



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ROBÉRIO BACELAR DA SILVA

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO
ISOMETRIAS, HOMOTETIA E INVERSÃO

FORTALEZA - CEARÁ

2025

ROBÉRIO BACELAR DA SILVA

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO
ISOMETRIAS, HOMOTETIA E INVERSÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro.

Coorientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro.

FORTALEZA - CEARÁ

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Silva, Robério Bacelar da.

Transformações geométricas no plano: isometrias, homotetia e inversão [recurso eletrônico] / Robério Bacelar da Silva. - 2025.

142 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Tiago Caula Ribeiro.

1. transformações geométricas. 2. rotação. 3. translação. 4. reflexão. 5. simetria. 6. homotetia. 7. inversão. I. Título.

ROBÉRIO BACELAR DA SILVA

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO
ISOMETRIAS, HOMOTETIA E INVERSÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em: 20/01/2025.

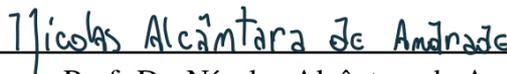
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro (Coorientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Prof. Dr. Nicolas Alcântara de Andrade
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

À minha família, por todo amor e investimento na minha vida. Sem vocês eu não chegaria a lugar algum. Todo cuidado e dedicação me deram, em todos os momentos, a esperança para seguir.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer ao Deus que criou os céus, Terra e tudo o que neles há. Agradecer a Ele porque tudo o que existe é obra de suas mãos, inclusive a Matemática. Muito obrigado Senhor pela perfeição de cada traço que fizeste nesse universo. Aos meus familiares, em especial minha esposa, Eline, mãe, Lúcia, e filhas, Suyanne e Ruth. Eu não seria completo se em mim não existisse vocês. Muito obrigado por tudo. Amo muito vocês. Aos Professores Dr. Tiago Caúla Ribeiro e Pós-Doutor Claudemir Silvino Leandro, pela excelente orientação e co-orientação, respectivamente. Os dois entraram para o seleto grupo de meus melhores professores de Matemática, juntamente com o Dr. José Ulisses de Souza Melo. Muitos procuram ensinar. Poucos sabem inspirar. Aos amigos Noemi Zeraick Monteiro que me ajudou na tradução do resumo e organização das referências bibliográficas, Paulo José Bonfim Gomes Rodrigues que muito me ajudou na confecção do Latex desse trabalho, Cícero Thiago Magalhães, cuja contribuição com materiais foi fundamental. Sem vocês, esse trabalho não estaria finalizado. Aos colegas da turma de mestrado, pela convivência ao longo desses anos e por todos os nossos estudos em conjunto.

"A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la."
(Johannes Kepler)

RESUMO

Esta dissertação de mestrado explora as transformações geométricas no plano, com foco nas isometrias (translação, rotação, reflexão), e nas transformações de homotetia e inversão. O trabalho inicia-se com uma introdução ao uso dos números complexos, cuja representação no plano complexo permite expressar e simplificar operações geométricas de forma mais acessível e intuitiva. Essa ferramenta é essencial para a compreensão das transformações. Cada tipo de transformação é abordado com definições formais e exemplos que detalham suas propriedades específicas e os elementos invariantes resultantes. As isometrias são discutidas com foco na preservação de distâncias, enquanto a homotetia e a inversão são evidenciadas em relação às mudanças de escala, destacando como essas transformações podem preservar proporções e simetrias ou introduzir novas relações. São fornecidos exemplos e ilustrações para cada transformação, evidenciando suas aplicações em configurações geométricas. Para concluir, a dissertação apresenta uma seleção de problemas práticos e teoremas que exemplificam o uso das transformações geométricas. Esses problemas incluem exercícios elaborados de provas do ENEM, de listas da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) e de outros desafios matemáticos, aplicando transformações para simplificar e resolver questões de geometria. A abordagem permite observar como as transformações geométricas revelam simetrias ocultas, tornando-se ferramenta fundamental para a resolução belíssima de inúmeras situações distintas. Este trabalho contribui para o ensino e a aplicação da geometria, integrando teoria e prática, facilitando a compreensão das simetrias e das transformações no plano. As aplicações apresentadas reforçam o papel das transformações geométricas na construção de uma visão mais ampla e prática da geometria, essencial para a resolução de problemas complexos e cotidianos.

Palavras-chave: transformações geométricas, rotação, translação, reflexão, simetria, homotetia, inversão.

ABSTRACT

This master's thesis explores geometric transformations in the plane, focusing on isometries (translation, rotation, reflection), as well as symmetries, and homothety and inversion transformations. The work begins with an introduction to the use of complex numbers, whose representation in the complex plane allows expressing and simplifying geometric operations in a more accessible and intuitive way. This tool is essential for understanding transformations. Each type of transformation is covered with formal definitions, projections, and examples that detail its specific properties and the resulting invariant elements. Isometries are discussed with a focus on preserving distances and angles, while homothety and inversion are highlighted in relation to changes in scale and position, highlighting how these transformations can preserve proportions and symmetries or introduce new relationships. Examples and illustrations are provided for each transformation, highlighting their applications in geometric configurations. To conclude, the dissertation presents a selection of practical problems and theorems that exemplify the use of geometric transformations. These problems include elaborate exercises from ENEM tests, lists from the International Mathematics Olympiad (IMO) and other mathematical challenges, applying transformations to simplify and solve geometry questions. The approach allows us to observe how geometric transformations reveal hidden symmetries, becoming a fundamental tool for the beautiful resolution of countless different situations. This work contributes to the teaching and application of geometry, integrating theory and practice, facilitating the understanding of symmetries and transformations in the plane. The applications presented reinforce the role of geometric transformations in building a broader and more practical view of geometry, essential for solving complex and everyday problems.

Keywords: geometric transformations; rotation; translation; reflection; symmetry; homothety; inversion.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Plano de Argand-Gauss | 17 |
| Figura 2 – Conjugado do Complexo | 18 |
| Figura 3 – Módulo do Complexo..... | 18 |
| Figura 4 – Argumento do Complexo..... | 19 |
| Figura 5 – Adição de Complexos..... | 20 |
| Figura 6 – Multiplicação de Complexo por Real | 21 |
| Figura 7 – Multiplicação de Complexos..... | 21 |
| Figura 8 – Translação de um Ponto | 25 |
| Figura 9 – Translação de uma Figura | 26 |
| Figura 10 – Translação de Segmento | 26 |
| Figura 11 – Translação de Círculo..... | 27 |
| Figura 12 – Duas Translações | 27 |
| Figura 13 – Translações na Direção da Reta..... | 28 |
| Figura 14 – Translações por Vetor..... | 28 |
| Figura 15 – Rotação de Ponto | 29 |
| Figura 16 – Simetria Central..... | 29 |
| Figura 17 – Rotação de Reta | 30 |
| Figura 18 – Rotação de Círculo..... | 30 |
| Figura 19 – Rotação de Figura..... | 31 |
| Figura 20 – Duas Rotações | 32 |
| Figura 21 – Duas Rotações | 33 |
| Figura 22 – Rotação de Ponto | 33 |
| Figura 23 – Rotação de Figura..... | 34 |
| Figura 24 – Rotação de Reta | 34 |
| Figura 25 – Rotação de Círculo..... | 35 |
| Figura 26 – Composição de Duas Rotações 1..... | 36 |
| Figura 27 – Composição de Duas Rotações 2..... | 36 |
| Figura 28 – Rotação com Centros O_1 e O_2 1 | 37 |
| Figura 29 – Rotação com Centros O_1 e O_2 2 | 38 |
| Figura 30 – Rotação com Centro O_1 | 38 |
| Figura 31 – Pontos Simétricos..... | 39 |

| | |
|--|-----------|
| Figura 32 – Figuras Simétricas | 39 |
| Figura 33 – Segmentos Simétricos..... | 40 |
| Figura 34 – Círculos Simétricos | 40 |
| Figura 35 – Composição de Duas Reflexões 1 | 41 |
| Figura 36 – Composição de Duas Reflexões 2 | 42 |
| Figura 37 – Composição de Duas Reflexões 3 | 42 |
| Figura 38 – Reflexões em Três Retas..... | 43 |
| Figura 39 – Reflexões nas Perpendiculares | 44 |
| Figura 40 – Rotação..... | 45 |
| Figura 41 – Isometrias no Plano Complexo 1 | 46 |
| Figura 42 – Isometrias no Plano Complexo 1 | 49 |
| Figura 43 – Reflexões em Retas..... | 52 |
| Figura 44 – Soma de Duas Reflexões 1..... | 53 |
| Figura 45 – Composição de Reflexão e Rotação | 54 |
| Figura 46 – Composição de Reflexão e Translação..... | 55 |
| Figura 47 – Composição de Rotação e Translação | 56 |
| Figura 48 – Pontos sob Reflexão Deslizante..... | 57 |
| Figura 49 – Comutatividade entre Translação e Reflexão..... | 58 |
| Figura 50 – Deslizamento Reflexão | 59 |
| Figura 51 – Homotetia de Centro O..... | 60 |
| Figura 52 – Homotetia de Centro Interno | 62 |
| Figura 53 – Homotetia de Centro Externo..... | 62 |
| Figura 54 – Centro Homotético 1..... | 63 |
| Figura 55 – Centro Homotético 2..... | 63 |
| Figura 56 – Pontos Homólogos..... | 64 |
| Figura 57 – Pontos Anti-homólogos | 64 |
| Figura 58 – Dois Círculos Homotéticos..... | 65 |
| Figura 59 – Dois Círculos Homotéticos..... | 65 |
| Figura 60 – Composição de Homotetias..... | 67 |
| Figura 61 – Circunferência de Inversão | 69 |
| Figura 62 – Ângulo entre Circunferências 1 | 70 |
| Figura 63 – Ângulo entre Circunferências 2..... | 70 |

| | |
|---|-----------|
| Figura 64 – Ângulo entre Reta e Circunferência | 71 |
| Figura 65 – Circunferências Perpendiculares 1..... | 72 |
| Figura 66 – Circunferências Perpendiculares 2..... | 72 |
| Figura 67 – Figuras Simétricas em Relação à uma Circunferência | 73 |
| Figura 68 – Inversão do Ponto A 1..... | 73 |
| Figura 69 – Inversão do Ponto A 2..... | 74 |
| Figura 70 – Circunferência passando por A..... | 74 |
| Figura 71 – Conjugado Harmônico de um Ponto 1 | 75 |
| Figura 72 – Conjugado Harmônico de um Ponto 2 | 76 |
| Figura 73 – Conjugado Harmônico de um Ponto 3..... | 76 |
| Figura 74 – Pontos Inversos e Harmônicos..... | 77 |
| Figura 75 – Inversão de Reta em Circunferência | 79 |
| Figura 76 – Inversão de Circunferência em Reta | 79 |
| Figura 77 – Inversão de Circunferência em Circunferência | 80 |
| Figura 78 – Inversão de Centros | 81 |
| Figura 79 – Preservação de Ângulos na Inversão 1 | 81 |
| Figura 80 – Preservação de Ângulos na Inversão 2 | 82 |
| Figura 81 – Tangentes à Circunferências Inversas..... | 82 |
| Figura 82 – Problema 1 | 84 |
| Figura 83 – Problema 1 | 85 |
| Figura 84 – Problema 1 | 85 |
| Figura 85 – Problema 1 | 86 |
| Figura 86 – Problema 1 | 86 |
| Figura 87 – Problema 2..... | 87 |
| Figura 88 – Problema 2..... | 87 |
| Figura 89 – Problema 2..... | 88 |
| Figura 90 – Problema 3..... | 89 |
| Figura 91 – Problema 3..... | 89 |
| Figura 92 – Problema 3..... | 90 |
| Figura 93 – Problema 3..... | 90 |
| Figura 94 – Problema 3..... | 91 |
| Figura 95 – Problema 4..... | 92 |

| | |
|---------------------------------------|------------|
| Figura 96 – Problema 4 | 92 |
| Figura 97 – Problema 4 | 93 |
| Figura 98 – Problema 4 | 93 |
| Figura 99 – Problema 5 | 94 |
| Figura 100 – Problema 5 | 94 |
| Figura 101 – Problema 5 | 95 |
| Figura 102 – Problema 5 | 95 |
| Figura 103 – Problema 5 | 96 |
| Figura 104 – Problema 6 | 97 |
| Figura 105 – Problema 6 | 97 |
| Figura 106 – Problema 6 | 98 |
| Figura 107 – Problema 7 | 99 |
| Figura 108 – Problema 7 | 100 |
| Figura 109 – Problema 8 | 101 |
| Figura 110 – Problema 8 | 102 |
| Figura 111 – Problema 8 | 102 |
| Figura 112 – Problema 9 | 103 |
| Figura 113 – Problema 9 | 103 |
| Figura 114 – Problema 9 | 104 |
| Figura 115 – Problema 9 | 104 |
| Figura 116 – Problema 9 | 104 |
| Figura 117 – Problema 10 | 105 |
| Figura 118 – Problema 10 | 105 |
| Figura 119 – Problema 10 | 106 |
| Figura 120 – Problema 10 | 106 |
| Figura 121 – Problema 10 | 107 |
| Figura 122 – Problema 11 | 108 |
| Figura 123 – Problema 11 | 109 |
| Figura 124 – Problema 11 | 110 |
| Figura 125 – Problema 12 | 111 |
| Figura 126 – Problema 12 | 112 |
| Figura 127 – Problema 12 | 112 |

| | |
|---------------------------------------|------------|
| Figura 128 – Problema 12..... | 92 |
| Figura 129 – Problema 13..... | 93 |
| Figura 130 – Problema 14..... | 93 |
| Figura 131 – Problema 15..... | 94 |
| Figura 132 – Problema 15 | 94 |
| Figura 133 – Problema 15 | 95 |
| Figura 134 – Problema 15 | 95 |
| Figura 135 – Problema 16 | 96 |
| Figura 136 – Problema 16 | 97 |
| Figura 137 – Problema 16 | 97 |
| Figura 138 – Problema 16 | 98 |
| Figura 139 – Problema 16 | 99 |
| Figura 140 – Problema 16 | 100 |
| Figura 141 – Problema 16 | 101 |
| Figura 142 – Problema 16 | 102 |
| Figura 143 – Problema 17 | 102 |
| Figura 144 – Problema 17 | 103 |
| Figura 145 – Problema 17 | 103 |
| Figura 146 – Problema 18 | 104 |
| Figura 147 – Problema 18 | 104 |
| Figura 148 – Problema 18 | 104 |
| Figura 149 – Problema 18 | 105 |
| Figura 150 – Problema 18 | 105 |
| Figura 151 – Problema 19 | 106 |
| Figura 152 – Problema 19 | 106 |
| Figura 153 – Problema 19 | 107 |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|--|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 15 |
| 2 | UM POUCO SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS | 16 |
| 2.1 | Conjugado de um Complexo | 16 |
| 2.2 | Divisão de Números Complexos | 17 |
| 2.3 | Plano de Argand-Gauss | 17 |
| 2.4 | Módulo de um número complexo | 18 |
| 2.5 | Forma Trigonométrica de um Número Complexo | 19 |
| 2.6 | Interpretações Geométricas da Adição e Multiplicação de Complexos | 20 |
| 2.7 | Aspectos Gerais das Isometrias | 22 |
| 2.7.1 | Definição e Propriedades | 22 |
| 3 | ISOMETRIAS | 25 |
| 3.1 | Translações | 25 |
| 3.1.1 | Duas Translações | 27 |
| 3.2 | Rotação por Ângulo Raso | 29 |
| 3.2.1 | Duas Rotações por Ângulo Raso | 32 |
| 3.2.2 | Sentido da Rotação | 33 |
| 3.2.3 | Rotação com Ângulo α | 33 |
| 3.2.4 | Rotação de uma reta em torno de um ponto dado | 34 |
| 3.2.5 | Rotação de um Círculo em Torno de um Ponto Dado | 35 |
| 3.2.6 | O que representa a composição de duas rotações? | 35 |
| 3.3 | Simetrias e Reflexões | 39 |
| 3.3.1 | Simetria Axial | 39 |
| 3.3.2 | Proposições sobre Simetrias | 41 |
| 3.3.3 | Formalização do conceito de Isometria | 45 |
| 4 | TEOREMAS SOBRE COMPOSIÇÃO DE ISOMETRIAS | 51 |
| 4.0.1 | Reflexões Deslizantes | 57 |
| 5 | HOMOTETIA E INVERSÃO | 60 |
| 5.1 | Homotetia | 60 |
| 5.1.1 | Propriedades da Homotetia | 61 |
| 5.1.2 | Centro Homotético de Figuras | 62 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 5.1.3 | Composição de Homotetias | 67 |
| 5.2 | Inversão | 68 |
| 5.2.1 | Ângulo entre Circunferências | 70 |
| 5.2.2 | Ângulo entre Reta e Circunferência | 71 |
| 5.2.3 | Conjugados Harmônicos | 75 |
| 5.2.4 | Construção do Conjugado Harmônico de um Ponto | 75 |
| 5.2.5 | Propriedades da Inversão | 78 |
| 6 | APLICAÇÕES DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NA RE- | |
| | SOLUÇÃO DE PROBLEMAS | 83 |
| 6.1 | Problemas | 83 |
| 6.1.1 | Problema 1 | 84 |
| 6.1.2 | Problema 2 | 87 |
| 6.1.3 | Problema 3 | 89 |
| 6.1.4 | Problema 4 | 92 |
| 6.1.5 | Problema 5 | 94 |
| 6.1.6 | Problema 6 | 97 |
| 6.1.7 | Problema 7 | 99 |
| 6.1.8 | Problema 8 | 101 |
| 6.1.9 | Problema 9 | 103 |
| 6.1.10 | Problema 10 | 105 |
| 6.1.11 | Problema 11 | 108 |
| 6.1.12 | Problema 12 | 111 |
| 6.1.13 | Problema 13 | 114 |
| 6.1.14 | Problema 14 | 115 |
| 6.1.15 | Problema 15 | 117 |
| 6.1.16 | Problema 16 | 121 |
| 6.1.17 | Problema 17 | 126 |
| 6.1.18 | Problema 18 | 133 |
| 6.1.19 | Problema 19 | 137 |
| 7 | CONCLUSÕES | 139 |
| | REFERÊNCIAS | 140 |

1 INTRODUÇÃO

As transformações geométricas desempenham um papel fundamental na matemática, particularmente na resolução de problemas complexos que envolvem simetria, distâncias e relações espaciais. No plano, as isometrias, a homotetia e a inversão são transformações essenciais que preservam, de diferentes formas, certas propriedades das figuras geométricas.

As isometrias são amplamente utilizadas em problemas que envolvem a preservação de distâncias e ângulos. Essas transformações garantem que a figura inicial e a transformada sejam geometricamente equivalentes, o que é particularmente útil em problemas de congruência, pavimentações e simetrias. A capacidade de manipular figuras mantendo suas características principais faz das isometrias uma ferramenta versátil não apenas em matemática, mas também em física, especialmente no estudo de simetrias em sistemas físicos, e em áreas como a computação gráfica, onde a renderização de objetos precisa preservar proporções e ângulos.

A homotetia, por sua vez, permite a ampliação ou redução de figuras no plano de maneira proporcional, preservando a forma, mas alterando as dimensões. Isso é crucial em problemas que envolvem semelhança de figuras, escalas e proporções. Na engenharia e no design, por exemplo, o conceito de homotetia é aplicado na criação de modelos em escalas diferentes, tanto para simulações físicas quanto para representações gráficas.

A inversão geométrica, uma transformação menos intuitiva, é notável por sua capacidade de transformar figuras complexas em formas mais simples. Ela converte circunferências e retas umas nas outras, facilitando a resolução de problemas que envolvem interseções e tangências. Em matemática, a inversão é usada em problemas de geometria avançada e na análise complexa. Essa transformação também é aplicada na física, especialmente no estudo de campos eletromagnéticos e de singularidades em sistemas dinâmicos, onde o comportamento das forças pode ser descrito utilizando simetrias inversivas.

As transformações geométricas são essenciais na computação gráfica. Isometrias e homotetias são utilizadas para criar animações e gráficos tridimensionais, enquanto a inversão aparece em simulações físicas. Na física, as transformações geométricas ajudam a modelar sistemas de partículas e estudar propriedades de simetria em fenômenos naturais. Em áreas como arquitetura e design, elas são usadas para projetar estruturas eficientes e visualmente atraentes. Dessa forma, o estudo das transformações geométricas vai além do campo puramente matemático, influenciando diretamente a forma como compreendemos e interagimos com o mundo ao nosso redor.

2 UM POUCO SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS

O conjunto dos Números Complexos é o conjunto \mathbb{C} de todos os pares ordenados de números reais munido das operações de adição e multiplicação assim definidas:

$$\text{Adição: } (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$

$$\text{Multiplicação: } (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Se identificarmos o número real a com o par ordenado $(a, 0)$, verifica-se a compatibilidade das operações, ou seja, $a + b$ e $a \cdot b$ identificam-se a $(a, 0) + (b, 0)$ e $(a, 0) \cdot (b, 0)$, respectivamente. Isso permite considerar \mathbb{R} , o conjunto dos números reais, como subconjunto de \mathbb{C} , *fechado* relativamente às operações aritméticas usuais.

Além disso, observando que

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1),$$

a identificação discutida acima permite escrever $(a, b) = a + bi$, em que $i := (0, 1)$ chama-se *unidade imaginária*. Perceba que

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

o que sugere escrever $i = \sqrt{-1}$.

Dessa forma, um número complexo possui a forma geral $z = a + bi$, que é a forma algébrica, onde a é denominada parte real e b é a parte imaginária do complexo z .

$$\text{Re}(z) = a \text{ e } \text{Im}(z) = b$$

Observe que $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$ são os elementos neutros da adição e multiplicação, respectivamente. Como o leitor pode verificar, as operações de adição e multiplicação em \mathbb{C} satisfazem as mesmas leis que as operações correspondentes em \mathbb{R} . Em particular, todo complexo $z = a + bi$ admite um oposto $-z = (-a) + (-b)i$, o que permite definir a *subtração* de complexos como $w - z := w + (-z)$ (RICARDO, 2016).

2.1 Conjugado de um Complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, em que a e $b \in \mathbb{R}$, chamamos de conjugado de z , onde é representado por \bar{z} , o número complexo $\bar{z} = a - bi$ (RICARDO, 2016).

2.2 Divisão de Números Complexos

Dados dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, em que a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, para efetuarmos a divisão de z_1 por z_2 , basta multiplicarmos o numerador e denominador pelo conjugado do denominador (RICARDO, 2016).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}.$$

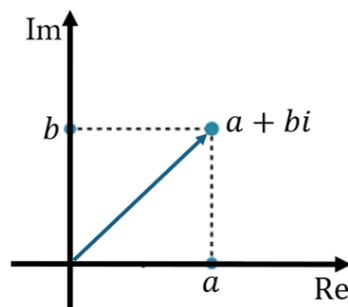
2.3 Plano de Argand-Gauss

O Plano de Argand-Gauss assemelha-se muito com o plano cartesiano. A diferença é que os eixos das abscissas e das ordenadas não terão valores de x e y , e sim de $Re(z)$ e $Im(z)$, respectivamente (RICARDO, 2016).

Inicialmente representaremos geometricamente os números complexos como pontos do plano. Aqui, vale ressaltar que Afixo é o ponto no plano complexo que representa o número complexo.

Dessa forma, $z = a + bi = (a, b)$ como mostrado na figura 1.

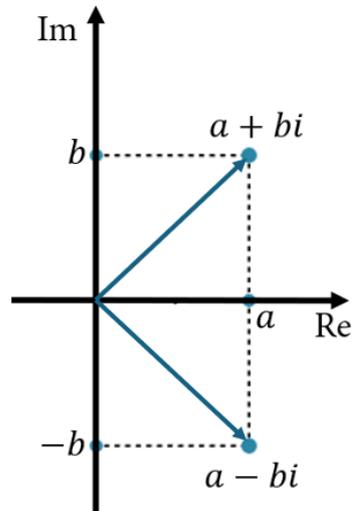
Figura 1 – Plano de Argand-Gauss



Fonte: Ricardo, 2016.

Importante observar que o conjugado de $z = a + bi = (a, b)$ é $\bar{z} = a - bi = (a, -b)$ e que geometricamente no plano de Argand-Gauss temos a reflexão de z em torno do eixo real. Veja figura 2.

Figura 2 – Conjugado do Complexo

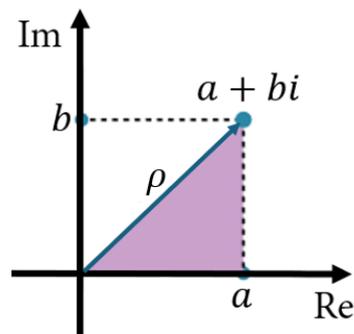


Fonte: Ricardo, 2016.

2.4 Módulo de um número complexo

Dados um número complexo $z = a + bi$, onde a e $b \in \mathbb{R}$, chamamos de módulo de z , identificado por $|z|$ ou pela letra grega ρ à distância do afixo de z à origem do plano. Observe a figura a seguir (RICARDO, 2016).

Figura 3 – Módulo do Complexo



Fonte: Ricardo, 2016.

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos lados do triângulo retângulo destacado, vem:

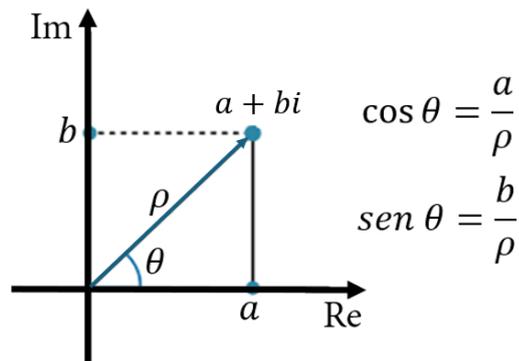
$$\rho^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Uma observação importante acerca de um número complexo z é que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. De fato, sendo $z = a + bi$, temos: $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

2.5 Forma Trigonométrica de um Número Complexo

Já sabemos que o módulo de um complexo $z = a + bi$ é dado por $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Agora, o argumento desse complexo, caso ele não seja nulo, é definido como sendo o ângulo θ medido do semi-eixo positivo real no sentido de rotação anti-horário até a semirreta de origem O que passa pelo afixo de z , conforme mostrado na figura 4.

Figura 4 – Argumento do Complexo



Fonte: Ricardo, 2016.

Da figura, temos: $\cos \theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cos \theta$ e $\sin \theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \sin \theta$. Assim:
 $z = a + bi = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho \operatorname{cis} \theta$, que é a forma trigonométrica de um complexo (RICARDO, 2016).

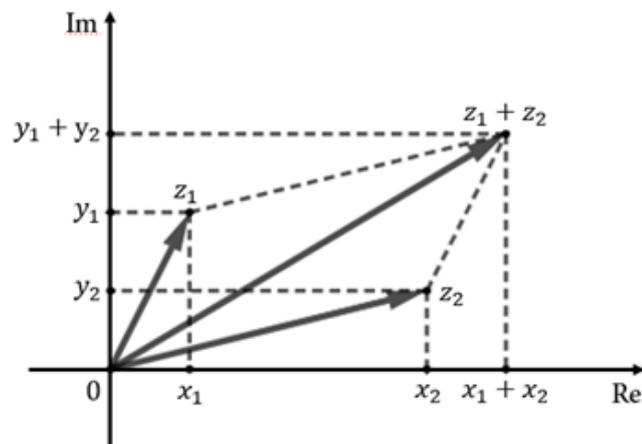
2.6 Interpretações Geométricas da Adição e Multiplicação de Complexos

Interpretação Geométrica da Adição

Nesse momento, um número complexo $z = a + bi$ será representado por um vetor com origem no ponto $(0, 0)$ do sistema de Argand-Gauss e a outra extremidade no ponto (a, b) .

Dessa forma, dados os complexos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, com $z_1, z_2 \neq 0$ e $z_1 \neq z_2$, temos que os pontos $0, z_1, z_2$ e $z_1 + z_2$ são vértices de um paralelogramo mostrado na figura 5.

Figura 5 – Adição de Complexos



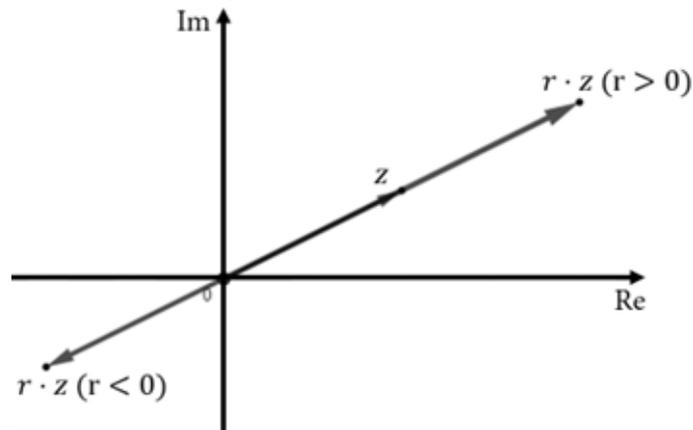
Fonte: Neves, 2014.

Se os números complexos tiverem mesma direção ou pelo menos um dos dois for 0, então, nesse caso, não podemos representar a adição por meio de um paralelogramo. Assim, a adição de vetores será um vetor de mesma direção dos vetores dados (NEVES, 2014).

Interpretação Geométrica da Multiplicação de Número Real por Número Complexo

Consideremos um número real $r \neq 0$ e um número complexo $z = (a, b)$. O número $r \cdot z = (r \cdot a, r \cdot b)$ tem a mesma direção de z , o módulo igual ao produto do módulo de r pelo módulo de z e, se $r < 0$ ($r > 0$) seu sentido é contrário (mesmo sentido) de z (Figura 6). Vale ressaltar que se $r = 0$ ou $z = 0$, temos $r \cdot z = 0$ (NEVES, 2014).

Figura 6 – Multiplicação de Complexo por Real



Fonte: Neves, 2014.

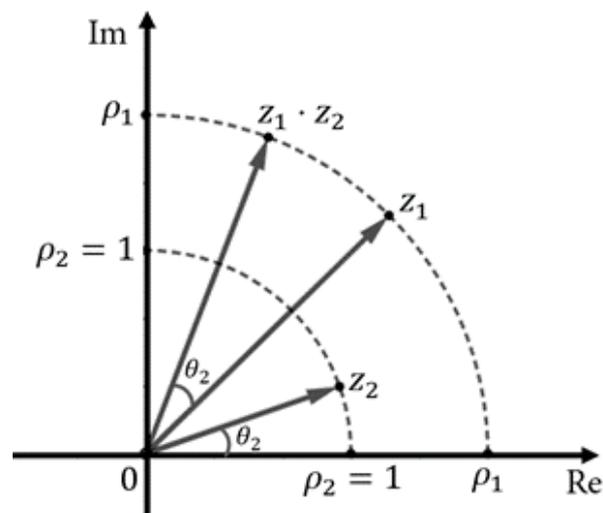
Interpretação Geométrica da Multiplicação de Números Complexos

Dados dois números complexos na forma trigonométrica $z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\theta_2)$, tem-se:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\theta_1) \cdot \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\theta_2) \iff \\ z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\theta_2 \cdot \cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i^2 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2) \iff \\ z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2 + i \cdot (\text{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_2 \cdot \cos\theta_1)) \iff \\ z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

De forma particular, se z_2 é unitário, é fácil perceber que o produto $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2))$ resulta na rotação de z_1 de um ângulo θ_2 em torno da origem como mostrado na figura 7 (NEVES, 2014).

Figura 7 – Multiplicação de Complexos



Fonte: Neves, 2014.

2.7 Aspectos Gerais das Isometrias

2.7.1 Definição e Propriedades

Para termos uma compreensão clara e objetiva do que são as isometrias e de suas aplicações na resolução de problemas, é necessário iniciarmos com uma boa discussão teórica.

Definição 2.7.1 *Uma isometria do plano é uma transformação que preserva as distâncias entre pontos do mesmo (STILLWELL, 1995).*

Mais precisamente, uma isometria é uma aplicação $T : \Pi \rightarrow \Pi$, em que Π denota o plano, tal que $\overline{T(A)T(B)} = \overline{AB}$ para quaisquer pontos $A, B \in \Pi$. Aqui, \overline{AB} denota o comprimento do segmento de reta de extremos A e B .

Isometria no plano é um assunto da Geometria das transformações. Sua abordagem visa propiciar conceituações de congruência e de semelhança de figuras, procurando desenvolver a capacidade de perceber se estas têm ou não mesma forma e mesmo tamanho independente da posição que elas ocupam no plano. Isometrias preservam não apenas distâncias, mas todas as propriedades geométricas das figuras envolvidas.

Definição 2.7.2 *Identificando o plano com o conjunto dos números complexos \mathbb{C} , uma isometria torna-se uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $|f(z) - f(w)| = |z - w|, \forall z, w \in \mathbb{C}$ (GELCA et al., 2022).*

Teorema 2.7.1 *A função f é uma isometria de \mathbb{C} se, e somente se, $f(z) = rz + s$ ou $f(z) = r\bar{z} + s$, onde r e s são constantes e $|r| = 1$.*

Demonstração. Vamos mostrar, inicialmente, que f é uma isometria. Como $f(z) = rz + s$, temos:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= |rz + s - (rw + s)| = |rz + s - rw - s| = |rz - rw| = |r(z - w)| = \\ &= |r| \cdot |z - w| = 1 \cdot |z - w| = |z - w|. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $f(z) = r\bar{z} + s$, temos:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= |r\bar{z} + s - (r\bar{w} + s)| = |r\bar{z} + s - r\bar{w} - s| = |r\bar{z} - r\bar{w}| = \\ &= |r| \cdot |\bar{z} - \bar{w}| = 1 \cdot |\overline{z - w}| = |z - w|. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que f é uma isometria. Seja $f(0) = s$. Como $1 = |1 - 0| = |f(1) - f(0)| \neq 0$, se tomarmos $r = f(1) - f(0)$, então $r \neq 0$. Podemos, então, definir g tal que $f(z) = r \cdot g(z) + s$, donde

$$f(z) - s = r \cdot g(z) \Rightarrow g(z) = \frac{f(z) - s}{r}.$$

Desse modo, temos:

$$|g(z) - g(w)| = \left| \frac{f(z) - s - f(w) + s}{r} \right| = \frac{|f(z) - f(w)|}{|r|} = |z - w|.$$

Temos ainda que:

$$|g(\bar{z}) - g(\bar{w})| = \left| \frac{f(\bar{z}) - s - f(\bar{w}) + s}{r} \right| = \frac{|f(\bar{z}) - f(\bar{w})|}{|r|} = |\bar{z} - \bar{w}| = |\overline{z - w}| = |z - w|,$$

sendo g uma isometria também, onde

$$g(0) = \frac{f(0) - s}{r} = \frac{s - s}{r} = 0 \text{ e } g(1) = \frac{f(1) - s}{r} = \frac{r + f(0) - s}{r} = \frac{r + s - s}{r} = 1.$$

A igualdade $|g(z) - g(0)| = |z - 0|$ é equivalente a $|g(z)| = |z|$, enquanto $|g(z) - g(1)| = |z - 1|$ é equivalente a $|g(z) - 1| = |z - 1|$. Usando o fato de que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, podemos transformar essas duas condições em

$$g(z) \cdot \overline{g(z)} = z \cdot \bar{z} \quad \text{e} \quad (g(z) - 1) \cdot \overline{(g(z) - 1)} = (z - 1)(\bar{z} - 1).$$

Ao abrir as contas da segunda equação, obtemos

$$g(z) \cdot \overline{g(z)} = z \cdot \bar{z} \quad \text{e} \quad g(z) + \overline{g(z)} = z + \bar{z}.$$

Dessa forma, os conjuntos $\{z, \bar{z}\}$ e $\{g(z), g(\bar{z})\}$ são soluções da equação quadrática $x^2 - (z + \bar{z}) \cdot x + (z \cdot \bar{z}) = 0$, e, portanto, devem ser iguais, isto é, $g(z) = z$ ou $g(z) = \bar{z}$.

Agora, resta mostrar que não existem $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tais que $g(z) = z$ e $g(w) = \bar{w}$. Caso contrário, teríamos: $|z - w| = |g(z) - g(w)| = |z - \bar{w}|$, ou seja, z está à mesma distância de w e \bar{w} (mais precisamente sobre a mediatriz determinada por w e \bar{w}). Porém, essa mediatriz seria o eixo real, então z seria real, o que contradiz nossa suposição. Então, ou $g(z) = z$ ou $g(z) = \bar{z}$ para todo z . Portanto, $f(z) = rz + s$ ou $f(z) = r\bar{z} + s$, onde r e s são constantes e $|r| = 1$. ■

Teorema 2.7.2 *Uma isometria transforma um segmento em um segmento congruente a ele, uma reta em uma reta, um círculo em um círculo de mesmo raio, um triângulo em um triângulo congruente a ele. Uma isometria também preserva ângulos (GELCA et al., 2022).*

Demonstração.

– Segmento

Vamos analisar o caso $f(z) = rz + s$, sendo análoga a análise para $f(z) = r\bar{z} + s$.

Nesse caso, para todo $a, b \in \mathbb{C}$ e $t \in \mathbb{R}$, a imagem de $ta + (1-t)b$ por f é

$$\begin{aligned} r(ta + (1-t)b) + s &= rta + rb - rtb + s = rta + rb - rtb + s + ts - ts = \\ &= t(ra + s) + rb(1-t) + s(1-t) = t(ra + s) + (1-t)(rb + s). \end{aligned}$$

Para $t \in [0, 1]$, isso significa que o segmento de extremidades a e b é transformado no segmento de extremidades $ra + s$ e $rb + s$. Observe ainda que

$$|ra + s - rb - s| = |ra - rb| = |r(a - b)| = |r| \cdot |a - b| = |a - b|.$$

– Círculo

Um complexo z satisfaz a equação $|z - a| = R$ se, e somente se, satisfaz a equação $|(rz + s) - (ra + s)| = R$, sendo $|r| = 1$. Dessa forma, $|z|$ pertence a um círculo de centro em a e raio R e, e somente se, $f(z) = rz + s$ pertence a um círculo de centro $f(a) = ra + s$ e raio R . Em outras palavras, a imagem por meio de uma isometria de um círculo é um círculo de mesmo raio e centro que é imagem do centro do círculo original.

– Triângulo e Ângulos

Considere um triângulo de vértices A, B, C e sejam A', B', C' as imagens de A, B, C por uma isometria. Como a isometria transforma o segmento AB no segmento congruente $A'B'$, o segmento CB no segmento congruente $C'B'$, o segmento CA no segmento congruente $C'A'$, então a imagem do triângulo ABC será o triângulo congruente $A'B'C'$. Portanto, os ângulos do triângulo ABC são os mesmos do triângulo $A'B'C'$, e a isometria preserva ângulos. ■

Polígonos podem ser decompostos em triângulos. Assim, como uma isometria transforma um triângulo em outro triângulo congruente, a isometria aplicada a um polígono o transforma em outro polígono congruente a ele. Podemos concluir o raciocínio afirmando que a noção de isometria abrange e generaliza a noção de congruência.

3 ISOMETRIAS

As isometrias são transformações que desempenham um papel central na geometria, preservando as distâncias entre os pontos e, conseqüentemente, mantendo inalteradas as formas e os tamanhos das figuras.

Este capítulo explora as diferentes formas de isometrias, como translações, rotações e reflexões, e suas propriedades fundamentais. O estudo das isometrias não apenas oferece uma compreensão mais profunda da simetria e da congruência das figuras geométricas, mas também tem aplicações em diversas áreas da matemática e em campos como a física e a computação gráfica.

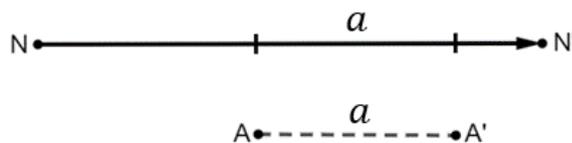
Ao longo deste capítulo, discutiremos como essas transformações funcionam e como podem ser utilizadas para analisar e resolver problemas geométricos.

3.1 Translações

Tomemos uma direção $\overrightarrow{NN'}$ no plano e um segmento dado de comprimento a .

Seja A um ponto qualquer do plano e seja A' um ponto tal que o segmento AA' tem a direção $\overrightarrow{NN'}$ e o comprimento a (Figura 8). Dizemos que o ponto A' é obtido a partir de A por uma translação na direção $\overrightarrow{NN'}$ por meio da distância a .

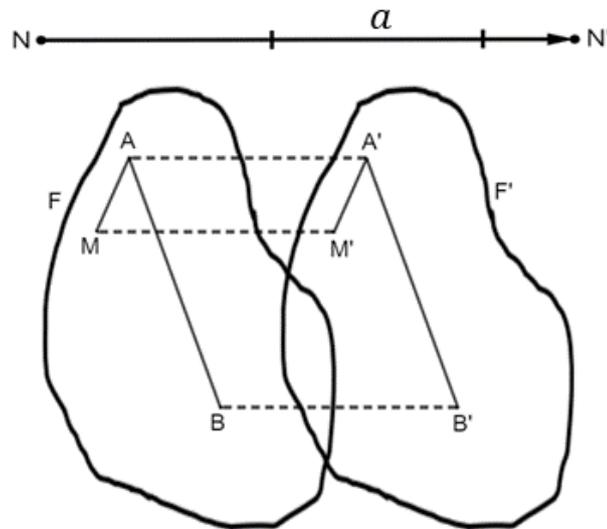
Figura 8 – Translação de um Ponto



Fonte: YAGLOM.

Analogamente, os pontos de uma figura F são transportados pela translação para um conjunto de pontos formando uma nova figura F' (Figura 9).

Figura 9 – Translação de uma Figura



Fonte: YAGLOM.

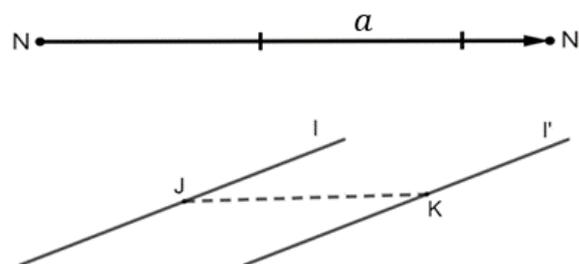
Todos os pontos de F são transladados na mesma direção e na mesma distância, ou seja, todos os segmentos de reta que unem os pontos correspondentes nas figuras F e F' são paralelos, têm mesmo sentido e mesmo comprimento.

Se A e B são pontos quaisquer de F , e A' e B' os pontos correspondentes de F' , então como $AA'B'B$ é um paralelogramo, temos $AB \parallel A'B'$ e $|AB| = |A'B'|$. Logo, se as figuras F e F' estão relacionadas por uma translação, os segmentos correspondentes nestas figuras são iguais, paralelos e têm mesmo sentido.

Inversamente, se a cada ponto da figura F corresponde um ponto de outra figura F' tal que o segmento que une um par de pontos em F é igual, paralelo e tem a mesma direção que o segmento que une o par correspondente de pontos em F' , então F e F' estão relacionados por uma translação (YAGLOM, 1962).

A translação transforma um segmento l em um segmento paralelo e congruente l' (Figura 10).

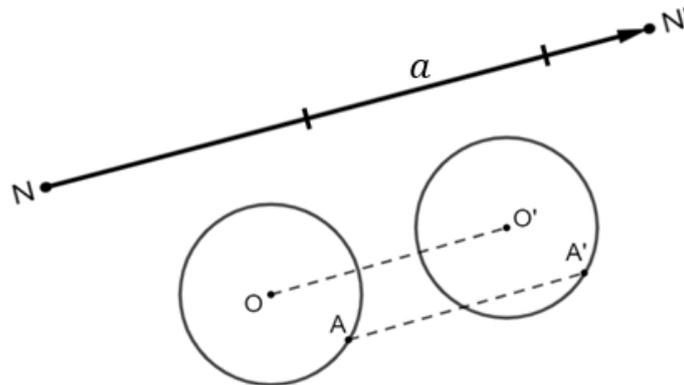
Figura 10 – Translação de Segmento



Fonte: YAGLOM.

A translação transforma um círculo S em um círculo congruente S' (Figura 11).

Figura 11 – Translação de Círculo



Fonte: YAGLOM.

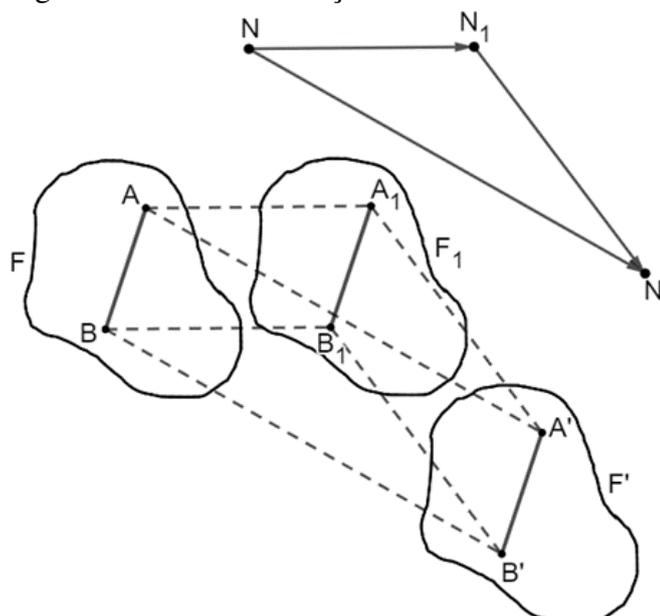
3.1.1 Duas Translações

Vamos analisar o que ocorre quando realizamos duas translações consecutivas.

Suponha que a primeira translação transforme a figura F em uma figura F_1 e a segunda transforme a figura F_1 em uma figura F' (Figura 12).

Seja NN_1 o segmento que indica a distância e a direção da primeira translação (F em F_1), N_1N' o segmento que indica a distância e a direção da segunda translação (F_1 em F'), e NN' o segmento que indica a distância e a direção da translação que transforma F em F' .

Figura 12 – Duas Translações

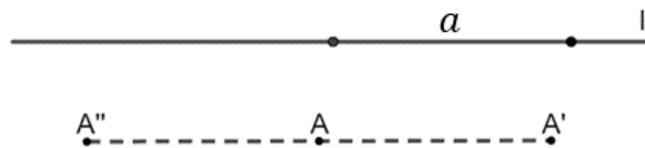


Fonte: YAGLOM.

É importante perceber que há uma única translação que transforma a figura F na figura F' . Na verdade, se a primeira translação transporta um segmento AB da figura F para o segmento A_1B_1 da figura F_1 , então $A_1B_1 \parallel AB$ e $|A_1B_1| = |AB|$ e os segmentos A_1B_1 e AB têm a mesma direção; exatamente da mesma maneira que a segunda translação transporta A_1B_1 para um segmento $A'B'$ tal que $A'B' \parallel A_1B_1$, $|A'B'| = |A_1B_1|$ e os segmentos $A'B'$ e A_1B_1 têm a mesma direção. Disto fica claro que os segmentos correspondentes AB e $A'B'$ das figuras F e F' são iguais, paralelos e têm a mesma direção. Isso significa que existe uma translação que transforma F em F' . Assim, duas translações consecutivas são substituídas por uma única translação. De uma forma geral, se as translações são determinadas pelos vetores \vec{z} e \vec{w} , a composição é a translação determinada pela soma $\vec{z} + \vec{w}$. Assim, a composição de translações se identifica à operação de adição de vetores.

Costuma-se falar de translação na direção de uma reta conhecida l através de determinada distância a . Uma das direções da reta é escolhida como positiva e a distância a é considerada positiva ou negativa conforme a direção da translação coincide com a direção positiva da reta ou é oposta a ela (YAGLOM, 1962).

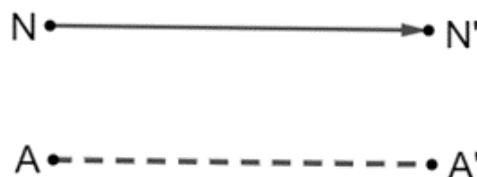
Figura 13 – Translações na Direção da reta



Fonte: YAGLOM.

Os dois pontos A' e A'' na figura 13 correspondem a diferentes distâncias de translação em relação ao sinal. Desse modo, surge de forma natural o conceito de segmentos orientados de uma reta. A translação também pode ser caracterizada por um único segmento orientado (vetor) $\overrightarrow{NN'}$ no plano, que indica ao mesmo tempo a direção e a magnitude da translação (Figura 14).

Figura 14 – Translações por Vetor

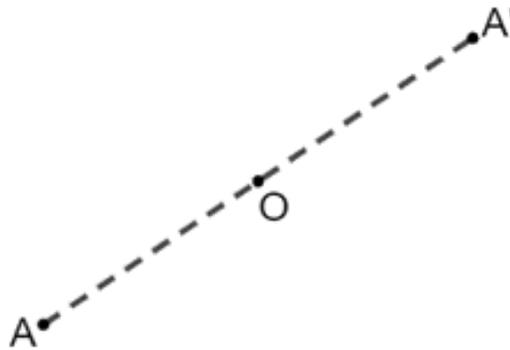


Fonte: YAGLOM.

3.2 Rotação por Ângulo Raso

Diz-se que o ponto A' é obtido a partir do ponto A por meio de um giro de meia volta em torno do ponto O (chamado centro de simetria) se O for o ponto médio do segmento AA' (Figura 15). Também dizemos que A' é obtido de A por reflexão no ponto O , ou que A' é simétrico a A em relação ao ponto O . Mais ainda, há uma simetria central em relação ao ponto O (YAGLOM, 1962).

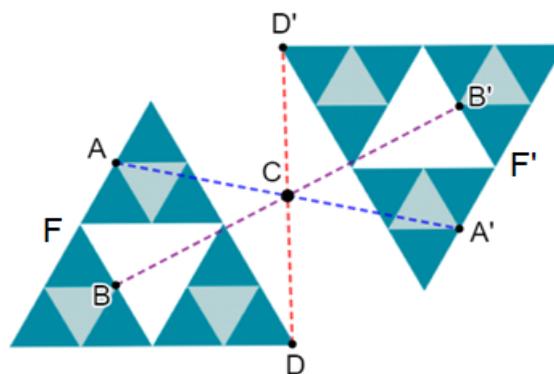
Figura 15 – Rotação de Ponto



Fonte: YAGLOM.

O conjunto de todos os pontos obtidos de uma dada figura F pelo giro de meia volta em torno do ponto C forma uma nova figura F' (Figura 16) e vice-versa (Simetria Central em relação a C).

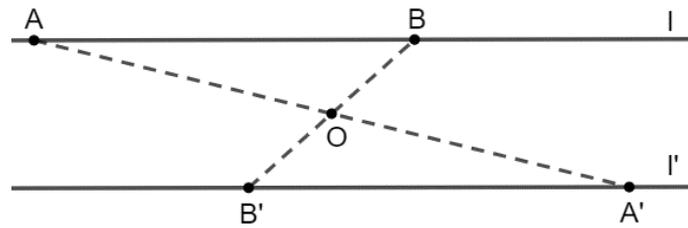
Figura 16 – Simetria Central



Fonte: Autoria Própria.

Percebamos que uma reta é transformada em uma reta paralela por um giro de meia volta (Figura 17).

Figura 17 – Rotação de Reta



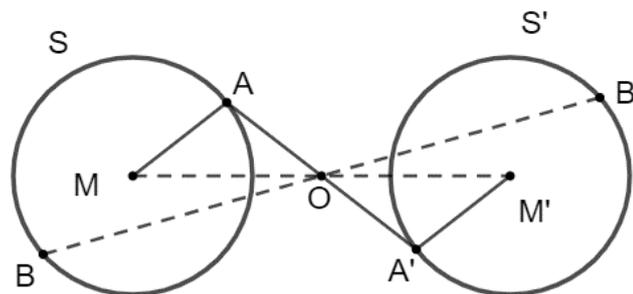
Fonte: YAGLOM.

Na mesma figura, temos dois pontos A e B em uma reta l e o ponto O fora. Ao realizarmos um giro de meia volta, obtemos os triângulos AOB e $A'OB'$.

Em relação aos triângulos AOB e $A'OB'$, podemos escrever que $OA = OA'$, $OB = OB'$ e $\hat{AOB} = \hat{A'OB'}$, donde concluímos que $\triangle AOB \equiv \triangle A'OB'$ pelo caso LAL . Daí, $\hat{OBA} = \hat{OB'A'}$ e $\hat{OAB} = \hat{OA'B'}$, isto é, as retas l e l' são paralelas.

Por rotação, uma circunferência de raio r é transformada em outra circunferência de raio r .

Figura 18 – Rotação de Círculo



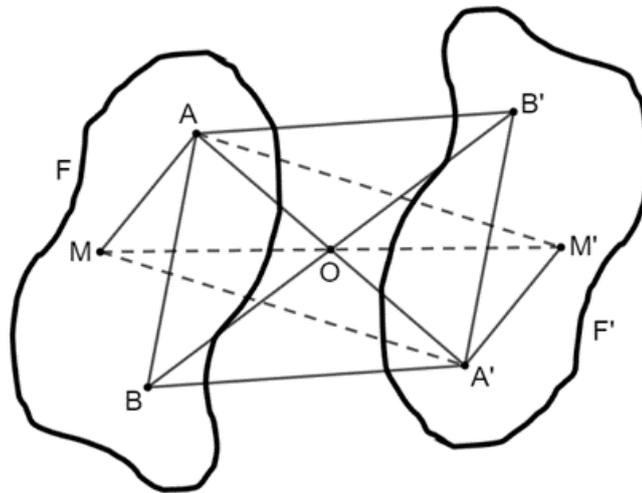
Fonte: YAGLOM.

De fato, observe que os triângulos AOM e $A'OM'$, na figura 18 são congruentes pelo caso LAL , pois $OA = OA'$, $OM = OM'$ e $\hat{AOM} = \hat{A'OM'}$. Logo, o lugar geométrico dos pontos A cuja distância a M são iguais a r (circunferência) corresponde ao lugar geométrico dos pontos A' cuja distância a M' são iguais a r (outra circunferência).

Genericamente, consideremos duas figuras F e F' rotacionadas pelo giro de meia volta em torno de um ponto O . Se AB e $A'B'$ são segmentos correspondentes das duas figuras (Figura 19), então o quadrilátero $ABA'B'$ será um paralelogramo, pois suas diagonais são divididas ao meio pelo ponto O . Assim, os segmentos correspondentes de duas figuras rotacionadas por meia volta em torno de um ponto são iguais, paralelos e direcionados de forma oposta.

Inversamente, se cada ponto de uma figura F pode ser associado a um ponto de uma figura F' tal que os segmentos que unem os pontos correspondentes dessas figuras sejam iguais, paralelos e direcionados de forma oposta, então F e F' são rotacionadas por meia volta em torno de algum ponto.

Figura 19 – Rotação de Figura



Fonte: YAGLOM.

Com efeito, tomemos um par de pontos correspondentes M e M' das figuras F e F' e seja O o ponto médio do segmento MM' . Sejam A e A' outro par qualquer de pontos correspondentes destas figuras (ver Figura 19).

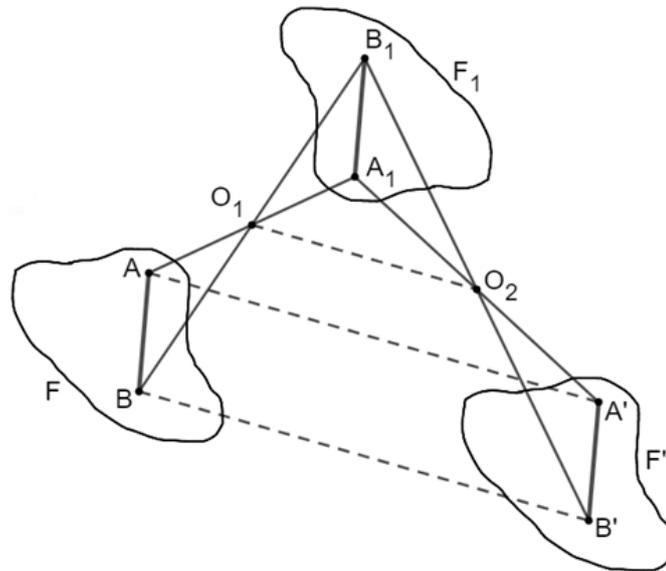
Perceba que $AM \parallel M'A'$ e $AM' \parallel MA'$, donde o quadrilátero $AMA'M'$ é um paralelogramo e o ponto médio da diagonal AA' coincide com o ponto médio O de MM' , ou seja, o ponto A' é obtido de A por um giro de meia volta em torno do ponto O . Como os pontos A e A' formam um par arbitrário de pontos correspondentes, a figura F' é obtida de F por meia volta em torno de O .

3.2.1 Duas Rotações por Ângulo Raso

Vamos analisar o que ocorre ao realizarmos duas rotações consecutivas.

Sejam F, F_1 e F' três figuras tais que F_1 é obtida a partir de F pelo giro de meia volta em torno do ponto O_1 , e F' é obtida a partir de F_1 também pelo mesmo giro, mas em torno do ponto O_2 (Figura 20) (YAGLOM, 1962).

Figura 20 – Duas Rotações



Fonte: YAGLOM.

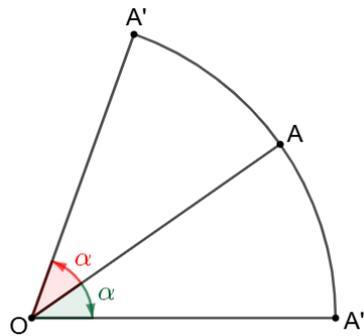
Tomemos o segmento A_1B_1 da figura F_1 , e sejam AB e $A'B'$ os segmentos correspondentes nas figuras F e F' , respectivamente. Então, $|A_1B_1| = |AB|$, e esses segmentos são paralelos e com direções opostas. Analogamente, $|A_1B_1| = |A'B'|$, e esses segmentos são paralelos e direcionados de forma oposta. Assim, AB e $A'B'$, são paralelos e têm a mesma direção.

Dessa forma, como dois quaisquer segmentos correspondentes das figuras F e F' são iguais, paralelos e têm a mesma direção, então F' pode ser obtida de F por meio de uma translação. Assim, a soma de duas meias voltas é uma translação. Isso também pode ser visto diretamente na figura 20. Como O_1O_2 é uma reta que une os pontos médios dos lados AA_1 e $A'A_1$ do triângulo AA_1A' , segue-se que $AA' \parallel O_1O_2$ e $AA' = 2O_1O_2$ (base média do $\triangle AA_1A'$), isto é, cada ponto A' da figura F' é obtido do ponto correspondente A da figura F por uma translação na direção O_1O_2 através de uma distância igual ao dobro do segmento O_1O_2 .

3.2.2 Sentido da Rotação

Seja O um ponto fixo dado e tomemos outro ponto A distinto de O . Existem dois sentidos de rotação de A de um ângulo α em relação a O : o horário e o anti-horário (Figura 21). Para ambos os sentidos de rotação, obtemos dois pontos novos A'' e A' , respectivamente, resultantes da rotação de A segundo o ângulo α . Convencionemos como positivo o sentido anti-horário e negativo o horário (YAGLOM, 1962).

Figura 21 – Duas Rotações

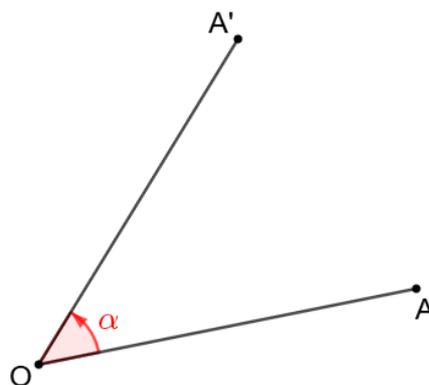


Fonte: YAGLOM.

3.2.3 Rotação com Ângulo α

Vamos considerar um ponto O do plano, um ângulo α e um sentido de rotação, por exemplo, anti-horário. Seja A um ponto arbitrário do plano e seja A' o ponto tal que $|OA'| = |OA|$ e $\hat{A}OA' = \alpha$. Dizemos que o ponto A' é obtido a partir do ponto A por meio de uma rotação com centro O e ângulo de rotação α , ou que o ponto A é transportado para A' por esta rotação (Figura 22) (YAGLOM, 1962).

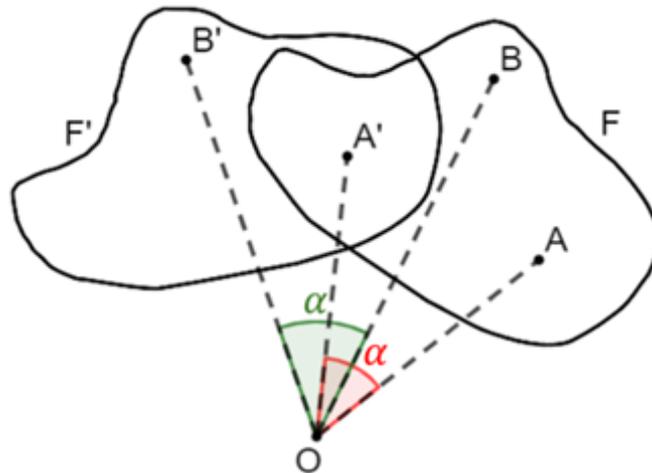
Figura 22 – Rotação de Ponto



Fonte: YAGLOM.

O conjunto de todos os pontos obtidos a partir dos pontos de uma figura F por uma rotação em torno de um ponto O através de um ângulo α forma uma nova figura F' como se vê na figura 23. Aqui, todos os pontos da figura F são movidos ao longo de círculos com o mesmo centro O e todos descrevem os mesmos arcos desses círculos.

Figura 23 – Rotação de Figura

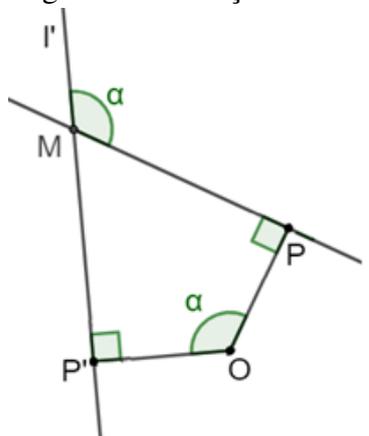


Fonte: YAGLOM.

3.2.4 Rotação de uma reta em torno de um ponto dado

Para rotacionar de um ângulo α uma reta l em torno de um ponto O , inicialmente tomamos uma perpendicular a l por O que intersecta l em P . Depois, rotacionamos P por um ângulo α e obtemos P' . Finalmente, traçamos uma reta l' por P' perpendicular a OP' conforme mostra a figura 24 (YAGLOM, 1962).

Figura 24 – Rotação de Reta



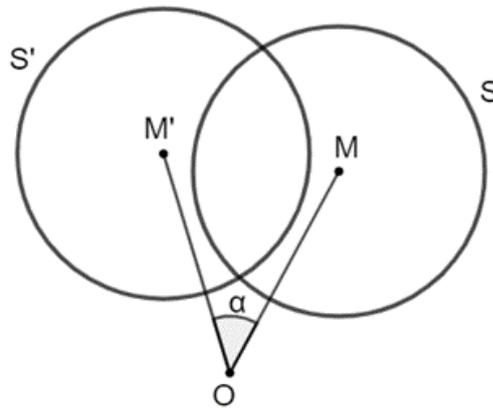
Fonte: YAGLOM.

O ângulo entre as retas l e l' também mede α , pois se chamarmos o ponto de intersecção das retas de M , o quadrilátero $OPMP'$ é inscritível já que $\hat{P} + \hat{P}' = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Assim, $\hat{PMP}' = 180^\circ - \alpha$ e o ângulo formado pelas retas é o suplemento deste, ou seja, α .

3.2.5 Rotação de um Círculo em Torno de um Ponto Dado

Para rotacionar um círculo S e gerar um novo círculo S' por uma rotação de um ângulo α em torno de um ponto O , deve-se girar o centro M do círculo S segundo o ângulo α em torno de O e então construir um círculo com o novo centro M' e o mesmo raio do círculo original (Figura 25) (YAGLOM, 1962).

Figura 25 – Rotação de Círculo

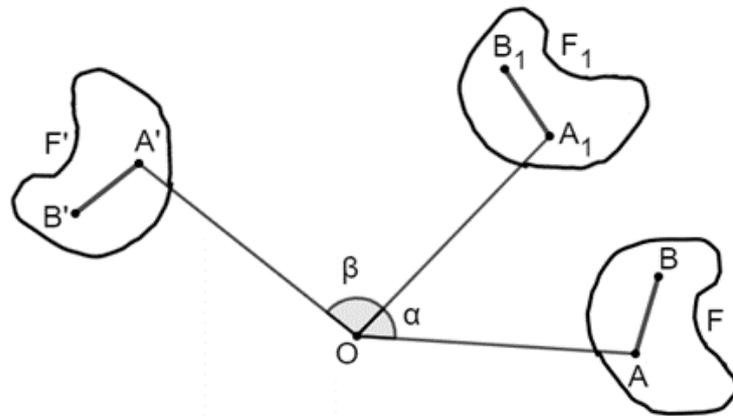


Fonte: YAGLOM.

3.2.6 O que representa a composição de duas rotações?

Em primeiro lugar, fica claro pela própria definição de rotação que a composição de duas rotações (na mesma direção ou sentido) com centro comum O e com ângulos de rotação respectivamente iguais a α e β é uma rotação em torno do mesmo centro O com ângulo de rotação $\alpha + \beta$ (Figura 26) (YAGLOM, 1962).

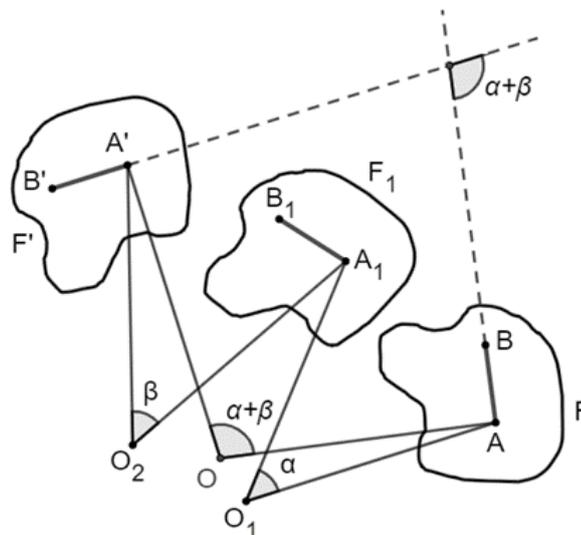
Figura 26 – Composição de Duas Rotações 1



Fonte: YAGLOM.

De um modo geral, seja a figura F_1 obtida de F por meio de uma rotação com centro O_1 e ângulo α , e seja a figura F' obtida de F_1 por uma rotação no mesmo sentido com centro O_2 e ângulo β (Figura 27). Se a primeira rotação transporta o segmento AB da figura F para o segmento A_1B_1 da figura F_1 , e se a segunda rotação transporta o segmento A_1B_1 para o segmento $A'B'$ da figura F' , então os segmentos AB e A_1B_1 são iguais e formam um ângulo α ; os segmentos A_1B_1 e $A'B'$ são iguais e formam um ângulo β .

Figura 27 – Composição de Duas Rotações 2



Fonte: YAGLOM.

Assim, $|AB| = |A'B'|$ e formam um ângulo $\alpha + \beta$; se $\alpha + \beta = 360^\circ$, os segmentos correspondentes das figuras F e F' serão paralelos. Segue-se que F e F' estão relacionadas por uma rotação segundo o ângulo $\alpha + \beta$, se $\alpha + \beta \neq 360^\circ$, e por uma translação se $\alpha + \beta = 360^\circ$.

Por outro lado, a composição de duas rotações no mesmo sentido, com centros O_1 e

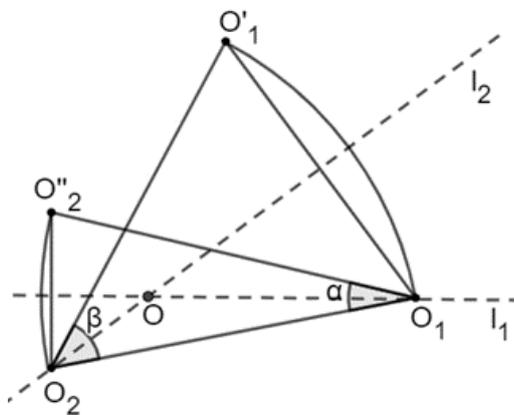
O_2 e ângulos α e β é uma rotação segundo o ângulo $\alpha + \beta$, se $\alpha + \beta \neq 360^\circ$, e é uma translação, se $\alpha + \beta = 360^\circ$. Como uma rotação segundo um ângulo α é equivalente a uma rotação de $360^\circ - \alpha$ no sentido oposto, a composição de duas rotações é uma translação se essas rotações tiverem os mesmos ângulos de rotação, mas direções de rotação opostas.

Vamos analisar como, a partir dos centros O_1 e O_2 e dos ângulos α e β de duas rotações, pode-se encontrar a rotação ou translação que representa a sua composição. Suponha que $\alpha + \beta \neq 360^\circ$. Neste caso, a composição das rotações é uma rotação de ângulo $\alpha + \beta$; vamos encontrar o seu centro.

A composição das duas rotações leva o centro O_1 da primeira rotação para um ponto O'_1 tal que $|O'_1O_2| = |O_1O_2|$ e $\widehat{O_1O_2O'_1} = \beta$ (Veja a figura 28; a primeira rotação deixa O_1 no lugar, e a segunda leva O_1 para O'_1). A composição das duas rotações leva um ponto O''_2 para O_2 tal que $|O''_2O_1| = |O_2O_1|$ e $\widehat{O''_2O_1O_2} = \alpha$ (a primeira rotação leva O''_2 para O_2 e a segunda deixa O_2 no lugar).

Figura 28 – Rotação com Centros O_1 e O_2

1

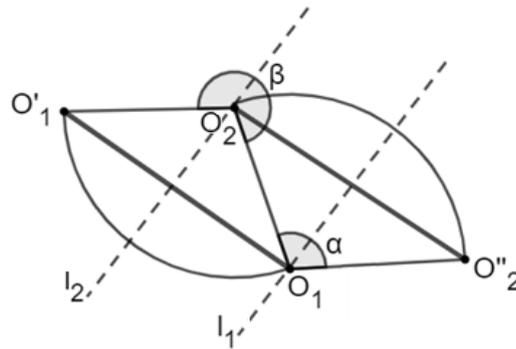


Fonte: YAGLOM.

Disto segue-se que o centro O que procuramos equidista de O_2 e O''_2 e de O'_1 e O_1 ; conseqüentemente, O é a intersecção das mediatrizes l_1 e l_2 dos segmentos $O_2O''_2$ e O'_1O_1 , respectivamente. Contudo, na figura 28 fica claro que l_1 passa por O_1 e divide α ao meio, e que l_2 passa por O_2 e divide β ao meio.

Se $\alpha + \beta = 360^\circ$, a translação, que é igual à composição das rotações, fica determinada pelo fato de O_1 ser levado a O'_1 (ou O''_2 para O_2); aqui os pontos O'_1 e O''_2 são definidos exatamente como antes (ver figura 29); pela imagem fica claro $l_1 \parallel l_2$, perpendiculares à direção da translação, e a distância entre elas é metade da distância da translação.

Figura 29 – Rotação com Centros O_1 e O_2

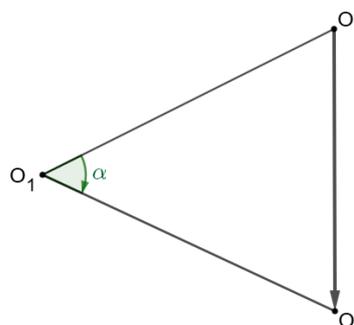


Fonte: YAGLOM.

Analogamente à prova da composição de duas rotações, pode-se mostrar que a composição de uma translação e uma rotação (e a composição de uma rotação e uma translação) é uma rotação no mesmo ângulo que a primeira rotação, mas com um centro diferente. A composição de uma translação com uma rotação pode ser provada como descrito a seguir.

Sabemos que a composição de duas rotações com o mesmo ângulo α , mas com sentidos de rotação opostos, é uma translação que carrega para o centro O_2 da segunda rotação um ponto O_2'' tal que $|O_1O_2''| = |O_1O_2|$ e $\angle O_2''O_1O_2 = \alpha$ (ver figura 29). Vamos representar a translação dada na forma de uma soma de duas rotações, a segunda das quais tem o mesmo centro O e o mesmo ângulo α da rotação dada, mas tem sentido de rotação oposto. Assim a composição da translação e da rotação foi substituída pela soma de três rotações, mas as duas últimas rotações anulam-se e ficamos com uma única rotação com centro O_1 .

Figura 30 – Rotação com Centro O_1



Fonte: YAGLOM.

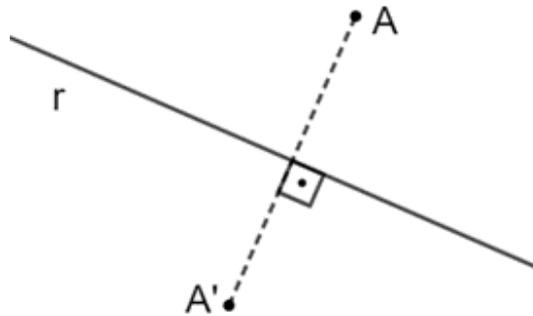
De forma análoga mostra-se a composição de uma rotação e uma translação.

3.3 Simetrias e Reflexões

3.3.1 Simetria Axial

Seja um A um ponto do plano e r uma reta do mesmo plano. O ponto A' é a imagem de A por uma reflexão na reta r (chamada eixo de simetria) se o segmento AA' for perpendicular a r e estiver dividido ao meio por r . Podemos dizer também que A' é a imagem de A em r , ou simétrico de A , e, inversamente, A é a imagem de A' em r , ou simétrico de A' como mostrado na figura abaixo (YAGLOM, 1962).

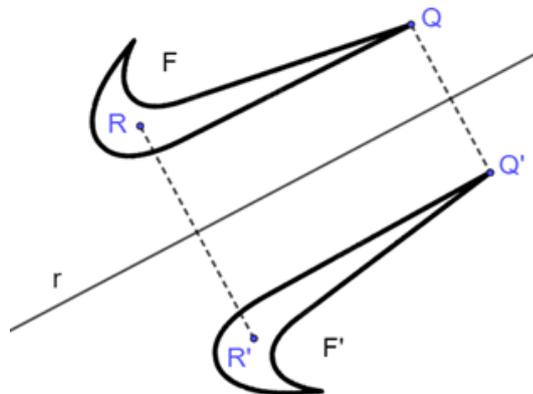
Figura 31 – Pontos Simétricos



Fonte: YAGLOM.

Desse modo, se tomarmos todas as imagens em relação a uma reta r dos pontos de uma figura F , teremos uma figura F' que é denominada imagem da figura F por reflexão em r (Figura 32).

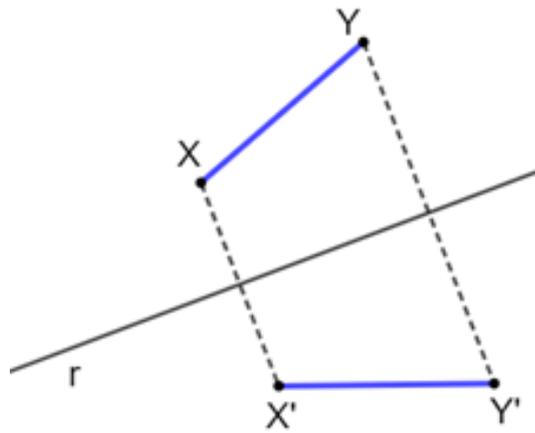
Figura 32 – Figuras Simétricas



Fonte: Autoria própria.

De uma forma geral, o simétrico de um segmento de reta XY em relação à uma reta r é um outro segmento de reta $X'Y'$ (Figura 33).

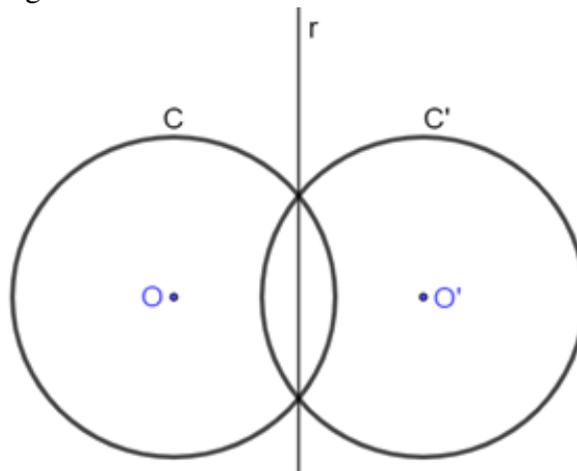
Figura 33 – Segmentos Simétricos



Fonte: YAGLOM.

O simétrico de um círculo C em relação à uma reta r é um círculo C' (Figura 34).

Figura 34 – Círculos Simétricos

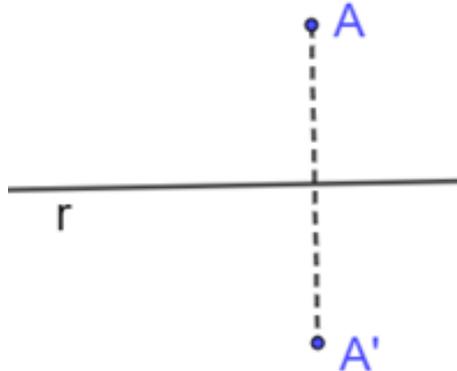


Fonte: YAGLOM.

3.3.2 Proposições sobre Simetrias

Proposição 3.3.1 *A composição de duas reflexões em uma mesma reta é a transformação identidade (YAGLOM, 1962).*

Figura 35 – Composição de Duas Reflexões 1



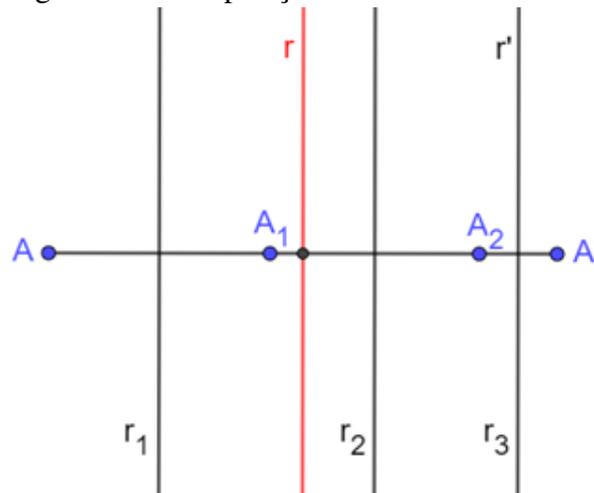
Fonte: YAGLOM.

Demonstração. Na figura acima, percebemos que uma reflexão em relação à reta r , leva o ponto A para o ponto A' . Assim, uma segunda reflexão em relação a r , leva A' de volta para A , ou seja, como resultado de duas reflexões, a posição do ponto A não muda. Podemos dizer que duas reflexões em relação à mesma reta se cancela, ou seja, a composição de uma reflexão com ela própria é a identidade. ■

Proposição 3.3.2 *A composição das reflexões em três retas paralelas ou em três retas que se cruzam em um único ponto é uma reflexão em uma reta (YAGLOM, 1962).*

Demonstração. Suponhamos primeiro que as três retas r_1, r_2, r_3 sejam paralelas (Figura 36). A composição das reflexões nas retas r_1 e r_2 é uma translação na direção perpendicular a r_1 e r_2 através de uma distância igual ao dobro da distância entre elas. Agora, suponha que r' coincida com r_3 e substitua a composição das nossas três reflexões pela composição das reflexões nas retas r, r' e r_3 . Dessa forma, as duas últimas reflexões se cancelam e assim resta apenas a reflexão na reta r .

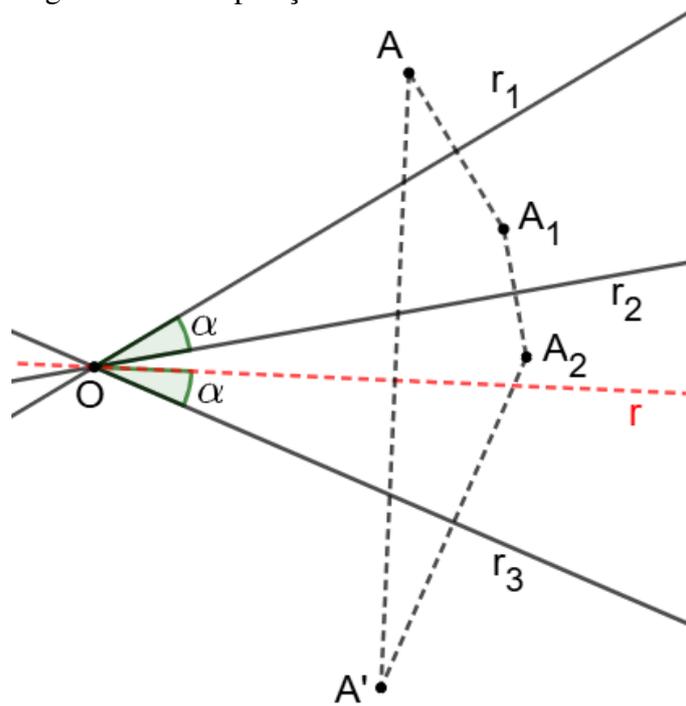
Figura 36 – Composição de Duas Reflexões 2



Fonte: YAGLOM.

Agora consideremos que as retas r_1, r_2 e r_3 concorram em um ponto O (Figura 37).

Figura 37 – Composição de Duas Reflexões 3



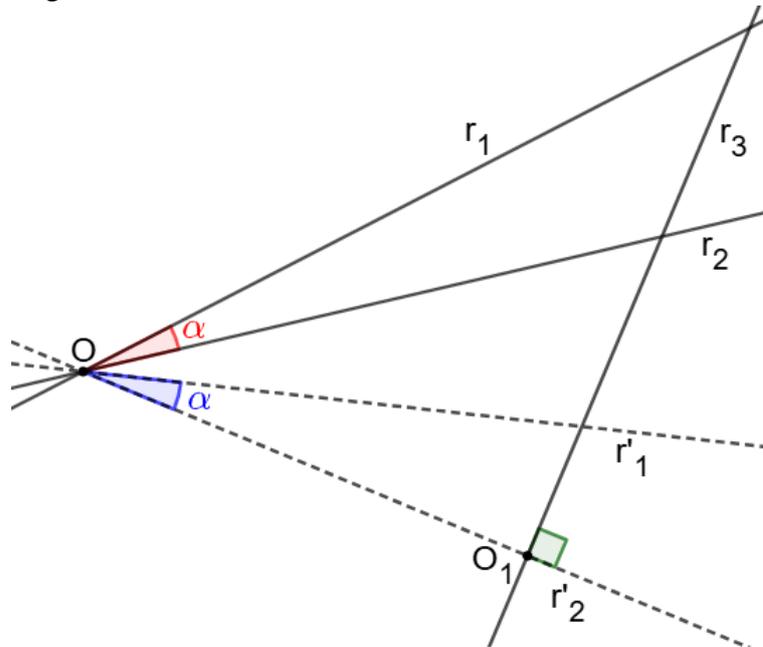
Fonte: YAGLOM.

A composição das reflexões em r_1 e r_2 é uma rotação em torno de O por meio do ângulo $2\angle r_1 O r_2 = 2\alpha$ e coincide com a composição das reflexões nas retas r e r_3 , onde r passa por O e $\angle r O r_3 = \angle r_1 O r_2$. Portanto, a composição das reflexões em r_1, r_2 e r_3 é igual à uma única reflexão em r . ■

Proposição 3.3.3 *A composição das reflexões em três retas, que se cruzam aos pares em três pontos, ou de modo que duas delas sejam paralelas e a terceira as intersecte, é uma reflexão deslizante (YAGLOM, 1962).*

Demonstração. Sejam as retas r_1 e r_2 concorrentes no ponto O conforme figura abaixo.

Figura 38 – Reflexões em Três Retas



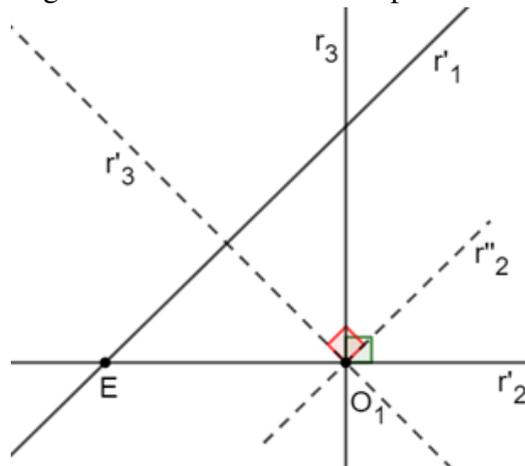
Fonte: YAGLOM.

A composição das reflexões em r_1 e r_2 é uma rotação com centro O e ângulo $2\angle r_1 O r_2 = 2\alpha$. Portanto, a composição dessas reflexões pode ser substituída pela composição das reflexões em quaisquer duas retas r'_1 e r'_2 , concorrentes no mesmo ponto O e formando o mesmo ângulo que r_1 e r_2 .

Escolhemos as retas r'_1 e r'_2 tais que $r'_2 \perp r_3$, e substituímos a composição das reflexões em r_1, r_2 e r_3 pela composição das reflexões nas retas r'_1, r'_2 e r_3 , ou seja, pela soma de uma reflexão em r'_1 e meia volta em torno do ponto de intersecção de r_3 e r'_2 , isto é, O_1 , que é o mesmo que a composição de uma reflexão na reta r'_1 e uma reflexão no ponto O_1 , pois, a composição das reflexões em duas linhas perpendiculares é meia volta em torno de seu ponto de intersecção.

Agora vamos substituir a composição das reflexões nas retas perpendiculares r'_2 e r_3 pela composição das reflexões em duas novas retas perpendiculares r''_2 e r'_3 , cruzando o mesmo ponto O_1 , e tais que $r''_2 \parallel r'_1$ (Figura 39). Isso é possível porque a composição das reflexões em r''_2 e r'_3 corresponde à meia volta em torno de O_1 .

Figura 39 – Reflexões nas Perpendiculares



Fonte: YAGLOM.

Simultaneamente, a composição das reflexões em r'_1, r'_2 e r_3 é substituída pela composição das reflexões em r'_1, r''_2 e r'_3 . Contudo, a composição das reflexões nas linhas paralelas r'_1 e r''_2 é uma translação na direção r'_3 perpendicular a r'_1 e r''_2 . Dessa forma, a composição das reflexões em r'_1, r''_2 e r'_3 é igual à composição de uma translação na direção r'_3 e uma reflexão em r'_3 , ou seja, uma reflexão deslizante com eixo r'_3 .

Quando r_1 e r_2 são paralelas, e r_2 e r_3 se cruzam em um ponto O , a prova procede exatamente da mesma maneira, sendo necessário primeiro substituir a composição das reflexões das retas r_2 e r_3 pela composição das reflexões das retas r'_2 e r'_3 que se cruzam no mesmo ponto O , e tais que $r'_2 \perp r_1$, e, então, substituir a composição das reflexões nas retas perpendiculares r_1 e r'_2 pela composição das reflexões nas retas perpendiculares r'_1 e r''_2 , que se cruzam no mesmo ponto O e tais que $r''_2 \parallel r'_3$. ■

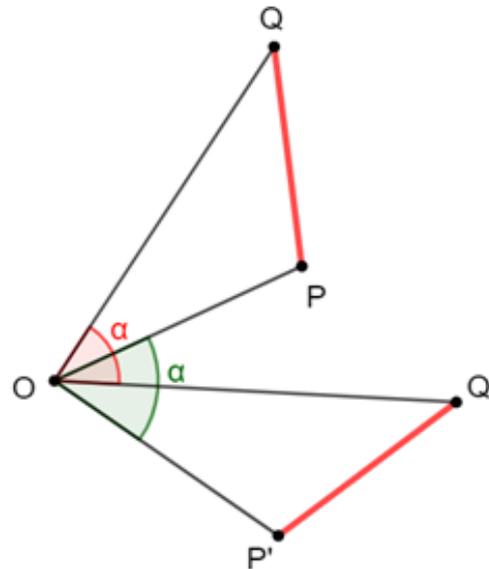
3.3.3 Formalização do conceito de Isometria

Definição 3.3.1 *Uma transformação que preserva distâncias é chamada de isometria (LEONARD et al., 2014).*

Teorema 3.3.4 *Rotações, reflexões e translações são isometrias (LEONARD et al., 2014).*

Demonstração. Vamos mostrar que uma rotação é uma isometria.

Figura 40 – Rotação



Fonte: LEONARD.

Na figura acima, temos o segmento PQ , o ponto fixo O e o ângulo de rotação α .

Queremos mostrar que ao realizarmos uma rotação de ângulo α em PQ em torno de um ponto O , obteremos um segmento $P'Q'$ tal que $|PQ| = |P'Q'|$

Temos $\widehat{POP'} = \alpha = \widehat{QOQ'}$. Dessa forma, devemos ter: $\widehat{POQ} = \alpha - \widehat{Q'OP} = \widehat{P'OQ'}$.

Sendo, $|OP| = |OP'|$ e $|OQ| = |OQ'|$, temos, pelo caso de congruência LAL, que $\triangle OPQ \equiv \triangle OP'Q'$, e, portanto, $|PQ| = |P'Q'|$. Desse modo, uma rotação é uma isometria. É análoga a prova de que reflexões e translações também são isometrias. ■

Definição 3.3.2 *Duas figuras F e F' do plano serão ditas congruentes quando existir uma isometria (do plano) transformando F em F' (LEONARD et al., 2014).*

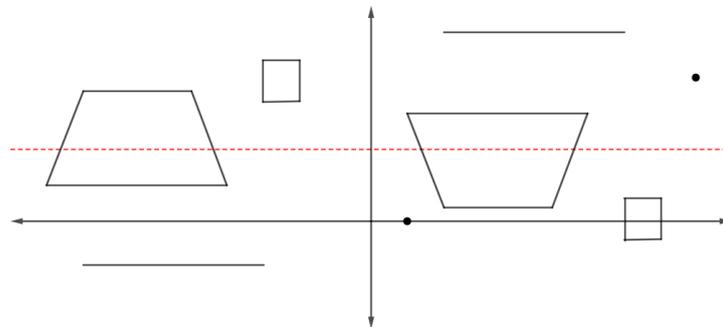
A definição clássica de congruência equivale à essa definição mais geral. Além disso, a relação de congruência é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva).

Para finalizar o capítulo, vamos complementar o Teorema 2.7.1, apresentando os:

Argumentos Geométricos para o Teorema de Classificação de Isometrias do Plano

As isometrias do plano se enquadram em quatro tipos: translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes. Uma reflexão deslizante é a composição de uma reflexão e uma translação diferente de zero em uma direção paralela à reta de reflexão. Uma imagem de uma reflexão deslizante está na figura abaixo, onde a reta de reflexão é tracejada e a translação é um movimento para a direita (CONRAD,).

Figura 41 – Isometrias no Plano Complexo 1



Fonte: CONRAD.

A partir das funções $f(z) = rz + s$ e $f(z) = r\bar{z} + s$, analisaremos os valores de r e s para classificar os tipos de isometrias correspondentes. A tabela abaixo resume as relações que provaremos entre a descrição geométrica de uma isometria e sua função correspondente. Sejam $|r| = 1$ e $\gamma^2 = r$. A identidade é a única isometria que é ao mesmo tempo uma translação e uma rotação.

| Isometria | Função | Pontos Fixos |
|---------------------|---|-------------------------|
| Identidade | z | \mathbb{C} |
| Translação não-nula | $z + s, s \neq 0$ | \emptyset |
| Rotação não-nula | $rz + s, r \neq 1$ | $\frac{s}{1-r}$ |
| Reflexão | $r\bar{z} + s, \frac{s^2}{r} \in (-\infty, 0]$ | $\frac{s}{2} + R\gamma$ |
| Reflexão Deslizante | $r\bar{z} + s, \frac{s^2}{r} \notin (-\infty, 0]$ | \emptyset |

Caso 1: $f(z) = z + s$. Temos uma translação do plano por s . Não há pontos fixos, a menos que $s = 0$, caso em que f é a identidade e todos os pontos são fixos.

Caso 2: $f(z) = rz + s, r \neq 1$. O único ponto fixo de f é $z_0 = \frac{s}{1-r}$. Aqui, f é uma rotação em torno de z_0 . Para provar isso, expressemos $f(z)$ em termos de seu ponto fixo z_0 :

$$f(z) = rz + s = rz + (1 - r)z_0 = r(z - z_0) + z_0 \quad (I).$$

Como a multiplicação por r (de valor absoluto 1, mas diferente de 1) é uma rotação não trivial em torno de O , (I) é uma rotação em torno de z_0 , pois o processo de subtrair z_0 , multiplicar por r e, em seguida, adicionar z_0 equivale a girar em torno de z_0 por um ângulo diferente de zero determinado por r como uma rotação em torno de O .

Caso 3: $f(z) = r\bar{z} + s$. Nesse caso, pode haver ou não pontos fixos. Por exemplo, a equação $\bar{z} = z$ tem a reta real como pontos fixos, enquanto a equação $\bar{z} + 1 = z$ não tem pontos fixos. Acontece que f tem uma linha inteira de pontos fixos (nesse caso mostraremos que f é a reflexão através dessa linha) ou não tem pontos fixos (caso em que mostraremos que f é uma reflexão deslizante). Vamos precisar do seguinte lema:

Lema 3.3.1 *Se uma isometria do plano fixa três pontos que não são colineares, então essa isometria é a identidade (CONRAD,).*

Precisamos assumir no lema que a isometria tem pelo menos três pontos fixos que não são colineares, uma vez que uma isometria que fixa três pontos colineares não precisa ser a identidade, pois poderia ser um reflexão através da linha que passa pelos dois pontos.

Demonstração. Podemos escrever uma isometria $f(z)$ como $rz + s$ ou $r\bar{z} + s$, onde $|r| = 1$. A menos que $f(z)$ seja a identidade, mostraremos que $f(z)$ não pode ter três pontos fixos que não estejam em uma reta.

Situação 1: $f(z) = rz + s$. Se $r \neq 1$, então existe apenas uma solução para $f(z) = z$, a saber $z = \frac{s}{1-r}$. Se $r = 1$, então $f(z) = z + s$, donde não há soluções para $f(z) = z$ se $s \neq 0$. Portanto, a menos que $r = 1$ e $s = 0$, o que significa que f é a identidade, $f(z)$ tem no máximo 1 ponto fixo;

Situação 2: $f(z) = r\bar{z} + s$. A condição $f(z) = z$ é igual a $r\bar{z} + s = z$. Vamos mostrar o conjunto de soluções para esta equação, se não for vazio, está ao longo de uma reta. Assim, f não tem três pontos fixos não alinhados. Sejam w e z pontos fixos de f , então $r\bar{z} + s = z$ e $r\bar{w} + s = w$. Subtraindo uma equação da outra, vem:

$$r\bar{w} - r\bar{z} = w - z \Rightarrow r(\bar{w} - \bar{z}) = w - z \Rightarrow r(\overline{w - z}) = w - z \quad (II).$$

Se $r = 1$, então $\overline{w - z} = w - z$, então $t := w - z$ é real e $w = z + t$. Isso significa que os pontos de f estão na reta horizontal que passa por z , donde três pontos fixos de f não podem ser colineares.

E se $r \neq 1$? Como todos os números complexos são quadrados, podemos escrever $r = \gamma^2$. Daí, $|\gamma| = 1$ e $\bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$, o que resulta em $r = \frac{\gamma}{\bar{\gamma}}$ e (II) torna-se $\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}(\overline{w - z}) = w - z \Rightarrow$

$$\overline{\left(\frac{w - z}{\gamma}\right)} = \frac{w - z}{\gamma}.$$

Assim $t := \frac{w - z}{\gamma}$ é real e $w = z + t\gamma$. Agora, w está na reta com direção γ passando em z , donde novamente todos os pontos fixos de f estão em uma reta. ■

Voltando à demonstração do teorema, escrevamos $r = \gamma^2$, então $|\gamma| = 1$, já que $|r| = 1$. Do lema anterior, se w e z são ambos pontos fixos de f , então

$$\overline{\left(\frac{w - z}{\gamma}\right)} = \frac{w - z}{\gamma}.$$

Daí, $t = \frac{w - z}{\gamma}$ é real e $w = z + t\gamma$.

Por outro lado, para o número real t e o número complexo z tal que $rz + s = z$, verifica-se que o número $w = z + t\gamma$ satisfaz $r\bar{w} + s = w$. Portanto, o conjunto de pontos fixos de $f(z) = r\bar{z} + s$ é $\{z_0 + t\gamma; t \in \mathbb{R}\} = z_0 + R\gamma$, onde z_0 é um ponto fixo.

A função $r\bar{z} + s$ pode não ter pontos fixos, por exemplo, $f(z) = \bar{z} + 1$. Uma condição necessária e suficiente em r e s para que a isometria $f(z) = r\bar{z} + s$ tenha um ponto fixo é que $\frac{s^2}{r} \in (-\infty, 0]$.

Para ver por que isso é necessário, suponha $r\bar{z} + s = z$ para algum z . Aplicando o conjugado em ambos os lados da equação, vem

$$\overline{r\bar{z} + s} = \bar{z} \Rightarrow r\bar{z} + \bar{s} = \bar{z}.$$

Assim, $\bar{z} = \frac{z - s}{r} = r\bar{z} + \bar{s}$.

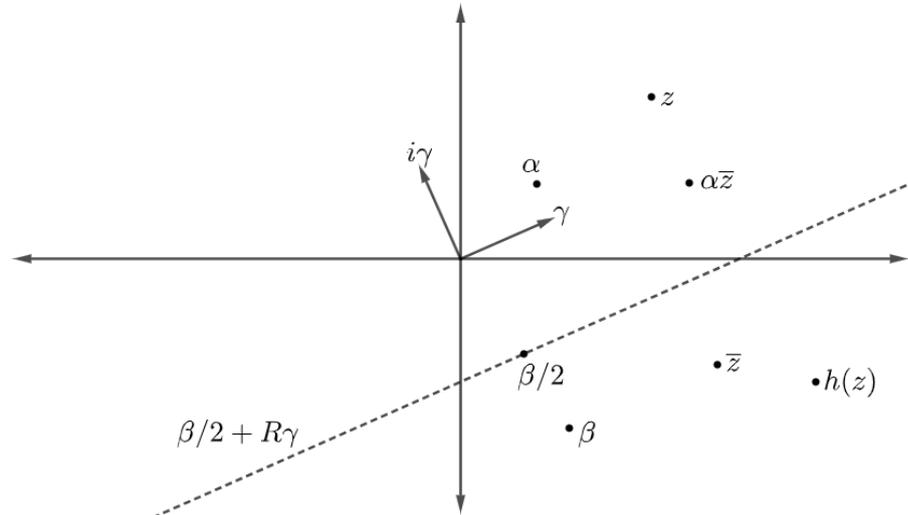
Como $\bar{r} = \frac{1}{r}$, os termos $\frac{z}{r}$ e $r\bar{z}$ na segunda equação acima são iguais, e, assim, $-\frac{s}{r} = \bar{s}$, donde $\frac{s^2}{r} = -s\bar{s} = -|s|^2 \in (-\infty, 0]$. Por outro lado, se $\frac{s^2}{r} \in (-\infty, 0]$, temos $\frac{s^2}{r} = -c^2$, onde $c \geq 0$.

Tomar valores absolutos implica $|s|^2 = c^2$ e o número $\frac{s}{2}$ é um ponto fixo de f :

$$f\left(\frac{s}{2}\right) = r \cdot \frac{\bar{s}}{2} + s = -\frac{s^2\bar{s}}{2c^2} + s = -\frac{s|s|^2}{2c^2} + s = -\frac{s}{2} + s = \frac{s}{2}.$$

Para resumir, $f(z) = r\bar{z} + s$ tem um ponto fixo se, e somente se, $\frac{s^2}{r} \in (-\infty, 0]$, nesse caso $\frac{s}{2}$ é um ponto fixo, então $\{z_0 + t\gamma; t \in \mathbb{R}\} = z_0 + R\gamma$ nos diz que o conjunto de todos os pontos fixos de f é a reta $\frac{s}{2} + R\gamma$, onde $\gamma^2 = r$. Veja a figura a seguir.

Figura 42 – Isometrias no Plano Complexo 1



Fonte: CONRAD.

Provaremos que f é a reflexão através da reta $\frac{s}{2} + R\gamma$ verificando duas propriedades:

Propriedade 1. Para todo z , o segmento de medida $\frac{1}{2}(z + f(z))$ está na reta $\frac{s}{2} + R\gamma$;

Propriedade 2. Para todo z , o segmento de medida $z - f(z)$ é perpendicular à reta $\frac{s}{2} + R\gamma$.

Para a primeira propriedade, $\frac{z + f(z)}{2} = \frac{z + r\bar{z} + s}{2} = \frac{s}{2} + \frac{z + \gamma^2\bar{z}}{2} = \frac{s}{2} + \frac{\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z}}{2}$.

O número $\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z} = \bar{\gamma}z + \overline{\bar{\gamma}z}$ é real, então essa média está na reta $\frac{s}{2} + R\gamma$.

Para a segunda propriedade, $z - f(z) = z - (r\bar{z} + s) = \gamma\bar{\gamma}z - \gamma^2\bar{z} - s = (\bar{\gamma}z - \gamma\bar{z})\gamma - s$.

Queremos que isso seja ortogonal à direção de γ (que é a direção da reta $\frac{s}{2} + R\gamma$). A multiplicação de um número complexo por i gira-o 90° no sentido anti-horário, então a direção ortogonal a γ é a direção de $i\gamma$. A diferença $\bar{\gamma}z - \gamma\bar{z} = \bar{\gamma}z - \overline{\bar{\gamma}z}$ é um imaginário puro, então o primeiro termo na fórmula para $z - f(z)$ está em $Ri\gamma$.

E quanto a $-s$? Como $\frac{s^2}{r} \in (-\infty, 0]$, escreva $s^2 = -rc^2$ para c real. Então, $s^2 = -\gamma^2c^2$, donde $s = \pm ic\gamma \in Ri\gamma$. Assim, $z - f(z) \in Ri\gamma$. Isso completa a prova de que f é uma

reflexão através da reta $\frac{s}{2} + R\gamma$.

O tipo final de isometria é $f(z) = r\bar{z} + s$ sem pontos fixos, então $\frac{s^2}{r} \in (-\infty, 0]$. Vamos mostrar que f é uma reflexão deslizante. Para ver que $f(z) = r\bar{z} + s$ descreve uma reflexão deslizante quando não tem pontos fixos, escreva $r = \gamma^2$. Usando $\{\gamma, i\gamma\}$ como base real de \mathbb{C} , podemos escrever $s = a\gamma + bi\gamma$ com a e b reais. Então, $f(z) = r\bar{z} + s = r\bar{z} + (a\gamma + bi\gamma) = (r\bar{z} + bi\gamma) + a\gamma$.

Como $\frac{(bi\gamma)^2}{r} = -b^2 \leq 0$, nossa discussão anterior sobre reflexões nos diz que $r\bar{z} + bi\gamma$ é uma reflexão através de uma reta paralela a $R\gamma$. Por outro lado, $\frac{s^2}{r} \notin (-\infty, 0]$, donde $a \neq 0$.

Portanto, adicionando $a\gamma$ em $f(z) = (r\bar{z} + bi\gamma) + a\gamma$, obtemos o equivalente à composição de uma reflexão através de uma reta paralela a $R\gamma$ com uma translação não-nula em uma direção paralela à mesma reta. Portanto, f é uma reflexão deslizante. ■

4 TEOREMAS SOBRE COMPOSIÇÃO DE ISOMETRIAS

A geometria é a arte de entender as propriedades do espaço e as transformações que ele pode sofrer sem alterar sua essência. Dentro desse vasto campo, as isometrias ocupam um lugar especial. São as transformações que preservam distâncias, garantindo que a forma e o tamanho dos objetos geométricos permaneçam inalterados.

As isometrias incluem translações, rotações, reflexões e rotações com translações simultâneas, conhecidas como reflexões deslizantes. Cada uma dessas transformações tem suas próprias características e propriedades, mas o verdadeiro poder da geometria surge quando começamos a combiná-las.

Neste capítulo, exploraremos um pouco mais sobre a composição de isometrias, onde duas ou mais isometrias são aplicadas sequencialmente a uma figura. Ao combinar essas transformações, podemos desvendar novos padrões e simetrias, compreender melhor a estrutura subjacente dos objetos geométricos e descobrir que, apesar da aparente complexidade, essas composições podem ser reduzidas a formas mais simples de isometrias.

Este estudo não só aprofunda nossa compreensão das isometrias individuais, mas também revela a surpreendente elegância e simplicidade da geometria quando as transformações são combinadas. Alguns resultados acerca da composição de isometrias já foram comentados no capítulo anterior. Agora, abordaremos com mais profundidade outros teoremas.

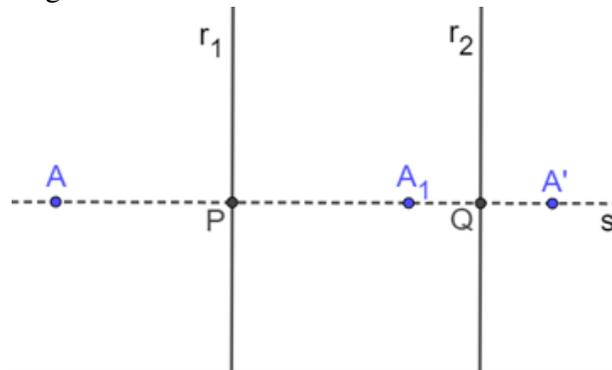
Teorema 4.0.1 *A composição de duas reflexões em retas paralelas é uma translação na direção perpendicular às duas retas, através de uma distância igual ao dobro da distância entre elas (YAGLOM, 1962).*

Demonstração. Seja A um ponto qualquer no plano e A_1 o reflexo de A em relação à reta r_1 . Agora, seja A' o reflexo de A_1 em relação a r_2 (Figura 43). Então $AA_1 \perp r_1$ e $A_1A' \perp r_2$. Consequentemente os pontos A, A_1, A' estão sobre uma reta s perpendicular a r_1 e r_2 .

Se P e Q são os pontos de intersecção da reta s com r_1 e r_2 , respectivamente, então

$$\overline{AP} = \overline{PA_1} \text{ e } \overline{A_1Q} = \overline{QA'}.$$

Figura 43 – Reflexões em Retas



Fonte: YAGLOM.

Daí, temos: $\overline{AA'} = \overline{AP} + \overline{PA_1} + \overline{A_1Q} + \overline{QA'} = 2\overline{PA_1} + 2\overline{A_1Q} = 2\overline{PQ}$.

Assim, $AA' \perp r_1$, $AA' \perp r_2$ e $AA' = 2PQ$. ■

Teorema 4.0.2 *A composição de duas reflexões em retas que se cruzam é uma rotação com centro no ponto de intersecção dessas retas com ângulo igual ao dobro do ângulo entre elas (YAGLOM, 1962).*

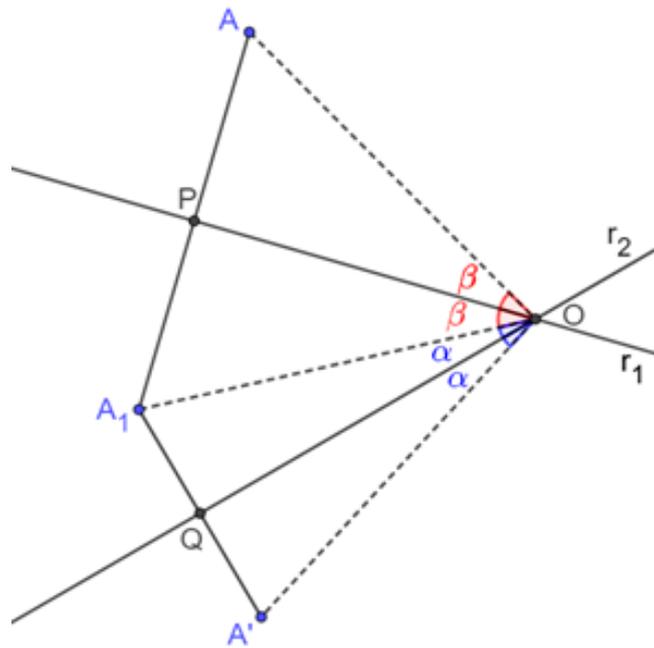
Demonstração. Seja A um ponto arbitrário do plano, e considere A_1 a imagem de A em relação à reta r_1 . Seja ainda, A' a imagem de A_1 em relação a r_2 , sendo r_1 e r_2 concorrentes em O (Figura 44).

Se P e Q são os pontos de intersecção de AA_1 com r_1 e de A_1A' com r_2 , respectivamente, então: $\triangle AOP \cong \triangle A_1OP$ e $\triangle A_1OQ \cong \triangle A'OQ$.

Assim, temos:

$$\overline{OA} = \overline{OA_1}, \overline{OA_1} = \overline{OA'}, \angle AOP = \angle A_1OP, \angle A_1OQ = \angle A'OQ.$$

Figura 44 – Soma de Duas Reflexões 1



Fonte: YAGLOM.

Mais ainda:

$$\angle AOA' = \angle AOP + \angle A_1OP + \angle A_1OQ + \angle A'OQ = 2\angle A_1OP + 2\angle A_1OQ.$$

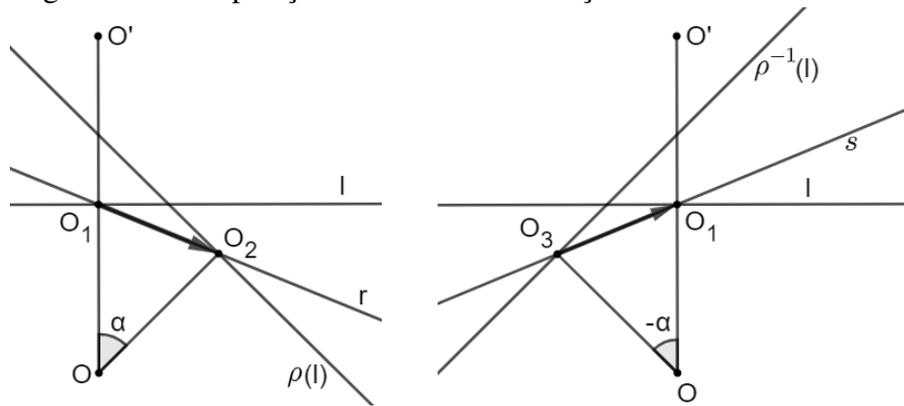
Finalmente, $\overline{OA} = \overline{OA'}$ e $\angle AOA' = 2\angle POQ$. ■

Teorema 4.0.3 *Seja ρ a rotação em torno do ponto O segundo o ângulo α , e seja σ a reflexão sobre a reta l . Então:*

- (i) $\rho \circ \sigma$ é a composição de uma reflexão e de uma translação. A reta de reflexão r passa pelo ponto médio O_1 do segmento determinado por O e $O' = \sigma(O)$ tal que $\angle(l, r) = \alpha/2$, e o vetor de translação é $\vec{v} = \overrightarrow{O_1O_2}$, O_2 sendo a interseção de r e $\rho(l)$;
- (ii) $\sigma \circ \rho$ é a composição de uma reflexão e de uma translação. A reta de reflexão s passa pelo ponto médio O_1 do segmento determinado por O e $O' = \sigma(O)$ tal que $\angle(l, s) = -\alpha/2$, e o vetor de translação é $\vec{v} = \overrightarrow{O_3O_1}$, sendo O_3 a interseção de s e $\rho^{-1}(l)$ (GELCA et al., 2022).

Demonstração. Como ambos $\rho \circ \sigma$ e $\sigma \circ \rho$ invertem a orientação (estamos nos referindo à maneira como a ordem dos pontos em uma figura é mantida ou alterada após a transformação), ambos são composições de uma reflexão e de uma translação. Precisamos encontrar a reta de reflexão e o vetor de translação em cada caso. O raciocínio pode ser acompanhado na figura a seguir.

Figura 45 – Composição de Reflexão e Rotação



Fonte: GELCA.

Para $\rho \circ \sigma$, seja $O' = \sigma(O)$. Então:

$\rho \circ \sigma(O') = \rho \circ \sigma \circ \sigma(O) = \rho(O) = O$, porque O é fixado por ρ . Então, como o vetor de translação é paralelo à linha de reflexão, a linha de reflexão passa pelo ponto médio O_1 de OO' . Como O_1 pertence a l e à reta de reflexão r , o vetor de translação é $\overrightarrow{O_1O_2}$ onde $O_2 = \rho \circ \sigma(O_1) = \rho(O_1)$.

Vamos explicar melhor o ponto O_2 . Como O_1 está em l , $\rho(O_1)$ está em $\rho(l)$ e, portanto, $O_2 = \rho(O_1)$ é o ponto de intersecção de r e $\rho(l)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{O_1O_2}$.

Finalmente, se A é qualquer outro ponto de l , então o raio O_1A é girado por α , então a reta de reflexão é paralela à bissetriz do ângulo de $\angle(O_1A, \rho(O_1A))$ e forma um ângulo de $\alpha/2$ com l . Como $\angle(l, r) = \alpha/2 \neq \alpha = \angle(l, \rho(l))$, r e $\rho(l)$ se encontram em um único ponto, donde O_2 é único.

Agora, vejamos $\sigma \circ \rho$. Observe que $\sigma \circ \rho(O) = \sigma(O) = O'$, então, novamente O_1 , pertence à reta de reflexão s . Em vez de procurar por $\sigma \circ \rho(O_1)$, determinamos

$(\sigma \circ \rho)^{-1}(O_1) = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}(O_1) = \rho^{-1} \circ \sigma(O_1) = \rho^{-1}(O_1)$, para poder aproveitar o fato de que $\sigma(O_1) = O_1$.

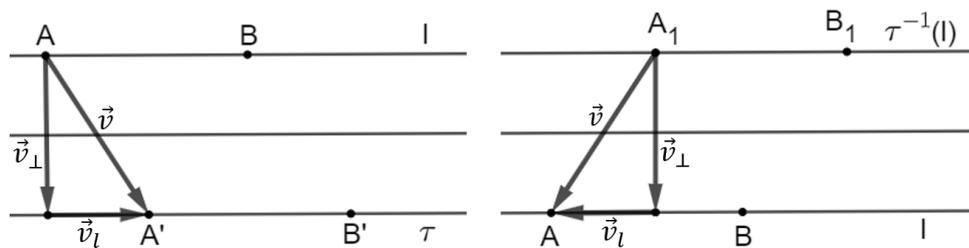
Contudo, $O_1 \in l$, então $\rho^{-1}(O_1) \in \rho^{-1}(l)$, e O_3 é o ponto de intersecção de s com $\rho^{-1}(l)$. Analogamente, mostra-se $\angle(l, s) = -\alpha/2$. ■

Teorema 4.0.4 *Seja τ a translação pelo vetor \vec{v} e seja σ a reflexão sobre a reta l , com l e \vec{v} não paralelos. Seja $\vec{v} = \vec{v}_l + \vec{v}_\perp$, com \vec{v}_l paralelo a l e \vec{v}_\perp ortogonal a l*

- (i) *A composição $\tau \circ \sigma$ é a composição de uma reflexão sobre a reta l_1 , obtida pela translação de l por $\frac{1}{2}\vec{v}_\perp$ e uma translação por \vec{v}_l ;*
- (ii) *A composição $\sigma \circ \tau$ é a composição de uma reflexão sobre a reta l_2 , obtida pela translação de l por $-\frac{1}{2}\vec{v}_\perp$ e uma translação por \vec{v}_l (GELCA et al., 2022).*

Demonstração. Inicialmente, como ambas as transformações $\tau \circ \sigma$ e $\sigma \circ \tau$ invertem a orientação, ambas são composições de uma reflexão e de uma translação. Precisamos determinar a reta de reflexão e o vetor de translação para cada caso. Sejam A e B dois pontos mostrados na figura abaixo.

Figura 46 – Composição de Reflexão e Translação



Fonte: GELCA.

Temos que $\tau \circ \sigma(AB) = \tau(AB)$, então a reta l é transformada em uma reta paralela a ela. A reta de reflexão de $\tau \circ \sigma$ é, então a reta que está a meio caminho entre l e $\tau(l)$, que é obtida pela translação de l por $\frac{1}{2}\vec{v}_\perp$. O vetor de translação é, então, a projeção de $\overrightarrow{AA'}$ em l , onde $A' = \tau \circ \sigma(A)$. No entanto, como A está em l , $\tau \circ \sigma(A) = \tau(A)$ e $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$, então o vetor de translação é \vec{v}_l .

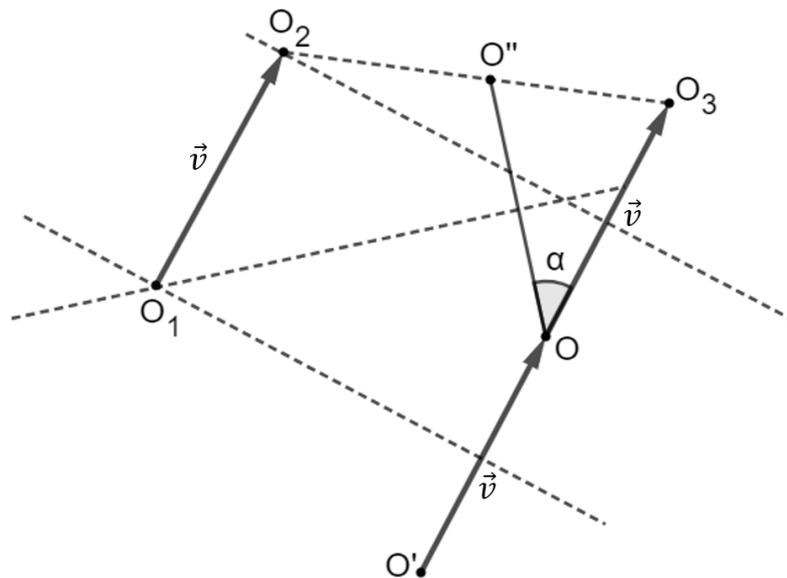
Agora, para a segunda parte, considere $\tau^{-1}(AB)$, então $\sigma \circ \tau(\tau^{-1}(AB)) = \sigma(AB) = AB$. Assim, a reta de reflexão está a meio caminho entre l e $\tau^{-1}(l)$ e é obtida transladando l por $-\frac{1}{2}\vec{v}_\perp$. O vetor de translação é novamente a projeção de $\overrightarrow{A_1A_2}$ em l , onde $A_1 = \tau^{-1}(A)$ e $A_2 = \sigma \circ \tau(\tau^{-1}(A)) = \sigma(A) = A$. Isso significa que $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{v}$, e o vetor de translação é \vec{v}_l . ■

Teorema 4.0.5 *Seja ρ a rotação em torno do ponto O segundo o ângulo α , e seja τ uma translação pelo vetor \vec{v} . Então:*

- (i) *A composição $\rho \circ \tau$ é uma rotação de α em torno do ponto O_1 tal que $|O_1O| = |O_1O'|$ e $\angle O'O_1O = \alpha$, onde $O' = \tau^{-1}(O)$. O ponto O_1 encontra-se na intersecção das mediatrizes de OO' e OO'' , onde $O'' = \rho \circ \tau(O)$;*
- (ii) *A composição $\tau \circ \rho$ é uma rotação de α em torno de um único ponto O_2 tal que $|O_2O| = |O_2O_3|$ e $\angle OO_2O_3 = \alpha$, onde $O_3 = \tau(O)$. O ponto O_2 é a intersecção das mediatrizes de OO_3 e O_3O'' , onde $O'' = \tau \circ \rho(O)$;*
- (iii) *Se O_1 e O_2 são definidos como citado acima, então $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{v}$ (GELCA et al., 2022).*

Demonstração. Observe a figura.

Figura 47 – Composição de Rotação e Translação



Fonte: GELCA.

- (i) Primeiramente, vamos mostrar que ambas as composições são rotações. Para tanto, sejam A e B pontos distintos do plano e sejam A' e B' as respectivas imagens de A e B em qualquer uma das composições. Como o ângulo entre um segmento e sua translação é zero, e como $\angle(AB, A'B') = \alpha$, nenhuma das duas composições pode ser uma translação, ambas tendo que ser rotações pelo ângulo α .

Dessa forma, temos: $\rho \circ \tau(O') = \rho \circ \tau \circ \tau^{-1}(O) = \rho(O) = O$, pois toda rotação possui centro fixo. Segue-se que O_1 deve ser tal que $\angle O'O_1O = \alpha$ e $|O_1O| = |O_1O'|$. Em particular, O_1 deve estar na mediatriz de OO' . Como $O'' = \rho \circ \tau(O)$, O_1 também deve estar na mediatriz de OO'' ;

- (ii) Observe que $\tau \circ \rho(O) = \tau(O) = O_3$, com $|O_2O| = |O_2O_3|$ e $\angle OO_2O_3 = \alpha$. Além disso, $\angle O''O_3O = 90^\circ - \alpha/2 = \angle O_2O_3O$, donde os pontos O_2, O_3 e O'' são colineares;
- (iii) Finalmente, $\tau(O_1) = \tau(\rho \circ \tau(O_1)) = \tau \circ \rho(\tau(O_1))$, onde $\tau(O_1)$ é um ponto fixo de $\tau \circ \rho$. Porém, o único ponto fixo de uma rotação é o seu centro, donde $\tau(O_1) = O_2$. Isso equivale a $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{v}$. ■

4.0.1 Reflexões Deslizantes

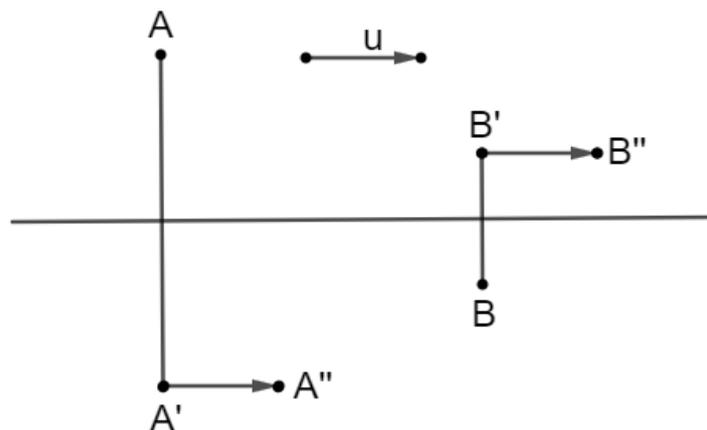
Consideremos uma reflexão s em relação à uma reta l seguida por uma translação t cujo vetor de translação é paralelo a l . A composição $t \circ s$ reflete a figura em relação a l transladando a figura ao longo de l (HARVEY, 2015).

Definição 4.0.1 *Uma reflexão deslizante é uma composição de uma reflexão seguida por uma translação.*

Na figura 48, temos um vetor \vec{u} paralelo à uma reta l e dois pontos A e B .

O ponto A sofre uma reflexão s em relação à l , obtendo-se o ponto A' , e, em seguida, realizamos uma translação t segundo o vetor \vec{u} e obtemos o ponto A'' . Procedimento análogo é realizado com o ponto B de modo a se obter B'' .

Figura 48 – Pontos sob Reflexão Deslizante



Fonte: HARVEY.

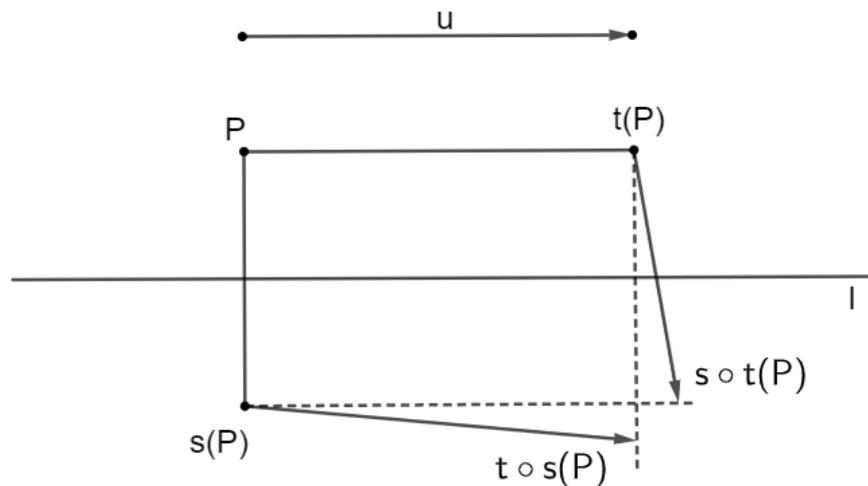
Em geral, a ordem de composição das isometrias não produz o mesmo efeito, ou seja, $s \circ t \neq t \circ s$, mas se s e t constituem uma reflexão deslizante, então, $s \circ t = t \circ s$.

Lema 4.0.1 *Seja s uma reflexão em relação à uma reta l e seja t uma translação paralela a l . Então $s \circ t = t \circ s$ (HARVEY, 2015).*

Demonstração. Seja P um ponto sobre a reta de reflexão l . Então, a reflexão de P em relação a essa reta, não tem efeito nenhum sobre o ponto. Daí: $s \circ t(P) = t(P) = t \circ s(P)$.

Agora suponha que P não pertença a l (Figura 49). Nesse caso, compare o quadrilátero de vértices $P, s(P), t(P), s \circ t(P)$ com o de vértices $P, s(P), t(P), t \circ s(P)$.

Figura 49 – Comutatividade entre Translação e Reflexão



Fonte: HARVEY.

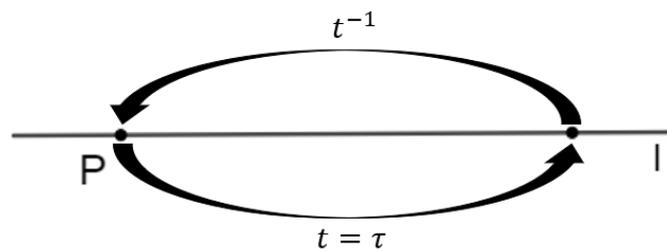
Ambos os quadriláteros possuem dois lados em comum, $Ps(P)$ e $Pt(P)$, e, além disso, ambos têm ângulos retos em três dos quatro vértices, P , $s(P)$, e $t(P)$. Então, o quarto ângulo também deve ser reto e, portanto, os dois quadriláteros são retângulos. Dessa forma, $s \circ t(P)$ e $t \circ s(P)$ são iguais. ■

Lema 4.0.2 *Seja τ uma isometria com uma reta invariante l , e suponha que haja uma translação t de modo que $\tau(P) = t(P)$ para todos os pontos P em l . Se $\tau \neq t$, então τ é uma reflexão deslizante (HARVEY, 2015).*

Demonstração. Observe o efeito da composição de τ e t^{-1} em um ponto P da reta l :

$$t^{-1} \circ \tau(P) = t^{-1} \circ t(P) = P.$$

Figura 50 – Deslizamento Reflexão



Fonte: HARVEY.

Na figura, percebemos que a composição leva o ponto P em l . Assumindo que $\tau \neq t$, $t^{-1} \circ \tau$ não é a identidade. A única isometria que fixa uma reta inteira é uma reflexão. Portanto, $t^{-1} \circ \tau = s$, onde s é uma reflexão em relação a l , e então $\tau = t \circ s = s \circ t$ é reflexão deslizante. ■

Teorema 4.0.6 *A composição de um número par de reflexões é uma rotação ou uma translação; a composição de um número ímpar de reflexões é uma reflexão ou uma reflexão deslizante (HARVEY, 2015).*

Demonstração. Na verdade, a composição de um número par de reflexões pode ser substituída pela composição de rotações e translações. Mas a composição de qualquer número de rotações e translações é novamente uma rotação ou uma translação.

Além disso, como a composição de um número par de reflexões é uma rotação ou uma translação, a composição de um número ímpar de reflexões pode ser substituída pela composição de uma rotação ou translação e uma reflexão. Como vimos em proposições anteriores, uma rotação ou translação pode ser substituída pela composição de duas reflexões. Portanto, segue o resultado. ■

5 HOMOTETIA E INVERSÃO

5.1 Homotetia

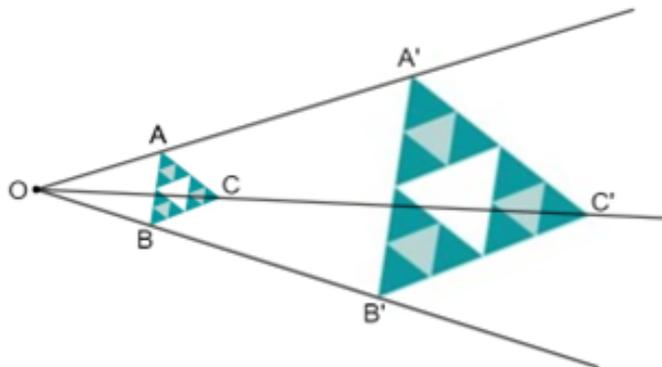
Vamos estudar agora um tipo de transformação geométrica que altera o tamanho de uma figura, mas mantém as características principais, como a forma e os ângulos. Em outras palavras, ela obtém uma outra figura semelhante à original. Diversos aspectos podem ser analisados para definir se uma figura é semelhante à outra. A homotetia é uma forma de construirmos figuras semelhantes.

Ela é uma forte aliada para a ampliação ou redução de figuras geométricas. Em geral, quando se aplica a homotetia em algum desenho, as características principais, como a forma e os ângulos, são preservadas; mas o tamanho da figura sofre alterações. Essa relação pode ser explicada através da derivação grega da palavra homotetia, em que *homós* significa igual, e *thetós*, colocado, isto é, as figuras homotéticas são colocadas a uma distância igual a “algo”. (RIBEIRO, 2024)

Definição 5.1.1 A Homotetia com centro O e razão $k \neq 0$ é a função que associa a cada ponto P do plano o ponto P' tal que $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$ (YAGLOM, 1968).

Na figura abaixo, o centro O da homotetia leva A em A' , B em B' e C em C' .

Figura 51 – Homotetia de Centro O



Fonte: Autoria própria.

De uma forma mais simples, dizemos que homotetia é a transformação que gera uma figura semelhante à outra dada de forma que a nova figura se contrai em direção a um ponto ou se expande para longe de um ponto.

Teorema 5.1.1 *Uma semelhança é a composição de uma isometria e uma homotetia.*

Demonstração. Seja f uma semelhança de razão k . Por definição, f preserva a razão das distâncias: $|f(A) - f(B)| = k \cdot |A - B|, \forall A, B \in \mathbb{R}^2$.

Agora, tomemos um ponto fixo O no plano (que pode ser arbitrário ou um ponto específico definido por f). Definamos uma homotetia h de razão k' em relação a O pela fórmula:

$$h(P) = O + k'(P - O).$$

Definamos, ainda, uma transformação g tal que:

$$g(P) = h^{-1}(f(P)).$$

Sabemos que a composição de duas semelhanças ainda é uma semelhança e a razão de semelhança da composição é o produto entre as razões das duas semelhanças.

Desse modo, h^{-1} é a inversa da homotetia h (e ainda é uma homotetia!), que inverte o fator de escala k de f . A composição $g = h^{-1} \circ f$ é uma transformação que preserva distâncias, com fator $k \cdot \frac{1}{k} = 1$. Logo, g é uma isometria.

Assim, a transformação f pode ser escrita como:

$$f(P) = h(g(P)).$$

Dessa forma, f é a composição de uma isometria g com uma homotetia h . ■

5.1.1 Propriedades da Homotetia

Propriedade 5.1 *O ponto da imagem, o ponto original e o centro da homotetia são colineares (LOZANOVSKI, 2016);*

Propriedade 5.2 *Uma homotetia sempre transforma uma figura em uma outra figura semelhante, tal que os lados correspondentes são paralelos (LOZANOVSKI, 2016);*

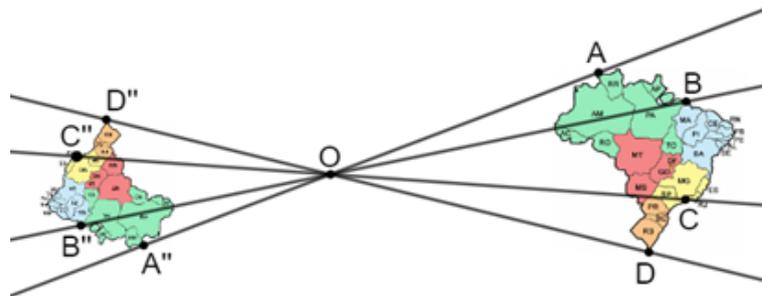
- (i) *Se $k > 0$, então a imagem e a figura original estarão no mesmo lado do centro;*
- (ii) *Se $k < 0$, a imagem e o original estarão em lados diferentes do centro, ou seja, o centro estará entre eles;*
- (iii) *Se $|k| > 1$, então a homotetia é uma ampliação;*
- (iv) *Se $|k| < 1$, então a homotetia é uma redução.*

Em geral, usa-se a notação $X_{O,k} : P \rightarrow P'$ para denotar que P' é a imagem de P sob a homotetia X centrada em O com razão k .

5.1.2 Centro Homotético de Figuras

Os centros homotéticos podem ser externos ($k > 0$) ou internos ($k < 0$). Se o centro é interno, as duas figuras geométricas estão redimensionadas com giro de 180° uma em relação à outra (Figura 52) (LOZANOVSKI, 2016).

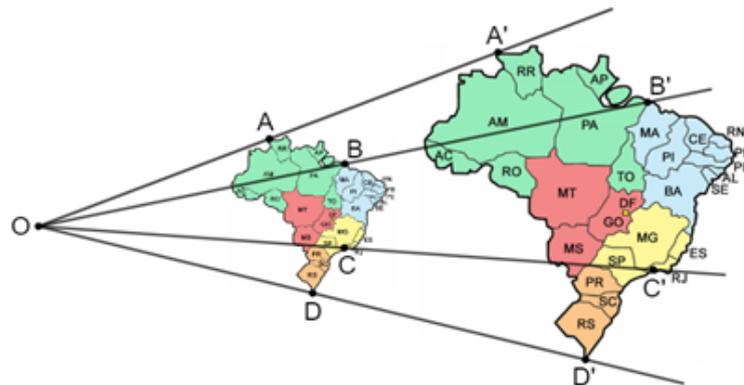
Figura 52 – Homotetia de Centro Interno



Fonte: Autoria própria.

Já se o centro for externo, as duas figuras estão redimensionadas e transladadas entre si (Figura 53).

Figura 53 – Homotetia de Centro Externo

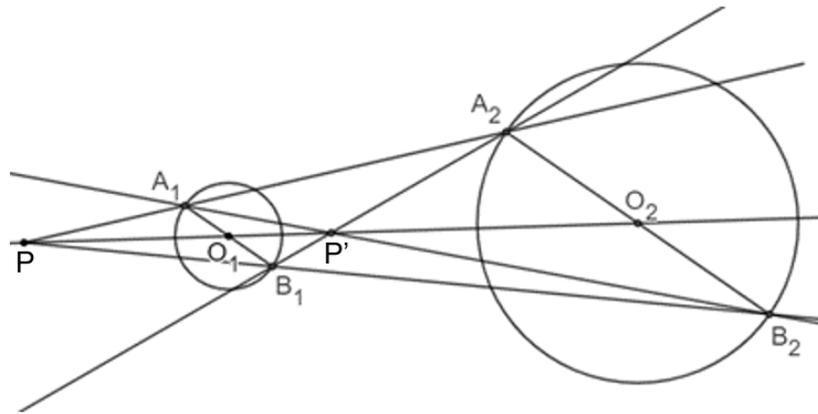


Fonte: Autoria própria.

Círculos sempre são geometricamente semelhantes entre si. Portanto, para a razão $k \neq 1$, um par de círculos tem ambos os tipos de centros homotéticos, interno e externo.

Considere dois círculos de centros O_1 e O_2 e tomemos dois diâmetros paralelos A_1B_1 e A_2B_2 , um para cada círculo (Figura 54).

Figura 54 – Centro Homotético 1

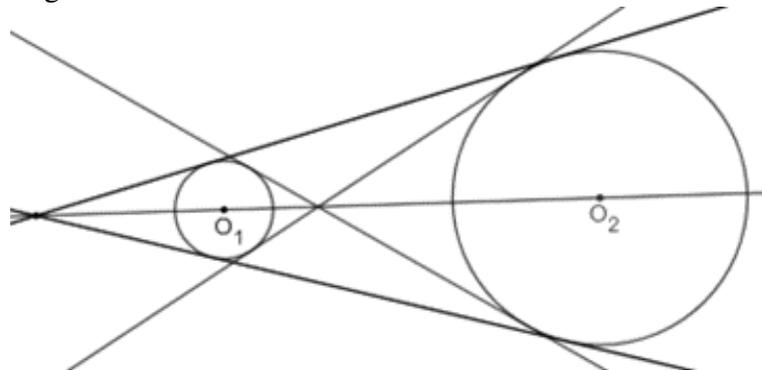


Fonte: LOZANOVSKI.

Os dois diâmetros formam o mesmo ângulo com a reta que liga os centros. As retas A_1A_2 , B_1B_2 e O_1O_2 se cruzam exatamente no ponto P , que é o centro homotético externo dos dois círculos. Por outro lado, as retas A_1B_2 , B_1A_2 e O_1O_2 se cruzam no ponto P' , que é o centro homotético interno dos dois círculos.

Como caso limite desta construção, as retas tangentes externas aos dois círculos passam pelo centro homotético externo e as retas tangentes internas aos dois círculos passam pelo centro homotético interno (Figura 55).

Figura 55 – Centro Homotético 2

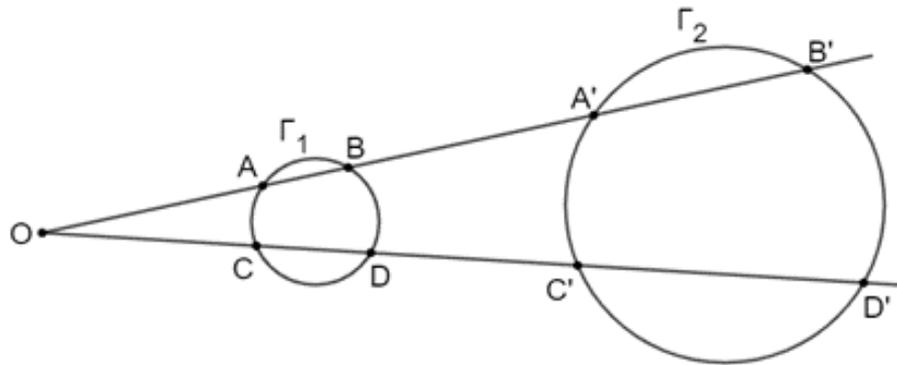


Fonte: LOZANOVSKI.

Se os círculos têm o mesmo raio (mas centros diferentes), eles não têm centro homotético. Se os círculos forem concêntricos (com mesmo centro), então terão apenas um centro homotético e esse é o centro comum dos círculos.

Teorema 5.1.2 *Considere duas retas que passam pelo centro homotético de dois círculos Γ_1 e Γ_2 e cruzam ambos em dois pontos distintos conforme figura 58. Destes pontos, quaisquer dois são considerados homólogos se os raios desenhados para eles formam o mesmo ângulo com a reta que liga os centros (por exemplo, A e A'). Destes quatro, quaisquer dois que estejam em círculos diferentes e sejam não homólogos são considerados anti-homólogos (por exemplo, A e B'). Dessa forma, quaisquer dois pares de pontos anti-homólogos são concíclicos (LOZANOVSKI, 2016).*

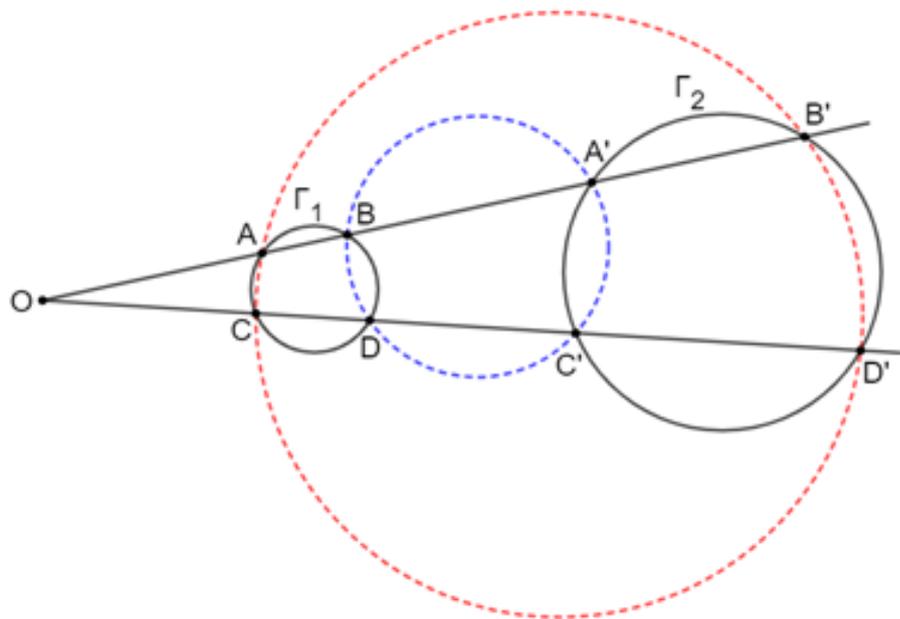
Figura 58 – Dois Círculos Homotéticos



Fonte: LOZANOVSKI.

Demonstração. Na figura 59, seja O o centro homotético de Γ_1 e Γ_2 .

Figura 59 – Dois Círculos Homotéticos



Fonte: LOZANOVSKI.

Podemos escrever $\overline{OB'} = k \cdot \overline{OB}$, donde:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB'} = \overline{OA} \cdot (k \cdot \overline{OB}) = k \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \quad (I).$$

Analogamente, temos $\overline{OD'} = k \cdot \overline{OD}$, donde:

$$\overline{OC} \cdot \overline{OD'} = \overline{OC} \cdot (k \cdot \overline{OD}) = k \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OD} \quad (II).$$

Do teorema das secantes em Γ_1 , temos:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC} \cdot \overline{OD},$$

e, de (I) e (II), vem:

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB'}}{k} = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OD'}}{k} \Rightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OD'}, \quad k \neq 0,$$

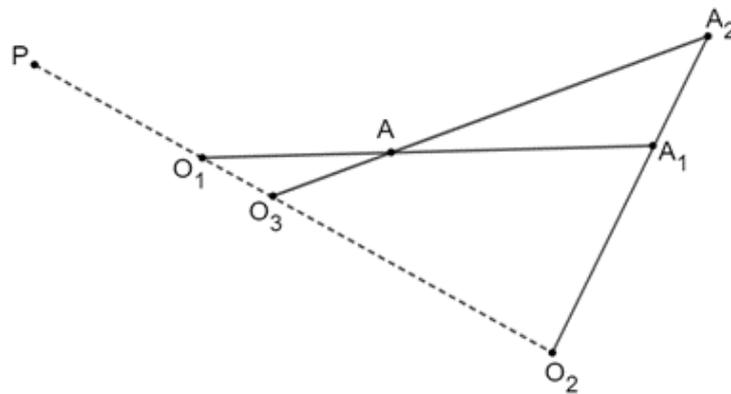
donde, finalmente, A, B' e C, D' , dois pares de pontos anti-homólogos, são concíclicos. ■

5.1.3 Composição de Homotetias

Teorema 5.1.3 *Seja X_3 a composição das homotetias $X_2 \circ X_1$. Então, o centro de X_3 está na reta O_1O_2 e a razão de X_3 é $-k_1 \cdot k_2$ (LOZANOVSKI, 2016).*

Demonstração. Na figura a seguir, seja A um ponto e sejam A_1 e A_2 pontos tais que $X_1 : A \rightarrow A_1$ e $X_2 : A_1 \rightarrow A_2$. Em outras palavras, $X_3 : A \rightarrow A_2$, pois $X_3(A) = X_2 \circ X_1(A) = X_2(X_1(A)) = X_2(A_1) = A_2$.

Figura 60 – Composição de Homotetias



Fonte: Lozanovski.

Agora, vamos mostrar que o centro de X_3 , O_3 , está em O_1O_2 . Seja $X_2 : O_1 \rightarrow P$. O ponto P não tem um significado especial, mas irá ajudar-nos a provar a afirmação. Também usaremos o fato de que o centro da homotetia é fixado sob uma homotetia, ou seja, $X_1 : O_1 \rightarrow O_1$.

$$X_3(O_1) = X_2(X_1(O_1)) = X_2(O_1) = P.$$

Dessa equação, temos que $X_3 : O_1 \rightarrow P$ e $X_2 : O_1 \rightarrow P$. Sabemos, porém, que o centro da homotetia, o ponto original e a imagem desse ponto, são colineares, daí, O_3, O_1, P e O_2, O_1, P são colineares. Assim, O_3 que é o centro de X_3 está em O_1O_2 .

Vamos mostrar agora que o centro de X_3 tem razão $-k_1 \cdot k_2$.

Observemos os pontos A, A_1 e A_2 . Pela definição de A_1 , temos $\overline{O_1A_1} = k_1 \cdot \overline{O_1A}$ e pela definição de A_2 , $\overline{O_2A_2} = k_2 \cdot \overline{O_2A_1}$. Como $X_3 : A \rightarrow A_2$, temos $\overline{O_3A_2} = k_3 \cdot \overline{O_3A}$. Tenhamos em mente o fato que acabamos de provar que O_3 é colinear com O_1 e O_2 . Dessa colinearidade, podemos aplicar o Teorema de Menelaus para o $\triangle AA_1A_2$ e os pontos O_2, O_3, O_1 :

$$\frac{\overline{AO_1}}{-\overline{O_1A_1}} \cdot \frac{\overline{A_1O_2}}{-\overline{O_2A_2}} \cdot \frac{\overline{A_2O_3}}{-\overline{O_3A}} = 1 \iff \frac{1}{k_1} \cdot \frac{1}{k_2} \cdot \frac{k_3}{1} = -1 \iff k_3 = -k_1 \cdot k_2. \blacksquare$$

5.2 Inversão

A inversão geométrica é uma transformação fundamental em geometria que mapeia pontos de um plano de forma específica em relação a uma circunferência. Dada uma circunferência fixa, chamada de circunferência de inversão, cada ponto fora desse círculo é transformado em um ponto dentro dele, e vice-versa, de acordo com uma relação baseada na distância entre o ponto e o centro do círculo. Essa transformação preserva ângulos, mas altera tamanhos e distâncias, convertendo retas e circunferências em outras retas e circunferências, não obrigatoriamente nessa ordem.

A inversão geométrica é uma ferramenta poderosa em problemas de geometria e análise complexa, sendo amplamente utilizada na resolução de questões que envolvem simetria e transformações de figuras geométricas.

Além de suas propriedades matemáticas, a inversão geométrica é notável por sua capacidade de simplificar problemas complexos, especialmente em geometria plana. Ela transforma curvas complexas em figuras mais simples, facilitando sua análise e manipulação. Por exemplo, em muitos casos, círculos podem ser convertidos em retas, e retas podem se transformar em círculos sob a inversão.

Esse tipo de simetria é útil na resolução de problemas que envolvem tangências e interseções, além de ser uma técnica importante em geometria projetiva. Além disso, a inversão também aparece em outras áreas, como na física, em particular no estudo de campos eletromagnéticos, onde a simetria inversiva pode ser aplicada para descrever o comportamento de forças em torno de certas singularidades.

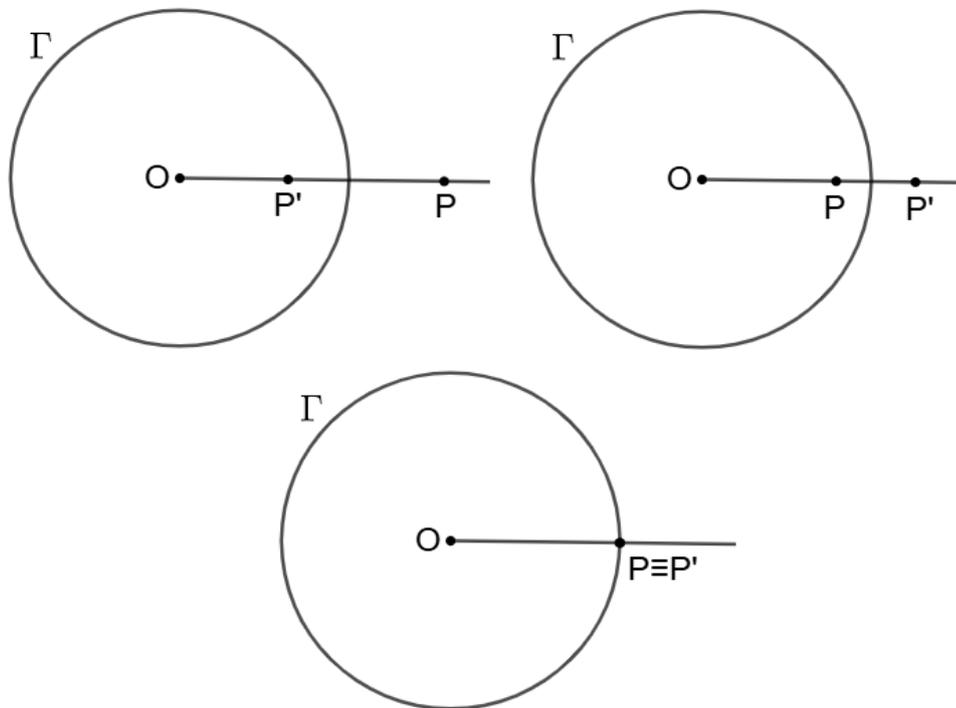
Definição 5.2.1 Em um plano considere a circunferência Γ de raio r e centro O . Tomemos um ponto P pertencente ao mesmo plano. O ponto P' pertencente à semirreta OP tal que

$$OP' \cdot OP = r^2$$

é denominado inverso de P em relação à Γ (Figura 61). O ponto O é denominado “centro de inversão” e Γ é a circunferência de inversão. Podemos também utilizar a seguinte notação:

$$P' = Inv(P, \Gamma).$$

Figura 61 – Circunferência de Inversão



Fonte: Autoria própria.

A ilustração acima mostra que o inverso P' de um determinado ponto P pode ser exterior à circunferência de inversão, interior à circunferência de inversão ou pertencer à ela (caso em que o ponto e seu inverso coincidam) (ALVES, 2009).

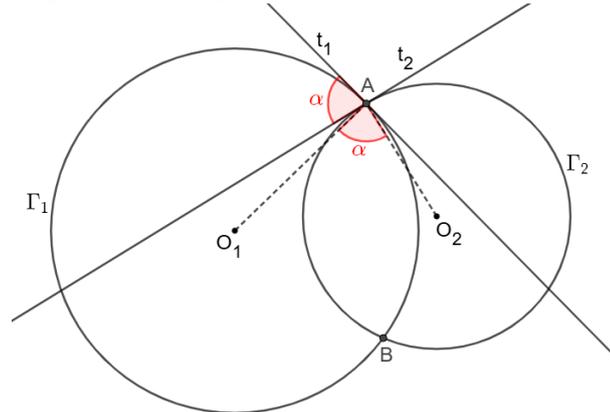
O centro da circunferência de inversão não possui inverso.

Com o objetivo de abordarmos com mais profundidade essa belíssima transformação, retomaremos alguns conceitos importantes.

5.2.1 Ângulo entre Circunferências

Definição 5.2.2 Consideremos duas circunferências Γ_1 e Γ_2 com centros O_1 e O_2 , respectivamente, secantes nos pontos A e B . Tomemos as retas tangentes a essas circunferências em A , sendo t_1 tangente a Γ_1 e t_2 tangente a Γ_2 conforme figura 62 (YAGLOM, 2009).

Figura 62 – Ângulo entre Circunferências 1

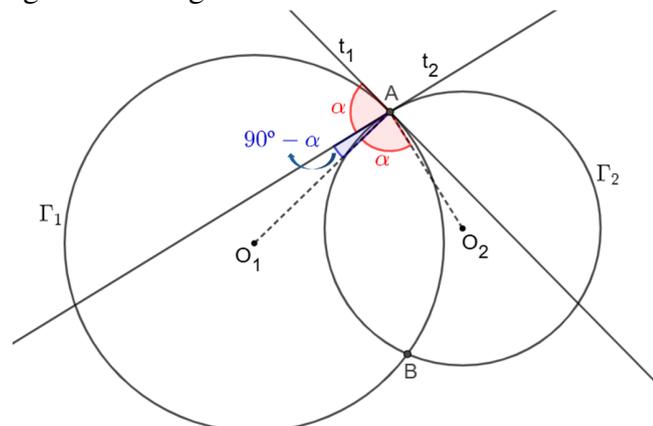


Fonte: YAGLOM.

A medida do ângulo α entre as circunferências Γ_1 e Γ_2 é o ângulo entre as retas tangentes em A , ou seja, o ângulo entre duas circunferências é igual ao ângulo entre os raios no ponto de tangência.

De fato, a medida do ângulo entre o raio O_1A e a reta t_2 vale $90^\circ - \alpha$, conseqüentemente, a medida do ângulo entre t_1 e t_2 mede $90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha = \angle O_1AO_2$ como mostra a figura 63.

Figura 63 – Ângulo entre Circunferências 2

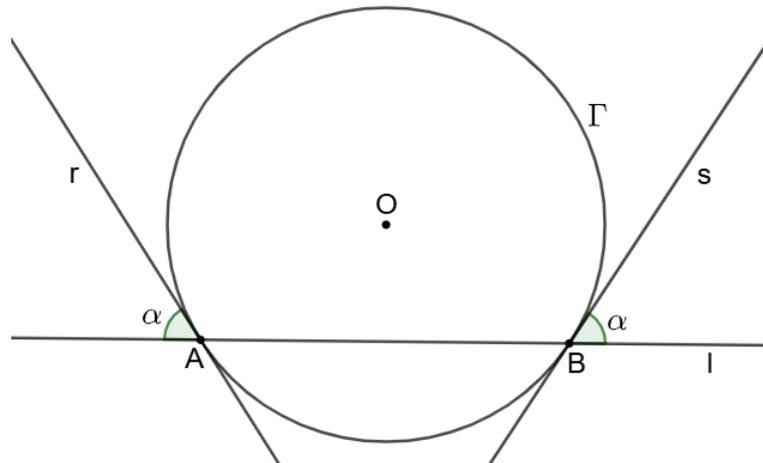


Fonte: Autoria Própria.

5.2.2 Ângulo entre Reta e Circunferência

Definição 5.2.3 Consideremos uma reta l que intersecta uma circunferência Γ em dois pontos A e B , conforme figura 64. O ângulo que a reta forma com a circunferência é o ângulo α entre a reta l e a reta r tangente em A ou entre a reta l e a reta s tangente em B . Se a reta for tangente à circunferência, o ângulo entre elas é sempre nulo (YAGLOM, 2009).

Figura 64 – Ângulo entre Reta e Circunferência

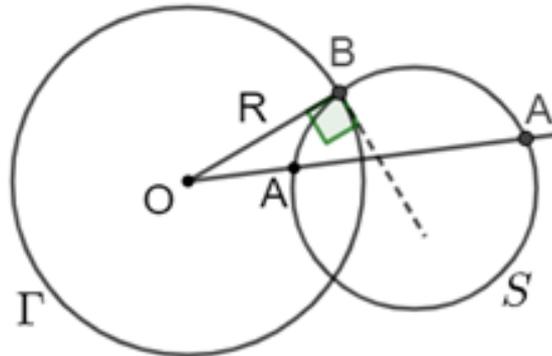


Fonte: YAGLOM.

Teorema 5.2.1 Todas as circunferências que passam pelo ponto A e são perpendiculares à outra circunferência Γ que não passa por A , passam também por um ponto A' diferente de A (YAGLOM, 2009).

Demonstração. Seja S uma circunferência que passa por A e é perpendicular a Γ (Figura 65). Tracemos, inicialmente, uma reta que passa por A e pelo centro O de Γ , que corta S em A' . Em seguida, tracemos o segmento \overline{OB} , onde B é um dos pontos de intersecção de Γ e S . Como S é perpendicular a Γ , \overline{OB} é tangente a S .

Figura 65 – Circunferências Perpendiculares 1



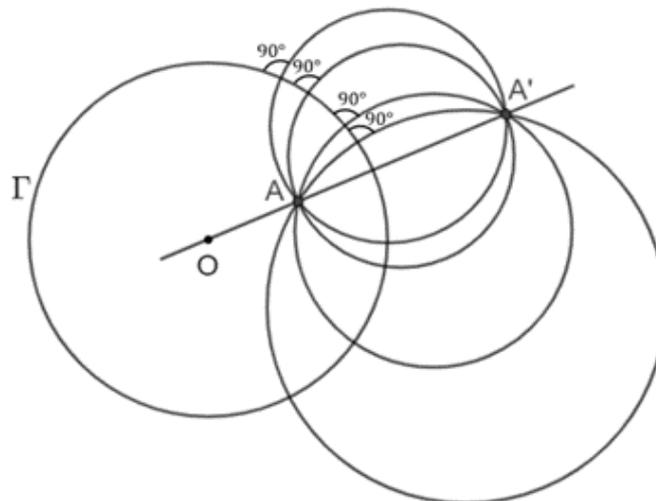
Fonte: YAGLOM.

Dessa forma, podemos escrever, por potência de ponto, $OA \cdot OA' = OB^2$, donde temos

$$OA' = \frac{R^2}{OA}.$$

Isso mostra que A' , o ponto de intersecção de OA e S , não depende da escolha de S .

Figura 66 – Circunferências Perpendiculares 2



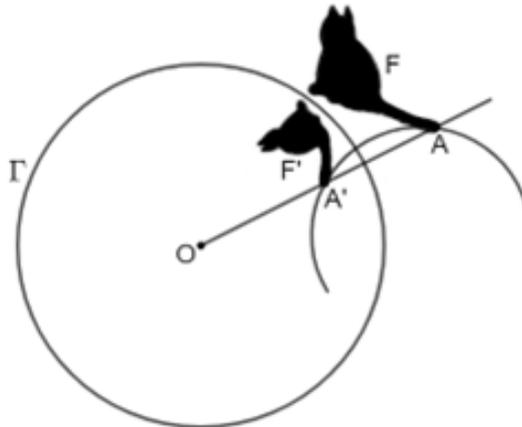
Fonte: YAGLOM.

Portanto, todas as circunferências S perpendiculares a Γ e passando por A interceptam a reta OA no mesmo ponto A' (Figura 66). ■

Definição 5.2.4 Dizemos que um ponto A é simétrico a um ponto A' em relação a uma circunferência Γ se toda circunferência que passa por A , e perpendicular a Γ , passa também por A' (YAGLOM, 2009).

Obviamente que A' é simétrico de A em relação a Γ e vice-versa. Desse modo, estamos habilitados a falar sobre pontos mutuamente simétricos em relação a uma circunferência. Todos os pontos simétricos aos pontos de uma determinada figura F em relação a uma circunferência Γ formam uma outra figura F' simétrica a F em relação a Γ como mostrado abaixo.

Figura 67 – Figuras Simétricas em Relação à uma Circunferência



Fonte: YAGLOM.

Se A' é simétrico a A em relação a Γ , dizemos também que A' é obtido de A por reflexão em Γ . Podemos considerar uma reflexão em relação a uma reta como um caso limite de uma reflexão em um círculo, uma vez que podemos pensar em uma reta como uma “circunferência de raio infinito”.

Desse modo, uma reflexão em uma circunferência é também chamada de inversão. A circunferência é chamada de circunferência de inversão, seu centro é chamado de centro de inversão, e $k = R^2$, o quadrado de seu raio, é chamado de potência da inversão.

Mais geralmente, uma inversão com potência k e centro O é uma transformação que leva um ponto A do plano em um ponto A' da reta OA tal que $\overrightarrow{OA'} = \frac{k}{\overrightarrow{OA}}$ (Figura 68).

Figura 68 – Inversão do Ponto A 1



Fonte: YAGLOM.

É comum considerarmos uma transformação que leva um ponto A em um ponto A' tal que A e A' são colineares com um ponto fixo O , mas situam-se em lados opostos em relação a O . Ainda assim, temos $\overrightarrow{OA'} = \frac{k}{\overrightarrow{OA}}$ (Figura 69).

Figura 69 – Inversão do Ponto A 2



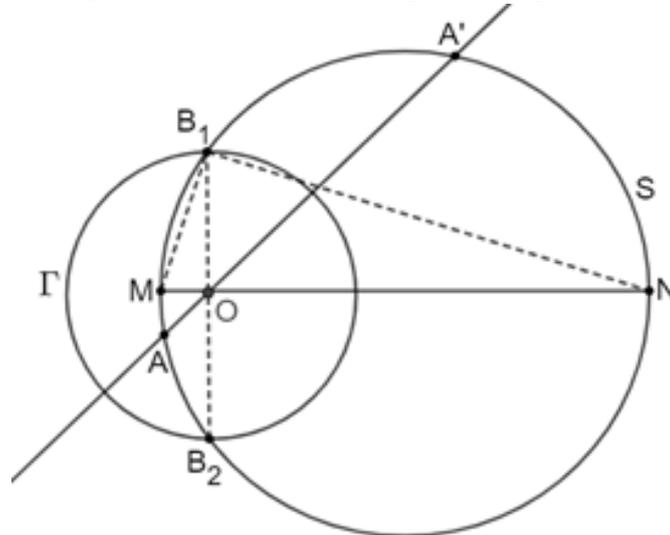
Fonte: YAGLOM.

Em particular, essa transformação é uma inversão com centro O e potência negativa $-k$. Ela é equivalente a uma inversão com centro O e potência positiva k (uma reflexão na circunferência S com centro O e raio \sqrt{k}) seguida por uma reflexão em O .

Teorema 5.2.2 *Todas as circunferências que passam por um determinado ponto A e cruzam um determinado círculo Γ em dois pontos diametralmente opostos, passam também por um ponto A' diferente de A (YAGLOM, 2009).*

Demonstração. Na figura 70, sejam B_1 e B_2 extremos do diâmetro de uma circunferência Γ e seja S uma circunferência que passa por A intercepta Γ em B_1 e B_2 .

Figura 70 – Circunferência passando por A



Fonte: YAGLOM.

Traçando a reta que passa em A e no centro O de Γ , obtemos A' na interseção dessa reta com S . Seja MN o diâmetro de S passando por O . Como o centro de S é equidistante de B_1 e B_2 , e, O é o ponto médio do segmento B_1B_2 , segue que $MN \perp B_1B_2$, donde temos OB_1 altura do triângulo retângulo MB_1N .

Desse modo, $OB_1^2 = MO \cdot ON$. Por outro lado, pelo teorema das cordas, vem: $MO \cdot ON = A'O \cdot OA$. Então, $A'O \cdot OA = OB_1^2$ e $A'O = \frac{R^2}{OA}$, onde R é o raio de Γ . Isto implica que $A'O$ independe da escolha da circunferência S .

Portanto, todas as circunferências que passam por A e cruzam Γ em pontos diametralmente opostos, passam pelo mesmo ponto A' . A relação $A'O = \frac{R^2}{OA}$ mostra que A' é obtido a partir de A por uma inversão com potência negativa $-R^2$ e centro O . ■

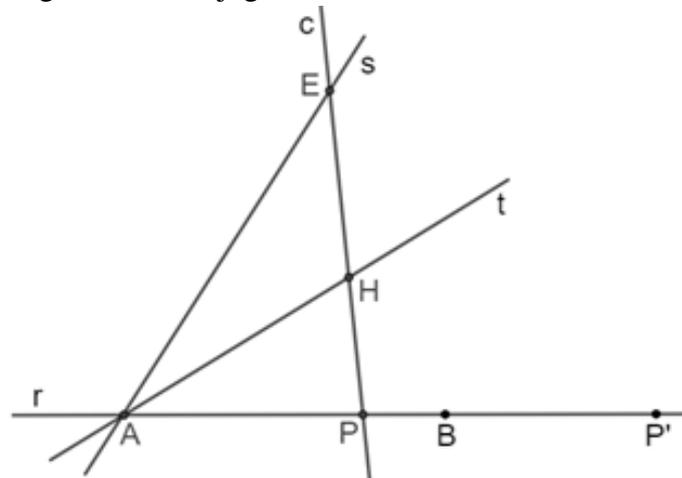
5.2.3 Conjugados Harmônicos

Definição 5.2.5 *Dados três pontos colineares A, B e P , com $A \neq B$, dizemos que P' é o conjugado harmônico de P em relação ao segmento AB se $\frac{AP}{PB} = \frac{AP'}{P'B}$ (SOUSA, 2014).*

5.2.4 Construção do Conjugado Harmônico de um Ponto

Dados os pontos A, B e P sobre uma reta r , traçamos duas retas quaisquer s e t passando por A e uma reta c passando por P . Sejam $c \cap s = E$ e $c \cap t = H$ (Figura 71) (SOUSA, 2014).

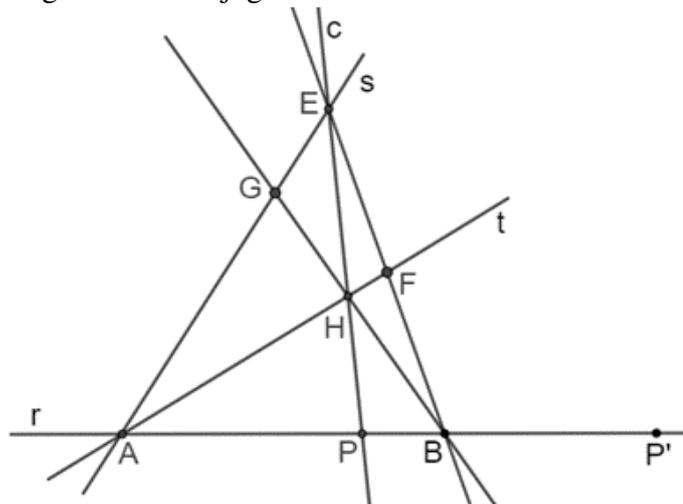
Figura 71 – Conjugado Harmônico de um Ponto 1



Fonte: Autoria própria.

Agora, vamos ligar B aos pontos H e E , obtendo o quadrilátero $EFHG$ (Figura 72), tal que os lados opostos concorrem em A e B e tal que uma de suas diagonais passe por P .

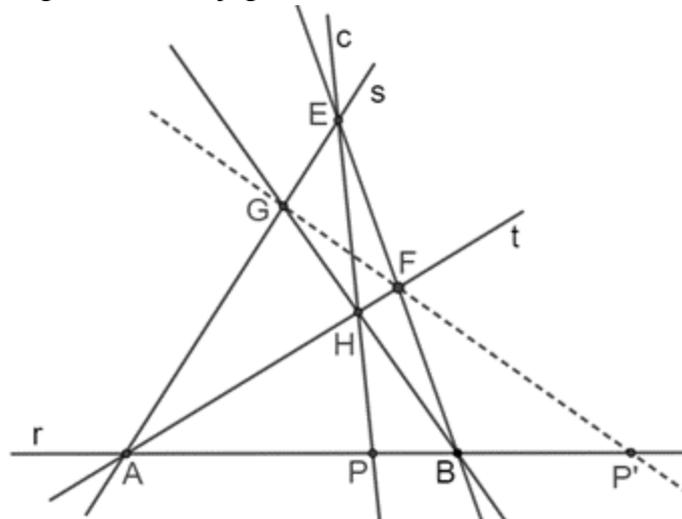
Figura 72 – Conjugado Harmônico de um Ponto 2



Fonte: Autoria própria.

Traçando a reta suporte da diagonal GF , obtemos P' na intersecção com r . Então P' é o conjugado harmônico de P em relação a AB (Figura 73).

Figura 73 – Conjugado Harmônico de um Ponto 3



Fonte: Autoria própria.

Demonstração. Inicialmente, aplicando o Teorema de Ceva no triângulo ABE , com cevianas AF , BG e EP concorrentes em H , vem: $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BF}{FE} \cdot \frac{EG}{GA} = 1 \iff \frac{BF}{FE} \cdot \frac{EG}{GA} = \frac{PB}{AP}$ (I).

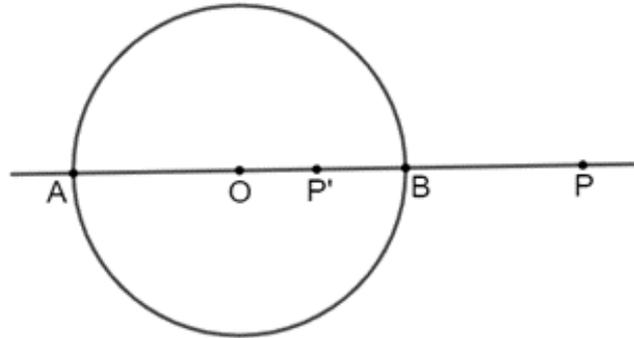
Agora, aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo ABE , com relação à reta que passa por P' , F e G , vem: $\frac{EG}{GA} \cdot \frac{AP'}{P'B} \cdot \frac{BF}{FE} = 1 \iff \frac{BF}{FE} \cdot \frac{EG}{GA} = \frac{P'B}{AP'}$ (II).

Comparando (I) e (II), obtemos: $\frac{AP}{PB} = \frac{AP'}{P'B}$. ■

Proposição 5.2.3 Os pontos P e P' são inversos em relação à circunferência de centro O e raio r se, e somente se, são conjugados harmônicos em relação ao diâmetro AB determinado pela interseção da reta \overleftrightarrow{OP} com a circunferência (SOUSA, 2014).

Demonstração. Considerando o alinhamento na ordem A, P', B e P , como na figura 74, temos:

Figura 74 – Pontos Inversos e Harmônicos



Fonte: Autoria própria.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{P'B}} \iff \frac{(\overline{AO} + \overline{OP})}{(\overline{OP} - \overline{OB})} = \frac{(\overline{AO} + \overline{OP'})}{(\overline{OB} - \overline{OP'})} \iff$$

$$\frac{(r + \overline{OP})}{(\overline{OP} - r)} = \frac{(r + \overline{OP'})}{(r - \overline{OP'})} \iff (r + \overline{OP}) \cdot (r - \overline{OP'}) = (\overline{OP} - r) \cdot (r + \overline{OP'}) \iff$$

$$r^2 - r \cdot \overline{OP'} + r \cdot \overline{OP} - \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r \cdot \overline{OP} + \overline{OP} \cdot \overline{OP'} - r^2 - r \cdot \overline{OP'} \iff$$

$$2 \cdot r^2 = 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OP'} \iff \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2. \blacksquare$$

5.2.5 Propriedades da Inversão

Propriedade 5.3 *Sob uma inversão com centro O e potência k , a circunferência Γ com centro O e raio $\sqrt{|k|}$ leva os pontos em seu interior (exceto seu centro) para pontos em seu exterior e vice-versa (YAGLOM, 2009);*

O centro O de inversão é o único ponto do plano que não vai para qualquer ponto do plano (nem é a imagem de qualquer ponto do plano). Considerando A um ponto do plano, temos:

- Se $OA = \sqrt{|k|}$, o ponto A está sobre a circunferência de inversão Γ , então $OA' = |k/OA| = \sqrt{|k|}$, ou seja, A' também está em Γ ;
- Se $OA < \sqrt{|k|}$, o ponto A é interno à circunferência Γ , então $OA' = |k/OA| > \sqrt{|k|}$, ou seja, A' é exterior à circunferência Γ ;
- Se $OA > \sqrt{|k|}$, o ponto A é externo à circunferência Γ , então $OA' = |k/OA| < \sqrt{|k|}$, ou seja, A' é interior à circunferência Γ .

Assim, se a potência da inversão for positiva (a inversão é uma reflexão na circunferência Γ), então cada ponto de Γ é transformado em si mesmo (pontos fixos da inversão), e se a potência for negativa, cada ponto de Γ é transformado em um ponto diametralmente oposto de Γ (não há pontos fixos).

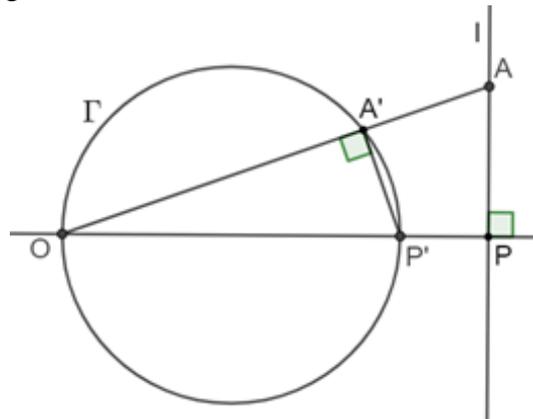
Propriedade 5.4 *Uma inversão transforma uma reta l que passa pelo centro O da circunferência de inversão em si mesma (YAGLOM, 2009).*

Demonstração. Isso é consequência imediata do fato de que a imagem A' de um ponto A sob inversão está na reta OA . ■

Propriedade 5.5 *Uma inversão transforma uma reta l que não passa pelo centro O da circunferência de inversão em uma circunferência que passa por O (YAGLOM, 2009).*

Demonstração. Seja P o ponto de intersecção da reta l com o diâmetro perpendicular que passa por O e seja P' a imagem de P sob inversão (Figura 75).

Figura 75 – Inversão de Reta em Circunferência



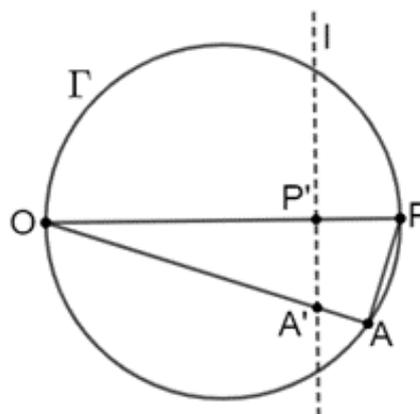
Fonte: YAGLOM.

A definição de inversão aponta que $OP' = \frac{k}{OP}$, onde k é a potência de inversão. Seja A um ponto qualquer de l e seja A' sua imagem sob inversão. Dessa forma, temos $OP \cdot OP' = OA \cdot OA' = k \iff \frac{OP}{OA} = \frac{OA'}{OP'}$. Essa relação mostra que os triângulos OPA e $OA'P'$ são semelhantes pelo caso LAL. Portanto, $\angle OA'P' = \angle OPA = 90^\circ$, ou seja, A' está na circunferência S cujo diâmetro é o segmento OP' . ■

Propriedade 5.6 *Uma inversão transforma uma circunferência Γ que passa pelo centro da circunferência de inversão em uma reta que não passa por esse centro (YAGLOM, 2009).*

Demonstração. Considere o diâmetro de extremos O e P em Γ e seja P' a imagem de P sob a inversão (Figura 76).

Figura 76 – Inversão de Circunferência em Reta



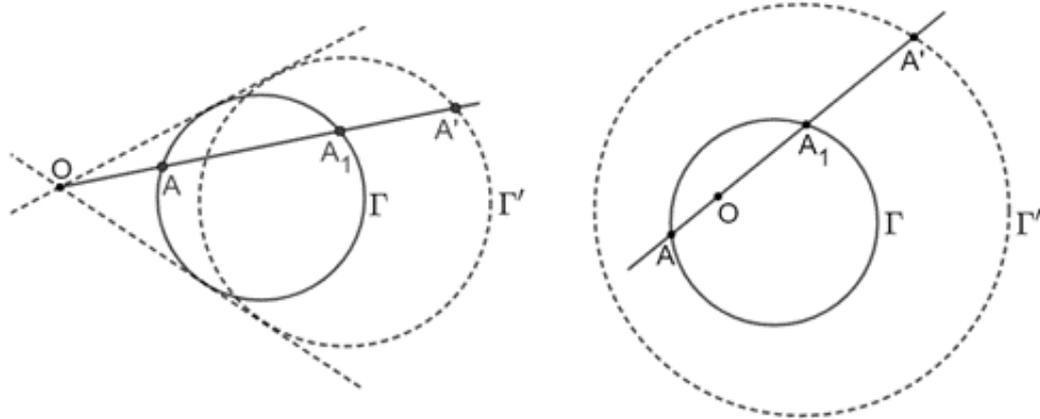
Fonte: YAGLOM.

Tomemos um ponto A em Γ cuja imagem seja A' . Os triângulos $OP'A'$ e OAP são semelhantes pelo caso AAA, onde $OP \cdot OP' = OA \cdot OA' = k$, donde $\angle OP'A' = \angle OAP = 90^\circ$, isto é, A' está na reta perpendicular a OP que passa por P' . ■

Propriedade 5.7 Uma inversão transforma uma circunferência Γ que não passa pelo centro da circunferência de inversão O em uma circunferência Γ' que não passa por O (YAGLOM, 2009).

Demonstração 1. Seja A um ponto em Γ com imagem A' sob inversão e seja A_1 o segundo ponto de intersecção de OA com Γ (Figura 77).

Figura 77 – Inversão de Circunferência em Circunferência



Fonte: YAGLOM.

Dessa forma, podemos escrever: $OA' = \frac{k}{OA}$, onde k é a potência de inversão. Por outro lado, temos:

$$OA \cdot OA_1 = k_1 \iff OA = \frac{k_1}{OA_1},$$

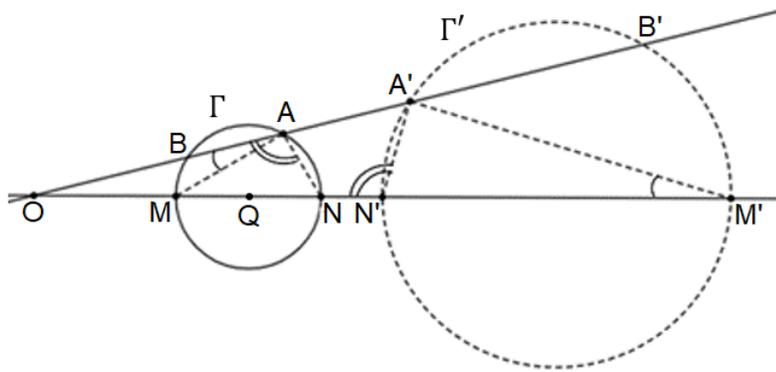
onde k_1 independe de A . Logo:

$$OA' = \frac{k}{k_1} \cdot OA_1,$$

isto é, A' é o inverso de A_1 com o centro O e potência k/k_1 , e, portanto, está na circunferência Γ' que é inversa de Γ . ■

Demonstração 2. Sejam Q o centro de Γ , M e N os pontos de intersecção de Γ com a reta OQ (O é o centro de inversão), A um ponto qualquer de Γ e M' , N' , A' as imagens sob inversão de M , N , A , respectivamente (Figura 78) (YAGLOM, 2009).

Figura 78 – Inversão de Centros



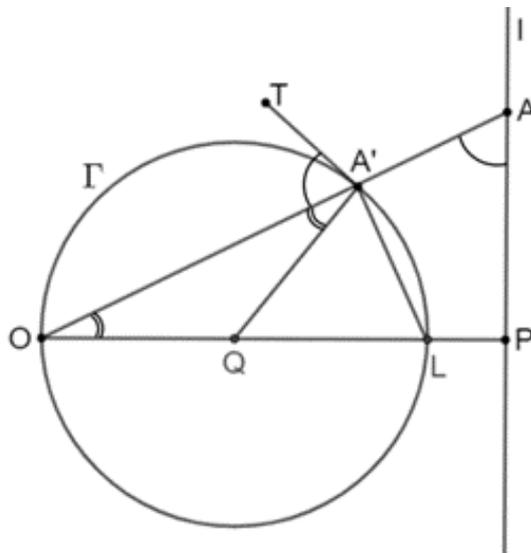
Fonte: YAGLOM.

Percebamos que $\widehat{BM} = 2 \cdot \angle OAM = \widehat{A'N'} = 2 \cdot \angle N'M'A' = 2 \cdot \angle OM'A'$. Portanto, $\angle OAM = \angle OM'A'$. Analogamente, $\angle OAN = \angle ON'A'$. Obviamente, $\angle MAN = \angle OAN - \angle OAM$ e $\angle M'A'N' = \angle ON'A' - \angle OM'A'$. Por isso, $\angle M'A'N' = \angle MAN = 90^\circ$, o que significa que A' está na circunferência Γ' cujo diâmetro é $M'N'$. ■

Propriedade 5.8 *A inversão preserva o ângulo entre: duas circunferências, uma circunferência e uma reta, duas retas (YAGLOM, 2009).*

Demonstração. Suponha que uma das duas figuras seja uma reta que passa pelo centro de inversão, OA . Se a segunda figura também for uma reta, l , então, para a prova, considere a figura 79, onde Q é o centro de Γ que é a imagem de l e $A'T$ é tangente a Γ em A' .

Figura 79 – Preservação de Ângulos na Inversão 1

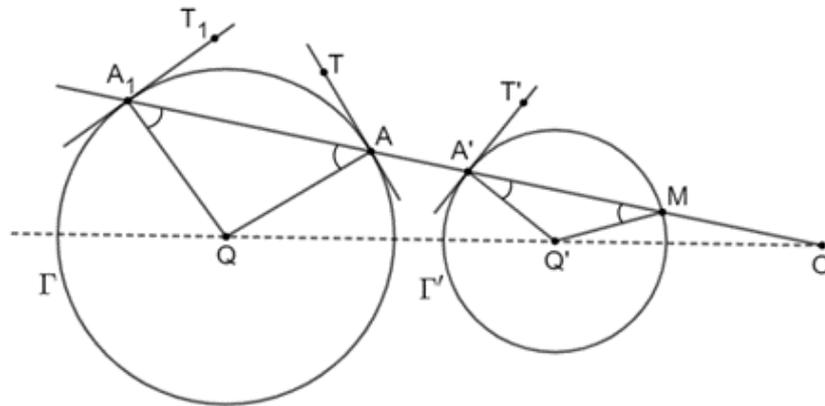


Fonte: YAGLOM.

Vejam os que $\angle TA'O = 90^\circ - \angle OA'Q = 90^\circ - \angle A'OQ = \angle PAO$.

Se a segunda figura é uma circunferência, então, para a prova, considere a figura 80, onde Q e Q' são os respectivos centros de Γ e Γ' , AT é a tangente a Γ em A , e $A'T'$ é a tangente a Γ' em A' .

Figura 80 – Preservação de Ângulos na Inversão 2

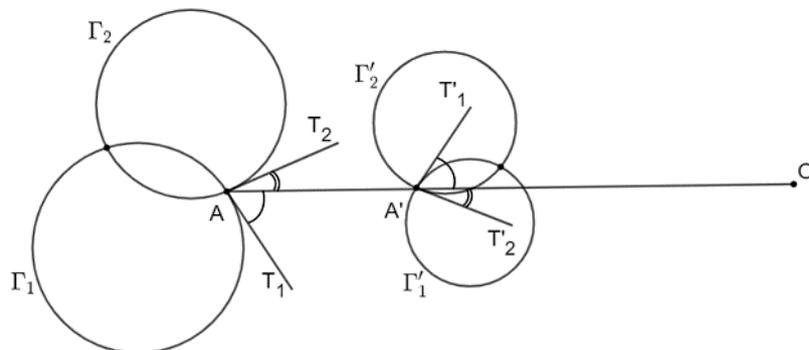


Fonte: YAGLOM.

Percebamos que $\angle Q'A'O = \angle QA_1O = \angle QAA_1$, $\angle TAA_1 = 90^\circ - \angle QAA_1 = 90^\circ - \angle QA_1A = 90^\circ - \angle Q'A'O = \angle T'A'O$.

Agora considere o caso de duas circunferências Γ_1 e Γ_2 que se interceptam em um ponto A . Digamos que suas imagens sob inversão são as circunferências Γ'_1 e Γ'_2 que se cruzam em A' . Sejam AT_1 e AT_2 as tangentes a Γ_1 e Γ_2 em A , e sejam $A'T'_1$ e $A'T'_2$ as tangentes a Γ'_1 e Γ'_2 , respectivamente (Figura 81).

Figura 81 – Tangentes à Circunferências Inversas



Fonte: YAGLOM.

A partir do que foi provado anteriormente, segue que $\angle T'_1A'O = \angle T_1AO$ e $\angle T'_2A'O = \angle T_2AO$, donde $\angle T'_1A'T'_2 = \angle T_1AT_2$. ■

6 APLICAÇÕES DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

6.1 Problemas

No presente capítulo, serão exploradas aplicações práticas das transformações geométricas no plano, abrangendo desde problemas elementares até questões de maior complexidade. Através de isometrias, homotetias e inversões, será possível abordar uma variedade de problemas, demonstrando como essas ferramentas podem simplificar e proporcionar novas perspectivas em sua resolução.

A ideia central é destacar a flexibilidade e eficiência das transformações geométricas, tanto em situações cotidianas quanto em desafios matemáticos mais sofisticados, conectando conceitos teóricos a soluções concretas.

As isometrias, como translações, rotações, reflexões e simetrias, serão aplicadas inicialmente em problemas simples, nos quais a preservação de distâncias e ângulos oferece soluções diretas e elegantes. Esses exemplos permitirão observar como, ao manterem a estrutura original da figura, as isometrias facilitam a identificação de padrões e relações geométricas, reduzindo a complexidade de diversas situações. Além disso, será destacada a importância da análise dessas transformações na construção de demonstrações mais acessíveis e intuitivas.

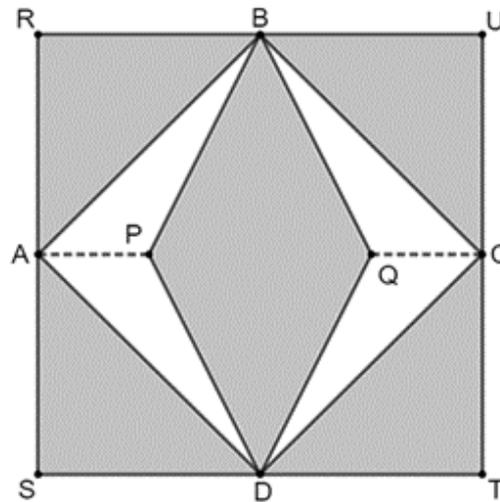
Na sequência, as homotetias e inversões serão introduzidas em problemas mais avançados, nos quais a ampliação ou redução proporcional de figuras, bem como a transformação de retas em circunferências e vice-versa, abrirá novas possibilidades de abordagem.

Essas técnicas serão aplicadas em questões que envolvem construção de figuras geométricas, resolução de equações envolvendo circunferências e outras formas, além de problemas clássicos da geometria plana. Através dessas transformações, será possível observar como se pode transformar um problema complexo em uma versão simplificada, facilitando a obtenção de soluções por meio de métodos criativos e visuais.

6.1.1 Problema 1

Problema. (Enem 2012 - Adaptada) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.

Figura 82 – Problema 1



Fonte: Autoria própria.

Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado RSTU e os segmentos AP e QC medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ 30,00 o metro quadrado, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB, que custa R\$ 50,00 o metro quadrado.

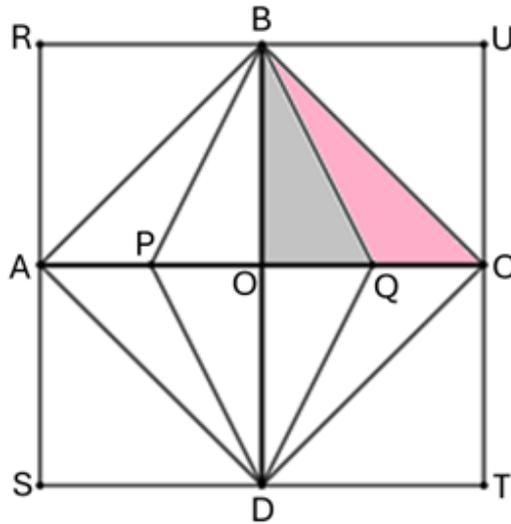
De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral? (INEP, 2012) (LOPES, 2021)

Solução. Utilizaremos apenas conceitos de simetria e translação para resolver de forma rápida e objetiva esse problema. Convém observar que $[XYZ]$ denota a área do triângulo XYZ.

Inicialmente, perceba que $[APB] = [APD] = [CQD] = [CQB]$, pois os triângulos possuem mesma base e mesma altura.

Traçando dois eixos de simetria da figura por O, centro do quadrado, obtemos a figura 83, na qual podemos concluir que $[QOB] = [CQB]$, pois ambos possuem bases com medidas iguais e alturas também.

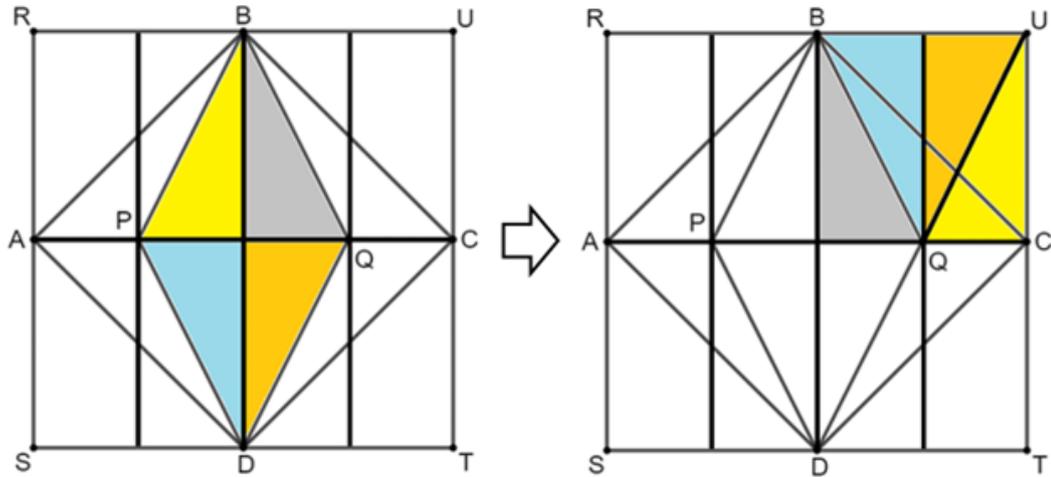
Figura 83 – Problema 1



Fonte: Autoria própria.

Analogamente, $[QOD] = [CDQ]$, $[POB] = [APB]$ e $[POD] = [APD]$. Dessa forma, por simetrias e translações podemos levar os quatro triângulos destacados para as novas posições mostradas abaixo.

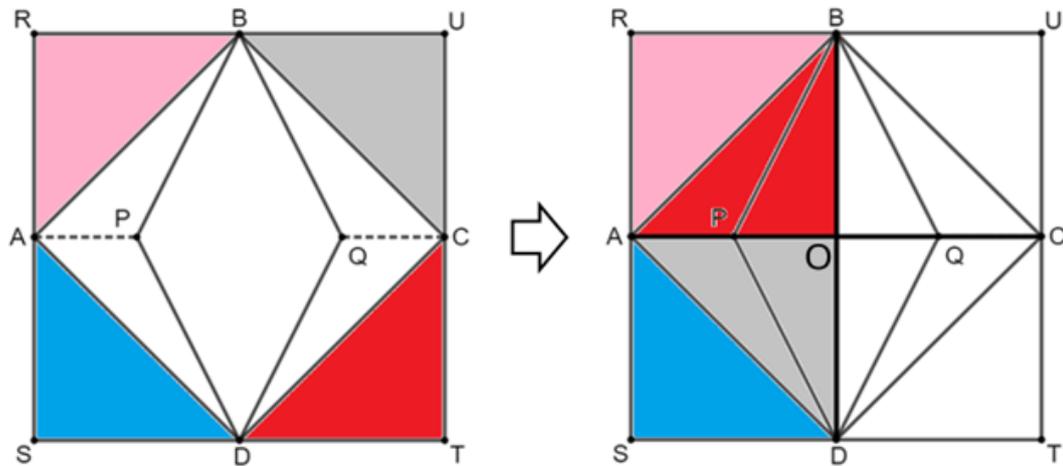
Figura 84 – Problema 1



Fonte: Autoria própria.

Raciocinando de forma semelhante, por rotações, podemos também deslocar os triângulos destacados para as novas posições mostradas a seguir.

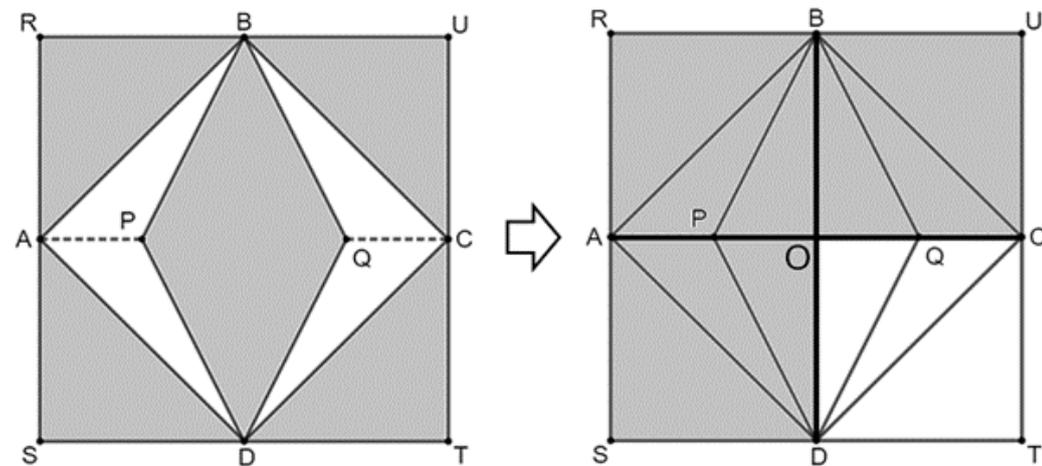
Figura 85 – Problema 1



Fonte: Autoria própria.

Do exposto, a área sombreada original pode ser transformada conforme figura 86.

Figura 86 – Problema 1



Fonte: Autoria própria.

Percebamos que a área sombreada do vitral corresponde a $\frac{3}{4}$ da área total do quadrado $RSTU$ e a área mais clara corresponde a $\frac{1}{4}$ da área total do quadrado $RSTU$.

Como a área do quadrado $RSTU$ vale $(1\text{ m})^2 = 1\text{ m}^2$, temos que a área sombreada vale $\frac{3}{4} \cdot 1 = 0,75\text{ m}^2$ e a área mais clara vale $\frac{1}{4} \cdot 1 = 0,25\text{ m}^2$.

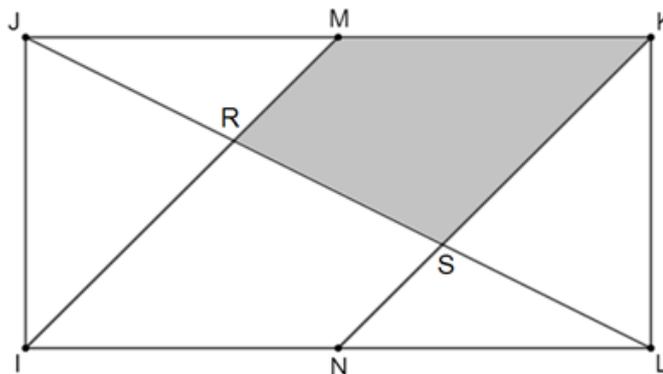
Finalmente, o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral é dado por

$$0,25 \cdot 50 + 0,75 \cdot 30 = 12,50 + 22,50 = 35,00 \text{ reais. } \blacksquare$$

6.1.2 Problema 2

Problema. (Banco de Problemas da OBMEP 2012 - Adaptada) A figura mostra um retângulo $IJKL$ com área de 120 metros quadrados tal que $\overline{IJ} = \overline{JM} = \overline{MK} = \overline{KL} = \overline{LN} = \overline{NI}$. Traçam-se os segmentos IM e NK e a diagonal JL de forma a obter-se a região sombreada $MKSR$.

Figura 87 – Problema 2

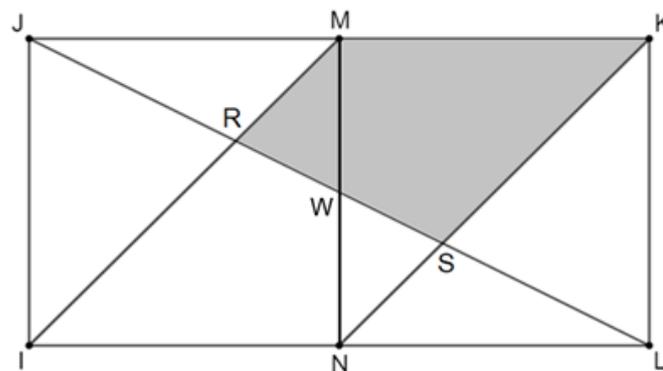


Fonte: Rodrigues.

Qual a medida da área da região $MKSR$? (RODRIGUES *et al.*, 2012) (LOPES, 2021)

Solução. Vamos iniciar observando que como M é ponto médio de JK e N é ponto médio de IL , temos que MN é eixo de simetria do retângulo conforme figura abaixo.

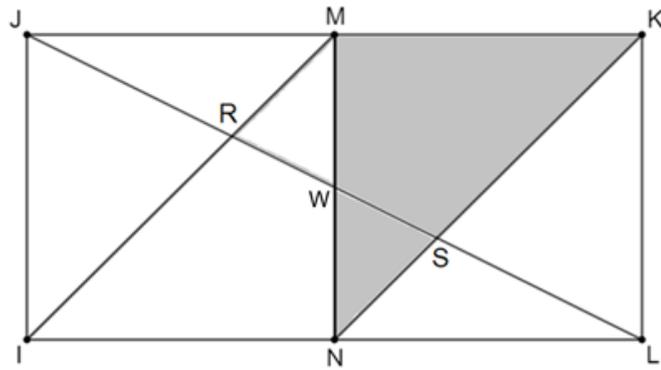
Figura 88 – Problema 2



Fonte: Rodrigues.

Por simetria, $IM \parallel NK$. Mais ainda, a simetria em torno do ponto W leva o triângulo MWR no triângulo NWS , o que implica dizer que tais triângulos são congruentes. Dessa forma, em relação a W , podemos rotacionar o $\triangle MWR$ de 180° e obter o $\triangle NWS$, de acordo com a figura a seguir.

Figura 89 – Problema 2



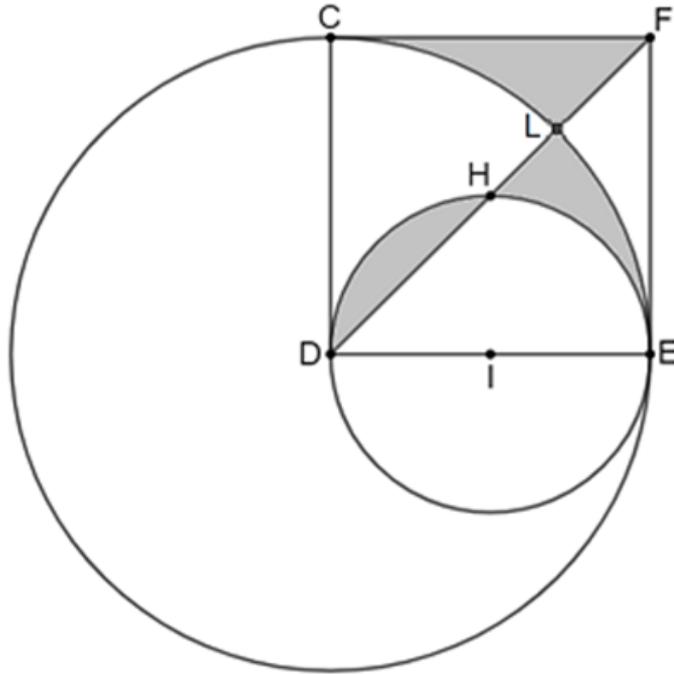
Fonte: Rodrigues.

Essa última figura evidencia que a área da região sombreada corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do retângulo, ou seja, $\frac{1}{4} \cdot 120 = 30 \text{ m}^2$. ■

6.1.3 Problema 3

Problema. Na figura 90, tem-se um quadrado CDEF de lado 6 cm, sendo H o centro do quadrado, CE é um arco de circunferência com centro em D e DHE é uma semicircunferência com centro em I. Calcular a medida da área sombreada.

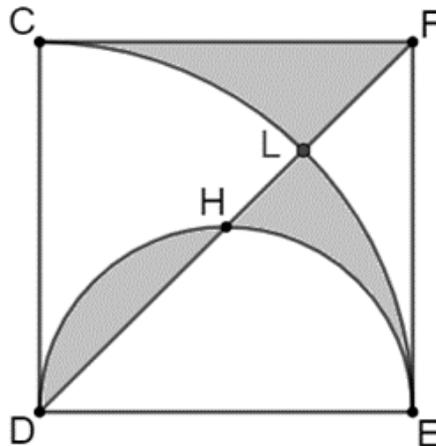
Figura 90 – Problema 3



Fonte: Autoria própria.

Solução. Inicialmente, vamos simplificar nossa figura para a ilustrada abaixo.

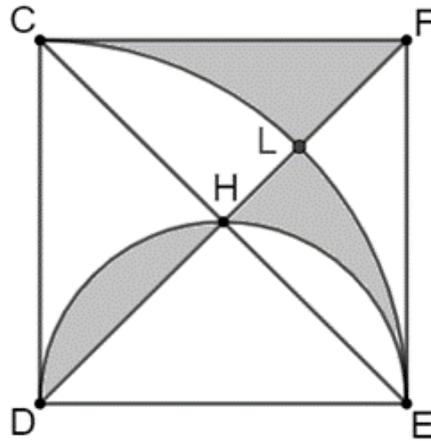
Figura 91 – Problema 3



Fonte: Autoria própria.

Ao traçarmos a diagonal CE , ela intersecta a diagonal DF em H , centro do quadrado, sendo as duas diagonais eixos de simetria da figura conforme mostrado a seguir.

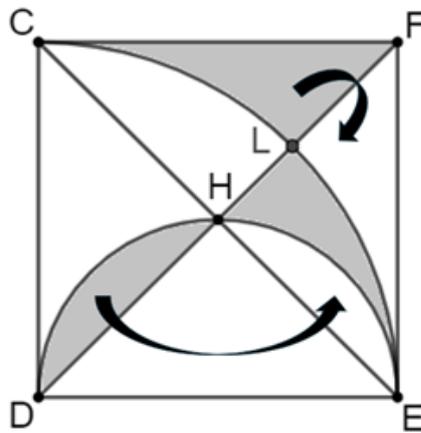
Figura 92 – Problema 3



Fonte: Autoria própria.

Observemos agora que podemos, por simetria, mover as duas regiões mostradas na figura 93.

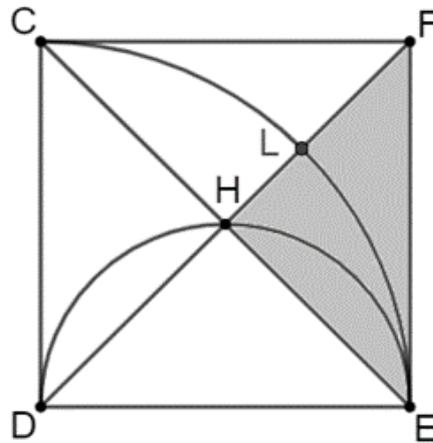
Figura 93 – Problema 3



Fonte: Autoria própria.

Daí, obtemos a nova figura 94 mostrada abaixo.

Figura 94 – Problema 3



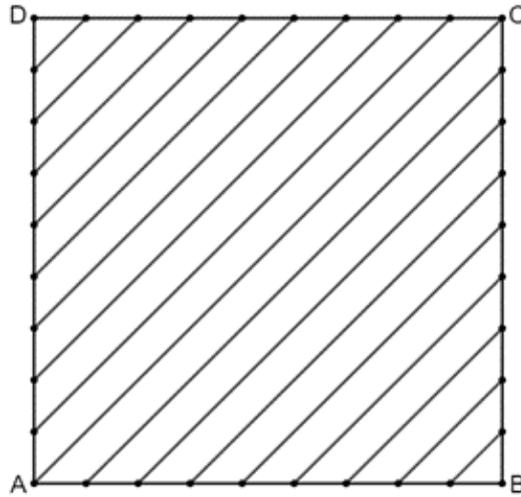
Fonte: Autoria própria.

Finalmente, do exposto, concluímos que a área sombreada corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado, isto é, $\frac{1}{4} \cdot 6^2 = 9 \text{ cm}^2$. ■

6.1.4 Problema 4

Problema. Um quadrado $ABCD$ de lado ℓ tem cada um de seus lados dividido em 9 partes iguais. Ligando-se com segmentos de reta os pontos de divisão, segundo a direção da diagonal AC , obtém-se a figura mostrada abaixo.

Figura 95 – Problema 4

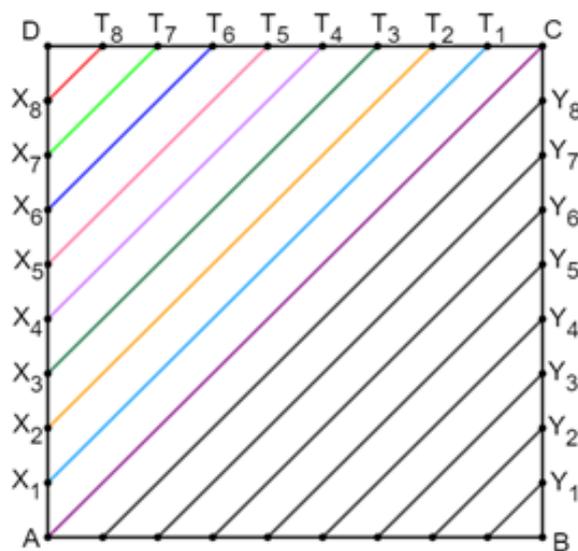


Fonte: LOPES.

Determinar a soma dos comprimentos dos 17 segmentos assim obtidos. (LOPES, 2021)

Solução. Vamos iniciar nomeando todos os pontos sobre os lados do quadrado $ABCD$ conforme mostrado abaixo.

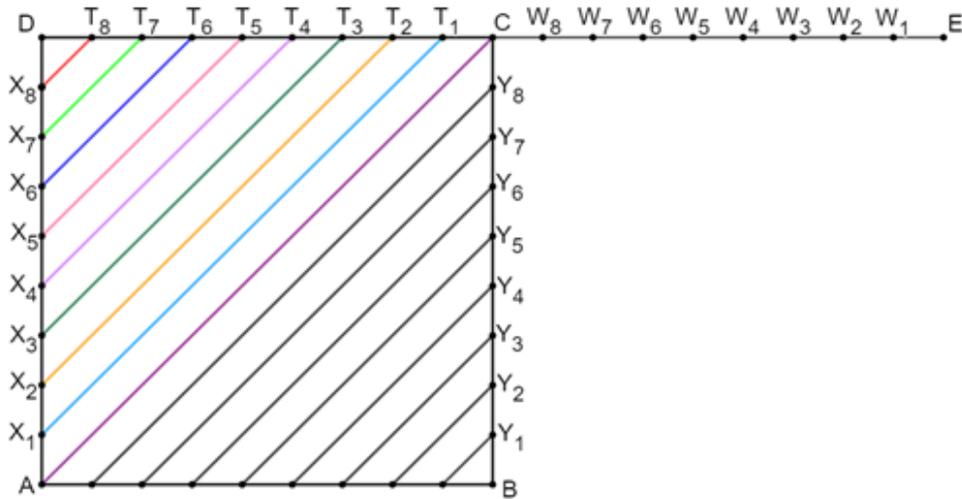
Figura 96 – Problema 4



Fonte: Autoria própria.

Prolonguemos o lado DC do quadrado na direção de D para C até o ponto E , de modo a obtermos um segmento $\overline{CE} = \overline{DC}$ e tomemos os pontos $W_8, W_7, W_6, W_5, W_4, W_3, W_2, W_1$ que dividem CE em 9 partes iguais (Figura 97).

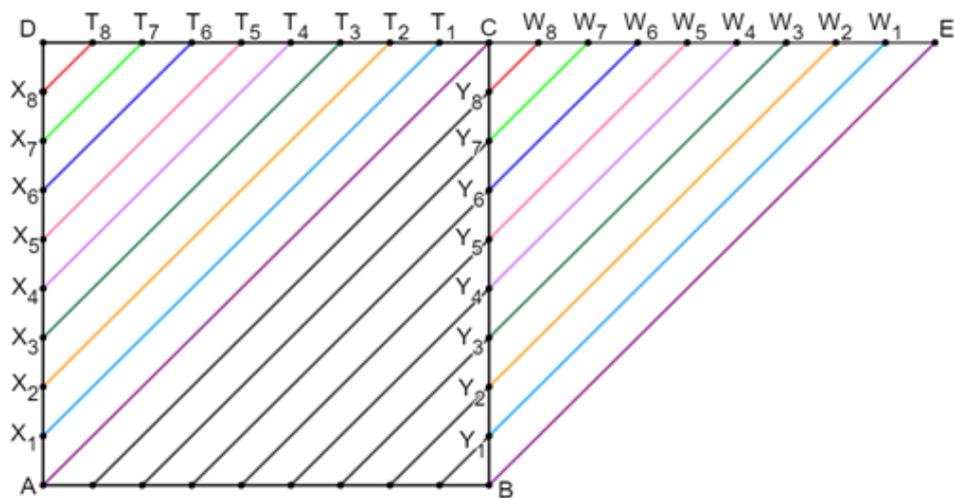
Figura 97 – Problema 4



Fonte: Autoria própria.

Transladando os segmentos $X_8T_8, X_7T_7, X_6T_6, X_5T_5, X_4T_4, X_3T_3, X_2T_2, X_1T_1, AC$ em relação ao lado BC do quadrado, obtemos os segmentos $Y_8W_8, Y_7W_7, Y_6W_6, Y_5W_5, Y_4W_4, Y_3W_3, Y_2W_2, Y_1W_1, BE$ de modo que $X_8T_8 = Y_8W_8, X_7T_7 = Y_7W_7, X_6T_6 = Y_6W_6, X_5T_5 = Y_5W_5, X_4T_4 = Y_4W_4, X_3T_3 = Y_3W_3, X_2T_2 = Y_2W_2, X_1T_1 = Y_1W_1, AC = BE$, conforme figura 98.

Figura 98 – Problema 4



Fonte: Autoria própria.

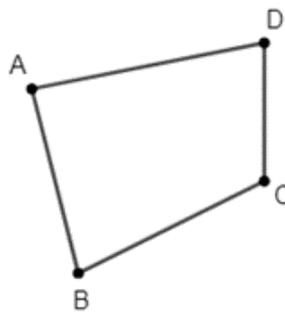
Dessa forma, a soma dos comprimentos dos 17 segmentos traçados no quadrado $ABCD$ corresponde ao comprimento de 9 diagonais do quadrado, isto é, $9\ell\sqrt{2}$. ■

6.1.5 Problema 5

Problema. Uma figura ladrilha o plano quando pode ser usada para preencher todo o plano bidimensional sem deixar espaços vazios ou causar sobreposição entre as figuras. Esse processo é conhecido como tesselar ou formar um mosaico no plano. Mostre que qualquer quadrilátero, convexo ou não, ladrilha o plano.

Demonstração. Seja $ABCD$ (Figura 99) um quadrilátero e M_1 o ponto médio do lado \overline{AB} . A ideia é colocar todos os ângulos do quadrilátero $ABCD$ em torno de um vértice fixo, digamos o vértice B .

Figura 99 – Problema 5

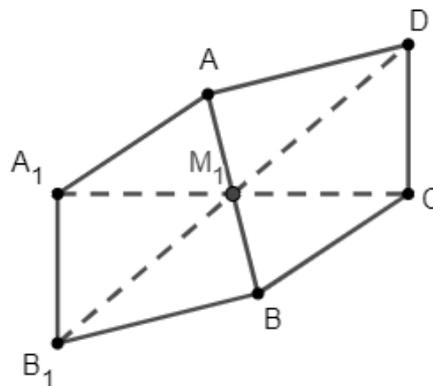


Fonte: Autoria própria.

Tomemos os simétricos dos vértices A, B, C e D do quadrilátero em relação ao ponto M_1 . Assim: A é o simétrico de B , B é o simétrico de A , A_1 é o simétrico de C e B_1 é o simétrico de D .

Geramos um novo quadrilátero BAA_1B_1 . Observe a figura 100 a seguir.

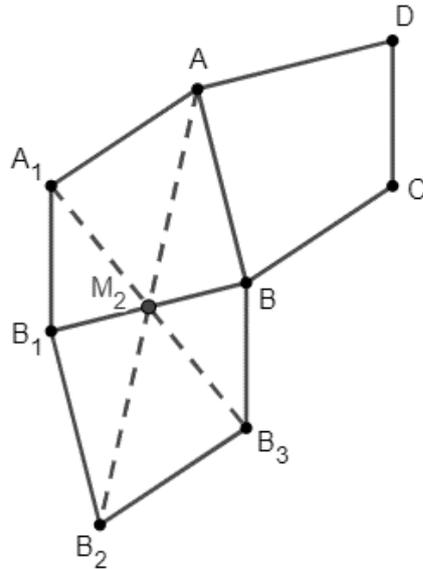
Figura 100 – Problema 5



Fonte: Autoria própria.

Os quadriláteros $ABCD$ e BAA_1B_1 são congruentes por causa da simetria em torno do ponto M_1 . Agora, seja M_2 o ponto médio do segmento $\overline{B_1B}$ e tomemos os simétricos de A, A_1, B_1 e B em relação a M_2 . Desse modo, B é o simétrico de B_1 , B_1 é o simétrico de B , B_2 é o simétrico de A e B_3 é o simétrico de A_1 . Geramos um novo quadrilátero $BB_1B_2B_3$, que de acordo com a figura 101, é congruente ao quadrilátero B_1BAA_1 pela simetria em torno do ponto M_2 .

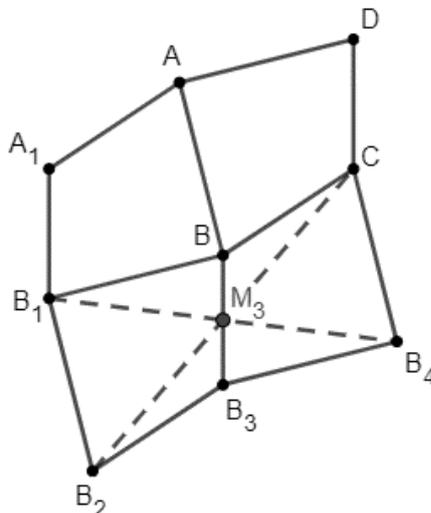
Figura 101 – Problema 5



Fonte: Autoria própria.

De modo análogo ao que foi explicado para os quadriláteros $ABCD$ e BAA_1B_1 , os quadriláteros BAA_1B_1 e $B_1B_2B_3B$ também são congruentes. Procedendo da mesma forma para o quadrilátero $B_1B_2B_3B$, temos que B_4B_3BC é congruente a este (Figura 102).

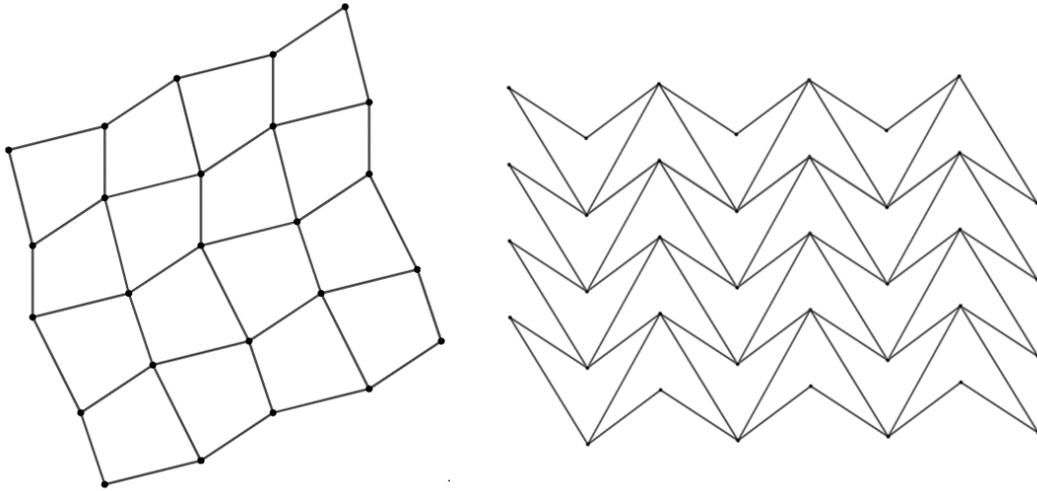
Figura 102 – Problema 5



Fonte: Autoria própria.

Assim, conseguimos colocar todos os ângulos do quadrilátero $ABCD$ coincidindo no vértice B , ou seja, a soma desses ângulos é 360° . Logo, repetindo esse processo em qualquer vértice, obtemos um ladrilhamento do plano como o da figura 103. Essa demonstração também é válida para os quadriláteros não convexos como mostrado abaixo. (LEONARD *et al.*, 2014) ■

Figura 103 – Problema 5



Fonte: Autoria própria.

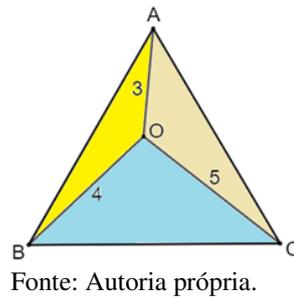
6.1.6 Problema 6

Problema. (Preliminary Contests for the Selection of the Hong Kong Team for the Internacional Mathematical Olympiads 1988-1997)

Considere ABC um triângulo equilátero. Seja O um ponto interno ao triângulo tal que $AO=3$, $BO=4$ e $CO=5$. Calcular a área do triângulo ABC (KO, 1999) (ANDREESCU *et al.*, 2016) (ANDREESCU *et al.*, 2013).

Solução. Considere a figura a seguir.

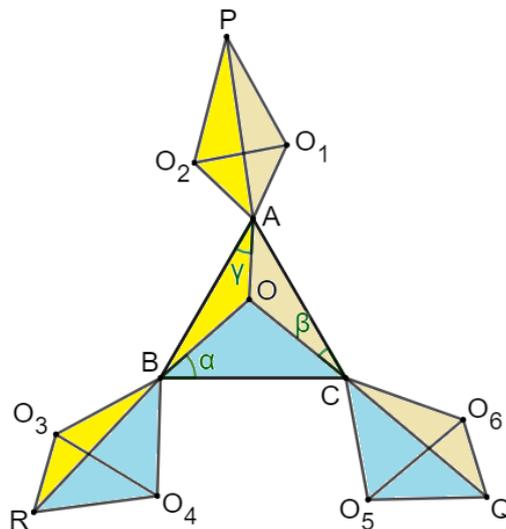
Figura 104 – Problema 6



Consideremos $\angle OBC = \alpha$, $\angle OCA = \beta$ e $\angle OAB = \gamma$. Evidentemente que $\angle OBA = 60^\circ - \alpha$, $\angle OCB = 60^\circ - \beta$ e $\angle OAC = 60^\circ - \gamma$.

Agora, realizando rotações dos triângulos destacados pelas cores para fora do triângulo equilátero original, obtemos os quadriláteros AO_1PO_2 , BO_3RO_4 e CO_5QO_6 conforme mostrado abaixo.

Figura 105 – Problema 6



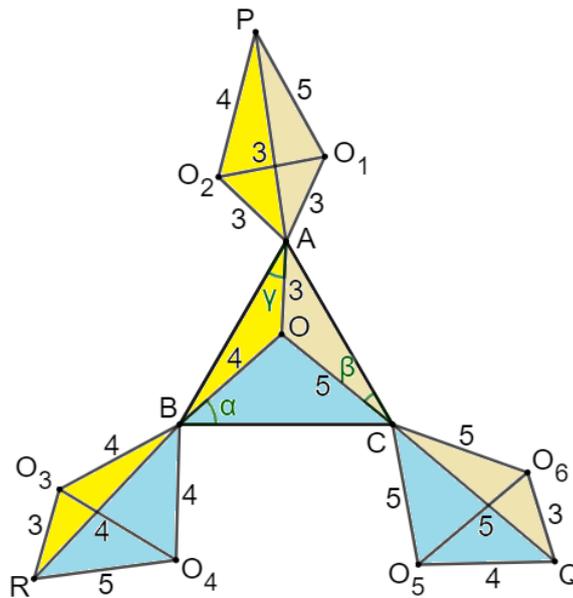
Fonte: Ko.

Inicialmente, vamos analisar as rotações em torno do vértice B .

Percebamos que o triângulo OBC foi transformado, por rotação, no triângulo O_4BR , de modo que $\angle OBC = \angle O_4BR = \alpha$. Da mesma forma, o triângulo OBA foi transformado, por rotação, no triângulo O_3BR , de modo que $\angle OBA = \angle O_3BR = 60^\circ - \alpha$. É importante perceber também que esses dois triângulos rotacionados possuem um lado com mesma medida, BC e BA que coincidem em BR . Dessa forma, temos que $\angle CBA = \angle O_3BO_4 = 60^\circ$ e como $BO = BO_4 = BO_3 = 4$, o triângulo O_3O_4B é equilátero de lado 4.

Além disso, $OC = RO_4 = 5$ e $OA = O_3R = 3$, donde achamos que o triângulo O_3RO_4 é retângulo. Logo, a área do quadrilátero BO_3RO_4 é igual à soma das áreas dos triângulos O_3O_4B (equilátero de lado 4) e O_3RO_4 (triângulo retângulo de catetos 3 e 4). A figura abaixo mostra todas as medidas.

Figura 106 – Problema 6



Fonte: Ko.

Procedendo de forma análoga para os vértices A e C do triângulo ABC , concluímos que $[AO_1PO_2] + [BO_3RO_4] + [CO_5QO_6] = 2 \cdot [ABC]$, ou seja,

$$\left(\frac{3^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3 \cdot 4}{2} \right) + \left(\frac{4^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3 \cdot 4}{2} \right) + \left(\frac{5^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3 \cdot 4}{2} \right) = 2 \cdot [ABC] \iff$$

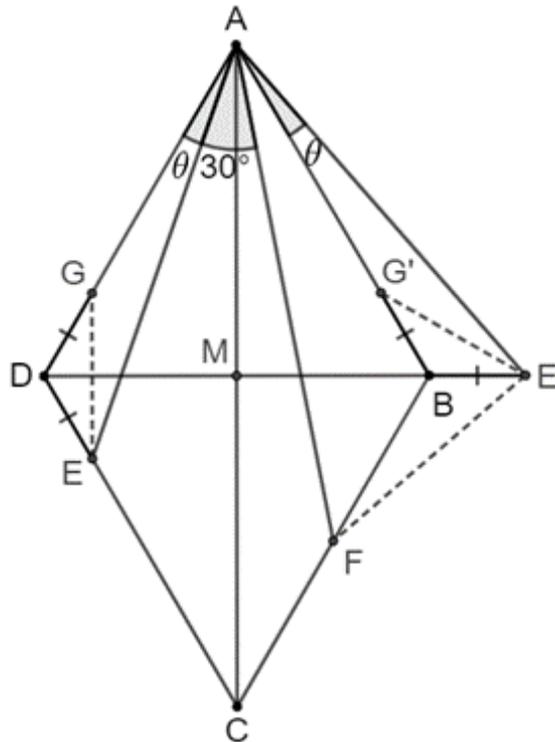
$$[ABC] = \frac{25\sqrt{3}}{4} + 9. \blacksquare$$

6.1.7 Problema 7

Problema. (Teste Cone Sul 2017 Brasil – Adaptada) Seja $ABCD$ um losango tal que os triângulos ABD e CBD são equiláteros. Dados dois pontos E e F sobre os lados CD e CB , respectivamente, tais que $\angle EAF = 30^\circ$, mostre que $\angle EMF = 90^\circ$. (FEITOSA, 2017)

Solução. Considere a figura a seguir ilustrativa da situação descrita. Nela, é fácil perceber que DB é eixo de simetria do losango. Então, seja G o simétrico de E em relação ao eixo BD . Sabemos que $\angle DAB = 60^\circ$. Portanto, rotacionando o triângulo ADE de 60° com centro em A , transportamos esse triângulo para a posição do triângulo ABE' , e, por essa rotação, G é transportado para G' .

Figura 107 – Problema 7



Fonte: Autoria própria.

Como reflexões e rotações são isometrias, concluímos que os segmentos DG, DE, BG' e BE' são congruentes. Por outro lado, $EG \perp DB$, mas na rotação de 60° em torno de A , podemos concluir que $E'G' \perp BC$, uma vez que estes dois segmentos são imagens daqueles pela rotação. Donde podemos afirmar que G' é simétrico de E' em relação à reta BC , de sorte que $FG' \cong FE'$. Mais ainda, G' é simétrico de E em relação ao ponto M (Figura 108).

6.1.8 Problema 8

Problema de Fagnano

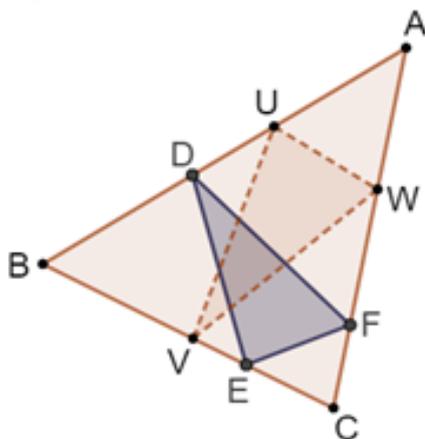
Giovanni Francesco Fagnano Dei Toschi nasceu a 31 de janeiro de 1715, na cidade italiana de Sinigaglia (atual Senigallia), e morreu, no mesmo local, a 14 de maio de 1797. Nasceu numa das principais famílias da cidade, sendo seu pai Giulio Carlo Fagnano (1682-1766), conhecido pelo seu contributo na área da Matemática, como é exemplo o seu trabalho relacionado com a lemniscata de Bernoulli. Giovanni Fagnano não era filho único, mas foi o único filho que herdou do pai o gosto pela Matemática.

Fagnano seguiu a vida do sacerdócio, tendo desempenhado cargos de relevante importância na catedral de Sinigaglia. Para além da sua dedicação à Igreja, deu continuidade ao trabalho de seu pai, escrevendo um tratado sobre a geometria do triângulo, contribuindo, assim, com vários resultados sobre o assunto. (FARIA, 2013)

Problema. Inscrever num triângulo acutângulo dado, um triângulo de perímetro mínimo. (FARIA, 2013) (ANDREESCU *et al.*, 2005)

Solução. Dado um triângulo acutângulo ABC , seja DEF o respetivo triângulo órtico (triângulo cujos vértices são os pés das alturas relativas a cada lado). Consideremos UVW outro triângulo qualquer inscrito no triângulo ABC conforme figura a seguir.

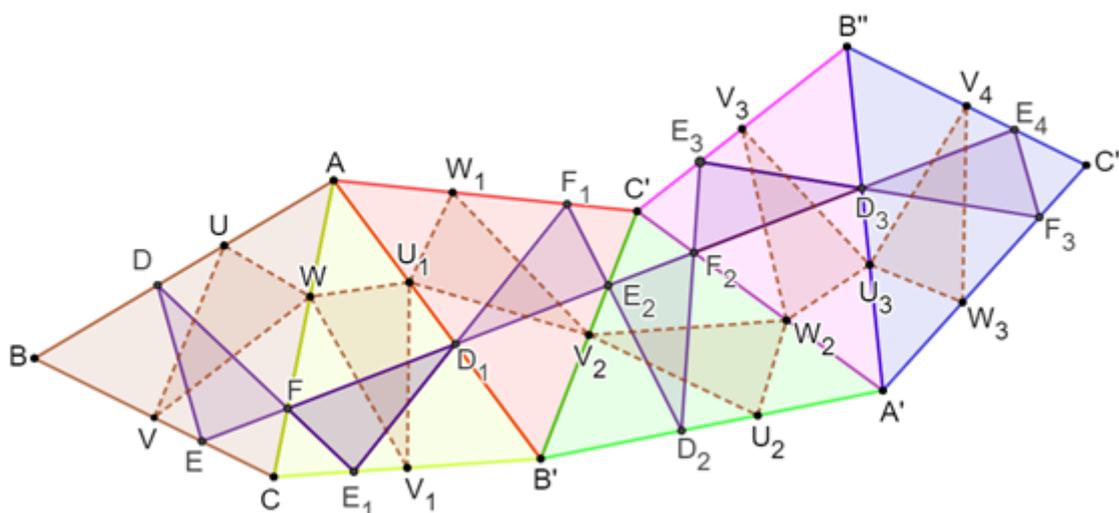
Figura 109 – Problema 8



Fonte: FARIA.

A partir dessa figura, realizando reflexões sucessivas do $\triangle ACB$ com relação a AC , AB' , $B'C'$, $C'A'$ e $A'B''$, obtemos o $\triangle A'B''C''$ mostrado a seguir.

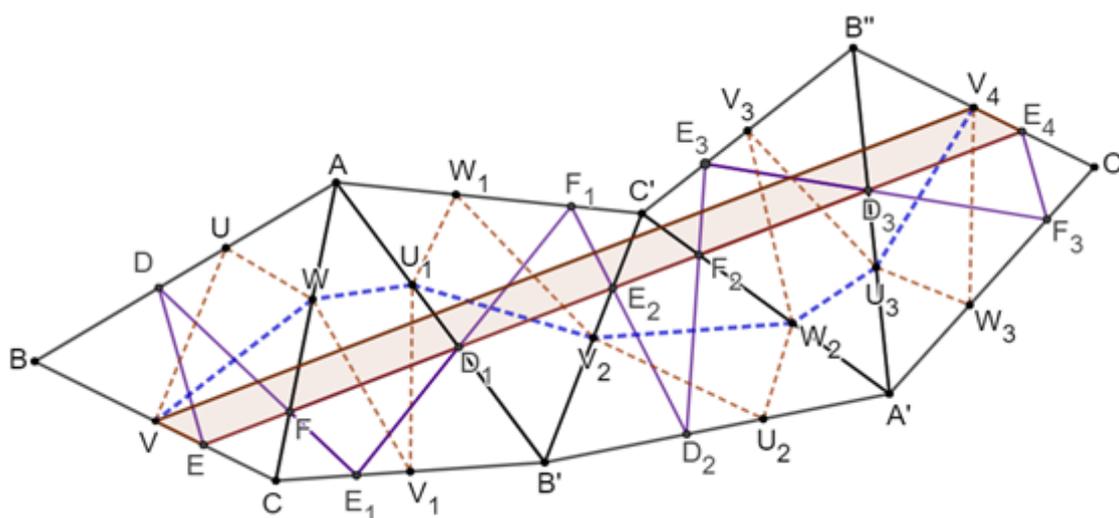
Figura 110 – Problema 8



Fonte: FARIA.

Dessa forma, o segmento $B''C''$ é obtido a partir do segmento BC por uma translação. Como consequência, o quadrilátero EE_4V_4V é um paralelogramo (ver figura abaixo).

Figura 111 – Problema 8



Fonte: Autoria própria.

Temos que $EE_4 = VV_4$ e ambos de comprimento igual ao dobro do perímetro do triângulo órtico.

Por outro lado, temos a linha poligonal aberta $VWU_1V_2W_2U_3V_4$, de comprimento igual ao dobro do perímetro do triângulo inscrito UVW .

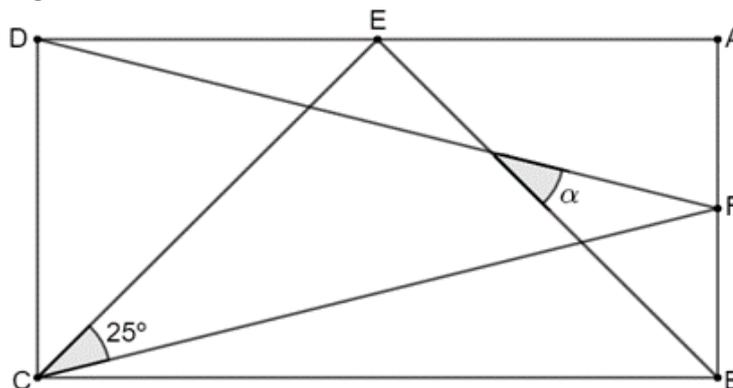
Finalmente, pela desigualdade triangular, vem:

$$\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FD} = \overline{EE_4}/2 = \overline{VV_4}/2 \leq (\overline{VW} + \overline{WU_1} + \overline{U_1V_2} + \overline{V_2W_2} + \overline{W_2U_3} + \overline{U_3V_4})/2 = \overline{UV} + \overline{VW} + \overline{WU}. \blacksquare$$

6.1.9 Problema 9

Problema. Considere um retângulo $ABCD$, onde E e F são pontos médios dos lados DA e AB , respectivamente conforme figura 112. Dado que $\angle ECF=25^\circ$, determine a medida do ângulo assinalado por α .

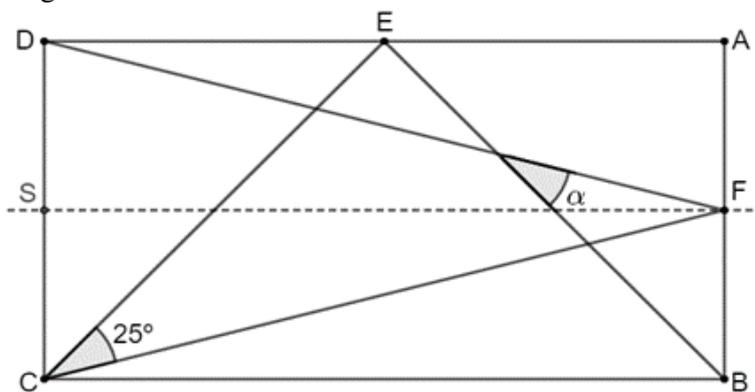
Figura 112 – Problema 9



Fonte: Autoria própria.

Solução. Para iniciar, considere a figura abaixo e tomemos S ponto médio de CD e a reta que passa por S e F . Percebamos que essa reta divide o retângulo ao meio de forma que ela é eixo de simetria de $ABCD$.

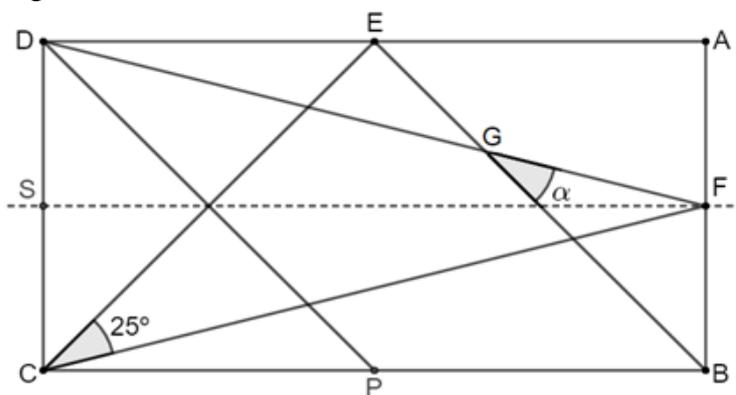
Figura 113 – Problema 9



Fonte: Autoria própria.

Tomemos agora o ponto P médio de BC e liguemos D a P . Evidentemente, $DP \parallel EB$ (Figura 114).

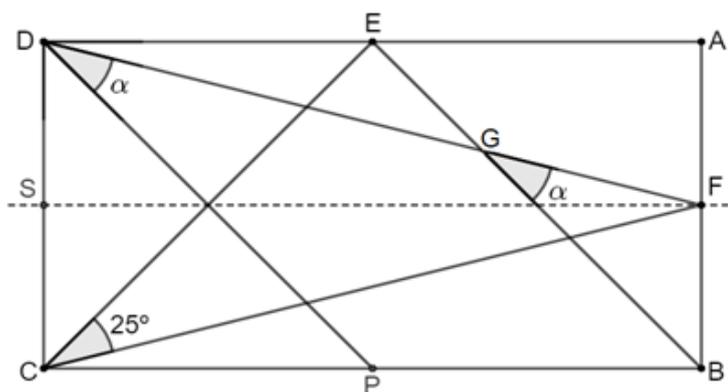
Figura 114 – Problema 9



Fonte: Autoria própria.

Por outro lado, sendo G a intersecção de DF com EB , temos que de $DP \parallel EB$ e DF é transversal dessas paralelas, donde $\angle FGB = \alpha = \angle GDP$ (Figura 115).

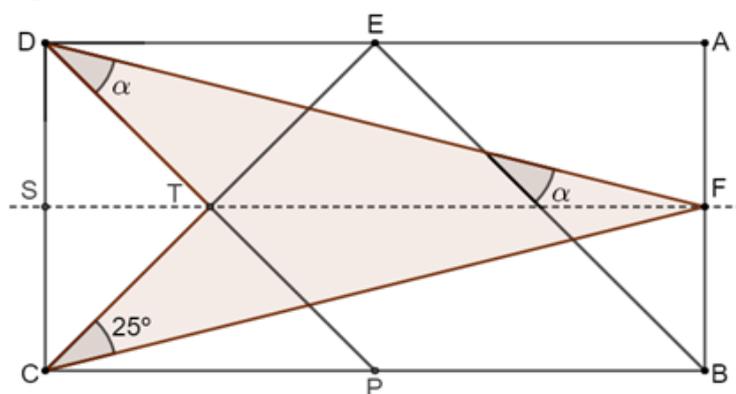
Figura 115 – Problema 9



Fonte: Autoria própria.

Finalmente, na figura a seguir, SF é eixo de simetria de $CFDT$. Então: $\angle PDF = \alpha = \angle ECF = 25^\circ$. ■

Figura 116 – Problema 9

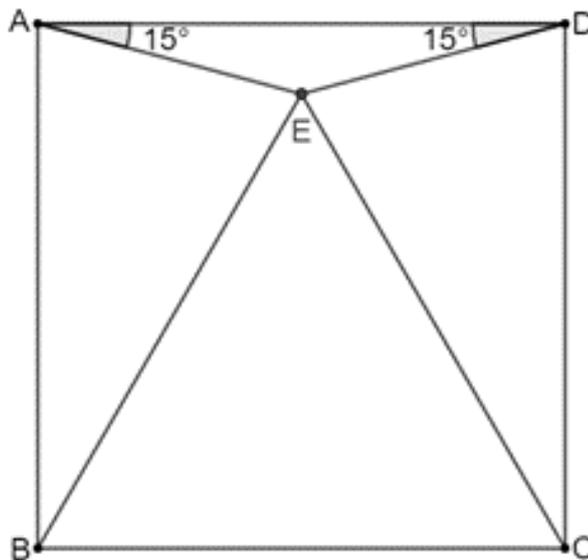


Fonte: Autoria própria.

6.1.10 Problema 10

Problema. Dado um quadrado $ABCD$, considere E um ponto em seu interior de tal forma que o triângulo ADE seja isósceles com $\angle DAE = \angle ADE = 15^\circ$ (Figura 117). Mostre que o triângulo BCE é equilátero.

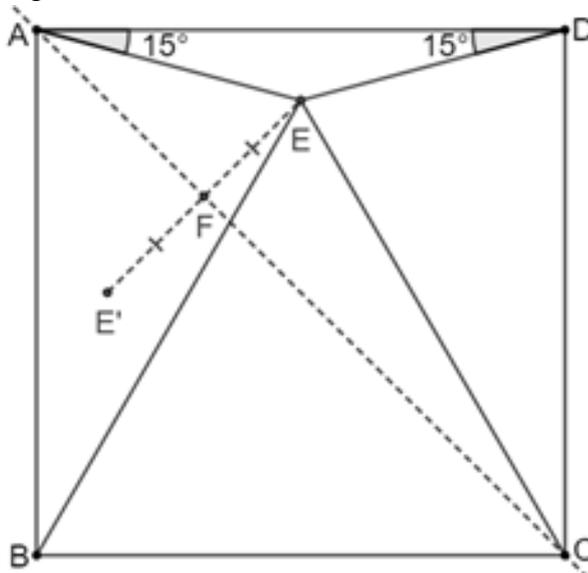
Figura 117 – Problema 10



Fonte: Autoria própria.

Solução. Inicialmente, tracemos a diagonal AC do quadrado $ABCD$. Essa diagonal é eixo de simetria do quadrado. A partir dela, tomemos E' o ponto simétrico de E em relação a AC (Figura 118).

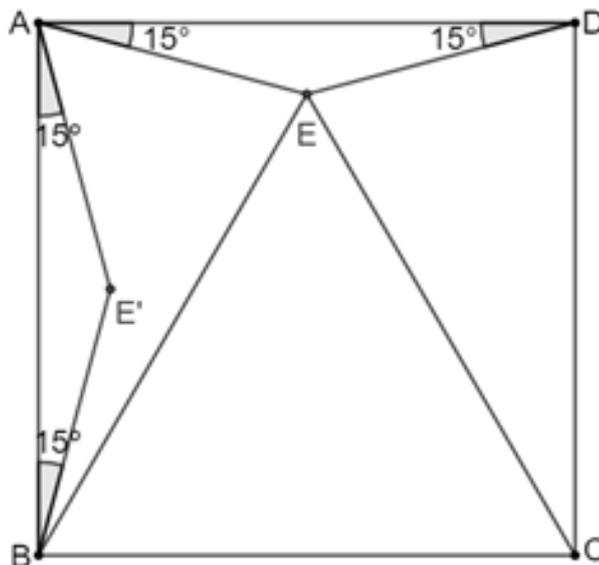
Figura 118 – Problema 10



Fonte: Autoria própria.

Ligando E' a A e a B , obtemos o triângulo ABE' que é simétrico do triângulo ADE em relação à mesma diagonal AC (Figura 119). Logo, tais triângulos são congruentes.

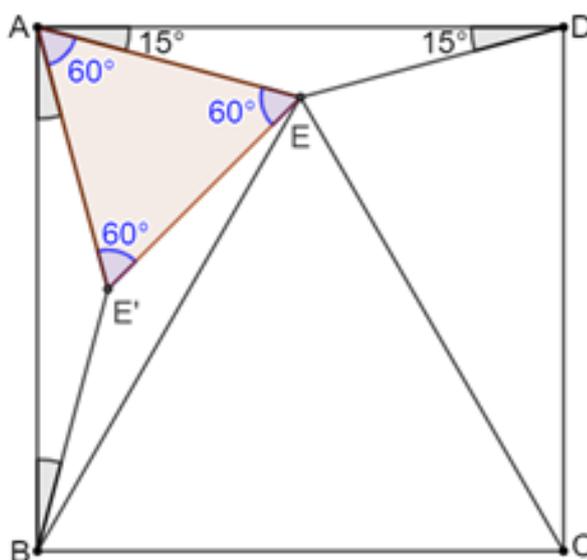
Figura 119 – Problema 10



Fonte: Autoria própria.

Assim, ligando E' a E , obtemos o triângulo $AE'E$, onde $\angle E'AE = 60^\circ$ e $AE' = AE$, ou seja, o triângulo $AE'E$ é equilátero como mostra a figura a seguir.

Figura 120 – Problema 10

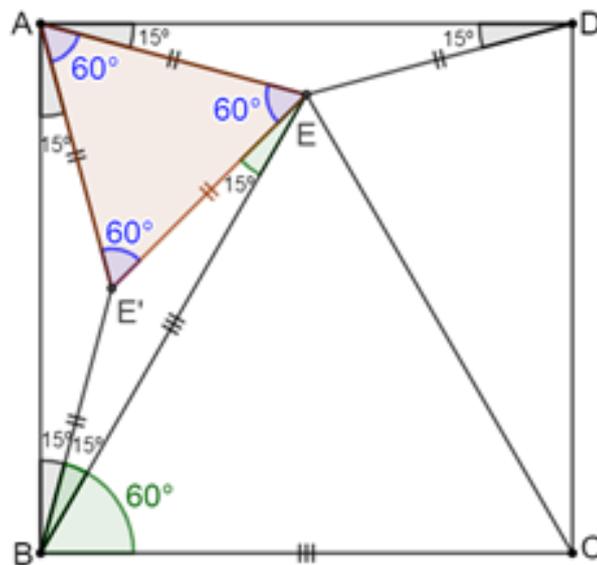


Fonte: Autoria própria.

Por outro lado, como sabemos que $AE = DE = AE' = E'B = E'E$, $AD = AB$ e $\angle DAE = \angle EDA = \angle E'AB = \angle E'BA = 15^\circ$. Então, o $\triangle EE'B \cong \triangle AE'B$ por LAL , e, $\angle AE'B = 150^\circ$. Daí, $\angle EE'B = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$.

Dessa forma, $\angle ABE = 30^\circ$ e $\angle EBC = 60^\circ$. Como $AB = BE = BC$, o $\triangle EBC$ é isósceles com ângulo em B igual a 60° , portanto, equilátero (Figura 121). ■

Figura 121 – Problema 10



Fonte: Autoria própria.

6.1.11 Problema 11

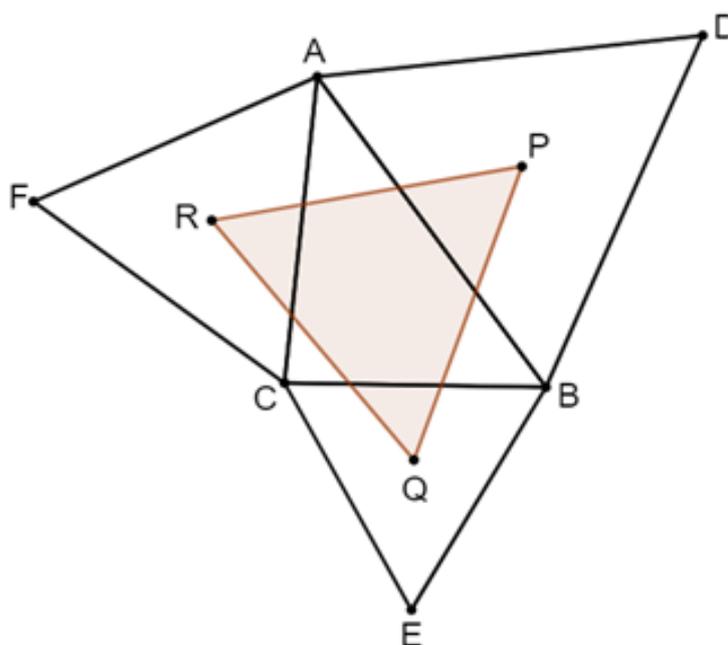
Teorema de Napoleão

Teorema 6.1.1 Teorema de Napoleão. *Dado um triângulo ABC , construa três triângulos equiláteros exteriores a ele, um em cada um dos lados AB , BC e CA . Os centros de cada triângulo equilátero são os vértices de outro triângulo equilátero. (HARVEY, 2015)*

Solução. Faremos composição de rotações cujos ângulos de rotação sejam de até 2π . Fundamentalmente, será importante observar a simetria da situação que surge dos três triângulos equiláteros e das rotações de $\frac{1}{3}$ de volta em torno de seus centros.

Primeiro, consideremos, na figura abaixo, o caminho que contorna em sentido horário o perímetro do triângulo indo de A para B , de B para C e de C para A .

Figura 122 – Problema 11

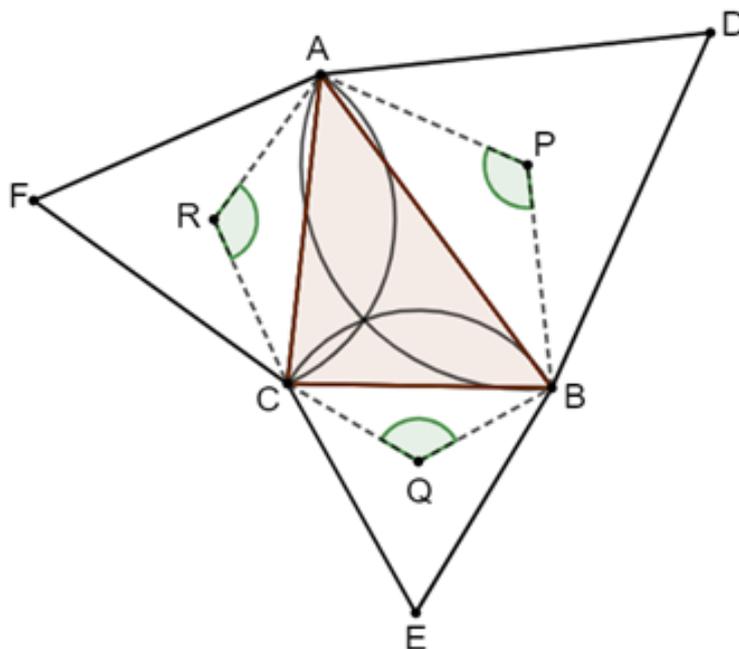


Fonte: HARVEY.

Identifiquemos os centros do triângulos equiláteros por P , Q e R , onde P é o centro do triângulo construído em AB , Q é o centro do triângulo construído em BC e R é o centro do triângulo construído em CA . Chamemos as rotações de $\frac{2\pi}{3}$ correspondentes no sentido anti-horário em torno dos pontos como r_p , r_q e r_r .

Quando compomos as rotações de $\frac{2\pi}{3}$, os ângulos são adicionados, ou seja, $\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$, então a composição $r_r \circ r_q \circ r_p$ é uma translação ou identidade.

Figura 123 – Problema 11



Fonte: HARVEY.

Agora, na figura 123, perceba que no interior de um dos triângulos equiláteros, digamos o centrado em P , temos $|PA| = |PB|$ e $\angle APB = \frac{2\pi}{3}$. Portanto, r_P transporta A para B . Da mesma forma, r_Q transporta B para C e r_R transporta C para A . Assim, temos:

$$r_r \circ r_q \circ r_p(A) = r_r \circ r_q(B) = r_r(C),$$

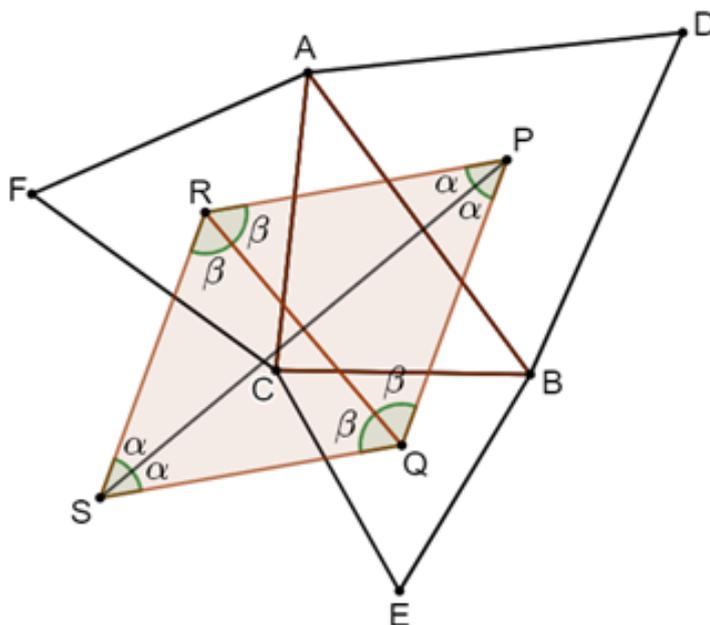
e então $r_r \circ r_q \circ r_p(A)$ tem um ponto fixo, donde concluímos que não podemos ter uma translação, logo, temos a identidade.

Vejamos o que ocorre quando substituímos o ponto P na composição:

$$r_r \circ r_q \circ r_p(P) = P \implies r_r \circ r_q(P) = P \implies r_q(P) = r_r^{-1}(P).$$

Isso nos dá um último ponto que denominaremos $S = r_q(P)$ (Figura 124). Existem dois triângulos para observar. O primeiro é o $\triangle PQS$. Como r_q transporta o segmento QP para o segmento QS , QP e QS são congruentes. Assim, $\triangle PQS$ é isósceles. Além disso, no vértice Q , sabemos que a medida do $\angle PQS = 2\beta = \frac{2\pi}{3}$ e os demais ângulos desse triângulo somam $\frac{\pi}{3}$. Sendo o triângulo isósceles, os dois ângulos, $\angle QPS = \alpha$ e $\angle QSP = \alpha$, medem, cada um, $\frac{\pi}{6}$.

Figura 124 – Problema 11



Fonte: HARVEY.

Vejamos agora o $\triangle PRS$. Aqui, r_r^{-1} é uma rotação de $\frac{2\pi}{3}$ no sentido horário. Ele transporta o segmento RP para o segmento RS , logo eles são congruentes. Portanto, o $\triangle PRS$ também é isósceles, donde o ângulo no vértice R mede $\frac{2\pi}{3}$, e seus demais ângulos, $\angle RPS = \alpha$ e $\angle RSP = \alpha$, medem, cada um, $\frac{\pi}{6}$.

Dessa forma, $\angle QPR = \angle QPS + \angle RPS = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, e o $\triangle PQR$ é equilátero. ■

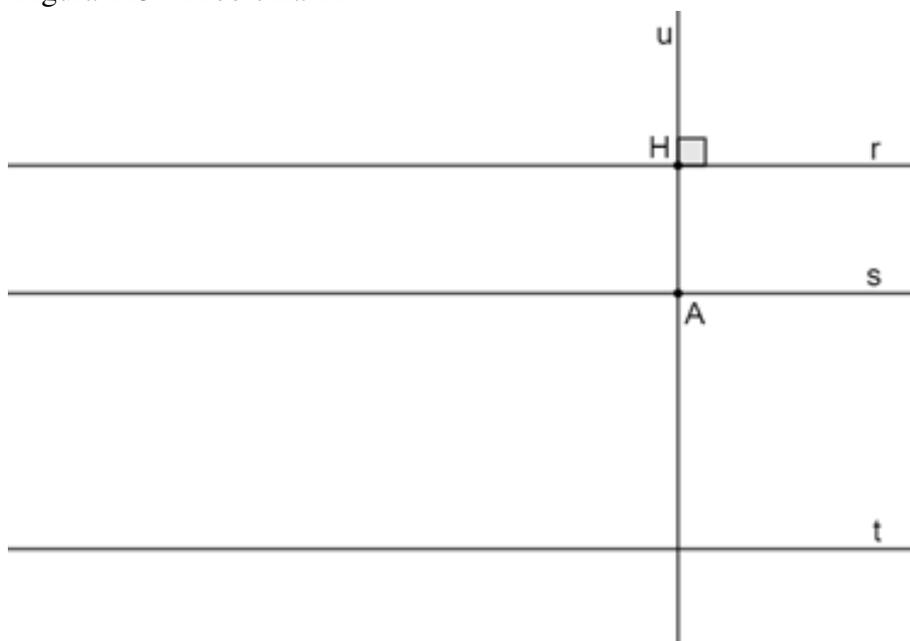
6.1.12 Problema 12

Nessa aplicação, veremos um caso clássico de utilização das transformações geométricas na construção com régua e compasso de um triângulo.

Problema. Construir um triângulo equilátero com vértices em três retas paralelas distintas quaisquer.

Solução. Sejam r , s e t retas paralelas. Inicialmente, tomemos sobre s um ponto A , conforme figura abaixo, que é um dos vértices do triângulo equilátero que denominaremos de $\triangle ABC$.

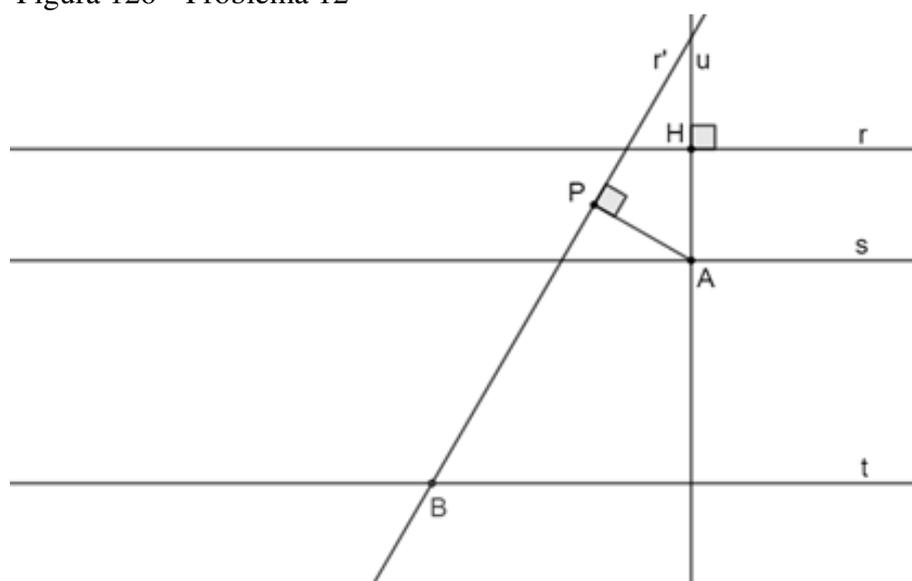
Figura 125 – Problema 12



Fonte: Autoria própria.

Agora, vamos rotacionar a reta r em relação ao ponto A segundo um ângulo de 60° no sentido anti-horário. Para isso, primeiro traçamos por A uma reta u perpendicular às retas paralelas r , s e t que encontra r no ponto H . Desse modo, gira-se H e obtém-se P sobre a reta rotacionada r' e esta intersecta t em B que será o outro vértice do triângulo equilátero ABC conforme figura a seguir.

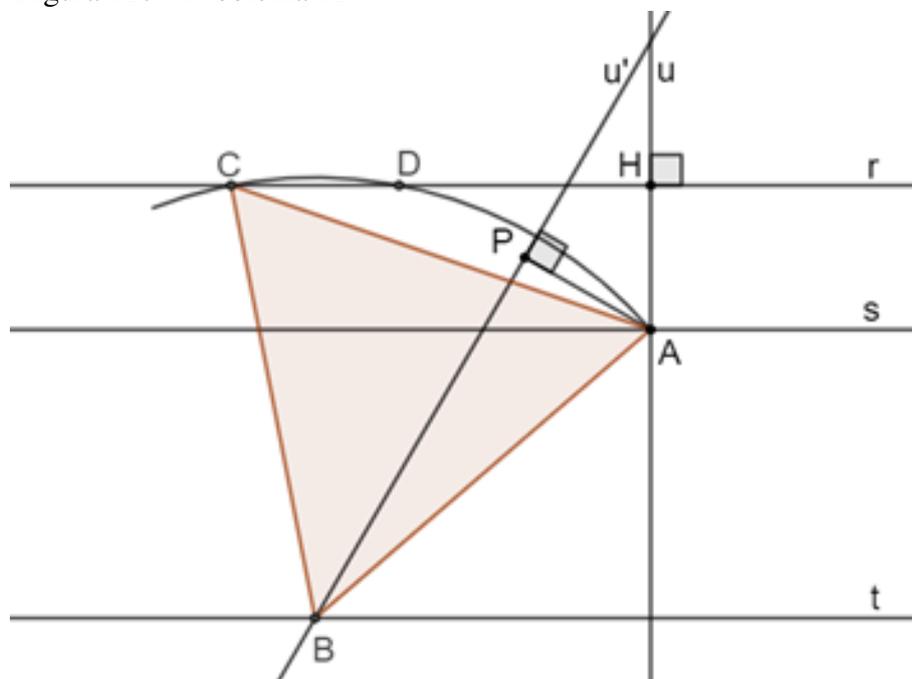
Figura 126 – Problema 12



Fonte: Autoria própria.

Finalmente, com centro em B e abertura do compasso no tamanho AB , traçamos um arco de circunferência que toca r em C e D , mas apenas C é o terceiro vértice do triângulo ABC (Figura 127).

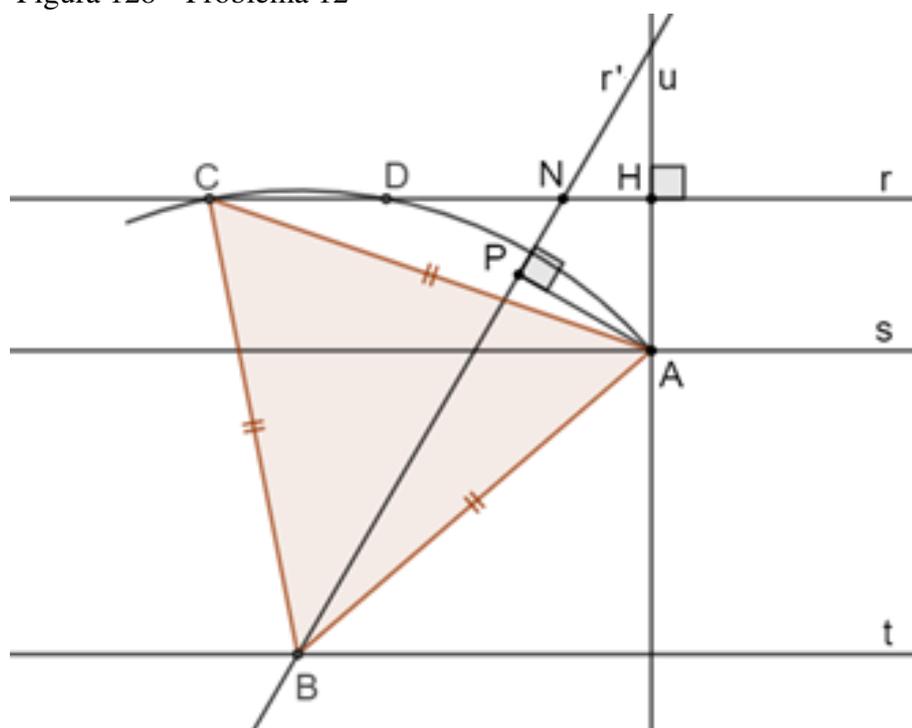
Figura 127 – Problema 12



Fonte: Autoria própria.

Justificativa. Chamemos a intersecção de r e r' de N . O quadrilátero $AHNP$ é cíclico com AN diâmetro e $NH = NP$. Ora, como r foi rotacionada de 60° no sentido anti-horário em relação a A , o ponto $C \in r$, pela rotação, resulta no ponto B , intersecção de r' e t . Daí, $AC = BC = BA$ como se vê na figura abaixo. ■

Figura 128 – Problema 12



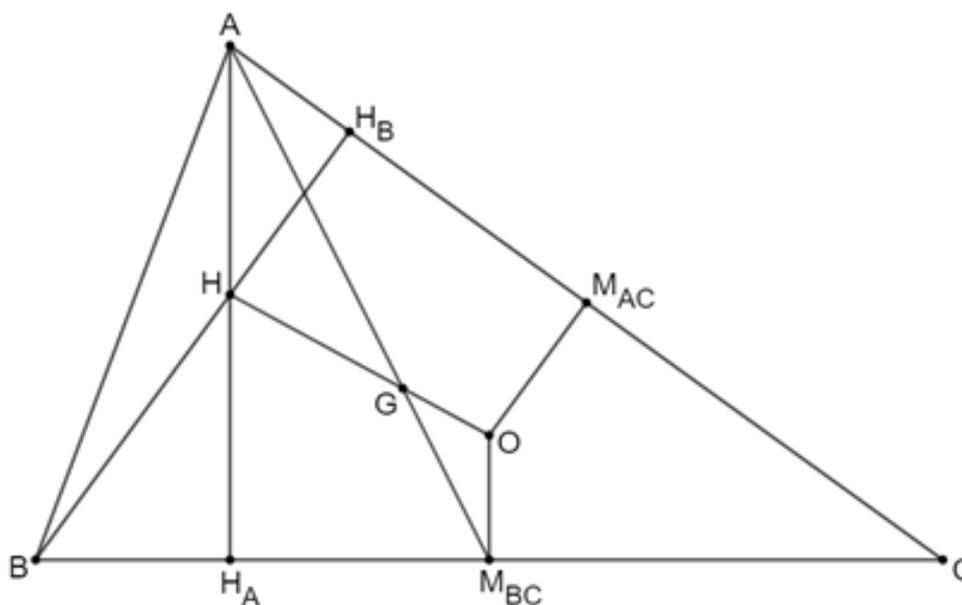
Fonte: Autoria própria.

6.1.13 Problema 13

Teorema 6.1.2 (Reta de Euler) *Em um triângulo, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são colineares. Além disso, o baricentro está no segmento que une o circuncentro e o ortocentro e divide este segmento na proporção 1:2. (GELCA et al., 2022) (SLINKO, 2009)*

Solução. Na figura 129, considere o triângulo ABC , H_A o pé da altura relativa ao vértice A , H_B o pé da altura relativa ao vértice B , M_{AC} o ponto médio do lado AC , M_{BC} o ponto médio do lado BC , O o circuncentro do triângulo, H o ortocentro do triângulo e G o baricentro do triângulo.

Figura 129 – Problema 13



Fonte: GELCA.

Considere a homotetia h de centro G e razão $-\frac{1}{2}$. Então, h transporta o vértice A para o ponto médio M_{BC} de BC , ou seja, $h(A) = M_{BC}$, e, pela mesma homotetia, a reta suporte da altura relativa ao vértice A é transformada numa reta passando por M_{BC} e perpendicular a BC , isto é, $h(\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{M_{BC}O}$.

Raciocinando de forma análoga para as outras alturas, deduzimos que h transporta o ortocentro para a intersecção das mediatrizes dos lados, portanto $h(H) = O$. Como um ponto e sua imagem são colineares com o centro de homotetia, segue-se que H , G e O são colineares. Além disso, como h é uma homotetia inversa, G está entre H e O , e $\frac{GO}{GH}$ é igual ao valor absoluto da razão de homotetia, que é $\frac{1}{2}$. ■

6.1.14 Problema 14

Teorema 6.1.3 (Círculo de Nove Pontos) *Em um triângulo, os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro e os vértices estão em um círculo. Além disso, o centro deste círculo está na reta de Euler e o ortocentro, o centro do círculo de nove pontos, o baricentro e o circuncentro formam uma divisão harmônica. (GELCA et al., 2022) (JOHNSON, 2013)*

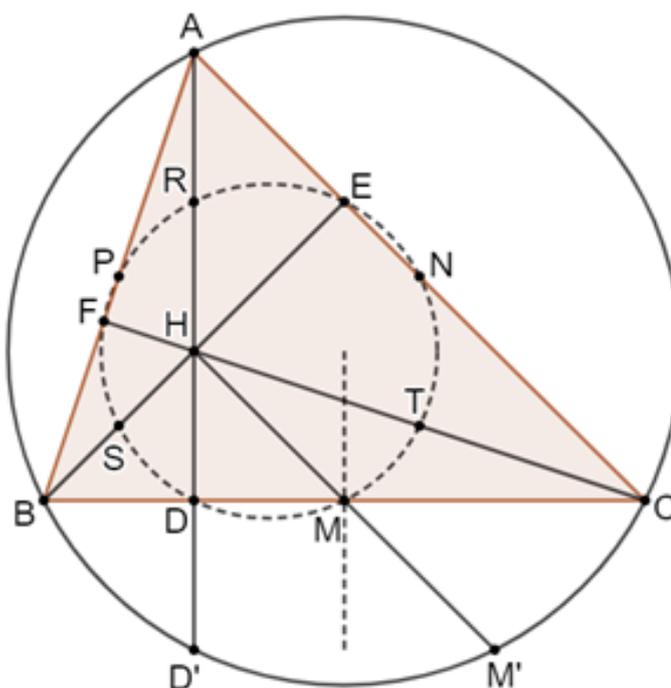
Solução. Dizemos que quatro pontos X, Y, Z, W que aparecem nesta ordem em uma reta formam uma divisão harmônica se

$$\frac{XY}{ZY} = \frac{XW}{ZW}.$$

Em coordenadas complexas, os quatro pontos colineares formam uma divisão harmônica se suas coordenadas satisfazem

$$\frac{y-x}{y-z} = -\frac{w-x}{w-z}.$$

Figura 130 – Problema 14



Fonte: GELCA.

Na figura 130, os pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices estão em um círculo mapeado ao círculo circunscrito pela homotetia h centrada no ortocentro e

de razão 2. Assim, é natural mostrar que esta homotetia transporta os outros pontos em questão para o círculo circunscrito também.

Seja, portanto, o triângulo ABC , H seu ortocentro, M, N, P os pontos médios de BC, CA, AB e D, E, F os pés das alturas de A, B, C , respectivamente, e, R, S, T os pontos médios de AH, BH, CH , respectivamente.

Consideremos um sistema de coordenadas complexas centrado no circuncentro O , e sejam a, b, c as coordenadas de A, B, C , respectivamente. Assim, o ortocentro tem coordenadas $a+b+c$ e o baricentro tem coordenadas $\frac{a+b+c}{3}$. Então $M' = h(M)$ é o reflexo de H sobre M , e como M tem a coordenada igual a $\frac{b+c}{2}$, a coordenada complexa de M' é $b+c - (a+b+c) = -a$. Assim, M' é o ponto diametralmente oposto a A no circuncírculo.

O ponto $D' = h(D)$ é a reflexão de H sobre BC , e esta reflexão é a composição da reflexão sobre a bissetriz perpendicular de BC com reflexão sobre M . Assim, D' é a reflexão de M' em relação à mediatriz que passa em M , logo está na circunferência circunscrita. Concluimos que $h(M)$ e $h(D)$ estão na circunferência circunscrita, e o mesmo vale para os outros pontos. Segue-se que os nove pontos estão na imagem da circunferência circunscrita através de h^{-1} , então, eles são concíclicos.

Além disso, a imagem do circuncentro por h^{-1} é o centro deste círculo de nove pontos, e é o ponto médio do segmento OH . Portanto, tem a coordenada complexa $\frac{a+b+c}{2}$. Assim, o ortocentro, o centro do círculo de nove pontos, o baricentro e o circuncentro possuem coordenadas, respectivamente, iguais a $a+b+c, \frac{a+b+c}{2}$ e $\frac{a+b+c}{3}, 0$

Assim,

$$\frac{(a+b+c)/2 - (a+b+c)}{(a+b+c)/2 - (a+b+c)/3} \div \frac{(0 - a + b + c)}{0 - (a+b+c)/3} = \frac{-1/2}{1/6} \div \frac{-1}{-1/3} = -1. \blacksquare$$

6.1.15 Problema 15

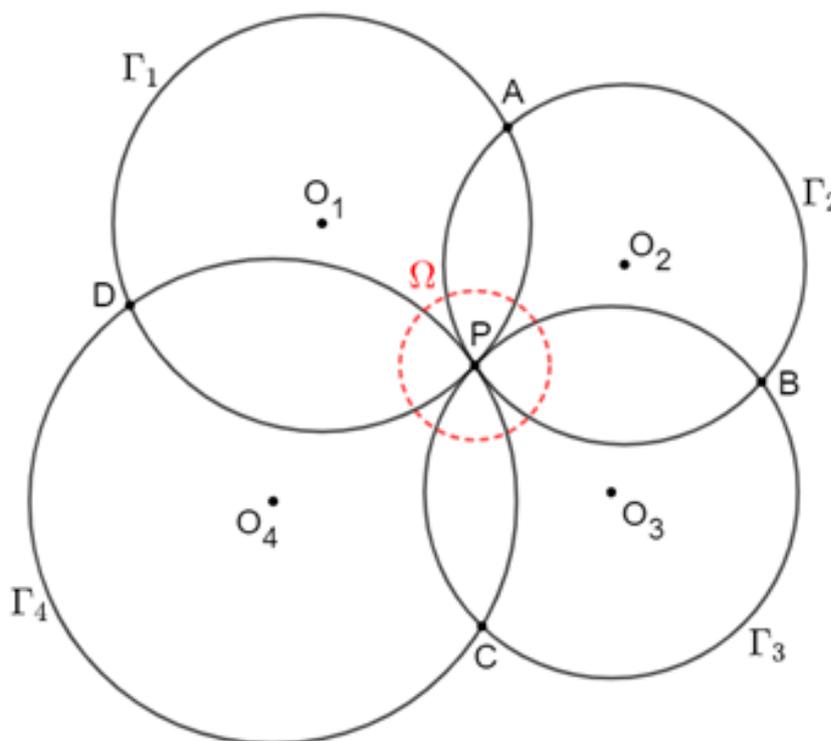
Problema. (Shortlisted Problems IMO 2003 – Proposto pela Armênia) Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ circunferências distintas tais que Γ_1, Γ_3 são externamente tangentes em P , e Γ_2, Γ_4 são externamente tangentes no mesmo ponto P . Suponha que Γ_1 e Γ_2 , Γ_2 e Γ_3 , Γ_3 e Γ_4 , Γ_4 e Γ_1 se encontram em A, B, C, D , respectivamente, e que todos esses pontos são diferentes de P . Prove que

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

(HANDA, 2015) (HERNANDO, 2015)

Solução. Observe a figura que ilustra a situação descrita.

Figura 131 – Problema 15



Fonte: GUNMAY.

Consideremos o ponto P como sendo o centro de uma circunferência Ω de raio $r = 1$. Essa circunferência será nossa circunferência de inversão.

Lembremos que:

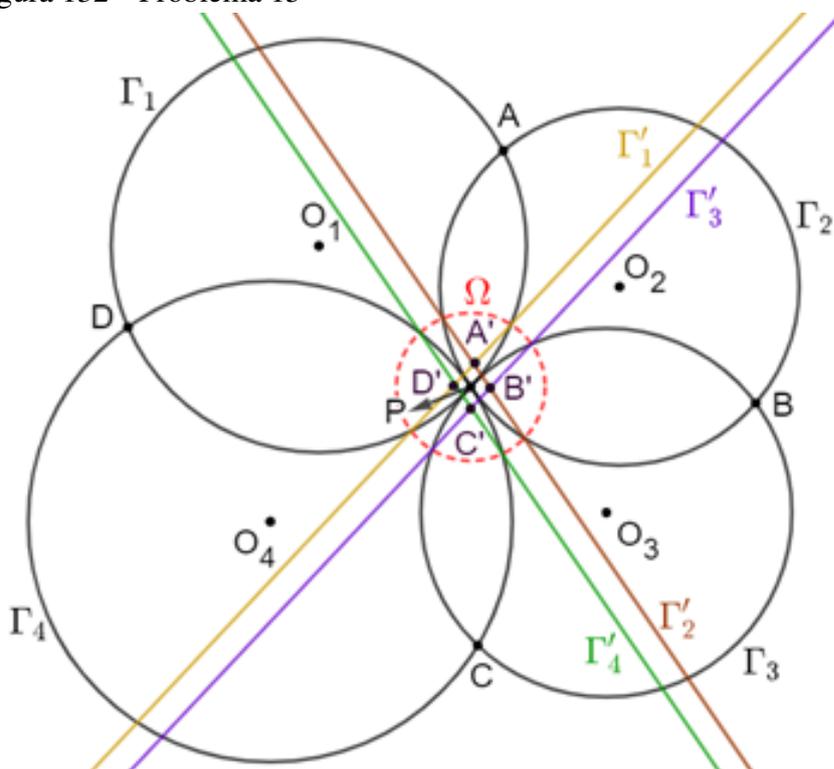
Uma inversão transforma uma circunferência Γ que passa pelo centro da circunferência de inversão em uma reta que não passa por esse centro.

Dessa forma, temos que:

- i. Γ_1 e Γ_3 são circunferências que passam por P . Então, da propriedade citada, suas figuras inversas são duas retas paralelas Γ'_1 e Γ'_3 , respectivamente;
- ii. Analogamente, Γ_2 e Γ_4 também admitem como figuras inversas duas retas paralelas Γ'_2 e Γ'_4 , respectivamente;
- iii. Como o ponto A é a intersecção Γ_1 e Γ_2 , então A' será a intersecção das retas Γ'_1 e Γ'_2 ;
- iv. Como o ponto B é a intersecção Γ_2 e Γ_3 , então B' é a intersecção das retas Γ'_2 e Γ'_3 ;
- v. Como o ponto C é a intersecção Γ_3 e Γ_4 , então C' é a intersecção das retas Γ'_3 e Γ'_4 ;
- vi. Como o ponto D é a intersecção Γ_4 e Γ_1 , então D' é a intersecção das retas Γ'_4 e Γ'_1 .

A figura a seguir mostra tudo o que foi citado.

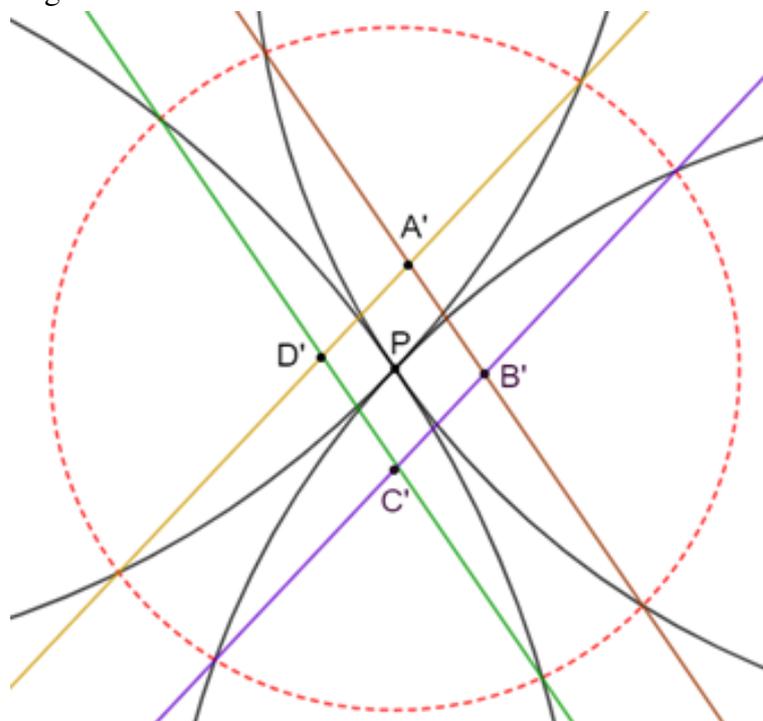
Figura 132 – Problema 15



Fonte: Autoria própria.

Dando um zoom na parte mais interna da figura 132, obtemos a figura 133.

Figura 133 – Problema 15

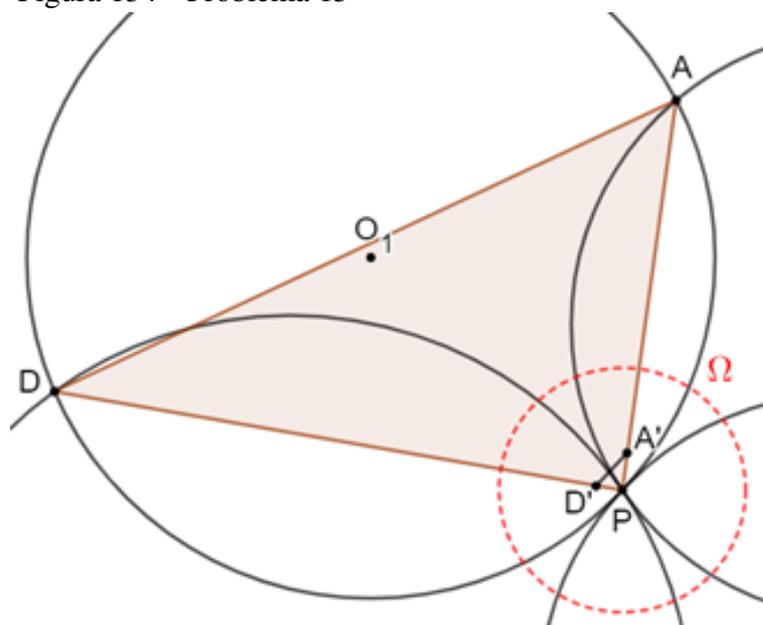


Fonte: Autoria própria.

Como A' , B' , C' e D' formam interseções de dois conjuntos de retas paralelas, então, devem formar um paralelogramo. Dessa forma, é óbvio que $A'B' = D'C'$ e que $A'D' = B'C'$.

Agora, observemos os triângulos PAD e $PD'A'$ mostrados abaixo.

Figura 134 – Problema 15



Fonte: Autoria própria.

Da inversão, vem:

$$PA \cdot PA' = PD \cdot PD' = r^2 \Rightarrow \frac{PA}{PD'} = \frac{PD}{PA'} = r^2.$$

Dessa forma, concluímos que $\triangle PAD \sim \triangle PD'A'$. Logo:

$$\frac{AD}{D'A'} = \frac{PA}{PD'} = \frac{r^2}{PA' \cdot PD'} \Rightarrow AD = \frac{A'D' \cdot r^2}{PA' \cdot PD'} \quad (I).$$

De modo análogo, podemos concluir que:

$$AB = \frac{A'B' \cdot r^2}{PA' \cdot PB'} \quad (II),$$

$$BC = \frac{B'C' \cdot r^2}{PB' \cdot PC'} \quad (III) \text{ e}$$

$$DC = \frac{D'C' \cdot r^2}{PD' \cdot PC'} \quad (IV).$$

Finalmente, após combinarmos *I, II, III e IV*, obtemos:

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{\frac{A'B' \cdot r^2}{PA' \cdot PB'} \cdot \frac{B'C' \cdot r^2}{PB' \cdot PC'}}{\frac{A'D' \cdot r^2}{PA' \cdot PD'} \cdot \frac{D'C' \cdot r^2}{PD' \cdot PC'}} = \frac{\frac{A'B'}{PB'} \cdot \frac{B'C'}{PB'}}{\frac{A'D'}{PD'} \cdot \frac{D'C'}{PD'}} = \frac{PD'^2}{PB'^2} \cdot \frac{A'B' \cdot B'C'}{A'D' \cdot D'C'}$$

Como $A'B' = D'C'$ e $B'C' = A'D'$, vem:

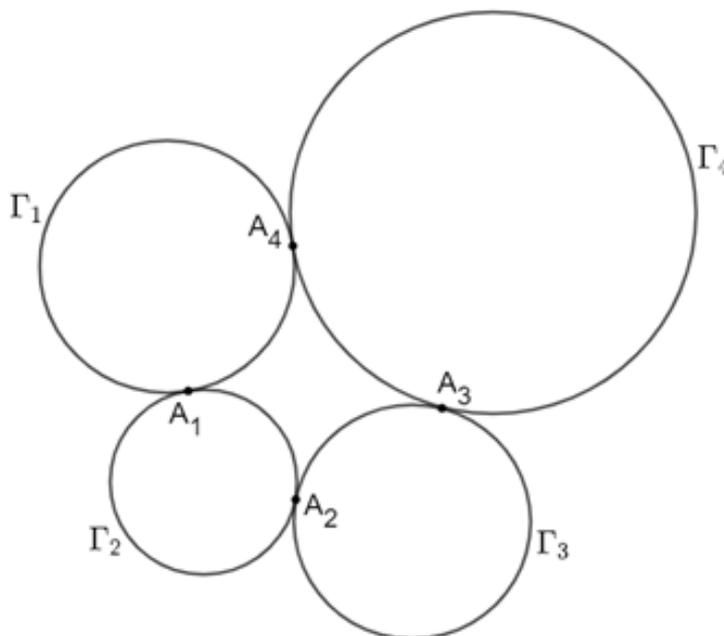
$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PD'^2}{PB'^2} = \frac{r^4/PD^2}{r^4/PB^2} = \frac{PB^2}{PD^2}. \blacksquare$$

6.1.16 Problema 16

As circunferências Γ_1 e Γ_2 são tangentes entre si em A_1 . Analogamente, as circunferências Γ_2 e Γ_3 são tangentes entre si em A_2 , as circunferências Γ_3 e Γ_4 são tangentes entre si em A_3 e as circunferências Γ_4 e Γ_1 são tangentes entre si em A_4 . Mostre que A_1 , A_2 , A_3 e A_4 são colineares ou concíclicos. (STANKOVA; RIKE,) (SPIRA, 2004)

Solução. Inicialmente, vamos considerar a configuração mostrada na figura a seguir, onde mostraremos que os pontos A_1 , A_2 , A_3 e A_4 são concíclicos e, depois, mostraremos uma configuração da colinearidade dos pontos.

Figura 135 – Problema 16



Fonte: STANKOVA.

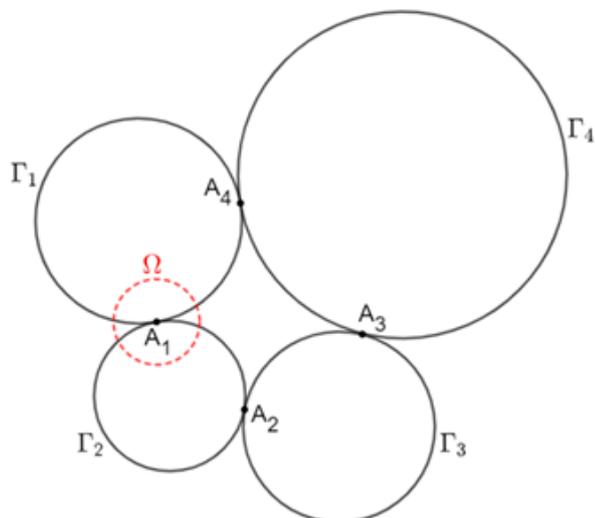
Utilizaremos inversão para mostrar o fato.

Lembremos que:

1. Uma inversão transforma uma reta que passa pelo centro da circunferência de inversão em si mesma;
2. Uma inversão transforma uma reta que não passa pelo centro da circunferência de inversão em uma circunferência que passa por esse centro;
3. Uma inversão transforma uma circunferência que passa pelo centro da circunferência de inversão em uma reta que não passa por esse centro;
4. Uma inversão transforma uma circunferência que não passa pelo centro da circunferência de inversão em uma circunferência que não passa por esse centro.

Consideremos o ponto A_1 como sendo o centro de uma circunferência de inversão Ω conforme figura seguinte.

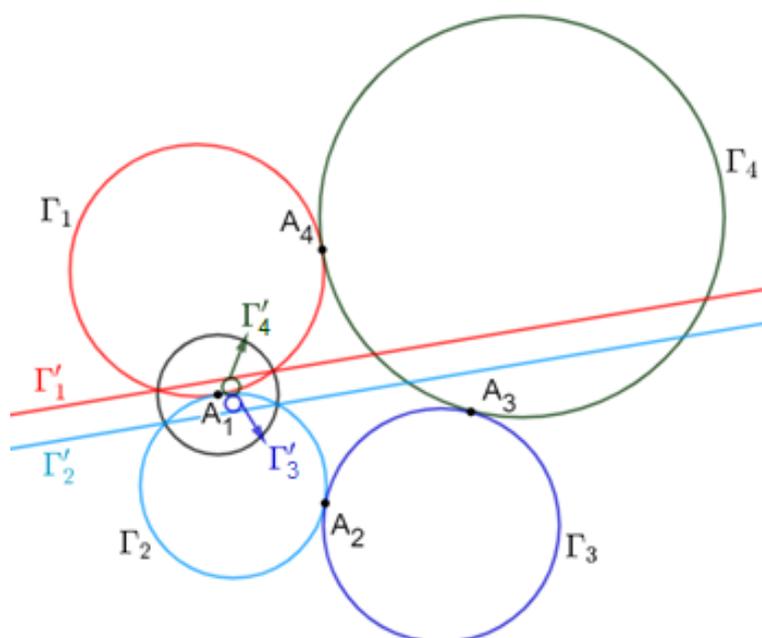
Figura 136 – Problema 16



Fonte: Autoria própria.

Como as circunferências Γ_1 e Γ_2 passam pelo centro da circunferência de inversão Ω , suas figuras inversas são as retas paralelas Γ'_1 e Γ'_2 , respectivamente. Como as circunferências Γ_3 e Γ_4 não passam pelo centro da circunferência de inversão Ω , suas figuras inversas são as circunferências Γ'_3 e Γ'_4 , respectivamente (Figura 137).

Figura 137 – Problema 16



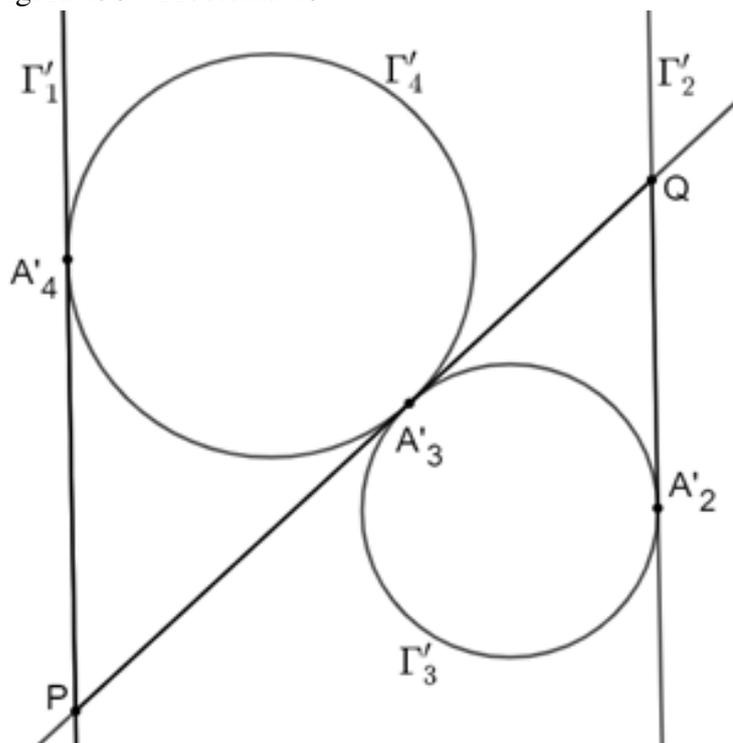
Fonte: Autoria própria.

Agora, em relação às figuras inversas, temos que:

1. Como Γ_3 tangencia Γ_2 em A_2 , então a reta Γ'_2 tangencia a circunferência Γ'_3 em A'_2 ;
2. Como Γ_4 tangencia Γ_1 em A_4 , então a reta Γ'_1 tangencia a circunferência Γ'_4 em A'_4 ;
3. Como Γ_3 tangencia Γ_4 em A_3 , então as respectivas inversas Γ'_3 e Γ'_4 tangenciam-se em A'_3 .

Vamos visualizar as figuras inversas em tamanho maior abaixo.

Figura 138 – Problema 16



Fonte: Autoria própria.

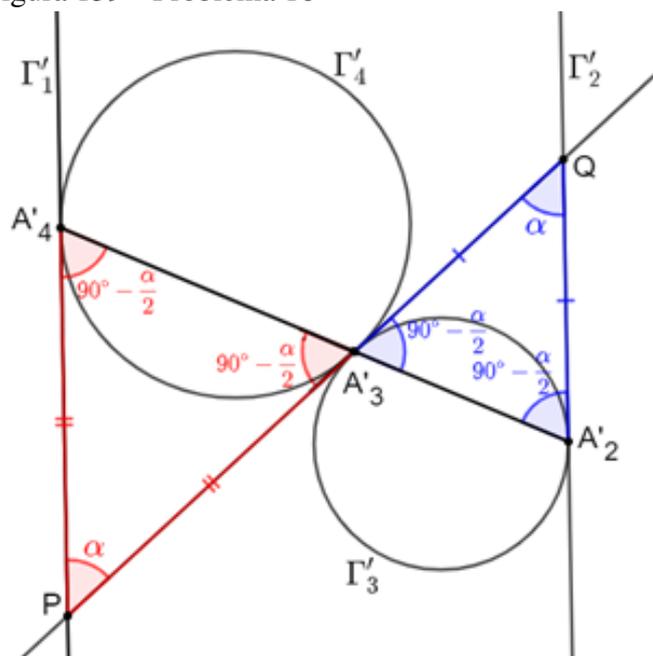
Sabemos que $\Gamma'_1 \parallel \Gamma'_2$. Tracemos pelo ponto de tangência A'_3 uma reta tangente que intersecta Γ'_1 e Γ'_2 em P e Q , respectivamente. Do paralelismo de Γ'_1 e Γ'_2 temos que

$$\angle A'_3PA'_4 = \alpha = \angle A'_3QA'_2.$$

Tracemos ainda os segmentos $A'_4A'_3$ e $A'_2A'_3$ (Figura 139). Percebamos que $PA'_3 = PA'_4$ pelo Teorema das Tangentes, o que implica que o $\triangle A'_3PA'_4$ é isósceles e

$$\angle PA'_3A'_4 = \angle PA'_4A'_3 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Figura 139 – Problema 16

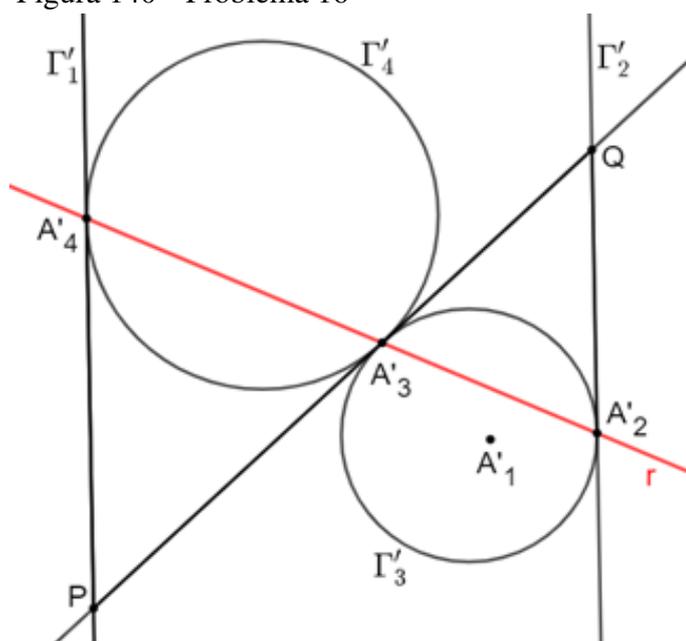


Fonte: Autoria própria.

De modo análogo, $QA'_3 = QA'_2$ pelo Teorema das Tangentes, o que implica que o $\triangle A'_3QA'_2$ é isósceles e $\angle QA'_3A'_2 = \angle QA'_2A'_3 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Como $\angle A'_4A'_3P = \angle A'_2A'_3Q = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, concluímos que A'_4, A'_3 e A'_2 são colineares e seja r a reta que contém esses pontos conforme figura 140.

Figura 140 – Problema 16



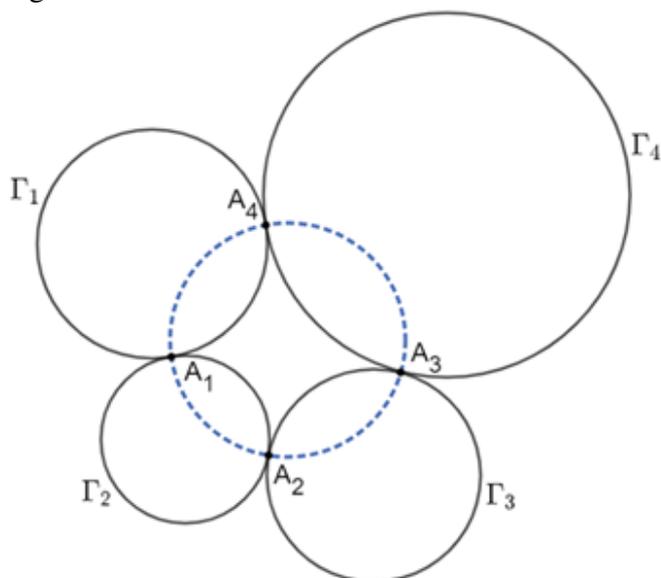
Fonte: Autoria própria.

Em relação ao centro da circunferência de inversão, A_1 , sua imagem não existe.

Dessa forma, temos duas possibilidades:

- i. A imagem inversa de r é uma circunferência que passará pelo centro da circunferência de inversão, A_1 , e, conseqüentemente, passará por A_2, A_3 e A_4 (Figura 141);

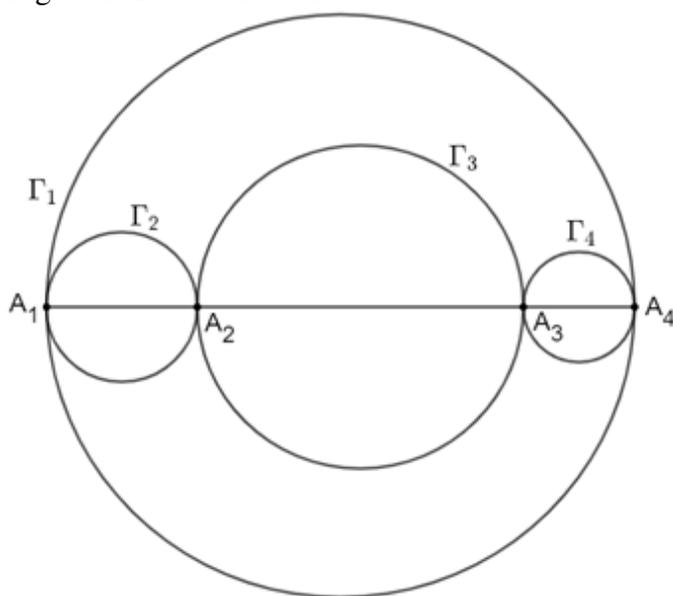
Figura 141 – Problema 16



Fonte: Autoria própria.

- ii. A imagem inversa de r é uma reta que passará pelo centro da circunferência de inversão, A_1 , e, conseqüentemente, passará por A_2, A_3 e A_4 (Figura 142). ■

Figura 142 – Problema 16



Fonte: Autoria própria.

6.1.17 Problema 17

Alain Connes

Nasceu em 1º de abril de 1947 em Draguignan, França. Estudou na École Normale Supérieure em Paris, onde obteve sua formação em matemática. Em 1973, ele completou seu doutorado sob a supervisão de Jacques Dixmier, um especialista em álgebras de operadores. Sua tese foi um marco inicial em suas contribuições às álgebras de von Neumann e à geometria não comutativa.

Connes é uma figura central na matemática moderna, particularmente nas áreas de análise funcional, geometria não comutativa e física matemática. Ele ocupou várias posições prestigiosas ao longo de sua carreira:

- Diretor de Pesquisa no CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique): Um dos maiores centros de pesquisa da França;
- Professor no Collège de France: Uma das instituições acadêmicas mais prestigiadas do país;
- Membro permanente no Instituto de Estudos Avançados (IHES), na França, onde realizou muitas de suas pesquisas mais importantes.

Recebeu vários prêmios e reconhecimentos, dentre os quais:

- Medalha Fields (1982): Pela extensão da teoria das álgebras de von Neumann e o desenvolvimento da geometria não comutativa;
- Prêmio Crafoord (2001): Por suas contribuições fundamentais à geometria;
- Prêmio Clay Research (2000): Por seu trabalho na conjectura de Novikov e na teoria de índices;
- É membro da Academia Francesa de Ciências e outras organizações de prestígio.

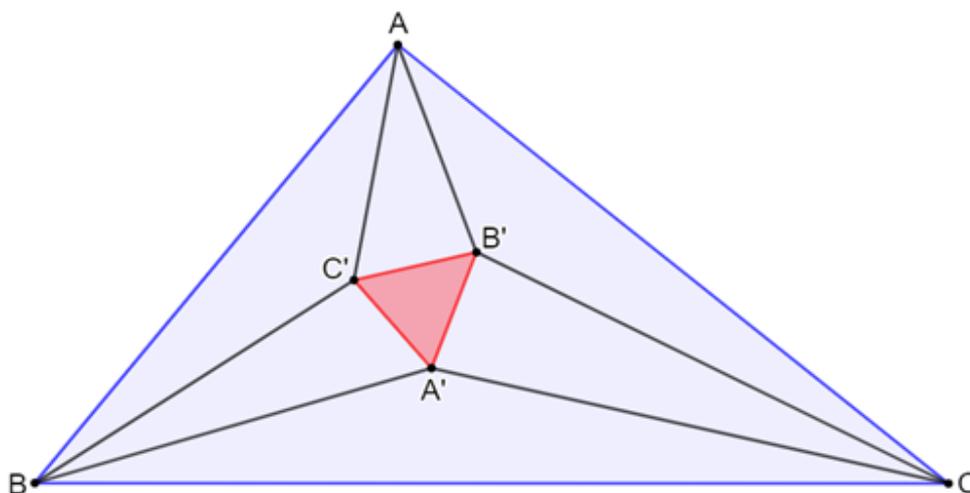
Alain Connes é amplamente reconhecido como um dos matemáticos mais influentes do final do século XX e início do século XXI. Sua obra não apenas enriqueceu profundamente a matemática pura, mas também estabeleceu novas pontes entre a matemática e outras disciplinas, como a física teórica (MACTUTOR, 2009).

Problema. Teorema de Morley (Prova de Alain Connes)

Teorema de Morley. Os três pontos de intersecção das trissetrizes adjacentes dos ângulos de qualquer triângulo formam um triângulo equilátero (GELCA *et al.*, 2022) (CONNES, 1998).

Solução. Seja o triângulo original ABC , cujos ângulos $\angle A, \angle B, \angle C$ são orientados no sentido anti-horário, e seja $A'B'C'$ o triângulo determinado pelas trissetrizes, como mostrado na figura abaixo.

Figura 143 – Problema 17



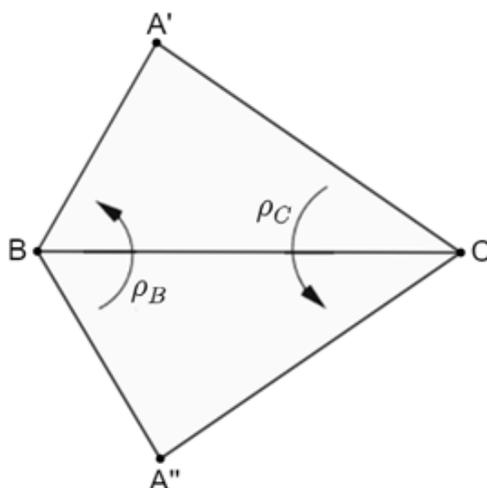
Fonte: GELCA.

A primeira observação que Connes fez foi que as intersecções de trissetrizes consecutivas são os pontos fixos de produtos de rotações aos pares ρ_A, ρ_B, ρ_C , em torno dos vértices A, B, C do triângulo, com ângulos iguais a dois terços dos correspondentes ângulos do triângulo. Mais precisamente:

- i. A' é o único ponto fixo de $\rho_B \circ \rho_C$;
- ii. B' é o único ponto fixo de $\rho_C \circ \rho_A$;
- iii. C' é o único ponto fixo de $\rho_A \circ \rho_B$.

Para ver isso, observe, com o auxílio da figura seguinte, que $\rho_C(A')$ é a reflexão A'' de A' sobre BC e $\rho_B(A'') = A'$, então $\rho_B \circ \rho_C(A') = A'$.

Figura 144 – Problema 17



Fonte: GELCA.

Sua segunda observação é que $\rho_A^3 \circ \rho_B^3 \circ \rho_C^3$ é a Identidade.

Na verdade, ρ_A^3 é a rotação em torno de A por $2\angle A$, que é a composição da reflexão σ_{AB} sobre AB seguido pela reflexão σ_{AC} sobre AC, e da mesma forma para duas rotações. Então

$$\rho_A^3 \circ \rho_B^3 \circ \rho_C^3 = \sigma_{AC} \circ \sigma_{AB} \circ \sigma_{AB} \circ \sigma_{BC} \circ \sigma_{BC} \circ \sigma_{AC} = \text{Identidade},$$

porque $\sigma_{AB}^2 = \sigma_{BC}^2 = \sigma_{AC}^2$ é a Identidade.

Outra maneira de ver isso é primeiro observar que a transformação $\rho_A^3 \circ \rho_B^3 \circ \rho_C^3$ gira as figuras em $2\angle A + 2\angle B + 2\angle C = 2\pi$. Isso significa que não há rotação de figuras e, portanto, temos a identidade ou uma translação.

Também

$$\rho_A^3 \circ \rho_B^3 \circ \rho_C^3(C) = \rho_A^3(\sigma_{AB}(\sigma_{BC}(C))) = \sigma_{AC}(\sigma_{AB}(\sigma_{AB}(C))) = \sigma_{AC}(C) = C.$$

Como a transformação tem um ponto fixo, não pode ser uma translação; portanto, deve ser a identidade.

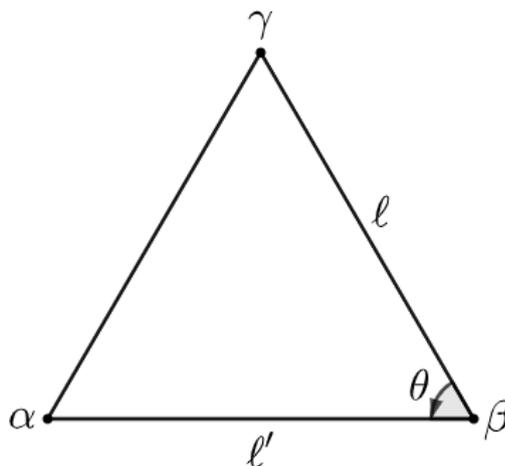
Observe também que $\rho_A \circ \rho_B \circ \rho_C$ é uma isometria que gira as figuras em $\frac{2\pi}{3}$, então é uma rotação de $\frac{2\pi}{3}$, e Connes primeiro tentou ver se esta é a rotação que transforma $A'B'C'$ em si mesmo. Verificou que não é.

Vamos mudar nossa análise para números complexos. Sejam α , β e γ números complexos que são as coordenadas de A' , B' e C' , respectivamente.

Lema 6.1.1 Os pontos α , β e γ são os vértices de um triângulo equilátero orientado no sentido anti-horário se e somente se $\alpha + e^{2\pi i/3}\beta + e^{4\pi i/3}\gamma = 0$.

Demonstração. Considere o triângulo da figura a seguir.

Figura 145 – Problema 17



Fonte: Autoria Própria.

A condição de que γ gira para α em torno de β segundo o ângulo θ é

$$\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} = \frac{\ell'}{\ell} \cdot e^{i\theta}.$$

Inicialmente, consideremos que o triângulo seja equilátero. Assim, $\ell' = \ell$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$,

daí:

$$\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} = e^{i\pi/3} \Rightarrow \alpha - \beta = (\gamma - \beta)e^{i\pi/3} \Rightarrow \alpha + (e^{\pi i/3} - 1)\beta - e^{\pi i/3}\gamma = 0.$$

Usando $e^{\pi i/3} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{2\pi i/3}$, e $-e^{\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{4\pi i/3}$, obtemos uma condição equivalente $\alpha + e^{2\pi i/3}\beta + e^{4\pi i/3}\gamma = 0$.

Agora, consideremos que $\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} = e^{i\pi/3}$.

Nesse caso, podemos igualar as seguintes expressões: $\frac{\ell'}{\ell} \cdot e^{i\theta} = e^{i\pi/3}$. Como temos uma igualdade de números complexos, então, $\ell' = \ell$ e $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, donde podemos tomar apenas $\theta = \frac{\pi}{3}$, o que mostra que o triângulo é equilátero. ■

Voltando à prova do Teorema de Morley, vamos relembrar o Teorema 2.7.1:

A função f é uma isometria de \mathbb{C} se, e somente se, $f(z) = rz + s$ ou $f(z) = r\bar{z} + s$, onde r e s são constantes e $|r| = 1$.

Assim, escrevemos:

$$\rho_A(z) = a_1z + b_1, \rho_B(z) = a_2z + b_2, \rho_C(z) = a_3z + b_3,$$

onde $a_1 = e^{2i\angle A/3}$, $a_2 = e^{2i\angle B/3}$, $a_3 = e^{2i\angle C/3}$.

Como $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$, temos $a_1a_2a_3 = e^{2\pi i/3}$.

Agora o Teorema de Morley segue aplicando o Teorema de Connes abaixo para ρ_A , ρ_B , ρ_C e usando o lema 6.1.1.

Teorema 6.1.4 (Teorema de Connes) *Considere as transformações $f_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_j(z) = a_jz + b_j$, $j = 1, 2, 3$.*

Suponha que a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3 e $a_1a_2a_3$ sejam todos diferentes de 0 e 1. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3 = \text{Identidade}$;
- ii) $\omega^3 = 1$ e $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$, onde $\omega = a_1a_2a_3$ e α, β, γ são os únicos pontos fixos de $f_2 \circ f_3$, $f_3 \circ f_1$ e $f_1 \circ f_2$, respectivamente.

Demonstração. A relação do item i) equivale a igualdade:

$$a_1^3a_2^3a_3^3z + (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + (a_1a_2)^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3 = z,$$

para todos z . Igualando os coeficientes, obtemos $\omega^3 = a_1^3a_2^3a_3^3 = 1$ e

$$(a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + (a_1a_2)^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3 = 0 \quad (I).$$

Agora, nos resta mostrar que esta igualdade é equivalente a $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$. Para isso temos que calcular as coordenadas de α, β, γ . Observe que

$$f_1 \circ f_2(z) = a_1a_2z + a_1b_2 + b_1,$$

$$f_2 \circ f_3(z) = a_2a_3z + a_2b_3 + b_2,$$

$$f_3 \circ f_1(z) = a_3a_1z + a_3b_1 + b_3,$$

onde apontamos que cada um deles é uma rotação, portanto possui um ponto fixo único.

Assim, os pontos fixos são

$$\alpha = \text{fix}(f_2 \circ f_3) = \frac{a_2 b_3 + b_2}{1 - a_2 a_3} = \frac{a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2}{a_1 - \omega},$$

$$\beta = \text{fix}(f_3 \circ f_1) = \frac{a_3 b_1 + b_3}{1 - a_3 a_1} = \frac{a_2 a_3 b_1 + a_2 b_3}{a_2 - \omega},$$

$$\gamma = \text{fix}(f_1 \circ f_2) = \frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - a_1 a_2} = \frac{a_3 a_1 b_2 + a_3 b_1}{a_3 - \omega}.$$

Substituindo os valores de α , β e γ na equação $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$, vem:

$$\frac{a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2}{a_1 - \omega} + \omega \cdot \left(\frac{a_2 a_3 b_1 + a_2 b_3}{a_2 - \omega} \right) + \omega^2 \cdot \left(\frac{a_3 a_1 b_2 + a_3 b_1}{a_3 - \omega} \right) = 0.$$

Abrindo as contas, temos:

$$(a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2)(a_2 - \omega)(a_3 - \omega) + \omega(a_2 a_3 b_1 + a_2 b_3)(a_1 - \omega)(a_3 - \omega) + \omega^2(a_3 a_1 b_2 + a_3 b_1)(a_1 - \omega)(a_2 - \omega) = 0 \Rightarrow a_2 b_3 \omega + b_2 \omega - a_1 a_2^2 b_3 \omega - b_3 \omega^2 - a_1 a_2 b_2 \omega - a_1 a_3 b_2 \omega + a_1 a_2 b_3 \omega^2 + a_1 b_2 \omega^2 + a_3 b_1 \omega^2 - b_1 + b_3 \omega^2 - a_2 a_3 b_3 \omega^2 + a_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 - a_2 a_3^2 b_1 \omega^2 - a_1 a_2 b_3 \omega^2 + a_1 b_2 + b_1 - a_1^2 a_3 b_2 - b^2 \omega - a_1 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 \omega - a_2 a_3 b_1 + a_3 b_1 \omega = 0.$$

Após alguns cancelamentos, obtemos:

$$a_2 b_3(1 + \omega) + a_1 b_2(1 + \omega^2) + a_3 b_1(\omega + \omega^2) - a_1 a_2^2 b_3 \omega - a_1 a_2 b_2 \omega - a_2 a_3^2 b_1 \omega^2 - a_2 a_3 b_3 \omega^2 - a_1^2 a_3 b_2 + a_1 a_3 b_1 = 0.$$

Agrupando os termos em relação a b_1 , b_2 e b_3 , temos:

$$b_1(a_3 \omega + a_3 \omega^2 - a_2 a_3^2 \omega^2 - a_1 a_3) + b_2(a_1 \omega^2 + a_1 - a_1 a_2 \omega - a_1^2 a_3) + b_3(a_2 \omega + a_2 - a_1 a_2^2 \omega - a_2 a_3 \omega^2) = 0. \quad (II)$$

Agora, melhor organizando os coeficientes de b_1 , b_2 e b_3 , temos:

1. Coeficiente de b_1 : $a_3 \omega + a_3 \omega^2 - a_2 a_3^2 \omega^2 - a_1 a_3 = a_3(\omega^2 + \omega) - a_2 a_3^2 \omega^2 - a_1 a_3 = -a_3 - a_2 a_3^2 \omega^2 - a_1 a_3 = -(a_3 + a_1 a_3 + a_2 a_3^2 \omega^2) =$
 $= -(a_3 + a_1 a_3 + a_1^2 a_2^3 a_3^4) = - \left(a_3 + a_1 a_3 + \frac{a_1^3 a_2^3 a_3^3 \cdot a_3}{a_1} \right) =$
 $= - \left(a_3 + a_1 a_3 + \frac{a_3}{a_1} \right) = -a_3 \left(1 + a_1 + \frac{1}{a_1} \right) = -\frac{a_3}{a_1}(a_1^2 + a_1 + 1);$
2. Coeficiente de b_2 : $a_1 \omega^2 + a_1 - a_1 a_2 \omega - a_1^2 a_3 = a_1(\omega^2 + 1) - a_1 a_2 \omega - a_1^2 a_3 = -a_1 \omega - a_1 a_2 \omega - a_1^2 a_3 = -a_1^2 a_2 a_3 - a_1^2 a_2^2 a_3 - a_1^2 a_3 = -a_1^2 a_3(a_2^2 + a_2 + 1);$
3. Coeficiente de b_3 : $a_2 \omega + a_2 - a_1 a_2^2 \omega - a_2 a_3 \omega^2 = a_2(\omega + 1) - a_1 a_2^2 \omega - a_2 a_3 \omega^2 = -a_2 \omega^2 - a_1 a_2^2 \omega - a_2 a_3 \omega^2 = -a_1^2 a_2^3 a_3^2 - a_1^2 a_2^3 a_3 - a_1^2 a_2^3 a_3^3 = -a_1^2 a_2^3 a_3(a_3^2 + a_3 + 1).$

Desse modo, (II) pode ser reescrita como:

$$\left(-\frac{a_3}{a_1}(a_1^2 + a_1 + 1)\right)b_1 + (-a_1^2 a_3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2) + (-a_1^2 a_2^3 a_3(a_3^2 + a_3 + 1))b_3 = 0 \quad (III).$$

Finalmente, multiplicando (III) por $-\frac{a_1}{a_3}$, obtemos (I):

$$(a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + (a_1 a_2)^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3 = 0.$$

O que conclui a demonstração. ■

6.1.18 Problema 18

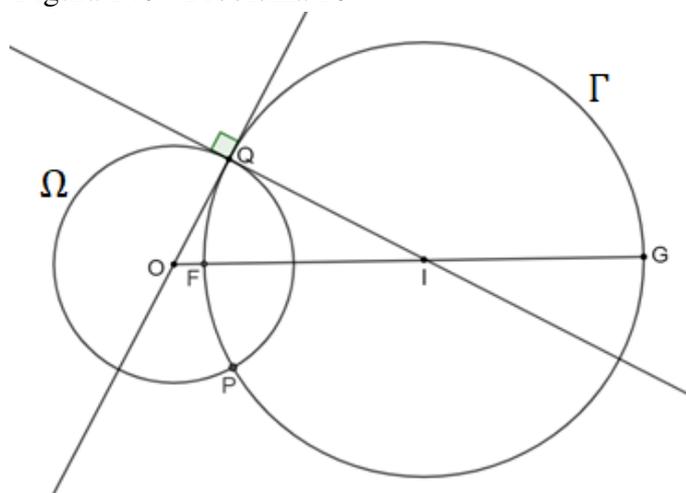
Antes de apresentar o problema, vejamos a seguinte proposição.

Proposição 6.1.5 *Se Γ é uma circunferência de raio s , ortogonal à outra circunferência Ω de raio r , então a inversa de Γ em relação a Ω é a própria circunferência Γ .*

Demonstração. Seja I o centro de Γ . Sejam Q e P os pontos de intersecção de Γ e Ω , e seja $F \in \Gamma$ distinto de Q e P . Considere a semirreta \overrightarrow{OF} e seja G o outro ponto de intersecção de \overrightarrow{OF} com Γ .

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OQI da figura abaixo, temos:

Figura 146 – Problema 18



Fonte: Autoria própria.

$$(IQ)^2 + (OQ)^2 = (OI)^2 \Rightarrow s^2 + r^2 = (OI)^2.$$

Mas $OI = OF + s$, donde segue que

$$s^2 + r^2 = (OF + s)^2 \Rightarrow s^2 + r^2 = (OF)^2 + 2 \cdot OF \cdot s + s^2.$$

Daí, temos:

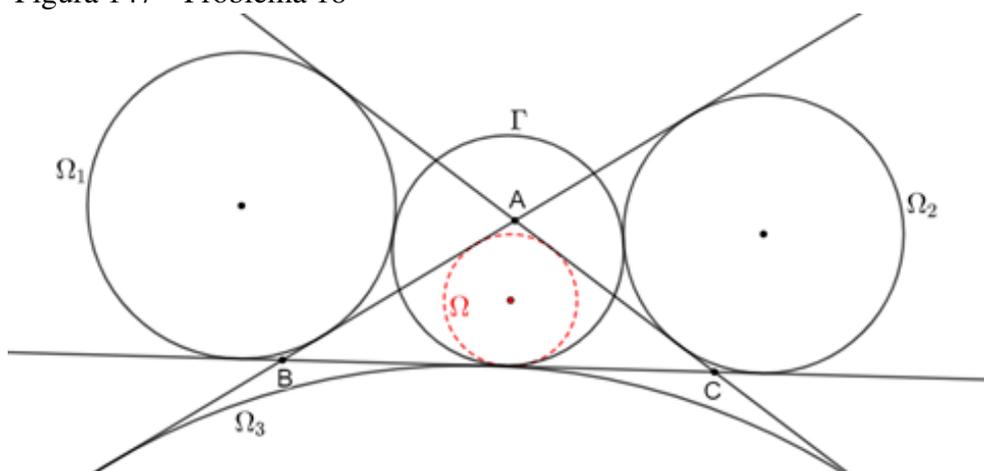
$$s^2 + r^2 = OF \cdot (OF + 2s) + s^2 \Rightarrow r^2 = OF \cdot (OF + 2s) \Rightarrow r^2 = OF \cdot (OF + FG) = OF \cdot OG.$$

Isso implica que G é inverso de F em relação a Ω . ■

Problema. (Circunferência de Feuerbach) Seja ABC um triângulo com ortocentro H . A circunferência de nove pontos ou circunferência de Feuerbach relativa ao triângulo ABC é uma circunferência que contém os pontos médios dos lados do triângulo, os pés das alturas relativas a cada um dos lados desse triângulo e os pontos médios dos segmentos que ligam H a cada um dos vértices do triângulo ABC . (AIRES *et al.*, 2019)(SPIRA, 2004) (LOZANOVSKI, 2016)

Teorema 6.1.6 Seja Γ a circunferência de Feuerbach relativa ao triângulo ABC . Sejam Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 as circunferências ex-inscritas ao triângulo ABC e Ω a circunferência inscrita no mesmo triângulo. Então, a circunferência de nove pontos, Γ , desse triângulo, é tangente a cada uma destas circunferências (figura abaixo).

Figura 147 – Problema 18

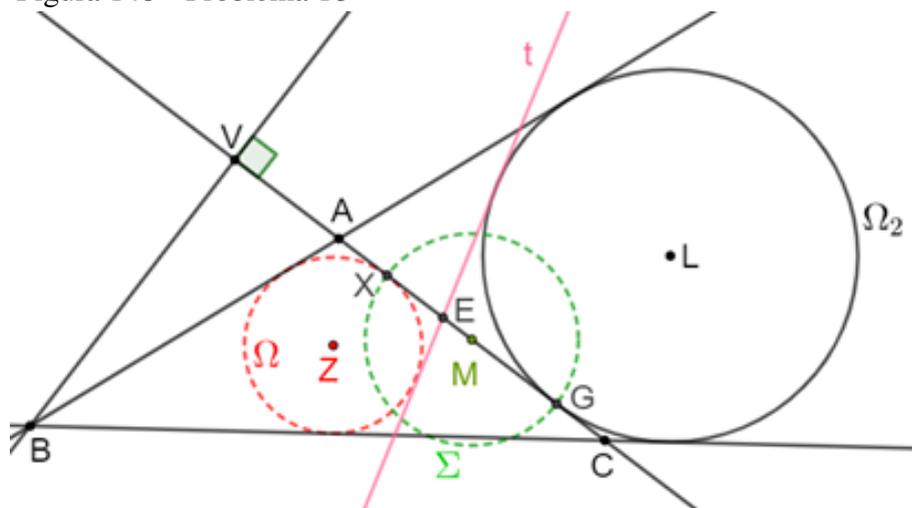


Fonte: AIRES.

Demonstração. Sejam V o pé da altura relativa ao vértice B , M o ponto médio do lado AC do triângulo ABC , X o ponto de tangência da circunferência Ω inscrita no triângulo ABC com o lado AC , G o ponto de tangência da circunferência Ω_2 ex-inscrita ao triângulo ABC relativa ao lado AC com o lado AC , Z o incentro do triângulo ABC e L o centro de Ω_2 , conforme figura 148.

Observe que M é também o ponto médio do segmento XG . Seja então Σ a circunferência de centro M e raio $r = \frac{XG}{2}$. Por outro lado, Σ é simultaneamente perpendicular às circunferências Ω e Ω_2 .

Figura 148 – Problema 18

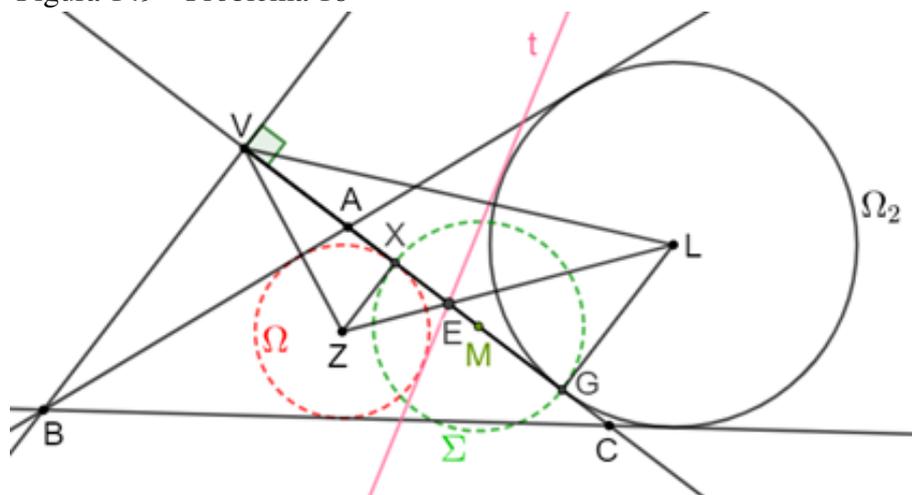


Fonte: Autoria própria.

Essas circunferências permanecem invariantes pela inversão com relação à Σ . Mais ainda, como a reta definida por X e G contém o centro de inversão (Figura 148), ela também permanece invariante pela inversão com relação a Σ .

Na figura 149, podemos afirmar que $\triangle ZXV \sim \triangle LGV$ e $\triangle ZXE \sim \triangle LGE$. Portanto, segue que V e E são conjugados harmônicos com relação a X e G . Dessa forma, E é o inverso de V com relação a Σ .

Figura 149 – Problema 18

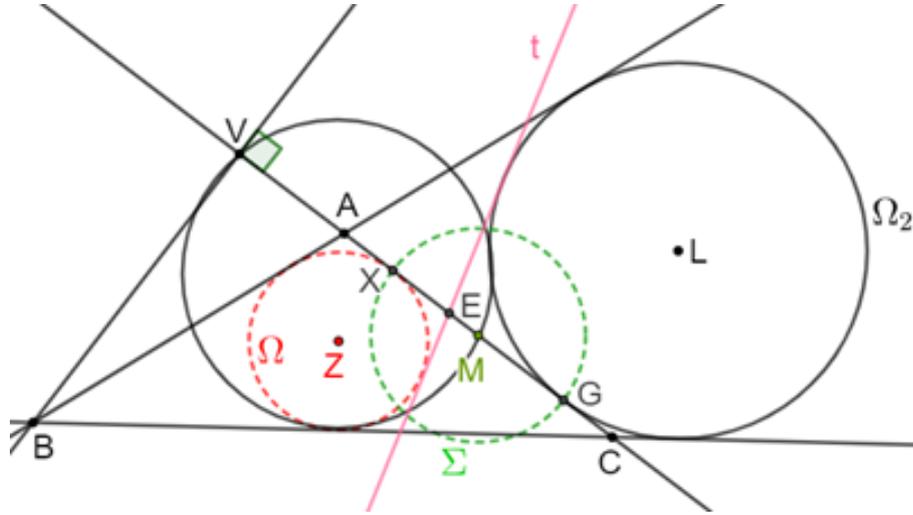


Fonte: Autoria própria.

A circunferência de nove pontos Γ , por definição, contém os pontos M e V . Assim, invertê-la com relação à circunferência Σ , resultará em uma reta t passando por E , já que E é o inverso de V com relação a Σ (Figura 150).

Mais ainda, a reta tangente a Γ no ponto M é paralela a t .

Figura 150 – Problema 18



Fonte: Autoria própria.

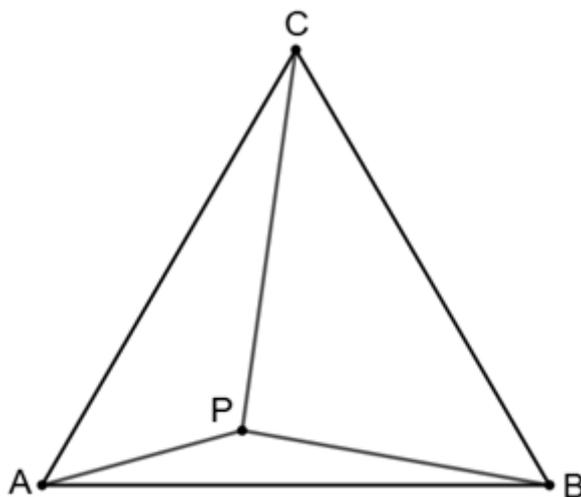
Assim sendo, segue que Γ é tangente às circunferências inscrita Ω e ex-inscrita Ω_2 . De forma análoga, prova-se a tangência entre Γ e as demais circunferências ex-inscritas ao triângulo ABC . ■

6.1.19 Problema 19

Dado um triângulo equilátero ABC de lado ℓ , seja P um ponto qualquer em seu interior. Mostrar que $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq \ell\sqrt{3}$.

Solução. Considere o $\triangle ABC$ da figura abaixo e seja P um ponto qualquer em seu interior.

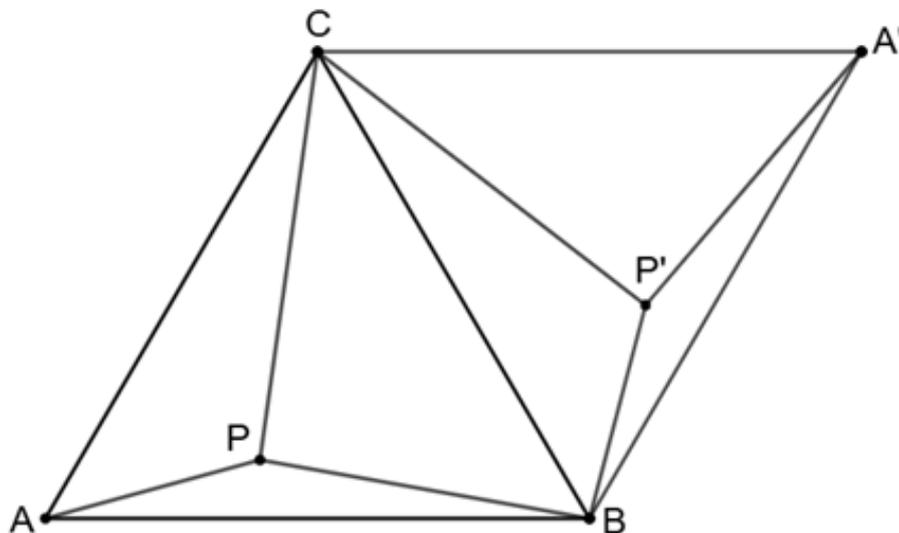
Figura 151 – Problema 19



Fonte: Autoria própria.

Inicialmente, vamos fazer uma rotação de 60° do $\triangle ABC$ em relação ao ponto C . Dessa forma, obtemos o $\triangle BCA'$ e o ponto P' que corresponde ao ponto P conforme figura a seguir, que é um paralelogramo $ABA'C$.

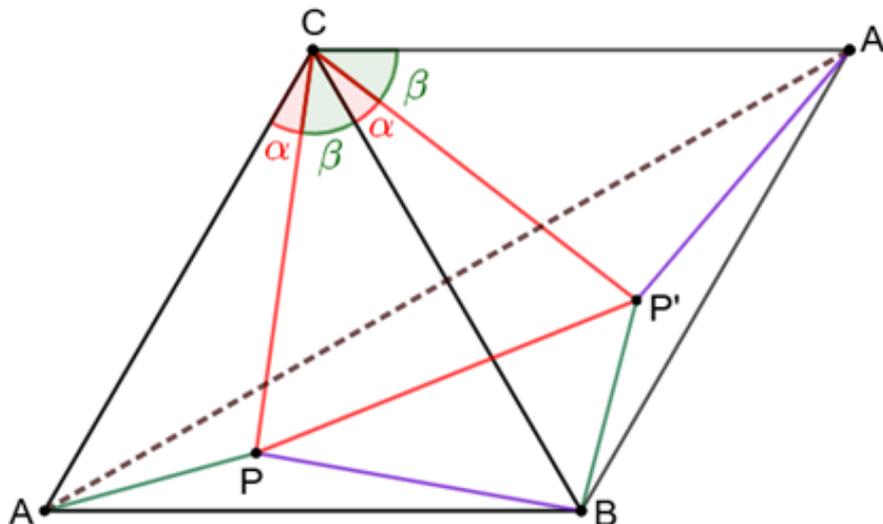
Figura 152 – Problema 19



Fonte: Autoria própria.

Veja que o $\triangle PCP'$ é equilátero, uma vez que $PC = P'C$ e $\angle PCP' = \alpha + \beta = 60^\circ$, como mostrado abaixo.

Figura 153 – Problema 19



Fonte: Autoria própria.

Podemos escrever, então,

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{PA} + \overline{PP'} + \overline{P'A'},$$

que por sua vez é menor que a diagonal AA' do paralelogramo $ABA'C$ e que por sua vez mede duas vezes a altura do triângulo equilátero ABC que é $\ell \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dessa forma, temos:

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq \overline{AA'} = 2 \cdot \ell \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Finalmente,

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq \ell\sqrt{3}. \blacksquare$$

7 CONCLUSÕES

Como vimos ao longo do trabalho, as transformações geométricas são importantíssimas na demonstração de teoremas da geometria plana. São também fundamentais para a compreensão de teoremas e problemas da geometria plana, pois permitem uma abordagem visual e analítica que facilita a identificação de propriedades invariantes. Isometrias, como translações, rotações, reflexões e simetrias, simplificam os problemas ao preservar distâncias e ângulos, mantendo as características das figuras enquanto transformam suas posições no plano.

Vale citar a importância das composições das transformações isométricas, além da homotetia e da inversão. Essas transformações não isométricas, expandem significativamente o escopo de resoluções ao lidar com problemas mais complexos. A homotetia, com sua capacidade de ampliar ou reduzir figuras preservando a proporcionalidade, é crucial em problemas que envolvem proporções e semelhança entre figuras geométricas. Já a inversão, ao transformar pontos e curvas no plano de maneira não linear, revela novas simetrias e facilita a análise de problemas que, sem essa ferramenta, seriam intratáveis. A possibilidade de compor transformações geométricas, combinando as propriedades de cada tipo, potencializa ainda mais as soluções ao abrir um vasto leque de abordagens, contribuindo para uma análise mais detalhada de cada problema.

A aplicabilidade das transformações geométricas na resolução de problemas é algo ímpar e profundo. As transformações não apenas auxiliam na demonstração de teoremas, mas também são amplamente aplicáveis na resolução prática de problemas em áreas como física, engenharia e computação gráfica, onde o entendimento da posição, simetria e movimento dos objetos é essencial. Por meio dessas transformações, problemas que inicialmente parecem complexos podem ser simplificados, traduzidos ou generalizados, permitindo uma abordagem mais direta e eficiente. A aplicação de técnicas de transformação torna-se, assim, um diferencial na análise de problemas matemáticos e na criação de algoritmos mais eficientes.

Para trabalhos futuros, indica-se a exploração das transformações em geometrias não euclidianas. Uma análise de transformações geométricas no contexto da geometria não euclidiana, como a geometria hiperbólica ou esférica, seria um campo frutífero para futuras pesquisas. Composições de transformações nesses espaços podem gerar novos *insights* sobre o comportamento das figuras e fornecer uma base para o estudo de geometrias mais complexas, com aplicações em física e cosmologia. Junte-se a isso, a ampliação do estudo da homotetia e da inversão em topologia e análise complexa.

REFERÊNCIAS

- AIRES, H. d. C.; PEREIRA, I. C. *et al.* Técnicas de problemas olímpicos de geometria plana. Editora Universitária da Assessoria de Educação a Distância-EditAedi, 2019.
- ALVES, S. **Será o infinito um ponto?** 2009. [Online; accessed 12-December-2024]. Disponível em: <https://sim.icmc.usp.br/sim2009/seraoinfinitoumponto.pdf>.
- ANDREESCU, T.; KORSKY, S.; POHOATA, C. **Lemmas in Olympiad Geometry**. [S. l.]: XYZ Press, 2016. ISBN 9780988562233.
- ANDREESCU, T.; MUSHKAROV, O.; STOYANOV, L. **Geometric Problems on Maxima and Minima**. Boston: Birkhäuser, 2005. (Geometric Problems on Maxima and Minima). ISBN 9780817635176.
- ANDREESCU, T.; ROLÍNEK, M.; TKADLEC, J. **107 Geometry Problems from the AwesomeMath Year-round Program**. [S. l.]: XYZ Press, 2013. ISBN 9780979926976.
- CONNES, A. A new proof of Morley's theorem. **Publications Mathématiques de l'IHÉS**, v. 88, p. 43–46, 1998.
- CONRAD, K. **Isometries of the plane and complex numbers**. Math Dept. UConn. [Online; accessed 12-December-2024]. Disponível em: <https://kconrad.math.uconn.edu/>.
- FARIA, R. M. A. **Interpretação Geométrica dos Problemas Clássicos de Desargues, Fagnano e Malfatti**. Dissertação (Mestrado) – Universidade dos Açores, 2013.
- FEITOSA, S. **Teste Cone Sul - Brasil**. 2017. [Online; accessed 19-December-2024]. Disponível em: <https://sites.google.com/site/selecaoconesul/testes-de-seleção>.
- GELCA, R.; ONIŞOR, I.; SHINE, C. **Geometric Transformations**. Springer International Publishing, 2022. (Problem Books in Mathematics). ISBN 9783030891176. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=_clfEAAAQBAJ.
- HANDA, G. **Inversion on the Fly**. 2015. [Online; accessed 19-December-2024]. Disponível em: <https://services.artofproblemsolving.com/>.
- HARVEY, M. **Geometry Illuminated: An Illustrated Introduction to Euclidean and Hyperbolic Plane Geometry**. Mathematical Association of America, 2015. (MAA Textbooks). ISBN 9781939512116. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=PPafCgAAQBAJ>.
- HERNANDO, J. **Miscelânea de Geometria: Tomo I -Projectividades, Inversion**. Madri: Juan Ángel Díaz Hernando, 2015.
- INEP. **ENEM 2012**. 2012. [Online; accessed 12-December-2024]. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>.
- JOHNSON, R. **Advanced Euclidean Geometry**. Dover Publications, 2013. (Dover Books on Mathematics). ISBN 9780486154985. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=559e2AVrvYC>.

KO, T. **International Mathematical Olympiad preliminary selection contest (1988-1997)**. 1999. [Online; accessed 19-December-2024]. Disponível em: [https://search.worldcat.org/pt/title/International-Mathematical-Olympiad-preliminary-selection-contest-\(1988-1997\)/oclc/51387273](https://search.worldcat.org/pt/title/International-Mathematical-Olympiad-preliminary-selection-contest-(1988-1997)/oclc/51387273).

LEONARD, I.; LEWIS, J.; LIU, A.; TOKARSKY, G. **Classical Geometry: Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective**. New Jersey: Wiley, 2014. ISBN 9781118679142.

LOPES, M. P. B. **SIMETRIAS E TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS NAS RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS**. Dissertação (Mestrado) – Unilab, 2021.

LOZANOVSKI, S. **A Beautiful Journey Through Olympiad Geometry**. 2016. [Online; accessed 12-December-2024]. Disponível em: <https://www.olympiadgeometry.com/the-book.html>.

MACTUTOR. Alain Connes. **School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland**, 2009. [Online; accessed 12-December-2024]. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Connes/>.

NEVES, R. C. **Aplicações de números complexos em geometria**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Goiás, 2014.

RIBEIRO, A. G. Homotetia. **Brasil Escola**, 2024. [Online; accessed 12-December-2024]. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/homotetia.htm>.

RICARDO, J. C. **Números Complexos e Equações Algébricas**. Rio de Janeiro: SESES, 2016.

RODRIGUES, P.; BACELAR, R.; BROCHERO, F. **Banco OBMEP 2011**. 2012. [Online; accessed 12-December-2024]. Disponível em: <http://obmep.org.br/banco.htm>.

SLINKO, A. Transformations in geometry. **New Zealand Mathematical Olympiad Committee**, 2009. [Online; accessed 12-December-2024]. Disponível em: <http://www.matematica.org.nz>.

SOUSA, C. B. de. **Inversão Geométrica Aplicada à Resolução dos Problemas de Apolônio**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Paraíba, 2014.

SPIRA, M. **Como Transformar Retas em Círculos e Vice Versa: a inversão e construções geométricas**. Salvador: II Bienal da SBM, Universidade Federal da Bahia, 2004.

STANKOVA, Z.; RIKE, T. **A Decade of the Berkeley Math Circle (The American Experience, Volume I)**. Providence: American Mathematical Soc. (MSRI (Mathematical Circles Library)). ISBN 9780821846834.

STILLWELL, J. **Geometry of Surfaces**. New York: Springer Science & Business Media, 1995. (Universitext). ISBN 9780387977430.

YAGLOM, I. **Geometric Transformations I**. New York: American Mathematical Society, 1962. [Translated from the Russian by Allen Shields].

YAGLOM, I. **Geometric Transformations II**. Hoboken: John Wiley & Sons, 1968. [Translated from the Russian by Allen Shields].

YAGLOM, I. **Geometric Transformations IV**. Washington: Mathematical Association of America, 2009. (Anneli Lax New Mathematical Library). ISBN 9780883856482.