



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

LEANDRO ALMEIDA COSTA

**O USO DAS DOBRADURAS COMO FERRAMENTA NO ENSINO DA
MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**FORTALEZA – CEARÁ
2025**

LEANDRO ALMEIDA COSTA

O USO DAS DOBRADURAS COMO FERRAMENTA NO ENSINO DA
MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Doutor Claudemir Silvino Leandro.

FORTALEZA – CEARÁ

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Costa, Leandro Almeida

O uso das dobraduras como ferramenta no ensino da matemática na educação básica [recurso eletrônico] / Leandro Almeida Costa. – 2025.

118 f.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Pós-Dr. Claudemir Silvino Leandro.

1. Dobraduras de papel. 2. ensino de matemática. 3. geometria. 4. construções geométricas. 5. didática matemática.. I. Título.

LEANDRO ALMEIDA COSTA

O USO DAS DOBRADURAS COMO FERRAMENTA NO ENSINO DA
MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 28 de JULHO de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Doutor Claudemir Silvino Leandro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Doutor Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Doutor Nicolas Alcântara de Andrade
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

À minha família, pelo amor incondicional,
apoio constante e por todo o investimento
dedicado à minha vida. Sem vocês, este
caminho seria impossível de trilhar.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus. Reconheço que tudo o que sou e conquistei até aqui vem das Suas mãos.

Aos meus familiares, minha base e maior bênção nesta vida. Em especial, agradeço à minha esposa, Raianna, pelo amor, paciência e companheirismo incondicionais; à minha mãe, Ana Maria, pela dedicação e orações que sempre me sustentaram; e às minhas filhas, Laura e Luiza, que são fonte constante de alegria e motivação. Amo muito vocês.

Aos professores Dr. Claudemir Silvino Leandro, pela orientação cuidadosa e competente, e ao Dr. Tiago Caúla Ribeiro, pelos ensinamentos durante o curso.

Aos colegas da turma de mestrado, pela convivência enriquecedora ao longo destes anos, pelas trocas de experiências e pelos momentos de estudo e aprendizado coletivo, que tornaram esta jornada mais leve e significativa.

A todos, minha sincera gratidão.

"A beleza da Matemática se revela quando deixamos que ela seja sentida pelas mãos e vista pelos olhos."

(Marcus du Sautoy)

RESUMO

Este trabalho propõe a utilização de dobraduras de papel como recurso didático no ensino da Matemática, destacando sua aplicação na compreensão de conceitos geométricos e algébricos. A pesquisa parte da constatação de que o ensino tradicional muitas vezes apresenta a Matemática de forma descontextualizada, o que dificulta o interesse e a participação dos alunos. Assim, busca-se apresentar a dobradura no papel não apenas como atividade lúdica, mas como ferramenta capaz de desenvolver habilidades cognitivas, favorecer a visualização de conceitos e estimular o raciocínio lógico.

Para isso, são abordados fundamentos essenciais, como os Axiomas de Huzita-Hatori, que formalizam construções geométricas por meio de dobraduras e possibilitam resolver problemas que ultrapassam os limites da régua e compasso. Além disso, são retomados conceitos de congruência e semelhança de triângulos, isometrias no plano, trigonometria e a resolução de equações quadráticas e cúbicas, destacando a viabilidade de tais operações via dobradura.

O estudo também resgata os problemas clássicos da Matemática grega e demonstra como as dobraduras podem contribuir para a compreensão desses desafios históricos. Por fim, são propostas atividades práticas, que articulam a teoria matemática ao fazer manual, promovendo um aprendizado dinâmico e significativo. A dissertação evidencia, assim, a importância de ampliar as metodologias de ensino, incorporando recursos que integrem criatividade, precisão matemática e acessibilidade pedagógica.

Palavras-chave: dobraduras de papel; ensino de matemática; geometria; construções geométricas; didática matemática.

ABSTRACT

This study proposes the use of paper folding as a didactic resource in Mathematics teaching, highlighting its application in the understanding of geometric and algebraic concepts. The research is based on the observation that traditional teaching often presents Mathematics in a decontextualized manner, which makes it difficult to capture students' interest and engagement. Thus, this work seeks to present paper folding not merely as a recreational activity, but as a tool capable of developing cognitive skills, enhancing the visualization of concepts, and stimulating logical reasoning.

To this end, essential foundations are addressed, such as the Huzita-Hatori Axioms, which formalize geometric constructions through folds and make it possible to solve problems beyond the limitations of ruler and compass. Additionally, the study revisits concepts of triangle congruence and similarity, isometries in the plane, trigonometry, and the resolution of quadratic and cubic equations, emphasizing the feasibility of such operations through paper folding.

The research also recovers the classical problems of Greek Mathematics and demonstrates how folding techniques can contribute to the understanding of these historical challenges. Finally, practical activities are proposed, articulating mathematical theory with manual creation, promoting dynamic and meaningful learning. This dissertation thus highlights the importance of broadening teaching methodologies by incorporating resources that combine creativity, mathematical rigor, and pedagogical accessibility.

Keywords: paper folding; mathematics teaching; geometry; geometric constructions; mathematics didactics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Axioma 1 de Huzita-Hatori.....	18
Figura 2 – Axioma 2 de Huzita-Hatori.....	19
Figura 3 – Axioma 3 de Huzita-Hatori.....	19
Figura 4 – Axioma 4 de Huzita-Hatori.....	20
Figura 5 – Axioma 5 de Huzita-Hatori.....	20
Figura 6 – Axioma 6 de Huzita-Hatori.....	21
Figura 7 – Axioma 7 de Huzita-Hatori.....	21
Figura 8 – Caso de congruência LLL.....	22
Figura 9 – Caso de congruência LAL.....	23
Figura 10 – Caso de congruência ALA.....	23
Figura 11 – Caso de congruência LAA ₀	23
Figura 12 – Caso de congruência HC.....	24
Figura 13 – Caso de semelhança AA.....	25
Figura 14 – Caso de semelhança LLL.....	25
Figura 15 – Caso de semelhança LAL.....	26
Figura 16 – Isometria de Translação.....	27
Figura 17 – Isometria de Rotação.....	28
Figura 18 – Isometria de Reflexão.....	28
Figura 19 – Isometria de Simetria de deslizamento.....	29
Figura 20 – Círculo dividido em três partes.....	30
Figura 21 – Duplicação do cubo.....	31
Figura 22 – Quadratura do círculo.....	32
Figura 23 – Intersecção de um plano e um cone circular duplo.....	33
Figura 24 – Pontos notáveis da parábola.....	34
Figura 25 – Parábola $y^2 = 4xp$	35
Figura 26 – Pontos notáveis da elipse.....	35
Figura 27 – Pontos notáveis da hipérbole.....	37
Figura 28 – Gráfico de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	39
Figura 29 – Reflexão de um ponto P por uma reta l.....	41
Figura 30 – Eixos do Plano Complexo.....	42
Figura 31 – Soma de dois números construtíveis via origami - Caso 1.....	43

Figura 32 – Soma de dois números construtíveis via origami - Caso 2.....	44
Figura 33 – Multiplicação de dois números construtíveis via origami - Caso 1.....	45
Figura 34 – Multiplicação de dois números construtíveis via origami - Caso 2.....	46
Figura 35 – Inversão de números construtíveis via origami - Caso 1.....	47
Figura 36 – Inversão de números construtíveis via origami - Caso 2.....	48
Figura 37 – Construindo um triângulo equilátero dentro de um quadrado.....	52
Figura 38 – Construindo o maior triângulo equilátero dentro de um quadrado.....	52
Figura 39 – Representando os lados e os ângulos do triângulo equilátero dentro de um quadrado.....	53
Figura 40 – Gráfico da função $\sec^2 \theta$ no primeiro quadrante.....	54
Figura 41 – Dobrando o maior triângulo equilátero dentro de um quadrado.....	54
Figura 42 – Dobrando um hexágono regular dentro de um quadrado.....	55
Figura 43 – Dobrando um hexágono regular dentro de um quadrado (continuação).....	55
Figura 44 – Dobrando o maior hexágono regular dentro de um quadrado.....	56
Figura 45 – Dobrando um hexágono regular dentro de um quadrado (continuação).....	56
Figura 46 – Prova do maior hexágono regular dentro de um quadrado.....	57
Figura 47 – Dobras no triângulo retângulo.....	59
Figura 48 – Dobras no triângulo retângulo e classificação dos lados.....	59
Figura 49 – Dobras no triângulo retângulo para obter o ângulo de 15°	61
Figura 50 – Triângulo retângulo de ângulo 15°	63
Figura 51 – Dobras no triângulo retângulo para obter o ângulo de $22,5^\circ$	63
Figura 52 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 1.....	65
Figura 53 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 2.....	65
Figura 54 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 3.....	65
Figura 55 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 4.....	66
Figura 56 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 5.....	66
Figura 57 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 6.....	66
Figura 58 – Demonstração da trissecção de um ângulo agudo - Parte 1.....	67
Figura 59 – Demonstração da trissecção de um ângulo agudo - Parte 2.....	67
Figura 60 – Demonstração alternativa da trissecção do ângulo.....	68
Figura 61 – Duplicação do cubo - Parte 1.....	69

Figura 62 – Duplicação do cubo - Parte 2.....	70
Figura 63 – Triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ semelhantes.....	70
Figura 64 – Divisão do quadrado em três partes iguais.....	71
Figura 65 – Dividindo o quadrado em três partes iguais - Parte 1.....	72
Figura 66 – Dividindo o quadrado em três partes iguais - Parte 2.....	72
Figura 67 – Dividindo o quadrado em n partes iguais, onde n é ímpar.....	73
Figura 68 – Dobra de um ponto até uma linha repetidamente.....	75
Figura 69 – Dobrando P sobre P'	76
Figura 70 – Ponto P e P' no Plano Cartesiano.....	76
Figura 71 – Ponto equidistante de P e P'	78
Figura 72 – Construindo a diretriz.....	79
Figura 73 – Construindo o foco da parábola e um ponto qualquer na diretriz.....	79
Figura 74 – Construindo o ponto médio de PP'	80
Figura 75 – Construindo a mediatriz de PP'.....	80
Figura 76 – Rastros da linha de dobra - Parte 1.....	81
Figura 77 – Rastros da linha de dobra - Parte 2.....	81
Figura 78 – Rastros da linha de dobra - Parte 3.....	82
Figura 79 – Rastros do Ponto Q - Foco 1.....	83
Figura 80 – Rastros do Ponto Q - Foco 2.....	83
Figura 81 – Rastros do Ponto Q - Foco 3.....	84
Figura 82 – Construindo a elipse - Parte 1.....	85
Figura 83 – Construindo a elipse - Parte 2.....	85
Figura 84 – Construindo a elipse - Parte 3.....	86
Figura 85 – Construindo a hipérbole.....	86
Figura 86 – O ponto X de tangência a elipse.....	87
Figura 87 – O ponto U de tangência a elipse.....	88
Figura 88 – Dobra que posiciona simultaneamente P_1 sobre L_1 e P_2 sobre L_2.....	90
Figura 89 – A única dobra que é tangente as duas parábolas.....	91
Figura 90 – Pontos simétricos em relação a dobra - Parte 1.....	91
Figura 91 – Pontos simétricos em relação a dobra - Parte 2.....	92
Figura 92 – Pontos simétricos em relação a dobra - Parte 3.....	92
Figura 93 – Curva gerada pela ligação dos P_2'.....	93
Figura 94 – Nomeando os pontos simétricos a dobradura.....	93

Figura 95 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Parte 1.....	96
Figura 96 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Parte 2.....	96
Figura 97 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Parte 3.....	97
Figura 98 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Parte 4.....	97
Figura 99 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Parte 5.....	98
Figura 100 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Mudando o ponto P_2 - Parte 1.....	98
Figura 101 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Mudando o ponto P_2 - Parte 2.....	99
Figura 102 – Método de Lill - Exemplo 1.....	103
Figura 103 – Método de Lill - Exemplo 2.....	104
Figura 104 – Método de Lill via Origami.....	106
Figura 105 – Estratégia de Beloch para $x^3 - 7x - 6$.....	107
Figura 106 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 1.....	108
Figura 107 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 2.....	108
Figura 108 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 3.....	108
Figura 109 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 4.....	109
Figura 110 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 5.....	109
Figura 111 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 6.....	109
Figura 112 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 7.....	110
Figura 113 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 8.....	110
Figura 114 – Encontrando as raízes de $x^3 - 7x - 6$ - Parte 1.....	111
Figura 115 – Encontrando as raízes de $x^3 - 7x - 6$ - Parte 2.....	111
Figura 116 – Solução de $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$ - Parte 1.....	112
Figura 117 – Solução de $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$ - Parte 2.....	113
Figura 118 – Solução de $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$ - Parte 3.....	113

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	15
2	CONCEITOS NECESSÁRIOS PARA O DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES.....	17
2.1	Os Axiomas de Huzita-Hatori.....	18
2.1.1	Axioma 1: Dobragem única por dois pontos.....	18
2.1.2	Axioma 2: Dobragem única que torna dois pontos coincidentes.....	19
2.1.3	Axioma 3: Dobragem única que torna duas retas coincidentes.....	19
2.1.4	Axioma 4: Dobragem única, perpendicular a uma reta, que passa por um ponto.....	20
2.1.5	Axioma 5: Dobragem única que faz um ponto incidir em uma reta, passando por outro ponto.....	20
2.1.6	Axioma 6: Dobragem única que faz dois pontos incidirem em duas retas distintas.....	21
2.1.7	Axioma 7: Dobragem única que faz um ponto incidir em uma reta, através de uma dobragem perpendicular a outra reta.....	21
2.2	Casos de Congruência de Triângulos.....	22
2.2.1	Caso Lado-Lado-Lado (LLL).....	22
2.2.2	Caso Lado-Ângulo-Lado (LAL).....	22
2.2.3	Caso Ângulo-Lado-Ângulo (ALA).....	23
2.2.4	Caso Lado-Ângulo-Ângulo oposto (LAA_0).....	23
2.2.5	Caso Hipotenusa-Cateto (HC).....	24
2.3	Casos de Semelhança de Triângulos.....	24
2.3.1	Caso Ângulo-Ângulo (AA).....	24
2.3.2	Caso Lado-Lado-Lado (LLL).....	25
2.3.3	Caso Lado-Ângulo-Lado (LAL).....	25
2.4	As Isomerias no Plano.....	26
2.4.1	Translação.....	27
2.4.2	Rotação.....	27
2.4.3	Reflexão.....	28
2.4.4	Simetria de deslizamento.....	29
2.5	Os Problemas Clássicos da Matemática na Grécia Antiga.....	29

2.5.1	A Trissecção do Ângulo.....	30
2.5.2	A Duplicação do Cubo.....	31
2.5.3	A Quadratura do Círculo.....	31
2.6	As Cônicas: Parábola, Elipse e Hipérbole.....	33
2.6.1	Parábola.....	33
2.6.2	Elipse.....	35
2.6.3	Hipérbole.....	36
2.7	A Função Cúbica.....	38
2.8	Os Números construtíveis com Origami.....	40
2.8.1	Operações de Corpo.....	42
2.8.2	Lema.....	49
3	ENSINANDO TRIGONOMETRIA VIA DOBRADURA.....	50
3.1	Dobrando triângulos equiláteros em um quadrado.....	51
3.2	Trigonometria com Origami.....	58
3.3	O Origami pode trissectar um ângulo?.....	64
4	ENSINANDO AS CÔNICAS VIA DOBRADURA.....	74
4.1	Dobrando uma parábola.....	74
4.2	GeoGebra na construção da parábola.....	78
4.3	GeoGebra na construção da elipse e hipérbole.....	84
5	ENSINANDO A RESOLVER EQUAÇÕES CÚBICAS VIA DOBRADURAS.....	89
5.1	Resolução de equações cúbicas.....	89
5.2	Método de Lill para solucionar equações cúbicas.....	102
6	CONCLUSÃO.....	114
	REFERÊNCIAS.....	115
	ANEXO A – ATA DE DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO.....	118

1. INTRODUÇÃO

A Matemática é uma disciplina de grande importância, mas que pode causar grandes preocupações, pois percebe-se que alguns professores têm dificuldades em ensiná-la de forma mais interessante e significativa. O ensino da Matemática frequentemente mantém características tradicionais, nas quais o conhecimento é apresentado de forma que pode parecer desconectado da experiência humana envolvida em sua construção. Muitas vezes o conhecimento científico é abordado apenas como um conteúdo a ser assimilado, sem explorar o processo de busca, motivação e emoção que o acompanha (Ferreira; Justi, 2008). Esse modelo tradicional pode limitar a forma como os alunos se engajam com a matéria, destacando a necessidade de abordagens pedagógicas que promovam uma conexão mais profunda com o aprendizado matemático.

O Origami é a arte de dobrar folhas de papel, sem cortes, para transformá-las em objetos decorativos, como pássaros e animais, e seu nome vem da combinação dos termos japoneses "ori", que significa dobrar, e "kami", que significa papel (Lang, 1990, p. 1). Segundo Silva (2009), quando pensamos em Origami, a maioria das pessoas tende a associá-lo à criação de formas de animais através de dobraduras, percebendo-o principalmente como um exercício manual. No entanto, a prática do Origami vai além dessa visão simplista. A construção das figuras envolve uma série de dobraduras cuidadosamente sequenciadas, onde cada etapa desempenha um papel crucial no resultado.

Uma das possíveis razões para o uso restrito de dobraduras no ensino pode ser a falta de familiaridade com sua aplicação. No entanto, o fato de essa atividade atrair a atenção dos alunos indica que o método pode ser uma alternativa valiosa no contexto educacional. Segundo Cavacami e Furuya (2010), a utilização de dobraduras no ensino de Geometria, por exemplo, pode ajudar a aprimorar as capacidades cognitivas dos alunos, promovendo um aprendizado mais eficaz e uma melhor assimilação dos conceitos matemáticos através da interação com um simples pedaço de papel.

Vamos definir dobra como uma transformação geométrica realizada em uma folha de papel plana, geralmente considerada como uma superfície euclidiana,

que consiste em criar um vinco, ou linha de dobra, ao sobrepor uma parte do papel sobre outra. Do ponto de vista matemático, essa operação pode ser interpretada como uma isometria do plano, mais especificamente uma reflexão em relação à linha de dobra, que mantém as distâncias e ângulos, não causando deformação na superfície do papel. Cada dobra corresponde, portanto, a uma construção geométrica precisa, que pode ser descrita formalmente por meio dos axiomas do origami.

Nesse contexto, a dobradura se destaca como uma ferramenta poderosa no ensino e aprendizagem da Matemática, proporcionando uma contribuição significativa para a compreensão de conceitos complexos. Além de integrar diferentes áreas do conhecimento e aumentar o interesse dos alunos, o Origami oferece uma abordagem lúdica e eficaz para explorar esses conceitos. Diante disso, o presente trabalho propõe o uso de dobraduras como recurso didático no ensino da Matemática, visando apoiar professores do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Em sala de aula, essa ferramenta pode ser utilizada de forma criativa para construir ou revisar conceitos matemáticos, ao mesmo tempo em que promove o desenvolvimento de habilidades essenciais, como atenção, concentração, observação e criatividade. Embora o estudo abranja apenas uma pequena parte de um vasto campo a ser explorado, seu objetivo é evidenciar a Matemática presente em uma simples dobra de papel, ampliando os recursos pedagógicos disponíveis voltados para o ensino da Matemática.

2. CONCEITOS NECESSÁRIOS PARA O DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Neste capítulo, serão apresentados conceitos e resultados que servirão de base para o desenvolvimento dos problemas e discussões abordados nos capítulos subsequentes desta dissertação. A seleção dos temas foi orientada pela necessidade de estabelecer um conjunto de ferramentas teóricas que permitam não apenas a compreensão dos métodos empregados, mas também a análise das soluções propostas para problemas clássicos e contemporâneos da matemática.

O capítulo se inicia com a exposição dos axiomas de Huzita-Hatori, que constituem a base para construções geométricas por meio de dobraduras, e que serão fundamentais na abordagem dos problemas. Em seguida, serão revisitadas as noções de congruência e semelhança de triângulos, essenciais para a compreensão das propriedades geométricas envolvidas nas construções analisadas.

Na sequência, serão discutidas as isometrias no plano, transformações geométricas que preservam distâncias e ângulos, e que desempenham papel importante na análise das construções e simetrias envolvidas. Também será retomado o estudo da trigonometria, cuja aplicação em contextos geométricos será recorrente ao longo do trabalho.

Prosseguindo, será apresentado um panorama histórico e matemático sobre os três problemas clássicos da matemática grega, que motivaram o desenvolvimento de importantes técnicas geométricas. Em continuidade, serão abordados os pontos notáveis das cônicas, elementos centrais na geometria clássica, que também aparecem em contextos de dobraduras e construções com régua e compasso.

Por fim, será retomado o estudo das equações cúbicas, com ênfase em abordagens algébricas e geométricas que possibilitam sua resolução, incluindo aquelas fundamentadas em técnicas de dobraduras. Ao reunir esses tópicos em um único capítulo introdutório, pretende-se oferecer ao leitor um referencial sólido para o entendimento dos procedimentos e resultados apresentados ao longo desta dissertação.

2.1 Os Axiomas de Huzita-Hatori

A arte do origami, tradicionalmente associada à criação de figuras por meio de dobras em papel, também possui aplicações matemáticas surpreendentes. No campo da geometria, os Axiomas de Huzita-Hatori estabelecem um conjunto de regras que definem operações geométricas possíveis apenas com o uso de dobras. Esses axiomas foram inicialmente propostos por Humiaki Huzita e posteriormente complementados por Koshiro Hatori, formalizando sete operações fundamentais que permitem resolver construções equivalentes às obtidas com régua e compasso.

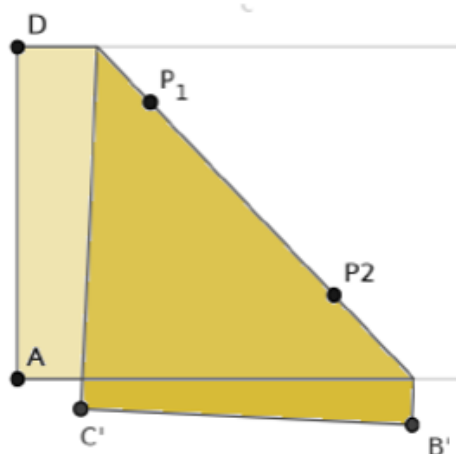
Cada axioma descreve uma situação geométrica específica em que se pode realizar uma dobra de papel para alinhar pontos ou linhas, traçar bissetrizes ou encontrar pontos de interseção. Esse conjunto de princípios tornou-se essencial na área conhecida como origami geométrico, possibilitando, por exemplo, a solução de equações cúbicas, algo impossível utilizando apenas régua e compasso.

Os axiomas de Huzita-Hatori não apenas evidenciam a profundidade matemática do origami, como também oferecem um recurso didático valioso para a compreensão de conceitos geométricos de forma concreta e visual.

2.1.1 Axioma 1: Dobragem única por dois pontos

Dados dois pontos, P_1 e P_2 , há uma dobragem única que passa pelos dois pontos.

Figura 1 – Axioma 1 de Huzita-Hatori

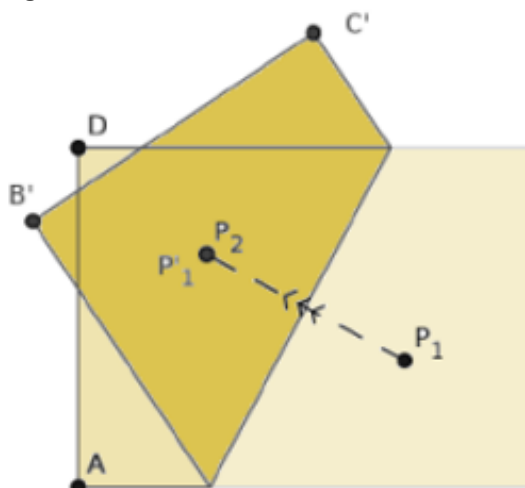


Fonte: Cavacami e Furuya, 2010.

2.1.2 Axioma 2: Dobragem única que torna dois pontos coincidentes

Dados dois pontos, P_1 e P_2 , há uma dobragem única que os torna coincidentes.

Figura 2 – Axioma 2 de Huzita-Hatori

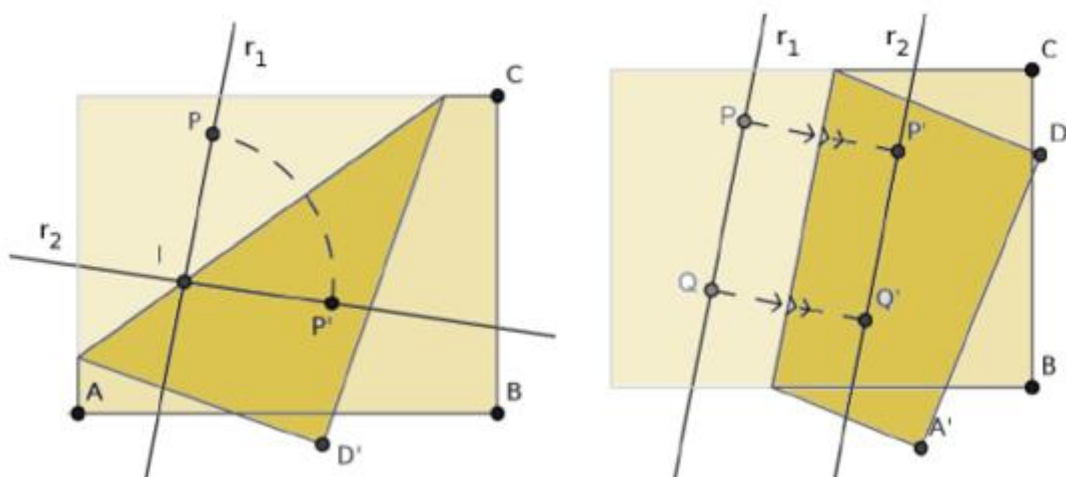


Fonte: Cavacami e Furuya, 2010.

2.1.3 Axioma 3: Dobragem única que torna duas retas coincidentes

Dadas duas retas, r_1 e r_2 , há uma única dobra que as torna coincidentes.

Figura 3 – Axioma 3 de Huzita-Hatori

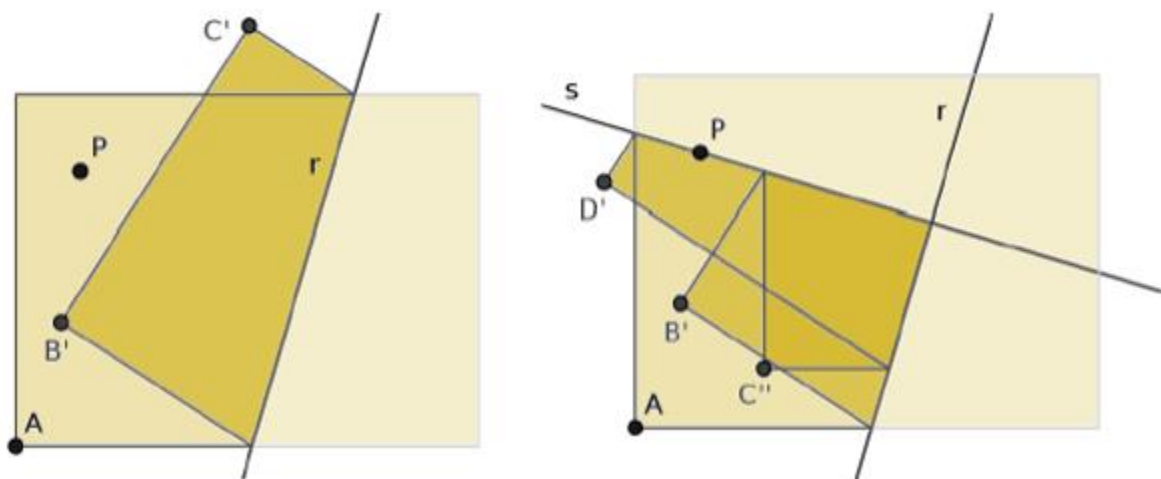


Fonte: Cavacami e Furuya, 2010.

2.1.4 Axioma 4: Dobragem única, perpendicular a uma reta, que passa por um ponto

Dados um ponto P e uma reta r , há uma única dobragem perpendicular a r que passa por P .

Figura 4 – Axioma 4 de Huzita-Hatori

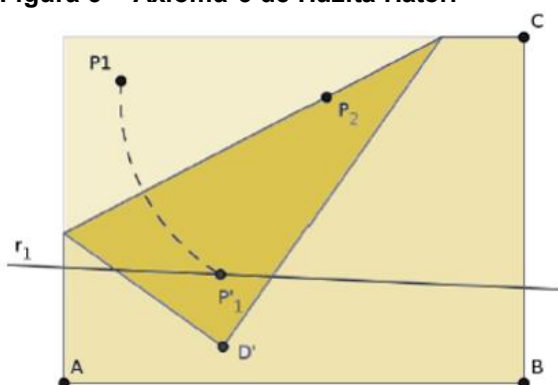


Fonte: Cavacami e Furuya, 2010.

2.1.5 Axioma 5: Dobragem única que faz um ponto incidir em uma reta, passando por outro ponto

Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta r , se a distância entre P_1 e P_2 for igual ou superior à distância de P_2 a r , há uma dobragem única que faz incidir P_1 em r e que passa por P_2 .

Figura 5 – Axioma 5 de Huzita-Hatori

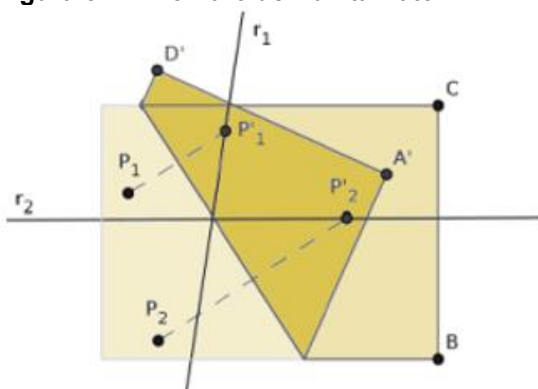


Fonte: Cavacami e Furuya, 2010.

2.1.6 Axioma 6: Dobragem única que faz dois pontos incidirem em duas retas distintas

Dados dois pontos P_1 e P_2 , e duas retas r_1 e r_2 , se as retas não forem paralelas, há uma única dobragem que faz incidir P_1 em r_1 e P_2 em r_2 .

Figura 6 – Axioma 6 de Huzita-Hatori

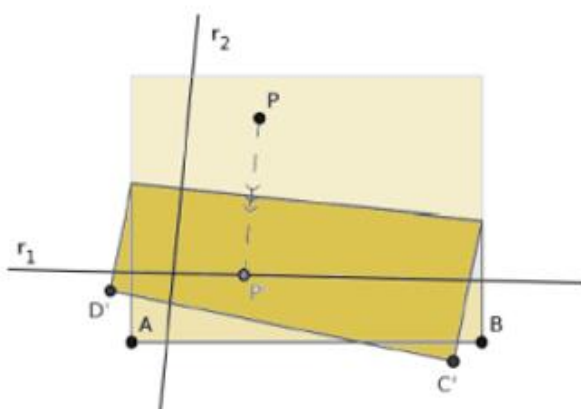


Fonte: Cavacami e Furuya, 2010.

2.1.7 Axioma 7: Dobragem única que faz um ponto incidir em uma reta, através de uma dobragem perpendicular a outra reta

Dado um ponto P e duas retas r_1 e r_2 , se as retas não forem paralelas, há uma única dobragem que faz incidir P em r_1 e é perpendicular a r_2 .

Figura 7 – Axioma 7 de Huzita-Hatori



Fonte: Cavacami e Furuya, 2010.

2.2 Casos de Congruência de Triângulos

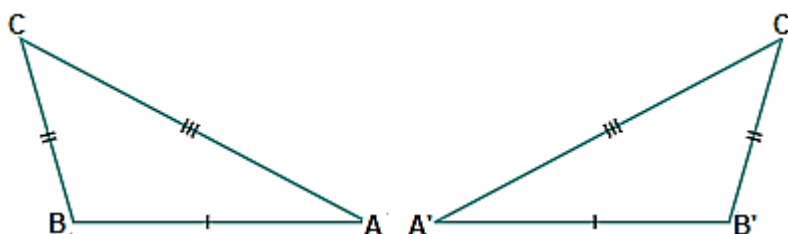
A congruência de triângulos é um conceito fundamental na Geometria Euclidiana, sendo amplamente utilizada na resolução de problemas geométricos e na demonstração de propriedades de figuras planas. Dois triângulos são congruentes quando possuem todos os lados e/ou ângulos correspondentes congruentes, depende de cada caso de semelhança. No entanto, não é necessário verificar todas essas medidas para estabelecer a congruência. Existem critérios específicos, conhecidos como casos de congruência, que permitem concluir a congruência a partir de apenas algumas informações. Existem cinco casos clássicos de congruência de triângulos:

2.2.1 Caso Lado-Lado-Lado (LLL)

Dois triângulos são congruentes se possuem os três lados correspondentes de mesma medida.

Se $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $AC = A'C'$, então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes.

Figura 8 – Caso de congruência LLL



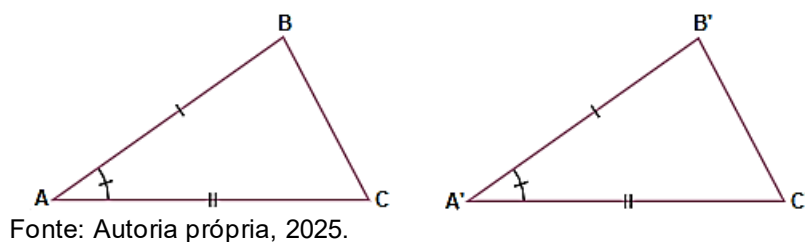
Fonte: Autoria própria, 2025.

2.2.2. Caso Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Dois triângulos são congruentes se possuem dois lados e o ângulo compreendido entre eles de mesma medida.

Se $AB = A'B'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$ e $AC = A'C'$, então os triângulos são congruentes.

Figura 9 – Caso de congruência LAL

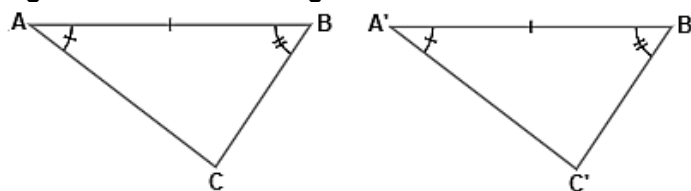


2.2.3 Caso Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)

Dois triângulos são congruentes se possuem um lado e os ângulos adjacentes a ele de mesma medida.

Se $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $AB = A'B'$ e $\angle ABC = \angle A'B'C'$, então os triângulos são congruentes.

Figura 10 – Caso de congruência ALA

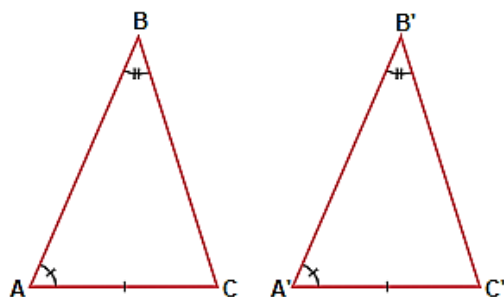


2.2.4 Caso Lado-Ângulo-Ângulo oposto (LAA_0)

Dois triângulos são congruentes se possuem um lado congruente, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado congruente.

Se $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$ e $\angle ABC = \angle A'B'C'$, então os triângulos são congruentes.

Figura 11 – Caso de congruência LAA_0

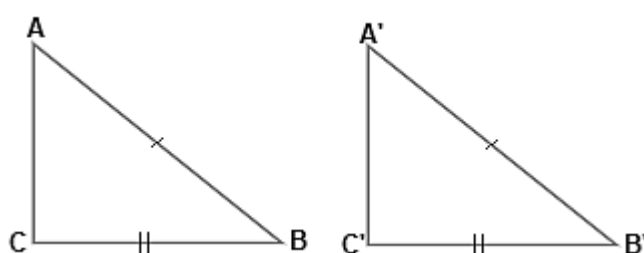


2.2.5 Caso Hipotenusa-Cateto (HC)

Este caso se aplica apenas a triângulos retângulos. Dois triângulos retângulos são congruentes se possuem a hipotenusa e um cateto correspondentes de mesma medida.

Se $AB = A'B'$ (hipotenusas) e $BC = B'C'$ (catetos), então os triângulos são congruentes.

Figura 12 – Caso de congruência HC



Fonte: Autoria própria, 2025.

2.3 Casos de Semelhança de Triângulos

A semelhança de triângulos é um conceito central na Geometria Euclidiana, utilizado na resolução de problemas envolvendo figuras proporcionais e na dedução de propriedades métricas em diversas situações. Dois triângulos são semelhantes quando possuem os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes em proporção. Assim como ocorre com a congruência, não é necessário verificar todos os elementos de dois triângulos para concluir que são semelhantes. Existem critérios específicos que, quando atendidos, garantem a semelhança entre triângulos. Existem três casos clássicos que asseguram a semelhança entre triângulos. São eles:

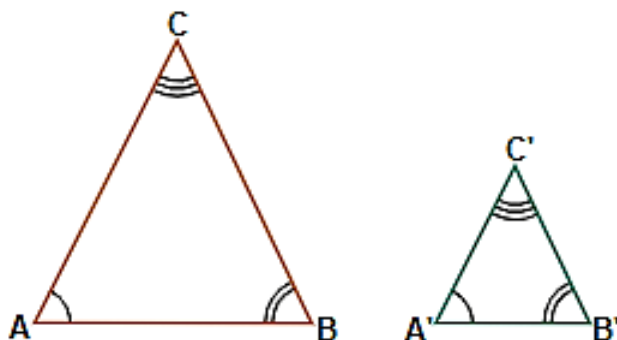
2.3.1 Caso Ângulo-Ângulo (AA)

Dois triângulos são semelhantes se possuem dois ângulos correspondentes congruentes.

Se $\angle A = \angle A'$ e $\angle B = \angle B'$, então os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , a igualdade de dois ângulos garante a igualdade do terceiro. Consequentemente, os triângulos têm os mesmos ângulos, sendo assim semelhantes.

Figura 13 – Caso de semelhança AA



Fonte: Autoria própria, 2025.

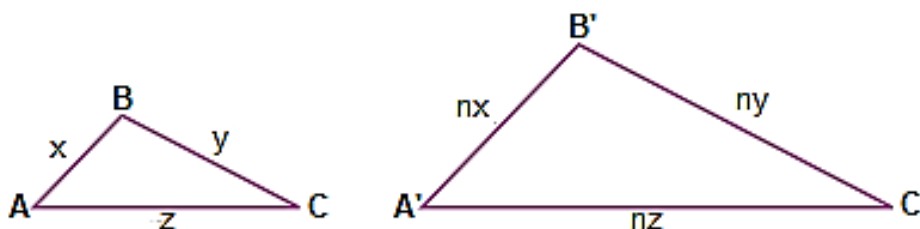
2.3.2 Caso Lado-Lado-Lado (LLL)

Dois triângulos são semelhantes se seus lados correspondentes forem proporcionais.

Se $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ então os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.

A proporcionalidade entre os lados de dois triângulos semelhantes implica a congruência entre seus ângulos correspondentes, pois a semelhança conserva a forma geométrica, alterando apenas a dimensão.

Figura 14 – Caso de semelhança LLL



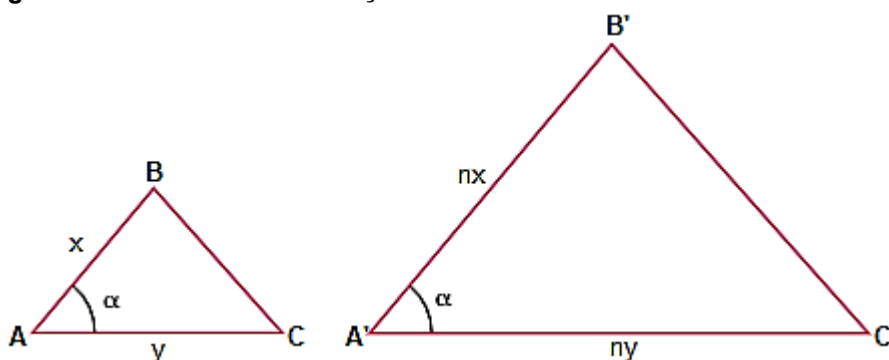
Fonte: Autoria própria, 2025.

2.3.3 Caso Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Dois triângulos são semelhantes se possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados congruente.

Se $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ e $\angle A = \angle A'$, então os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.

Figura 15 – Caso de semelhança LAL



Fonte: Autoria própria, 2025.

2.4 As Isometrias no Plano

No campo da geometria, o estudo das transformações que preservam determinadas propriedades das figuras é de grande importância, tanto do ponto de vista teórico quanto em suas aplicações práticas. Dentre essas transformações, destacam-se as isometrias, que são aquelas que preservam a distância entre os pontos. Em outras palavras, uma isometria é uma transformação geométrica que, ao ser aplicada a uma figura no plano, conserva sua forma e seu tamanho, podendo, no entanto, alterar sua posição ou sua orientação.

Formalmente, considera-se que uma aplicação $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria se, para quaisquer dois pontos P e Q do plano, a distância entre as imagens desses pontos for igual à distância entre os pontos originais, isto é:

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q).$$

Essa propriedade de preservação da distância caracteriza a isometria como uma transformação rígida, pois a figura resultante mantém-se congruente à original.

Historicamente, as isometrias sempre despertaram interesse na matemática, desde os estudos da geometria euclidiana, onde a congruência de

figuras já era analisada, até os trabalhos modernos na teoria dos grupos e na cristalografia. A identificação e classificação das isometrias permitem compreender e descrever padrões de simetria presentes tanto na natureza quanto nas produções humanas, como nas artes, na arquitetura e no design.

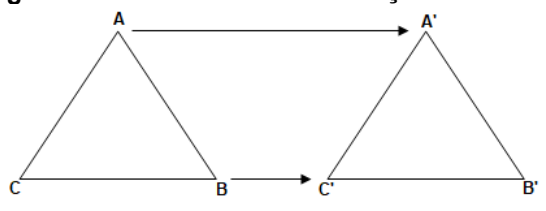
As isometrias do plano são tradicionalmente classificadas em quatro tipos distintos: translação, rotação, reflexão e simetria de deslizamento. Cada uma dessas transformações possui propriedades e características próprias, que as diferenciam quanto aos efeitos sobre a orientação e à existência ou não de pontos fixos.

2.4.1 Translação

É a transformação que move todos os pontos de uma figura no plano na mesma direção e pelo mesmo valor. Pode-se imaginá-la como o ato de deslizar uma figura sem alterar sua orientação. Formalmente, uma translação é determinada por um vetor $\vec{v} = (a, b)$ e associa a cada ponto (x, y) sua imagem $(x+a, y+b)$.

Essa transformação não possui ponto fixo, preserva as distâncias e os ângulos, e mantém a orientação da figura. Um exemplo cotidiano de translação pode ser observado no deslocamento de um objeto sobre uma superfície plana, quando este é movido paralelamente a si mesmo.

Figura 16 – Isometria de Translação



Fonte: Autoria própria, 2025.

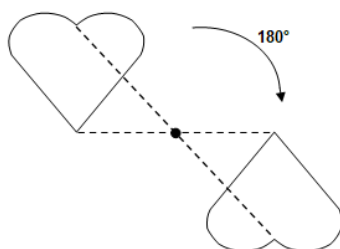
2.4.2 Rotação

Consiste em girar todos os pontos de uma figura em torno de um ponto fixo, denominado centro de rotação, por um ângulo determinado. No caso de rotações no plano cartesiano em torno da origem, a transformação de um ponto (x, y) por um ângulo θ é dada por:

$$(x', y') = (x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta, x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta).$$

A Rotação é uma transformação geométrica no plano que gira todos os pontos de uma figura em torno de um ponto fixo, chamado centro de rotação, por um determinado ângulo e em um sentido definido (horário ou anti-horário). Essa transformação preserva as distâncias e os ângulos, ou seja, é uma isometria que mantém o formato e o tamanho da figura.

Figura 17 – Isometria de Rotação



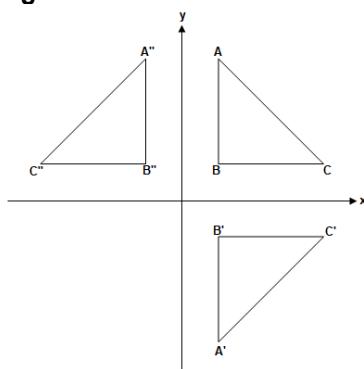
Fonte: Autoria própria, 2025.

2.4.3 Reflexão

É a transformação que leva cada ponto de uma figura a sua imagem especular em relação a uma reta, chamada de eixo de reflexão. Esse processo é análogo ao observado em espelhos planos. Dependendo da posição do eixo de reflexão, a expressão analítica varia. Por exemplo, a reflexão de um ponto (x, y) em relação ao eixo x resulta em $(x, -y)$, e em relação ao eixo y , resulta em $(-x, y)$.

A reflexão preserva distâncias e ângulos, mas inverte a orientação da figura. Os pontos situados sobre o eixo de reflexão são os únicos pontos fixos dessa transformação. Reflexões dessa natureza podem ser vistas em padrões simétricos de azulejos ou vitrais, onde uma metade da figura é o espelhamento da outra.

Figura 18 – Isometria de Reflexão

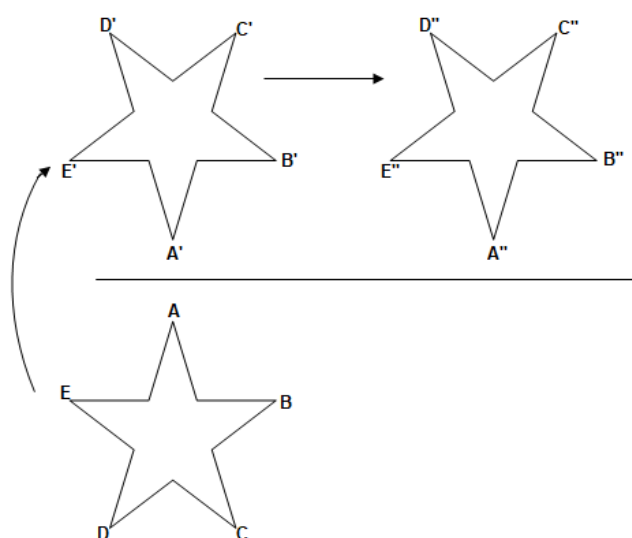


Fonte: Autoria própria, 2025.

2.4.4 Simetria de deslizamento

Consiste em combinar uma reflexão com uma translação ao longo da direção do eixo de reflexão. Trata-se, portanto, de uma composição entre duas isometrias básicas: a reflexão e a translação. Não possui ponto fixo, preserva as distâncias e os ângulos, e inverte a orientação da figura, como ocorre na reflexão. Essa transformação é comum em frisos decorativos e padrões contínuos em tecidos e papéis de parede.

Figura 19 – Isometria de Simetria de deslizamento



Fonte: Autoria própria, 2025.

2.5 Os Problemas Clássicos da Matemática na Grécia Antiga

A Grécia Antiga é frequentemente reconhecida como o berço da matemática ocidental. Nesse período, destacaram-se diversos matemáticos, cujas investigações estabeleceram as bases de áreas fundamentais da disciplina, como a geometria, a aritmética e a álgebra rudimentar. Dentre os diversos desafios matemáticos propostos na Antiguidade, três problemas clássicos se destacaram pela complexidade e pela influência que exerceram ao longo dos séculos: a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Esses problemas, formulados no contexto da geometria plana, consistiam em realizar determinadas construções geométricas utilizando apenas régua não graduada e compasso,

instrumentos que, para os gregos, simbolizavam a pureza do raciocínio geométrico.

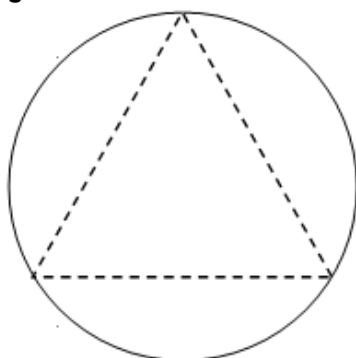
Durante séculos, esses desafios estimularam matemáticos a buscar soluções dentro das restrições impostas. Contudo, apenas com o desenvolvimento da matemática moderna, especialmente a partir do século XIX, provou-se a impossibilidade de resolução desses problemas sob as condições estabelecidas pelos gregos. Apresentaremos esses três problemas clássicos, contextualizando-os histórica e matematicamente, analisando suas tentativas de solução e discutindo os desdobramentos de suas impossibilidades.

2.5.1 A Trissecção do Ângulo

O primeiro problema clássico consistia em dividir, com régua e compasso, um ângulo arbitrário em três partes iguais. Embora simples de enunciar, a trissecção revelou-se inviável na maioria dos casos com os instrumentos estabelecidos.

Assim como nos problemas anteriores, foram propostas soluções aproximadas ou baseadas em instrumentos adicionais. Arquimedes, por exemplo, desenvolveu um método envolvendo uma régua marcada, procedimento não permitido pelas regras originais. Na modernidade, Wantzel (1837) também demonstrou a impossibilidade de trissecar, com régua e compasso, um ângulo arbitrário, exceto em casos específicos, utilizando fundamentos algébricos semelhantes aos empregados na duplicação do cubo.

Figura 20 – Círculo dividido em três partes



Fonte: Autoria própria, 2025.

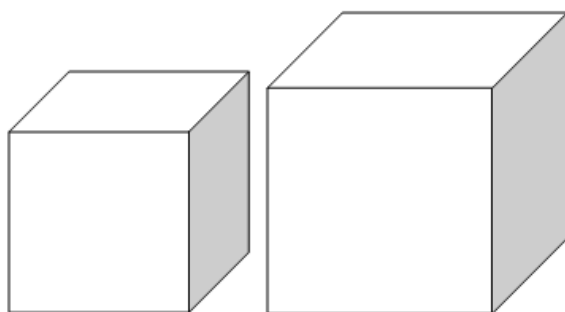
2.5.2 A Duplicação do Cubo

Conhecida também como o problema délico, a duplicação do cubo consistia em construir, com régua e compasso, o lado de um cubo cujo volume fosse o dobro de outro cubo dado. O problema, segundo a tradição, teria origem na cidade de Delos, onde os sacerdotes teriam consultado matemáticos a fim de dobrar o volume de um altar cúbico para aplacar a cólera dos deuses.

Matematicamente, a questão se resume a construir um segmento de comprimento proporcional à raiz cúbica de dois. Assim como na quadratura do círculo, esse problema revelou-se insolúvel com os instrumentos permitidos, pois a raiz cúbica de dois não é um número construtível por régua e compasso. Essa impossibilidade foi demonstrada, a partir dos trabalhos de Wantzel (1837), que utilizou conceitos algébricos e teoria dos números para estabelecer as limitações das construções geométricas clássicas.

Ainda assim, os gregos buscaram soluções aproximadas e métodos alternativos, recorrendo, por exemplo, a dispositivos mecânicos e curvas especiais. Arquimedes, dentre outros, propôs procedimentos baseados em construções com régua móvel ou métodos de interseção de curvas.

Figura 21 – Duplicação do cubo



Fonte: Autoria própria, 2025.

2.5.3 A Quadratura do Círculo

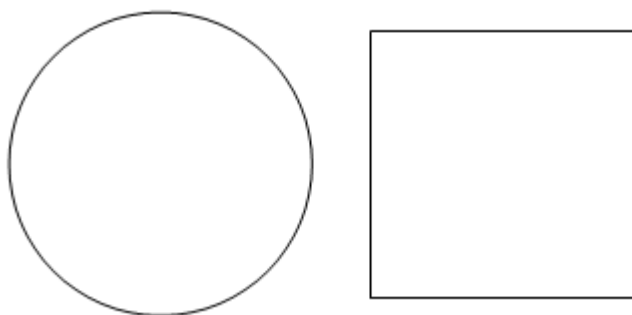
A quadratura do círculo consistia em construir, apenas com régua e compasso, um quadrado cuja área fosse exatamente igual à de um círculo dado. Esse problema, atribuído a Anaxágoras e a outros matemáticos da Antiguidade, estava intrinsecamente relacionado às concepções geométricas de área e

proporção.

A dificuldade da quadratura reside no fato de que sua realização implicaria, na prática, a obtenção de um segmento de comprimento proporcional à raiz quadrada de π , valor cuja natureza irracional e, mais tarde, transcendental foi comprovada. Segundo Vasconcelos (1925), somente em 1882, o matemático alemão Ferdinand von Lindemann demonstrou a transcendência do número π , estabelecendo que não é possível, através de construções com régua e compasso, produzir um segmento de comprimento equivalente a $\sqrt{\pi}$.

Antes dessa demonstração, diversos matemáticos tentaram soluções aproximadas ou por meio de métodos alternativos. Hipócrates de Quios, por exemplo, conseguiu quadrar certas luas (áreas em forma de crescente) usando princípios de áreas equivalentes, o que alimentou a esperança de que o círculo completo pudesse também ser quadrado.

Figura 22 – Quadratura do círculo



Fonte: Autoria própria, 2025.

Os problemas clássicos da matemática grega não apenas estimularam o desenvolvimento da geometria e do raciocínio matemático na Antiguidade, mas também influenciaram significativamente a história da matemática ao longo dos séculos. Embora insolúveis nas condições originalmente estabelecidas, esses desafios conduziram à formulação de conceitos fundamentais, como números irracionais, transcendência e a teoria das construções geométricas.

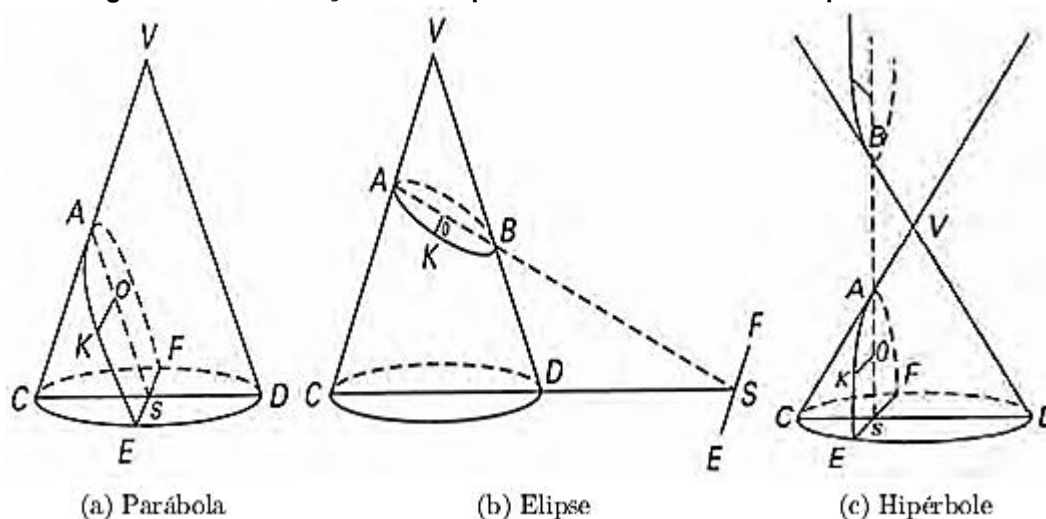
A demonstração das impossibilidades dessas construções, realizada apenas na era moderna, exemplifica a transição entre a matemática clássica e a matemática moderna, marcada pela introdução da álgebra, da teoria dos números e da análise matemática. Assim, mais do que meros exercícios de construção, os

problemas gregos representam marcos históricos que evidenciam a evolução do pensamento matemático ocidental.

2.6 As Cônicas: Parábola, Elipse e Hipérbole

As seções cônicas, tradicionalmente chamadas apenas de cônicas, são curvas obtidas a partir da interseção de um plano com um cone circular duplo. Dependendo da inclinação do plano em relação ao eixo do cone, obtêm-se diferentes tipos de curvas: parábolas, elipses e hipérbolas. Cada uma dessas curvas possui pontos notáveis, elementos essenciais para sua caracterização, estudo geométrico e aplicações práticas.

Figura 23 – Intersecção de um plano e um cone circular duplo



(a) Parábola

(b) Elipse

(c) Hipérbole

Fonte: Lopes, 2011.

2.6.1 Parábola

Sejam r uma reta e F um ponto do plano não pertencente a r . A parábola P de foco F e diretriz r é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a r :

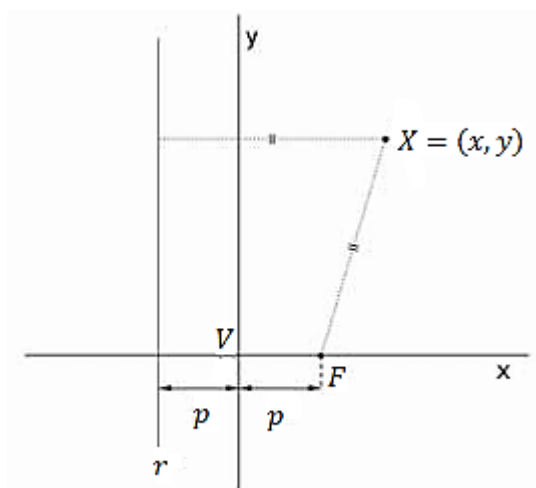
$$P = \{X \mid d(X, F) = d(X, r)\}.$$

- A reta focal l da parábola P é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz.

- O ponto V da parábola P que pertence à reta focal é o vértice de P . Se A é o ponto onde r intersecta l , então V é o ponto médio do segmento AF .
- O número $2p = d(F, r)$ é o parâmetro da parábola P . Note que $d(V, F) = d(V, r) = p$

Para obter a equação da parábola P , considera-se o sistema ortogonal de coordenadas cuja origem é o vértice da parábola, tal que o foco pertença ao semieixo positivo das abscissas. Em relação a este sistema o foco é $F = (p, 0)$ e a diretriz é a reta $r: x = -p$.

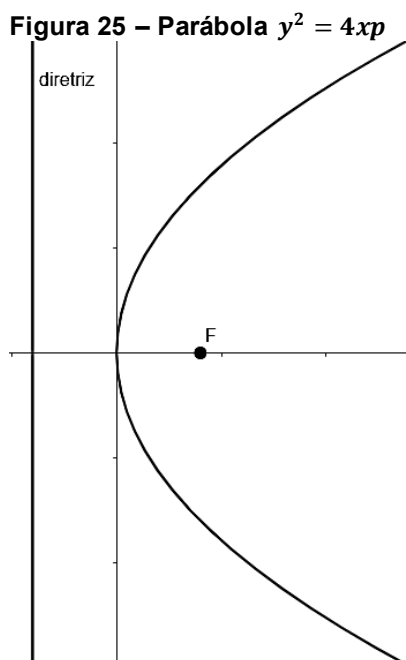
Figura 24 – Pontos notáveis da parábola



Fonte: Lopes, 2011.

Seja X um ponto de coordenadas cartesianas (x,y) , sabemos que a distância do ponto X a reta r é igual a distância do ponto X ao foco F . Observe abaixo:

$$\begin{aligned}
 d(X, r) = d(X, F) &\Rightarrow x + p = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} \\
 &\Rightarrow (x + p)^2 = (x - p)^2 + (y - 0)^2 \\
 &\Rightarrow x^2 + 2xp + p^2 = x^2 - 2xp + p^2 + y^2 \\
 &\Rightarrow y^2 = 4xp \blacksquare
 \end{aligned}$$



Fonte: Autoria própria, 2025.

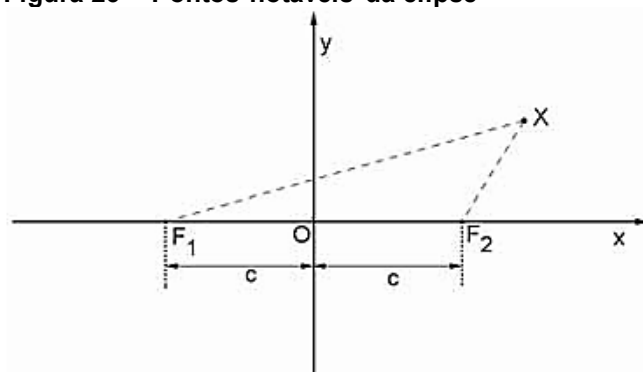
2.6.2 Elipse

Uma elipse E de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$:

$$E = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

A equação reduzida da Elipse E será deduzida sobre um sistema ortogonal de coordenadas onde os focos pertençam ao eixo x para facilitar os cálculos. Dessa forma, sejam $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, observe a imagem abaixo.

Figura 26 – Pontos notáveis da elipse



Fonte: Lopes, 2011.

Dado o ponto $X = (x, y)$ pertencente à elipse, temos que $d(F_1, X) + d(F_2, X) = 2a$, ou seja,

$$\begin{aligned}
 d(F_1, X) + d(F_2, X) = 2a &\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \\
 &\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 &\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 &\Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
 &\Rightarrow 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = 4a^2 - 4x \\
 &\Rightarrow a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = a^2 - xc \\
 &\Rightarrow a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
 &\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
 &\Rightarrow a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 \\
 &\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2 \\
 &\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2 \\
 &\Rightarrow \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{b^2a^2}{a^2b^2} \\
 &\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \blacksquare
 \end{aligned}$$

Se os focos estiverem sobre o eixo y e centro na origem, a equação reduzida será igual a

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

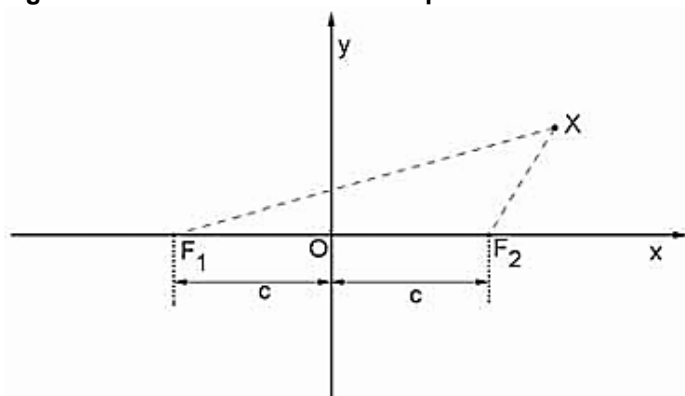
2.6.3 Hipérbole

Uma hipérbole H de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$:

$$H = \left\{ P \mid d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \right\}, 0 < a < c, d(F_1, F_2) = 2c.$$

A equação reduzida da hipérbole H é obtida fixando-se o sistema de coordenadas cartesianas onde $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ estão sobre o eixo x , observe a imagem abaixo.

Figura 27 – Pontos notáveis da hipérbole



Fonte: Lopes, 2011.

O ponto X de coordenadas (x, y) pertence à hipérbole se, e somente se, $d(X, F_1) - d(X, F_2) = \pm 2a$, prevalecendo o sinal positivo se X estiver mais próximo de F_2 . Assim temos:

$$\begin{aligned}
 d(X, F_1) - d(X, F_2) &= \pm 2a \Rightarrow d(X, F_1) = d(X, F_2) \pm 2a \\
 \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \pm 2a \\
 \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \\
 \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \\
 \Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \\
 \Rightarrow 4xc - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \\
 \Rightarrow xc - a^2 &= \pm a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \\
 \Rightarrow x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
 \Rightarrow x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \\
 \Rightarrow x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
 \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\
 \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \\
 \Rightarrow \frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \\
 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \blacksquare
 \end{aligned}$$

Caso os focos estejam sobre o eixo y e centro também na origem, a equação será:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \blacksquare$$

2.7 A Função Cúbica

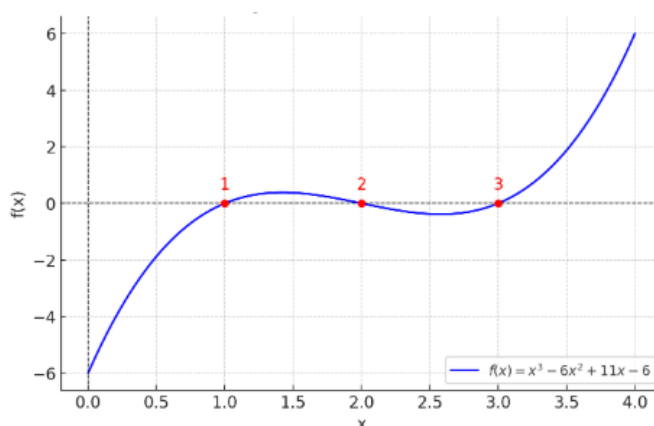
Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se cúbica quando são dados números reais a, b, c, d , com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O grau da equação é determinado pelo maior expoente da variável, neste caso o número três.

A solução de uma equação cúbica consiste em determinar os valores de x que satisfazem a igualdade, denominados raízes ou soluções da equação. Conforme o Teorema Fundamental da Álgebra, uma equação polinomial de grau n possui exatamente n raízes no conjunto dos números complexos.

Antes de abordar os métodos de resolução de uma equação cúbica, é importante estabelecer que toda equação cúbica com coeficientes reais possui pelo menos uma raiz real. Tal fato pode ser justificado tanto pela análise gráfica do comportamento de funções polinomiais de grau ímpar quanto pelo enunciado de dois importantes teoremas matemáticos.

- **O Teorema Fundamental da Álgebra** afirma que todo polinômio de grau n com coeficientes complexos admite exatamente n raízes no conjunto dos números complexos, consideradas suas multiplicidades. Como consequência, uma equação cúbica sempre possui três raízes complexas. Adicionalmente, dado que os números complexos não reais aparecem, obrigatoriamente, aos pares de números conjugados quando os coeficientes do polinômio são reais, e que o grau três é ímpar, conclui-se que pelo menos uma das raízes deve necessariamente ser um número real.
- **O Teorema de Bolzano**, também conhecido como Teorema do Valor Intermediário, estabelece que se uma função contínua $f(x)$ assume valores de sinais opostos em dois pontos a e b , então existe pelo menos um número real c entre a e b tal que $f(c) = 0$. Como todo polinômio é uma função contínua, e considerando o comportamento assintótico das funções cúbicas para $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$, pode-se afirmar que os sinais de $f(x)$ mudam em algum intervalo, o que garante a existência de pelo menos uma raiz real.

Figura 28 – Gráfico de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$



Fonte: Autoria própria, 2025.

- Redução de Tschirnhaus

Para simplificar o tratamento algébrico das cúbicas, pode-se aplicar a substituição:

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

O objetivo dessa transformação é eliminar o termo quadrático, obtendo uma equação na chamada forma depressiva:

$$\begin{aligned} a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d &= 0 \\ \Rightarrow a\left(y^3 - \frac{y^2b}{a} + \frac{yb^2}{3a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(y^2 - \frac{2yb}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) + cy - \frac{cb}{3a} + d &= 0 \\ \Rightarrow ay^3 - y^2b + \frac{yb^2}{3a} - \frac{b^3}{27a^2} + by^2 - \frac{2yb^2}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{cb}{3a} + d &= 0 \\ \Rightarrow ay^3 + \frac{yb^2}{3a} - \frac{b^3}{27a^2} - \frac{2yb^2}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{cb}{3a} + d &= 0 \\ \Rightarrow ay^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a}\right)y + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2} &= 0 \\ \Rightarrow y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} &= 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Podemos escrever como, $x^3 + px + q = 0$, em que:

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \text{ e } q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$$

Esta forma é mais adequada para a aplicação da fórmula de resolução.

- **Fórmula de Cardano**

A fórmula de Cardano permite determinar as raízes da equação cúbica depressiva $x^3 + px + q = 0$. Calcula-se o discriminante:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

e, de acordo com seu valor, determina-se a natureza das raízes:

Se $\Delta > 0$: uma raiz real e duas complexas.

Se $\Delta = 0$: três raízes reais, sendo pelo menos duas iguais.

Se $\Delta < 0$: três raízes reais e distintas.

A solução geral é dada por:

$$S = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

A partir desta, recupera-se x utilizando a substituição inicial.

- **Métodos Gráficos e Geométricos**

Além dos métodos algébricos, pode-se resolver equações cúbicas por métodos gráficos, analisando o comportamento do gráfico da função polinomial para localizar visualmente as raízes reais.

Outro método interessante é o Método de Lill, que utiliza construções geométricas para representar a equação cúbica e identificar suas soluções por meio de trajetórias e interseções de segmentos. Tal método será visto nos próximos capítulos.

2.8 Os Números construtíveis com Origami

Nosso objetivo, neste tópico, é investigar os números que podem ser construídos por meio de dobraduras de papel, utilizando técnicas de origami. Para isso, o primeiro passo consiste em atribuir um significado matemático a esse conceito. Definiremos, então, a folha de papel como o plano complexo \mathbb{C} , afinal, enquanto matemáticos, nosso objetivo é abstrair situações do mundo real e representá-las no contexto matemático.

Nesse plano, consideraremos dois pontos dados, a saber, os pontos $(0,0)$ e $(1,0)$, que serão denotados, respectivamente, por A e B . Os números construtíveis serão definidos como os elementos do conjunto \mathbb{C} que podem ser obtidos a partir

desses dois pontos iniciais, utilizando-se os axiomas de Huzita-Hatori estabelecidos para as operações com dobraduras. Tais dobras corresponderão aos segmentos construtíveis e, conseqüentemente, os números construtíveis serão aqueles que estiverem localizados na interseção de dois desses segmentos.

Com os axiomas podemos provar dois resultados básicos, vamos chamá-los de R_1 e R_2 :

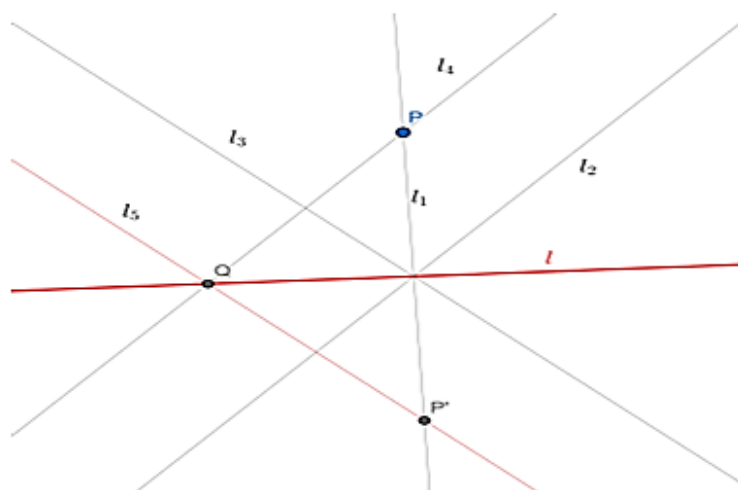
- R_1 : Dado um ponto P e uma reta l podemos construir uma reta paralela a l que passa por P .

Demonstração: Pelo axioma 4, podemos encontrar uma reta s perpendicular a l que passa por P . Aplicando novamente o axioma 4 podemos encontrar uma reta t que passa por P e é perpendicular a s , logo t é a reta procurada.

- R_2 : Dado um ponto P e uma reta l podemos refletir P através de l .

Demonstração: Pelo axioma 4, podemos encontrar uma reta l_1 perpendicular a l que passa por P . Agora pelo axioma 3 podemos encontrar as bissetrizes l_2 e l_3 dos ângulos formados por l e l_1 . Agora por R_1 podemos construir uma reta l_4 paralela a l_2 que passa por P , essa reta encontra l em Q . Agora podemos construir uma reta l_5 paralela a l_3 que passa por Q , essa reta encontra l_1 em P' que é justamente o ponto procurado. O desenho abaixo ilustra o que fizemos um pouco mais claro.

Figura 29 – Reflexão de um ponto P por uma reta l



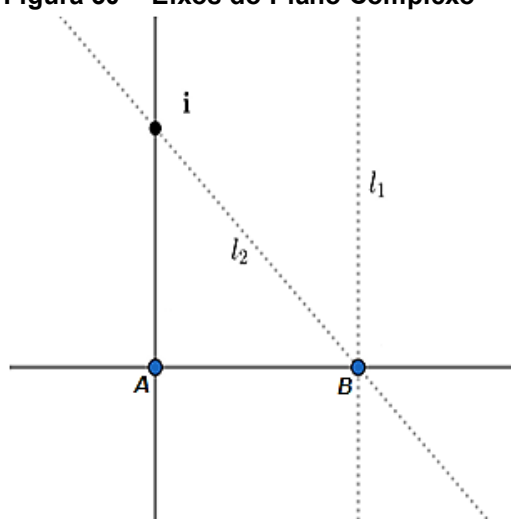
Fonte: Spezia, 2018.

A partir dessas ideias, também é possível construir os eixos real e imaginário do plano complexo. De fato, o eixo real corresponde ao segmento que

conecta os pontos A e B , o qual pode ser obtido por meio do axioma 1, lembrando que esses dois pontos são previamente dados. Para a construção do eixo imaginário, aplica-se o axioma 4 ao ponto A .

Além disso, a obtenção do ponto i é igualmente simples. Primeiramente, aplica-se o axioma 4 ao ponto B , o que resulta em uma reta que chamaremos de l_1 . Em seguida, utiliza-se o axioma 3 entre as retas l_1 e o eixo real, obtendo-se, assim, uma nova reta l_2 , cuja interseção com o eixo imaginário ocorre exatamente no ponto i . Denotaremos o eixo real por Ox e o eixo imaginário por Oi .

Figura 30 – Eixos do Plano Complexo



Fonte: Spezia, 2018.

2.8.1 Operações de Corpo

Utilizando os axiomas e as relações previamente estabelecidas, passaremos agora a demonstrar que o conjunto dos números construtíveis por meio de dobraduras de papel forma um subcorpo, o qual denotaremos por \mathbb{O} , do corpo dos números complexos \mathbb{C} . Para isso, é necessário verificar que as operações fundamentais estão bem definidas em \mathbb{O} . Ou seja, dados α e β elementos de \mathbb{O} temos que mostrar que, $\alpha + \beta \in \mathbb{O}$, $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{O}$ e $\alpha^{-1} \in \mathbb{O}$ se, $\alpha \neq 0$.

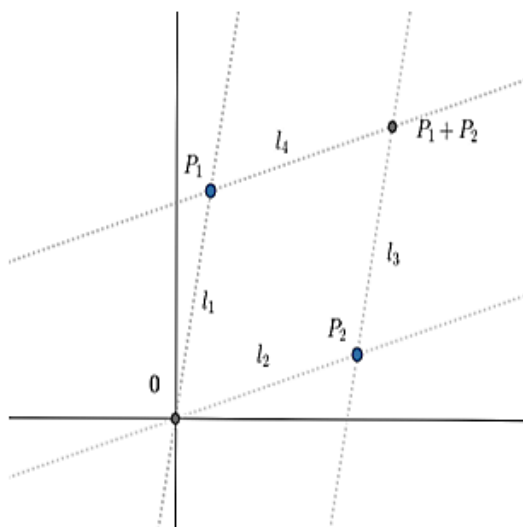
- Adição

Dados dois pontos P_1 e P_2 construtíveis. P_1 e P_2 são números complexos e a nossa operação de adição é a usual dos números complexos. Vamos considerar dois casos:

Caso 1: P_1 e P_2 não são colineares e não nulos então podemos usar a regra do paralelogramo para a soma. Logo teremos:

- l_1 : reta que liga o ponto O ao ponto P_1 .
- l_2 : reta que liga o ponto O ao ponto P_2 .
- l_3 : reta paralela a reta l_1 e que passa pelo ponto P_2 .
- l_4 : reta paralela a reta l_2 e que passa pelo ponto P_1 .
- $P_1 + P_2$: intersecção das retas l_3 e l_4 .

Figura 31 – Soma de dois números construtíveis via origami - Caso 1



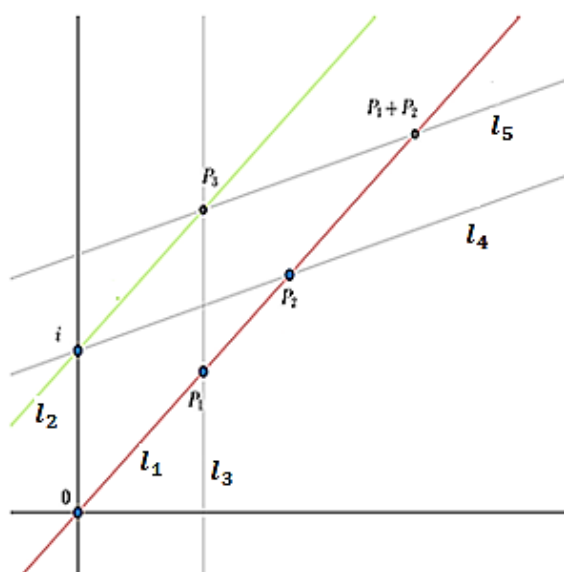
Fonte: Spezia, 2018.

A regra do paralelogramo é um método geométrico utilizado para determinar a soma de dois vetores que possuem a mesma origem. Observando a imagem acima, construímos um paralelogramo utilizando l_1 e l_2 como lados adjacentes. Para isso, traçamos uma linha paralela a l_1 a partir da extremidade de l_2 e, em seguida, uma linha paralela a l_2 a partir da extremidade de l_1 . Após completar o paralelogramo, a diagonal que parte da origem comum de l_1 e l_2 até o vértice oposto representa a soma de l_1 e l_2 .

Caso 2: Sejam P_1 e P_2 dois pontos colineares, ou seja, múltiplos escalares de um mesmo vetor. Nesse contexto, não é mais possível recorrer à regra do paralelogramo para realizar a soma desses números. Assim, torna-se necessário definir um procedimento adequado para transportar uma medida, isto é, para transladar um segmento de reta de modo a efetuar a operação de adição. Logo teremos:

- l_1 : reta que liga o ponto O ao ponto P_1 .
- l_2 : reta paralela a reta l_1 e que passa pelo ponto i .
- l_3 : reta paralela ao eixo Oi e que passa pelo ponto P_1 .
- P_3 : intersecção das retas l_2 e l_3 .
- l_4 : reta que liga o ponto i ao ponto P_2 .
- l_5 : reta paralela a reta l_4 e que passa pelo ponto P_3 .
- $P_1 + P_2$: intersecção das retas l_1 e l_5 .

Figura 32 – Soma de dois números construtíveis via origami - Caso 2



Fonte: Spezia, 2018.

Analisando a imagem apresentada, observa-se que a reta l_1 é paralela à reta l_2 , enquanto a reta l_3 é paralela ao eixo das ordenadas. Além disso, a reta l_4 é paralela à reta l_5 . Diante dessas relações de paralelismo, conclui-se que os segmentos OP_1 , iP_3 e $P_2P_1 + P_2$ são congruentes entre si.

Observe que, se um dos números envolvidos for zero, nenhuma construção adicional é necessária, pois a soma resultará no próprio outro número. No caso específico em que ambos os pontos estivessem colineares com o número imaginário i , poderíamos realizar a mesma construção, substituindo o ponto 1 por i . Além disso, para obter o oposto de um dado ponto P , basta refleti-lo em relação à origem.

Dessa forma, concluímos que o conjunto \mathbb{O} é fechado em relação à operação de adição.

- Multiplicação

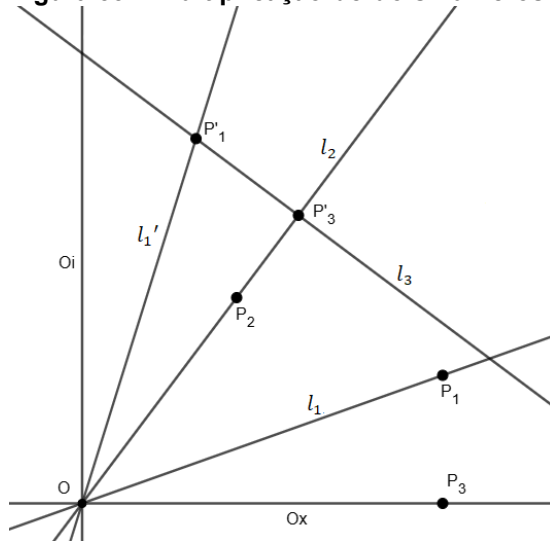
Para a operação de multiplicação, é conveniente considerar os números complexos em sua forma polar. Assim, sejam $P_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $P_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. A multiplicação desses dois números resulta em $P_1 P_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, onde $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$ e $r_1, r_2 \geq 0$.

Dessa forma, a multiplicação de dois números complexos pode ser interpretada geometricamente como uma rotação do ponto P_1 por um ângulo de amplitude θ_2 , seguida da multiplicação dos comprimentos dos segmentos que representam seus módulos r_1 e r_2 .

Para executar essa construção utilizando dobraduras, recorreremos às propriedades de semelhança de triângulos, que permitem conservar razões de segmentos e ângulos, possibilitando, assim, a realização das operações de multiplicação no plano complexo por meio das técnicas de origami. Logo teremos:

- l_1 : reta que liga o ponto O ao ponto P_1 .
- l_2 : reta que liga o ponto O ao ponto P_2 .
- P_3 : intersecção da reta perpendicular ao eixo Ox que passa por P_1 com o eixo Ox .
- P_3' : ponto simétrico de P_3 em relação a bissetriz do ângulo $\angle P_2 O P_3$.
- l_3 : reta perpendicular a l_2 e que passa pelo ponto P_3' .
- P_1' : ponto simétrico de P_1 , de modo que $P_1' \in l_3$ e as distâncias $P_1 O$ e $P_1' O$ sejam iguais.
- l_1' : reta que liga o ponto O ao ponto P_1' .

Figura 33 – Multiplicação de dois números construtíveis via origami - Caso 1



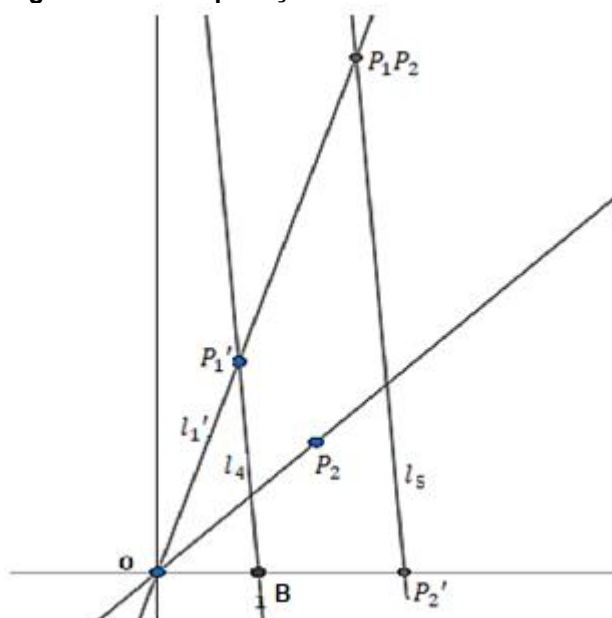
Fonte: Spezia, 2018.

Observe que, até este ponto, realizamos a rotação do ponto P_1 por um ângulo de amplitude θ_2 , pois os triângulos OP_1P_3 e $OP_1'P_3'$ são congruentes pelo caso LLL. Resta, agora, ajustar o comprimento do segmento resultante para que ele corresponda corretamente ao produto dos módulos r_1 e r_2 .

Para isso, consideremos o seguinte procedimento:

- P_2' : ponto simétrico de P_2 em relação a bissetriz do ângulo $\angle P_2OB$.
- l_4 : reta que liga o ponto B ao ponto P_1' .
- l_5 : reta paralela a reta l_4 e que passa pelo ponto P_2' .
- P_1P_2 : intersecção das retas l_1' e l_5 .

Figura 34 – Multiplicação de dois números construtíveis via origami - Caso 2



Fonte: Spezia, 2018.

Analisando a imagem acima, observamos que os triângulos $OP_1'B$ e $OP_1P_2P_2'$ são semelhantes, resultando em:

$$\frac{OP_1'}{OB} = \frac{OP_1P_2}{OP_2'} \Rightarrow \frac{r_1}{1} = \frac{OP_1P_2}{r_2} \Rightarrow OP_1P_2 = r_1 \cdot r_2 \blacksquare$$

- Inversão

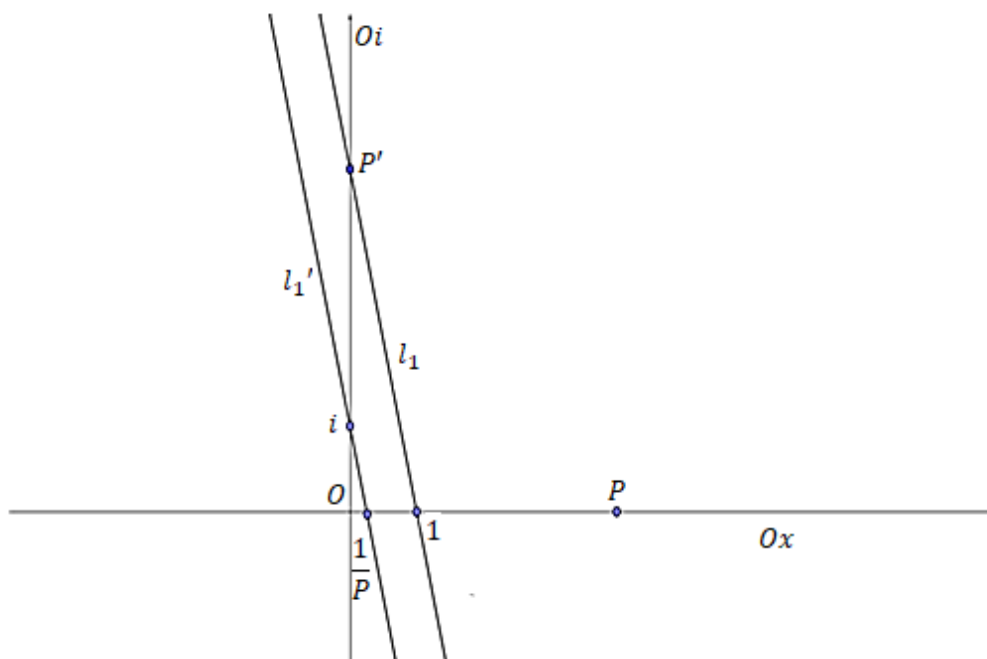
Aqui novamente a construção que vamos fazer exige dividir em dois casos.

Caso 1: Seja P um número real e diferente de 1, pois se for igual a 1 não há nada a fazer.

Logo teremos:

- P' : ponto simétrico de P em relação a bissetriz do ângulo $\angle POi$.
- l_1 : reta que liga o ponto $B(1,0)$ ao ponto P' .
- l_1' : reta paralela a reta l_1 e que passa pelo ponto $i(0,1)$.
- $\frac{1}{P}$: intersecção da reta l_1' e o eixo Ox .

Figura 35 – Inversão de números construtíveis via origami - Caso 1



Fonte: Spezia, 2018.

Analisando a imagem, temos dois triângulos semelhantes $OP'B$ e $Oi\frac{1}{P}$:

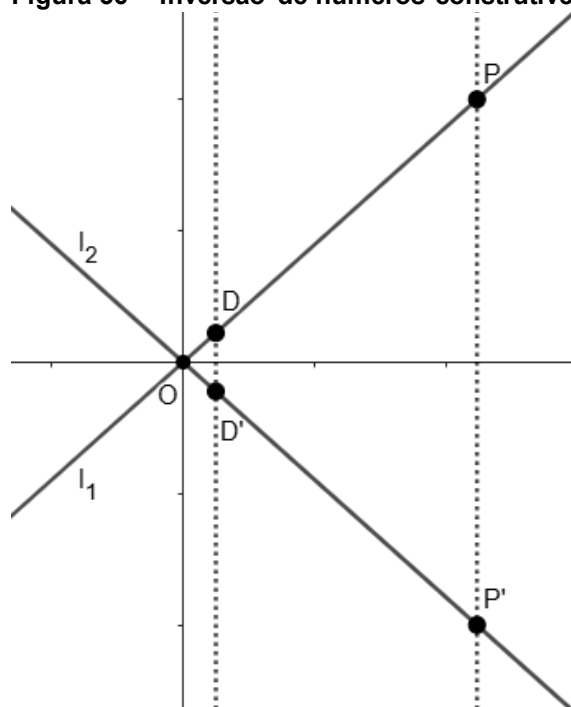
$$\frac{Oi}{O\frac{1}{P}} = \frac{OP'}{OB} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{P}{1} \Rightarrow xP = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{P} \blacksquare$$

Caso 2: Seja P um número não real.

Logo teremos:

- P' : ponto simétrico de P em relação ao eixo Ox .
- l_1 : reta que liga a origem ao ponto P .
- l_2 : reta que liga a origem ao ponto P' .
- D : ponto que pertence a l_1 e está a uma distância da origem igual ao valor do inverso do módulo de P .
- D' : ponto simétrico de D em relação ao eixo Ox e que representa o inverso de P .

Figura 36 – Inversão de números construtíveis via origami - Caso 2



Fonte: Autoria própria, 2025.

Para encontrar o inverso de um número complexo utilizando dobraduras de papel, partimos da representação geométrica dos números complexos no plano de Argand-Gauss. Inicialmente, marca-se a origem no centro da folha e traçam-se as dobras correspondentes aos eixos real e imaginário. Em seguida, localiza-se o ponto $P(a, b)$ que representa o número complexo $z = a + bi$, posicionando-o de acordo com suas coordenadas no plano.

Posteriormente, obtém-se o conjugado de z por meio de uma dobra que reflete o ponto $P(a, b)$ em relação ao eixo real, resultando no ponto $P'(a, -b)$. Na sequência, é necessário determinar o módulo de z que corresponde à distância do ponto P a origem.

Para localizar o inverso de z , tomamos a direção do conjugado de z , ou seja, a reta l_2 que passa pela origem e pelo ponto P' , e nela identificamos um ponto D' cuja distância a origem seja igual ao inverso da distância da origem ao ponto P . Essa operação pode ser realizada refletindo o ponto D em relação ao eixo real, sabendo que D pode ser encontrado utilizando os passos do caso anterior, pois ele pertence a reta l_1 e está a uma distância conhecida da origem. Por fim, marca-se o ponto obtido nessa direção, que corresponderá ao inverso de z , e que representa geometricamente o número z^{-1} no plano de Argand-Gauss.

É importante observar que, em ambas as construções apresentadas, utilizamos as propriedades de semelhança de triângulos para preservar razões de segmentos e ângulos. Além disso, empregamos a propriedade de inversão nos números complexos, segundo a qual $(re^{\theta i})^{-1} = \frac{1}{r} e^{-\theta i}$. Ou seja, ao realizar a inversão, refletimos o ângulo em relação ao eixo real, mantendo o módulo invertido.

Com isso, após diversas construções e procedimentos geométricos, foi possível demonstrar que o conjunto \mathbb{O} constitui, de fato, um subcorpo do corpo dos números complexos \mathbb{C} .

2.8.2 Lema

Seja $\alpha = a + bi$, então $\alpha \in \mathbb{O}$ se e somente se $a, b \in \mathbb{O}$.

Demonstração:

Seja $\alpha \in \mathbb{O}$. Para determinar as componentes a e b associadas ao número complexo $\alpha = a + bi$, basta traçar as retas perpendiculares aos eixos real e imaginário que passam pelo ponto correspondente a α no plano de Argand-Gauss.

Reciprocamente, dados os valores de a e b , pode-se construir duas retas: uma passando pelo ponto a sobre o eixo real e perpendicular a este eixo, e outra passando pelo ponto b sobre o eixo imaginário e perpendicular a ele. O ponto de interseção dessas duas retas determina, no plano complexo, a posição do número $\alpha = a + bi$.

3. ENSINANDO TRIGONOMETRIA VIA DOBRADURA

Este capítulo apresenta três atividades matemáticas interativas que exploram conceitos fundamentais da geometria e da trigonometria por meio da arte do origami: *Dobrando Triângulos Equiláteros em um Quadrado*, *A Trigonometria no Origami* e *O Origami pode trissectar o Ângulo?* Essas atividades permitem que os alunos investiguem propriedades geométricas e relações trigonométricas enquanto realizam construções matemáticas concretas, favorecendo uma aprendizagem visual e intuitiva dos conteúdos.

Ao longo das atividades, os alunos trabalham com a classificação dos triângulos, identificando propriedades dos triângulos equiláteros e retângulos e compreendendo as condições necessárias para sua construção. A relação entre as medidas dos lados e ângulos é explorada através dos casos de semelhança e congruência de triângulos, além da aplicação da simetria para compreender padrões geométricos formados durante as dobras.

A trigonometria se torna essencial na resolução dos problemas propostos, envolvendo conceitos como funções trigonométricas, soma de arcos, arco duplo e ângulo externo de um triângulo. Os alunos analisam como os valores das razões trigonométricas são utilizados para determinar medidas desconhecidas, além de aplicarem as fórmulas do triângulo equilátero e retângulo para calcular áreas e perímetros. O uso de radicais também surge naturalmente durante os cálculos das medidas dos segmentos gerados pelas dobras.

A atividade, "O origami pode trissectar o ângulo?", aborda um dos famosos problemas gregos da antiguidade, levando os estudantes a refletirem sobre a impossibilidade da trissecção do ângulo com régua e compasso e como o origami pode oferecer uma solução (Hull, 2013). Durante essa exploração, são trabalhados conceitos como tipos de triângulos, simetria e o Teorema de Pitágoras, entre outros conteúdos matemáticos relevantes.

Além disso, a relação entre os triângulos formados pelas dobras permite explorar polígonos regulares, destacando como certos padrões geométricos surgem a partir de repetições simétricas. O estudo de produtos notáveis se torna relevante na manipulação algébrica das expressões matemáticas obtidas ao longo das atividades, auxiliando na simplificação de cálculos e na compreensão das propriedades dos

triângulos.

Dessa forma, essas atividades não apenas reforçam conhecimentos matemáticos essenciais, mas também proporcionam uma abordagem inovadora e dinâmica para o ensino da geometria e trigonometria. Ao integrar a manipulação do papel com a modelagem matemática, os alunos desenvolvem uma compreensão mais profunda dos conceitos, aprimorando suas habilidades analíticas e sua capacidade de resolver problemas de forma criativa.

3.1 Dobrando triângulos equiláteros em um quadrado

Problema

Encontre uma maneira de dobrar um triângulo equilátero a partir de um papel quadrado. Em seguida, encontre o maior triângulo equilátero possível que possa ser dobrado a partir de um quadrado. De que maneira esse triângulo equilátero máximo pode ser dobrado? Faça o mesmo com um hexágono regular.

Observação:

A parte geométrica deste problema requer apenas a capacidade de trabalhar com triângulos de $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. No entanto, *insights* geométricos mais criativos podem levar a soluções mais elegantes.

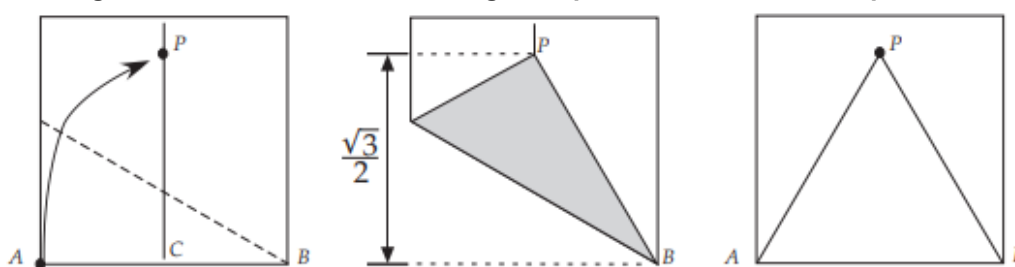
Para uma turma de cálculo, este problema poderia ser apresentado sem qualquer menção referente à dobras no papel, pois é um problema básico de otimização, ou seja, achar as dimensões do maior triângulo equilátero que pode ser inscrito em um quadrado.

Porém, este problema pode ser resolvido completamente sem recorrer a derivadas, desde que se configure corretamente o modelo e se tenha um sólido conhecimento de trigonometria.

Solução do Problema

Existem várias maneiras de dobrar um triângulo equilátero dentro de um quadrado. Todas elas envolvem a criação de um ângulo de 60° . Ilustraremos abaixo uma possível solução. Assumimos, de agora em diante, que o lado do quadrado tem comprimento 1.

Figura 37 – Construindo um triângulo equilátero dentro de um quadrado



Fonte: Thomas Hull, 2013.

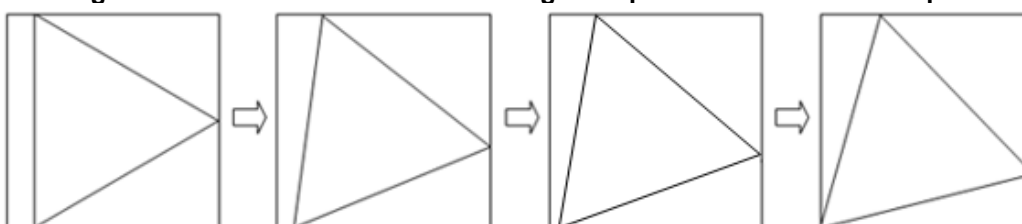
O movimento envolvido consiste em pegar um canto do quadrado, denominado A , e dobrá-lo até a linha central do quadrado (portanto, o papel deve ser vincado ao meio primeiro), garantindo ao mesmo tempo que a nova dobra passe pelo canto B . Chamamos P a imagem do ponto A após essa dobra.

Dessa forma, o triângulo ABP formado é equilátero, pois como BP é a imagem de AB após a dobra, seu comprimento continua sendo 1. Podemos então dobrar B em direção à linha central da mesma forma ou simplesmente reconhecer, por simetria, que AP também tem comprimento 1. Assim, $\triangle ABP$ é um triângulo equilátero.

Agora para encontrar o maior triângulo equilátero inscrito neste quadrado, procedamos do seguinte modo.

Primeiro fixemos um de seus vértices coincidindo com um canto do quadrado. Caso contrário, um dos lados do triângulo não tocaria nenhuma das laterais do quadrado, o que indicaria que o triângulo poderia ser ampliado. Se assumirmos que a lateral esquerda do quadrado não está sendo tocada, os três vértices do triângulo devem estar em contato com as outras três laterais. Isso permite que o triângulo seja deslizado para a esquerda até que um de seus vértices toque a lateral esquerda do quadrado e, ao mesmo tempo, uma das outras laterais. Assim, um dos vértices do triângulo estará posicionado exatamente no canto do quadrado.

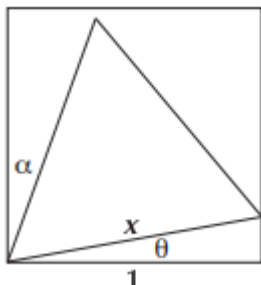
Figura 38 – Construindo o maior triângulo equilátero dentro de um quadrado



Fonte: Autoria própria, 2025.

Analisemos agora o seguinte diagrama.

Figura 39 – Representando os lados e os ângulos do triângulo equilátero dentro de um quadrado



Fonte: Thomas Hull, 2013.

A base do triângulo, de comprimento x , se estenderá do canto inferior esquerdo até a lateral direita do quadrado. O intervalo relevante para o ângulo θ será $0^\circ \leq \theta \leq 15^\circ$, pois, se $\theta > 15^\circ$, estaríamos em um caso simétrico com $\alpha \leq 15^\circ$.

O próximo passo é encontrar uma fórmula para a área A do triângulo equilátero e maximizá-la em termos de θ . Como a base do triângulo é x , sua altura é $\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Assim, a área é dada por:

$$A = \left(x \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

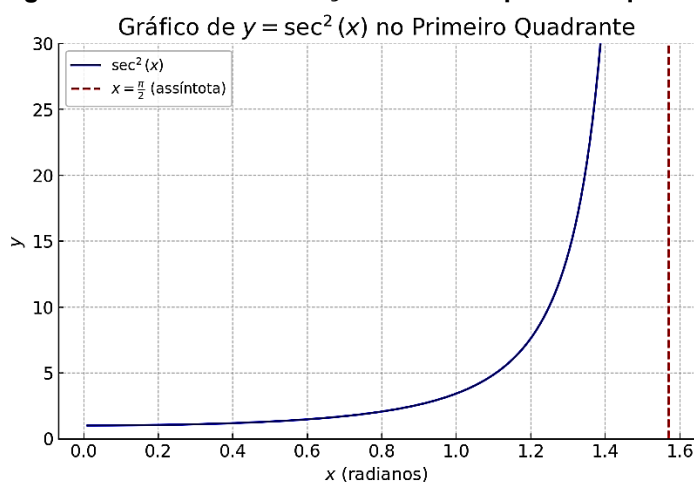
$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

Mas queremos expressá-la em função de θ . Como $\cos \theta = \frac{1}{x}$, podemos reescrever

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \sec^2 \theta$$

Sabemos que $\cos \theta$ é uma função decrescente no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, logo que $\sec^2 \theta$ é crescente nesse intervalo. Portanto, A será maximizada no ponto extremo $\theta = \frac{\pi}{12}$ (ou seja, 15°).

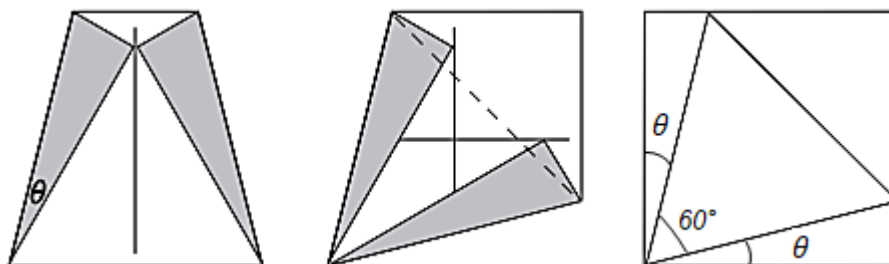
Figura 40 – Gráfico da função $\sec^2 \theta$ no primeiro quadrante



Fonte: Autoria própria, 2025.

Para dobrar este triângulo equilátero máximo no papel quadrado, procedamos do seguinte modo.

Figura 41 – Dobrando o maior triângulo equilátero dentro de um quadrado



Fonte: Thomas Hull, 2013.

O que precisamos é encontrar o ângulo de 15° , pegando a imagem da esquerda acima observamos que se forma um triângulo equilátero como representado no início do problema, depois das marcações feita é necessário dobrar um novo triângulo equilátero no lado do quadrado perpendicular a base do triângulo já marcado, dessa forma as mediatrizes das bases dos dois triângulos são perpendiculares. Agora basta dobrar dois lados do quadrado sobre um lado de cada triângulo para se ter uma bissetriz que dividi o ângulo de 30° em duas partes iguais 15° , tais dobras devem partir do mesmo vértice, dessa maneira temos $\theta = 15^\circ$. Com isso construímos o maior triângulo equilátero inscrito no quadrado.

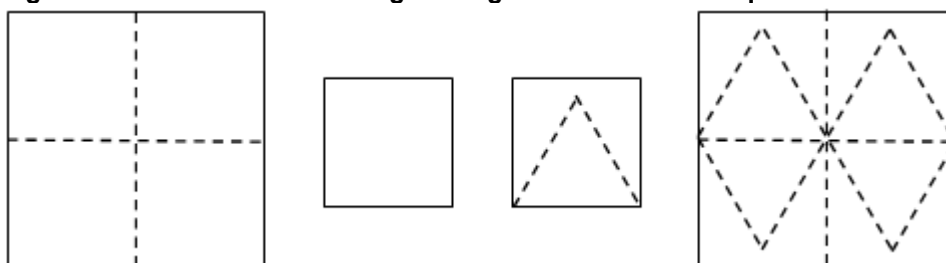
Inscrevendo o hexágono máximo em um quadrado

Nesta atividade, será apresentada a construção, por meio de dobraduras

em papel, de um hexágono regular qualquer a partir de uma folha quadrada. Em seguida, utilizando a mesma folha, será realizada a construção do hexágono regular de maior área possível que pode ser inscrito nessa superfície. Vale destacar que o hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros congruentes, característica que será explorada nas construções propostas. Essa decomposição geométrica não apenas facilita a visualização e a execução das dobraduras, como também permite uma análise mais precisa da distribuição da área na folha quadrada e da eficiência da construção em termos de aproveitamento do espaço disponível.

Para iniciar começaremos fazendo as dobraduras do hexágono regular qualquer, utilizando a folha quadrada devemos dobrá-la ao meio duas vezes, formando quatro novos quadrados de lado igual a metade do quadrado inicial. Após esse passo devemos construir o triângulo equilátero qualquer, como visto anteriormente, para após a abertura do papel quadrado possamos obter quatro triângulos equiláteros. É necessário que um dos vértices do triângulo esteja no centro do quadrado maior.

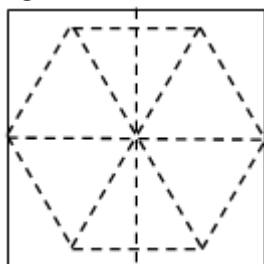
Figura 42 – Dobrando um hexágono regular dentro de um quadrado



Fonte: Autoria própria, 2025.

De posse das dobraduras acima, precisamos somente fechar o hexágono.

Figura 43 – Dobrando um hexágono regular dentro de um quadrado (continuação)



Fonte: Autoria própria, 2025.

Para a construção de um hexágono regular máximo não utilizaremos um triângulo equilátero qualquer, precisamos utilizar o maior triângulo equilátero que se pode construir dentro do quadrado. Observando a imagem abaixo, podemos perceber que um quarto do quadrado corresponde exatamente ao padrão de vinco do triângulo equilátero máximo. Portanto, o método de dobradura para o triângulo pode ser modificado para produzir um hexágono máximo. A figura mais à direita ilustra esse método de forma resumida.

Figura 44 – Dobrando o maior hexágono regular dentro de um quadrado

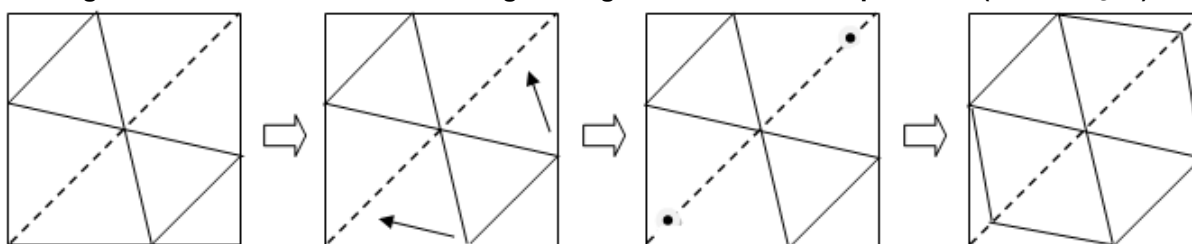


Fonte: Thomas Hull, 2013.

A imagem a direita representa as marcações necessária para a construção do triângulo equilátero de área máxima.

Depois das marcações feitas devemos abrir a folha quadrada e seguir os passos abaixo.

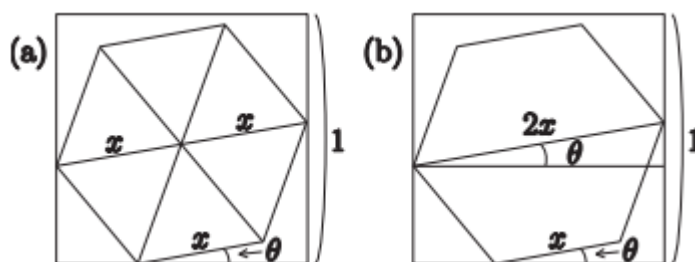
Figura 45 – Dobrando o maior hexágono regular dentro de um quadrado (continuação)



Fonte: Autoria própria, 2025.

As figuras a seguir mostram um caminho para provar o caso do hexágono máximo.

Figura 46 – Prova do maior hexágono regular dentro de um quadrado



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Seja θ o ângulo que o hexágono faz com a borda inferior do quadrado (cujo lado tem comprimento 1), e seja x o comprimento do lado do hexágono. Como o hexágono é composto por seis triângulos equiláteros, é fácil calcular sua área:

$$A = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$$

Nosso objetivo é maximizar essa expressão em relação a θ . A Figura (b) ilustra como fazer isso. O diâmetro do hexágono é $2x$, e, assumindo que dois vértices opostos do hexágono toquem os lados esquerdo e direito do quadrado, podemos formar um triângulo retângulo a partir de um desses vértices (o direito, na figura), cuja base tem comprimento 1 e cuja hipotenusa é uma das diagonais do hexágono (comprimento $2x$). Como a base desse triângulo é paralela à base do quadrado e a hipotenusa é paralela à base do hexágono, sabemos que o ângulo da base desse triângulo é θ . Assim, temos:

$$\cos \theta = \frac{1}{2x}, \text{ ou } x = \frac{\sec \theta}{2}$$

Portanto, a área do hexágono é:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sec \theta}{2} \right)^2$$

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sec^2 \theta}{4}$$

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \sec^2 \theta$$

Para maximizar essa expressão, precisamos determinar o intervalo de θ a ser considerado. A simetria do hexágono nos mostra que o intervalo relevante é $0^\circ \leq \theta \leq 15^\circ$. Assim como no caso do triângulo, o maior valor do intervalo, $\theta = 15^\circ$,

fornece a maior área. Isso faz com que uma das diagonais do hexágono fique alinhada com uma diagonal do quadrado.

3.2 Trigonometria com origami

Problema

Como seria possível, a partir de simples dobraduras em triângulos retângulos de papel, descobrir relações trigonométricas mais complexas, como as fórmulas do arco duplo e do arco metade? Seria viável deduzir essas expressões apenas com base em construções geométricas e observações visuais? Em seguida, encontre os valores para seno, cosseno e tangente dos ângulos de 15° e $22,5^\circ$.

Observação:

A partir da dobragem de triângulos $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ e $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, é possível descobrir expressões exatas para os comprimentos dos lados de triângulos $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ e $22,5^\circ - 67,5^\circ - 90^\circ$, respectivamente. Com isso, também se obtêm valores exatos para seno, cosseno e tangente dos ângulos de 15° , 75° , $22,5^\circ$ e $67,5^\circ$.

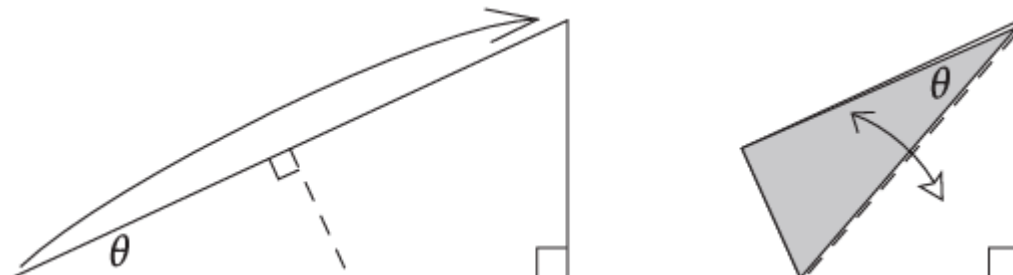
O problema utiliza conhecimentos fundamentais sobre seno, cosseno e tangente (como a relação entre catetos e hipotenusa), a compreensão de triângulos semelhantes e a capacidade de manipular raízes quadradas algebricamente, como a multiplicação pelo conjugado de um radical.

Solução do Problema

Recomenda-se utilizar um triângulo retângulo de papel para dobrar e fazer anotações durante esta atividade. Uma maneira fácil de gerar tais triângulos rapidamente é pegar uma folha padrão de papel A4 e cortá-la ao longo de uma das diagonais do retângulo para criar dois triângulos retângulos. Os ângulos de tal triângulo não são óbvios, o que o torna um bom triângulo geral para se experimentar.

A seguir, mostra-se um exemplo do seu triângulo dobrado. Primeiro, deve-se notar, conforme indicado no material, que o ângulo θ é duplicado quando dobrado para o topo do triângulo.

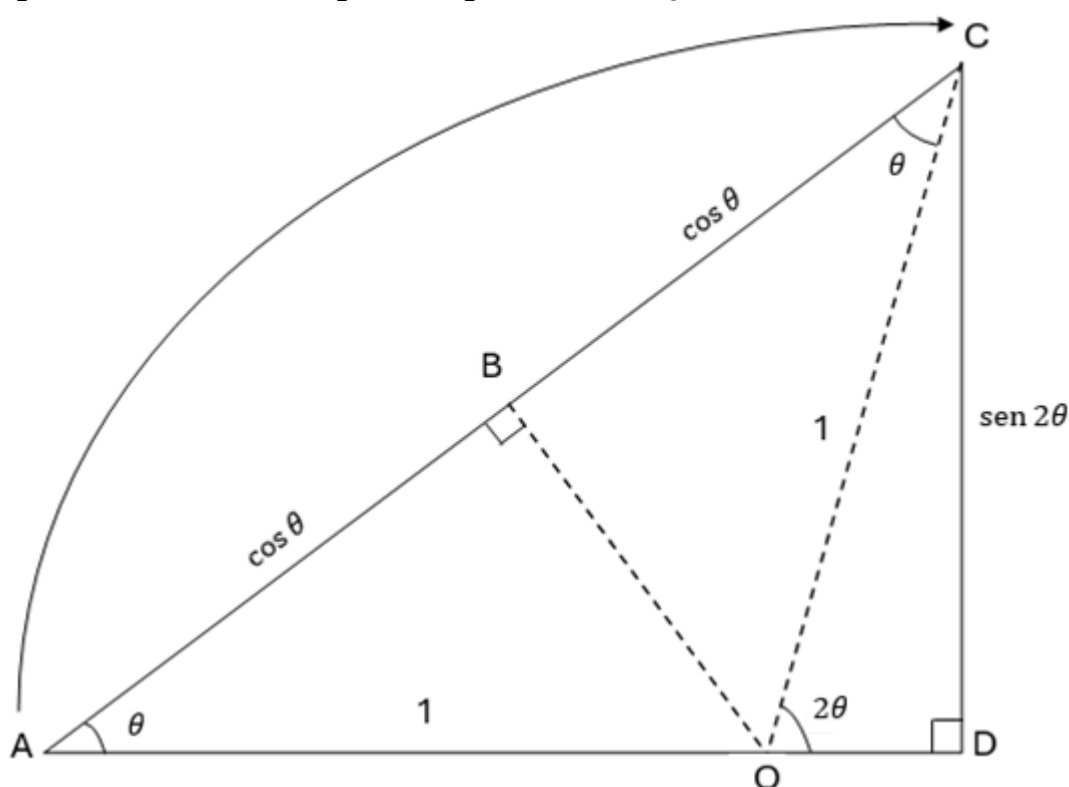
Figura 47 – Dobras no triângulo retângulo



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Assim, ΔAOC é um triângulo isósceles e BO é a mediatriz de AC . Olhando para o triângulo retângulo ΔABO , isso imediatamente nos dá que $\cos \theta = \frac{AB}{1}$, e então $AB = BC = \cos \theta$.

Figura 48 – Dobras no triângulo retângulo e classificação dos lados



Fonte: Autoria própria, 2025.

Seguindo os ângulos ao redor do triângulo, notamos que $\angle COD = 2\theta$. Ou seja, $\angle CAO = \theta$ como observado no triângulo ΔACO e o ângulo $\angle OCA = \theta$, pois o triângulo ΔACO é isósceles de base AC . Pelo Teorema do ângulo externo, temos que o ângulo $\angle COD = 2\theta$, pois representa a soma dos dois ângulos do triângulo não

adjacentes a ele. Portanto, ao olhar para o triângulo retângulo $\triangle OCD$, temos que $CD = \text{sen } 2\theta$ e $OD = \text{cos } 2\theta$. Assim, o triângulo $\triangle ACD$ nos diz que

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{sen } 2\theta}{\text{cos } \theta + \text{cos } \theta} \Rightarrow \text{sen } 2\theta = 2 \text{sen } \theta \text{ cos } \theta,$$

que é a fórmula de ângulo duplo para o seno.

Observando novamente o triângulo $\triangle ACD$, temos que

$$\text{cos } \theta = \frac{1 + \text{cos } 2\theta}{\text{cos } \theta + \text{cos } \theta} \Rightarrow \text{cos } 2\theta = 2 \text{cos}^2 \theta - 1,$$

que é a fórmula de ângulo duplo para o cosseno. (Embora a forma alternativa $\text{cos } 2\theta = \text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$ também possa ser obtida usando $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$.)

Em posse da fórmula $\text{cos } 2\theta = 2\text{cos}^2 \theta - 1$, encontramos

$$\begin{aligned} \text{cos } 2\theta &= 2\text{cos}^2 \theta - 1 \Rightarrow & \text{cos } 2\theta &= -2\text{sen}^2 \theta + 1 \Rightarrow \\ \text{cos } 2\theta + 1 &= 2\text{cos}^2 \theta \Rightarrow & 2\text{sen}^2 \theta &= 1 - \text{cos } 2\theta \Rightarrow \\ \text{cos}^2 \theta &= \frac{\text{cos } 2\theta + 1}{2} \Rightarrow & \text{sen}^2 \theta &= \frac{1 - \text{cos } 2\theta}{2} \Rightarrow \\ \text{cos } \theta &= \pm \sqrt{\frac{\text{cos } 2\theta + 1}{2}} \blacksquare & \text{sen } \theta &= \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } 2\theta}{2}} \blacksquare \end{aligned}$$

Descobrimos os valores para seno, cosseno e tangente dos ângulos de 15° e $22,5^\circ$

É mais difícil preparar peças de triângulos de papel para essa atividade, pois é necessário que eles sejam triângulos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ e triângulos retângulos isósceles. A maneira mais fácil de fazer isso é dobrar triângulos equiláteros a partir de um quadrado ou retângulo (consulte a atividade Dobrando Triângulos Equiláteros em um Quadrado) e, em seguida, cortá-los ao meio; triângulos retângulos de 45° são fáceis de fazer cortando um quadrado ao meio ao longo de uma diagonal.

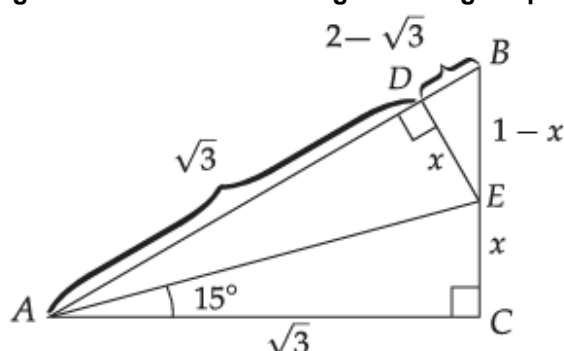
As funções trigonométricas dos ângulos podem ser encontradas de forma exata, enquanto, para qualquer outro triângulo, é sempre necessário recorrer à calculadora. Isso nos dá uma visão de como as funções trigonométricas de outros triângulos, não convencionais, ainda podem ser calculadas exatamente.

De fato, durante muitos anos, até mesmo os sistemas avançados de álgebra computacional não conseguiam fornecer fórmulas exatas para as funções trigonométricas dos ângulos vistos nesta atividade.

Para o triângulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ do material, a primeira tarefa é

determinar o comprimento x , reproduzido na figura abaixo.

Figura 49 – Dobras no triângulo retângulo para obter o ângulo de 15°



Fonte: Thomas Hull, 2013.

A chave está no fato de que $\triangle EDB$ é semelhante a $\triangle ABC$, pois ambos são triângulos retângulos e compartilham o ângulo em B . Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \sqrt{3} - x\sqrt{3} \\ &\Rightarrow 2x + x\sqrt{3} = \sqrt{3} \\ &\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{1} \\ &\Rightarrow x = 2\sqrt{3} - 3 \blacksquare \end{aligned}$$

Assim, nosso triângulo $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ tem o cateto maior $\sqrt{3}$, o cateto menor $2\sqrt{3} - 3$, e a hipotenusa $2\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$ como mostra abaixo.

$$\begin{aligned} H^2 &= (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} - 3)^2 \Rightarrow H^2 = 3 + 12 - 12\sqrt{3} + 9 \\ &\Rightarrow H^2 = 24 - 12\sqrt{3} \\ &\Rightarrow H = \sqrt{24 - 12\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow H = 2\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} \blacksquare \end{aligned}$$

Esses valores são um pouco complicados, e normalizar o cateto menor para 1 parece ser uma prática comum nesse tipo de problema. Fazendo isso, obtemos o cateto maior com comprimento $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2} = 2 + \sqrt{3}$ após racionalizar o denominador.

$$\begin{aligned}\frac{M}{1} &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} \Rightarrow M = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} \cdot \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}+3} \\ &\Rightarrow M = \frac{6+3\sqrt{3}}{12-9} \\ &\Rightarrow M = 2 + \sqrt{3} \blacksquare\end{aligned}$$

Para encontrar a hipotenusa vamos utilizar o Teorema de Pitágoras, assim obtemos uma hipotenusa de comprimento $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}(H')^2 &= (1)^2 + (2 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow (H')^2 = 1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\ &\Rightarrow (H')^2 = 8 + 4\sqrt{3} \\ &\Rightarrow H' = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow H' = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \blacksquare\end{aligned}$$

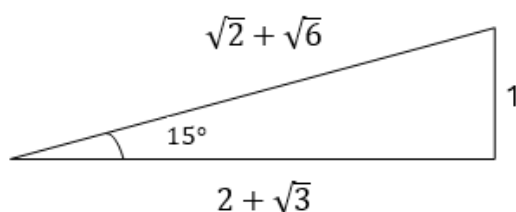
Isso não é tão ruim, mas, surpreendentemente, isso é igual a $\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

Chegar a essa conclusão é bem complicado, e não é provável que os alunos consigam simplificar a raiz quadrada de raiz até esse ponto. Então, fique à vontade para aceitar uma solução final de $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ para a hipotenusa! Mas, se utilizarmos os produtos notáveis iremos encontrar

$$\begin{aligned}H' &= 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow H' = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow H' = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2} \\ &\Rightarrow H' = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2} \\ &\Rightarrow H' = \sqrt{2} + \sqrt{6} \blacksquare\end{aligned}$$

Sim, isso não é o tipo de coisa que se descobre sem experiência em tentar fatorar radicais quadráticos em quadrados perfeitos. De qualquer forma, obtemos os seguintes "comprimentos canônicos" para um triângulo $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$:

Figura 50 – Triângulo retângulo de ângulo 15°



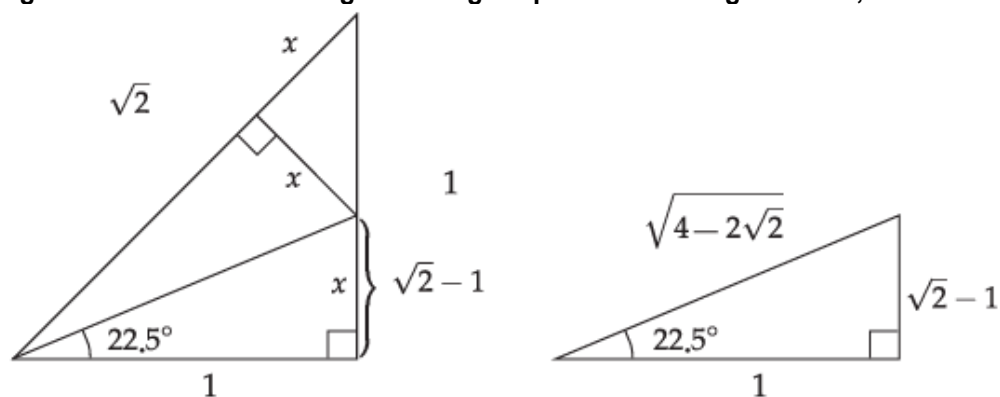
Fonte: Autoria própria, 2025.

Isso nos dá (novamente, após racionalizar os denominadores)

- $\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2-6} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$
- $\operatorname{cos} 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}+\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2-6} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{-4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$
- $\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2 - \sqrt{3}.$

A mesma abordagem funciona para o caso do triângulo retângulo de 45°, e é ainda mais fácil. A figura abaixo mostra que o comprimento x se repete três vezes no triângulo dobrado, e assim a hipotenusa nos dá $x = \sqrt{2} - 1$, sem necessidade de usar triângulos semelhantes.

Figura 51 – Dobras no triângulo retângulo para obter o ângulo de 22,5°



Fonte: Thomas Hull, 2013.

$$\begin{aligned} (1-x)^2 &= x^2 + x^2 \Rightarrow \\ 1 - 2x + x^2 &= x^2 + x^2 \Rightarrow \\ x^2 + 2x - 1 &= 0 \Rightarrow \\ x &= \sqrt{2} - 1 \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^2 &= 1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 \Rightarrow \\ h^2 &= 1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 \Rightarrow \\ h^2 &= 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \\ h &= \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \blacksquare \end{aligned}$$

A figura acima mostra os "comprimentos canônicos" para um triângulo $22,5^\circ - 67,5^\circ - 90^\circ$. Infelizmente, neste caso, a hipotenusa não simplifica bem para eliminar a raiz quadrada aninhada. Como resultado, as funções trigonométricas exatas para $22,5^\circ$ não são especialmente simples:

- $\operatorname{sen} 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{8+4\sqrt{2}-4\sqrt{2}-4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$
- $\operatorname{cos} 22,5^\circ = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{8+4\sqrt{2}-4\sqrt{2}-4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};$
- $\operatorname{tg} 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2} - 1.$

Poderíamos normalizar o triângulo para que o cateto mais curto tenha comprimento 1, mas isso não melhora a situação.

3.3 O origami pode trissectar um ângulo?

Problema

Investigue a possibilidade de trissecar qualquer ângulo agudo por meio de dobraduras. Caso isso seja possível, apresente uma demonstração; caso contrário, elabore uma refutação fundamentada. Apresente também um método de fazer a duplicação do cubo.

Observação

O cerne desta atividade reside em conceitos fundamentais de geometria. No entanto, a possibilidade de que o origami permita a trissecção de ângulos tem implicações significativas. Em particular, sugere-se que o origami constitui um método de construção mais poderoso do que o uso exclusivo de régua e compasso. Isso implica que o conjunto de números construíveis por meio do origami é mais extenso do que o menor subcorpo dos números reais fechado sob extração de raízes quadradas.

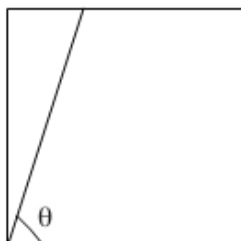
Essa atividade é especialmente envolvente quando inserida no contexto da discussão sobre os problemas clássicos da matemática grega, como a trissecção de um ângulo e a duplicação do cubo.

Solução do Problema

O procedimento apresentado a seguir demonstra como é possível trissecionar um ângulo agudo por meio da dobradura de papel.

- Passo 1: Pegue uma folha quadrada de papel e realize uma dobra partindo do canto inferior esquerdo, formando um ângulo θ com a base.

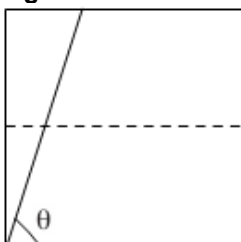
Figura 52 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 1



Fonte: Autoria própria, 2025.

- Passo 2: Em seguida, dobre o papel ao meio na direção vertical (de cima para baixo) e depois desdobre.

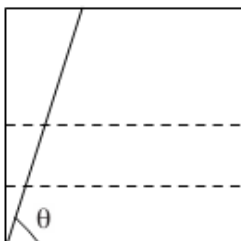
Figura 53 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 2



Fonte: Autoria própria, 2025.

- Passo 3: Após isso, dobre novamente ao longo da linha de vinco correspondente a $1/4$ da altura do papel.

Figura 54 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 3

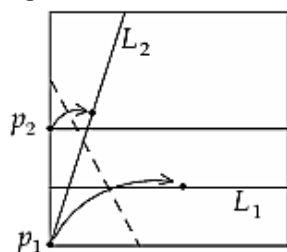


Fonte: Autoria própria, 2025.

- Passo 4: Realize uma nova dobra de modo que o ponto P_1 seja posicionado sobre a linha L_1 , e simultaneamente, o ponto P_2 seja posicionado sobre a linha L_2 , ou seja utilize o axioma 6. Para isso, será necessário curvar o papel, alinhar os pontos

e, em seguida, pressionar para achatar a superfície.

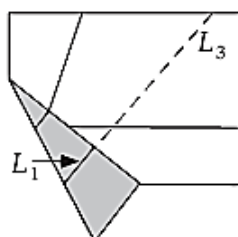
Figura 55 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 4



Fonte: Thomas Hull, 2013.

- Passo 5: Por fim, mantendo a aba dobrada, estenda a linha de vinco L_1 , conforme indicado na imagem abaixo. Denominamos essa nova linha de vinco como L_3 .

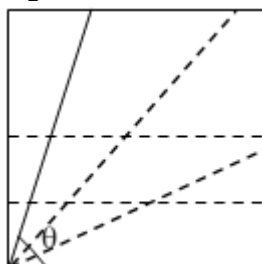
Figura 56 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 5



Fonte: Thomas Hull, 2013.

- Passo 6: Após a realização das etapas descritas anteriormente, ao desdobrar completamente o papel e estender a linha L_3 até alcançar o ponto P_1 , pode-se dobrar a borda inferior do papel até L_3 . Essa operação bissecta o ângulo formado entre L_3 e a base do quadrado. Assim, dependendo da precisão das dobras realizadas, torna-se evidente que o ângulo θ foi trisseccionado.

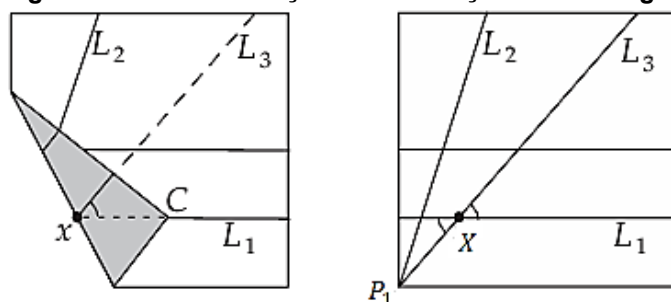
Figura 57 – Trissectando um ângulo agudo - Parte 6



Fonte: Autoria própria, 2025.

Podemos nos perguntar, se a dobra L_3 sempre vai cruzar P_1 , mas a figura apresentada abaixo ilustra porque P_1 pertence à linha L_3 . Se designarmos X como o ponto extremo esquerdo do segmento de L_3 formado pela dobradura, observamos que o segmento P_1X corresponde a XC quando o papel está dobrado.

Figura 58 – Demonstração da trisseção de um ângulo agudo - Parte 1

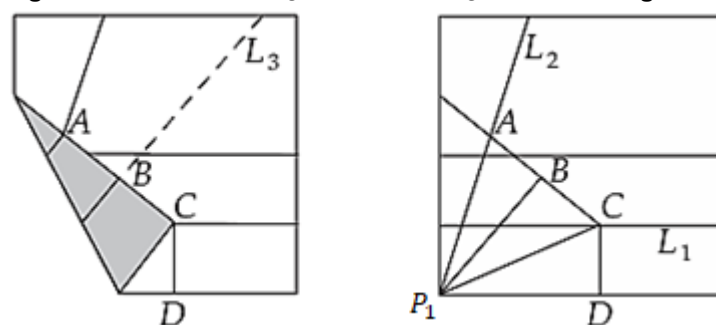


Fonte: Thomas Hull, 2013.

Além disso, o ângulo entre XC e L_3 , no papel dobrado, é idêntico aos ângulos adjacentes ao ponto X no papel desdobrado. Como os ângulos opostos pelo vértice são congruentes, conclui-se que P_1X forma uma linha reta com L_3 .

Há diversas abordagens para demonstrar que esse método de dobradura realmente trissecciona o ângulo. A mais direta baseia-se na construção geométrica apresentada.

Figura 59 – Demonstração da trisseção de um ângulo agudo - Parte 2



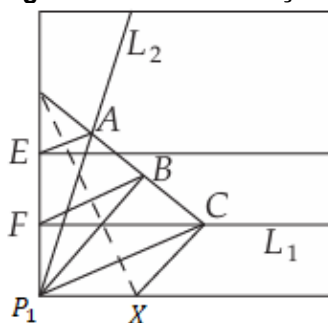
Fonte: Thomas Hull, 2013.

Sejam os pontos A , B e C as imagens dos três pontos ao longo do lado esquerdo do papel após a realização da dobra. Além disso, traçamos uma perpendicular de C até encontrar a base do quadrado no ponto D . Pela definição dessas construções geométricas, verifica-se que $AB = BC = CD$.

Ao analisar o papel desdobrado, nota-se também que P_1B é perpendicular a AC . Dessa forma, os triângulos ΔABP_1 , ΔBCP_1 e ΔCDP_1 são triângulos retângulos congruentes. Consequentemente, o ângulo θ foi trissecionado em P_1 .

Essa técnica de trissecção do ângulo pode ser encontrada em diversas referências online, embora a maioria delas utilize uma demonstração alternativa baseada na seguinte construção geométrica.

Figura 60 – Demonstração alternativa da trissecção do ângulo



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Nesta abordagem, consideram-se os pontos A , B e C , como definidos anteriormente, e adicionam-se os pontos P_1 , F e E na região esquerda do papel. Esses dois conjuntos de pontos, assim como as linhas que os conectam, são simétricos em relação à linha de dobra central.

Dessa simetria, conclui-se que $AB = BC$ e que P_1B é perpendicular a AC . Isso permite demonstrar que o triângulo ΔP_1AC é isósceles, como o $\angle XP_1F$ é reto temos que o $\angle XCB$ também é reto por construção e dessa forma o $\angle CBP_1$ é reto, pois os segmentos XC e P_1B são paralelos, assim o segmento P_1B faz papel de altura e mediana do triângulo ΔP_1AC , pelo caso de congruência de triângulo LAL temos que os segmentos P_1A e P_1C são iguais, nos mostrando que o triângulo ΔP_1AC é isósceles.

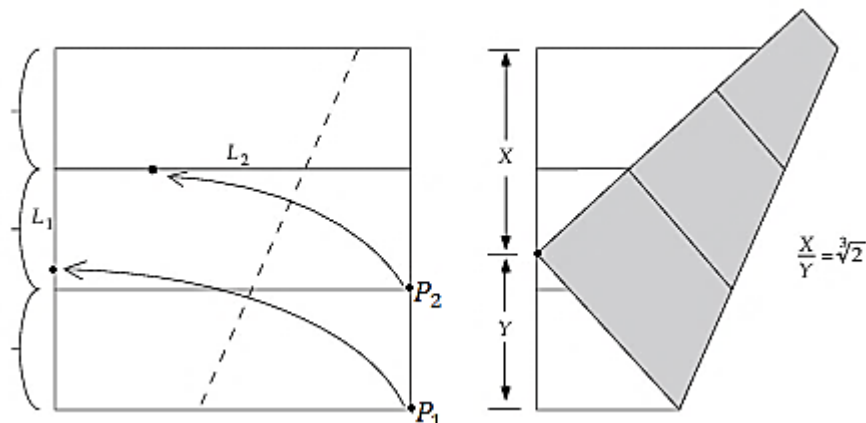
Como consequência, verifica-se que $\angle AP_1B = \angle BP_1C$, pois o segmento P_1B também faz papel de bissetriz do $\angle AP_1C$. Além disso, como L_1 é paralela à borda inferior do papel, tem-se que $\angle FCP_1 = \angle XP_1C$, e como $\angle BP_1C = \angle FCP_1$ por construção, temos que $\angle XP_1C = \angle BP_1C = \angle AP_1B$. Assim, confirma-se que o ângulo θ foi corretamente trissecionado.

Duplicação do Cubo e Origami

Esse problema consiste em construir um cubo cujo volume seja o dobro

de um cubo dado, o que equivale a construir o valor $\sqrt[3]{2}$. Embora seja impossível realizar essa construção com régua e compasso, o origami oferece uma solução.

Figura 61 – Duplicação do cubo - Parte 1

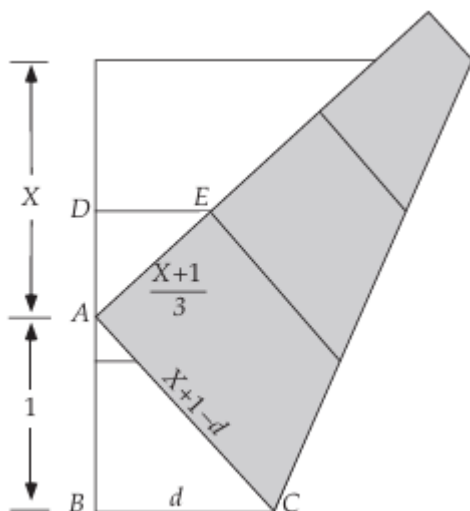


Fonte: Thomas Hull, 2013.

O método a seguir foi desenvolvido por Peter Messer [Mes86]. O primeiro passo é dobrar uma folha quadrada de papel em três partes iguais, se sentir dificuldades em fazer essa divisão ao final do problema irei explicar como dividir um comprimento em n partes iguais. Em seguida, utilizando os pontos e linhas conforme rotulados na figura anterior, realiza-se a "movimentação" do origami, dobrando P_1 sobre L_1 e P_2 sobre L_2 simultaneamente. A imagem de P_1 sob essa dobra irá dividir o lado esquerdo do papel em dois segmentos, cuja razão será $\sqrt[3]{2}$.

Provar que essa construção funciona é um exercício desafiador de geometria euclidiana. Embora as etapas não sejam particularmente difíceis, os elementos desse problema têm uma tendência a se complicar, gerando equações excessivamente complexas se não forem seguidas na sequência correta. Um truque útil é assumir que $Y = 1$, de modo que o lado do quadrado será $X + 1$. Com isso, a única coisa que precisamos provar é que $X = \sqrt[3]{2}$.

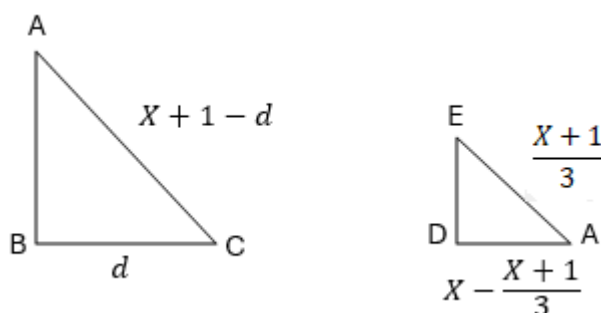
Figura 62 – Duplicação do cubo - Parte 2



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Rotule os elementos conforme mostrado na figura anterior. Podemos usar o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle ABC$ para obter que $d = (X^2 + 2X)/(2X + 2)$. Além disso, a medida de AD será dada por $X - (X + 1)/3 = (2X - 1)/3$.

Figura 63 – Triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ semelhantes



Fonte: Autoria própria, 2025.

Agora, como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são semelhantes, temos a seguinte relação:

$$\frac{d}{X+1-d} = \frac{X - \frac{X+1}{3}}{\frac{X+1}{3}} \Rightarrow \frac{d}{X+1-d} = \frac{2X-1}{X+1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\frac{X^2 + 2X}{2X + 2}}{X + 1 - \frac{X^2 + 2X}{2X + 2}} = \frac{2X - 1}{X + 1} \\ &\Rightarrow \frac{X^2 + 2X}{X^2 + 2X + 2} = \frac{2X - 1}{X + 1} \\ &\Rightarrow X^3 + 3X^2 + 2X = 2X^3 + 3X^2 + 2X - 2 \\ &\Rightarrow 2X^3 - X^3 = 2 \\ &\Rightarrow X^3 = 2 \blacksquare \end{aligned}$$

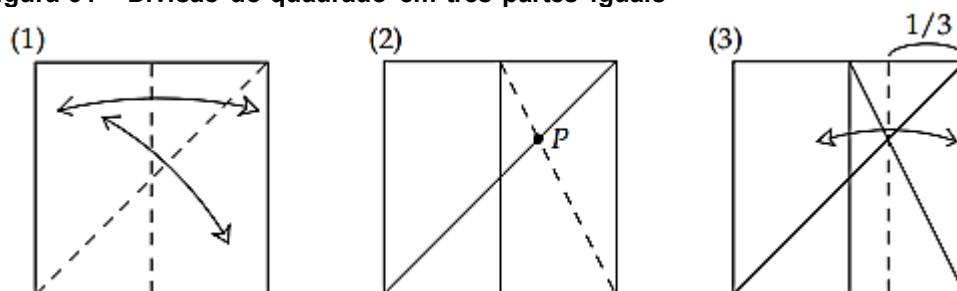
E, como esperado, isso nos leva à conclusão desejada.

Dividindo um comprimento em n partes iguais

Vamos aprender um método para dividir o lado de um pedaço quadrado de papel em partes iguais, como terços, quintos ou outras divisões ímpares, de maneira exata, sem depender de aproximações.

A imagem abaixo demonstra como criar uma marcação que permite dobrar o lado do papel em terços exatos.

Figura 64 – Divisão do quadrado em três partes iguais

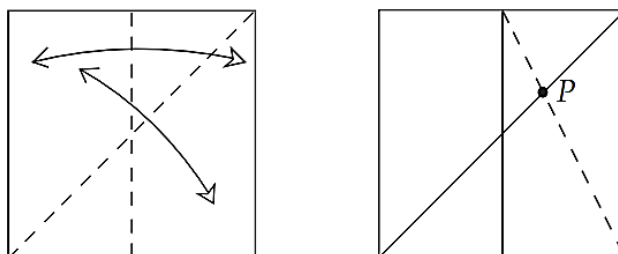


Fonte: Thomas Hull, 2013.

A partir dessa descoberta, somos encorajados a generalizar o método para outras divisões, promovendo a ampliação de habilidades e raciocínio matemático aplicado ao origami.

Abaixo estão algumas instruções de origami. Pegue um quadrado e faça vincos dobrando-o ao meio verticalmente e dobrando uma diagonal, como mostrado. Em seguida, faça um vinco que conecte o ponto médio da borda superior e o canto inferior direito.

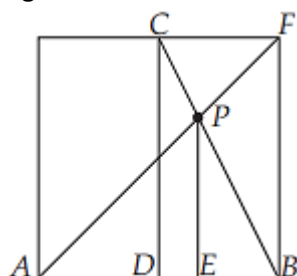
Figura 65 – Dividindo o quadrado em 3 partes iguais - Parte 1



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Para encontrar as coordenadas do ponto P , onde as dobras diagonais se encontram, suponha que o canto inferior esquerdo seja a origem e que o quadrado tenha comprimento de lado 1. Considere um quadrado de comprimento lateral igual a 1 e a rotulagem indicada na figura abaixo. Denotando as coordenadas do ponto P como (x, x) , temos que o segmento AE possui comprimento x , e EB possui comprimento $(1 - x)$. Além disso, o comprimento de EP também é x .

Figura 66 – Dividindo o quadrado em 3 partes iguais - Parte 2



Fonte: Thomas Hull, 2013

Observe que os triângulos $\triangle BDC$ e $\triangle BEP$ são semelhantes. A relação entre os lados correspondentes desses triângulos pode ser expressa como:

$$\frac{|CD|}{|PE|} = \frac{|BD|}{|BE|}.$$

Sendo assim, temos:

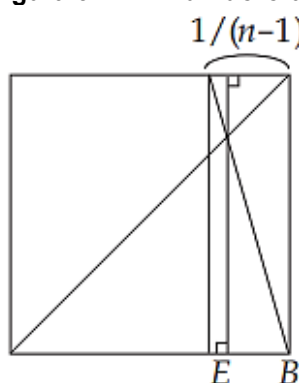
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{\frac{1}{2}}{1-x} \Rightarrow \frac{x}{2} = 1-x \\ &\Rightarrow x = 2 - 2x \\ &\Rightarrow 3x = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \blacksquare$$

Essa relação também pode ser demonstrada utilizando os triângulos semelhantes ΔABP e ΔCPF . Dessa forma encontramos o segmento EB igual a um terço, como queríamos a pouco.

A figura abaixo mostra como generalizar o método para dobrar o lado de um quadrado em n divisões iguais, onde n é ímpar. Em vez de usar a linha vertical $1/2$, faça uma linha vertical em $x = \frac{n-2}{n-1}$ ou $x = \frac{1}{n-1}$ (longe do lado direito).

Figura 67 – Dividindo o quadrado em n partes iguais, onde n é ímpar



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Encontrar essa linha não deve ser muito difícil, já que $n - 1$ é um número par (já que n é ímpar). Se $n - 1$ for igual a algo como 6, então você teria de encontrar um ponto $\frac{1}{3}$ primeiro e então dobrá-lo ao meio para obter uma marca de $\frac{1}{6}$. Então, em certo sentido, esse método é recursivo.)

As mesmas abordagens anteriormente darão que o ponto em que os dois vincos diagonais neste caso geral se encontram é $(\frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n})$, que pode então ser usado para dobrar o papel em n partes iguais.

Essa abordagem permite estender o método para qualquer divisão ímpar, promovendo a aplicação prática de conceitos geométricos e analíticos no contexto do origami.

4. ENSINANDO AS CÔNICAS VIA DOBRADURA

As seções cônicas sempre ocuparam um papel de destaque na história da matemática, não apenas por sua importância teórica, mas também pelas diversas aplicações em diferentes áreas do conhecimento. No entanto, seu estudo costuma se restringir a abordagens algébricas e geométricas formais, o que, muitas vezes, dificulta o interesse e a compreensão por parte dos estudantes. Pensando nisso, este capítulo propõe uma abordagem alternativa e dinâmica para a introdução das cônicas, buscando despertar a curiosidade e promover a construção de conceitos de forma visual e interativa.

Para isso, será apresentada inicialmente a construção de uma parábola por meio de dobraduras em papel, atividade que permite ao estudante visualizar a formação dessa curva a partir de procedimentos simples e acessíveis. Em seguida, utilizando o software GeoGebra, será feita a construção dinâmica dessa mesma parábola, além das construções da elipse e da hipérbole, proporcionando uma leitura geométrica mais ampla e exploratória dessas curvas.

Além de estimular o interesse pelas cônicas, essa proposta didática possibilita o trabalho integrado de conteúdos fundamentais, como os pontos notáveis das cônicas, a representação de suas equações algébricas, conceitos de geometria analítica e a resolução de equações quadráticas. Assim, ao combinar manipulação concreta e recursos digitais, este capítulo pretende contribuir para um ensino mais significativo, favorecendo a compreensão dos conceitos matemáticos e valorizando a beleza e a aplicação das cônicas no estudo da geometria.

4.1 Dobrando uma parábola

Problema

Um dos movimentos básicos do origami é dobrar um ponto até uma linha repetidamente, gerando vincos que parecem ser tangentes a uma parábola, demonstre matematicamente que a curva formada é, de fato, uma parábola. Em seguida faça a construção da parábola utilizando um software de modelagem matemática, de preferência o Geogebra.

Observação:

Embora essa atividade seja, essencialmente, um exercício de construção

geométrica, servindo como uma introdução ao estudo das possibilidades de construções matemáticas via origami em comparação com o uso de régua e compasso, ela abrange diversos outros conceitos matemáticos. Durante a atividade, os estudantes reforçam propriedades fundamentais das parábolas.

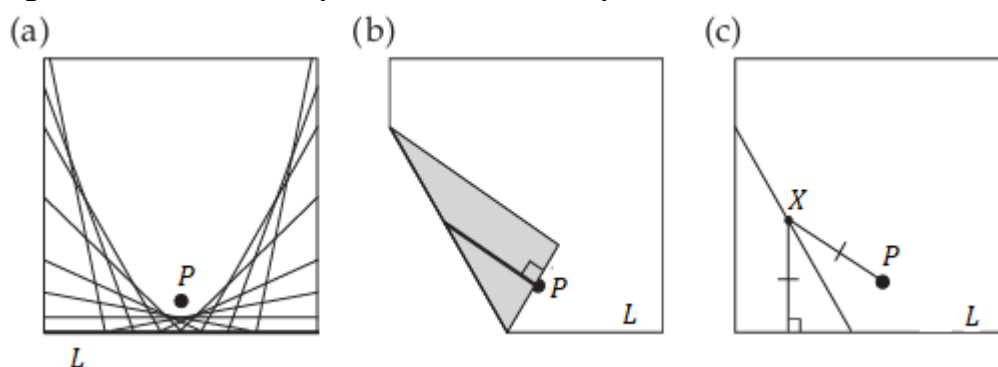
Além disso, a formulação de uma prova rigorosa requer a modelagem detalhada do processo de dobradura, tornando esta atividade um excelente exemplo de modelagem geométrica. Uma abordagem mais elegante para a demonstração pode ser realizada por meio do conceito de invólucros de curvas, um tópico frequentemente ministrado em cursos de geometria diferencial.

Outro aspecto relevante da atividade é a ilustração da conexão entre geometria visual e resolução de equações algébricas. Um dos pontos principais da atividade é estabelecer a equivalência entre a realização da dobra no origami e a resolução de uma equação quadrática. Esse vínculo entre geometria e álgebra é um conceito fundamental na matemática avançada.

Solução do Problema

A história desse exercício de dobragem remonta a um passado distante. A referência mais antiga conhecida está no livro *Geometric Exercises in Paper Folding*, de T. Sundara Row, publicado originalmente na Índia em 1893. Desde então, inúmeras referências sobre a construção de uma parábola por meio da dobragem de papel foram mencionadas na literatura de ensino de matemática. No entanto, é sempre surpreendente para estudantes e professores que, ao dobrar repetidamente um ponto P sobre uma linha L , as linhas de vinco parecem ser tangentes a uma parábola com foco P e diretriz L .

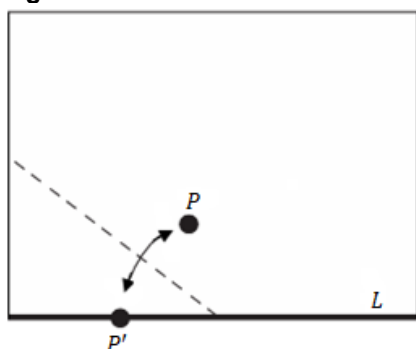
Figura 68 – Dobra de um ponto até uma linha repetidamente



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Utilizando as definições de foco e diretriz de uma parábola, conseguiremos construir uma prova conceitual. A ideia central é que, ao dobrar P sobre L , parte do papel é sobreposta, trazendo uma parte de L para coincidir com P . Se traçarmos uma linha espessa sobre essa região dobrada, perpendicular à imagem de L , essa linha percorrerá toda a borda dobrada do papel. Ao desdobrar o papel, essa marca atravessará o vinco, demonstrando que o ponto X , onde a linha do marcador encontrou a linha de vinco, é equidistante do ponto P e da linha L . Como, por definição, uma parábola é o conjunto de pontos equidistantes de um foco e de uma diretriz, segue que X pertence a parábola. Mas adiante iremos mostrar que a linha de vinco é tangente à parábola de foco P e diretriz L , no ponto X . Veremos que como a escolha do ponto de dobragem é arbitrária, essa propriedade é válida para todas as linhas de vinco.

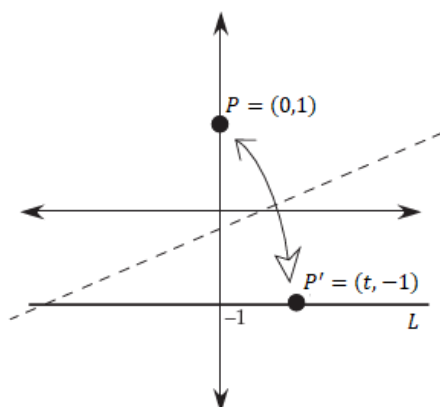
Figura 69 – Dobrando P sobre P'



Fonte: Autoria própria, 2025.

Agora, buscaremos a equação da curva obtida.

Figura 70 – Ponto P e P' no Plano Cartesiano



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Para isso, vamos definir as coordenadas dos elementos no plano cartesiano. Considere o ponto $P = (0,1)$ e a reta L definida por $y = -1$. Agora, suponha que P seja dobrado sobre L , resultando no ponto $P' = (t, -1)$, onde t pode assumir qualquer valor real.

Quando dobramos P sobre P' , a linha de vinco formada será o eixo mediador do segmento PP' . Isso decorre diretamente do fato geométrico fundamental de que o conjunto de pontos equidistantes de dois pontos dados é o eixo mediador do segmento que os une. Como a dobra coloca um lado do papel sobre o outro e P vai para P' , todos os pontos da linha de vinco serão equidistantes de P e P' .

A inclinação do segmento PP' é dada por $-2/t$, logo a inclinação da linha de vinco é $t/2$. Pois o segmento PP' e a linha de vinco são perpendiculares. Observe:

- A inclinação do segmento PP' é dada por $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-1}{t-0} = -\frac{2}{t}$;
- Se duas retas são perpendiculares, $m_r \cdot m_s = -1$;
- Temos a inclinação da linha de vinco $m' \cdot \left(-\frac{2}{t}\right) = -1 \Rightarrow m' = \frac{t}{2}$.

Sendo assim vamos determinar a equação da linha de vinco em termos das variáveis x e y , incluindo o parâmetro t .

O ponto médio do segmento PP' é $(t/2, 0)$, que pertence à linha de vinco. Assim, a equação da linha de vinco ao dobrarmos $P = (0,1)$ sobre $P' = (t, -1)$ é:

$$y = \frac{t}{2} \left(x - \frac{t}{2} \right) \Rightarrow y = \frac{t}{2} x - \frac{t^2}{4}.$$

Vamos mostrar que as linhas de vinco são, de fato, tangentes a uma curva no ponto Q . Suponha que tracemos uma linha vertical de $P' = (t, -1)$ até a linha de vinco no ponto Q . Ao dobrar ao longo da linha de vinco, os segmentos QP' e QP terão o mesmo comprimento. Assim, a linha de vinco é tangente à parábola no ponto Q , com foco P e diretriz $y = -1$. Como Q pertence à linha de vinco, suas coordenadas são $(t, t^2/4)$, pois $Q = (t, y) = \left(x, \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}\right)$, sendo $x = t$:

$$Q = (t, y) = \left(x, \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}\right) = \left(t, \frac{t}{2} \cdot t - \frac{t^2}{4}\right) = \left(t, \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4}\right) = \left(t, \frac{t^2}{4}\right),$$

deduzindo a equação da curva gerada pela repetição do movimento de dobra, a qual

é $y = \frac{x^2}{4}$. Sendo assim, temos:

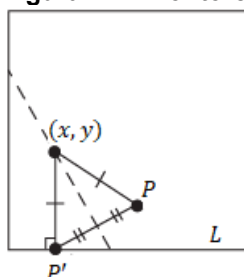
$$\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}x + y = 0 \Rightarrow t = \frac{\frac{x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - y}}{\frac{1}{2}}.$$

Isso fornece um número real para t somente quando $x^2/4 - y \geq 0$. Então a desigualdade $y \leq x^2/4$ representa todos os pontos no plano que podem ser atingidos por uma linha de vinco, e a região dada por $y > x^2/4$ contém todos os pontos que não serão atingidos por uma linha de vinco. O limite dessas duas regiões é nossa curva, a parábola $y = x^2/4$.

Também poderia demonstrar que é uma parábola usando a seguinte ideia. Como sabemos que o ponto de tangência (x, y) deve satisfazer $x = t$, igualamos a inclinação da linha de vinco à inclinação entre (x, y) e $(t/2, 0)$, obtendo $y = x^2/4$.

Observe a imagem abaixo.

Figura 71 – Ponto equidistante de P e P'



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Sabemos que a inclinação da nossa linha de vinco é $t/2$, mas isso deve ser igual à inclinação entre os pontos (x, y) e $(t/2, 0)$ (o ponto médio de PP'). Então:

$$\frac{t}{2} = \frac{y - 0}{x - \frac{t}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{\frac{x}{2}} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} \blacksquare$$

4.2 GeoGebra na construção da parábola

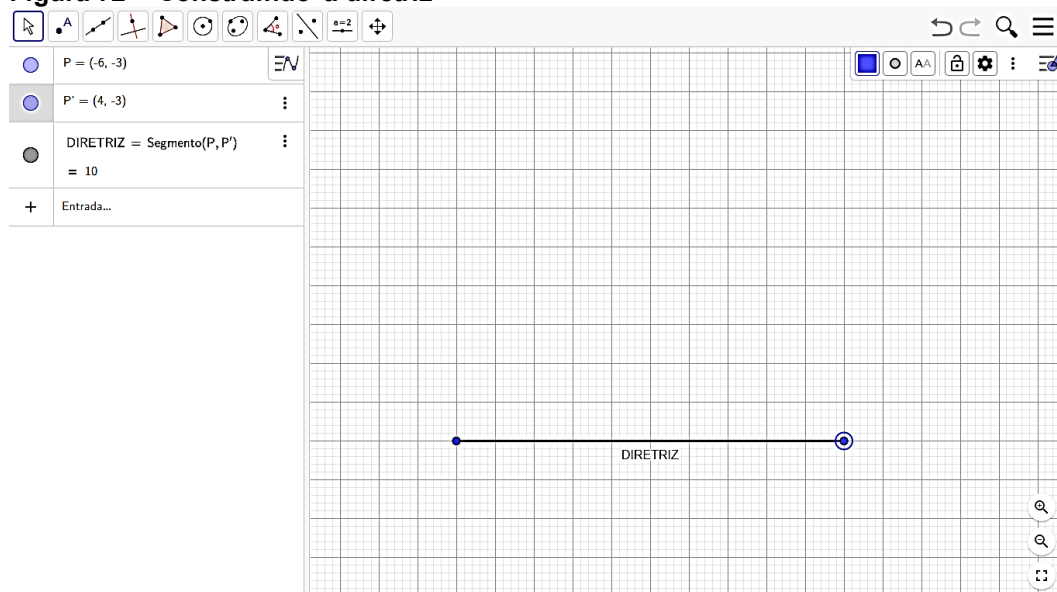
Simular essa atividade no Geogebra ou no Geometer's Sketchpad deve ser muito simples para quem já está familiarizado com o software. É recomendado fortemente explorar o Geogebra, pois ele pode ser baixado gratuitamente em

<http://www.geogebra.org> ou utilizar online, sem a necessidade de fazer o download.

A sequência para a construção da parábola no GeoGebra, é a seguinte:

1. Desenhe um segmento de reta qualquer, será a diretriz.

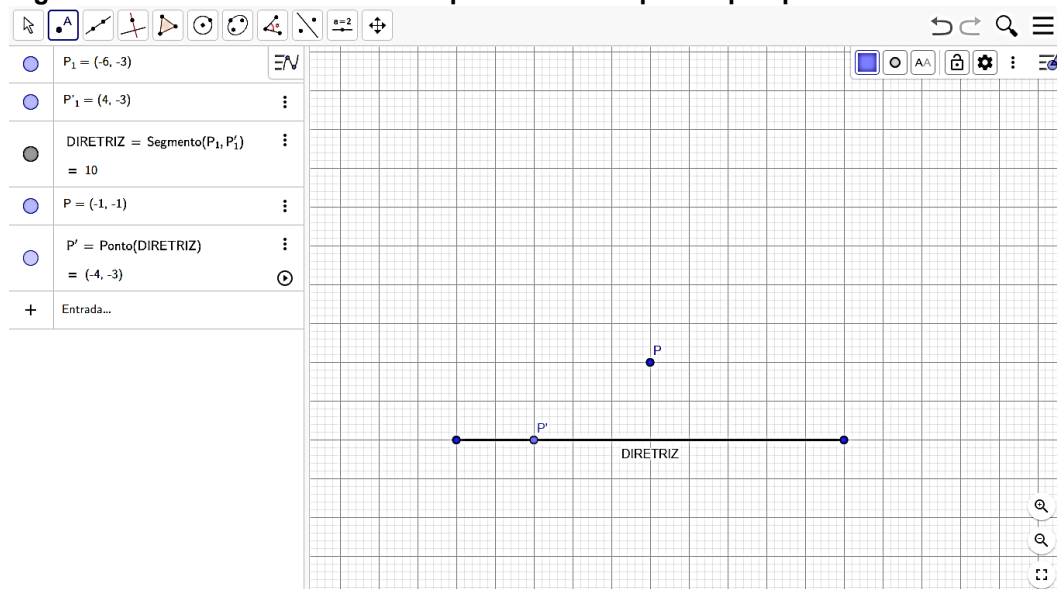
Figura 72 – Construindo a diretriz



Fonte: Autoria própria, 2025.

2. Desenhe o ponto P sendo o foco da parábola e um ponto P' qualquer pertencente a diretriz.

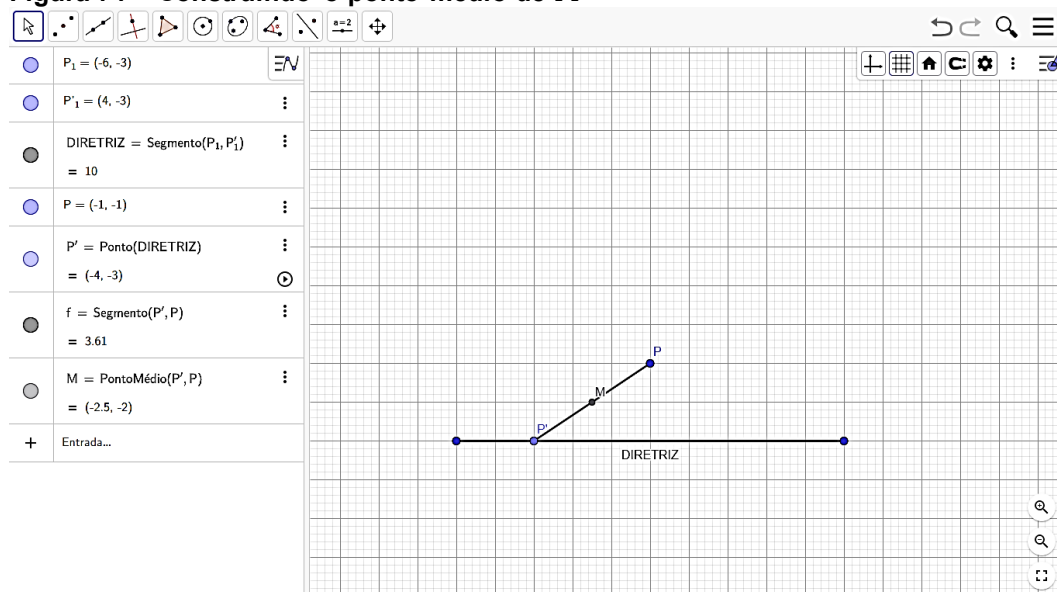
Figura 73 – Construindo o foco da parábola e um ponto qualquer na diretriz



Fonte: Autoria própria, 2025.

3. Trace o segmento PP' e o seu ponto médio, M .

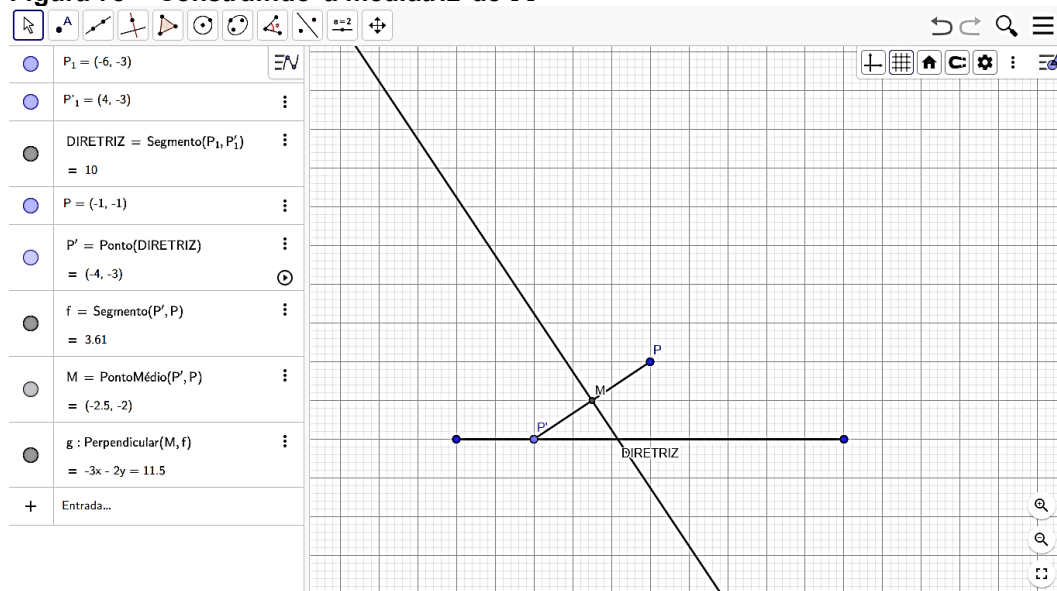
Figura 74 – Construindo o ponto médio de PP'



Fonte: Autoria própria, 2025.

4. Trace uma linha que passe por esse ponto médio e seja perpendicular ao segmento PP' (ou seja, desenhe a mediatriz de PP').

Figura 75 – Construindo a mediatriz de PP'

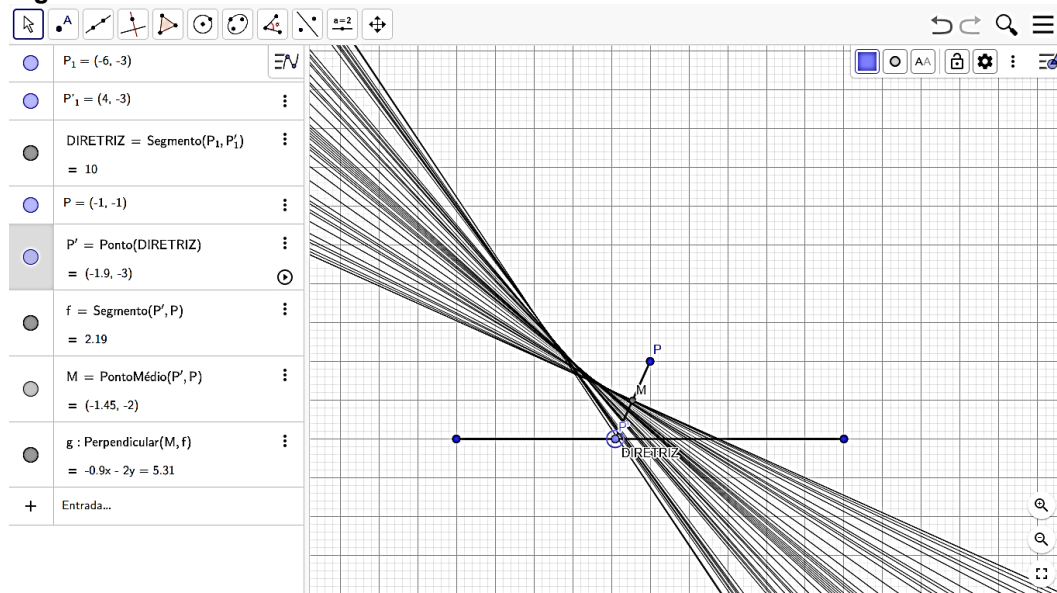


Fonte: Autoria própria, 2025.

Essa linha perpendicular será a linha de dobras. Com essa linha selecionada, ative o recurso de "exibir rastro" (no Geogebra, isso pode ser feito

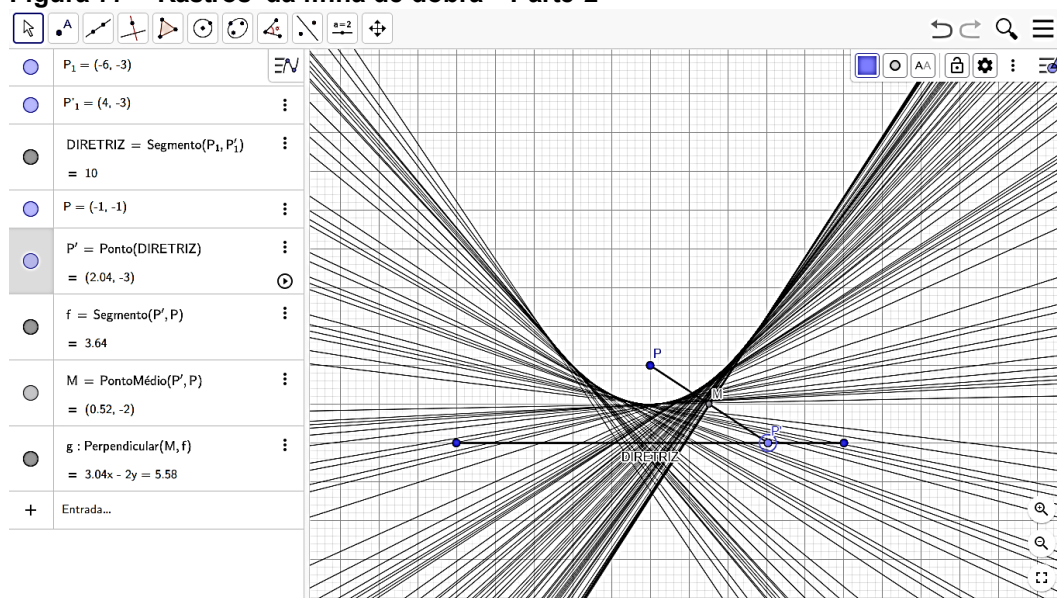
clcando com botão direito na linha e escolhendo "exibir rastro") e mova o ponto P' ao longo da diretriz. O resultado será algo como a imagem abaixo.

Figura 76 – Rastros da linha de dobra - Parte 1



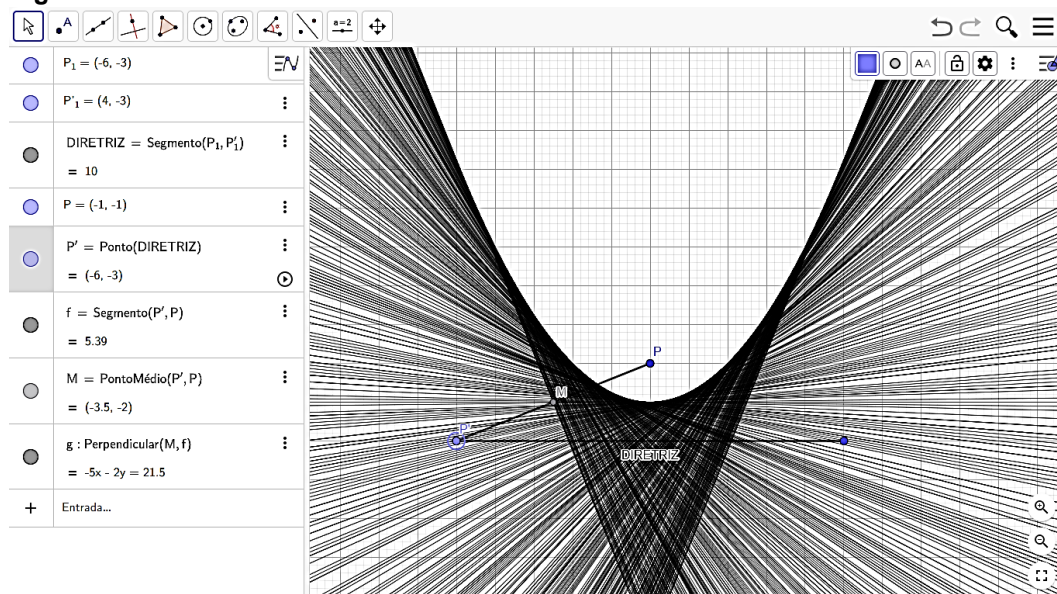
Fonte: Autoria própria, 2025.

Figura 77 – Rastros da linha de dobra - Parte 2



Fonte: Autoria própria, 2025.

Figura 78 – Rastros da linha de dobra - Parte 3

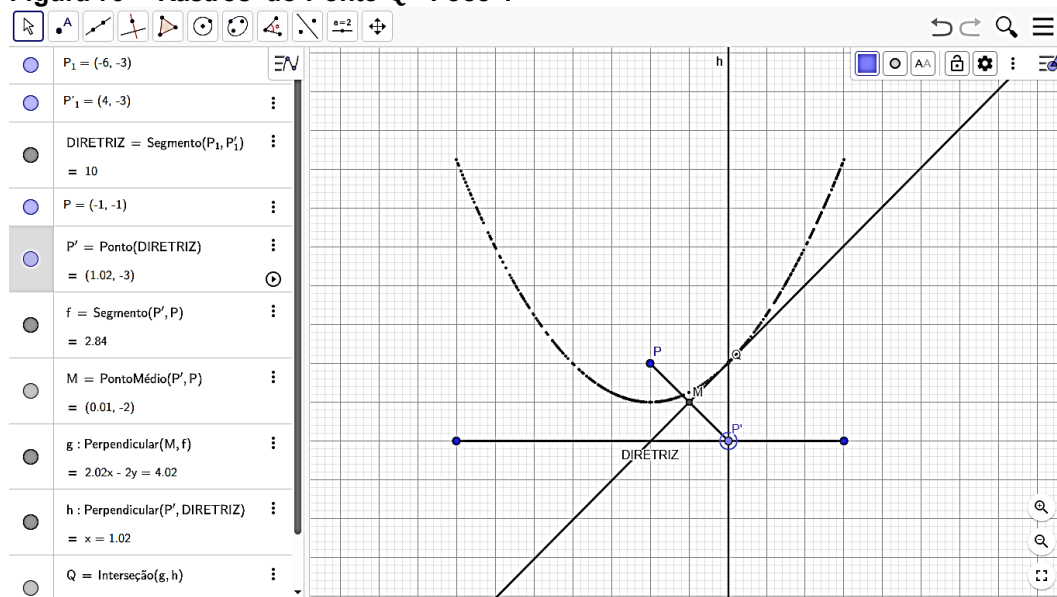


Fonte: Autoria própria, 2025.

A parte divertida do software de geometria dinâmica é que, ao construir esses pontos e linhas, eles ficam interligados. Devemos mover o ponto P' e atualizando as linhas de traço para ver como a parábola muda.

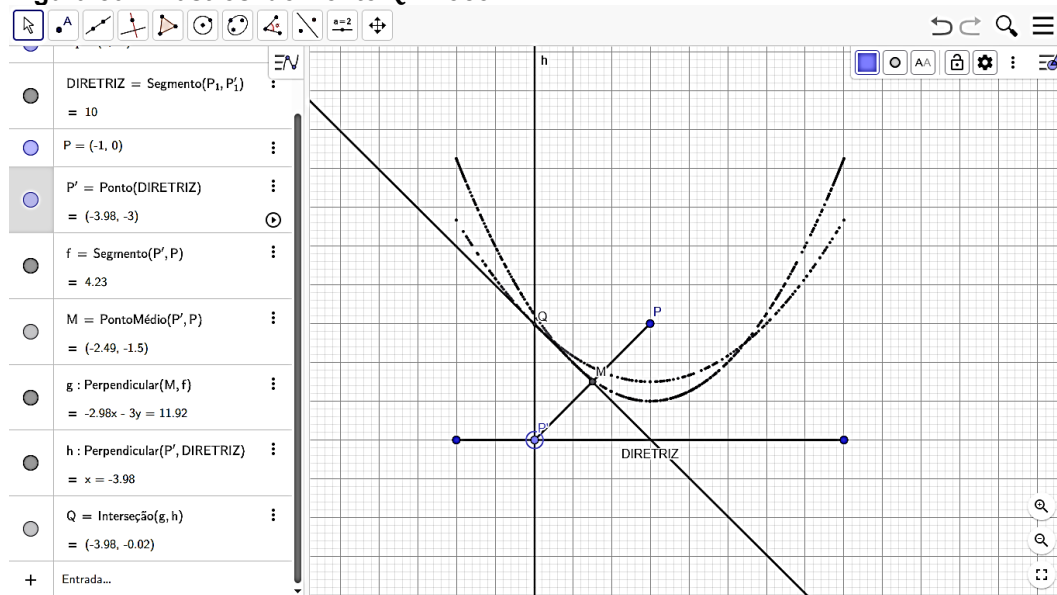
Ainda melhor é encontrar o ponto de tangência para desenhar a parábola de fato. No Geogebra, faça uma linha através de P' perpendicular a L . Construa um ponto Q onde essa linha intersecta a linha de dobras. Em seguida, use a ferramenta “exibir rastro” clicando com o botão direito do mouse em cima do ponto Q . Isso fará o Geogebra desenhar o rastro do ponto Q à medida que P' se move ao longo de L . E como Q é o ponto de tangência da nossa linha à parábola, isso resultará no desenho da parábola. Depois, será muito divertido mover o ponto P e ver como a parábola se altera.

Figura 79 – Rastros do Ponto Q - Foco 1

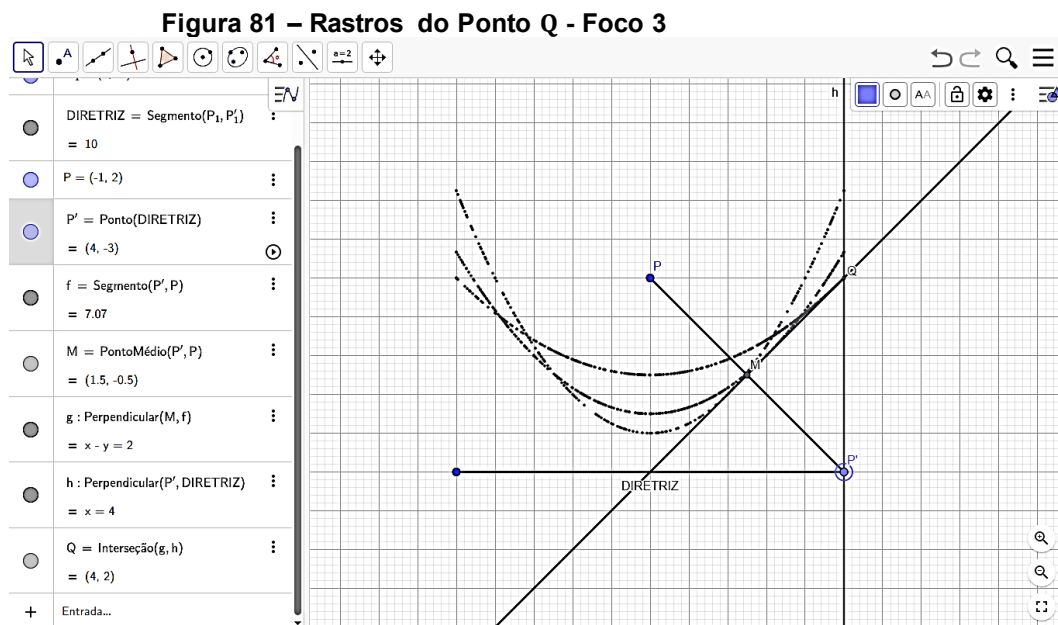


Fonte: Autoria própria, 2025.

Figura 80 – Rastros do Ponto Q - Foco 2



Fonte: Autoria própria, 2025.



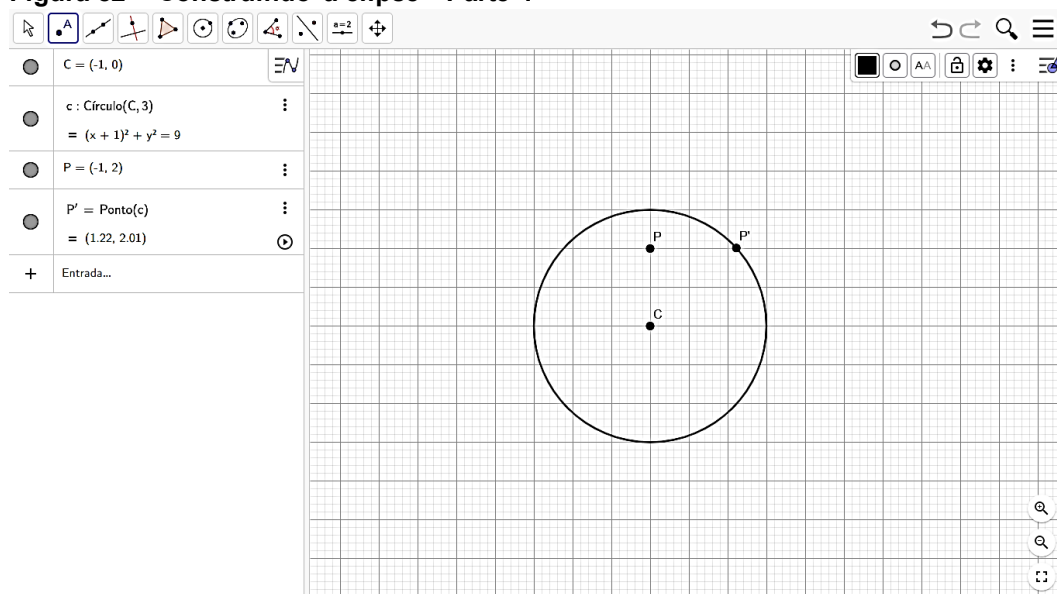
Fonte: Autoria própria, 2025.

4.3 GeoGebra na construção da elipse e hipérbole

A construção é a mesma da parábola, mas agora comece com um círculo em vez de uma linha L , no caso a diretriz. O resultado dependerá completamente se o ponto P está dentro ou fora do círculo. Se P estiver dentro do círculo, obtemos uma elipse com focos em P e no centro do círculo. Se P estiver fora do círculo, obtemos uma hipérbole com os mesmos focos.

Vamos utilizar o GeoGebra para construir a elipse, para isso construiremos um círculo de centro C , um ponto P interno à circunferência e um ponto P' pertencente a circunferência.

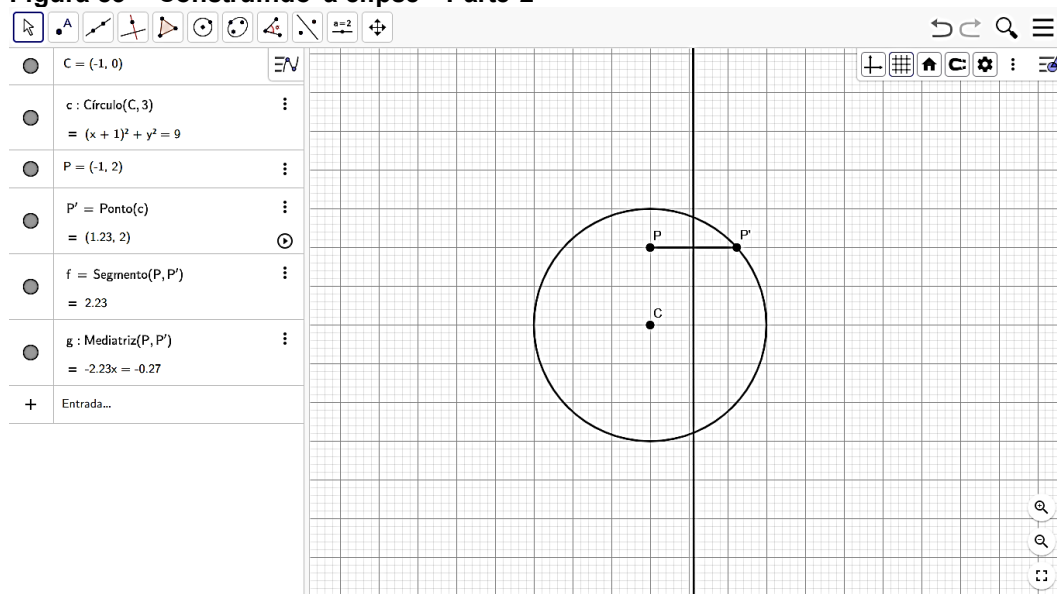
Figura 82 – Construindo a elipse - Parte 1



Fonte: Autoria própria, 2025.

Vamos unir os P e P' e em seguida fazer a mediatriz do segmento PP' .

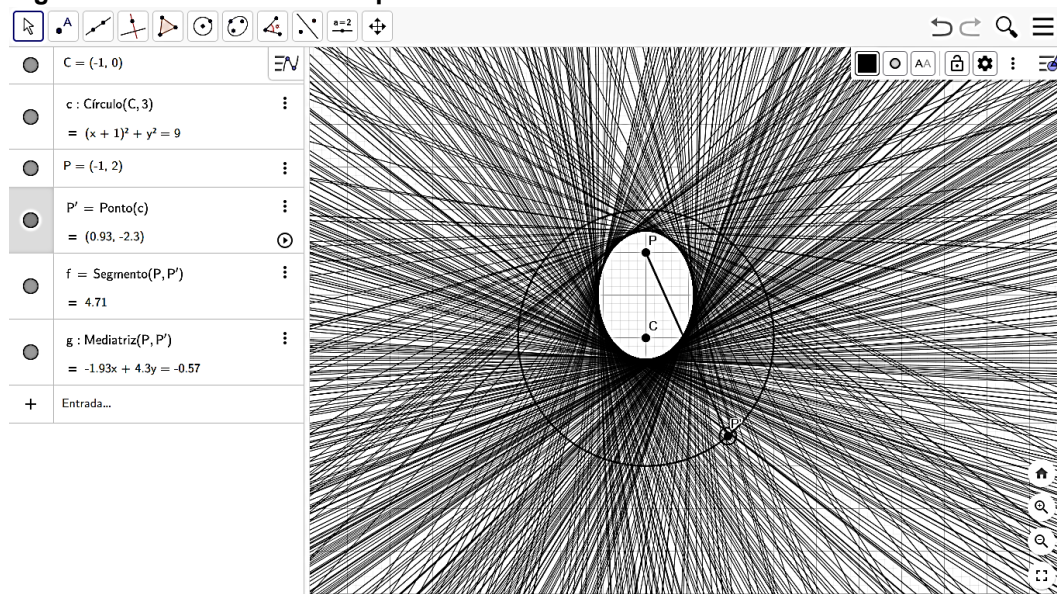
Figura 83 – Construindo a elipse - Parte 2



Fonte: Autoria própria, 2025.

Para visualizar a elipse precisamos mover o ponto P' sobre a circunferência e não podemos esquecer de marcar a opção rastro na mediatriz.

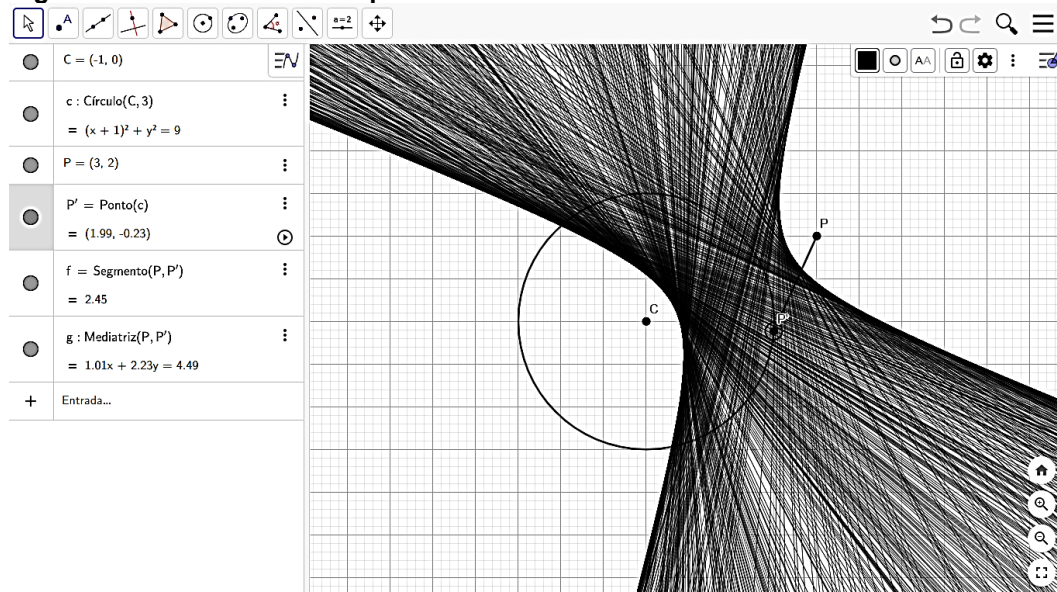
Figura 84 – Construindo a elipse - Parte 3



Fonte: Autoria própria, 2025.

Para a construção da hipérbole basta colocar o ponto P para fora da circunferência.

Figura 85 – Construindo a hipérbole



Fonte: Autoria própria, 2025.

Alguns comentaram, como [Sch96], que, embora seja legal, rápido e fácil criar tais seções cônicas usando software, nada se compara a deixar os alunos descobrirem isso por si mesmos primeiro, com a dobradura no papel. Para o caso da elipse e hipérbole, precisamos usar um compasso ou ferramenta de desenho circular

para traçar um círculo no papel e marcar o centro. Em seguida, um ponto P aleatório pode ser escolhido, e os alunos começam a selecionar pontos P' no círculo, dobrando para P , desdobrando e repetindo.

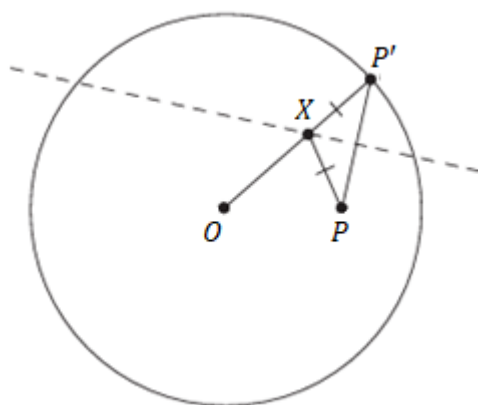
Provar que a dobradura com um círculo dá uma elipse ou hipérbole é um pouco mais envolvido do que o caso da parábola. Apresento aqui uma prova conceitual para o caso da elipse.

Seja O o centro do círculo, P um ponto dentro do círculo, e P' um ponto qualquer sobre o círculo. Então, nossa linha de dobras será a mediatriz de PP' , e seja X o ponto de interseção entre a linha de dobras e o segmento OP' . Agora, lembre-se de que uma elipse é determinada por dois focos e um comprimento fixo l , onde a soma das distâncias entre qualquer ponto da elipse e os dois focos é sempre l .

Afirmção: A linha de dobras é tangente à elipse cujos focos são O e P , no ponto X , e cujo comprimento fixo é o raio do círculo.

Prova: Primeiro, mostramos que a linha de dobras contém um ponto dessa elipse. Como o raio do círculo é igual a $OX + XP'$ e $PX = XP'$ (pela dobradura), sabemos que $OX + XP$ é igual ao raio do círculo, o que significa que o ponto X está na elipse. A figura abaixo ilustra isso.

Figura 86 – O ponto X de tangência a elipse

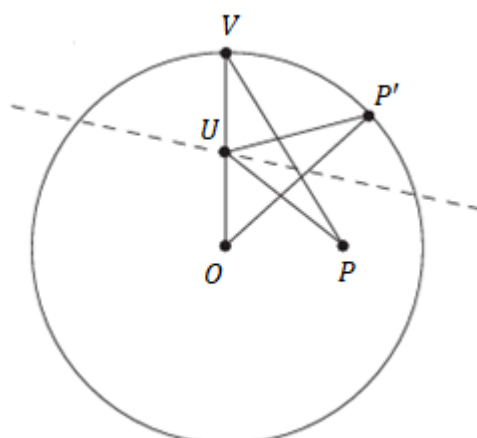


Fonte: Thomas Hull, 2013.

Agora queremos mostrar que nenhum outro ponto da linha de dobras pode estar na elipse, provando assim a tangência. Seja U outro ponto na linha de dobras, e suponha que U esteja na elipse. Seja OV a linha do raio que passa por U .

A figura abaixo ilustra isso.

Figura 87 – O ponto U de tangência a elipse



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Como U está na elipse, temos que $UP = UV$. Mas como U está na dobradura de P' para P , sabemos que $UP = UP'$, então $UV = UP'$. Como $OU + UP'$ é igual ao raio do círculo, que é igual a OP' , devemos ter que U está na linha OP' . Isso significa que $U = X$, e assim X é o único ponto na linha de dobras que é tangente à elipse.

5. ENSINANDO A RESOLVER EQUAÇÕES CÚBICAS VIA DOBRADURAS

A resolução de equações algébricas sempre ocupou um lugar de destaque na história da matemática. Em especial, as equações cúbicas desafiaram matemáticos por séculos até que métodos eficazes fossem desenvolvidos para encontrar suas raízes. Neste capítulo, propõe-se um estudo sobre a resolução de equações cúbicas a partir de diferentes abordagens, explorando desde métodos algébricos tradicionais até técnicas geométricas e construtivas, como o Método de Lill.

O Método de Lill será abordado não apenas como uma ferramenta algébrica-geométrica, mas também como um recurso didático para o ensino de conceitos matemáticos, permitindo visualizar de maneira concreta a solução de equações de segundo e terceiro grau. Assim, este capítulo busca integrar teoria, história e prática, explorando possibilidades de ensino e aprendizagem a partir de problemas clássicos da matemática.

5.1 Resolução de equações cúbicas

Problema:

É possível encontrar a solução dessas equações cúbicas através das dobraduras?

Observação:

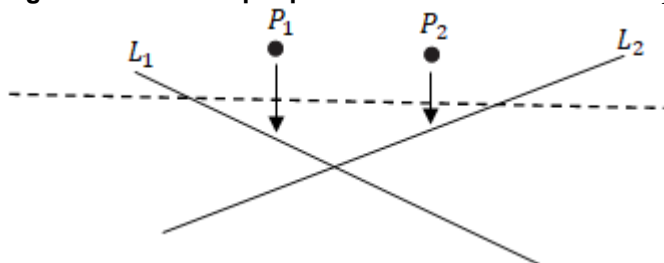
Esta atividade representa um aprofundamento no estudo de construções geométricas via origami. Para sua realização, é essencial que tenhamos previamente concluído as atividades de dobradura de uma parábola e de trissecção de ângulos, pois a operação de dobradura explorada aqui constitui o passo-chave na construção da trissecção do ângulo. Sem essa motivação, a compreensão da importância da dobradura denominada "de dois pontos para duas retas" pode se tornar desafiadora.

Solução do Problema

O método de trissecção de ângulos por origami é viabilizado por meio de um movimento de dobradura relativamente complexo, o axioma 6 nos garante que

"Dado um par de pontos P_1 e P_2 e um par de retas L_1 e L_2 , é possível realizar uma dobra que posicione simultaneamente P_1 sobre L_1 e P_2 sobre L_2 ."

Figura 88 – Dobra que posiciona simultaneamente P_1 sobre L_1 e P_2 sobre L_2



Fonte: Autoria própria, 2025.

Para muitas pessoas, esta pode ser a primeira vez que encontram explicitamente essa operação de dobradura. Assim, pode ser útil compará-la com as instruções para a trissecção de ângulos, a fim de convencê-las de que essa dobradura é, de fato, possível.

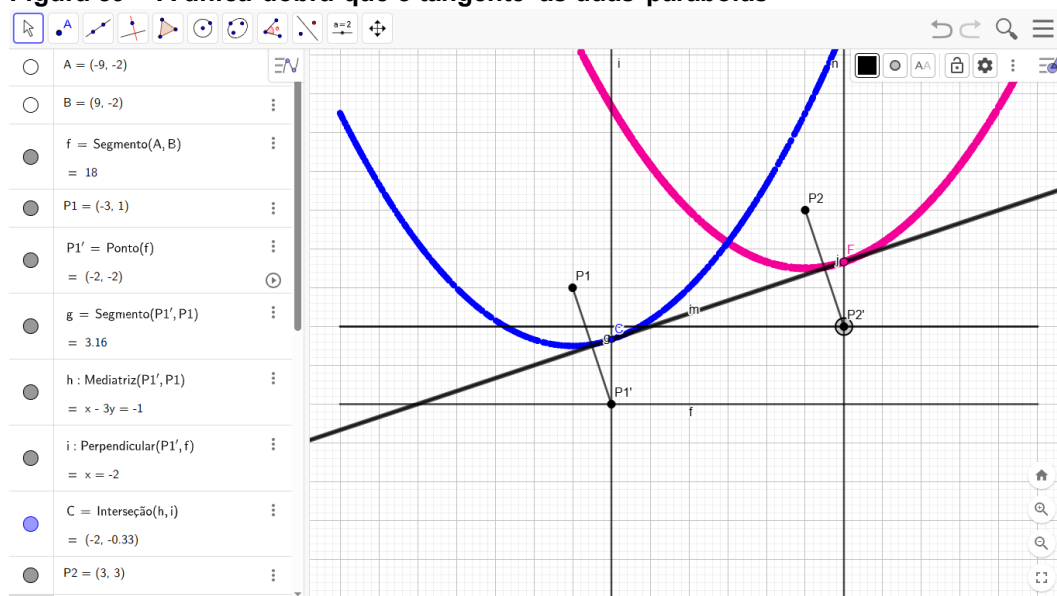
Essa operação de dobradura sempre será possível, independentemente da escolha dos pontos e das retas? A resposta é não.

Se considerarmos as retas L_1 e L_2 como paralelas e suficientemente afastadas, e os pontos P_1 e P_2 próximos entre si, mas entre as duas retas, pode-se perceber que não há como colocar P_1 sobre L_1 e simultaneamente P_2 sobre L_2 .

Isso ocorre porque toda dobradura é uma isometria, ou seja, preserva as distâncias entre os pontos. Se a distância entre P_1 e P_2 não puder ser mantida ao realizar a dobra, a operação se torna inviável.

Lembre-se de que, quando dobramos repetidamente um ponto P em relação a uma reta L , as dobras resultantes podem ser interpretadas como tangentes a uma parábola cujo foco é P e cuja diretriz é L .

Figura 89 – A única dobra que é tangente as duas parábolas



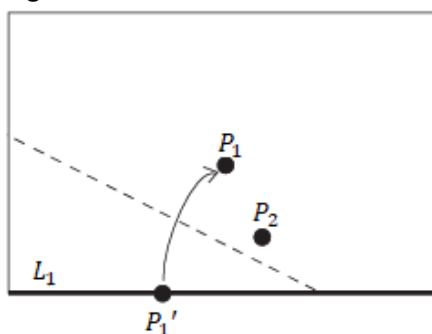
Fonte: Autoria própria, 2025.

Essa propriedade nos diz que ao dobrarmos P_1 sobre L_1 , a dobra formada será tangente à parábola com foco em P_1 e diretriz L_1 . Analogamente, essa mesma linha de dobra será tangente à parábola com foco em P_2 e diretriz L_2 . Dessa forma, a operação de dobradura equivale a encontrar uma reta tangente comum a duas parábolas distintas.

Vamos explorar essa operação de uma maneira diferente. Pegue uma folha de papel e marque um ponto P_1 (preferencialmente próximo ao centro da folha). Defina a borda inferior do papel como a reta L_1 .

Escolha um segundo ponto P_2 em qualquer outra posição na folha. Nosso objetivo é analisar o comportamento de P_2 à medida que dobramos P_1 sobre L_1 , repetidamente.

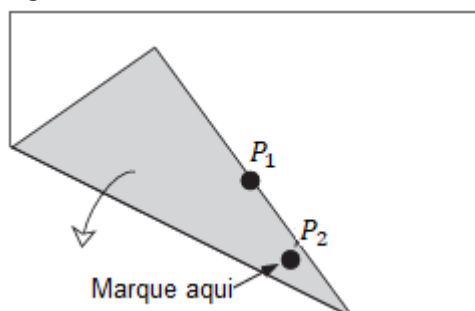
Figura 90 – Pontos simétricos em relação a dobra - Parte 1



Fonte: Thomas Hull, 2013

Escolha um ponto sobre L_1 (chamado de P_1') e dobre-o até coincidir com P_1 . Utilizando uma caneta ou marcador, registre um ponto na região da folha onde a parte dobrada toca P_2 . (Se nenhuma outra parte da folha tocar P_2 , escolha outro P_1' e repita o processo.)

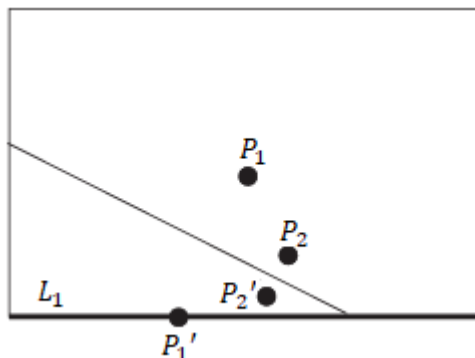
Figura 91 – Pontos simétricos em relação a dobra - Parte 2



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Desfaça a dobra. O ponto registrado, que podemos chamar de P_2' , representa a nova posição de P_2 resultante da dobradura. Escolha um novo P_1' e repita o processo diversas vezes, gerando vários pontos P_2' .

Figura 92 – Pontos simétricos em relação a dobra - Parte 3



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Conecte os pontos obtidos e observe o formato da curva gerada.

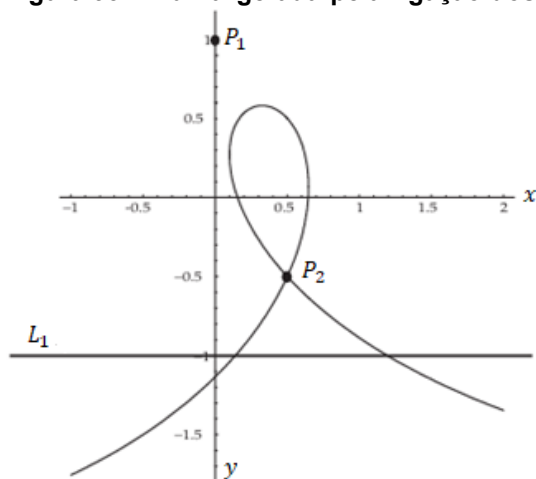
Assim como na atividade "Dobrando uma Parábola", esta requer a realização de várias dobras e a marcação de múltiplos pontos P_2' para gerar uma boa aproximação da curva resultante.

Conforme o número de dobras aumenta, pode ocorrer uma situação em que a própria dobradura mova o ponto P_2 , em vez de apenas sobrepor uma camada

de papel sobre ele. Nesses casos, é essencial marcar a nova posição de P_2 no papel para manter a precisão da construção.

A figura abaixo ilustra um exemplo possível da curva gerada, com eixos x e y incluídos para referência.

Figura 93 – Curva gerada pela ligação dos P_2'



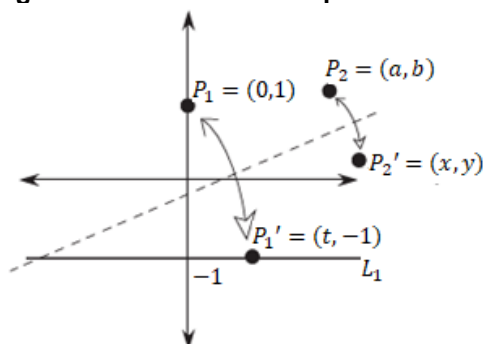
Fonte: Thomas Hull, 2013.

Para determinar a natureza da curva gerada por essa operação de dobradura, construiremos um modelo matemático do processo.

Considere os seguintes elementos:

- $P_1 = (0,1)$;
- A reta L_1 definida pela equação $y = -1$;
- A posição final de P_1 após a dobradura: $P_1' = (t, -1)$ em L_1 ;
- Um ponto fixo $P_2 = (a, b)$;
- A imagem de P_2 após a reflexão, denotada por $P_2' = (x, y)$.

Figura 94 – Nomeando os pontos simétricos a dobradura



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Nosso objetivo é determinar as coordenadas de P_2' e, a partir disso, obter uma equação em termos de x e y que descreva a curva gerada pela atividade de dobradura.

Procedimento

- Passo 1: Determinação da equação da linha de dobra: A linha de dobra é a mediatriz do segmento P_1P_1' . Encontre sua equação usando a definição de mediatriz: é a reta perpendicular ao segmento P_1P_1' que passa pelo seu ponto médio.
- Passo 2: Uso da geometria da reflexão: Utilize a equação da reta de dobra para expressar as coordenadas da reflexão de P_2 .
- Passo 3: Obtenção da equação da curva: Combine as equações obtidas nos passos anteriores para eliminar a variável t , deixando uma única equação que relacione x e y , mantendo as constantes a e b .

Este exercício de modelagem pode ser visto como uma versão aprimorada da atividade sobre parábolas. De fato, a configuração inicial é exatamente a mesma: $P_1 = (0,1)$, L_1 dado por $y = -1$, e $P_1' = (t, -1)$. Assim, a equação da linha de dobra será idêntica àquela obtida na atividade sobre parábolas:

$$y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}.$$

A principal dificuldade consiste na incorporação do ponto P_2 . É necessário estabelecer relações entre as coordenadas (a,b) do ponto P_2 e as coordenadas (x,y) de sua imagem P_2' após a dobra. Como o objetivo final é encontrar uma equação que descreva a trajetória de P_2' à medida que t varia, precisamos eliminar a variável t ao longo do processo.

Um possível ponto de confusão é o uso das variáveis (x,y) para representar o ponto P_2' . Essa escolha é feita para que a equação final fique expressa em termos das variáveis x e y , que são mais familiares aos estudantes quando lidam com equações de curvas. No entanto, é crucial que nós percebamos que essas variáveis x e y não são as mesmas da equação da linha de dobra. Para evitar essa ambiguidade, alguns podem preferir denotar as coordenadas de P_2' como (x',y') .

Para resolver esse problema, é essencial fazer algumas observações-chave. Primeiramente, a inclinação do segmento de reta P_1P_1' deve ser igual à

inclinação do segmento P_2P_2' , ou seja,

$$-\frac{2}{t} = \frac{y-b}{x-a}.$$

Podemos ser tentados a substituir essa expressão na equação da linha de dobra para obter uma única equação com apenas x e y como variáveis. No entanto, essa abordagem é inadequada, pois os valores de x e y na equação da linha de dobra não correspondem às coordenadas de P_2' .

Para superar esse problema, podemos utilizar um ponto que sabemos estar na linha de dobra: o ponto médio do segmento P_2P_2' , dado por

$$\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right).$$

Substituindo esse ponto na equação da linha de dobra e utilizando a relação acima para eliminar t , obtemos uma equação em termos de (x, y) :

$$\begin{aligned} y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4} &\Rightarrow \frac{y+b}{2} = -\frac{x-a}{y-b} \cdot \frac{x+a}{2} - \left(-\frac{x-a}{y-b}\right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{y+b}{2} = \frac{-(x^2 - a^2)(y-b) - 2(x-a)^2}{2 \cdot (y-b)^2} \\ &\Rightarrow (y+b)(y-b)^2 = -(x^2 - a^2)(y-b) - 2(x-a)^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Note que esta é uma curva cúbica, pois há um termo y^3 no lado esquerdo da equação e um termo x^2y no lado direito.

Embora a obtenção dessa equação possa não ser imediatamente empolgante para um estudante de ensino médio, a sua plotagem para valores específicos de (a, b) pode ser extremamente reveladora.

Simulação da curva utilizando o GeoGebra

Continuamos a investigar essa operação incomum de origami:

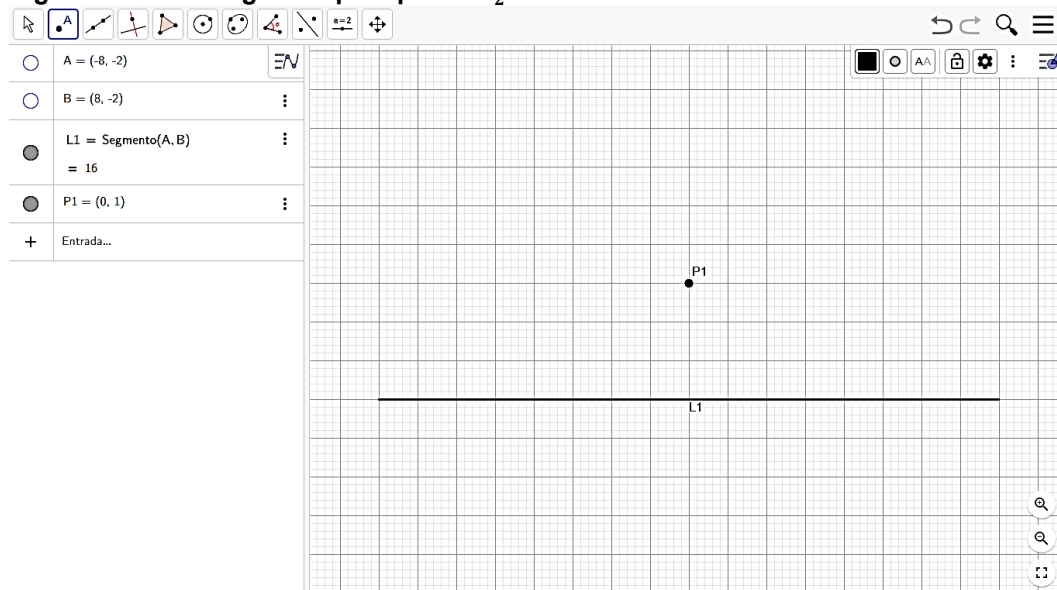
"Dado um par de pontos P_1 e P_2 e um par de retas L_1 e L_2 , é possível realizar uma dobra que posicione simultaneamente P_1 sobre L_1 e P_2 sobre L_2 ."

Para evitar a repetição manual das dobras em papel, podemos modelar essa atividade utilizando softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra. Essa abordagem permite a visualização rápida de múltiplos exemplos da curva gerada por essa operação.

Procedimento para construção no GeoGebra:

- Passo 1: Construção da base: crie a reta L_1 e o ponto P_1 .

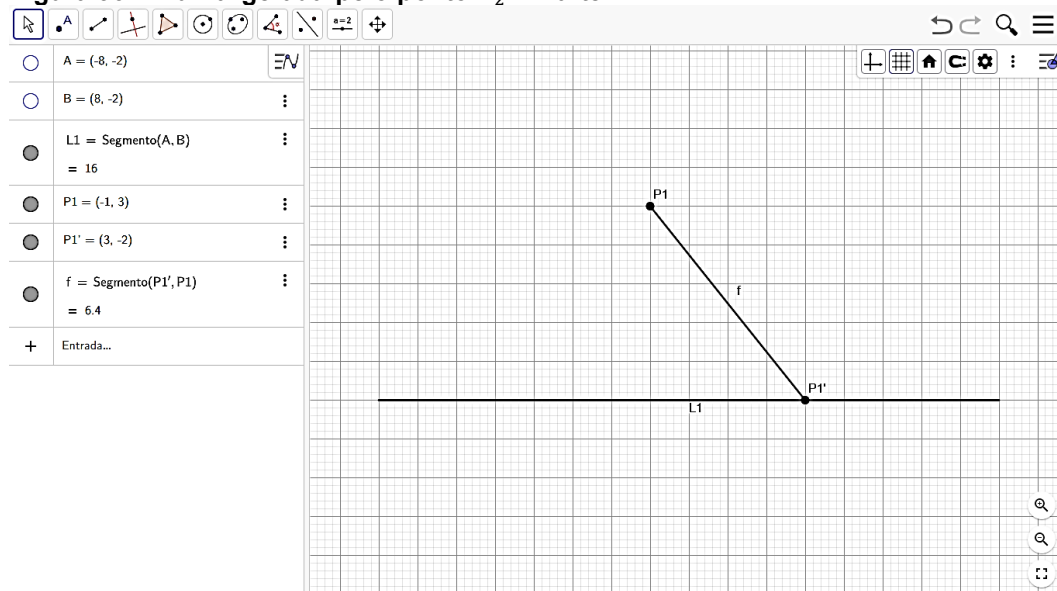
Figura 95 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Parte 1



Fonte: Autoria própria, 2025.

- Passo 2: Definição da dobradura: escolha um ponto P_1' sobre L_1 e conecte-o a P_1 por meio de um segmento de reta.

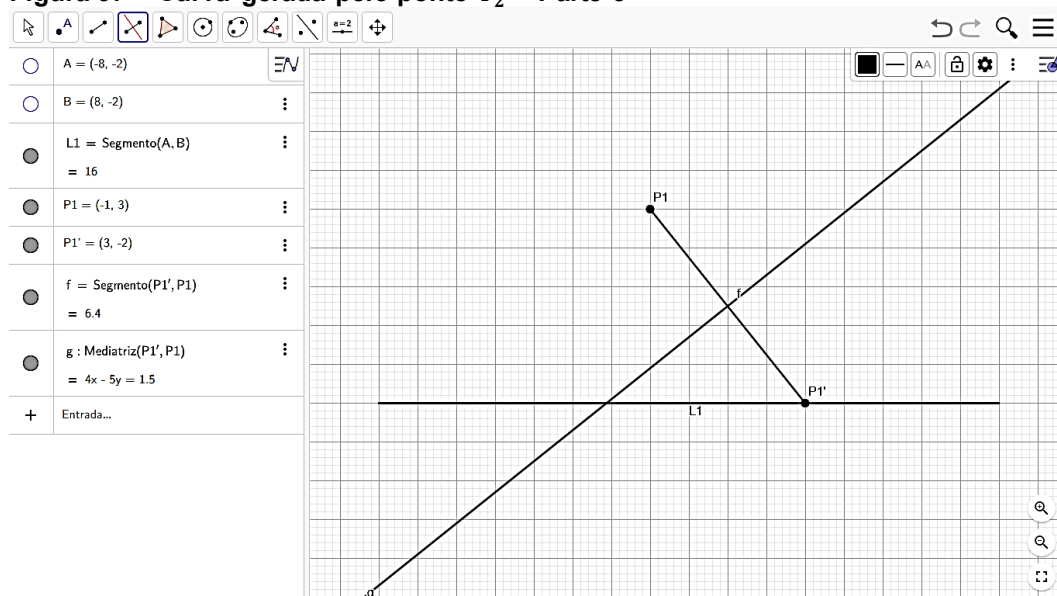
Figura 96 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Parte 2



Fonte: Autoria própria, 2025.

- Passo 3: Construção da dobra: determine a mediatriz do segmento P_1P_1' . Essa reta representa a linha de dobra.

Figura 97 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Parte 3

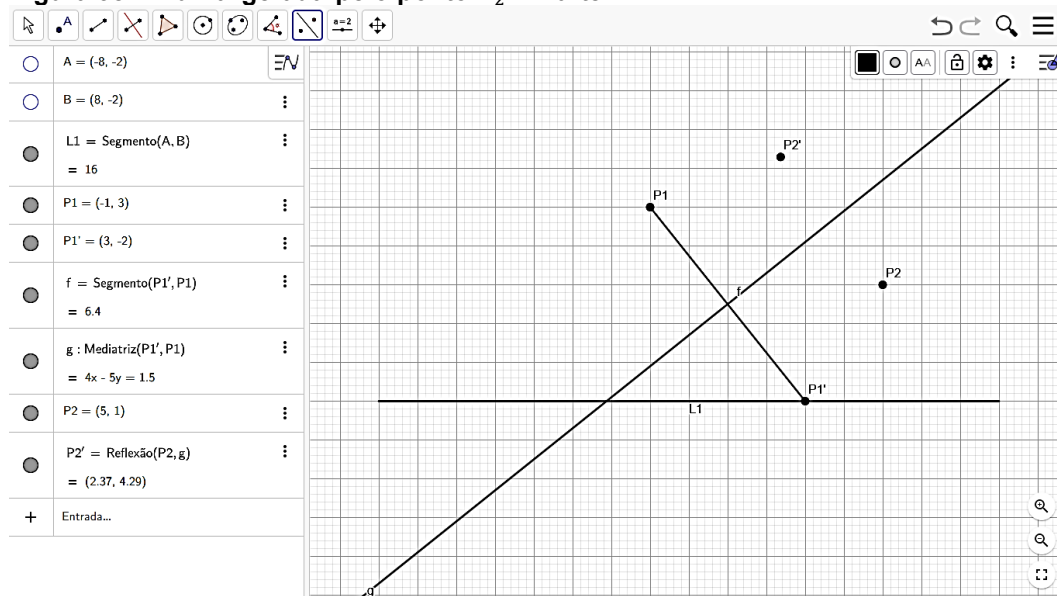


Fonte: Autoria própria, 2025.

- Passo 4: Reflexão do ponto P_2 : insira um novo ponto P_2 em qualquer posição do plano. Reflita P_2 em relação à linha de dobra obtida no passo (3). No GeoGebra, essa operação pode ser realizada com a ferramenta "Reflexão em relação a uma reta". O ponto refletido deve ser nomeado como P_2' .

-

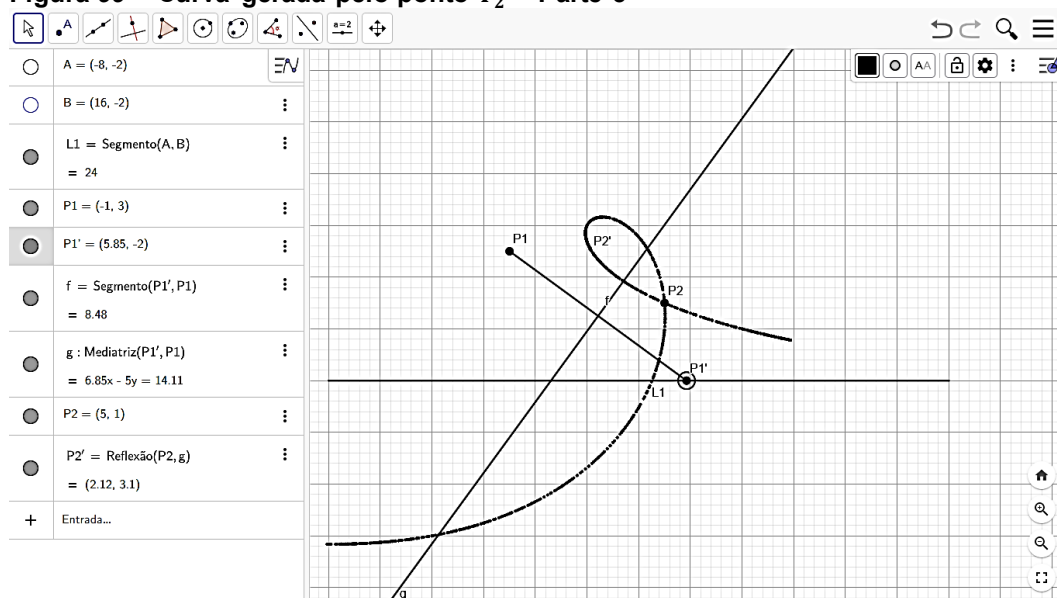
Figura 98 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Parte 4



Fonte: Autoria própria, 2025.

- Passo 5: Observação da trajetória de P_2' : movimente P_1' ao longo de L_1 e observe a trajetória do ponto P_2' . Para visualizar a curva traçada por P_2' , ative a opção "Exibir Rastro" (clikando com o botão direito sobre P_2' e ativando a opção correspondente).

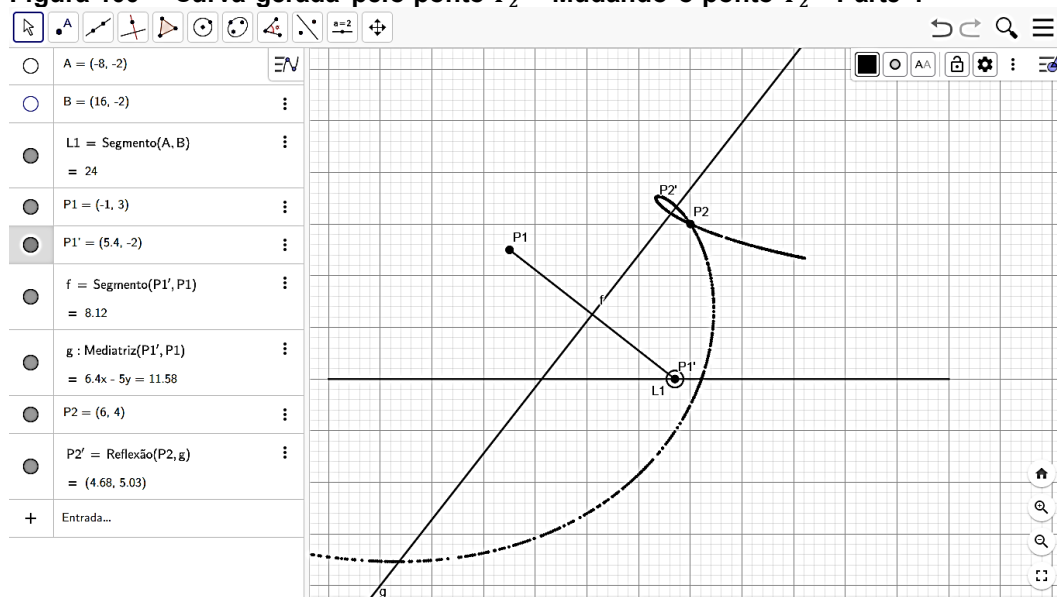
Figura 99 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Parte 5



Fonte: Autoria própria, 2025.

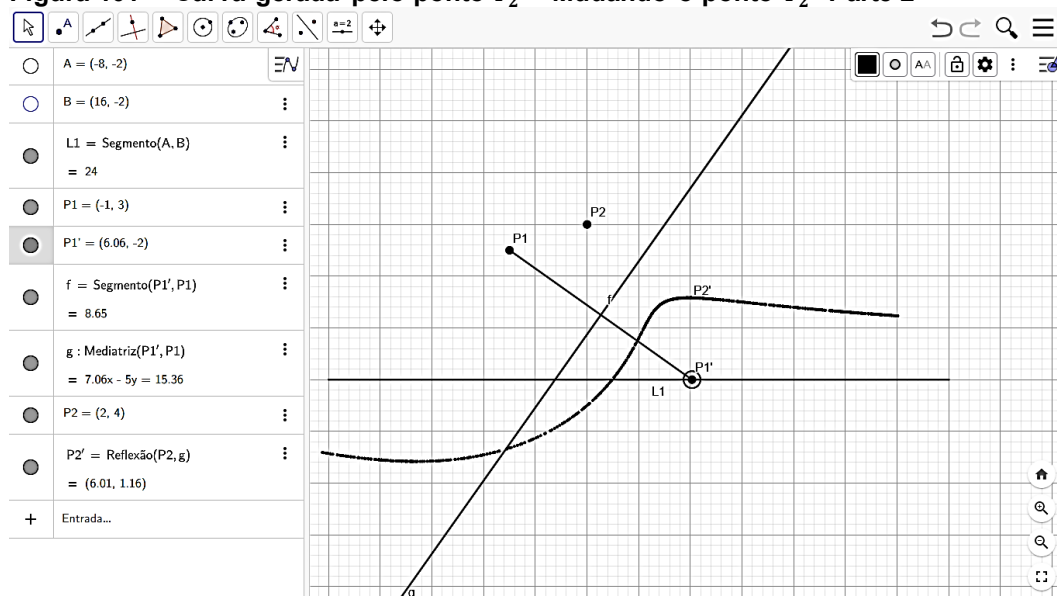
Posicione P_2 em diferentes locais do plano e observe como a curva resultante se modifica.

Figura 100 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Mudando o ponto P_2 - Parte 1



Fonte: Autoria própria, 2025.

Figura 101 – Curva gerada pelo ponto P_2' - Mudando o ponto P_2 Parte 2



Fonte: Autoria própria, 2025.

Após a atividade de dobradura em papel, este é um momento oportuno para que os estudantes explorem outras curvas semelhantes utilizando o GeoGebra, desde que os recursos computacionais estejam disponíveis. Embora a experiência de traçar essas curvas manualmente, por meio da dobradura do papel, seja insubstituível, o GeoGebra possibilita a visualização dinâmica e interativa de uma ampla variedade de formas que curvas cúbicas podem assumir.

A Técnica de Alperin para resolver equações cúbicas com origami

Existem diversas abordagens possíveis para empregar o origami na resolução de uma equação cúbica arbitrária. A técnica de Alperin, apesar de tecnicamente correta, dificilmente seria concebido de forma espontânea pela maioria dos estudantes. Para um método alternativo, mais intuitivo e prático, recomenda-se consultar a atividade seguinte, baseada no Método de Lill.

No método de Alperin, parte-se de uma equação cúbica arbitrária da forma:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Contudo, é possível eliminar o termo quadrático por meio da substituição $x = z - \frac{a}{3}$, como visto na seção 2.7.

Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que a equação geral a ser resolvida possui a forma:

$$x^3 + ax + b = 0,$$

onde a e b sejam construtíveis via dobraduras.

Para resolver essa equação, consideram-se as seguintes parábolas:

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 2bx \text{ e } y = \frac{x^2}{2}.$$

Como a e b são números construtíveis via origami, os coeficientes dessas equações também o são, o que permite construir os focos e diretrizes correspondentes. A primeira parábola tem foco em $(b/2, a/2)$ e diretriz $x = -b/2$, enquanto a segunda possui foco em $(0, 1/2)$ e diretriz $y = -1/2$.

Em seguida, realiza-se uma dobra que leva simultaneamente o ponto $(b/2, a/2)$ até a reta $x = -b/2$ e o ponto $(0, 1/2)$ até a reta $y = -1/2$. Essa operação gera um vinco que é tangente a ambas as parábolas, e, embora tal dobra possa admitir mais de uma possibilidade, neste caso a reta resultante é única se considerarmos $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0$. Seja m o coeficiente angular dessa reta.

Proposição:

O valor de m é uma raiz real da equação cúbica $x^3 + ax + b = 0$.

Demonstração:

Sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1) os pontos de tangência da reta com a primeira e a segunda parábola, respectivamente. Derivando as equações das parábolas, obtêm-se as derivadas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{y - \frac{a}{2}} \text{ (primeira parábola) e } \frac{dy}{dx} = x \text{ (segunda parábola)}.$$

Nos pontos de tangência, o coeficiente angular da reta deve coincidir com o das tangentes às parábolas:

$$m = \frac{b}{y_0 - \frac{a}{2}} \text{ e } m = x_1.$$

Além disso:

$$y_1 = \frac{1}{2}m^2.$$

Substituindo (x_0, y_0) na equação da primeira parábola:

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 2bx \Rightarrow \left(y_0 - \frac{a}{2}\right)^2 = 2bx_0 \Rightarrow x_0 = \frac{\left(y_0 - \frac{a}{2}\right)^2}{2b}.$$

Como $m = \frac{b}{y_0 - \frac{a}{2}}$, temos:

$$x_0 = \frac{\left(y_0 - \frac{a}{2}\right)^2}{2b} = \frac{\left(y_0 - \frac{a}{2}\right)^2 \cdot b}{2b^2} = \frac{b}{2m^2}.$$

Por outro lado, a inclinação da reta que passa pelos dois pontos de tangência é dada por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Substituindo as expressões obtidas:

$$m = \frac{\frac{1}{2}m^2 - y_0}{m - \frac{b}{2m^2}}.$$

Substituindo y_0 pela expressão obtida em função de m :

$$m = \frac{b}{y_0 - \frac{a}{2}} \Rightarrow y_0 - \frac{a}{2} = \frac{b}{m} \Rightarrow y_0 = \frac{a}{2} + \frac{b}{m},$$

tem-se:

$$m = \frac{\frac{1}{2}m^2 - \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{m}\right)}{m - \frac{b}{2m^2}}.$$

Realizando as manipulações algébricas necessárias e simplificando ambos os lados, chega-se à equação:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\frac{1}{2}m^2 - \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{m}\right)}{m - \frac{b}{2m^2}} \Rightarrow m^2 - \frac{b}{2m} = \frac{1}{2}m^2 - \frac{a}{2} - \frac{b}{m} \\ &\Rightarrow m^2 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{b}{2m} + \frac{a}{2} + \frac{b}{m} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}m^2 - \frac{b}{2m} + \frac{a}{2} + \frac{b}{m} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{(m^3 - b + am + 2b)}{2m} = 0 \\ &\Rightarrow m^3 + am + b = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Portanto, demonstrou-se que o coeficiente angular da reta obtida por meio da dobra de origami corresponde a uma raiz real da cúbica considerada.

5.2 Método de Lill para solucionar equações cúbicas

Problema:

O método de Lill serve para resolver equações cúbicas, esse método de construção pode ser realizado por meio de origami. Determine as raízes de um polinômio cúbico como exemplo, utilizando apenas dobras de papel.

Observação:

Apesar da complexidade inerente à resolução de equações cúbicas, o Método de Lill é relativamente simples. De fato, sua demonstração requer apenas conceitos elementares de trigonometria e álgebra. As dobras necessárias para a execução do método demandam precisão, mas não apresentam grande dificuldade.

Os conceitos mais aprofundados envolvidos nesta atividade são adequados para qualquer disciplina de geometria. Trata-se de uma demonstração construtiva e acessível de que o origami pode ser utilizado para resolver qualquer equação cúbica.

Solução do Problema:

Nesta atividade, você aprenderá o Método de Lill para utilizar a geometria na resolução de equações cúbicas. O Método de Lill é interessante porque pode ser aplicado por meio de origami!

Imagine que desejamos resolver (encontrar uma raiz real) a seguinte equação cúbica:

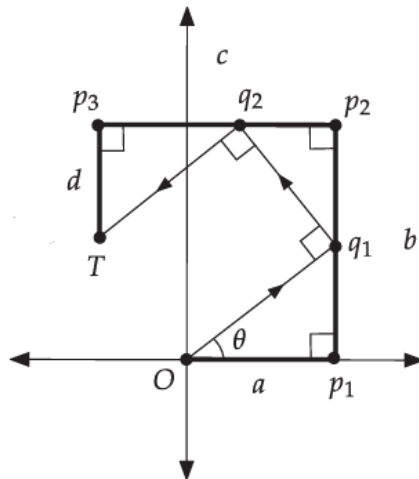
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Vamos construir o processo do Método de Lill no Plano Cartesiano, comece no ponto de origem, O , e desenhe um segmento de reta com comprimento a ao longo do eixo x positivo. Em seguida, gire 90° no sentido anti-horário e percorra uma distância de b . Repita: gire novamente 90° no sentido anti-horário e percorra uma distância de c , depois faça mais uma rotação de 90° no mesmo sentido e percorra uma distância d , terminando em um ponto T .

Se algum dos coeficientes for negativo, “caminhe para trás”. Se for zero, apenas gire, sem se deslocar.

Agora, imagine-se posicionado no ponto O tentando “atingir” o ponto T com um disparo que rebata no trajeto dos coeficientes em ângulos retos, conforme ilustrado.

Figura 102 – Método de Lill - Exemplo 1



Fonte: Thomas Hull, 2013.

O Método de Lill estabelece que, se for possível atingir o ponto T com esse percurso de disparo, e θ for o ângulo que a trajetória forma no ponto O , então $x = -tg \theta$ será uma raiz da equação cúbica.

Primeiramente, observe-se que todos os triângulos na figura são semelhantes e, conseqüentemente:

$$\theta = \angle q_1 O p_1 = \angle q_2 q_1 p_2 = \angle T q_2 p_3.$$

Cada um desses triângulos pode, portanto, ser utilizado para calcular $tg \theta$ e, ao organizá-los sequencialmente, a demonstração surge de maneira natural.

Começando com o triângulo $\triangle O p_1 q_1$, temos:

$$-x = tg \theta = \frac{p_1 q_1}{a} = \frac{b - q_1 p_2}{a}$$

O que implica:

$$q_1 p_2 = ax + b$$

Em seguida, analisando o triângulo $\triangle q_1 p_2 q_2$:

$$-x = tg \theta = \frac{p_2 q_2}{q_1 p_2} = \frac{c - p_3 q_2}{ax + b}$$

Portanto:

$$p_3 q_2 = x(ax + b) + c$$

Por fim, observando o triângulo $\triangle q_2 p_3 T$:

$$-x = tg \theta = \frac{d}{p_3 q_2} = \frac{d}{x(ax + b) + c}$$

O que nos leva a:

$$0 = x(x(ax + b) + c) + d = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Dessa forma, $x = -tg \theta$ é de fato uma raiz da equação cúbica.

Essa argumentação constitui uma demonstração convincente. Contudo, é importante destacar que o exemplo utilizado pode induzir a uma interpretação limitada: nem toda equação cúbica possuirá um trajeto de coeficientes com o formato ilustrado no material. Na realidade, a figura apresentada, assim como a demonstração baseada nela, somente são válidas quando todos os coeficientes do polinômio são positivos. Caso algum dos coeficientes seja negativo ou nulo, o trajeto dos coeficientes se modifica, o que altera também os cálculos algébricos envolvidos na demonstração.

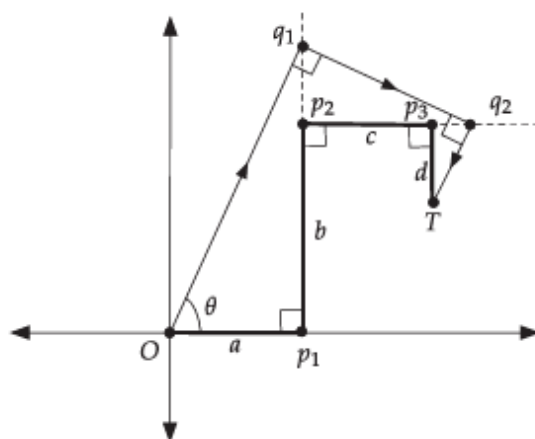
Dessa forma utilizaremos outro exemplo com coeficientes negativos.

Suponha, por exemplo, que o coeficiente do termo x seja negativo, enquanto os demais sejam positivos. Em outras palavras, consideremos a cúbica:

$$ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

Nesse caso, o trajeto dos coeficientes e o caminho do disparo se organizariam de maneira distinta, conforme ilustrado abaixo:

Figura 103 – Método de Lill – Exemplo 2



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Observe que será necessário fazer o disparo quicar nas linhas que contêm os segmentos p_1p_2 e p_2p_3 para que o Método de Lill funcione. A demonstração algébrica nesse caso será a seguinte:

No triângulo $\triangle Op_1q_1$,

$$-x = tg \theta = \frac{p_1q_1}{a} = \frac{b + q_1p_2}{a}$$

Assim:

$$q_1 p_2 = -ax - b$$

No triângulo $\Delta q_1 p_2 q_2$,

$$-x = \tan \theta = \frac{p_2 q_2}{q_1 p_2} = \frac{c + p_3 q_2}{-ax - b}$$

Portanto:

$$p_3 q_2 = -x(-ax - b) - c$$

No triângulo $\Delta q_2 p_3 T$,

$$-x = \tan \theta = \frac{d}{p_3 q_2} = \frac{d}{-x(-ax - b) - c}$$

O que nos leva a:

$$-x(-x(-ax - b) - c) = d$$

Simplificando:

$$ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

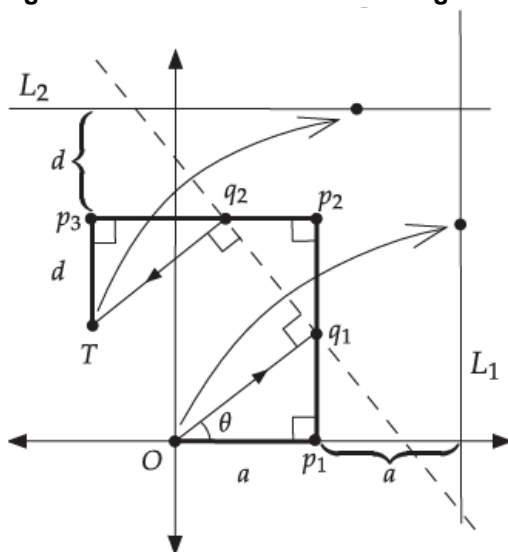
Outros casos podem ser tratados de forma semelhante, inclusive aqueles nos quais um ou mais coeficientes são nulos.

É notável que o Método de Lill é engenhoso, vale ainda destacar dois aspectos adicionais sobre esse método. Primeiro, o Método de Lill é válido para polinômios de qualquer grau e, portanto, pode ser utilizado para encontrar raízes reais de quintas ordens ou de qualquer polinômio desejado, sendo a demonstração essencialmente a mesma. Segundo, é bastante interessante e didático simular o Método de Lill utilizando softwares de geometria dinâmica, como GeoGebra.

Método de Lill via Origami

Podemos utilizar o origami para resolver qualquer equação cúbica aplicando o Método de Lill. Essa ideia foi descoberta pela matemática italiana Margherita Beloch em 1933.

Figura 104 – Método de Lill via Origami



Fonte: Thomas Hull, 2013.

Iniciando a construção:

- Passo 1: Desenhe (ou dobre) sobre o papel o trajeto dos coeficientes de acordo com o Método de Lill.
- Passo 2: Em seguida, dobre uma linha perpendicular ao eixo x a uma distância a de p_1p_2 (no lado oposto ao ponto O). Denomine essa linha de L_1 .
- Passo 3: Depois, dobre uma linha perpendicular ao eixo y a uma distância d de p_2p_3 (no lado oposto ao ponto T). Denomine essa linha de L_2 .
- Passo 4: Por fim, dobre o ponto O sobre a linha L_1 enquanto, simultaneamente, dobra o ponto T sobre a linha L_2 . Esta linha de vinco formará um dos lados do percurso de disparo necessário para o Método de Lill (e conterá o ângulo θ que procuramos).

Analisando as instruções acima, vamos aplicá-las para encontrar as raízes do polinômio

$$x^3 - 7x - 6$$

utilizando apenas dobraduras de papel.

Este polinômio foi cuidadosamente selecionado, pois possui três raízes inteiras, todas passíveis de serem encontradas através do método de dobraduras desenvolvido por Beloch para resolver cúbicas.

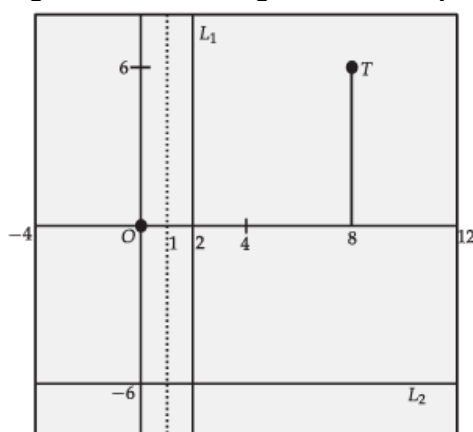
Para a execução prática, é necessário estabelecer um sistema de coordenadas cartesianas sobre a folha quadrada de papel. Qualquer intervalo de

coordenadas suficientemente amplo pode ser utilizado, mas recomenda-se adotar aquele que se ajuste melhor à atividade. O sistema de coordenadas aqui sugerido foi desenvolvido por Cary Malkiewich.

O sistema de Malkiewich considera uma folha quadrada de lado 16 unidades, com o eixo x disposto ao longo da linha horizontal central, variando de -4 a 12. O eixo y é colocado sobre a linha vertical que marca um quarto da largura da folha, à esquerda do centro.

Para preparar a folha de acordo com esse sistema de coordenadas, devem-se dobrar as linhas dos eixos x e y (para localizar a origem O), traçar o caminho dos coeficientes (para determinar o ponto T) e marcar as retas L_1 e L_2 , essenciais na estratégia de Beloch para resolver o Método de Lill.

Figura 105 – Estratégia de Beloch para $x^3 - 7x - 6$



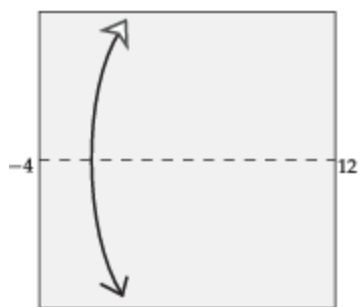
Fonte: Thomas Hull, 2013.

Para obter a imagem acima inicie com uma folha de papel quadrada grande e imagine que ela representa o plano xy com $-4 \leq x \leq 12$ e $-8 \leq y \leq 8$.

Iniciando a construção:

- Passo 1: Dobre ao meio para formar o eixo x .

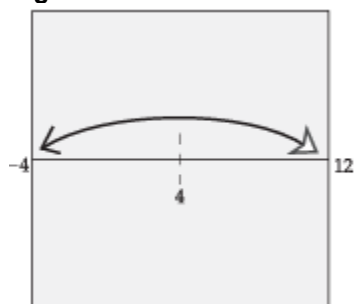
Figura 106 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 1



Fonte: Thomas Hull, 2013.

- Passo 2: Faça um vinco em $x = 4$.

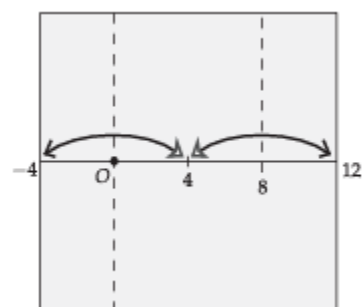
Figura 107 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 2



Fonte: Thomas Hull, 2013.

- Passo 3: Dobre o eixo y e a linha $x = 8$.

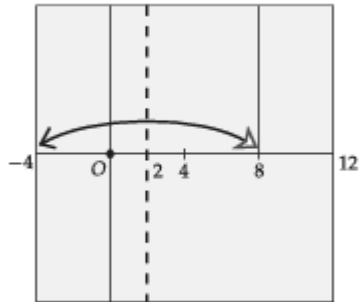
Figura 108 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 3



Fonte: Thomas Hull, 2013.

- Passo 4: Dobre a linha $x = 2$.

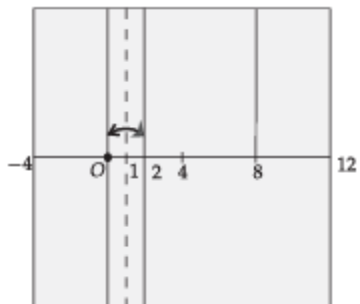
Figura 109 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 4



Fonte: Thomas Hull, 2013.

- Passo 5: Dobre a linha $x = 1$.

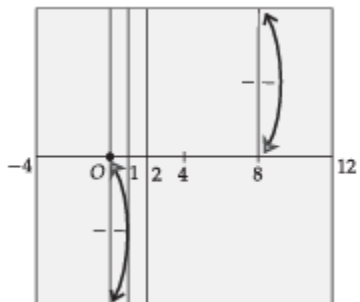
Figura 110 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 5



Fonte: Thomas Hull, 2013.

- Passo 6: Faça esses vincos adicionais.

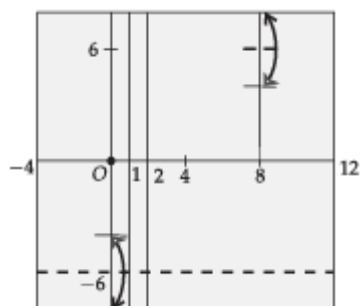
Figura 111 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 6



Fonte: Thomas Hull, 2013.

- Passo 7: Dobre a linha $y = -6$ e faça um vinco em $y = 6$.

Figura 112 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 7

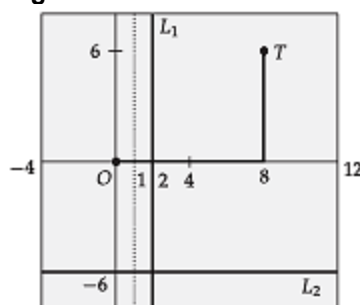


Fonte: Thomas Hull, 2013.

- Pronto para o Método de Lill!

Desenhe os pontos $O = (0,0)$ e $T = (8,6)$, além das linhas $L_1: y = -6$ e $L_2: x = 2$. O trajeto dos coeficientes é desenhado em negrito de O até T .

Figura 113 – Desenvolvendo o Método de Lill para $x^3 - 7x - 6$ - Parte 8



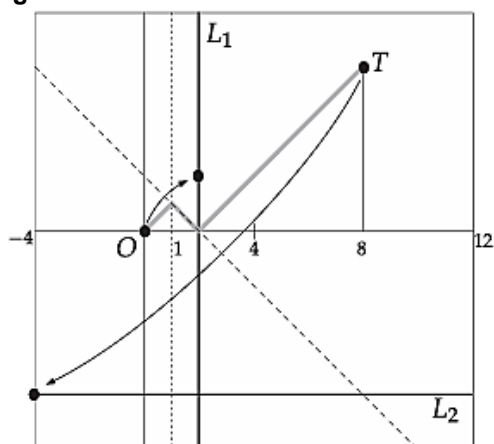
Fonte: Thomas Hull, 2013.

À medida que o sistema de coordenadas for sendo dobrado na folha, é importante traçar as linhas de vinco relevantes, para facilitar a visualização. Isso é fundamental para a execução correta da dobra que determinará o caminho do tipo *bullet path*. Marcar os pontos em O e os números 1, 2, 4 e 8 no eixo x também auxilia no processo de dobragem. Mais importante ainda é destacar as retas L_1 e L_2 com uma caneta grossa e marcar pontos grandes nos locais correspondentes a O e T .

Com o sistema de coordenadas montado e as linhas importantes traçadas, os estudantes estarão prontos para enfrentar a atividade principal: encontrar as raízes de $x^3 - 7x - 6$. Isso exige levantar a folha quadrada e dobrá-la de modo que O coincida com L_1 e T com L_2 . Utilizar uma fonte de luz para visualizar os pontos marcados de O e T através do papel pode ser útil. Como o polinômio possui três raízes reais, existem três maneiras distintas de realizar essa dobra

corretamente.

Figura 114 – Encontrando as raízes de $x^3 - 7x - 6$ - Parte 1

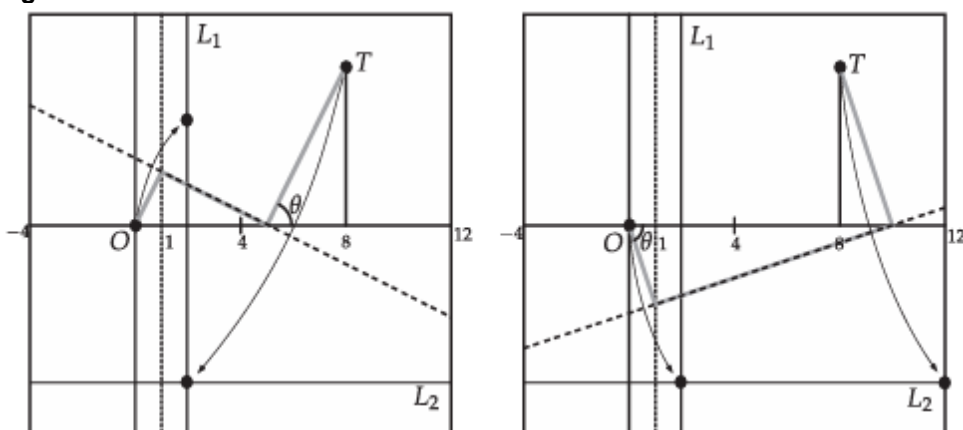


Fonte: Thomas Hull, 2013.

Um desses casos revela que o ponto T é dobrado até a posição $(-4, -6)$ sobre L_2 , enquanto O é dobrado até $(2, 2)$ sobre L_1 . Isso implica que os triângulos semelhantes formados pelos caminhos do tipo *bullet path* e pelo caminho dos coeficientes são todos triângulos retângulos isósceles de 45° . Em outras palavras, o ângulo θ em O é de 45° , portanto, $\text{tg } \theta = 1$. Assim, $x = -1$ deve ser uma raiz de $x^3 - 7x - 6$. Verificando: $(-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$.

As duas outras possibilidades são as seguintes:

Figura 115 – Encontrando as raízes de $x^3 - 7x - 6$ - Parte 2



Fonte: Thomas Hull, 2013.

- Na primeira delas, o ponto T é dobrado até o ponto de interseção das retas L_1 e L_2 , situado em $(2, -6)$. Isso significa que a linha de vinco obtida intercepta o eixo x

em $x = 5$, pois essa linha é a mediatriz do segmento entre $T = (8,6)$ e $(2,-6)$, cujo ponto médio é $(5,0)$. O triângulo retângulo formado entre os caminhos do coeficiente e do *bullet path* no ponto T possui catetos de comprimento 6 e 3, de modo que $\operatorname{tg} \theta = 6/3 = 2$. Assim, $x = -2$ é outra raiz, o que se confirma por: $(-2)^3 - 7 \cdot (-2) - 6 = -8 + 14 - 6 = 0$.

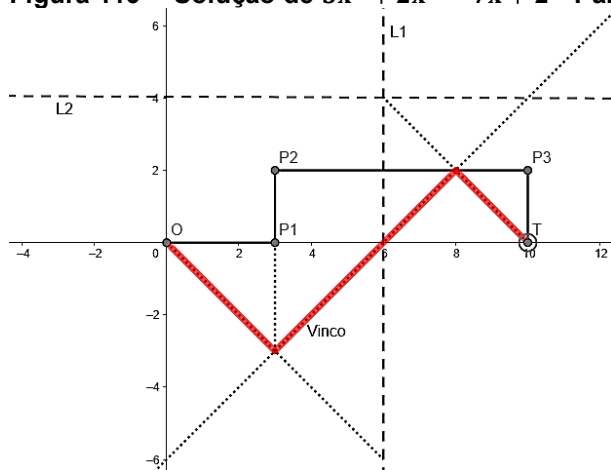
- Na última possibilidade, o ponto O é dobrado até $(2,-6)$, o que faz com que a linha de vinco intercepte a reta vertical $x = 1$ no ponto $(1,-3)$. Nesse caso, o triângulo retângulo em O possui um dos lados com comprimento negativo; um cateto mede 1 e o outro -3 . Assim, $\operatorname{tg} \theta = -3$, de modo que $x = 3$ deve ser a terceira raiz. E de fato: $(3)^3 - 7 \cdot (3) - 6 = 27 - 21 - 6 = 0$

As raízes de $x^3 - 7x - 6$ são, portanto, suficientemente convenientes, tornando esse polinômio um exemplo ideal para a aplicação do método de Beloch via origami.

Exemplo final

Encontre as raízes da equação $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$.

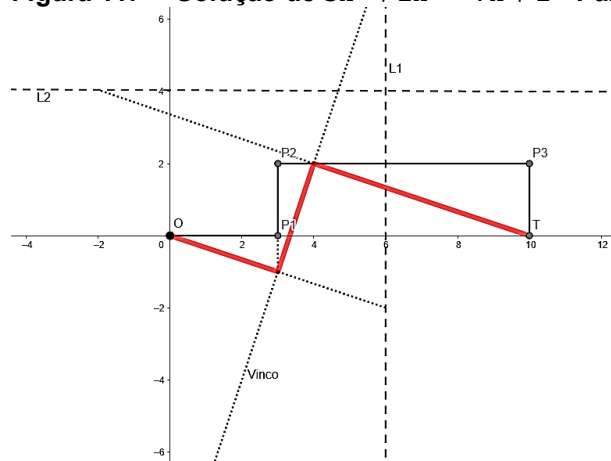
Figura 116 – Solução de $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$ - Parte 1



Fonte: Autoria própria, 2025

$$x = -\operatorname{tg} \theta = -\left(-\frac{3}{3}\right) = 1$$

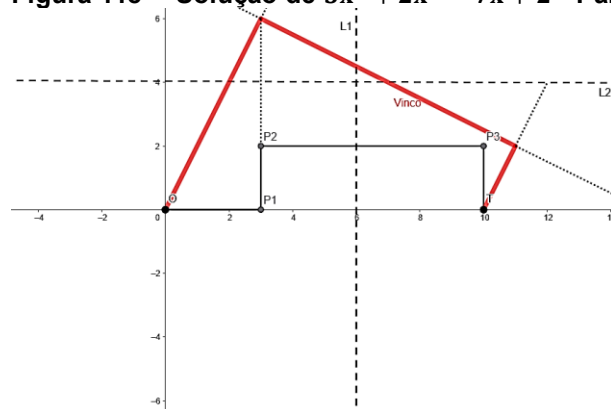
Figura 117 – Solução de $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$ - Parte 2



Fonte: Autoria própria, 2025.

$$x = -\operatorname{tg} \theta = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Figura 118 – Solução de $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$ - Parte 3



Fonte: Autoria própria, 2025.

$$x = -\operatorname{tg} \theta = -\left(\frac{6}{3}\right) = -2$$

Logo a solução são os valores $1, 1/3$ e -2 .

6. CONCLUSÃO

Ao longo da dissertação, verificou-se que as dobraduras no papel permitem uma abordagem concreta e visual de conceitos matemáticos que, muitas vezes, são tratadas de maneira excessivamente abstrata em sala de aula. A prática com dobraduras favorece o desenvolvimento de habilidades como a percepção espacial, o raciocínio lógico, a criatividade e a precisão geométrica. Além disso, possibilita aos estudantes compreenderem, de forma interativa e lúdica, conteúdos que exigem elevado nível de abstração.

As atividades propostas no capítulo final evidenciaram o valor das dobraduras como recurso para explorar relações trigonométricas, propriedades dos triângulos, construções geométricas e problemas históricos, permitindo aos alunos vivenciarem situações que integram teoria e prática. Destacou-se também a possibilidade de abordar problemas clássicos insolúveis com régua e compasso, como a trissecção do ângulo, de forma acessível e instigante por meio do origami, tornando a história da Matemática mais significativa para o aluno contemporâneo.

Portanto, conclui-se que a utilização de dobraduras no ensino de Matemática representa uma estratégia eficiente para dinamizar as aulas, diversificar metodologias e ampliar as possibilidades de compreensão e apropriação dos conteúdos. Além de enriquecer o repertório didático dos professores, esta prática contribui para tornar a Matemática mais atrativa e significativa, proporcionando aos alunos experiências de aprendizado que aliam raciocínio, arte e manipulação concreta.

Sugere-se, para trabalhos futuros, a ampliação do uso das dobraduras no ensino de outras áreas da Matemática, como Álgebra Linear e Cálculo, bem como a realização de estudos de campo que investiguem o impacto dessa prática na aprendizagem e no desempenho dos estudantes em diferentes níveis de ensino.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Iago Douglas Barros. **O corpo dos números construtíveis com régua e compasso**: os problemas clássicos da duplicação do cubo, da quadratura do círculo e da trissecção do ângulo. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2024.

ASCHENBACH, M. H. C. V.; FAZENDA, I. C. A.; ELIAS, M. D. C. **A arte-magia das dobraduras**. São Paulo: Scipione, 1992.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BUSKE, N. **Uma contribuição para o ensino de geometria utilizando origami e calidoscópio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

CAVACAMI, E.; SAITO FURUYA, Y. K. **Explorando geometria com origami**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2010.

COSTA, N. de F. G. **A dificuldade no aprendizado de geometria**. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Ciências) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2020.

CUNHA, C. P. A importância da matemática no cotidiano. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento**, v. 04, n. 01, p. 641-650, jul. 2017.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 405 p.

ELIAS, C. A. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Livraria Nobel, 1987.

FERREIRA, F. M. P.; JUSTI, R. S. Modelagem e o "fazer ciência". **Revista Química nova na escola**, v.28, p. 32-36, 2008.

FREITAS, Aline Claro de. **Origami: O uso como instrumento alternativo no ensino da geometria**. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Instituto De Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2016.

GOLAN, M.; JACKSON, P. Origametria: a program to teach geometry and to develop learning skills using the art of origami. In: LANG, Robert J. (ed.). **Origami 4 – Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education**. Natick, Massachusetts: A K Peters Ltd., 2006.

GONÇALVES, E. S. As contribuições do origami no ensino aprendizagem da

matemática. In: Anais do Congresso Internacional de Educação. 2017.

HEATH, T. L. **A History of Greek Mathematics**. Oxford: Clarendon Press, 1921.

HONDA, I. **The World of Origami**. Tokyo: Japan Publications, 1969.

HULL, T. C. **Project Origami: Activities for Exploring Mathematics**. 2 ed. New York: CRC Press. 338 p., 2013.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics: An Introduction**. 3. ed. Boston: Addison-Wesley, 2009.

KOBAYASHI, M. C. M.; YAMADA, T. R. U. Origami e kirigami: arte e cultura como recurso lúdico e educativo. **Revista Ciência e Extensão**, v. 9, n. 3, p. 148-158, São Paulo, 2013.

LANG, R. J. **The Complete Book of Origami: Step-By-Step Instructions in Over 1000 Diagrams**. Nova Iorque: Dover Publications, Inc., 1990.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 297 p.

LOPES, Juracélio Ferreira. **Cônicas e Aplicações**. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2011.

LOPES, Washington Lauriano. Filosofia da educação matemática: reflexão e pesquisa sobre a importância do ensino de matemática. Disponível em: http://www.unimesp.edu.br/arquivos/mat/tcc06/Artigo_Washington_Lauriano_Lopes.pdf. Acesso em: 14 ago. 2024.

MONTEIRO, Liliana Cristina Nogueira. **Origami: História de uma Geometria 60 Axiomática**. Dissertação (Mestrado).- Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; NACARATO, Adair Mendes (orgs.). **A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2006. p. 61-76.

PAVANELO, E.; LIMA, R. Sala de aula invertida: a análise de uma experiência na disciplina de cálculo I. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 739-759, ago. 2017.

PIMENTA, A. L.; GAZIRE, E. S. O uso do origami na prática de professores que ensinam matemática: uma abordagem axiomática em construções geométricas. **Revista do Instituto de Ciências Humanas**, v. 15, n. 21, 2019.

QUINTINO, Bruna; DAMÁZIO JÚNIOR, Valdir. O origami enquanto manifestação artística e possíveis relações com o ensino de matemática. **REnCiMa**, v. 11, n. 4, p. 254-274, 2020.

REGO, Rogéria Gaudêncio do; REGO, Rômulo Marinho do; GAUDÊNCIO JÚNIOR,

Severino. **A geometria do origami**: atividades de ensino através de dobraduras. João Pessoa: Ed. Universitária UFPB: Comped: Inep, 2003. 148 p.

ROCHA, Jordanna Souza. **Possíveis contribuições do uso de origami para o ensino de matemática na educação básica**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal de Mato Grosso. Pontal do Araguaia, 2024.

SAMPAIO, A. S.; FERREIRA, E. D. Do Oriente ao Ocidente: O Origami e suas influências. **Revista da Faculdade Eça de Queiroz**, ano 1, n. 3, São Paulo, 2011.

SANTOS, Anayara Gomes dos; SILVA, Marília Rocha de Oliveira; SANTOS, Vivia Dayana Gomes dos. A utilização do origami como material didático para o ensino de geometria espacial no ensino fundamental. XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba – Paraná, 2013.

SILVA, Guilherme Nogueira. **Origamática**: O origami no ensino-aprendizagem de Matemática. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.

SILVA, Robério Bacelar da. **Transformações geométricas no plano isometrias, homotetia e inversão**. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2024.

SPEZIA, M. Números construtíveis com Origami. Disponível em: <http://www.mtm.ufsc.br>. Acesso em: 15 maio 2025.

STILLWELL, John. *Mathematics and Its History*. 3. ed. New York: Springer, 2010.

VASCONCELOS, Fernando. **História das Matemáticas na Antiguidade**. Aillaud e Bertrand. Lisboa, 1925.

VON LINDEMANN, F. Uber die Zahl π . **Mathematische Annalen**, v. 20, p. 213-225, 1882.

WANTZEL, Pierre L. “Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas”. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, v. 2, p. 366-372, 1837.

ANEXO A – ATA DE DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO




Governo do Estado do Ceará
 Secretaria da Ciência Tecnologia e Educação Superior
 Universidade Estadual do Ceará – UECE
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA REDE NACIONAL -
 PROFMAT**




ATA DE DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO


Aos vinte e oito dias de julho de dois mil e vinte e cinco, no(a) Sala de conferências - PROFMAT, realizou-se a sessão pública de defesa da dissertação de LEANDRO ALMEIDA COSTA, aluno(a) regularmente matriculado(a) no MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA REDE NACIONAL - PROFMAT, intitulada: **O USO DAS DOBRADURAS COMO FERRAMENTA NO ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**. O(A) mestrando(a) reuniu-se com a Banca Examinadora composta por Prof. Dr. CLAUDEMIR SILVINO LEANDRO (Orientador e Presidente da Banca/UECE), Prof. Dr. NICOLAS ALCANTARA DE ANDRADE (IFCE) e Prof. Dr. TIAGO CAULA RIBEIRO (UECE) de 09:30h às 10:30h horas. Inicialmente o(a) mestrando(a) expôs seu trabalho e em seguida procedeu-se à arguição pelos membros da Banca, dispondo cada membro de tempo para tal. Finalmente a Banca reuniu-se em separado e concluiu por considerar o(a) mestrando(a) APROVADO, por sua dissertação e sua defesa pública. Eu, CLAUDEMIR SILVINO LEANDRO, presidente da banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim e os demais membros. Fortaleza, 28 de Julho de 2025.

Documento assinado digitalmente
 **CLAUDEMIR SILVINO LEANDRO**
 Data: 28/07/2025 15:55:28-0300
 Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. CLAUDEMIR SILVINO LEANDRO
 (Orientador e Presidente da Banca/UECE)

Documento assinado digitalmente
 **NICOLAS ALCANTARA DE ANDRADE**
 Data: 28/07/2025 19:11:59-0300
 Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. NICOLAS ALCANTARA DE ANDRADE
 (IFCE)

Documento assinado digitalmente
 **TIAGO CAULA RIBEIRO**
 Data: 28/07/2025 19:37:05-0300
 Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. TIAGO CAULA RIBEIRO
 (UECE)