”, Ptolomeu enunciou o teorema que leva seu nome. A partir do mesmo ele conseguiu calcular a função comprimento de corda (análoga a função seno atual) com intervalo de meio grau e cinco casas decimais de precisão. A fórmula do Teorema de Ptolomeu, quando aplicada a um retângulo, transforma-se na fórmula do Teorema de Pitágoras.

Teorema 5.1 (Ida de Ptolomeu). Em um quadrilátero inscrito $ABCD$ o produto dos comprimentos das diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos. Ou seja:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

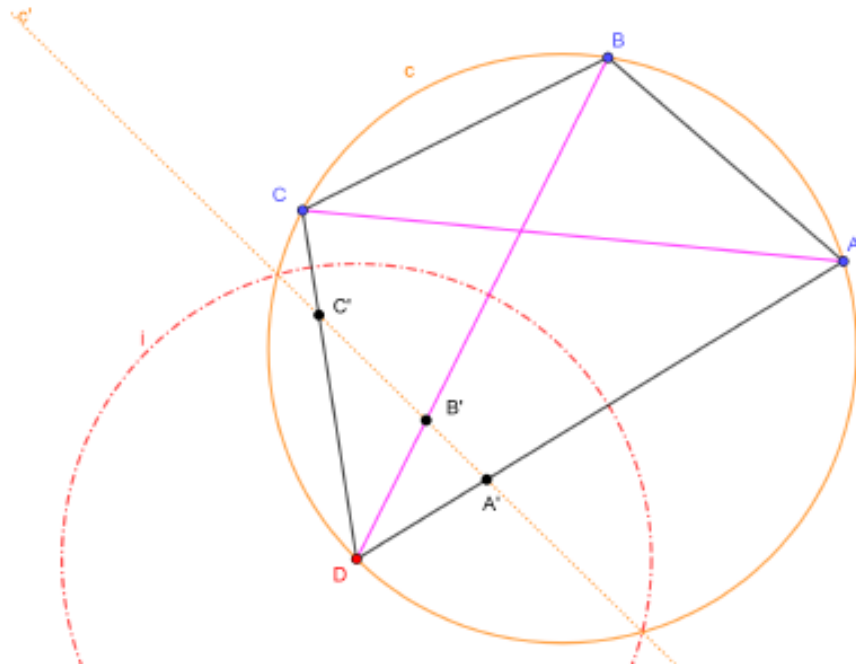


Figura 44

Demonstração. De acordo com a figura 44, seja c a circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$. Considera-se uma circunferência de inversão i com centro num dos vértices do quadrilátero, no caso D , raio qualquer r . Sabendo que c passa pelo centro de inversão, sua inversa c' é uma reta (**Proposição 4.4**). Ou seja, os pontos A' , B' e C' (inversos de A , B e C) são colineares e ainda vale:

$$A'C' = A'B' + B'C' \quad (5.1.1)$$

De acordo com as propriedades da inversão de um segmento (**Proposição 4.1**), temos:

$$A'C' = \frac{r^2}{DA \cdot DC} AC, \quad (5.1.2)$$

$$A'B' = \frac{r^2}{DA \cdot DB} AB, \quad (5.1.3)$$

$$B'C' = \frac{r^2}{DB \cdot DC} BC. \quad (5.1.4)$$

Substituindo (5.1.2), (5.1.3) e (5.1.4) em (5.1.1) encontra-se:

$$\frac{r^2}{DA \cdot DC} AC = \frac{r^2}{DA \cdot DB} AB + \frac{r^2}{DB \cdot DC} BC.$$

Multiplicando a equação anterior por $DA \cdot DB \cdot DC$ e simplificando, temos

$$AC \cdot DB = AB \cdot DC + BC \cdot DA$$

5.3.2 Teorema de Feuerbach (círculo de nove pontos).

Karl Feuerbach foi um geômetra que descobriu o círculo de nove pontos de um triângulo. Nasceu em 1800 e morreu em 1834.

Teorema 5.2 O círculo de nove pontos c_9 é tangente ao incírculo k e aos três excírculos do triângulo ABC (figura 45). Os pontos de tangência F_1, F_a, F_b e F_c são denominados de Feuerbach.

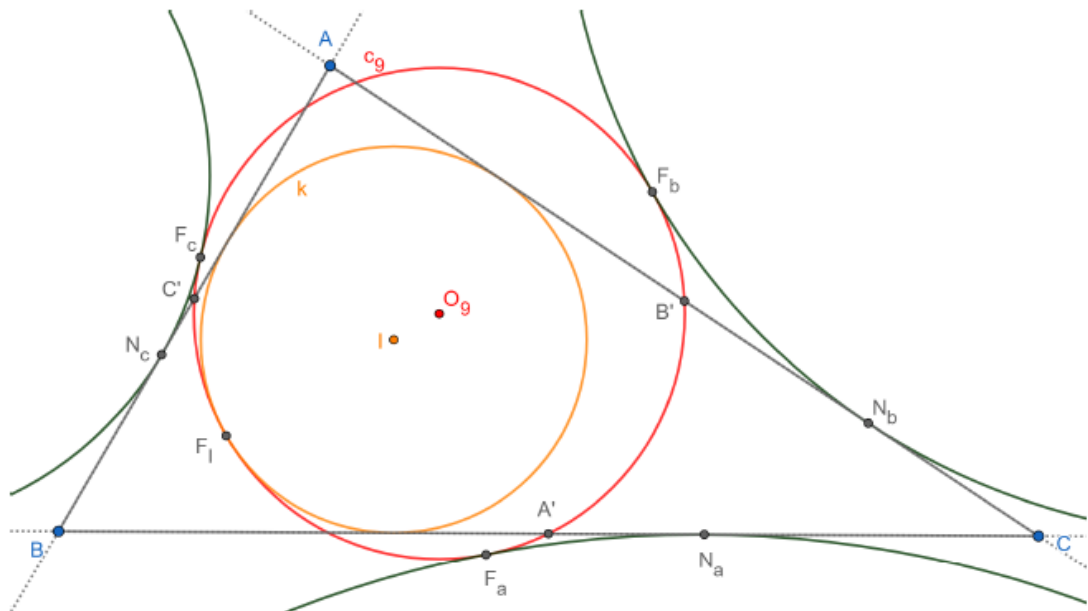


Figura 45

Para tal demonstração, antes, observaremos três lemas.

Lema 5.1 Sejam A', B' e C' os pontos médios dos lados de um triângulo ABC , c_9 a sua circunferência dos nove pontos, s a segunda reta tangente as circunferências inscrita k e ex-inscrita d (vértice B). Seja ainda r uma reta tangente a c_9 por B' . Assim, r é paralela a s (figura 46).

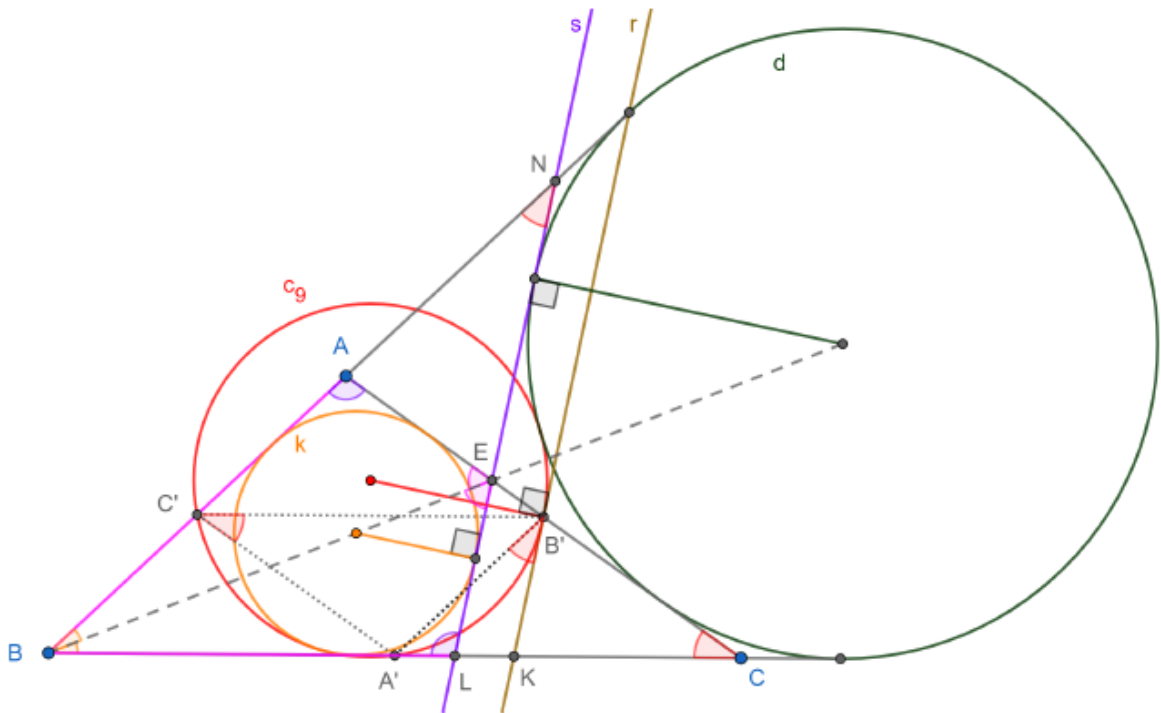


Figura 46

Demonstração. Seja o ponto $K = r \cap BC$. Por serem ângulos de segmentos e inscritos referentes a mesma corda $A'B'$ de c_9 vale que $\widehat{KB'A'} = \widehat{B'C'A'}$. Como $C'B'$ é base média relativa a BC , então $A'CB'C'$ é um paralelogramo e

$$\widehat{B'C'A'} = \widehat{A'CB'}.$$

Sejam o ponto $E = s \cap AC$ e $L = s \cap BC$. Como a reta BE é bissetriz por construção temos que $\widehat{EBA} = \widehat{EBL}$ e $\widehat{BEL} = \widehat{BEA}$. Pelo caso **ALA**, temos que $\triangle BEL \cong \triangle BEA$. Consequentemente, $\widehat{BAE} = \widehat{BLE}$ e $BA = BL$.

Seja o ponto $N = s \cap BA$. Pelo caso **ALA**, temos que $\triangle BLN \cong \triangle ABC$. Assim, $\widehat{BNL} = \widehat{BCA}$. Como $\widehat{BNL} = \widehat{A'B'K}$ as retas r e s são paralelas.

Lema 5.2 Sejam G_b e N_b os pontos de interseção da circunferência $k(I)$ e ex-inscrita $d(I_b)$ do triângulo ABC com os segmentos AC , respectivamente. Assim:

a) o ponto médio do segmento AC , isto é B' , também é ponto médio do segmento G_bN_b .

b) Os pontos I e I_b dividem harmonicamente o segmento BE (figura 47).

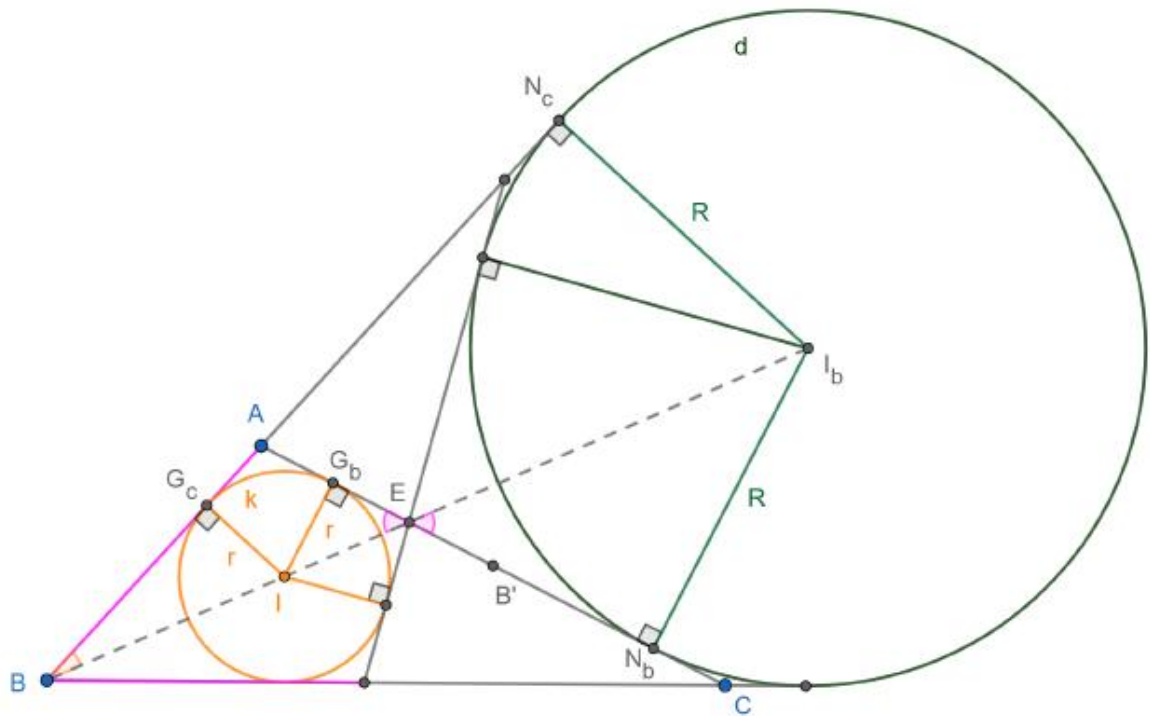


Figura 47

Demonstração. A prova do item a) encontra-se no corolário 2.1 em [4].

Item b). Sejam G_c e N_c os pontos de interseção da circunferência inscrita $k(I)$ e ex-inscrita $d(I_d)$ do triângulo ABC com a reta AB , respectivamente (figura 47). Pelo caso **AA** de semelhança, temos:

$$\Delta BG_cI \sim \Delta BN_cI_b.$$

Segue que:

$$\frac{IB}{I_bB} = \frac{IG_c}{I_bN_c} = \frac{r}{R}. \quad (5.2.1)$$

Por **AA**, também vale a semelhança:

$$\Delta IG_bE \sim \Delta I_bN_bE.$$

Segue que:

$$\frac{IE}{I_bE} = \frac{IG_b}{I_bN_b} = \frac{r}{R}. \quad (5.2.2)$$

De (5.2.1) e (5.2.2) encontra-se:

$$\frac{IB}{I_bB} = \frac{IE}{I_bE}.$$

Por fim, chegamos que os pontos I e I_b dividem harmonicamente o segmento BE e vice-versa. Ou seja, os pontos B e E dividem harmonicamente o segmento II_b .

Lema 5.3 Seja D o pé da altura do vértice B sobre a reta AC . Os pontos D e E são conjugados harmônicos em relação ao segmento G_bN_b (figura 48).

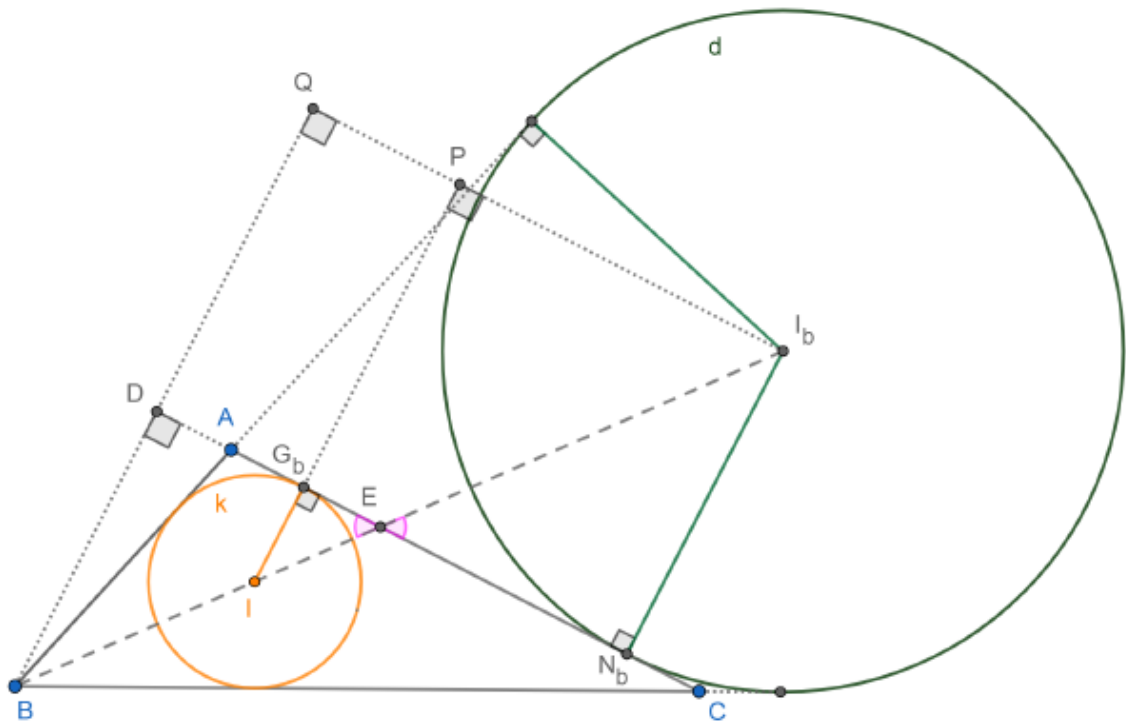


Figura 48

Demonstração. Usando a semelhança $\Delta IG_bE \sim \Delta I_bN_bE$, temos que:

$$\frac{G_bE}{N_bE} = \frac{IE}{I_bE}.$$

Como I e I_b dividem harmonicamente o segmento BE (**Lema 5.2**), chega-se:

$$\frac{G_bE}{N_bE} = \frac{IB}{I_bB}. \quad (5.2.3)$$

Por I_b , traça-se uma paralela a reta AC e marca-se sobre esta as projeções ortogonais Q e P dos pontos B e I , respectivamente. Pelo Teorema de Tales tem-se:

$$\frac{IB}{I_bB} = \frac{QP}{QI_b} = \frac{G_bD}{N_bD}. \quad (5.2.4)$$

De (5.2.3) e (5.2.4) encontra-se:

$$\frac{G_bE}{N_bE} = \frac{G_bD}{N_bD}.$$

O que significa que os pontos D e E dividem harmonicamente o segmento G_bN_b e vice-versa. Assim, os pontos G_b e N_b dividem harmonicamente o segmento DE .

Teorema 5.2 O círculo de nove pontos c_9 é tangente ao incírculo k e ao ex-círculo d do ΔABC (figura 49).

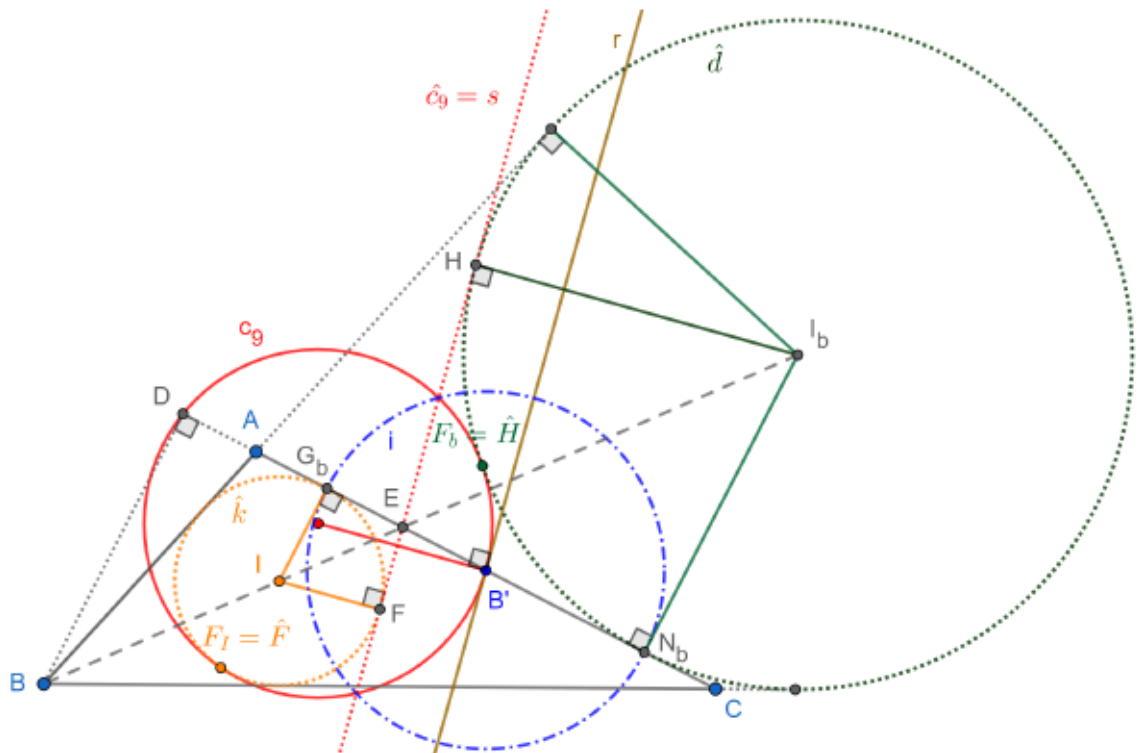


Figura 49

Demonstração.

Considera-se uma circunferência de inversão i , com centro em B' e diâmetro $G_b N_b$ (figura 49). Isto é possível pois viu-se no **Lema 5.2** que $G_b B' = B' N_b$.

Por construção, as circunferências k e d são ortogonais a i . Pela **Proposição 4.8** elas são invariantes após a inversão em relação a i . Ou seja, $\hat{k} = Inv(k, i)$ e $\hat{d} = Inv(d, i) = d$. A reta AC também é invariante, dado que passa pelo centro de inversão.

A circunferência de nove pontos do triângulo ABC , ou seja c_9 , passa pelo centro de inversão B' . Assim, a sua inversa \hat{c}_9 é uma reta. Como os pontos D e E são pares harmônicos relativos ao segmento $G_b N_b$ (**Lema 5.3**), assim, pela **Proposição 4.9**, $\hat{D} = Inv(D, i) = E$ e \hat{c}_9 passa pelo ponto E .

Além do mais, pela **Proposição 4.4**, \hat{c}_9 é paralela a reta r (tangente a \hat{c}_9 por B'). Assim, como temos no **Lema 5.1** que a reta r é paralela com a reta s , segunda tangente interna comum de k e d e passa por E . O que nos leva a $\hat{c}_9 = s$.

Como \hat{c}_9 é tangente às circunferências \hat{k} e \hat{d} , pelo **Corolário 4.1**, segue que C_9 é tangente com k e d . De fato, os pontos de Feuerbach são $F_1 = Inv(F, i) = \hat{F}$ e $F_b = Inv(H, i) = \hat{H}$.

A demonstração da tangência entre c_9 e os outros dois ex-incírculos é feita de forma análoga.

6 TEOREMA DE MORH-MASCHERONI

Neste capítulo, é apresentada uma abordagem construtiva para a demonstração do Teorema de Mohr-Mascheroni, o qual afirma que toda construção geométrica possível com régua e compasso pode ser realizada utilizando apenas o compasso. A demonstração é conduzida por meio da resolução progressiva de oito problemas fundamentais, que abordam situações clássicas da geometria plana, como simetrias em relação a retas, determinação de pontos médios, múltiplos de segmentos e verificação de colinearidade. Para elaboração deste capítulo tive como fonte a dissertação de mestrado “Uma abordagem para provas com construções geométricas e *cabri-géomètre*”. Cada problema é resolvido exclusivamente com o uso do compasso, evidenciando a suficiência desse instrumento nas construções propostas. Essa metodologia prática não apenas valida o teorema, como também oferece uma visão didática e acessível da potência construtiva do compasso, antecipando o conteúdo do capítulo seguinte, que explora aplicações e problemas resolvidos com base nesse princípio.

Teorema 6.1 Toda construção utilizando apenas o compasso pode obter qualquer ponto do plano em qualquer construção euclidiana.

O Teorema de Mohr-Mascheroni será demonstrado, primeiramente, usando do fato que somente com o compasso pode-se encontrar o ponto em que duas retas não paralelas se interceptam. Em seguida, se houver, a demonstração do(s) ponto(s) de interseção de uma reta e uma circunferência, também, podem ser encontrados usando apenas o compasso.

Para tal fato, utilizaremos os lemas a seguir:

Lema 6.1 – Sejam A, B, C e D , pontos distintos do plano onde as retas AB e CD concorrem no ponto X . Assim, pode-se adquirir o ponto X por uma construção utilizando o compasso apenas.

Lema 6.2 – Seja C uma circunferência de centro O e raio R e A e B dois pontos do plano de C tais que a reta AB intercepta a circunferência C . É possível nestas condições determinar os pontos M e N de interseção de C com a reta AB , utilizando-se apenas o compasso.

Os dois lemas citados serão provados a partir da resolução de oito problemas. Assim, ao final o Teorema de Mohr-Mascheroni terá sido demonstrado.

6.1 Problema 1

Dados três pontos A , B e C não-alinhados, encontrar o simétrico de C em relação à reta AB .

Construção:

Passo 1 – Construir a circunferência C_1 de centro no ponto A que passe pelo ponto C ;

Passo 2 – Construir a circunferência C_2 de centro no ponto B passando pelo ponto C ;

Passo 3 – Tome C' pertencente à interseção de C_1 e C_2 e tal que $C \neq C'$;

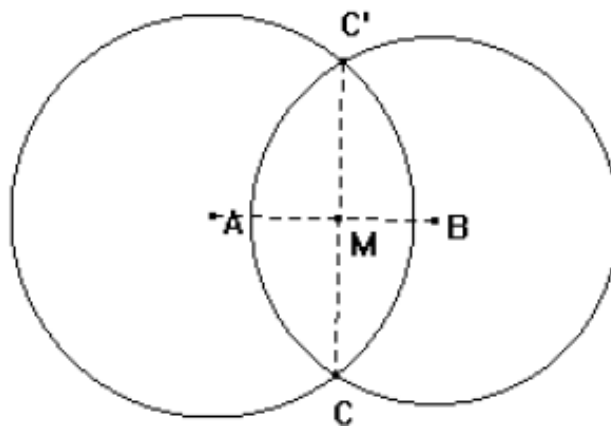


Figura 50

Por construção, $AC = AC'$ e $BC = BC'$. Tendo AB como lado comum dos triângulos ABC e ABC' , pelo caso LLL , temos que são congruentes. Por outro lado, seja $M = \overline{AB} \cap \overline{CC'}$. Os triângulos ACM e $AC'M$ são congruentes pelo caso LAL , já que $AC = AC'$ (raio) (L), $\widehat{CAM} = \widehat{C'AM}$ (congruência dos ΔABC e $\Delta ABC'$) (A) e $AM = AM$ (lado comum) (L).

Assim, temos $CM = C'M$ e $\widehat{CMA} \cong \widehat{C'MA}$ (LAL supracitada). Ademais, sabendo que $\widehat{CMA} + \widehat{C'MA} = 180^\circ$, concluímos, então, que $\widehat{CMA} = \widehat{C'MA} = 90^\circ$. Ao provar que os triângulos AMC e AMC' são congruentes e com os ângulos retos nos vértices em M , temos que C' é o simétrico de C em relação à reta AB .

6.2 Problema 2

Dados os pontos A e B , determinar o ponto C da reta \overleftrightarrow{AB} tal que B seja ponto médio do segmento AC . Uma extensão do problema se estende ao encontrar um ponto C de modo que $AC = m \cdot AB, m \in \mathbb{N}$.

Construção:

Passo 1 – Construir um triângulo equilátero ABD de base AB .

Passo 2 – Construir um triângulo equilátero BDE onde $E \neq A$.

Passo 3 – Construir, com base BE , o triângulo equilátero BEC de modo que $C \neq D$.

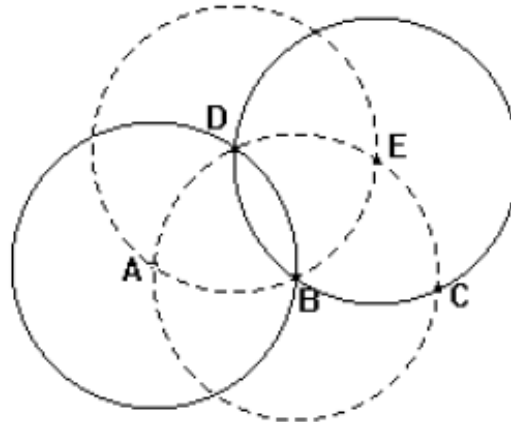


Figura 51

A demonstração segue do fato que os triângulos ABD e BDE são equiláteros, ou seja, $AB = BD$, $BD = BE$ e $\widehat{ABD} = 60^\circ = \widehat{DBE}$. Assim, o triângulo BEC é equilátero e $BE = BC = AB$ e $\widehat{EBC} = 60^\circ$. O que implica que a soma dos 3 ângulos no vértice B é igual a dois ângulos retos, os pontos A , B e C são colineares e como $AB = BC = \text{raio}$ (construção), tendo que B é ponto médio de \overline{AC} , o que significa $AC = 2AB$. O processo repete-se para os pontos B e C , ou seja, ao dobrar \overline{BC} , triplicamos \overline{AB} , ao encontrar um ponto F na reta AB de modo que $AF = 3AB$. Assim, sucessivamente, encontramos um ponto P na reta AB de sorte que $AP = m \cdot AB$, tal que $m \in \mathbb{N}$.

6.3 Problema 3

Dados três pontos A , B e C , verificar se são colineares.

Construção:

Passo 1 – Traçar a circunferência de centro A e raio AC ;

Passo 2 – Traçar a circunferência de centro C e raio AC ;

Passo 3 – Encontrar os pontos D e E de interseção das circunferências;

Se $BD = BE$, temos que os pontos A , B e C são colineares.

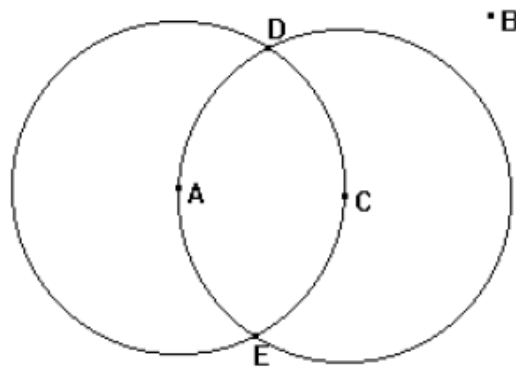


Figura 52

Justificativa:

Os triângulos AEC e ADC são congruentes, pelo caso L.L.L. Assim, D e E são simétricos em relação à reta AC (conforme o Problema 1).

Da construção acima, temos que $CD = CE$, ou seja, C pertence à mediatriz do segmento DE ; da mesma maneira, $AD = AE$ e então, A pertence à mediatriz de DE . Para verificar se os pontos A, B e C são colineares basta comparar com o compasso os segmentos BD e BE . Se $BD = BE$, tem-se que B pertence à mediatriz do segmento DE e, portanto, os pontos A, B e C são colineares; caso contrário, B não pertence à reta AC e, assim, os pontos A, B e C são não-colineares.

6.4 Problema 4

Dados dois pontos A e B , determinar do segmento AB seu ponto médio.

Construção:

Passo 1 – Construir o ponto C tal que B é ponto médio do segmento AC .

Passo 2 – Construir a circunferência C_1 de centro A passando por B .

Passo 3 – Construir uma outra circunferência C_2 de centro C e de raio AC .

Passo 4 – Fazer a interseção de C_1 e C_2 encontrando os pontos X e Y .

Passo 5 – Construir a circunferência C_3 de centro X passando pelo ponto A .

Passo 6 – Construir a circunferência C_4 de centro Y passando pelo ponto A .

Passo 7 – Tomar M pertencente à interseção de C_3 e C_4 , com $M \neq A$, onde M é o ponto que buscamos.

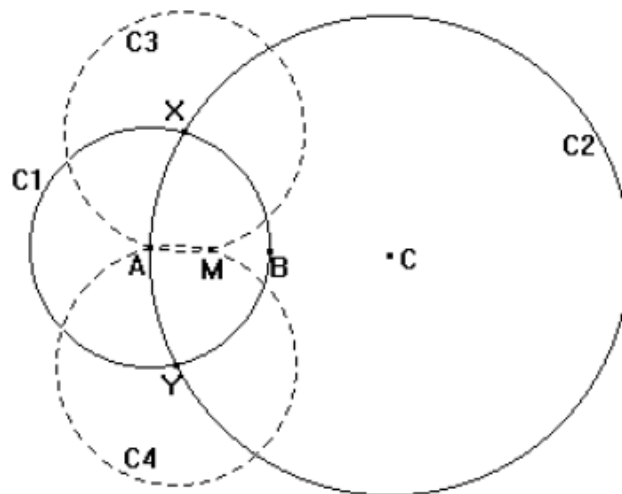


Figura 53

A demonstração segue, da construção do ponto C , que B está entre A e C . Como C pertence à mediatriz de \overline{XY} e como B pertence à mediatriz de \overline{XY} , temos que C é colinear a A e B . Temos, então, que as circunferências C_3 e C_4 possuem o mesmo raio (por construção), o ponto M é de modo que $MX = MY$, assim, M pertence à mediatriz \overline{XY} , o que segue que A, M e C são colineares, da mesma feita são A, M e B . Adicionalmente, os triângulos AXM e ACX são semelhantes, uma vez que são isósceles e têm os ângulos da base congruentes ao ângulo $X\hat{A}C$. Assim, $\frac{AM}{AX} = \frac{AX}{AC} \Rightarrow AM = \frac{(AX)^2}{AC}$. Porém, por construção, sabemos que $AC = 2 \cdot AB$ e $AX = AB$, o qual se conclui que $AM = \frac{(AX)^2}{2 \cdot AB} = \frac{AB}{2}$.

Como provamos que que os pontos A, M e B são colineares e que $AB = 2 \cdot AM$, disso resulta que M é o ponto médio de AB .

6.5 Problema 5

Dado um arco AB em uma circunferência de centro O e raio R , determinar a bissetriz desse arco.

Construção:

Passo 1 – Construir a circunferência C_1 de centro no ponto O e raio AB ;

Passo 2 - Construir a circunferência C_2 de centro A e raio R ;

Passo 3 – Construir a circunferência C_3 de centro no ponto B e raio R ;

Passo 4 – Seja C o ponto tal que $C \in C_2 \cap C_1$ e $ABOC$ seja um quadrilátero;

Passo 5 – Seja D o ponto tal que $D \in C_3 \cap C_1$ e $ABDO$ seja um quadrilátero;

Passo 6 – Construir a circunferência C_4 de centro no ponto C e raio CB ;

Passo 7 – Construir a circunferência C_5 de centro no ponto D e raio DA ;

Passo 8 – Achar um ponto E tal que $E \in C_4 \cap C_5$;

Passo 9 – Traçar a circunferência C_6 de centro C e raio OE ;

Passo 10 – Traçar a circunferência C_7 de centro D e raio OE ;

Passo 11 – Encontrar os pontos X e X_1 na interseção de C_6 e C_7 .

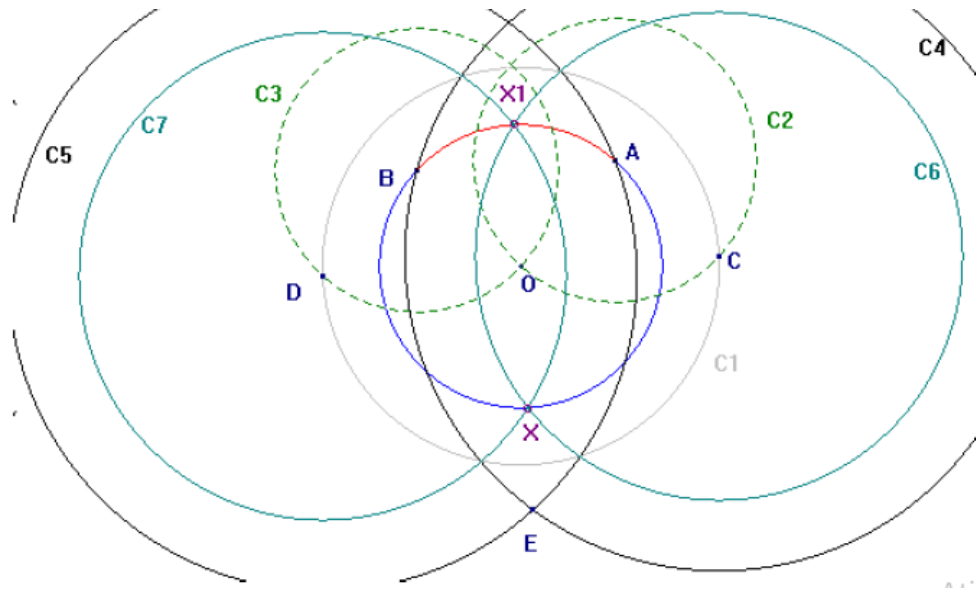


Figura 54

O quadrilátero $ABDO$ é um paralelogramo, pois os pares de lados opostos AB e OD , AO e BD são congruentes, ou seja, $AB = OD$ e $AO = BD$. Da mesma forma, $ABOC$ é paralelogramo. Assim, os pontos C , O e D são colineares, pois $CO \parallel AB$ e $OD \parallel AB$. Como os triângulos CED e CXD são isósceles, temos $\widehat{COE} = \widehat{COX} = 90^\circ$, já que $CO = OD$. Assim, a reta OX é perpendicular à corda AB .

A demonstração será feita em duas etapas: a primeira vamos provar que OX é a bissetriz do arco AB , a segunda, que $OX = R$.

Neste primeiro momento vamos mostrar que OX é bissetriz do arco AB provando que $CX = DX$. Nos triângulos OCX e ODX , temos que $OC = OD$, pois O é ponto médio (**Lado**). Concomitante, temos $\widehat{COX} \equiv \widehat{DOX}$ – ângulo reto (**Ângulo**) e $OX = OX$, por serem, óbvio, lado comum (**Lado**).

Assim, por **LAL**, os triângulos OCX e ODX são congruentes. Logo, temos $CX = DX$ e OX , no caso, bissecta o arco AB .

Agora, no segundo momento da demonstração, precisamos provar que $OX = R$. Como $ABOC$ é paralelogramo, temos:

$$OC = AB, AC = OB, \widehat{OCA} = \alpha \text{ e } \widehat{COB} = 180^\circ - \alpha.$$

Pela Lei dos Cossenos, nos triângulos AOC e BOC , respectivamente, temos:

- ΔAOC ,

$$AO^2 = OC^2 + OB^2 - 2OC \cdot OB \cdot \cos\alpha \quad (i)$$

- ΔBOC ,

$$\begin{aligned} BC^2 &= OC^2 + OB^2 - 2 \cdot OC \cdot OB(-\cos\alpha) = \\ &= BC^2 = OC^2 + OB^2 + 2 \cdot OC \cdot OB \cdot \cos\alpha \quad (ii) \end{aligned}$$

Sabendo que $AB = OC$, $CX = OE$ e $CE = BC$ e somando (i) e (ii), teremos:

$$AO^2 + BC^2 = 2OB^2 + 2AB^2$$

$$R^2 + BC^2 = 2R^2 + 2AB^2$$

$$BC^2 = 2AB^2 + R^2$$

Além do mais, o triângulo COE sendo retângulo, gera:

$$\begin{aligned} CE^2 = BC^2 &= OC^2 + OE^2 \Rightarrow 2AB^2 + R^2 = AB^2 + OE^2 \\ &\Rightarrow OE^2 = AB^2 + R^2 \end{aligned}$$

Assim, percebendo que o triângulo COX também é retângulo, teremos:

$$\begin{aligned} OX &= \sqrt{CX^2 - OC^2} = \sqrt{OE^2 - OC^2} \\ &= \sqrt{AB^2 + R^2 - AB^2} = \sqrt{R^2} = R, \end{aligned}$$

Ou seja, $OX = R$.

Deste modo, o ponto X pertence à circunferência de centro O e raio R dados e bissecta o arco AB .

6.6 Problema 6

Dada uma reta que passa pelos pontos A e B , quando possível, determinar os pontos de interseção com uma circunferência C de centro O e raio R .

Construção:

1º CASO: O não pertence à reta AB .

Passo 1: Achar O' simétrico de O em relação á reta AB (problema 1);

Passo 2: Achar a circunferência C_1 com centro O' e raio R ;

Passo 3: Encontrar os pontos D e E na interseção de C com C_1 (no caso, os pontos que buscamos).

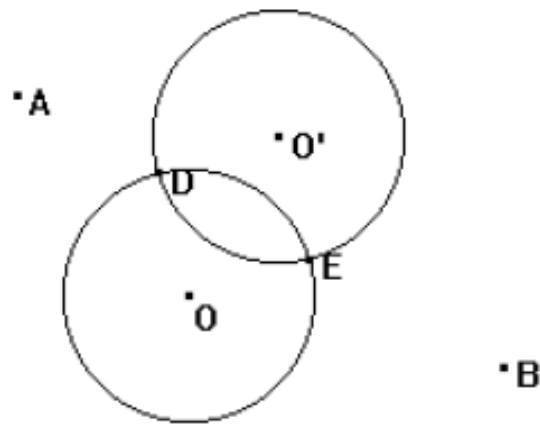


Figura 55

Neste primeiro caso, a justificativa dar-se pelo fato de o ponto O' é simétrico de O em relação à reta AB , ou seja, a reta AB é a mediatriz de $\overline{OO'}$. Por construção, $OD = O'D = R$ e $OE = O'E = R$. Dessa forma, $D \in AB \cap C$ e $E \in AB \cap C$.

2º Caso – O pertence à reta AB .

Passo 1 – Traçar uma circunferência C_1 de centro no ponto A raio adequado;

Passo 2 – Achar os pontos E e D na interseção de C_1 e C .

Passo 3 – Encontrar a bissetriz do arco ED na circunferência C .

Passo 4 – Os pontos buscados são X e Y que definem a bissetriz.

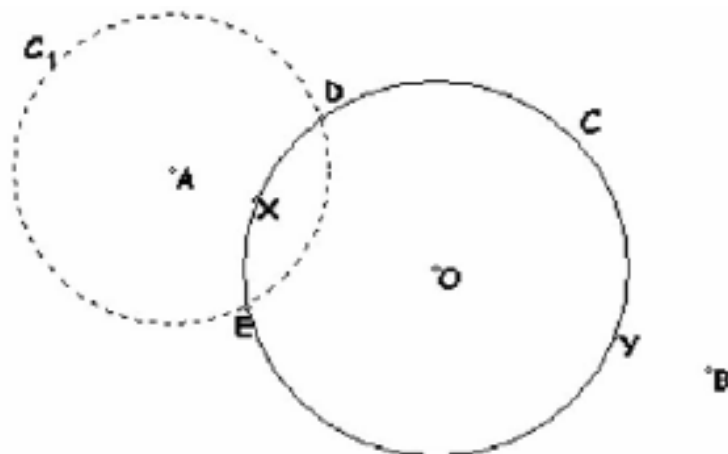


Figura 56

A justificativa se dá por construção, onde $OE = OD$ e $AE = AD$, onde AO , no caso, é a mediatriz do segmento ED . Se X e Y são pertencentes à bissetriz, logo tais arcos pertencem à mediatriz de ED , ou seja, X e Y pertencem à reta AB .

6.7 Problema 7

Dados os segmentos de comprimento a, b e c , tais que $a > \frac{c}{2}$, construir um segmento de comprimento x tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Construção:

Passo 1 – Sejam R e S os pontos extremos do segmento de comprimento c ;

Passo 2 – Construir a circunferência C_1 de centro R e raio a ;

Passo 3 – Construir a circunferência C_2 de centro S e raio a ;

Passo 4 – Fazer a interseção de C_1 com C_2 adquirindo os pontos X e Y ;

Passo 5 – Construir a circunferência C_3 de centro X e raio b ;

Passo 6 – Achar os pontos D_1, D_3, D_2, D_4 na interseção de C_3 com C_1 e C_2 , respectivamente;

Passo 7 – Tomar dois destes pontos do mesmo lado da reta XY (no caso, na figura, os pontos D_1 e D_4 ou D_2 e D_3);

Passo 8 – A solução é o segmento que une esses dois pontos.

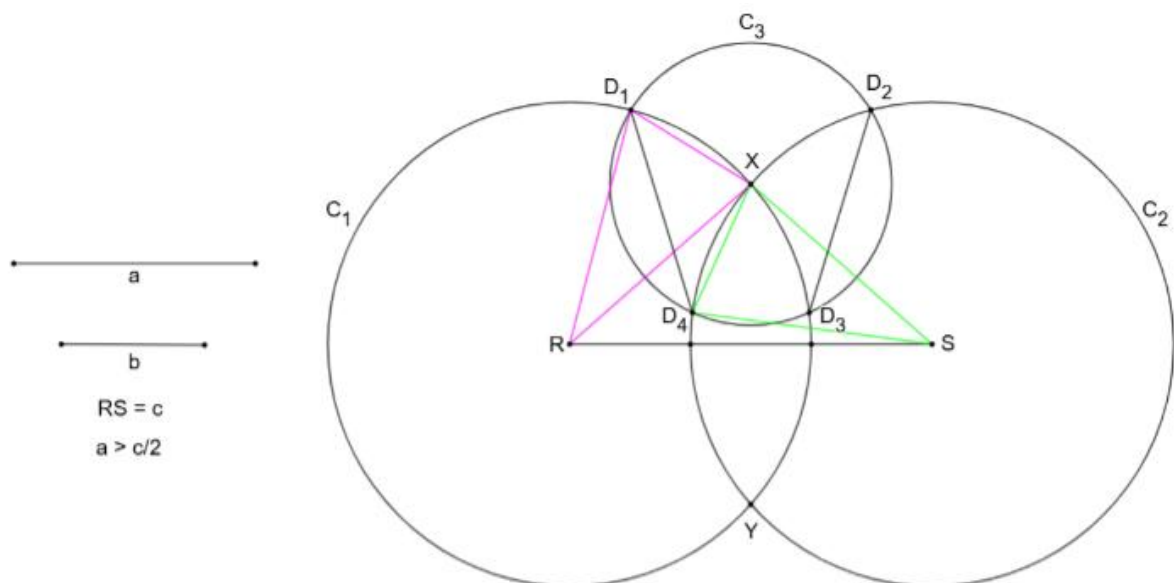


Figura 57

Justificativa:

A justificativa vem dos ΔSXD_4 e ΔRXD_1 que são congruentes pelo caso **LLL**: $SX = RX = a$, $SD_4 = RD_1 = a$ e $XD_2 = XD_1 = b$.

Então, $\widehat{RXD_1} = \widehat{SX D_4}$, logo $\widehat{RSX} = \widehat{D_1 X D_4}$. Sendo que os triângulos RXS e $D_1 X D_4$ são isósceles com os ângulos congruentes no vértice X , assim há o caso de semelhança **LAL**.

No caso,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{D_1 D_4}$$

Denotando $D_1 D_4$ de x , segue $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. Assim, podemos dizer que x é a quarta proporcional entre a , b e c .

6.8 Problema 8

Dados os pontos A , B , C e D , determinar os pontos de interseção das retas AB e CD .

Construção:

Passo 1 - Supor, sem perda de generalidade, que C e D são lados opostos;

Passo 2 – Construir os simétricos C' e D' dos pontos C e D , respectivamente, em relação à reta AB por B ;

Passo 3 - Construir a circunferência C_1 de centro D' e raio CC' ;

Passo 4 - Construir a circunferência C_2 de centro C e raio CD ;

Passo 5 – Tomar o ponto E na interseção de C_1 e C_2 , tal que $CC'D'E$ seja um quadrilátero;

Passo 6 – Construir o segmento de comprimento x tal que $\frac{DE}{DD'} = \frac{CD}{x}$ (**problema 7**).

Passo 7 – Construir a circunferência C_3 de centro D e raio x ;

Passo 8 – Construir a circunferência C_4 de centro D' e raio x ;

Passo 9 – Achar o ponto $P \in C_3 \cap C_4$ tal que P e C estão do mesmo lado de DD' .

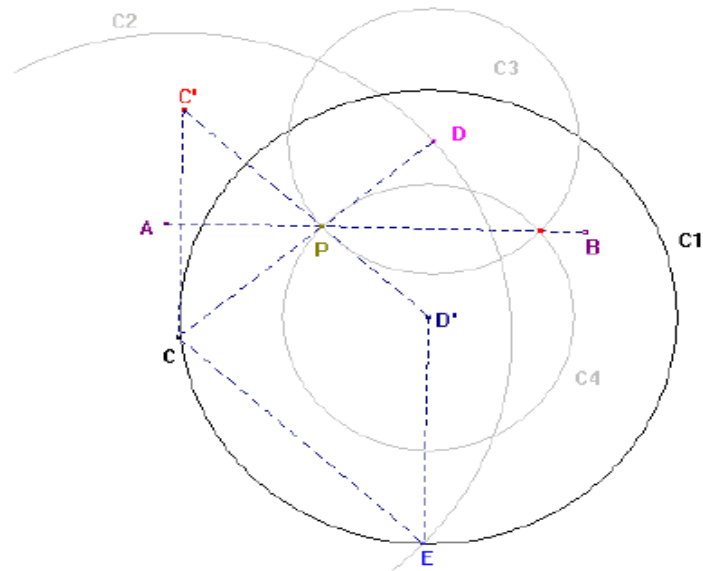


Figura 58

Preliminarmente, a justificativa vem da observância de que a interseção de AB com CD é a interseção das retas CD e $C'D'$. Devemos mostrar que P é este ponto de interseção. O quadrilátero $CC'D'E$ é um paralelogramo, já que $D'E = CC'$ e $CE = CD = C'D'$. Logo, os pontos D, D' e E fazem parte da mesma reta, uma vez que $DE \parallel CC'$ e $DD' \parallel CC'$. Dado que Y o ponto de interseção das retas CD e CD' , segue que $\frac{DE}{DD'} = \frac{DC}{DY}$ e, desse modo, $DY = x$. Assim, $Y \in C_3$ e dado que o triângulo CDE sendo isósceles, chegamos no fato em que $YD' = YD = x$, ou seja $Y \in C_4$. Assim, $Y = P$.

Assim, como mostrado no **Problema 6** e **Problema 8**, é possível encontrar os pontos de interseção de duas retas (ou de uma reta com uma circunferência), sempre que existirem, utilizando apenas o compasso. Constatando, desta feita, o Teorema de Mohr-Mascheroni.

7 EXEMPLOS DO USO DO TEOREMA DE MORH-MASCHERONI

Neste capítulo, são apresentados exemplos práticos que ilustram a aplicabilidade do Teorema de Mohr-Mascheroni em construções geométricas clássicas realizadas unicamente com o uso do compasso. Para fins da construção do presente capítulo usei como fonte o livro “Miscelânea de Geometría – Tomo III, Lugares Geométricos”, de Juan Ángel Díaz Hernando, em [6]. Os problemas selecionados demonstram, de forma clara e progressiva, como operações consideradas dependentes da régua podem ser substituídas por sequências precisas de arcos e interseções. Dentre os exemplos abordados estão a determinação do centro de uma

circunferência, a divisão de arcos em partes iguais, a obtenção de uma terceira proporcional entre segmentos, e a construção de um quadrado com lado dado. Essas construções evidenciam não apenas a validade do teorema, mas também sua utilidade didática no ensino da geometria, destacando o compasso como ferramenta suficiente e poderosa em diversas situações geométricas.

7.1 Exemplo 7.1

Determinar o centro de uma circunferência dada.

Construção:

Tomando como centro um ponto qualquer, A , dessa circunferência, e com um raio arbitrário AB , menor que o diâmetro da circunferência dada, e maior que um quarto desse diâmetro, se descreve a semicircunferência $BCDE$, fazendo $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$. Seja M o ponto em que esta corda intersecta a circunferência dada. Com centro em E e A , com raio \overline{EM} , traça-se dois arcos que se cortam em L . Com centro em L , e raio \overline{LA} , corta-se a circunferência BME em Q . Com centros em B e A e raio \overline{BQ} , se traça arcos que cortam em O , o que resultará no ponto buscado.

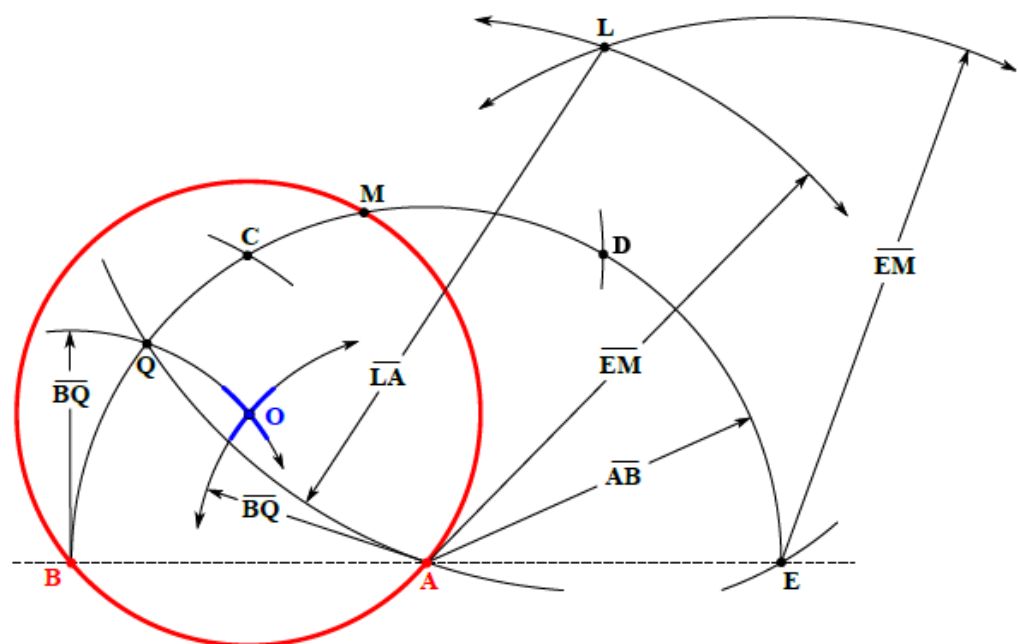


Figura 59

Justificativa:

Na construção, os arcos de centro em A e B com raio \overline{BQ} determinam o ponto O . Isso garante que $OA = OB$, de modo que O pertence à mediatriz da corda \overline{AB} .

Por outro lado, observe que o ponto Q foi obtido a partir da seguinte sequência: com centros em E e A e raio \overline{EM} , traçaram-se arcos que se cortam em L . Em seguida, com centro em L e raio \overline{LA} , marcou-se Q sobre a circunferência. Dessa forma, tem-se as igualdades

$$LE = LA = EM \text{ e } LQ = LA,$$

o que implica que Q está construído de modo simétrico em relação a A e E . Logo, o ponto O , definido a partir de Q , também pertence à mediatriz da corda \overline{EM} .

Portanto, O é simultaneamente ponto da mediatriz de \overline{AB} e da mediatriz de \overline{EM} . Como o centro da circunferência é a única interseção das mediatrizes de duas cordas não colineares, conclui-se que O é, de fato, o centro da circunferência dada.

7.2 Exemplo 7.2

Dividir a circunferência em BDD' em quatro partes iguais.

Construção:

Sobre a circunferência dada, com os raios

$$AB = BC' = BC = CD = DE = ED'$$

Temos

$$D'C' = C'B = BA$$

Com um segundo traçado (ver figura 60) determinamos A' , assim:

$$BD = BA' = EA'$$

Então, por último, com um terceiro traçado determinamos F e F' , assim $AA' = BF = BF'$. O resultado é ter dividido a circunferência em quatro partes iguais:

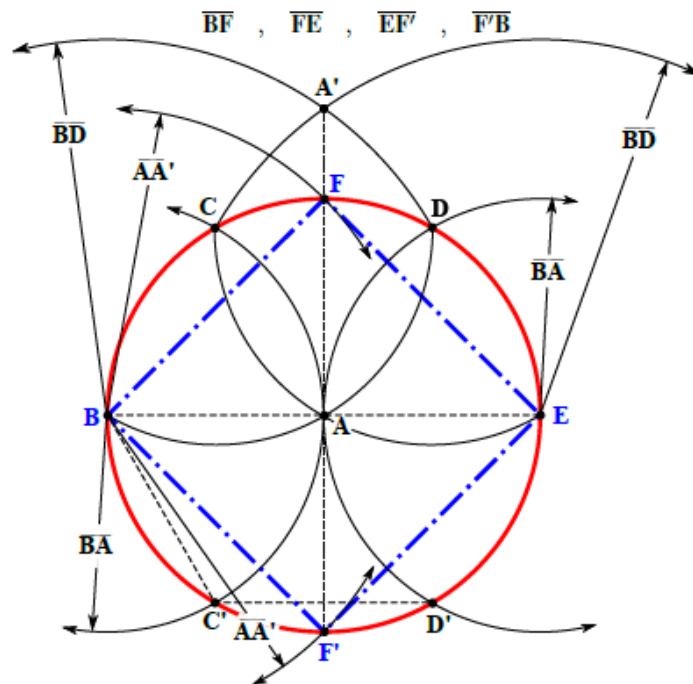


Figura 60

Justificativa:

Na construção apresentada, toma-se inicialmente o centro A da circunferência e o raio AB . Com passos consecutivos de comprimento igual ao raio, marcam-se os pontos C' , C , D , E e D' , o que equivale a inscrever um hexágono regular na circunferência. Cada corda igual ao raio subtende um arco de 60 graus, de modo que, ao passar de B até E , percorrem-se três arcos de 60 graus, totalizando 180 graus. Assim, o segmento BE é um diâmetro da circunferência, e o ponto A é o seu ponto médio. A partir dessa construção, o ponto D se encontra a dois passos de B , o que implica que o ângulo central correspondente mede 120 graus. A corda BD , portanto, possui comprimento proporcional a esse arco, o que será utilizado no próximo passo. No segundo traçado, constrói-se o ponto A' sobre a mediatriz de BE , de modo que $BA' = EA' = BD$. Essa condição assegura que o triângulo ABA' é retângulo em A , e, por consequência, obtém-se a medida de AA' , que desempenhará papel central no próximo passo. Em seguida, no terceiro traçado, localizam-se os pontos F e F' na circunferência, impondo-se que $BF = BF' = AA'$. Como F e F' pertencem à circunferência, resulta que os triângulos ABF e ABF' são retângulos em A . Isso garante que o segmento FF' é um diâmetro perpendicular a BE .

Dessa forma, os dois diâmetros BE e FF' são perpendiculares entre si, dividindo a

circunferência em quatro arcos iguais. Portanto, os pontos B , F , E e F' determinam a divisão da circunferência em quatro partes congruentes.

7.3 Exemplo 7.3

Dividir um arco qualquer em duas partes iguais.

Construção:

- Com o raio AB , com o qual o arco BC a ser dividido foi descrito e com os centros B e C (extremos dos arcos) traçamos os arcos AD e AE , sendo

$$BC = AD = AE \text{ (construção)}$$

- Logo com os centros D e E , raio $\overline{DC} = \overline{BE}$, traçam-se dois arcos que se cruzam em F .

- Por fim, com o raio AF e os centros D e E , traçam-se outros dois arcos que se cortarão em G . O ponto G determina o ponto médio do arco dado, ou seja: $BG = GC$.

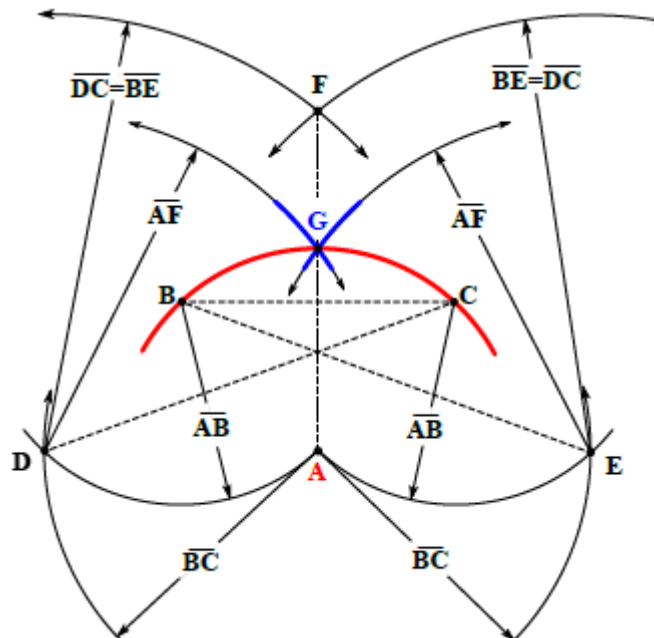


Figura 61

Justificativa:

Parte 1: (pontos D e E). Com o raio AB e centros nos extremos B e C do arco, marcam-se na circunferência os pontos D e E de modo que as cordas AD e AE tenham o mesmo comprimento da corda BC . Nessa etapa, a própria construção fornece duas igualdades úteis: $BD = AB$ e $CE = AB$; logo, $BD = CE$. Assim, os pares (B, D) e (C, E) ficam simetricamente dispostos em torno de um mesmo eixo que passa por A .

Parte 2: (ponto F). Com centros em D e E e raio $DC = BE$, traçam-se dois arcos que se cortam em F . Como $FD = FE$, o ponto F pertence à mediatriz do segmento DE . Pela disposição simétrica de D e E obtida no passo anterior, A também pertence a essa mediatriz; logo, a reta AF é a mediatriz de DE .

Parte 3: (ponto G). Com o raio AF e os centros D e E , traçam-se dois arcos que se cortam em G . Como $GD = GE$ e $FD = FE$, o ponto G também pertence à mediatriz de DE . Consequentemente, A, F e G são colineares, e a reta $AF = AG$ é o eixo de simetria que troca $D \leftrightarrow E$ (ou seja, D coincide com E) e $B \leftrightarrow C$ (ou seja, B coincide com C).

Parte 4: Consequência angular no centro. Das igualdades $AB = AC$, $AD = AE$ (Parte 1) e $BD = CE$ (Parte 3), segue a congruência dos triângulos ABD e ACE . Portanto, os ângulos centrais \widehat{BAF} e \widehat{FCA} são iguais: AF é a bissetriz do ângulo central \widehat{BAC} .

Parte 5: Conclusão sobre o arco. Em uma circunferência, a bissetriz do ângulo central \widehat{BAC} determina o ponto médio do arco BC . Como G pertence à reta AF (Partes 2 e 3) e à circunferência dada (pela construção), segue que G é o ponto médio do arco BC ; isto é, $BG = GC$.

7.4 Exemplo 7.4

A construção de um quadrado de lado l .

O faremos de duas maneiras, na primeira utilizaremos régua e compasso e na segunda apenas o compasso. Poderemos, então, verificar que mesmo em construções básicas o processo de se utilizar apenas o compasso pode ser complexo.

No primeiro momento, mostraremos o processo para construí-lo e, somente no primeiro caso, justificaremos a construção, já que o argumento é o mesmo na construção apenas com o compasso.

Dado um segmento AB de medida l . Construa um quadrado de lado l e que esteja contido no semiplano superior determinado pela reta \overleftrightarrow{AB} .

Com régua e compasso:

Construção:

Construímos primeiramente uma reta suporte e sobre esta transportamos o segmento AB . Determinamos uma reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto A .

Assim, basta que transportemos sobre ela um segmento de medida l e encontraremos o ponto X , terceiro vértice do quadrado. Para determinar o último vértice, Y do quadrado tomamos a interseção das circunferências $\mathcal{C}(X, l)$ e $\mathcal{C}(B, l)$, que se encontra no mesmo semiplano, definido por AB , de X .

O quadrado $ABYX$ é o quadrado que procuramos.

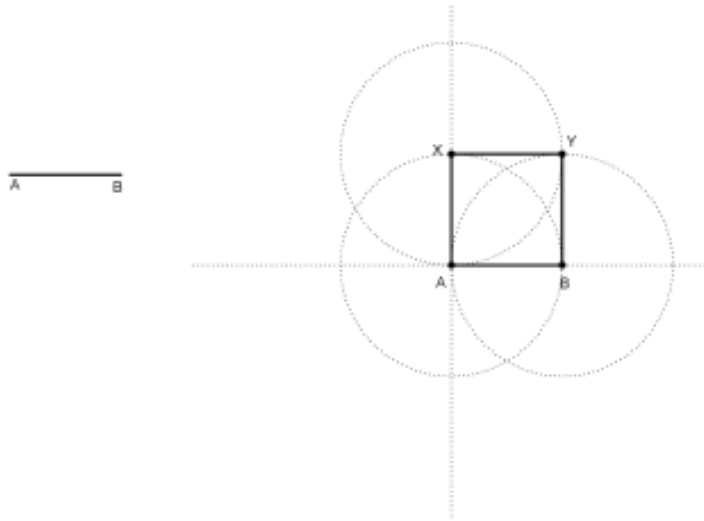


Figura 62

Justificativa. Por construção temos $AB = BY = AX = XY$, logo é suficiente que provemos que os ângulos compreendidos nesses vértices sejam retos. Isso é verdade devido X pertencer a reta perpendicular ao segmento AB , tem-se $\widehat{AXB} = \widehat{YBA} = 45^\circ$.

Pelo caso de congruência **L. L. L** os triângulos XAB e BYX são congruentes, o que conclui a prova.

Apenas com o compasso:

Para tal construção, necessitaremos antes resolver alguns problemas que se utilizam apenas do compasso. Para fim das demonstrações destacaremos alguns segmentos.

Passo 1 – Dividir um arco AB de circunferência $\mathcal{C}(O, r)$ pela metade.

Construção:

Esta etapa foi exposta no **Problema 5** da **seção 6.5**.

Passo 2 – Obter os pontos de interseção da circunferência dada $\mathcal{C}(O, r)$ com a reta dada por dois pontos A e B , no caso em que O pertence a \overline{AB} .

Construção:

Esta etapa foi exposta no **Problema 6** da **seção 6.6**.

Passo 3 – Determinar a reta perpendicular ao segmento AB no ponto A .

Construção:

Fixa-se uma abertura de tamanho arbitrário r , traça-se as circunferências $\mathcal{C}(A, r)$ e $\mathcal{C}(B, r)$ para obtermos o ponto O .

O ponto E que determina a reta perpendicular procurada é diametralmente oposto ao ponto B . Assim, tomamos a interseção C das circunferências $\mathcal{C}(O, r)$ e $\mathcal{C}(B, r)$ que está no

mesmo semiplano, determinado por \overleftrightarrow{AB} , de O . Assim, elencamos uma circunferência $\mathcal{C}(C, r)$ e obtemos o ponto D , interseção dessa circunferência com $\mathcal{C}(O, r)$. Por fim. O ponto E é obtido pela interseção de $\mathcal{C}(D, r)$ e $\mathcal{C}(O, r)$.

O caso em que $AB = r$ trará nossa solução.

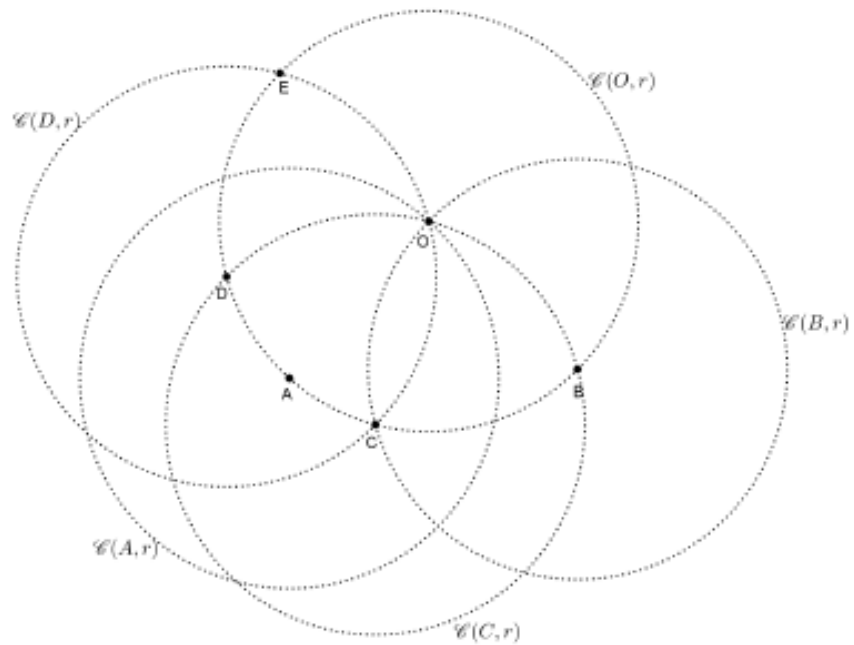


Figura 63

Justificativa. Analisemos os quadriláteros em destaque $CDEO$ e $BCDO$.

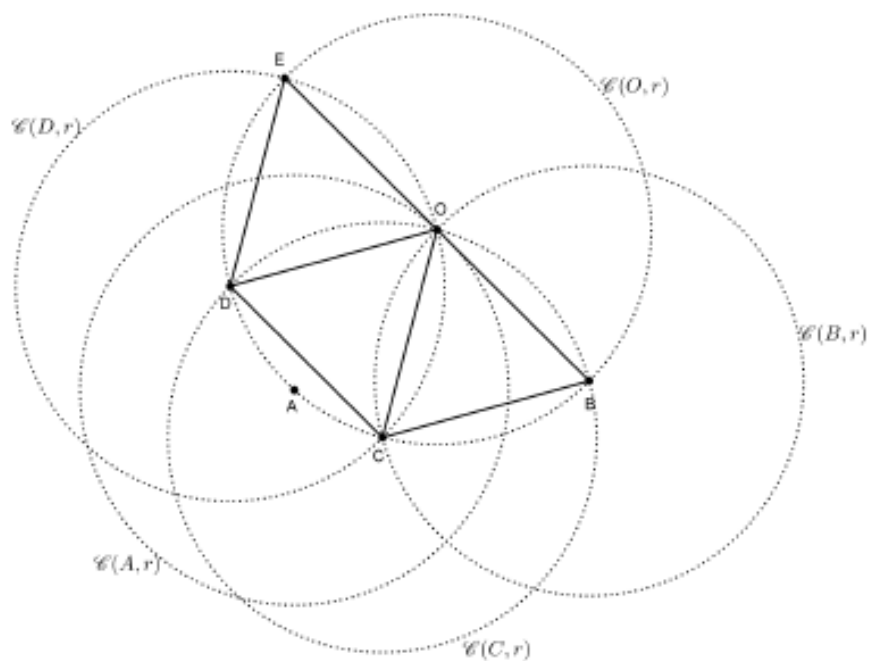


Figura 64

Por construção, há que $DE = CD = BC = OB = OE = OD$. Assim, $CDEO$ e $BCDO$ são paralelogramos e com isso ganhamos que os pontos B, E e O são colineares. Como $OE = OB$ o segmento \overline{BE} é diâmetro de $\mathcal{C}(O, r)$, ou seja, $\widehat{EAB} = 90^\circ$. Dessa forma, \overleftrightarrow{AE} é perpendicular a \overleftrightarrow{AB} .

A partir desses exemplos, e das suas soluções faremos a construção do quadrado.

Construção:

Seguiremos da mesma forma da construção com régua e compasso, no entanto isso pode ser um tanto quanto complicado quando feitos somente com o compasso. Fixaremos a abertura AB e determinamos os pontos A e B . Sobre o ponto A construímos a reta perpendicular. Repetiremos esse processo duas vezes usando o **Passo 3**, usando um raio qualquer r no primeiro caso e o raio l no segundo, obtendo assim os pontos D e C , respectivamente.

Como temos apenas o compasso para transportar o segmento de medida l para a reta perpendicular obtida, temos que obter a interseção da circunferência $\mathcal{C}(A, l)$ com a reta determinada por C e D . Observamos que o centro da circunferência pertence a reta CD . Para esta etapa faremos o mesmo processo do **Passo 2** e encontramos o ponto X .

Finalmente, determinamos o ponto Y , quarto vértice, como a interseção das circunferências $\mathcal{C}(X, l)$ e $\mathcal{C}(B, l)$ que está no mesmo semiplano, determinado pela reta que passa por A e B .

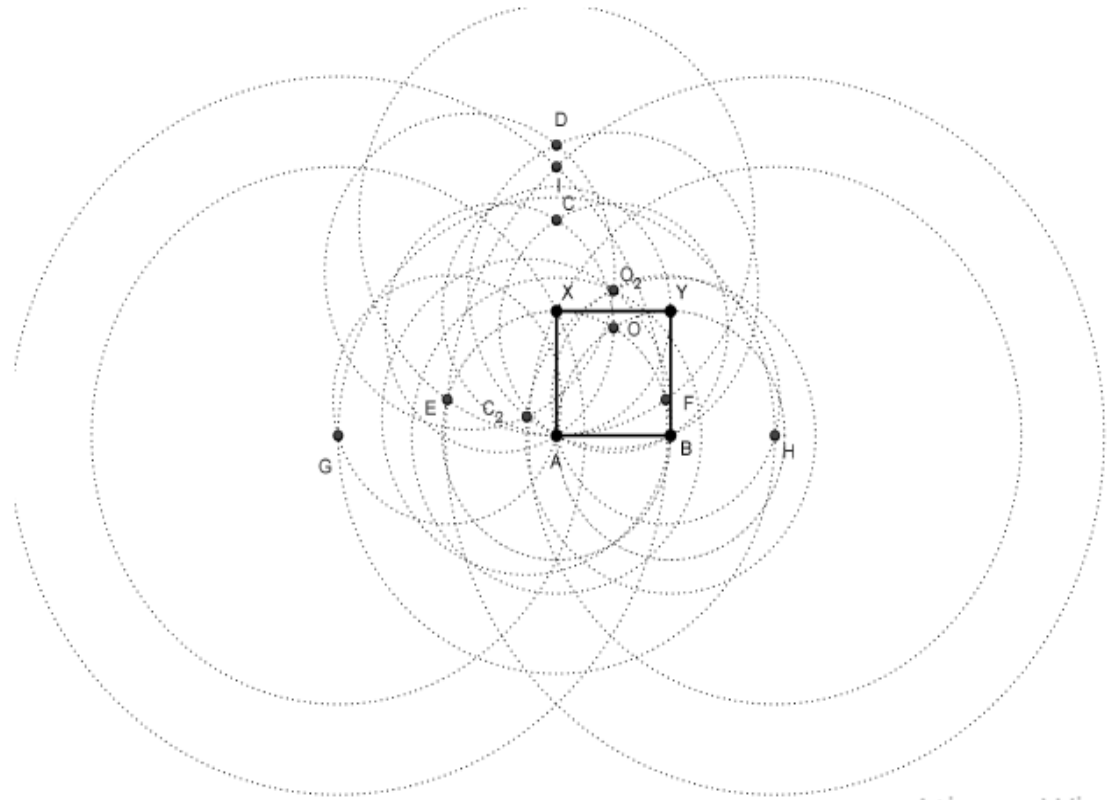


Figura 65

8 INVERSÃO E MORH-MASCHERONI

Este capítulo apresenta uma seleção de problemas resolvidos a partir da técnica da inversão no plano, associada ao uso exclusivo do compasso, conforme estabelece o Teorema de Mohr-Mascheroni. Para fins da construção do presente capítulo usei como fonte o livro “Miscelânea de Geometria – Tomo III, Lugares Geométricos”, de Juan Ángel Díaz Hernando. Os exemplos demonstram como operações geometricamente complexas, como a determinação de pontos e curvas inversas, podem ser conduzidas sem o auxílio da régua, utilizando apenas construções com arcos. São abordadas três situações: a determinação do ponto inverso de um dado ponto em relação a uma circunferência de inversão (8.1); a construção da circunferência inversa de uma reta que não passa pelo centro de inversão (8.2); e, por fim, a construção da circunferência inversa de outra circunferência que não contém o centro de inversão (8.3). Esses exemplos consolidam a interação entre a inversão geométrica e o princípio de construções puramente com compasso, ampliando a compreensão e o alcance do teorema no campo da geometria construtiva.

8.1 Exemplo 8.1

Determinar o ponto X , inverso de C , em relação a circunferência de inversão, de centro O e raio r .

Construção:

- Traça-se a circunferência de centro C e raio CO , que interceptará a circunferência de inversão nos pontos D e D' .

- Traçam-se as circunferências de centro nos pontos D e D' , de raios respectivos DO e $D'O$, cuja interseção determina o ponto X procurado.

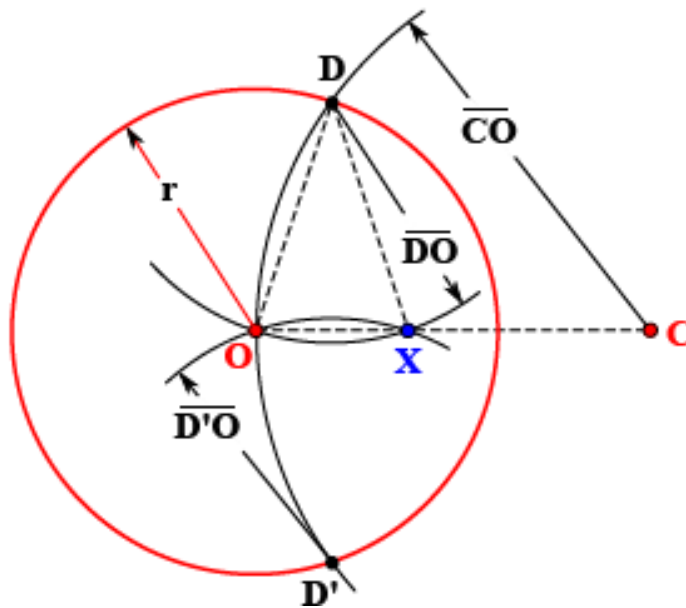


Figura 66

Justificativa:

1. Pelas interseções simétricas $OD = D'O = r$. Com centros D e D' e raios \overline{OD} e $\overline{OD'}$, as circunferências se cortam em O e em X ; logo

$$DX = D'X = OD = OD' = r.$$

2. O segmento DD' é a corda comum das duas circunferências (a de inversão, de centro O , e a de centro C e raio CO). Portanto, o eixo radical (a corda DD') é perpendicular à reta dos centros OC . Assim, a mediatriz de DD' coincide com a reta OC . Como X é equidistante de D e D' , ele pertence à mediatriz de DD' ; logo, O, C, X são colineares.

3. Considere os triângulos $\triangle COD$ e $\triangle DOX$.

- Em ΔCOD , como $CD = CO$ (pois D pertence à circunferência de centro C e raio CO), ele é isósceles com base OD .
- Em ΔDOX , como $DO = DX$, ele também é isósceles com base OX .
- Além disso, como O, C, X são colineares, temos $\widehat{COD} = \widehat{DOX}$ (mesma abertura entre OD e a reta OC).

Pela igualdade de um triângulo e pela propriedade dos isósceles (base-ângulos iguais), segue a semelhança $\Delta COD \sim \Delta DOX$ (caso AA). Daí,

$$\frac{CO}{OD} = \frac{OD}{OX} \rightarrow CO \cdot OX = OD^2 = r^2.$$

Como $CO \cdot OX = r^2$ e O, C, X são colineares, X é exatamente o inverso de C em relação à circunferência de centro O e raio r .

8.2 Exemplo 8.2

Dada uma circunferência de inversão de centro O e raio r e a reta \overleftrightarrow{AB} (dada pelos pontos A e B) que não passa pelo centro de inversão, ou seja construir a circunferência inversa da reta dada.

Construção:

1. Simétrico de O em relação à reta AB .

- Para determinar o simétrico de O , não usamos a reta AB diretamente.
- Com centro em A e raio AO , descreve-se uma circunferência.
- Com centro em B e raio BO , descreve-se outra circunferência.
- Essas duas circunferências se cortam em dois pontos: um deles em O , o outro é o ponto O_1 .
- Assim, O_1 é o simétrico de O em relação a AB , obtido apenas por interseções de circunferências.

2. Inverso de O_1 .

- Aplica-se agora a construção da inversão já conhecida: para encontrar o inverso de O_1 , constrói-se o ponto O'_1 tal que $OO_1 \cdot OO'_1 = r^2$.
- Esse ponto O'_1 pode ser obtido exclusivamente com circunferências auxiliares, como feito nas construções anteriores de inversão de pontos.

3. Circunferência inversa

- Traça-se a circunferência de centro O'_1 e raio $\overline{O'_1O}$.

- Essa circunferência é precisamente a inversa da reta \overleftrightarrow{AB} em relação à circunferência de inversão de centro O e raio r .

Observação:

A inversão de uma reta que não passa pelo centro de inversão é sempre uma circunferência que passa pelo centro da inversão. Essa construção garante isso com precisão geométrica.

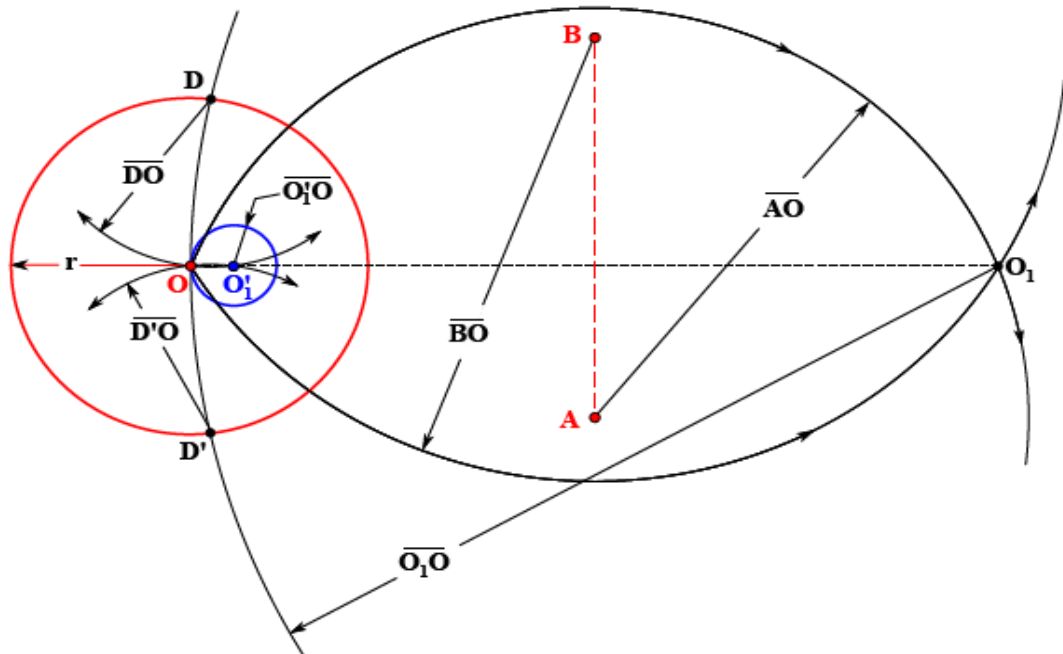


Figura 67

8.3 Exemplo 8.3

Dada a circunferência de inversão de centro O e raio r , determinar a circunferência inversa da circunferência de centro O_1 e raio R_1 , que não passa pelo centro de inversão.

Construção:

- Tomamos a circunferência dada, de centro O_1 e raio R_1 , como a de inversão e determinamos o ponto O' , inversão do ponto O .
- Assim, determinamos o ponto O_2 , inversão do ponto O' , em relação a circunferência de inversão dada, de centro O e raio r .
- O ponto O_2 é o centro da circunferência buscada.

- Na circunferência de centro O_1 , tomamos um ponto qualquer A e determinamos seu inverso A' . A circunferência de centro O_2 e raio $\overline{OA'}$ é a inversa buscada.

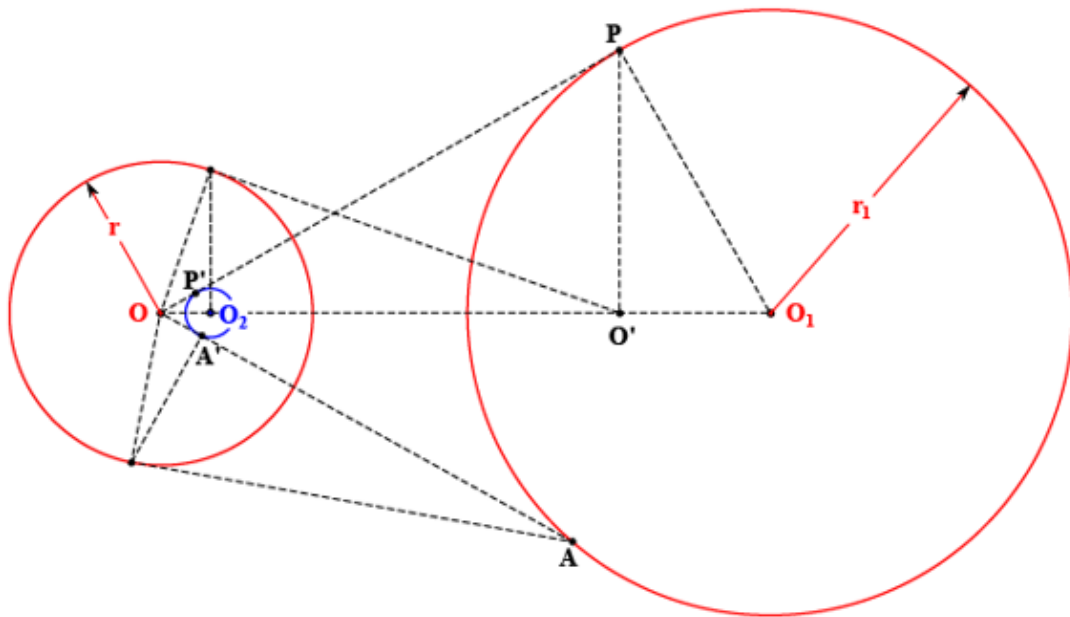


Figura 68

9 CONCLUSÕES

O estudo das transformações geométricas, especialmente da inversão no plano e do Teorema de Mohr-Mascheroni, oferece mais do que um conjunto de técnicas matemáticas elegantes: oferece uma nova forma de olhar para a geometria. A inversão, com sua capacidade de transformar figuras complexas em configurações mais simples, revela uma face menos explorada da geometria plana, capaz de surpreender até mesmo aqueles que já a ensinam há anos. Da mesma forma, o Teorema de Mohr-Mascheroni questiona certezas e desafia a intuição, mostrando que até mesmo o instrumento da régua pode ser dispensável em construções que julgávamos depender dele.

Ao longo desta dissertação, buscou-se apresentar não apenas os fundamentos teóricos dessas ideias, mas também suas aplicações práticas e seu potencial pedagógico. Por meio de exemplos, construções e problemas resolvidos exclusivamente com o compasso, foi possível mostrar que tais ferramentas não pertencem apenas ao campo da matemática pura, mas podem - e devem - ser apropriadas pelos professores como estratégias de ensino instigantes e criativas.

Num tempo em que o ensino de matemática é frequentemente pressionado por resultados imediatos e avaliações padronizadas, investir em abordagens que valorizem a construção, a investigação e o encantamento é também um gesto político e formativo. A geometria tem o poder de desenvolver no aluno um olhar atento, um pensamento lógico e uma sensibilidade estética - e cabe ao professor criar os caminhos para que isso aconteça.

Esta dissertação, portanto, é também uma defesa da beleza e da profundidade da geometria, e uma homenagem à sala de aula como espaço de descoberta. Que o compasso - símbolo de precisão, mas também de liberdade - continue a desenhar não apenas figuras, mas caminhos de aprendizagem mais significativos, criativos e humanos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DULCE, O. POMPEU, J. N. **Fundamentos da matemática elementar 9: Geometria plana.** Ed. Atual, 7. Ed. São Paulo, SP, 1993.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- TOLEDO, Bárbara C.; SANTOS, Thiago Fontes. **Sobre a reta de Euler.** Revista de Matemática de Ouro Preto, Ouro Preto, v. 1, p. 51-59, 2017. DOI: 2237-8103.
- LÓPEZ LINARES, Juan. **Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações.** Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2022. 105 p. ISBN 978-65-87023-25-0 (e-book).
- ARAUJO, Ivanildo Basílio de. **Uma abordagem para a prova com construções geométricas e Cabri-Géomètre.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- DÍAZ HERNANDO, Juan Ángel. **Miscelánea de Geometría. Tomo III: Lugares geométricos.** Madrid: [s.n.], 2017.
- LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-círculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto.** v.2, pp: 117,139, nov. 2021. ISSN: 2237-8103.



Governo do Estado do Ceará
Secretaria da Ciência Tecnologia e Educação Superior
Universidade Estadual do Ceará – UECE
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA REDE NACIONAL -
PROFMAT



ATA DE DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos nove dias de setembro de dois mil e vinte e cinco, no(a) Sala de conferências PROFMAT, realizou-se a sessão pública de defesa da dissertação de HYDERLAND DE OLIVEIRA MENDES, aluno(a) regularmente matriculado(a) no MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA REDE NACIONAL - PROFMAT, intitulada: **O TEOREMA DE MORH-MASCHERONI E SUA APLICAÇÃO NA INVERSÃO GEOMÉTRICA**. O(A) mestrando(a) reuniu-se com a Banca Examinadora composta por Prof. Dr. CLAUDEMIR SILVINO LEANDRO (Orientador e Presidente da Banca/UECE), Prof. Dr. TIAGO CAULA RIBEIRO (UECE) e Prof. Dr. NICOLAS ALCANTARA DE ANDRADE (IFCE) de 09:40h às 10:35h horas. Inicialmente o(a) mestrando(a) expôs seu trabalho e em seguida procedeu-se à arguição pelos membros da Banca, dispondo cada membro de tempo para tal. Finalmente a Banca reuniu-se em separado e concluiu por considerar o(a) mestrando(a) APROVADO, por sua dissertação e sua defesa pública. Eu, CLAUDEMIR SILVINO LEANDRO, presidente da banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim e os demais membros. Fortaleza, 09 de Setembro de 2025.

Documento assinado digitalmente



CLAUDEMIR SILVINO LEANDRO
 Data: 10/09/2025 14:05:40-0300
 Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. CLAUDEMIR SILVINO LEANDRO
 (Orientador e Presidente da Banca/UECE)

Documento assinado digitalmente



TIAGO CAULA RIBEIRO
 Data: 10/09/2025 14:20:57-0300
 Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. TIAGO CAULA RIBEIRO
 (UECE)

Documento assinado digitalmente



NICOLAS ALCANTARA DE ANDRADE
 Data: 17/09/2025 12:50:25-0300
 Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. NICOLAS ALCANTARA DE ANDRADE
 (IFCE)