



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS
DO SERTÃO CENTRAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

ANTONIEL LIMA DE OLIVEIRA

**SEQUÊNCIA DIDÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS SEQUÊNCIAS
DE FIBONACCI E PADOVAN**

QUIXADÁ – CEARÁ

2025

ANTONIEL LIMA DE OLIVEIRA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS SEQUÊNCIAS DE
FIBONACCI E PADOVAN

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego da Silva Pinheiro.

QUIXADÁ – CEARÁ

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Oliveira, Antoniel Lima de
Sequência didática: uma proposta para o ensino das
sequências de Fibonacci e Padovan [recurso eletrônico] /
Antoniell Lima de Oliveira. - 2025.
64 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado
Profissional Em Matemática Rede Nacional, Quixadá, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Diego da Silva Pinheiro.
1. sequência didática. 2. sequência de Fibonacci. 3.
sequência de Padovan. 4. razão áurea. 5. número plástico. I.
Título.

ANTONIEL LIMA DE OLIVEIRA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS SEQUÊNCIAS DE
FIBONACCI E PADOVAN

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 18 de julho de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego da Silva Pinheiro (Orientador)

Faculdade de Educação, Ciências de Letras do Sertão Central – FECLESC
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira (Membro examinador interno)

Faculdade de Educação, Ciências de Letras do Sertão Central – FECLESC
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. José Danuso Rocha de Oliveira

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Prof. Dr. Pedro Paulo Alves Oliveira

Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e por me confortar nos momentos de angústia.

À minha mãe, Maria Leonide Lima de Oliveira, minha maior inspiração: mulher sábia, guerreira e resiliente, que mesmo diante das adversidades, nunca deixou de acreditar em uma educação transformadora. Ao meu pai, Antonio Alves de Oliveira, homem trabalhador e honesto, que é, e sempre foi, que tanto se orgulha dos seus filhos professores.

À minha esposa, Mirian Castro e Silva, por todo carinho e paciência, que por vezes foi o combustível para a conclusão da escrita desse trabalho.

A todos os meus irmãos e, em especial irmã Maria Lidiana Lima de Oliveira Pincer e ao meu irmão Pedro Marcelo Lima de Oliveira, por todo o incentivo nessa caminhada.

A todos os amigos da turma de mestrado, em especial ao meu amigo Antonio Barbosa Pereira, pelas conversas inspiradoras e pela companhia durante as viagens para assistir às aulas em Quixadá/Ce.

Aos meus amigos, Romário Sousa, Jonas Paixão, Laécio Gomes, Maione Alves, Herberth Pincer, Bruna Mendes, Jakson Teles, Milena Gomes, Ricardo Marcolino e Clara Silva, por todo apoio e incentivo.

Ao núcleo gestor, professores e alunos da EEMTI Capelão Frei Orlando.

Ao meu orientador, professor Dr. Diego da Silva Pinheiro, a quem tenho profunda gratidão por toda a compreensão e disponibilidade durante a elaboração deste trabalho. Diego é um exímio professor, ao longo do curso, ministrou aulas com dedicação e entusiasmo, proporcionando uma nova perspectiva sobre os conteúdos estudados.

Aos professores que se dedicaram e conduziram tão bem todo o processo das aulas no percurso do mestrado, gratidão pela dedicação e compromisso, em especial ao professor Dr. Jobson de Queiroz Oliveira.

Por fim, agradeço pelas valiosas sugestões da banca examinadora, assim como a todos que, de maneira indireta, contribuíram para a construção deste trabalho.

“Demore o tempo que for para decidir o que
você quer da vida, e depois que decidir não
recue ante nenhum pretexto, porque o mundo
tentará te dissuadir”.

(Friedrich Nietzsche)

RESUMO

O estudo das sequências recorrentes costuma ser negligenciado na educação básica, limitando-se, em muitos casos, as progressões aritméticas e geométricas. Por exemplo, a sequência de Padovan é pouco explorada até mesmo em cursos de licenciatura em Matemática. Assim, com o intuito de disseminar o estudo dessas sequências, este trabalho foi desenvolvido. Nesse estudo foram apresentados fatos curiosos associados às sequências de Fibonacci, Lucas e Padovan e, ao final, duas sequências didáticas destinadas principalmente a alunos do ensino médio. Nosso objetivo é analisar essas sequências recorrentes, destacando suas propriedades e aplicações, além de identificar possíveis conexões da sequência de Padovan com a teoria dos grupos finitos. Para tanto, cada capítulo trará, além de um resgate histórico, uma abordagem conceitual consistente. Além disso, apresentaremos relações interessantes entre essas sequências, tais como a razão áurea e o número plástico. Dessa forma, é possível que as discussões aqui presentes possam contribuir para a divulgação dessas sequências e sua aplicação ao ensino, fornecendo um aporte teórico a professores e estudantes.

Palavras-chave: sequência didática; sequência de Fibonacci; sequência de Padovan; razão áurea; número plástico.

ABSTRACT

The study of recurrent sequences is often neglected in basic education, being limited, in many cases, to arithmetic and geometric progressions. For example, the Padovan sequence is scarcely explored even in undergraduate mathematics teacher education programs. Thus, with the aim of disseminating the study of these sequences, this work was developed. In this study, curious facts related to the Fibonacci, Lucas, and Padovan sequences were presented, and, at the end, two didactic sequences mainly intended for high school students. Our objective is to analyze these recurrent sequences, highlighting their properties and applications, in addition to identifying possible connections between the Padovan sequence and the theory of finite groups. To this end, each chapter will include, besides a historical overview, a consistent conceptual approach. Furthermore, we will present interesting relationships among these sequences, such as the golden ratio and the plastic number. In this way, it is possible that the discussions presented here may contribute to the dissemination of these sequences and their application in teaching, providing theoretical support for teachers and students.

Keywords: didactic sequence; Fibonacci sequence; Padovan sequence; golden ratio; plastic number.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema de reprodução dos coelhos	17
Figura 2 – A Torre de Hanói	23
Figura 3 - Espiral de Padovan 2D.	29
Figura 4 - Divisão de um segmento em três partes por Van Der Laan.	35
Figura 5 - Padrão cíclico da sequência de Padovan mod 2.....	45
Figura 6 - Padrão cíclico da sequência de Padovan mod 5.....	46
Figura 7 - Traços da sequência de Fibonacci na natureza.....	47
Figura 8 - Reflexão da luz.....	49
Figura 9 - Interior da basílica cristã de abadia.	50
Figura 10 - Dez primeiros intervalos de Padovan construídos no dó central.	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Termos iniciais das seqüências de Fibonacci e Lucas.	25
Tabela 2 - Alguns termos da seqüência de Padovan	28
Tabela 3 - Razão entre termos consecutivos da seqüência de Padovan.....	32
Tabela 4 - Quantidade de raízes da equação $x^3 + px + q = 0$	34
Tabela 5 - Amostra dos 50 primeiros termos da seqüência de Padovan <i>mod</i> 2.	45
Tabela 6 - Amostra dos 50 primeiros termos da seqüência de Padovan <i>mod</i> 5.	46
Tabela 7 – Procedimentos de uma seqüência didática	54

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
FECLESC	Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central
FUNESC	Fundação Educacional do Sertão Central
UECE	Universidade Estadual do Ceará
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	SEQUÊNCIAS RECORRENTES.....	16
2.1	Contexto Histórico	16
2.2	Sequência de Fibonacci	16
2.2.1	Definição.....	17
2.2.2	Número de Ouro	18
2.2.3	Recorrências Lineares de Segunda Ordem	19
2.2.4	Número de Fibonacci.....	21
2.3	Sequência de Lucas.....	22
2.3.1	Definição.....	25
3	SEQUÊNCIA DE PADOVAN.....	27
3.1.1	Definição.....	28
3.1.2	Propriedades	30
3.2	Número Plástico	32
3.2.1	Definição (Algébrica)	33
3.2.2	Definição (Geométrica)	35
4	SEQUÊNCIA DE PADOVAN E GRUPOS FINITOS	38
4.1	Noções elementares de Teoria dos Números	38
4.1.1	Definição (Divisibilidade em \mathbb{Z}).....	38
4.1.3	Definição (Congruência)	39
4.2	Teoria dos Grupos Fintos.....	41
4.2.1	Definição (Grupos)	42
4.2.2	Subgrupos	43
4.2.3	Definição (Grupos Finitos).....	44
4.2.4	Definição (Subgrupos gerados por um subconjunto)	44
4.2.5	Definição (Grupos cíclicos).....	44
5	APLICAÇÕES	47
5.1	Traços da sequência de Fibonacci nas flores.....	47
5.2	Conversão de milhas para quilômetros	48
5.3	Conexões entre a sequência de Fibonacci e a Física	48
5.4	A sequência de Padovan na arquitetura.....	49
5.5	A sequência de Padovan na música.....	50

5.6	A sequência de Padovan na Matemática	51
6	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	52
6.1	A sequência didática como metodologia de ensino	52
6.2	Desvendando a sequência de Fibonacci	55
6.3	Desvendando a sequência de Padovan	59
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
	REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

A matemática é um dos pilares para o desenvolvimento científico da humanidade. Suas contribuições são amplas: vão desde a resolução de problemas complexos até a simples interpretação de padrões presentes na natureza e na sociedade. No cotidiano, seu papel se destaca em situações corriqueiras, como ao optar entre uma compra à vista ou a prazo, demonstrando que até mesmo decisões simples, dependem de algum tipo de raciocínio matemático. É difícil imaginar a vida em sociedade sem a presença dessa ciência. Mas, afinal, o que estuda a matemática? Em um contexto geral, conforme apontado por Silva (2007, p. 14), ela se ocupa primordialmente do estudo de “números, figuras e outros objetos abstratos do gênero”.

É indiscutível o papel singular que a matemática desempenha em nossa vida cotidiana. O conhecimento matemático facilita a tomada de decisão em diversas situações, e deve ser encarado como parte integrante da nossa experiência humana no decorrer da história (Brasil, 2018). Assim, quando pensamos na aprendizagem Matemática associada ao ensino médio, nos deparamos com dificuldades, conforme sugere Brasil (2018, p. 522): “Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história”. Nessa perspectiva, aprender matemática vai além da memorização de fórmulas.

Compreender o contexto histórico em que as descobertas científicas associadas a essa ciência estão inseridas, contribui não só para o enriquecimento do conteúdo, como também incentiva a construção do raciocínio. Desse modo, o presente trabalho aborda o estudo de sequências recorrentes, dando destaque para as sequências de Fibonacci, Lucas e Padovan.

O estudo das sequências numéricas está previsto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sendo destacado a observação de padrões em uma de suas competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o ensino médio (Brasil, 2018). Contudo, em muitos casos, esse tópico é frequentemente restringido ao estudo das progressões aritméticas e geométricas, enquanto outras sequências recorrentes, como as abordadas neste trabalho, acabam sendo negligenciadas. A sequência de Padovan, por exemplo, é pouco explorada, inclusive em cursos de licenciatura, e não foram encontrados indícios sequer de sua aplicação nos livros textos do PROFMAT. Diante da pouca notoriedade atribuída, sobretudo, à sequência de Padovan, surgiu o interesse pelo estudo do tema. Assim, buscamos contribuir com a ampliação do conhecimento e da popularidade dessas sequências.

O presente trabalho tem como objetivo analisar as sequências de Fibonacci e de Padovan, destacando suas propriedades e aplicações, além de possíveis conexões da sequência de Padovan com a teoria dos grupos finitos. A pesquisa desenvolvida é de natureza bibliográfica, fundamentada na análise de artigos, livros, dissertações e teses disponíveis principalmente no Google Acadêmico. Buscamos ampliar o conhecimento sobre o tema, proporcionando uma organização sistemática dos conteúdos abordados. Dessa forma, este trabalho foi pensado de modo que o material teórico aqui exibido seja suficiente para a compreensão dos tópicos propostos. No entanto, sempre que jugamos necessário, indicamos referências adicionais para aprofundamento.

O segundo capítulo, intitulado Sequências Recorrentes, é dedicado principalmente ao estudo da sequência de Fibonacci. Nele serão abordados os elementos fundamentais dessa sequência, tais como: a definição formal, a relação com o número de ouro e a caracterização de uma solução para recorrências lineares, homogênea, de segunda ordem, além de determinar o n -ésimo número de Fibonacci, isto é, $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$. Ao final dessa seção, evidenciamos que as sequências de Fibonacci e de Lucas estão intimamente relacionadas.

No terceiro capítulo, abordamos exclusivamente a sequência de Padovan. Inicialmente, é feito um breve levantamento histórico a respeito dos principais responsáveis pela descoberta dessa sequência, seguindo com a sua definição formal e as propriedades mais imediatas. Em seguida, introduzimos o conceito de número plástico, representado pela letra grega ψ (*psi*), destacando tanto sua definição algébrica quanto sua interpretação geométrica. Por fim, estabelecemos a relação entre esse número e a sequência de Padovan, demonstrando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \psi$, onde P_n é o n -ésimo número de Padovan.

Já no quarto capítulo, é proposta uma relação entre a sequência de Padovan e a teoria dos grupos finitos. O capítulo seguinte aborda algumas aplicações, evidenciando a presença das sequências de Fibonacci e Padovan em diferentes áreas do conhecimento e na vida cotidiana. No sexto capítulo, discutimos o potencial pedagógico das sequências didáticas como estratégias de ensino, detalhando propostas específicas para a abordagem das sequências de Fibonacci e Padovan com estudantes da educação básica, de modo a tornar o conteúdo acessível e significativo, promovendo a articulação entre teoria e prática.

Por fim, nas considerações finais, são retomados os principais pontos analisados ao longo do texto.

2 SEQUÊNCIAS RECORRENTES

2.1 Contexto Histórico

Nossa existência sempre foi marcada pela observação de padrões, seja de forma voluntária ou não. No Egito Antigo, por exemplo, as cheias do Nilo eram “previstas” com base na análise de fenômenos astronômicos. Conforme destaca Boyer (1974, p. 9): “Os egípcios começaram cedo a se interessar pela astronomia e observaram que a inundação anual do Nilo tinha lugar pouco depois que Sirius, a estrela do cão, se levantava a leste logo antes do sol”. Isso demonstra a necessidade que os egípcios tinham em identificar o momento correto para o cultivo da Terra, pois sua sobrevivência dependia principalmente da agricultura.

Com o passar dos séculos, as civilizações foram evoluindo cientificamente, e os conhecimentos foram sendo remodelados, contribuindo com o desenvolvimento de uma das mais notáveis áreas do saber humano, a matemática.

A busca por regularidades na natureza e na vida cotidiana não apenas impulsionou o progresso científico, mas também levou à formulação de diversos conceitos matemáticos fundamentais, entre eles, as sequências numéricas.

Uma **sequência de números** reais é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada elemento do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais a um valor no conjunto \mathbb{R} dos números reais. Algumas sequências se tornaram famosas, como por exemplo a sequência de Fibonacci, devido à sua presença recorrente na natureza, na arte e na matemática. Além disso, a razão entre termos consecutivos dessa sequência se aproxima de um valor matemático associado a proporções estéticas harmoniosas, que influenciam a arte e a arquitetura.

Antes de apresentar formalmente essa sequência, dedicaremos alguns parágrafos, a seguir, ao brilhante matemático que a descobriu, o qual viveu entre os séculos XII e XIII.

2.2 Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1170 - 1250), natural da cidade de Pisa, na Itália, era filho do comerciante Guiliermo Bonacci. Desde cedo, envolveu-se nos negócios da família e, em suas viagens pelo mundo árabe, como mercador, teve a oportunidade de aprofundar seus estudos em matemática. Desenvolveu, assim, um grande apreço pela disciplina, tornando-se um dos mais renomados matemáticos da Europa Medieval. Para Aquino (2019, p. 14): “Leonardo ficou mais conhecido como Fibonacci, uma abreviação da expressão filho de Bonacci”. Durante suas

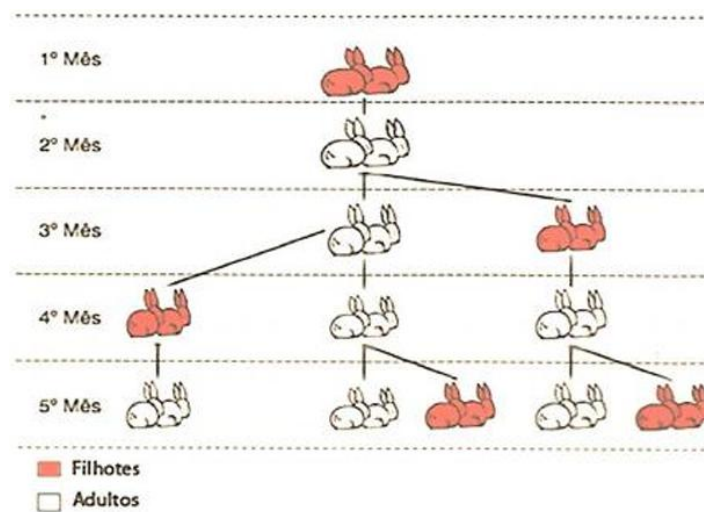
viagens, Fibonacci teve contato com a álgebra e com o sistema de numeração indo-arábico, tornando-se um dos precursores na introdução desse sistema na Europa.

Ao regressar à sua cidade natal, Fibonacci dedicou-se à escrita do livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo), obra de grande influência do século XIII. Nesse livro, ele destaca noções de álgebra e aritmética prática, voltadas para o comércio.

Apesar dos diversos assuntos e problemas presentes nessa obra, um deles se destacou, o problema dos coelhos, conforme descrito por Boyer (1974, p. 186): “Quantos pares de coelhos são produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?” Esse problema nos leva a uma das principais sequências estudadas em matemática, com aplicações que versam desde situações presentes na natureza até sofisticados projetos de arte e engenharia.

O problema descrito por Fibonacci pode ser facilmente representado pela figura 1.

Figura 1 - Esquema de reprodução dos coelhos



Fonte: Silva (2014, p. 23, *apud* Silva; Almeida, 2020, p. 79).

Embora o esquema acima ilustre o problema de Fibonacci, ele não descreve formalmente essa sequência e nem a sua relação com o número de ouro, sendo esse o objeto de estudo da próxima seção.

2.2.1 Definição

A sequência de números naturais, cujos dois termos iniciais são iguais a um, e que a partir do terceiro termo, cada termo, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores, é

chamada sequência de Fibonacci, a qual denotaremos por $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Matematicamente, essa sequência pode ser definida recursivamente do seguinte modo:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1, \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Cada termo f_n dessa sequência é denominado n-ésimo número de Fibonacci.

Destacaremos agora uma relação matemática importante ligada à beleza e harmonia.

2.2.2 Número de Ouro

O Número de Ouro, também conhecido por Razão Áurea ou Divina Proporção, é frequentemente associado à harmonia, beleza e perfeição. Sua presença pode ser notada em diversas situações na natureza, como nas folhas de plantas e até mesmo no corpo humano. Segundo Carneiro; Fernandes; Nobokite (2023, p. 196): “esse número foi chamado por Euclides, no Livro VI de *Os Elementos* de *divisão de um segmento em média e extrema razão*”. Assim, dizemos que um segmento de reta é cortado na proporção áurea, quando o todo está para uma das partes na mesma razão em que essa parte está para a outra, ou, de modo equivalente: seja AB um segmento não-nulo e C ponto um ponto interior a ele, tal que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}. \quad (1)$$

A razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ é denominada de Número de Ouro ou Razão Áurea, sendo essa constante de proporcionalidade frequentemente representada pela letra grega ϕ (*phi*).

Vejam agora como podemos determinar essa constante. Inicialmente, note que $\overline{AC} > \overline{BC}$, pois $\overline{AB} > \overline{AC}$, já que C é ponto interior de AB . Para fixar as ideias, tome $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = x$, isso implica que $\overline{BC} = a - x$. Agora, reescrevendo (1), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} &\Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + 2x \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4} - a^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \Leftrightarrow \left|x + \frac{a}{2}\right| = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \text{ ora } x \text{ e } a \text{ são números reais positivos, pois são} \\ &\text{respectivamente as medidas dos segmentos } \overline{AC} \text{ e } \overline{AB}, \text{ de sorte que } x = a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right). \text{ De posse} \\ &\text{desse resultado, substituindo em (1), temos:} \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

É conveniente destacar que em diversas publicações o Número de Ouro também é associado a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Isso decorre do fato de que $x = a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = \frac{a}{\phi}$ é uma raiz da equação $x^2 + ax - a^2 = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, temos que:

$$\left(\frac{a}{\phi} \right)^2 + a \left(\frac{a}{\phi} \right) - a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 \left(\frac{-\phi^2 + \phi + 1}{\phi^2} \right) = 0 \Leftrightarrow -\phi^2 + \phi + 1 = 0 \Leftrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0,$$

pois a^2 e ϕ^2 são números reais positivos. Outro fato relevante, é que o segmento \overline{AC} , é média geométrica entre o segmento \overline{AB} e o de menor medida, já que por (1), obtemos: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}$.

A recorrência apresentada na seção 2.2.1 é dita **linear de segunda ordem**, e é de se esperar que exista uma fórmula fechada capaz de descrever um termo qualquer dessa sequência, sem necessariamente conhecer os dois termos imediatamente anteriores, e esse será o objeto de análise da seção que segue.

2.2.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Vamos tratar aqui apenas das recorrências lineares, homogêneas, de segunda ordem e com coeficientes constantes, ou seja, aquelas em que cada termo, a partir do terceiro, é dado em função dos dois termos imediatamente anteriores, isto é, recorrência da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0,$$

onde p e q são constantes, com $q \neq 0$. Uma abordagem mais aprofundada, pode ser encontrada em (Morgado; Carvalho, 2015).

Para a recorrência previamente definida, associaremos uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, denominada equação característica.

Vejamus uma solução para essa recorrência, descrita no teorema que segue, conforme (Morgado; Carvalho, 2015, p.76).

Teorema 2.1. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é uma solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Demonstração: Devemos mostrar que toda sequência da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ satisfaz a recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, isto é, $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + pC_1 r_1^{n+1} + pC_2 r_2^{n+1} + qC_1 r_1^n + qC_2 r_2^n = \\ &= (C_1 r_1^{n+2} + pC_1 r_1^{n+1} + qC_1 r_1^n) + (C_2 r_2^{n+2} + pC_2 r_2^{n+1} + qC_2 r_2^n) = \\ &= C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q), \end{aligned}$$

note que r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$, isto é, $r_1^2 + pr_1 + q = 0 = r_2^2 + pr_2 + q$. Portanto, $C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = C_1 r_1^n \cdot 0 + C_2 r_2^n \cdot 0 = 0$. O que conclui a demonstração. \square

O Teorema 2.1 afirma que uma solução específica para a recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ é do tipo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, mas não garante que todas as soluções sigam esse critério. O próximo resultado demonstra que, se $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência também seguirão o critério apresentado.

Teorema 2.2. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Com efeito, seja b_n uma solução qualquer da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Considere o sistema de equações em C_1 e C_2

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = b_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = b_2. \end{cases}$$

Observe que esse sistema é possível e determinado, pois $r_1 \neq r_2$, além disso, r_1 e r_2 não são nulos, já que $q \neq 0$. Vamos determinar os valores das constantes C_1 e C_2 utilizando o método da substituição. Como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = b_1$, segue que $C_1 = \frac{b_1 - C_2 r_2}{r_1}$. Substituindo esse último resultado em $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = b_2$ e agrupando de forma conveniente os termos, obtemos:

$$C_2 = \frac{r_1 b_2 - r_1^2 b_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}, \text{ o que nos leva a } C_1 = \frac{r_2^2 b_1 - r_2 b_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}. \text{ Afirmamos agora que } b_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n,$$

para todo natural n . De fato, para fixar as ideias, tomamos $z_n = b_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$, resta mostrar que $z_n = 0$, para todo n . Ora,

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q).$$

O fato de b_n ser solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, e as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ ser r_1 e r_2 , implica em $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. Por outro lado,

$$z_1 = b_1 - C_1 r_1^1 - C_2 r_2^1 = 0 \text{ e } z_2 = b_2 - C_1 r_1^2 - C_2 r_2^2 = 0,$$

ou seja, $z_1 = z_2 = 0$. Assim, como $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n$ e os dois primeiros termos z_1 e z_2 são iguais a zeros, temos que termo geral z_n também é zero. Isso prova que, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n natural. Como queríamos. \square

Os Teoremas 2.1 e 2.2 fornecem as ferramentas necessárias para solucionar a recorrência linear relacionada à sequência de Fibonacci, isso é, determinar qualquer termo dessa sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sem necessariamente conhecer os termos antecedentes.

2.2.4 Número de Fibonacci

Conforme discutido na seção 2.2.1, a sequência de Fibonacci é caracterizada pela seguinte relação de recorrência $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, que tem como equação característica associada $r^2 = r + 1$. É fácil ver que as raízes dessa última equação são dadas por $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Portanto, segue do teorema 2.2, que todas as soluções dessa recorrência, são da forma

$$f_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Resta agora, determinar as constantes C_1 e C_2 . Sabendo que $f_1 = f_2 = 1$, obtemos o sistema de equações,

$$\begin{cases} C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ C_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) = 1. \end{cases}$$

Note que $C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = C_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \Rightarrow C_1 = -C_2$. Substituindo C_1 em $C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$, obtemos $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, e portanto, $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. O que nos leva ao n-ésimo Número de Fibonacci $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$. Essa última equação também é conhecida como Fórmula de Binet, cuja demonstração pode ser feita por indução, dispensando as noções de recorrência apresentada aqui, aos leitores interessados, veja (Carneiro; Fernandes; Nobokite, 2023, p. 197).

O leitor mais atento terá notado que apesar de todos os termos da Sequência de Fibonacci serem números naturais, a fórmula apresentada recorre a utilização de números irracionais. Segundo Hefez (2011, *apud* Borges 2015, p. 33): “é notável que seja necessário recorrer a fórmulas envolvendo números irracionais para representar os elementos da sequência de Fibonacci que são números naturais”. Obviamente, sendo a Sequência de Fibonacci formada por números naturais, a razão $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ é um número racional. Mas, à medida que tomamos n “suficientemente grande”, $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ se “aproxima” de ϕ . O que nos leva ao próximo teorema, o qual será demonstrado através das propriedades dos limites. Embora os enunciados e as provas dos teoremas sobre limites utilizados não sejam apresentados aqui, eles podem ser consultados na renomada obra de Lima (2020), em sua versão resumida.

Teorema 2.3. Se f_n é n -ésimo número de Fibonacci, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$.

Demonstração: Definamos a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por $x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Utilizando-se do fato do n -ésimo número de Fibonacci ser dado por $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$, podemos reescrever a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ do seguinte modo:

$$x_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right)}.$$

Efetuada as simplificações convenientes, obtemos: $x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}$. Resta, agora

calcular o limite dessa sequência. Ora, como $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 0$, implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n = 0. \text{ Daí,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \cdot 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

O que conclui a demonstração, uma vez que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \phi$. □

Observamos que há um elo entre a sequência de Fibonacci e o número áureo, além disso, considerando a recorrência dessa sequência em diversas situações naturais, seu estudo se torna particularmente relevante. A seguir, apresentaremos a sequência de Lucas, resultante da restrição dos termos iniciais da sequência de Fibonacci, a qual dedicaremos nosso estudo.

2.3 Sequência de Lucas

Natural da cidade de Amiens, na França, Édouard Lucas (1842 - 1891) foi um matemático notável. Formou-se em 1864 na École Normale Supérieure, uma instituição de ensino prestigiada na França. Após concluir o curso, trabalhou como assistente no observatório de Paris, sob a orientação de Jean Joseph Le Verrier (1811 - 1877), até se desligar em 1869 (Silva, 2017). Édouard Lucas chegou a servir ao exército na guerra franco-prussiana (1870 - 1871) e lecionou matemática nas escolas Lycée of Moulins de 1872 a 1876, Lycées Saint-Louis

de 1876 a 1879 e Lycée Charlemagne de 1879 a 1890, sendo considerado um exímio professor, conforme destaca Silva (2017):

Tinha a reputação de ser um ótimo professor, entretendo e instigando seus alunos com desafios matemáticos que requeriam considerável inventividade para serem resolvidos. Além de trabalhar como professor do ensino médio, foi um matemático bastante prolífico, tendo publicado durante toda sua vida mais de 180 artigos sobre as mais diversas áreas da matemática, nos mais diversos jornais de matemática do mundo (Silva, 2017, p. 21).

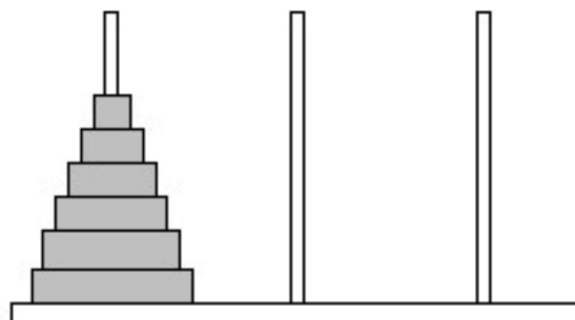
Isso demonstra sua influência e contribuições para a matemática do seu período, tanto como professor quanto pesquisador.

Suas principais publicações foram no ramo da teoria dos números, tendo se destacado pela busca por generalizações da sequência de Fibonacci, culminando em 1876 na sequência que hoje o leva o seu nome, isto é, a sequência de Lucas. Nesse mesmo ano, apresentou uma demonstração para uma recíproca do pequeno teorema de Fermat, proporcionando mais tarde a descoberta, de forma manual, de um número primo, que deteve por 75 anos o recorde de maior número primo conhecido, o referido número é 12º número de Mersenne, representado por

$$M_{127} = 2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727.$$

Lucas também se dedicou ao estudo da matemática recreativa, sendo o inventor do famoso problema das torres de Hanói, esse problema surge pela primeira vez na publicação do terceiro volume de seu livro *Récréations Mathématiques*, uma compilação de quatro volumes, publicados de 1882 a 1894 (Silva, 2017; Silva, 2018). A torre de Hanói é constituída de uma base e três hastes. Em uma dessas hastes são enfiados um certo número de discos, formando uma torre, conforme figura 2.

Figura 2 - A Torre de Hanói



Fonte: <https://www.educba.com/data-structures-and-algorithms/>. Acesso em 02/04/2025.

O problema consiste em mover todos os discos de uma das torres para outra, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:

- a) Apenas um disco pode ser movido por vez.
- b) Um disco nunca pode ser alocado sobre um de diâmetro inferior.

Logicamente, apenas o movimento das peças de uma das hastes para outra, obedecendo às condições mencionadas, não se torna fator determinante, e é pertinente questionar qual a melhor estratégia para vencer esse jogo com a quantidade mínima de movimentos. Deixaremos a estratégia um pouco de lado e refletiremos sobre a minimalidade dos movimentos adotados.

De acordo com Morgado; Carvalho (2015, p.19): “se designarmos por h_n o número mínimo de movimentos para transferir n disco de uma haste para outra, temos $h_n = 2h_{n-1} + 1$, para todo $n > 1$ ”.¹ A fim de resolver a recorrência acima, vamos inicialmente determinar uma solução não nula para a recorrência $x_n = 2x_{n-1}, x_1 = 1$. Ora,

$$x_2 = 2x_1$$

$$x_3 = 2x_2$$

$$x_4 = 2x_3$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_n = 2x_{n-1}$$

Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$, uma vez que $x_1 = 1$. Daí, multiplicando ordenadamente as $n - 1$ igualdades acima obtemos:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n = 2^{n-1} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n-1}.$$

Fazendo as simplificações convenientes, teremos que $x_n = 2^{n-1}x_1 = 2^{n-1}$. Com base nesse resultado, tomamos $h_n = 2^{n-1}y_n$ e aplicando em $h_n = 2h_{n-1} + 1$, obtemos $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}$.

Segue, portanto que:

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}$$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{2^2}$$

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{2^3}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

¹ Toda recorrência, em que x_{n+1} está em função de x_n é dita de primeira ordem, sendo considerada linear se, e só se, essa função for polinomial do primeiro grau.

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Somando, resulta

$$y_n = y_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = y_1 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Como $h_1 = 1$, uma vez que há no mínimo um movimento para transferência de um disco de uma torre para outra, temos que $1 = 2^{1-1}y_1$, isto é, $y_1 = 1$. Com isso, $y_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Substituindo o último resultado em $h_n = 2^{n-1}y_n$, concluímos que $h_n = 2^{n-1}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2^n - 1$. Logo, para n discos, com $(n > 1)$, são necessários no mínimo $2^n - 1$ movimentos. O resultado acima não apresenta uma estratégia vencedora, pois esse não era o objetivo, porém resultados mais detalhados podem ser encontrados em (Morgado; Carvalho, 2015; Silva, 2018).

Ao restringir os termos iniciais da sequência de Fibonacci para 1 e 3, e mantendo a relação que a define, obtemos a sequência de Lucas (1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...), que guarda propriedades intrigantes com a sequência da qual é derivada.

2.3.1 Definição

A sequência $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $l_{n+2} = l_{n+1} + l_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, em que $l_1 = 1$ e $l_2 = 3$ é denominada sequência de Lucas.

A tabela abaixo apresenta os 15 primeiros termos de cada uma dessas sequências, definidos para índices naturais. Os resultados apresentados podem ser exibidos com certa adaptação para índices inteiros, mas limitaremos nosso estudo apenas aos valores naturais de n .

Tabela 1 - Termos iniciais das sequências de Fibonacci e Lucas.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
l_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Notamos que há uma relação intrigante entre os termos dessa sequência e a sequência original, isto é, somos levados a conjecturar que: $l_n = f_{n+1} + f_{n-1}$, $n > 2$. A demonstração dessa relação será abordada na seção que se sucede, mas antes enunciaremos alguns resultados, inspirados em (Silva, 2017; Aquino, 2019; Alves; Borges Neto, 2010).

Segundo Silva (2017, p. 24): “Uma *sequência generalizada de Fibonacci* é qualquer sequência (x_n) , indexada nos inteiros, tal que $x_1 = p$ e $x_2 = q$, com $p, q \in \mathbb{R}$, para a qual $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ ”. É claro que se $x_1 = x_2 = 1$, então obtemos a sequência de Fibonacci, além disso, para que os termos posteriores sejam inteiros, é suficiente que os dois termos imediatamente anteriores também sejam. Devido às características dessas sequências com a original, é provável que existam mais relações entre elas, como mostra o próximo teorema.

Teorema 2.4. Se a sequência (x_n) é uma sequência generalizada de Fibonacci, então

$$x_n = x_2 f_{n-1} + x_1 f_{n-2}.$$

Demonstração: Vamos provar essa propriedade para índices naturais, deixando a cargo do leitor a extensão para n inteiro. Inicialmente, recordaremos o número de Fibonacci $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ apresentado na seção 2.2.4. Tomando $n = -1$ e $n = 0$ nessa equação, obtemos $f_{-1} = 1$ e $f_0 = 0$. Seguiremos com prova que recorre ao segundo princípio de indução². Seja $P(n)$ a afirmativa: $x_n = x_2 f_{n-1} + x_1 f_{n-2}$. Para $n = 1$ e $n = 2$, temos que $P(1)$ e $P(2)$ são válidas, pois

$P(1): x_2 f_0 + x_1 f_{-1} = x_1$ e $P(2): x_2 f_1 + x_1 f_0 = x_2$. Suponha por hipótese que para $n = 1, 2, 3, \dots, k$ as afirmações $P(1), P(2), P(3) \dots P(k)$ sejam verdadeiras. Resta provar para $n = k + 1$. Ora, $P(k - 1): x_2 f_{k-2} + x_1 f_{k-3} = x_{k-1}$ e $P(k): x_2 f_{k-1} + x_1 f_{k-2} = x_k$, somando ordenadamente as duas últimas equações, obtemos: $x_2 (f_{k-2} + f_{k-1}) + x_1 (f_{k-3} + f_{k-2}) = x_{k-1} + x_k$. Segue da definição das sequências (f_n) e (x_n) que: $f_{k-2} + f_{k-1} = f_k$, $f_{k-3} + f_{k-2} = f_{k-1}$ e $x_{k-1} + x_k = x_{k+1}$, de sorte que, $x_2 f_k + x_1 f_{k-1} = x_{k+1}$. Logo, $P(k + 1)$ também é verdadeira, e pelo princípio de indução finita é válida todo n natural. Como queríamos provar. \square

Como a sequência de Lucas, é uma sequência generalizada de Fibonacci, segue do teorema 2.4 que $l_n = l_2 f_{n-1} + l_1 f_{n-2}$, onde $l_1 = 1$ e $l_2 = 3$. Daí,

$$l_n = 3f_{n-1} + f_{n-2} \Rightarrow l_n = f_{n-1} + (f_{n-1} + f_{n-2}) = f_{n-1} + f_{n+1}.$$

Logo, $l_n = f_{n+1} + f_{n-1}$, o que prova a relação observada. Verificamos que essas sequências estão intimamente relacionadas. Além disso, não é apenas a sequência de Lucas que compartilha propriedades significativas com a sequência de Fibonacci, como veremos a seguir.

² Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade: dado $n \in \mathbb{N}$, se X contém todos os números naturais m tais que $m < n$, então $n \in X$. Nestas condições, $X = \mathbb{N}$ (Lima, 2016, p. 40).

3 SEQUÊNCIA DE PADOVAN

A sequência de Padovan recebe esse nome em homenagem ao seu autor e principal estudioso, Richard Padovan (1935). Natural da cidade de Pádua, na Itália, Padovan é arquiteto de formação e ganhou destaque por suas contribuições na aplicação da matemática à arquitetura. Embora essa sequência não possua a mesma notoriedade que a sequência de Fibonacci, ambas compartilham características semelhantes, e são retratadas como parentes próximas (Alsina; Nelson 2015 *apud* Santos 2021; Vieira, 2020).

Apesar dessa sequência ser atribuída a Padovan como uma espécie de homenagem pelas suas contribuições, ele não foi o pioneiro a se dedicar ao seu estudo. O desenvolvimento dessa sequência teve início com o holandês Hans Van der Laan (1904 - 1991), que chegou a frequentar o curso de arquitetura na Technische Hogeschool de Delf, mas o abandonou e decidiu dedicar sua vida à Deus como monge beneditino (Vieira, 2020). Segundo (Padovan, 1994 *apud* Vieira, 2020, p. 49): “assim, buscou ainda pesquisar as origens primitivas da arquitetura, estabelecendo uma ligação entre a arte da construção técnica como espaço”. Isso demonstra que o apreço de Laan pela arquitetura permaneceu inabalado, mesmo após sua decisão de desligamento.

Durante suas pesquisas, Laan se dedicou a busca por padrões de construção bastante singular, os quais serão abordados de modo mais específico posteriormente. De acordo com (Alves; Vieira, 2019):

Laan e seu irmão buscavam padrões para a arquitetura mediante experimentos com pedras e depois com materiais de construção, e acabaram por descobrir um novo padrão de medidas em que a construção se dava por intermédio de um número irracional, ideal para se trabalhar em escala geométrica e objetos espaciais (retângulos, trapézios, elipses, e etc). Este número é conhecido como número plástico ou número radiante, e foi estudado primeiramente por Gérard Cordonnier. Uma analogia é feita do número plástico em relação à música: na música podem-se tocar acordes, com o número radiante é possível compor paredes, salas e etc (Alves; Vieira, 2019, p. 164).

Até o momento, é possível notar uma conexão entre as obras desses três autores: Gérard Cordonnier, Hans Van der Laan e Richard Padovan. Este último, em 1974, foi profundamente influenciado pelos trabalhos de Van der Laan, a ponto de, utilizando sua fluência na língua holandesa, publicar uma tradução em 1983 do tratado *Architectonic Space* (Aquino, 2019; Santos, 2021). Embora Richard Padovan tenha contribuído de forma significativa para o desenvolvimento da sequência a qual o homenageia, ele não reivindicou sua autoria, atribuindo a descoberta ao monge beneditino.

A sequência de Padovan é linear e recursiva, isto é, para determinar um de seus termos é necessário conhecer termos anteriores, além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$, cada um de seus termos, é igual à soma dos dois termos que antecedem o termo imediatamente anterior ao qual se deseja determinar. Essa recursividade e seu padrão de construção, justifica o parentesco apontado entre ela e a sequência de Fibonacci. Vejamos a seguir sua definição formal.

3.1.1 Definição

Para n natural, a Sequência de Padovan $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é definida pela seguinte recorrência:

$$\begin{cases} P_0 = P_1 = P_2 = 1, \\ P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \forall n \geq 3. \end{cases}$$

Claramente é possível determinar, sem grandes dificuldades, alguns dos termos iniciais dessa sequência para valores naturais de n . Contudo, essa tarefa pode se tornar consideravelmente mais complexa na ausência do conhecimento dos dois termos que precedem imediatamente o termo anterior ao que se deseja calcular. A tabela a seguir apresenta alguns termos desta sequência.

Tabela 2 - Alguns termos da sequência de Padovan

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9
1	12	16	21	28	37	49	65	86	114	151
2	200	265	351	465	616	816	1081	1432	1897	2513
3	3329	4410	5842	7739	10252	13581	17991	23833	31572	41824
4	55405	73396	97229	128801	170625	226030	299426	396655	525456	696081

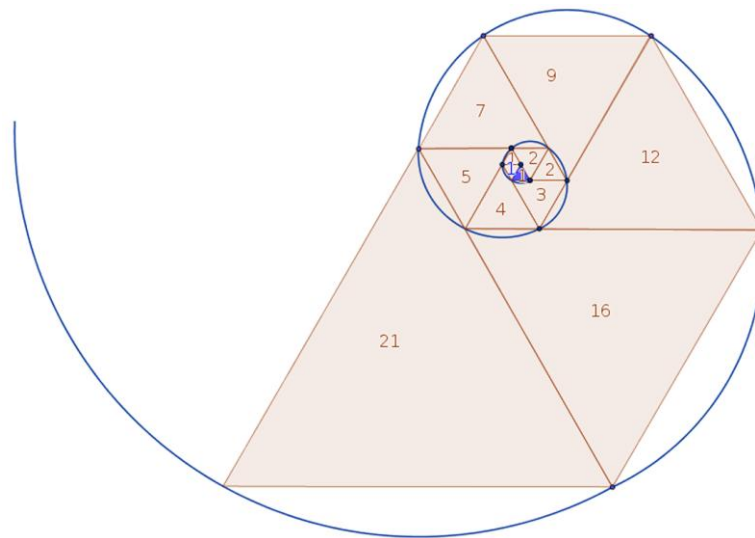
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Tabela 2, cada termo P_n é representado na forma P_{jk} , onde o algarismo j indica a linha e o algarismo k , a coluna na qual o termo está posicionado. É importante salientar que essa notação não deve ser confundida com a multiplicação de j por k . Assim, o termo P_{18} corresponde ao valor situado na linha de número 1 ($j = 1$) e coluna de número 8 ($k = 8$). Portanto, $P_{18} = 114$. Quando o algarismo j for zero, consideraremos apenas o algarismo k ,

para evitar abuso de notação. Dessa forma, os termos: $P_{00} = P_0$, $P_{01} = P_1$, $P_{02} = P_2$, e assim por diante.

A Sequência de Padovan possui também uma representação geométrica, que consiste em inicialmente justapor três triângulos equiláteros de lado um, formando um trapézio. Em seguida, é adicionado um novo triângulo equilátero ao maior lado do polígono formado, e assim por diante, gerando um espiral. Os lados dos triângulos adicionados correspondem aos termos dessa sequência. Os passos acima permitem a construção da figura abaixo.

Figura 3 - Espiral de Padovan 2D.



Fonte: Vieira (2020, p. 55).

É possível associar a definição da sequência de Padovan a parâmetros negativos. Nesse contexto, seja P_n o n -ésimo número de Padovan, segue que a recorrência $P_{-k} = P_{-k+3} - P_{-k+1}$, com $k \in \mathbb{N}$, representa uma extensão da sequência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para números negativos. Isso pode ser facilmente verificado, pois, por definição $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Como essa definição é válida para todo $n \geq 3$, podemos reescrevê-la da seguinte forma: $P_{n+3} = P_{n+1} + P_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Subtraindo P_{n+1} , em ambos os membros da última equação e reordenando os valores, teremos $P_n = P_{n+3} - P_{n+1}$. Agora, basta tomar $n = -k$, como $k \in \mathbb{N}$, e o resultado segue. Portanto, essa relação oferece uma extensão da sequência de Padovan para índices inteiros negativos (Aquino, 2019; Vieira, 2020; Santos, 2021). Nesse trabalho, entretanto, limitaremos a análise dessa sequência apenas para índices naturais.

A sequência de Padovan apresenta aplicação e grande utilidade em diferentes áreas, como por exemplo na arquitetura. Além disso, essa sequência sugere conexões com outros tópicos da matemática, como a teoria dos grupos finitos, que será objeto de análise de outro

capítulo. Neste momento, destacaremos algumas das propriedades da sequência de Padovan, inspiradas nos trabalhos de (Ferreira, 2015; Aquino, 2019; Vieira, 2020; Santos, 2021).

3.1.2 Propriedades

Propriedade 1. Para todo $n \geq 5$, a diferença em módulo, entre dois termos consecutivos na sequência de Padovan é P_{n-5} .

Demonstração: Sendo $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência não-decrescente, segue que $P_{n-1} \leq P_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ou seja, $P_n - P_{n-1} \geq 0$, e portanto, $|P_n - P_{n-1}| = P_n - P_{n-1}$. Resta provar que $P_n - P_{n-1} = P_{n-5}$. De fato, como $n \geq 5$, segue da definição recursiva da sequência de Padovan que: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, $P_{n-1} = P_{n-3} + P_{n-4}$ e $P_{n-2} = P_{n-4} + P_{n-5}$. Assim, fazendo algumas adaptações convenientes, concluímos que:

$$P_n - P_{n-1} = P_{n-2} + P_{n-3} - (P_{n-3} + P_{n-4}) = P_{n-2} - P_{n-4} = P_{n-4} + P_{n-5} - P_{n-4} = P_{n-5}. \quad \square$$

Propriedade 2. A soma dos n primeiros números da sequência de Padovan de índices par é $P_{2n+1} - 1$.

Demonstração: Por definição a sequência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dada por: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, para valores iniciais de $P_0 = P_1 = P_2 = 1$. Portanto, segue da definição de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que $P_{n-3} = P_n - P_{n-2}$. Note que:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_3 - P_1 \\ P_2 &= P_5 - P_3 \\ P_4 &= P_7 - P_5 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ P_{2(n-1)} &= P_{2n+1} - P_{2n-1} \end{aligned}$$

O resultado acima nos possibilita reescrever cada termo de índice par dessa sequência como a diferença entre dois termos consecutivos de índice ímpar, isto é,

$$P_0 + P_2 + P_4 + \dots + P_{2(n-1)} = (P_3 - P_1) + (P_5 - P_3) + (P_7 - P_5) + \dots + (P_{2n+1} - P_{2n-1}).$$

Reordenando cada parcela e simplificando os valores convenientes, obtemos:

$$P_0 + P_2 + P_4 + \dots + P_{2(n-1)} = P_{2n+1} - P_1. \text{ Ora, } P_1 = 1. \text{ Portanto,}$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} P_{2r} = P_{2n+1} - 1.$$

O que conclui a demonstração. □

Propriedade 3. A soma dos n primeiros números da sequência de Padovan de índices ímpar é $P_{2n+2} - 1$.

Demonstração: A prova decorre de modo análogo ao da Propriedade 2. Reescrevemos cada termo de índice ímpar como a diferença entre dois termos consecutivos de índice par, ou seja,

$$P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1} = (P_4 - P_2) + (P_6 - P_4) + (P_8 - P_6) + \cdots + (P_{2n+2} - P_{2n}).$$

Reordenando cada parcela e simplificando os valores convenientes, concluiremos que

$$\sum_{r=0}^{n-1} P_{2r+1} = P_{2n+2} - 1$$

□

Cabe ressaltar, que essas propriedades também podem ser verificadas utilizando indução matemática, conforme apresentada por Aquino (2019).

Propriedade 4. Seja P_n o n -ésimo termo da sequência de Padovan. Então,

$$\sum_{r=0}^n P_r = P_{n+5} - 2.$$

Demonstração: Prova por indução sobre n . Para $n = 0$ é óbvio, já que $P_0 = P_{0+5} - 2 = 1$, o mesmo ocorre para $n = 1$, i.e., $P_0 + P_1 = 1 + 1 = P_{1+5} - 2 = 2$. Suponhamos, por hipótese, que para $n \in \mathbb{N}$ a sentença seja válida, ou seja,

$$\sum_{r=0}^n P_r = P_{n+5} - 2.$$

Resta provar para $n + 1$. Ora,

$$\sum_{r=0}^{n+1} P_r = \left(\sum_{r=0}^n P_r \right) + P_{n+1} \Rightarrow \sum_{r=0}^{n+1} P_r = (P_{n+5} - 2) + P_{n+1}.$$

Note que:

$$\begin{aligned} (P_{n+5} - 2) + P_{n+1} &= (P_{n+3} + P_{n+2} - 2) + P_{n+1} \\ &= P_{n+3} + (P_{n+2} + P_{n+1}) - 2 \\ &= P_{n+3} + P_{n+4} - 2 \\ &= P_{n+6} - 2 \\ &= P_{(n+1)+5} - 2. \end{aligned}$$

Pela análise das igualdades acima, conclui-se que a sentença também é válida para $n + 1$. Portanto, pelo princípio de indução finita, tem sua validade comprovada para todo n natural, conforme desejado. □

Fica evidente que dessa sequência podem ser extraídas outras identidades. No entanto, deixamos essa investigação como um incentivo ao leitor mais curioso. Passaremos agora a refletir sobre o comportamento da sequência quando dividimos um termo pelo

imediatamente anterior a ele. Para fins de visualização, exibiremos na tabela a seguir, alguns desses resultados com precisão de até duas casas decimais, utilizando quando necessário os critérios de arredondamento previsto na Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Tabela 3 - Razão entre termos consecutivos da sequência de Padovan.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P_n	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37
$\frac{P_{n+1}}{P_n}$	1	1	2	1	1,5	1,33	1,25	1,4	1,28	1,33	1,33	1,31	1,33	1,32	1,32

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Assim, ao considerar a sequência formada pelas razões entre termos consecutivos da sequência de Padovan, conforme apresentada na tabela 3, é razoável conjecturar que tal sequência é limitada. Mais precisamente, seja $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência definida por $k_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$, em que P_n denota n-ésimo termo da sequência de Padovan. Então, $1 \leq k_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Com efeito, dado que $P_{n+1} \geq P_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, segue que ao dividir essa última desigualdade por P_n , obtemos: $\frac{P_{n+1}}{P_n} \geq 1$, ou, de forma equivalente, $\frac{P_n}{P_{n+1}} \leq 1$. Além disso, por definição, $P_{n+1} = P_{n-1} + P_{n-2}$, o que nos leva ao seguinte resultado:

$$k_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{P_{n-1} + P_{n-2}}{P_n} = \frac{P_{n-1}}{P_n} + \frac{P_{n-2}}{P_n} \leq 1 + 1 = 2.$$

Portanto, com base nas relações obtidas, conclui-se que $1 \leq k_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$, tornando agora, o que conjecturamos, um fato.

Assim como ocorre com a sequência de Fibonacci, cuja razão entre um termo e o seu antecessor, converge para o chamado número de ouro, uma constante muito recorrente em diversas estruturas naturais e artísticas, devido a sua simetria singular, é possível que algo análogo também possa ocorrer com a sequência de Padovan, conforme é sugerido pela tabela 3. De fato, isso se confirma e essa razão tende a uma constante conhecida como número plástico, onde a análise é apresentada a seguir.

3.2 Número Plástico

O monge beneditino Hans Van der Laan, insatisfeito com as limitações impostas pela proporção áurea, desenvolveu um novo sistema de medida, o qual denominou de Número Plástico, também conhecido como Número Radiante. Tanto o número de ouro quanto o número

plástico são chamados de números mórficos (Aarts, J; Fokkink, R; Kruijtzter, G, 2001; Ferreira, 2015). Os números radiantes foram estudados de forma pioneira por Gérard Cordonnier, arquiteto francês, que em 1924 apresentou essa descoberta, enquanto na época, ainda era estudante de arquitetura, e o denotou pela letra grega ψ (*psi*) (Padovan, 1994 *apud* Ferreira, 2015; Vieira, 2020).

Embora o estudo desses números tenha sido inicialmente introduzido por Cordonnier, foi Laan quem evidenciou sua relação com uma equação cúbica, além de explorar como tais valores se articulam com a percepção humana, buscando não apenas à beleza estética, mas também à clareza de percepção, conforme aponta Ferreira (2015).

foi Hans van der Laan quem explicou como este número se relaciona com a percepção humana de diferenças de tamanhos entre objetos tridimensionais, de modo que sua derivação de uma equação cúbica, e não de uma quadrática como o número de ouro, se torna uma resposta tridimensional ao nosso mundo, sendo sua principal premissa a relação do mesmo ser verdadeiramente estética no sentido grego original, ou seja, que sua preocupação não é beleza, mas a clareza de percepção (Ferreira, 2015, p. 47).

Tomando um segmento, digamos \overline{AB} , Laan o dividiu em três partes, de modo semelhante ao que foi feito para a determinação da razão áurea, resultando na equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$, que possui uma única raiz real, o número plástico (Ferreira, 2015; Vieira, 2020). Esses conceitos são descritos formalmente a seguir, inicialmente apresentando uma definição algébrica e depois uma geométrica.

3.2.1 Definição (Algébrica)

O número plástico corresponde à única raiz real da equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$, e pode ser expresso do seguinte modo:

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}} \cong 1,3247179572447460259609085 \dots$$

A definição acima nos fornece informação preciosa, mas ela pouco justifica a representação da constante plástica ψ em função desses radicais, o que nos leva a recorrer a fórmula de Cardano, também referida por alguns autores como fórmula de Cardano-Tartaglia³. De acordo com Lima (1987) a quantidade de raízes reais e complexa da equação do tipo

³ Dada a equação $x^3 + px + q = 0$, uma de suas raízes é determinada pela seguinte expressão:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \text{ em que } D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \text{ é chamado de discriminante.}$$

$Q(x) = x^3 + px + q = 0$, pode ser identificada pela análise do discriminante $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, que para efeito de organização, representaremos essas informações na tabela 4.

Tabela 4 - Quantidade de raízes da equação $x^3 + px + q = 0$.

Discriminante - D	Equação - $Q(x)$
$D < 0$	Possui três raízes reais e distintas.
$D = 0$	Possui todas as raízes reais, sendo uma repetida.
$D > 0$	possui uma raiz real e duas complexas conjugadas.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Retornando a equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$, temos que $p = q = -1$, o que implica em $D = \frac{23}{108} > 0$. Portanto, conforme indicado na tabela 4, essa equação admite uma única raiz real e um par de raízes complexas conjugadas.

A fim de identificar a raiz real da equação cúbica supracitada, aplicaremos a fórmula de Cardano-Tartaglia. Substituindo, $p = q = -1$ em

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

obtemos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{9}\right) + \sqrt{\frac{23}{108} \cdot \left(\frac{3}{3}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{9}\right) - \sqrt{\frac{23}{108} \cdot \left(\frac{3}{3}\right)}}.$$

Portanto, $\psi = x = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}} \approx 1,32$ (constante plástica).

Para Voet; Schoonjans (2012, p.255 *apud* Vieira, 2020, p.50): “seu número plástico possui o vigor do seu próprio sistema proporcional, sendo testado e usado por arquitetos e matemáticos”.

A construção dessa constante pode ser determinada geometricamente, como vemos a seguir.

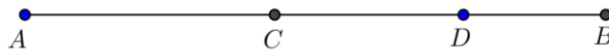
3.2.2 Definição (Geométrica)

Dado um segmento \overline{AB} , dizemos que este segmento está dividido na razão plástica pelos pontos C e D de AB, quando a seguinte igualdade é verificada:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}.$$

Veja figura 4.

Figura 4 - Divisão de um segmento em três partes por Van Der Laan.



Fonte: Ferreira (2015, p. 54).

Para fins de verificação, consideraremos o segmento \overline{AB} como sendo unitário. Denotaremos, respectivamente, os segmentos \overline{AD} e \overline{BC} , por p e q . Daí, segue que $\overline{AC} = 1 - q$, $\overline{BD} = 1 - p$ e $\overline{CD} = q + p - 1$. Assim, as razões acima podem ser reescritas do seguinte modo:

$$\frac{1}{p} = \frac{p}{q} = \frac{q}{1 - q} = \frac{1 - q}{q + p - 1} = \frac{q + p - 1}{1 - p}.$$

Pelas propriedades das proporções, obtemos que: $q = p^2$ e $q^2 = p - p \cdot q$. Segue das duas últimas equações que $p^4 = p - p^3 \Rightarrow p^3 = 1 - p^2$ (*). Ora, $p > 0$, uma vez que $p = \overline{AD}$, de sorte que, ao dividir (*) por p^3 , teremos $1 = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p}$. Portanto, tomando $x = \frac{1}{p} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$ em nossa última equação, e fazendo as simplificações convenientes, obtemos:

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Note que a raiz real dessa equação é a constante plástica, e sendo as medidas dos segmentos expressas por números reais, as razões entre esses comprimentos também serão, i.e.,

$$\psi = x = \frac{1}{p} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}.$$

Ferreira (2015, p.54) comenta que: “a razão entre dois segmentos dos determinados, de modo que o segundo seja o imediatamente menor que o primeiro escolhido é a constante plástica ψ ”.

Antes de enunciarmos o teorema que estabelece a relação entre o limite da razão entre termos consecutivos da sequência de Padovan e a constante plástica, destacamos dois resultados auxiliares. Para fins de organização, esses resultados serão identificados como proposições. A primeira proposição, cuja demonstração será omitida, expressa os termos da

sequência de Padovan em função das raízes da equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$, e a segunda apresenta uma limitação para razões entre essas raízes, como apresentamos a seguir.

Proposição 3.1 - Sejam α, β e ψ as raízes da equação $x^3 - x - 1 = 0$. Então os termos P_n da sequência de Padovan são dados por: $P_n = a \cdot \psi^n + b \cdot \alpha^n + c \cdot \beta^n$, em que

$$a = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(\psi-\alpha)(\psi-\beta)}, b = \frac{(1-\psi)(1-\beta)}{(\alpha-\psi)(\alpha-\beta)} \text{ e } c = \frac{(1-\psi)(1-\alpha)}{(\beta-\psi)(\beta-\alpha)} \text{ (Ferreira, 2015, p. 71).}$$

Os valores α e β representam as raízes complexas da equação $x^3 - x - 1 = 0$.

A demonstração da proposição 3.1 pode ser encontrada em Ferreira (2015).

Proposição 3.2 – Se α, β e ψ são raízes da equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$, então $\left|\frac{\alpha}{\psi}\right| < 1$ e $\left|\frac{\beta}{\psi}\right| < 1$, sendo ψ o número plástico.

Demonstração: Como α, β e ψ são raízes de $x^3 - x - 1 = 0$, podemos reescrever essa equação em sua forma fatorada, obtemos:

$$\begin{aligned} x^3 - x - 1 &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \psi) \\ &= x^3 - (\alpha + \beta + \psi)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\psi + \beta\psi)x - \alpha\beta\psi. \end{aligned}$$

Comparando as igualdades acima, segue que $\alpha + \beta + \psi = 0$, $\alpha\beta + \alpha\psi + \beta\psi = -1$ e $\alpha\beta\psi = 1$. Como mencionado anteriormente, essa equação admite uma única raiz real, a qual denotamos por ψ (psi) e duas raízes complexas conjugadas, que nesse caso são α e β . Daí, note que $\alpha \cdot \beta > 0$, pois são números complexos, sendo um conjugado do outro, o que implica que, $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$, e $\psi \simeq 1,32 > 0$. Assim, temos:

$$\left|\frac{\alpha}{\psi}\right| = \frac{|\alpha|}{|\psi|} = \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\psi}.$$

Ora, $\alpha + \beta + \psi = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -\psi$ e $\alpha\beta + \alpha\psi + \beta\psi = -1 \Rightarrow \alpha\beta = -\alpha\psi - \beta\psi - 1$.

Substituindo $(\alpha\beta)$ e $(\alpha + \beta)$ por $(-\alpha\psi - \beta\psi - 1)$ e $(-\psi)$, respectivamente, em $\frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\psi}$, obtemos

após simplificações convenientes que: $\left|\frac{\alpha}{\psi}\right| = \frac{\sqrt{\psi^2 - 1}}{\psi} = \sqrt{\frac{\psi^2 - 1}{\psi^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\psi^2}} < 1$. Portanto, o

nosso primeiro resultado está provado e, procedendo de modo análogo, conclui-se que $\left|\frac{\beta}{\psi}\right| < 1$.

Como queríamos demonstrar. \square

Teorema 3.1 Se $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e ψ são, respectivamente, a sequência de Padovan e a constante plástica, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \psi$.

Demonstração: Com efeito, segue da proposição 3.1 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \psi^{n+1} + b \cdot \alpha^{n+1} + c \cdot \beta^{n+1}}{a \cdot \psi^n + b \cdot \alpha^n + c \cdot \beta^n}.$$

Ao Simplificar esse último resultado por $\psi^n > 0$, podemos reescrever esse limite do seguinte modo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \psi + b \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\alpha}{\psi}\right)^n + c \cdot \beta \cdot \left(\frac{\beta}{\psi}\right)^n}{a + b \cdot \left(\frac{\alpha}{\psi}\right)^n + c \cdot \left(\frac{\beta}{\psi}\right)^n}.$$

De sorte que, a proposição 3.2 permite determinar $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{\psi}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\psi}\right)^n = 0$. Dessa forma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \psi + b \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\alpha}{\psi}\right)^n + c \cdot \beta \cdot \left(\frac{\beta}{\psi}\right)^n}{a + b \cdot \left(\frac{\alpha}{\psi}\right)^n + c \cdot \left(\frac{\beta}{\psi}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a\psi}{a} = \psi.$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \psi$ (número plástico), o que conclui a demonstração. \square

O Teorema 3.1 constitui um dos pontos chaves desse trabalho, ao estabelecer uma relação entre o padrão de medida estudado por Laan e posteriormente aprimorado por Padovan. Além disso, com algumas adaptações de resultados, mostra-se que a equação característica associada à sequência de Padovan é $x^3 - x = 1$. O próximo capítulo aborda essa sequência sobre uma nova ótica, a teoria dos grupos finitos.

4 SEQUÊNCIA DE PADOVAN E GRUPOS FINITOS

Neste capítulo, faremos uma análise da relação entre a sequência de Padovan e Grupos Finitos, buscando identificar o elo entre o comportamento dos possíveis padrões cíclicos dessa sequência e os conceitos associados a esses grupos (Sousa *et al.*, 2024). Esta análise será conduzida por meio de congruências modulares. Conforme observado por Sousa *et al.* (2024), que ao identificar ausências de estudos que investigassem as relações entre a sequência de Padovan e a teoria dos grupos finitos sob a ótica das congruências modulares, desenvolveu em seu trabalho, todo o aporte teórico necessário.

Inspirado nos trabalhos de (Santos, 2015; Gonçalves, 2015; Garcia; Lequain, 2015; Sousa *et al.*, 2024), realizaremos a investigação previamente mencionada. Entretanto, é necessário recorrer a alguns resultados elementares de teoria dos números e dos grupos finitos, conforme indicado nas seções subsequentes.

4.1 Noções elementares de Teoria dos Números

A teoria dos Números é um ramo da matemática que investiga principalmente as propriedades associadas a números inteiros, como por exemplo o conceito de divisibilidade.

4.1.1 Definição (Divisibilidade em \mathbb{Z})

Sejam a e b dois inteiros, com $a \neq 0$, dizemos que a divide b , e denotamos por $a|b$, se existe um inteiro q tal que $b = aq$.

Além disso, se a divide b , diz-se que a é divisor de b , que b é um múltiplo de a , ou ainda, que b é divisível por a e, caso a não divida b , escrevemos $a \nmid b$.

Assim, observa-se que $P_5|P_{10}$, uma vez que $P_{10} = P_5 \cdot P_6$ (veja tabela 2). No entanto, $P_6 \nmid P_{12}$, pois não existe número inteiro cujo produto por um número par, resulte em um número ímpar.

Propriedade 4.1.2 Sejam a, b e c números inteiros. Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(bx + cy)$, para quaisquer x, y inteiros.

Demonstração: De fato, se $a|b$ e $a|c$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $b = ak_1$ e $c = ak_2$. De sorte que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$, temos: $bx + cy = (ak_1)x + (ak_2)y = a(k_1x + k_2y)$. Ora, $k_1x + k_2y \in \mathbb{Z}$. Portanto, tomando $q = k_1x + k_2y$, o resultado segue, i.e., $a|(bx + cy)$. \square

Note que $4|16$ e $4|28$ então, pelo resultado anterior, $4|(16x + 28y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$. Como é óbvio.

A próxima definição estabelece um novo método de representar divisões entre inteiros. Parte dos resultados apresentados a seguir, foi proposto por Gauss (1777 - 1855) em seu trabalho *Disquisitiones Arithmeticae*, publicado em 1801 aos seus 24 anos (Santos, 2015).

4.1.3 Definição (Congruência)

Sejam a, b e m números inteiros, com $m > 0$. Dizemos que a é congruente a b módulo m , se $m|(a - b)$ e, denotamos por $a \equiv b \pmod{m}$. Caso contrário, isto é, se $m \nmid (a - b)$ dizemos que a é incongruente a b módulo m , e escrevemos $a \not\equiv b \pmod{m}$.

A relação de congruência estabelecida no conjunto dos números inteiros configura-se como uma relação de equivalência, conforme pode-se verificar na propriedade 4.1.4 apresentada a seguir (Santos, 2015).

Propriedade 4.1.4 Se a, b e m são números inteiros, com $m > 0$ então é verdade que:

- (i) $a \equiv a \pmod{m}$ (Reflexiva);
- (ii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$ (Simétrica);
- (iii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$ (Transitiva).

Demonstração:

(i): Basta provar que $m|0$. De fato, como $0 = m \cdot 0$ e $0 \in \mathbb{Z}$, o resultado segue. Ora, $0 = a - a$. Portanto, $m|(a - a)$, o que é equivalente a $a \equiv a \pmod{m}$.

(ii): Pelo fato de $a \equiv b \pmod{m}$, temos que $m|(a - b)$, o que implica na existência de um inteiro q_1 , tal que $a - b = mq_1$. Multiplicando ambos os membros da última equação e reordenando as parcelas, obtemos: $b - a = m(-q_1)$. Ora, $-q_1 \in \mathbb{Z}$. Logo, $b \equiv a \pmod{m}$.

(iii): Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então existem inteiros q_1 e q_2 , tais que $a - b = mq_1$ e $b - c = mq_2$. Somando ordenadamente as duas últimas equações, obtemos: $a - c = m(q_1 + q_2)$, com $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$, de sorte que, $m|(a - c)$. Logo, $a \equiv c \pmod{m}$. \square

É fácil ver que se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + c \pmod{m}$, $a - c \equiv b - c \pmod{m}$ e $ac \equiv bc \pmod{m}$, ou seja, podemos somar, subtrair ou multiplicar uma congruência por um número inteiro qualquer, mantendo os valores obtidos ainda sim congruentes. O próximo teorema nos fornece a possibilidade de relacionar duas congruências de mesmo módulo.

Teorema 4.1 Sejam a, b e m são números inteiros, com $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então

$$(i) \quad a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

$$(ii) \quad a - c \equiv b - d \pmod{m}$$

$$(iii) \quad ac \equiv bd \pmod{m}$$

Demonstração:

(i) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então existem inteiros q_1 e q_2 , tais que $a - b = mq_1$ e $c - d = mq_2$. Somando ordenadamente as duas últimas equações, obtemos:

$(a + c) - (b + d) = m(q_1 + q_2)$, com $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$. Portanto, $m \mid [(a + c) - (b + d)]$, o que implica em $a + c \equiv b + d \pmod{m}$. De modo análogo prova-se (ii), ou seja, ao invés de tomar a soma entre as duas equações, basta considerar a diferença entre elas.

(iii): Multiplicando $a - b = mq_1$ e $c - d = mq_2$ respectivamente, por c e b , obtemos:

$$\left. \begin{array}{l} ac - bc = m(q_1c) \\ bc - bd = m(q_2d) \end{array} \right\} \Rightarrow ac - bd = m(q_1c + q_2d) \Rightarrow m \mid (ac - bd).$$

Logo, $ac \equiv bd \pmod{m}$. Como queríamos demonstrar. \square

Agora, vamos explorar como esses resultados podem ser aplicados em diferentes situações-problema.

Exemplo 4.1 (Apostila do PIC “Encontro de Aritmética” - Exercício 21 - p. 44): Sabe-se que 503 e 418 deixam restos 7 e 2 quando divididos por 8, respectivamente. Quais são os restos das divisões de $503 + 418$, $503 - 418$ e $503 \cdot 418$ por 8?

Solução: Segue do enunciado que $503 \equiv 7 \pmod{8}$ e $418 \equiv 2 \pmod{8}$. Daí, pelo Teorema 4.1, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 503 + 418 \equiv 7 + 2 \pmod{8} \\ 503 - 418 \equiv 7 - 2 \pmod{8} \\ 503 \cdot 418 \equiv 7 \cdot 2 \pmod{8} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 503 + 418 \equiv 1 \pmod{8} \\ 503 - 418 \equiv 5 \pmod{8} \\ 503 \cdot 418 \equiv 6 \pmod{8} \end{array} \right.$$

Logo, a soma, a subtração e o produto entre 503 e 418, quando dividido por 8, deixam restos iguais a 1, 5 e 6, respectivamente. \square

Exemplo 4.2 (Apostila do PIC “Encontro de Aritmética” - Exercício 24 - p. 44): Se o resto da divisão de a por 7 é igual a 3, então qual é o resto da divisão de $5a$ por 7?

Solução: Dado que $a \equiv 3 \pmod{7}$, segue que $5a \equiv 5 \cdot 3 = 15 \pmod{7}$. Como $15 \equiv 1 \pmod{7}$, concluímos que $5a \equiv 1 \pmod{7}$. Em outras palavras, o produto $5a$ deixa resto 1 quando dividido por 7. \square

Exemplo 4.3 (UECE - Prova II - Matemática - Vestibular 2019.2 - 2ª fase, q.1): Se o resto da divisão do número inteiro positivo b por 7 é igual a 5, então, o resto da divisão do número $b^2 + b + 1$ por 7 é igual a:

Solução: Note que $b \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow \begin{cases} 5b \equiv 25 \equiv 4 \pmod{7} \\ b^2 \equiv 5b \pmod{7} \end{cases}$. Assim, os resultados obtidos

garantem que $b^2 + b + 1 \equiv 4 + 5 + 1 \equiv 10 \pmod{7}$. Logo, $b^2 + b + 1 \equiv 3 \pmod{7}$, de sorte que, o resto dessa divisão por 7 é 3. \square

A noção de congruência é essencial para resolver diversos problemas envolvendo números inteiros, pois possibilita uma maneira simples e objetiva de abordar essas questões. Além disso, há uma relação entre congruência modular e grupos finitos, sendo esta e outras análises objeto das seções subsequentes. Para tanto, faz-se necessário, antes, o estudo das noções elementares de grupos finitos.

4.2 Teoria dos Grupos Finitos

A Teoria dos Grupos é ramo da Álgebra Abstrata que consiste no estudo de estruturas algébricas denominadas de grupos. Sua aplicação não se limita apenas a Matemática, mas também a outras disciplinas, como por exemplo a Física e a Química.

De acordo com Souza (2012):

A teoria dos grupos tem sua origem no trabalho do matemático francês Évariste Galois (1811-1832) sobre a solubilidade por radicais de equações polinomiais. Outros matemáticos, dentre eles o suíço Leonard Euler (1707-1783), o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813), o norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829), e o italiano Paolo Ruffini (1765-1822), também colaboraram para o crescimento desta área, com contribuições na teoria das equações algébricas, na teoria de números e na geometria (Souza, 2012. p. 72).

O mesmo autor sugere que a primeira grande fase da teoria dos grupos finitos tem o seu ápice um período antes da primeira guerra mundial (1914-1918) com os trabalhos dos matemáticos Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), William Burnside (1852-1927) e Issai Schur (1875-1936), de nacionalidades Alemã, Inglesa e Bielorrusso, respectivamente (Souza, 2012).

O conceito de grupo foi sendo aperfeiçoado com o tempo até chegar a uma definição moderna aceitável, atribuída ao britânico Arthur Cayley (1821-1895) (Souza, 2012), o que nos leva a seguinte definição.

Seja G um conjunto não vazio, dotado de uma operação $*$ entre seus pares, de modo que para cada par de elementos (a, b) de G é possível associar um único elemento c também

em G , de modo que $c = a * b$ (Gonçalves, 2015). De maneira equivalente, essa afirmação pode ser representada por,

$$\begin{aligned} * : G \times G &\mapsto G \\ (a, b) &\mapsto a * b. \end{aligned}$$

4.2.1 Definição (Grupos)

Dizemos que o par $(G, *)$ é um **grupo**, quando satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) (Associativa) $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$.
- (ii) (Existência do elemento neutro) $\exists e \in G$, tal que $a * e = e * a = a, \forall a \in G$.
- (iii) (Existência do inverso) $\forall a \in G, \exists b \in G$, tal que $a * b = b * a = e$.

É fácil ver que o elemento neutro é único. De fato, se e_1 também for elemento neutro de G , então $e = e * e_1 = e_1 * e$, pois $e \in G$. Por outro lado, e é o elemento neutro de G e $e_1 \in G$, portanto, $e_1 * e = e * e_1 = e_1$. Logo, $e = e_1$. Provaremos agora que dado um elemento $a \in G$, existe um único elemento b também em G , que é inverso de a . Com efeito, suponhamos que existam $b_1, b_2 \in G$ tais que $a * b_1 = b_1 * a = e, a * b_2 = b_2 * a = e, \forall a \in G$. Logo, $b_1 = e * b_1 = (b_2 * a) * b_1 = b_2 * (a * b_1) = b_2 * e = e * b_2 = b_2$. \square

O elemento inverso b costuma ser denotado por a^{-1} sendo ele o inverso do elemento a em relação a operação $*$ (Gonçalves, 2015).

Caso o grupo $(G, *)$ possua a seguinte propriedade:

- (iv) (Comutativa) $a * b = b * a, \forall a, b \in G$,

dizemos que o esse grupo é abeliano, em homenagem ao matemático Niels Abel (1802-1829).

Vejamos alguns exemplos de grupos.

Exemplo 4.4 \mathbb{Z} é um grupo aditivo infinito (Santos, 2015).

Solução: De fato, note que dados $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, temos que $a + b \in \mathbb{Z}$, logo ele é fechado em relação a operação de adição. Verificaremos as propriedades:

- (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$, para quaisquer a, b e $c \in \mathbb{Z}$.
- (ii) Existe o elemento 0 em \mathbb{Z} , tal que para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos que $a + 0 = 0 + a = a$.
- (iii) Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a \in \mathbb{Z}$, de modo que $a + (-a) = -a + a = 0$.

Logo, o par $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo, além disso, como $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{Z}$, ele é abeliano.

Exemplo 4.5 Prove que, para todo $m \in \mathbb{N}$, o par $(\mathbb{Z}_m, +)$ é um grupo abeliano.

Demonstração: Com efeito, lembre-se que o conjunto \mathbb{Z}_m é constituído por todas as classes de restos módulo m , i.e., $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$. Esse conjunto é obviamente não vazio, pois todo número inteiro múltiplo de m , pertence a $\bar{0}$. Além disso, assumiremos que dados $\bar{x}, \bar{y} \in$

\mathbb{Z}_m , $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$ ⁴. Daí, observe que $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m \implies \bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$, ou seja, \mathbb{Z}_m é fechado em relação a operação de adição. Resta agora provar as propriedades que caracterizam um grupo.

- (i) $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} + \overline{(y + z)} = \overline{x + (y + z)}$, como a soma é associativa em \mathbb{Z} , temos: $\overline{x + (y + z)} = \overline{(x + y) + z} = \overline{(x + y)} + \bar{z} = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}, \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_m$.
- (ii) Existe o elemento $\bar{0}$ em \mathbb{Z}_m , tal que para todo $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$, temos que $\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$.
- (iii) Para todo $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$, existe $\overline{-x} \in \mathbb{Z}_m$, de modo que $\bar{x} + \overline{-x} = \overline{x + (-x)} = \bar{0}$
- (iv) Para todo $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_m$, temos que $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$, e como a soma é comutativa em \mathbb{Z} , segue que $\bar{x} + \bar{y} = \overline{y + x} = \bar{y} + \bar{x}$.

Portanto, as propriedades (i), (ii) e (iii) garantem que o par $(\mathbb{Z}_m, +)$ é um grupo, e a última propriedade, prova que ele é abeliano. \square

O exemplo 4.5 apresenta um grupo finito e cíclico, cujas definições formais serão dadas a seguir, além disso, abordaremos também o conceito de subgrupo.

4.2.2 Subgrupos

Segundo Gonçalves (2015, p. 126): “Sejam G um grupo e H um subconjunto não vazio de G . Dizemos que H é um subgrupo de G se H for ele próprio um grupo com a mesma operação de G ”. Claramente, são condições necessárias para que isso ocorra que o elemento neutro de G deve também ser o elemento neutro de H . Além disso, para quaisquer $x, y \in H$, deve-se verificar que $x * y \in H$.

Gonçalves (2015) destaca que essas condições, embora necessárias, não são suficientes. Por exemplo, ao considerarmos o par $(\mathbb{Z}, +)$, que constitui um grupo, e o conjunto $H = \mathbb{N} \cup \{0\}$, observa-se que H é um subconjunto de \mathbb{Z} , porém o par $(H, +)$ não configura um grupo, já que não apresenta elemento neutro. Algumas equivalências podem ser verificadas para comprovar que um subconjunto H de um grupo G , também é grupo, esse fato pode ser encontrado em (Gonçalves, 2015; Garcia; Lequain, 2015). O próximo resultado exibe uma condição para que um grupo seja finito.

⁴ Esse fato pode ser facilmente verificado com base nos elementos do teorema 4.1, no entanto, uma demonstração detalhada desse resultado pode ser encontrada em Gonçalves (2015, p. 29).

4.2.3 Definição (Grupos Finitos)

Um grupo $(G, *)$ é dito um **grupo finito**, quando o conjunto G também for, e nesse caso, designamos a ordem de G como sendo o número $|G|$ de elementos de G .

Como mencionado, o grupo $(\mathbb{Z}_p, +)$ é finito, pois o conjunto \mathbb{Z}_p é finito. Vejamos agora um resultado complementar associados a subgrupos gerados por um subconjunto.

4.2.4 Definição (Subgrupos gerados por um subconjunto)

Seja H um subconjunto não vazio de um grupo G . O subgrupo gerado por H será representado por $\langle H \rangle$. Quando $H = \{h\}$, escrevemos $\langle h \rangle$. O subgrupo $\langle H \rangle$ pode ser escrito como o conjunto de todos os produtos dos elementos de H e seus inversos, isto é,

$$\langle H \rangle = \{h_1 h_2 h_3 \dots h_n; n \in \mathbb{N}, h_i \in H \text{ ou } h_i \in H^{-1}\}, \text{ em que } H^{-1} = \{h^{-1}; h \in H\}$$

(Garcia; Lequain, 2015; Sousa *et al.*, 2024).

A verificação desse fato pode ser consultada em Garcia; Lequain (2015, p. 145). Passaremos a mais uma definição, agora relacionada grupos cíclicos.

4.2.5 Definição (Grupos cíclicos)

Um grupo G é dito cíclico quando ele for possível ser gerado por um de seus elementos, ou seja, $G = \langle g \rangle$, para algum $g \in G$.

Segundo Sousa *et al.* (2024):

[...] um grupo G é dito cíclico quando este é gerado por um único elemento $\langle g \rangle$, chamado gerador do grupo. Nos grupos cíclicos todos os elementos de G são potências de g . Se o grupo G é igual ao subgrupo gerado por a , isto é, $G = \langle a \rangle$, então dizemos que G é cíclico e que a é um gerador de G . Isso significa que todos os elementos de G podem ser expressos como potências de a e seus inversos (Sousa *et al.*, 2024, p.6).

A concepção de grupo cíclico constitui um dos pilares deste capítulo, dado que a análise de padrões na sequência de Padovan será elaborada com base na teoria dos grupos finitos. Tal abordagem busca identificar simetrias observáveis nessa sequência por meio da congruência modular (Sousa *et al.*, 2024). O teorema subsequente propõe a associação da sequência de Padovan a uma nova sequência, a qual se revela periódica.

Teorema 4.2 Seja $P_i^{(m)}$ a sequência de Padovan *mod m*. Então, $P_n^{(m)}$ é a forma simplesmente periódica da sequência de Padovan (Tas; Karaduman, 2014 *apud* Sousa *et al.*, 2024).

O teorema 4.2, cuja demonstração será omitida, mas pode ser consultada em (Tas; Karaduman, 2014). Ele sugere que a sequência resultante da congruência módulo m , em que $m \in \mathbb{N}$, é periódica. Ainda de acordo com (Sousa *et al.*, 2024, p. 8): “Na sequência de Padovan, pode-se observar um padrão cíclico quando analisamos os restos da divisão dos termos por um número primo. Podemos demonstrar isto usando o módulo m de um número primo, como mostra o Teorema 4.2”. Vejamos por exemplo, a sequência de Padovan módulo 2. A fim de evitar uma representação excessivamente extensa, adotamos a organização apresentada na Tabela 2. Ressaltamos que o termo $P_i^{(2)}$ será representado nessa tabela, por $P_{kj}^{(2)}$, para todo $i \in 0,1,2, \dots, 49$. Essa notação indica o resto da divisão do número de Padovan localizado na linha j e coluna k da Tabela 2 por 2. Por exemplo, o resto da divisão do termo $P_{35} = 13581$ por 2, é 1 (Veja tabela 2). Assim, $P_{35}^{(2)} = 1$, conforme visto a seguir.

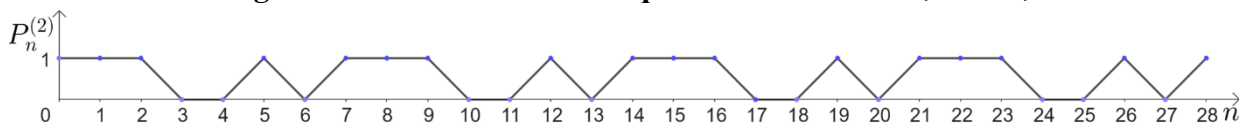
Tabela 5 - Amostra dos 50 primeiros termos da sequência de Padovan (*mod* 2).

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
2	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
3	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
4	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A tabela 5 sugere um comportamento cíclico da sequência de Padovan módulo 2. Esse comportamento fica ainda mais evidente na figura que segue, construída com o auxílio do GeoGebra, após a localização e conexão dos pontos de coordenadas $(kj, P_{kj}^{(2)})$ no plano.

Figura 5 - Padrão cíclico da sequência de Padovan (*mod* 2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Segundo Sousa *et al.* (2024, p. 9): “O GeoGebra é uma ferramenta que permite visualizar e explorar esses padrões de maneira interativa. Ao usar o GeoGebra, podemos plotar

gráficos dos termos da sequência de Padovan módulo m para diferentes valores de m (sendo este m um número primo)”. É claro que o gráfico destacado nessa figura é de natureza contínua, já a sequência obtida é discreta, no entanto, esse artifício corrobora com a sugestão de que a sequência de Padovan módulo m , detém padrões cíclicos, que para Sousa *et al.* (2024), pode ser verificado para outros números primos, propriedades essas, que estão diretamente ligadas a grupos finitos.

Segue a análise de mais um caso particular do comportamento da sequência de Padovan módulo m , neste caso, para $m = 5$.

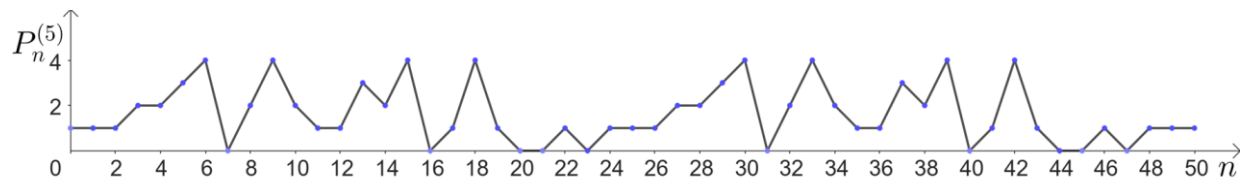
Tabela 6 - Amostra dos 50 primeiros termos da sequência de Padovan ($\text{mod } 5$).

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	2	2	3	4	0	2	4
1	2	1	1	3	2	4	0	1	4	1
2	0	0	1	0	1	1	1	2	2	3
3	4	0	2	4	2	1	1	3	2	4
4	0	1	4	1	0	0	1	0	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Apesar do padrão cíclico não ser tão perceptível nessa tabela, ele se revela de forma mais clara na figura seguinte.

Figura 6 - Padrão cíclico da sequência de Padovan ($\text{mod } 5$).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Ainda que os casos analisados nas figuras 5 e 6 não sejam suficientes para demonstrar o possível padrão cíclico que a sequência de Padovan ($\text{mod } m$), com $m \in \mathbb{N}$ possui, conjecturamos que o padrão observado nas figuras citadas se estendem a qualquer m natural.

A seguir, exploraremos aplicações concretas das sequências de Fibonacci e Padovan, destacando fatos presentes na natureza, além de aplicações ao cotidiano.

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo destacamos de modo mais concreto algumas aplicações das sequências estudadas nesse trabalho. Buscamos identificar, sempre que possível, suas aparições na natureza e no cotidiano.

5.1 Traços da sequência de Fibonacci nas flores

Essa sequência é amplamente observada na natureza, podendo identificar traços de sua presença nas pétalas de flores como margaridas, lírios vermelhos, quaresmeiras, girassóis, entre outras. Segundo Contador (2012 *apud* Borges 2015):

A série de Fibonacci aparece com frequência em um grande número de fenômenos naturais, define perfeitamente o esquema de reprodução dos coelhos, a proporção entre as abelhas machos e fêmeas nas colmeias, a distribuição de folhas no ramo de algumas árvores (Contador, 2012 *apud* Borges 2015, p. 49).

As margaridas exemplificam bem esse fenômeno, pois, em sua maioria, apresentam flores cujo número de pétalas corresponde a termos da sequência de Fibonacci. Assim, é comum encontrar margaridas com 13, 21, 34, 55 ou 89 pétalas (Zahn, 2011 *apud* Borges 2015; Koshy, 2018 *apud* Santos, 2021). As características mencionadas não se restringem exclusivamente às margaridas. Em uma flor de lírio, por exemplo, observa-se a presença de seis partes coloridas idênticas, distribuídas em três pétalas, estruturas internas responsáveis pela atração de polinizadores, e três sépalas, localizadas mais externamente e destinadas à proteção estrutural (Ferri, 1983 *apud* Borges, 2015).

Vejamos na figura que segue, exemplos dessas e de outras flores que frequentemente preservam características associadas à sequência de Fibonacci.

Figura 7 - Traços da sequência de Fibonacci na natureza.



Fonte: Google imagens.

Nessa mesma perspectiva, Koshy (2018, *apud* Santos, 2021, p.7) destaca que “os fabulosos números de Fibonacci ocorrem na natureza em lugares bastante inesperados. Como exemplo, os números de Fibonacci são encontrados em alguns arranjos de folhas em galhos de plantas e árvores”. Obviamente suas aplicações não se limitam apenas a esses fatos, como se observa a seguir.

5.2 Conversão de milhas para quilômetros

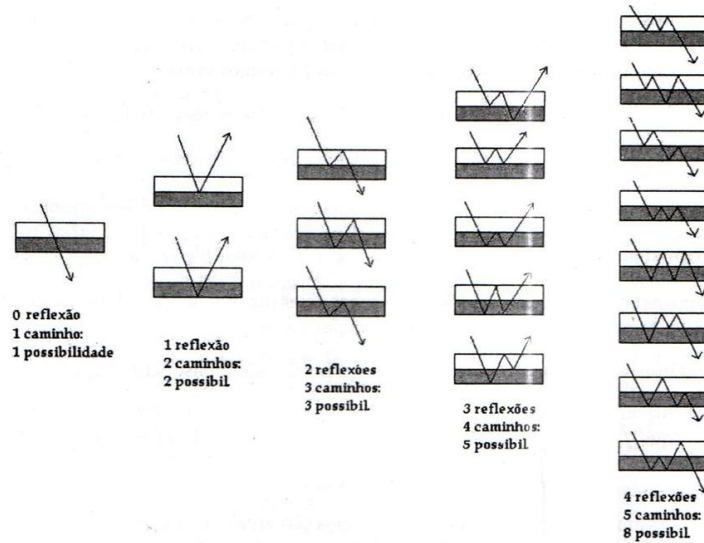
Uma milha é uma unidade de medida que corresponde a aproximadamente 1609 metros, ou seja, cerca de 1,61 quilômetros, valor que se aproxima da razão áurea. Mesmo que essa transformação possa ser realizada sem grandes dificuldades, é conveniente notar que se o valor em milhas, é um termo da sequência de Fibonacci, o valor correspondente a este, em quilômetros, tem uma ótima aproximação com o termo seguinte dessa sequência. Por exemplo, para converter 8 milhas em quilômetros, basta considerar o próximo termo da sequência de Fibonacci, que é 13, obtendo-se uma estimativa bastante precisa. Contudo, caso o número a ser convertido não pertença à sequência de Fibonacci, basta multiplicá-lo pela aproximação do número de ouro, isto é, 1,61 (Silva; Almeida, 2020). Apesar de simples, notar essa relação permite visualizar possíveis relações entre essa sequência e problemas práticos do cotidiano.

5.3 Conexões entre a sequência de Fibonacci e a Física

Há evidências da presença da sequência de Fibonacci em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, na óptica, ramo da Física dedicado ao estudo da luz e de seus fenômenos. Quando um raio de luz incide sobre um conjunto composto por duas placas de vidro justapostas, cada uma com índices de refração distintos, o número de trajetos possíveis para a luz cresce progressivamente à medida que aumentamos o número de reflexão nesses caminhos (Borges, 2015; Silva; Almeida, 2020).

A figura 8 estabelece uma relação entre o número de reflexões e caminhos.

Figura 8 - Reflexão da luz



Fonte: Borges (2015, p.52).

Note que o número de caminhos percorrido pelo raio luz está relacionado com o número de reflexões. Além disso, se denotarmos o número de reflexões por n , então o total de caminhos corresponde ao termo f_{n+2} na sequência de Fibonacci (Borges, 2015; Silva; Almeida, 2020).

Outra sequência que também apresenta aplicações em contextos do cotidiano é a sequência de Padovan, como pode ser observado nas seções que se sucede.

5.4 A sequência de Padovan na arquitetura

Conforme discutido na seção 3.2 e reforçado por Vieira (2020) e Santos (2021), o número plástico surgiu através da busca por um conjunto de medidas que orientasse desde a construção de pequenos objetos até uma escala geral de uma edificação, promovendo uma sensação estética de harmonia e ordem. Essa abordagem torna-se particularmente evidente em projetos como na basílica cristã de Abadia de Roosenberg, na Bélgica, onde essa proporção foi aplicada em sua estrutura arquitetônica. Como observa Santos (2021): “Essa basílica (veja Figura 9), foi construída seguindo os princípios arquiteturais de Dom Van der Laan baseados no número plástico (ψ), obtido da sequência de Padovan”.

Figura 9 - Interior da basílica cristã de abadia.



Fonte: Rijksdienst voor het Cultureel Erfgoed (2010 *apud* Santos, 2021, p.13).

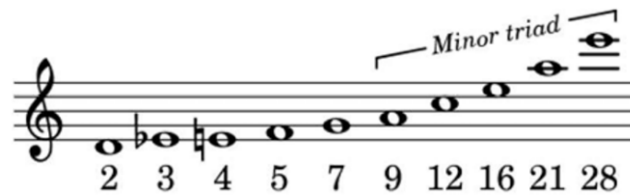
Esse é um exemplo claro de como as propriedades e os elementos dessa sequência encontram aplicação em aspectos do nosso cotidiano. Além disso, é possível identificar sua relação com outras áreas do conhecimento.

5.5 A sequência de Padovan na música

A música sempre ocupou lugar destaque em qualquer cultura ou era, sendo valorizada por diversas civilizações, uma vez que é dotada de padrões matemáticos interessantes. Um exemplo curioso é a relação entre a sequência de Padovan e a música. Conforme aponta Marohnić e Strmečki (2012, *apud* Santos, 2021, p. 12), “existe uma conexão entre os números de Padovan e o sistema de música ocidental padrão de 12 tons (escala cromática), que definem intervalos abrangendo uma oitava, como objetos matemáticos”.

Os mesmos autores, citados por Santos (2021) afirmam que existem intervalos composto por subsequência de Padovan que geram possíveis combinações musicais. Ainda segundo Santos (2021, p. 13): “intervalo que se estende por P_n semitons é chamado de intervalo de Padovan e é denotado simplesmente por $P_n = (2,3,4,5,7,9,12,16,21,28,37,49 \dots)$ e os dez primeiros estão representados na Figura 10”.

Figura 10 - Dez primeiros intervalos de Padovan construídos no dó central.



Fonte: Marohnić e Strmečki (2012, *apud* Santos, 2021, p. 12).

5.6 A sequência de Padovan na Matemática

Não é incomum que se estabeleçam conexões entre áreas distintas da matemática. No capítulo 5, por exemplo, sugere uma ligação entre a sequência de Padovan e a teoria dos grupos finitos. Vieira (2020) também examina essa sequência sob uma perspectiva matricial, o que contribui para a riqueza e profundidade do tema. Santos (2021) destaca aplicações relacionadas às áreas de triângulos equiláteros determinados pela construção da espiral de Padovan. Já Aquino (2019) propõe o uso dessa sequência no ensino de proporções, oferecendo uma abordagem didática original e instigante.

Esses autores compõem um conjunto de referências que o leitor poderá consultar para ampliar sua compreensão sobre o tema. Este trabalho, por sua vez, e as referências nele contida, visa suprir a necessidade do leitor associada ao tema proposto.

No capítulo seguinte, será apresentada uma sequência didática elaborada com base nos conceitos explorados ao longo deste trabalho. A proposta tem como objetivo favorecer principalmente a compreensão da sequência de Padovan e suas aplicações, por meio de atividades que integrem teoria e prática, promovendo uma abordagem acessível e significativa para o processo de ensino e aprendizagem.

6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo se dedica inicialmente ao estudo de sequência didática como estratégia facilitadora na transmissão de conhecimentos elementares ou sofisticados, por meio de uma organização intencional e articulada de atividades que visam promover aprendizagens significativas. Os parágrafos que se sucede foram inspirados principalmente nas concepções de Zabala (1998), Oliveira (2013) e Ugalde; Roweder (2020). Além disso, será dada ênfase na proposta de duas sequências didáticas voltadas ao trabalho com sequências recorrentes no ensino médio, contemplando a sequência de Fibonacci e a sequência de Padovan, que por motivo de forma maior, não foram implementadas em sala de aula. O interesse na apresentação dessas atividades ordenadas se faz devido a superficialidade da abordagem desse tema (ensino de sequências recorrentes) no ensino médio.

6.1 A sequência didática como metodologia de ensino

De modo geral, as metodologias de ensino caracterizam-se pelo modo no qual se desenvolve o processo de ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva, Libâneo (2006) aponta que:

Os métodos são determinados pela relação objetivo-conteúdo, referem-se aos meios para alcançar objetivos gerais e específicos do ensino, ou seja, ao “como” do processo de ensino, englobando as ações a serem realizadas pelo professor e pelos alunos para atingir os objetivos e conteúdos. Temos, assim, as características dos métodos de ensino: estão orientados para objetivos; implicam uma sucessão planejada e sistematizada de ações, tanto do professor quanto dos alunos; requerem a utilização de meios (Libâneo, 2006, p. 149).

Com isso, a articulação entre objetivo, conteúdo e os meios configuram-se como elemento fundamental para a promoção de uma aprendizagem significativa, sugerindo uma diversidade de métodos passíveis de aplicação em sala de aula, dentre os quais se destacam as sequências didáticas, e entre outros processos.

Segundo Zabala (1998, p. 18), uma sequência didática se caracteriza como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. Isso pressupõe que ao adotar a sequência didática como metodologia, pontos cruciais devem ser levados em consideração, como por exemplo: planejamento, aplicação e avaliação.

Nessa mesma perspectiva Oliveira (2013) descreve uma sequência didática como:

[...] um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem (Oliveira, 2013, p.39).

A autora destaca que essa metodologia tem sua origem na França no início os anos 80, e tinha por finalidade aprimorar o processo de ensino da língua materna, que na época era considerada fragmentada, uma vez que trabalhava de forma desconectada, a ortografia, a sintaxe e cada categoria gramatical, e apesar de inicialmente ter sofrido resistência por alguns estudiosos, foi aos poucos ganhando espaço (Oliveira, 2013).

No Brasil, essa metodologia foi implementada somente na década de 90 com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), conforme ressalta Oliveira (2013, p. 39): “Somente a partir da década de 90, mais precisamente com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1992, a sequência didática começa a ser trabalhada no Brasil”.

Quando consideramos a realidade atual da sala de aula, nota-se que essa metodologia desperta um grande interesse de diversos pesquisadores, refletido na variedade de estudos que recorrem a esse método para fomentar a construção de novos conhecimentos (Ugalde; Roweder, 2020). Esse fato é reiterado por Ugalde; Roweder (2020), ao afirmar que:

É possível observar esse crescimento quando utilizamos descritores como: metodologia de ensino, sequência didática, dissertações defendidas, produtos educacionais, nome de autores, títulos de obras, entre outros, para realizar busca em sites de Universidades, Institutos Federais, plataformas Google Acadêmico, EduCAPES, Scielo e tantos outros, e localiza-se uma quantidade considerável de trabalhos publicados com a referida temática (Ugalde; Roweder, 2020, p.5).

Isso evidencia que a sequência didática, embora apresente uma abordagem relativamente recente, configura-se como uma metodologia já validada, oferecendo uma estratégia pedagógica que favorece a compreensão e o estudo de diferentes conteúdos em sala de aula, com a vantagem de ser adaptável a diferentes áreas do conhecimento.

Ao elaborar uma sequência didática, Oliveira (2013) sugere que sejam adotados alguns passos básicos: a escolha do tema, a proposição de questionamentos que favoreçam a problematização do assunto abordado, o planejamento dos conteúdos, a definição dos objetivos a serem alcançados, bem como a ordenação das atividades, considerando questões como a formação de grupos, seleção de materiais, cronograma detalhado, articulação entre as etapas e procedimentos, e avaliação dos resultados.

Ao analisarmos as concepções de Zabala (1998) e Oliveira (2013) sobre sequência didática, percebe-se que exige um olhar minucioso em cada etapa a ser desenvolvida, não apenas em relação ao conteúdo, mas também ao modo como o processo é conduzido. É prudente enxergar o estudante como parte ativa dessa trajetória, promovendo a participação e o diálogo constante entre professor e aluno. Esse olhar comprometido contribui para que o ensino-aprendizagem se torne realmente significativo e envolvente na prática escolar.

Zabala (1998) analisa quatro unidades didáticas que, segundo ele, abrangem a maioria das propostas de sequências adotadas em diferentes áreas do conhecimento. Embora não as vincule diretamente a campos específicos, com exceção da segunda unidade, que considera mais adequada a áreas de caráter procedimental, como matemática e línguas, o autor examina detalhadamente cada etapa, estabelecendo relações entre essa metodologia e as concepções de ensino que a fundamentam. Além disso, observa que, em certas situações, pode ser necessário considerar fatores adicionais na análise, o que é sugerido por ele em seções posteriores. A seguir, apresenta-se a tabela referente à unidade didática 2, conforme comentada por Zabala (1998, p. 56).

Tabela 7 - Procedimentos de uma sequência didática

PROCEDIMENTO	DEFINIÇÃO
1. Apresentação de uma situação problemática	Nesse procedimento, o professor expõe a situação problema, aqui pode ser apresentado os objetivos a serem atingidos.
2. Busca de soluções	Os estudantes são instigados a propor alternativas para a resolução da situação problema, o que possibilita a identificação dos seus conhecimentos prévios. Essa etapa favorece o reconhecimento do repertório dos alunos e contribui para a condução das discussões subsequentes.
3. Exposição do conceito e algoritmo	A partir das contribuições apresentadas pelos estudantes, o professor recorre a essas informações para elaborar o novo conceito e ensinar a fórmula, ou o modelo associado. Aqui também pode ser direcionado para a solução da situação-problema.
4. Generalização	Nesse momento, o professor exhibe todo o aporte teórico e conceitual necessário para a compreensão geral do tema em estudo e das situações analisadas.

5. Aplicação	De forma individualizada, os estudantes aplicam o modelo estudado em várias situações-problema.
6. Exercitação	Nessa etapa, os estudantes se dedicam à resolução de exercícios diretamente vinculados ao algoritmo apresentado, consolidando assim sua compreensão por meio da aplicação prática dos conceitos estudados.
7. Prova ou exame	Nesse momento, durante um determinado tempo, todos os estudantes são direcionados para realização de uma atividade sobre o tema, permitindo que eles respondam, com o auxílio do(s) algoritmo(s) estudado os exercícios e/ou situações-problema.
8. Avaliação	Em posse dos resultados obtido na etapa anterior, o professor informa para cada estudante.

Fonte: Zabala (1998).

Zabala (1998) e Oliveira (2013) fornecem argumentos necessários, e até certo ponto suficientes, para elaborar uma sequência didática de forma eficaz. Os pensamentos desses autores fundamentam as seções seguintes, nas quais são destacadas duas propostas de sequências didáticas para o ensino e análise elementar da sequência de Fibonacci e da sequência de Padovan.

6.2 Desvendando a sequência de Fibonacci

Esta sequência didática tem como finalidade explorar a sequência de Fibonacci em diferentes contextos, promovendo o desenvolvimento do pensamento matemático, a interdisciplinaridade e a curiosidade científica. É destinada a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ou 1º ano do Ensino Médio.

Materiais utilizados: Quadro branco, apagador para quadro branco, pincel, projetor, lista de exercícios impressa e computador (ou tablet).

Duração: O tempo destinado a cada etapa pode ser ajustado conforme as especificidades de cada turma, considerando elementos como os conhecimentos prévios dos estudantes, o nível de complexidade matemática envolvido e entre outros fatores. A decisão final sobre a duração de cada etapa cabe ao professor regente, que deve avaliar o contexto e as necessidades da turma,

no entanto, sugerimos uma duração de pelo menos 5 horas/aula (250 min), distribuídos conforme se segue.

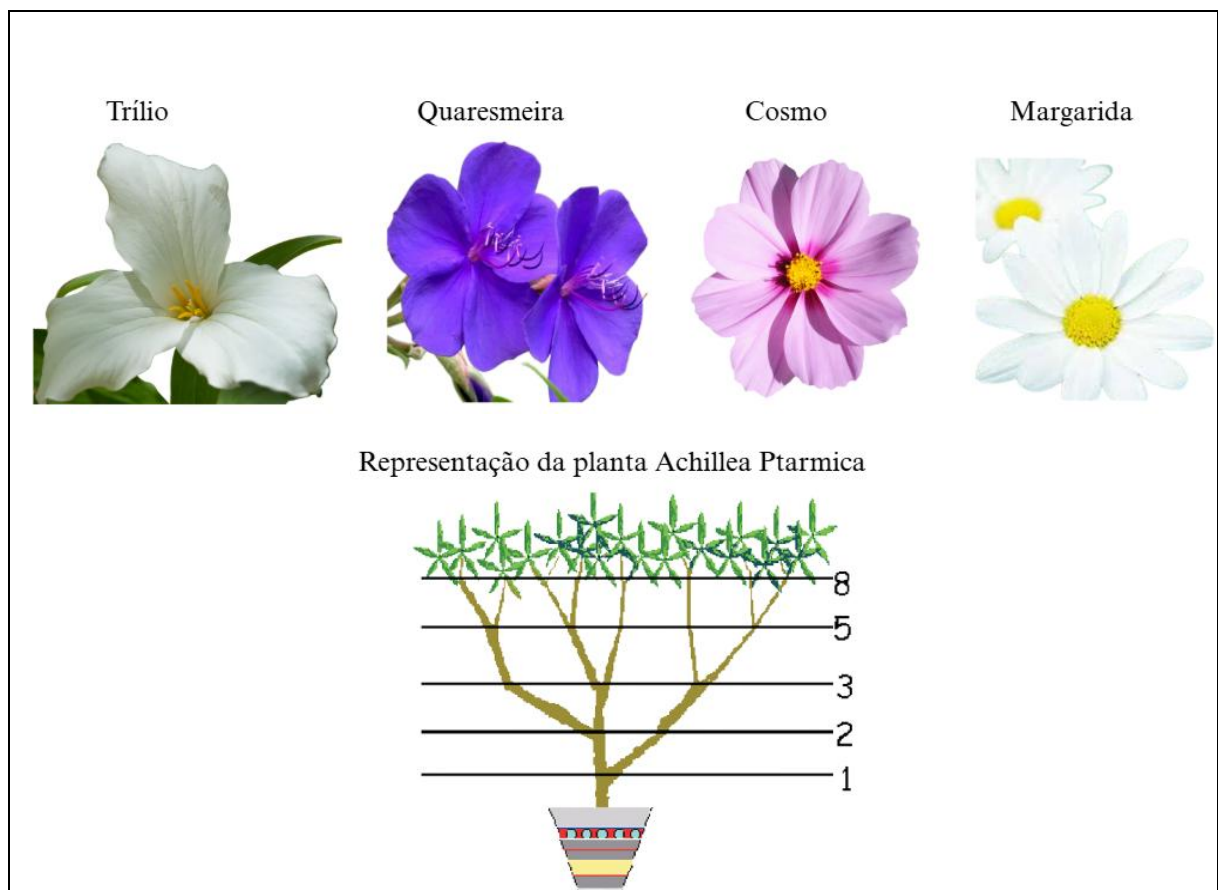
Público-alvo: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ou 1º ano do Ensino Médio.

1ª etapa - Problematização - 20 min

Objetivo: Investigar padrões e levantar hipóteses.

Nessa fase, propõe-se a exibição de imagens que apresentem elementos associados à sequência de Fibonacci, como flores, conchas, estruturas geométricas, esquemas de reprodução de coelhos, entre outros. É fundamental que as imagens escolhidas correspondam a termos consecutivos da sequência, de forma que o padrão de construção se torne perceptível aos estudantes, conforme é indicado no quadro 1.

Quadro 1 - Traços da sequência de Fibonacci na natureza.



Fonte: Google imagens.

O diálogo com a turma pode ser conduzido por meio de questionamentos que incentivem a análise cuidadosa das representações, tais como:

- O que é possível identificar em cada imagem?
- Quais características são compartilhadas entre elas?
- Há alguma relação entre a quantidade específica de determinado elemento que compões cada imagem?

2ª etapa - Busca de soluções - 30 min

Objetivo: Identificar a recorrência que caracteriza a sequência de Fibonacci.

Ao analisar cada uma das figuras apresentadas, o professor conduz os estudantes à observação atenta dos elementos que as caracterizam, como a quantidade de pétalas nas flores ou o esquema de reprodução dos coelhos. Nesse processo, é esperado que os alunos percebam um padrão: por exemplo, que o número de pétalas de determinada flor corresponde à soma das pétalas das duas flores imediatamente anteriores, padrão também identificado na organização do sistema reprodutivo dos coelhos.

A partir das observações feitas pelos estudantes, o professor pode destacar que o padrão identificado nas imagens está diretamente relacionado a uma sequência numérica conhecida como sequência de Fibonacci. Recomendamos que nesse momento seja feita uma breve contextualização sobre o matemático Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, ressaltando sua relevância histórica e as suas contribuições com o desenvolvimento da matemática. Além disso, com o intuito de tornar o tema ainda mais envolvente, o professor pode destacar que essa sequência possui grande notoriedade em diversas áreas, como na natureza, na arte e na arquitetura.

3ª etapa - Exposição do conceito e algoritmo - 30 min

Objetivo: Determinar a recorrência que caracteriza a sequência de Fibonacci.

Com base nas informações destacadas por cada estudante, o professor conduz a apresentação da recorrência que caracteriza a sequência de Fibonacci, definida recursivamente por:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1, \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

É conveniente deixar claro que o termo f_n dessa sequência ocupa a posição n , sendo denominado de n -ésimo número de Fibonacci.

Antes de prosseguir para a próxima etapa, sugerimos que seja construído com os estudantes uma tabela contendo os 20 primeiros termos dessa sequência, o que facilitará a visualização das propriedades que serão apresentadas (veja tabela 1).

4ª etapa - Generalização - 80 min

Objetivo: Reconhecer propriedades da sequência de Fibonacci.

Tendo como suporte a tabela construída na etapa anterior, o professor pode iniciar a apresentação de algumas características notáveis da sequência de Fibonacci, explorando propriedades que ajudam a consolidar a compreensão do tema, como por exemplo:

- A soma dos n primeiros números de Fibonacci, com $n \geq 1$, é $f_{n+2} - 1$, isto é,

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

- A soma dos n primeiros números de Fibonacci de índice ímpar é f_{2n} , ou seja,

$$f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

- A soma dos n primeiros números de Fibonacci de índice par é $f_{2n+1} - 1$, isso nos leva ao seguinte resultado, $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$.

- O n -ésimo número de Fibonacci é dado por: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

Não é necessário realizar a demonstração desse resultado nesta etapa, aconselhamos que sejam analisados alguns casos específicos, permitindo que os estudantes compreendam sua validade em situações particulares. Ressalta-se que essa expressão apresenta limitações práticas quando aplicada a termos muito elevados dessa sequência.

- A razão entre um termo e o imediatamente anterior a este, na sequência de Fibonacci tende a razão áurea.

O professor deve contextualizar a razão áurea, apresentando sua construção geométrica e exemplos de sua manifestação na natureza e nas artes, destacando que $\phi \approx 1,62$. Para que os estudantes compreendam a relação entre a sequência de Fibonacci e a razão áurea, recomenda-se que divida cada termo da sequência presente na tabela pelo termo imediatamente anterior, repetindo o processo para diferentes valores e observando os resultados obtidos.

5ª etapa - Aplicação - 20 min

Objetivo: Aplicar a sequência de Fibonacci na resolução de situações-problema.

O professor apresenta diversas situações, e os estudantes precisam reconhecer se o problema proposto pode ser modelado com os conceitos associados à sequência de Fibonacci.

6ª etapa - Exercitação - 30 min

Objetivo: Resolver situações-problema associadas à sequência de Fibonacci.

Com base nos resultados apresentados, os estudantes são instigados a resolver diversas situações relacionados a essa sequência, permitindo que seja posto em prática os conceitos estudados.

7ª etapa - Verificação de aprendizagem - 20 min

Ao final da etapa anterior, propomos que sejam direcionadas duas questões subjetivas aos discentes, que deverá ser realizada de forma individual e sem consulta.

8ª etapa - Avaliação - 20 min

Após a análise detalhada das soluções apresentadas pelos estudantes, recomenda-se que o professor avalie as competências e habilidades adquiridas por cada um. Sugere-se também que a correção dessas atividades ocorra de maneira expositiva no quadro, possibilitando que os estudantes identifiquem e trabalhem os aspectos que necessitam de maior aprimoramento.

A seção seguinte propõe uma sequência didática destinada ao estudo dos conceitos e propriedades relacionados à sequência de Padovan.

6.3 Desvendando a sequência de Padovan

Esta sequência didática dedica-se ao estudo da sequência de Padovan sob uma ótica semelhante à apontada na seção 6.2. Considerando a pouca notoriedade da sequência de Padovan, que é frequentemente negligenciada até mesmo nos cursos de licenciatura em Matemática, a sequência didática que se segue corrobora para o desenvolvimento do pensamento matemático, da interdisciplinaridade e, conseqüentemente, fortalece a divulgação científica.

Materiais utilizados: Quadro branco, apagador para quadro branco, pincel, projetor, lista de exercícios impressa e computador (ou tablet).

Duração: O tempo destinado a cada etapa pode ser ajustado conforme as especificidades de cada turma, considerando elementos como os conhecimentos prévios dos estudantes, o nível de complexidade matemática envolvido e entre outros fatores. A decisão final sobre a duração de cada etapa cabe ao professor regente, que deve avaliar o contexto e as necessidades da turma, no entanto, sugerimos uma duração de pelo menos 5 horas/aula (250 min), distribuídos conforme se segue.

Público-alvo: Alunos do 1º ano do Ensino Médio.

1ª etapa - Problematização - 20 min

Objetivo: Investigar padrões e levantar hipóteses.

Nesta etapa, sugere-se a introdução de exemplos práticos relacionados à sequência de Padovan, como a apresentação de imagem que ilustre os dez primeiros intervalos de Padovan no dó central ou a representação do espiral de Padovan (recomendamos o estudo das seções 3 e 5).

Para orientar o diálogo com os estudantes, recomenda-se a formulação de perguntas como:

- Quais elementos podem ser observados em cada imagem?
- Que características são comuns entre elas?

- Existe alguma relação específica entre a quantidade de elementos que compõem cada figura?

2ª etapa - Busca de soluções - 30 min

Objetivo: Identificar a recorrência que caracteriza a sequência de Padovan

Após a análise de cada uma das figuras pelos estudantes, o professor os conduz à observação atenta dos elementos que as compõe. Nesse processo, é esperado que os estudantes notem alguma relação com a sequência de Fibonacci, se essa for de seu conhecimento, além de identificar o padrão de formação.

A partir dessas observações, aconselhamos que seja definido formalmente essa sequência, caracterizando-a como sequência de Padovan, sendo dada ênfase ao contexto histórico de sua construção, uma vez que isso permite que o estudante se conecte com o autor.

3ª etapa - Exposição do conceito e algoritmo - 30 min

Objetivo: Determinar a recorrência que caracteriza a sequência de Padovan.

Baseado nos conhecimentos prévios dos estudantes sobre o tema, sugere-se que o professor apresente a definição formal para a sequência de Padovan $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por:

$$\begin{cases} P_0 = P_1 = P_2 = 1, \\ P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \forall n \geq 3. \end{cases}$$

O termo P_n dessa sequência ocupa a posição n , sendo denominado de n -ésimo número de Padovan.

Antes de prosseguir para a próxima etapa, aconselhamos que seja construído com os estudantes uma tabela contendo os 30 primeiros termos dessa sequência, o que facilitará a visualização das propriedades que serão apresentadas. Uma sugestão pode ser encontrada seção 3.1.1 desse trabalho.

4ª etapa - Generalização - 80 min

Objetivo: Reconhecer propriedades da sequência de Padovan.

Tendo como suporte a tabela construída na etapa anterior, sugere-se que o professor inicie com a apresentação de algumas particularidades da sequência de Padovan, de modo análogo a seção 6.2. Recomenda-se a exploração de propriedades que contribuam para a consolidação da compreensão do tema, tais como:

- Para todo $n \geq 5$, a diferença em módulo, entre dois termos consecutivos na sequência de Padovan é P_{n-5} .

- A soma dos n primeiros números de Padovan, com $n \geq 1$, é $P_{n+5} - 3$, isto é,

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = P_{n+5} - 3.$$

- A soma dos n primeiros números de Padovan de índice ímpar é $P_{2n+2} - 1$, ou seja,

$$P_1 + P_3 + P_5 + \dots + P_{2n-1} = P_{2n+2} - 1.$$

- A soma dos n primeiros números de Padovan de índice par é $P_{2n+1} - 1$, isso nos leva ao seguinte resultado, $P_0 + P_2 + P_4 + \dots + P_{2(n-1)} = P_{2n+1} - 1$.

A demonstração dessas propriedades pode ser consultada na seção 3.1.2 deste trabalho. Recomenda-se que esses resultados sejam verificados para alguns casos particulares, de modo a possibilitar que os estudantes possam inferir sua validade para toda a sequência. A decisão de apresentar ou não a demonstração fica a critério do professor regente, considerando seu conhecimento sobre o nível da turma.

- A razão entre um termo e o imediatamente anterior a este, na sequência de Padovan tende ao número plástico.

O professor deve contextualizar sobre o número plástico, destacando sua aplicação no ramo da arquitetura. Sugere-se que, após essa explanação, que deve levar em conta os aspectos históricos, seja determinado o número plástico, que tem valor aproximado $\psi \approx 1,32$.

5ª etapa - Aplicação - 20 min

Objetivo: Aplicar a sequência de Padovan na resolução de situações-problema.

O professor apresenta diversas situações, e os estudantes precisam reconhecer se o problema proposto pode ser modelado com os conceitos associados à sequência de Padovan.

6ª etapa – Exercitação - 30 min

Objetivo: Resolver situações-problema associadas à sequência de Padovan.

Com base nos resultados apresentados, os estudantes são instigados a resolver diversas situações relacionados a essa sequência, pondo em prática os conceitos estudados.

7ª etapa - Verificação de aprendizagem - 20 min

A avaliação será conduzida por meio da aplicação de duas questões subjetivas, a serem respondidas de forma individualizada e sem consulta. As questões deverão ser estruturadas de modo que seus itens se complementem harmonicamente, permitindo uma análise mais precisa e criteriosa da compreensão dos estudantes em relação ao conteúdo abordado.

8ª etapa - Avaliação - 20 min

Após a análise criteriosa das soluções apresentadas pelos estudantes, recomenda-se que o professor avalie as competências e habilidades desenvolvidas por cada um. Sugere-se, ainda, que a correção dessas atividades seja realizada de forma expositiva no quadro, conforme adotado na sequência didática abordada na seção 6.2, uma vez que essa abordagem possibilita aos alunos identificar e aprofundar os aspectos que demandam maior aprimoramento.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos uma análise de sequências recorrentes, que em geral não são contempladas no ensino médio. Ao longo do estudo, ficou evidente a relação da sequência de Fibonacci com diversas áreas do conhecimento humano. Sua ocorrência na natureza, na arte e na arquitetura, associada a razão áurea, justifica a beleza e a harmonia frequentemente atribuídas a essa sequência.

A conexão entre as sequências de Fibonacci e de Lucas, apresentadas no capítulo 02, demonstram caminhos que podem ser explorados no estudo dessas sequências, sinalizando que seus resultados vão além de uma simples fórmula de recorrência.

A análise da sequência de Padovan oferece mais uma possibilidade de ampliação do campo de estudos de professores e alunos em relação a sequências recorrentes. A relação dessa sequência com situações práticas, principalmente a arquitetura, constitui uma ótima maneira de atrair a tenção dos estudantes para seu estudo, já que é possível identificar sua aplicação no campo prático. Embora não lhe seja dada a devida atenção nos currículos escolares, até mesmo na formação docente, seu estudo sugere possibilidades interessantes quando associados a outros conteúdos da matemática, como a teoria dos grupos finitos.

A aplicação da sequência didática como metodologia de ensino sugere outras possibilidades de pensar o ensino-aprendizagem. Ressaltamos, contudo, que conhecer profundamente o que se pretende ensinar enriquece o debate e permite adaptações coerentes com o cotidiano do estudante. Assim, a sequência didática sugerida no capítulo 6 deste trabalho, tem por finalidade auxiliar na abordagem do ensino das sequências de Fibonacci e Padovan para alunos da educação básica.

Considerando as possibilidades que o estudo das sequências recorrentes oferece a alunos e professores da educação básica, assim como nos cursos de Licenciatura em Matemática, destacamos este trabalho como uma importante fonte de pesquisa, tanto para universitários quanto para professores e estudantes do ensino básico.

REFERÊNCIAS

AARTS, J.; FOKKINK, R.; KRUIJTZER, G. Morphic numbers. **Nieuw Archief voor Wiskunde**, v. 5, n. 2, p. 56-58, 2001.

ALVES, F. R. V; BORGES NETO, H. Sequencias de Fibonacci e de Lucas: Uma Aplicação da Sequência Fedathi. **V colóquio de História e Tecnologia da Matemática**, Recife, 2010.

ALVES, F. R. V; VIEIRA, R. P. M. Explorando a Sequência de Padovan mediante investigação histórica e abordagem epistemológica. **Boletim GEPEM**. n. 74, p. 162-169, jan./jun. 2019.

AQUINO, A. M. F. **Uma abordagem sobre a sequência de Padovan e o ensino de proporções**. 2019. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologias, Juazeiro do Norte, 2019.

BORGES, F. P. **A Sequência de Fibonacci e algumas de suas aplicações**. 2015. 89 f. (Dissertação de Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Cuiabá, 2015.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CARNEIRO, M. S; FERNANDES, M. A. A; NOBOKITE, K.A. Três diferentes provas de que as razões entre números consecutivos de Fibonacci convergem para o Número de Ouro. **PMO – Revista Eletrônica Professor de Matemática Online**, Rio de Janeiro, v.11, n.2, p. 194-204, 2023.

FERREIRA, R. de C. **Números Mórficos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. 5ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez editora, 2006.

LIMA, E. L. **Análise Real: funções de uma variável**. vol. 1. 13ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. vol. 1. 14ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LIMA, E. L. Equação do Terceiro Grau. **Matemática Universitária**. v. 5, p. 9-23, jun. 1987.

MORGADO, A. C; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis: Vozes, 2013.

SANTOS, J. P de O. **Introdução a Teoria dos Números**. 3^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

SANTOS, V. F. S. **Curiosidades da sequência de Fibonacci e da sequência de Padovan: investigações inusitadas**. 2021, 65 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Cuiabá, 2021.

SILVA, B. A. **Números de Fibonacci e números de Lucas**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

SILVA, J. J. **Filosofia da matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SILVA, R. J. M. **Explorando a Matemática do Jogo Torre de Hanói**. 2018. 42 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró – RN, 2018.

SILVA, R. L; ALMEIDA, R. L. da S. A fantástica sequência de Fibonacci e o enigmático número de ouro: contexto histórico, definições, propriedades e aplicações. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 18, p. 77-88, jul. 2020.

SOUSA, R. T ; *et al.* Articulação entre Sequências Recursivas e Teoria dos Grupos Finitos: o caso da sequência de Padovan. **Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM)**, Paraná, v. 13, n.31, p. 1-20. 2024.

SOUZA, J. A. Uma nota sobre a Teoria dos Grupos: da Teoria de Galois à Teoria de Gauge. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 12, n. 24, p. 71–81, 2012.

TAS, S; KARADUMAN, E. The Padovan sequences in finite groups. **Chiang Mai Journal of Science**, v. 41, p. 456-462, 2014.

UGALDE, M. C. P; ROWEDER, C. Sequência didática: uma proposta metodológica de ensino aprendizagem. **Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico (EDUCITEC)**. v. 6, Edição Especial, e099220, 2020.

VIEIRA, R. P. M. **Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e Complexificação da Sequência de Padovan ou Cordonnier**. 2020, 266 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Reimpressão 2010. Porto Alegre: Artmed, 1998.