



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**  
**FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS**  
**DO SERTÃO CENTRAL**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**JONATAS DE SOUSA LIMA**

**SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS (SDO) ENVOLVENDO ÁREA E  
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS COM AUXÍLIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA**

**QUIXADÁ – CEARÁ**

**2025**

JONATAS DE SOUSA LIMA

SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS (SDO) ENVOLVENDO ÁREA E SEMELHANÇA  
DE TRIÂNGULOS COM AUXÍLIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador (a): Prof. Dr. Roger Oliveira Sousa  
Coorientador (a): Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

QUIXADÁ – CEARÁ

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Estadual do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

Lima, Jonatas de Sousa

Situações didáticas olímpicas (sdo) envolvendo área e  
semelhança de triângulos com auxílio do software geogebra.  
[recurso eletrônico] / Jonatas de Sousa Lima. - 2025.  
90 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual  
do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado  
Profissional Em Matemática Rede Nacional, Quixadá, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Roger Oliveira Sousa.

Coorientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

1. situação didática olímpica. 2. semelhança e área de  
triângulos. 3. geogebra. I. Título.

---

JONATAS DE SOUSA LIMA

SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS (SDO) ENVOLVENDO ÁREA E SEMELHANÇA  
DE TRIÂNGULOS COM AUXÍLIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 18 de junho de 2025.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Roger Oliveira Sousa (Orientador)

Faculdade de Educação, Ciências de Letras do Sertão Central – FECLESC

Universidade Estadual do Ceará – UECE

---

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Coorientador)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

---

Prof. Dr. Nicolas Alcantara de Andrade

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

---

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente

Faculdade de Educação, Ciências de Letras do Sertão Central – FECLESC

Universidade Estadual do Ceará – UECE

Dedico este trabalho a minha família.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, à minha família, que sempre foi o alicerce da minha educação. Com dedicação incansável, proporcionaram-me as melhores oportunidades de aprendizado, fundamentais para o meu crescimento. Sem medir esforços, garantiram que eu tivesse acesso ao melhor ensino, e por isso, serei eternamente grato.

Também expresso minha profunda gratidão à minha esposa, Laydianne, meu maior suporte na conclusão deste mestrado. Seu apoio incondicional e presença constante fortalecem-me em cada etapa dessa jornada. Sempre ao meu lado, ela me auxilia e incentiva em tudo que faço, tornando esse caminho mais leve e significativo.

Não poderia deixar de reconhecer e agradecer aos meus professores do ensino básico, que foram essenciais no meu processo de aprendizagem. Hoje, tenho o privilégio de chamar alguns deles de colegas de trabalho, e seu impacto na minha trajetória continua sendo motivo de grande admiração e respeito.

A todas as amizades construídas ao longo do mestrado, expresso minha sincera gratidão. Compartilhar essa jornada com colegas tão dedicados e inspiradores tornou cada desafio mais leve e cada conquista ainda mais significativa. As trocas de conhecimento, o apoio mútuo e os momentos vividos juntos fortaleceram não apenas minha trajetória acadêmica, mas também laços que levarei comigo para além das salas de aula. Obrigado por fazerem parte dessa caminhada e por torná-la tão especial.

Expresso minha sincera gratidão à Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central (FECLESC), unidade da Universidade Estadual do Ceará (UECE), pela oportunidade de realizar o Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). A instituição tem sido fundamental no meu desenvolvimento acadêmico ao oferecer ensino de excelência, um ambiente acolhedor e recursos indispensáveis para minha formação. Sou profundamente grato pelo compromisso da FECLESC com a educação e pela dedicação dos seus professores, que desempenharam um papel essencial no meu crescimento tanto na graduação como no mestrado. Em especial, agradeço aos professores do mestrado, Prof. Dr. Ulisses Lima Parente, Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira, Prof. Dr. Roger Oliveira Sousa e Prof. Dr. Diego da Silva Pinheiro, cujos ensinamentos e orientações contribuíram significativamente para minha formação acadêmica e profissional, fortalecendo meu conhecimento e minha trajetória.

Expresso minha profunda gratidão aos meus orientadores, Prof. Dr. Roger Oliveira Sousa e Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, pelo acompanhamento dedicado e pela orientação

precisa ao longo do meu mestrado. Seus conhecimentos, apoio e incentivos foram fundamentais para o desenvolvimento da minha pesquisa e para meu crescimento acadêmico e profissional. Por fim, agradeço imensamente à banca examinadora, composta pelos Prof. Dr. Nicolas Alcantara de Andrade e Prof. Dr. Ulisses Lima Parente, que contribuíram com observações valiosas e análises criteriosas, enriquecendo ainda mais meu trabalho e ampliando minha visão sobre o tema estudado. Sua contribuição foi essencial para a consolidação deste estudo, e sou grato pelo tempo e esforço dedicados a essa avaliação.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas suprema beleza.”

Bertrand Russell

## RESUMO

Este trabalho dissertativo apresenta uma proposta metodológica para o ensino de Matemática, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas (TSD), de Guy Brousseau (1986), e aplicada por meio dos Problemas Olímpicos (PO). Essa abordagem, denominada por Alves como Situação Didática Olímpica (SDO), surge em resposta aos baixos índices de aprendizagem matemática no Brasil, conforme apontado pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA). As Olimpíadas de Matemática foram concebidas para estimular o desenvolvimento de novos talentos na área e enfrentar dificuldades históricas de aprendizagem. Entretanto, seu caráter competitivo acaba excluindo estudantes que não obtêm êxito durante as etapas ou que não possuem o perfil necessário para a disputa. Diante desse cenário, este estudo busca evidenciar como o professor de Matemática pode integrar os PO ao ensino, aliando-os à TSD e ao uso do *software* GeoGebra, com foco no tema de Semelhança e Área de Triângulo. Embora o GeoGebra seja uma ferramenta multiplataforma já consolidada no cenário educacional, seu potencial para abordar os PO no ensino regular ainda é pouco explorado, sendo utilizado principalmente em aulas preparatórias para competições. O objetivo central deste trabalho é ampliar essa discussão e fomentar práticas pedagógicas mais inclusivas, promovendo o uso dos PO como recurso para o aprendizado matemático de um público mais abrangente. Para isso, foi realizada uma análise das dissertações do PROFMAT, na qual se constatou um déficit de estudos dedicados a essa abordagem. Além disso, foram desenvolvidas algumas SDO utilizando o GeoGebra como ferramenta de apoio ao ensino de Semelhança e Área de Triângulo, buscando expandir sua aplicação no ambiente escolar e tornar os PO acessíveis a um maior número de estudantes. Esse estudo, portanto, contribui para o acervo de pesquisas do PROFMAT, oferecendo novas perspectivas sobre a utilização dos PO como estratégia pedagógica e reforçando a importância da inclusão no ensino da matemática.

**Palavras-chave:** situação didática olímpica; semelhança e área de triângulos; geogebra.

## ABSTRACT

This dissertation presents a methodological proposal for teaching Mathematics, based on the Theory of Didactic Situations (TDS) by Guy Brousseau (1986) and applied through Olympic Problems (OP). This approach, referred to by Alves as the Olympic Didactic Situation (ODS), emerges as a response to the low levels of mathematical learning in Brazil, as highlighted by the Program for International Student Assessment (PISA). Mathematics Olympiads were created to stimulate the development of new talents in the field and address historical learning difficulties. However, their competitive nature tends to exclude students who do not succeed in the different stages or who simply do not fit the necessary profile for such contests. Given this scenario, the present study aims to demonstrate how Mathematics teachers can integrate OP into their teaching, combining them with TDS and the use of GeoGebra software, with a focus on the topic of Similarity and Triangle Area. Although GeoGebra is a well-established multiplatform tool in the educational field, its potential for addressing OP in regular education remains largely unexplored, being mainly restricted to preparatory classes for competitions. The central goal of this research is to broaden this discussion and promote more inclusive pedagogical practices, making OP a valuable resource for mathematical learning among a wider audience. To achieve this, an analysis of dissertations from PROFMAT was conducted, revealing a shortage of studies dedicated to this approach. Furthermore, several ODS were developed using GeoGebra as a pedagogical support tool for teaching Similarity and Triangle Area, aiming to expand its application in schools and make OP more accessible to a greater number of students. Thus, this study contributes to the body of research in PROFMAT, offering new perspectives on the use of OP as a pedagogical strategy and reinforcing the importance of inclusion in mathematics education.

**Key words:** olympic didactic situation; similarity and triangle area; geogebra.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Tendências no desempenho em Matemática. ....                           | 18 |
| Figura 2 – Brasil, média da OCDE e países de comparação selecionados. ....        | 19 |
| Figura 3 – Triângulo didático.....                                                | 21 |
| Figura 4 – Descrição e distinção entre as noções de PO e SDO, amparo na TSD. .... | 27 |
| Figura 5 – Interface do <i>Software</i> GeoGebra. ....                            | 29 |
| Figura 6 – Questão 78 do caderno de questões da OBMEP (2010).....                 | 35 |
| Figura 7 – Resolução do PO por Silva (2013). ....                                 | 36 |
| Figura 8 – Questão 78 do caderno de questões da OBMEP (2010) no GeoGebra.....     | 37 |
| Figura 9 – Questão 4 da OBMEP (2011), nível 3.....                                | 38 |
| Figura 10 – Questão 4 da OBMEP (2011), nível 3 no GeoGebra.....                   | 39 |
| Figura 11 – Triângulo. ....                                                       | 43 |
| Figura 12 – Classificação de triângulo com relação aos lados.....                 | 44 |
| Figura 13 – Classificação de triângulo com relação aos ângulos. ....              | 44 |
| Figura 14 – Congruência de triângulos. ....                                       | 45 |
| Figura 15 – Transporte de segmentos.....                                          | 45 |
| Figura 16 – Transporte de ângulos. ....                                           | 46 |
| Figura 17 – 1º caso de congruência (LAL). ....                                    | 46 |
| Figura 18 – 2º caso de congruência (ALA). ....                                    | 46 |
| Figura 19 – 3º caso de congruência (LLL). ....                                    | 47 |
| Figura 20 – 4º caso de congruência (LAAo). ....                                   | 48 |
| Figura 21 – Caso particular de congruência em triângulos retângulos. ....         | 48 |
| Figura 22 – Teorema fundamental da semelhança. ....                               | 49 |
| Figura 23 – 1º caso de semelhança (AA). ....                                      | 49 |
| Figura 24 – 2º caso de semelhança (LAL). ....                                     | 50 |
| Figura 25 – 3º caso de semelhança (LLL). ....                                     | 51 |
| Figura 26 – Paralelogramo. ....                                                   | 52 |

|                                                                                  |           |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Figura 27 – Demonstração da área do triângulo.</b>                            | <b>52</b> |
| <b>Figura 28 – SDO 1 no <i>software</i> GeoGebra (Questão 3 – OBMEP 2017).</b>   | <b>53</b> |
| <b>Figura 29 – SDO 1 no <i>software</i> GeoGebra (Resolução).</b>                | <b>54</b> |
| <b>Figura 30 – SDO 1 no <i>software</i> GeoGebra (Continuação da resolução).</b> | <b>56</b> |
| <b>Figura 31 – SDO 2 (Questão 3 – OBMEP 2023).</b>                               | <b>58</b> |
| <b>Figura 32 – SDO 2 (Item a) no <i>software</i> GeoGebra.</b>                   | <b>58</b> |
| <b>Figura 33 – SDO 2 (Item b) no <i>software</i> GeoGebra.</b>                   | <b>59</b> |
| <b>Figura 34 – Ilustração da Questão 4 da OBMEP 2012 (Nível 3).</b>              | <b>62</b> |
| <b>Figura 35 – SDO 3 no <i>software</i> GeoGebra.</b>                            | <b>62</b> |
| <b>Figura 36 – Ilustração da Questão 2 da OBMEP 2014 (Nível 3).</b>              | <b>65</b> |
| <b>Figura 37 – SDO 4 no <i>software</i> GeoGebra.</b>                            | <b>65</b> |
| <b>Figura 38 – Ilustração da Questão 3 da OBMEP 2010 (Nível 3).</b>              | <b>68</b> |
| <b>Figura 39 – SDO 5 no <i>software</i> GeoGebra.</b>                            | <b>69</b> |
| <b>Figura 40 – Ilustração da Questão 3 da OBMEP 2006 (Nível 3).</b>              | <b>71</b> |
| <b>Figura 41 – SDO 6 no <i>software</i> GeoGebra.</b>                            | <b>71</b> |
| <b>Figura 42 – Questão 3 da OBMEP 2017 (parte 1).</b>                            | <b>83</b> |
| <b>Figura 43 – Questão 3 da OBMEP 2017 (parte 2).</b>                            | <b>84</b> |
| <b>Figura 44 – Questão 3 da OBMEP 2023.</b>                                      | <b>85</b> |
| <b>Figura 45 – Questão 4 da OBMEP 2012 (parte 1).</b>                            | <b>86</b> |
| <b>Figura 46 – Questão 4 da OBMEP 2012 (parte 2).</b>                            | <b>87</b> |
| <b>Figura 47 – Questão 2 da OBMEP 2014.</b>                                      | <b>88</b> |
| <b>Figura 48 – Questão 3 da OBMEP 2010.</b>                                      | <b>89</b> |
| <b>Figura 49 – Questão 3 da OBMEP 2006.</b>                                      | <b>90</b> |

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

|         |                                                                  |
|---------|------------------------------------------------------------------|
| IMO     | International Mathematical Olympiad                              |
| IMPA    | Instituto de Matemática Pura e Aplicada                          |
| MCTI    | Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação                     |
| MEC     | Ministério da Educação                                           |
| OBM     | Olimpíada Brasileira de Matemática                               |
| OBMEP   | Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas          |
| OCDE    | Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico        |
| OMU     | Olímpiada de Matemática da Unicamp                               |
| PISA    | Programa Internacional de Avaliação de Estudantes                |
| PO      | Problemas Olímpicos                                              |
| PROFMAT | Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| SDO     | Situações Didáticas Olímpicas                                    |
| TSD     | Teoria das Situações Didáticas                                   |
| UECE    | Universidade Estadual do Ceará                                   |

## SUMÁRIO

|             |                                                                    |           |
|-------------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.</b>   | <b>INTRODUÇÃO.....</b>                                             | <b>14</b> |
| <b>2.</b>   | <b>REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>                                   | <b>18</b> |
| <b>2.1.</b> | <b>Contexto histórico das olimpíadas de matemática .....</b>       | <b>18</b> |
| <b>2.2.</b> | <b>Um pouco sobre a Teoria das Situações Didáticas (TSD) .....</b> | <b>21</b> |
| 2.2.1.      | Fase da ação .....                                                 | 23        |
| 2.2.2.      | Fase da formulação .....                                           | 24        |
| 2.2.3.      | Fase da validação .....                                            | 25        |
| 2.2.4.      | Fase da institucionalização .....                                  | 25        |
| <b>2.3.</b> | <b>Situações Didáticas Olímpicas (SDO) .....</b>                   | <b>26</b> |
| <b>2.4.</b> | <b>Alguns aspectos sobre o <i>software</i> GeoGebra .....</b>      | <b>28</b> |
| <b>2.5.</b> | <b>Análise de dissertações sobre olimpíadas no PROFMAT .....</b>   | <b>30</b> |
| <b>3.</b>   | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>                                 | <b>43</b> |
| <b>3.1.</b> | <b>Congruência de triângulos .....</b>                             | <b>44</b> |
| <b>3.2.</b> | <b>Semelhança de triângulos.....</b>                               | <b>48</b> |
| <b>3.3.</b> | <b>Área de triângulo .....</b>                                     | <b>51</b> |
| <b>4.</b>   | <b>SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA ...</b>   | <b>53</b> |
| <b>4.1.</b> | <b>Situação Didática Olímpica 1 .....</b>                          | <b>53</b> |
| <b>4.2.</b> | <b>Situação Didática Olímpica 2 .....</b>                          | <b>57</b> |
| <b>4.3.</b> | <b>Situação Didática Olímpica 3 .....</b>                          | <b>61</b> |
| <b>4.4.</b> | <b>Situação Didática Olímpica 4 .....</b>                          | <b>64</b> |
| <b>4.5.</b> | <b>Situação Didática Olímpica 5 .....</b>                          | <b>68</b> |
| <b>4.6.</b> | <b>Situação Didática Olímpica 6 .....</b>                          | <b>71</b> |
| <b>5.</b>   | <b>CONCLUSÃO .....</b>                                             | <b>75</b> |
|             | <b>REFERÊNCIAS.....</b>                                            | <b>78</b> |
|             | <b>ANEXO A – SOLUÇÃO OFICIAL DOS PO SELECIONADOS.....</b>          | <b>83</b> |

## 1. INTRODUÇÃO

A matemática é uma área de conhecimento essencial, com grande influência nas demais áreas. Portanto, a compreensão por parte dos alunos é de extrema importância. Tornar a matemática atrativa para os jovens tem sido um dos principais desafios enfrentados pelos professores durante sua prática. Um aluno que não se sente atraído pelo conteúdo apresentado cria barreiras que dificilmente serão superadas. Dessa forma, educadores assumiram a missão de entender as diversas maneiras como ocorre o processo de aprendizagem dos alunos.

Destacaremos nesse trabalho, principalmente, o ímpeto dos estudos realizados por Guy Brousseau<sup>1</sup> e sua Teoria das Situações Didáticas (TSD). Faremos uma assimilação dessa teoria aplicada a Problemas Olímpicos (PO) de matemática.

Nesse cenário surgiu as principais olimpíadas de matemática, IMO (Olimpíada Internacional de Matemática), OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), Concurso Canguru de Matemática, dentre diversas outras avaliações que têm como uns de seus principais objetivos, buscar jovens que possuem aptidão em resolver problemas matemáticos.

Essas provas, em sua maioria, possuem um caráter lógico matemático mais avançado do que os problemas encontrados no ensino básico. Ressalta-se que o surgimento dessas olimpíadas estimula o estudo da matemática, bem como a revelar novos talentos e cria um ambiente diferente e motivador na escola.

Entretanto, Santana e Santiago (2023, p. 2) apontam que “não é fácil para o professor nivelar uma turma com diferentes níveis de conhecimento”. A atual situação do ensino de matemática é preocupante, com turmas muitas vezes superlotadas e uma grande variação de conhecimento entre os alunos. Como relatam os autores, mesmo os professores interessados em preparar os alunos para avaliações específicas (como as olimpíadas de matemática) se veem obrigados a fazer isso em horários alternativos. Além disso, existe uma dificuldade significativa na inclusão de alunos que não estão participando dessas competições. A natureza das olimpíadas de matemática tende a excluir aqueles que não se consideram capazes de resolver problemas complexos devido ao alto nível de raciocínio necessário.

Deve-se observar que concomitante a isso há um imenso avanço tecnológico que ocorre aceleradamente, onde os professores não podem ignorar o seu uso para o ensino, em

---

<sup>1</sup> Guy Brousseau (1933 - 2024) foi um educador matemático francês, nascido em Taza – Marrocos (território francês na época) premiado com a medalha Felix Klein por seus estudos no desenvolvimento da Teoria das Situações Didáticas - TSD.

especial de matemática. O *software* GeoGebra então surge para o professor como uma ferramenta multiplataforma que auxilia no processo de visualização e até mesmo resolução de diversos problemas de matemática, sejam eles de geometria, álgebra, análise combinatória, cálculo, entre outros.

Este trabalho tem como objetivo principal investigar como a Teoria das Situações Didáticas (TSD), aliada ao uso do *software* GeoGebra, por meio da resolução de Problemas Olímpicos (PO), pode favorecer a aprendizagem matemática de alunos que não participam de olimpíadas da disciplina. Busca-se compreender de que forma a tecnologia pode tornar o ensino mais acessível e envolvente, promovendo a construção ativa do conhecimento e estimulando o desenvolvimento do pensamento matemático de maneira inclusiva e significativa.

Para alcançar esse objetivo, inicialmente, este estudo investiga o uso das Situações Didáticas Olímpicas (SDO), mediadas pelo *software* GeoGebra, na resolução de problemas da OBMEP, com o propósito de promover a inclusão de alunos que não participam dessas competições. A proposta busca compreender como essa abordagem pode tornar o ensino mais acessível e estimulante, permitindo que os estudantes desenvolvam habilidades matemáticas por meio da experimentação e da construção ativa do conhecimento. O GeoGebra, como ferramenta digital, desempenha um papel fundamental nesse processo, pois possibilita uma aprendizagem mais visual e interativa, favorecendo a compreensão dos conceitos matemáticos e incentivando o engajamento dos alunos na resolução de problemas.

Além disso, este trabalho realiza um estudo aprofundado sobre a TSD, proposta por Brousseau (1986), analisando seus princípios fundamentais e sua aplicação no ensino da matemática. A TSD enfatiza a interação entre aluno, meio e saber na construção do aprendizado, permitindo que os estudantes desenvolvam autonomia na resolução de problemas. A pesquisa busca adaptar essa abordagem à resolução de problemas olímpicos, explorando como a estrutura das situações didáticas pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático e para a formação de estratégias eficazes na aprendizagem. Ao integrar essa teoria ao uso do GeoGebra, pretende-se criar um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e exploratório, onde os alunos possam testar hipóteses, visualizar conceitos e aprimorar suas estratégias matemáticas de forma intuitiva.

Por fim, este estudo examinará dissertações do PROFMAT que abordam o tema “Semelhança e área de triângulos” e utilizam essas teorias, com o intuito de comparar como esses trabalhos poderiam ser desenvolvidos utilizando a TSD com o apoio do *software* GeoGebra. Além de identificar avanços metodológicos, a pesquisa busca enriquecer o acervo de dissertações do PROFMAT, contribuindo com novas perspectivas e abordagens para o

ensino da matemática. A integração entre teoria, tecnologia e prática matemática pode oferecer *insights* valiosos para futuras pesquisas e aplicações pedagógicas, ampliando as possibilidades de ensino e aprendizagem na área.

Essa dissertação se justifica então, pela ausência de pesquisas sobre a aplicação da TSD voltadas para problemas olímpicos que envolvem o tema “Semelhança e área de triângulos”. A TSD, apresenta um grande potencial para melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática, especialmente em contextos desafiadores, como as olimpíadas de matemática. No entanto, há uma lacuna significativa na literatura acadêmica quando se trata de explorar essa teoria aplicada a problemas específicos, como os de “Semelhança e área de triângulos”.

Em vista disso, manifestou-se o seguinte problema de investigação: Como o software GeoGebra, aliado à TSD, pode atuar como um facilitador na resolução de problemas olímpicos de matemática?

Para responder essa pergunta, será necessário realizar uma pesquisa bibliográfica, onde tomaremos conhecimento da TSD de Brousseau (1986), e de como essa teoria pode ser adaptada a problemas olímpicos. A pesquisa bibliográfica é definida como:

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Boa parte dos estudos exploratórios pode ser definida como pesquisas bibliográficas. As pesquisas sobre ideologias, bem como aquelas que se propõem à análise das diversas posições acerca de um problema, também costumam ser desenvolvidas quase exclusivamente mediante fontes bibliográficas (Gil, 2002, p. 44).

Esta pesquisa está organizada da seguinte forma: no segundo capítulo, apresentaremos uma abordagem teórica, dividida em algumas seções, onde iniciaremos com um breve histórico sobre as olimpíadas de Matemática, abordando suas origens e as principais competições olímpicas de Matemática atualmente. Em seguida, realizaremos uma análise bibliográfica detalhada sobre a TSD, destacando cada uma de suas fases e associando-a à resolução de problemas olímpicos.

Ainda nesse capítulo, discutiremos brevemente o GeoGebra, sem aprofundarmos, devido à vasta gama de produções acadêmicas existentes sobre ele. Por fim, examinaremos as dissertações do acervo do PROFMAT que tratam da TSD e/ou da “Semelhança e área de triângulos”, com o objetivo de analisar como essas temáticas estão sendo tratadas nas produções científicas. Se possível, proporemos ideias alternativas (usando a TSD) aos problemas olímpicos apresentados nas dissertações que abordam o tema “Semelhança e área de triângulos” sem o uso da TSD.

No terceiro capítulo, faremos um estudo aprofundado da teoria matemática relacionada ao tema “Semelhança e área de triângulos”, apresentando definições, teoremas e postulados que serão úteis no capítulo seguinte.

Por fim, no quarto capítulo, apresentaremos algumas situações didáticas olímpicas que utilizam o *software* GeoGebra como facilitador na resolução de alguns problemas olímpicos.

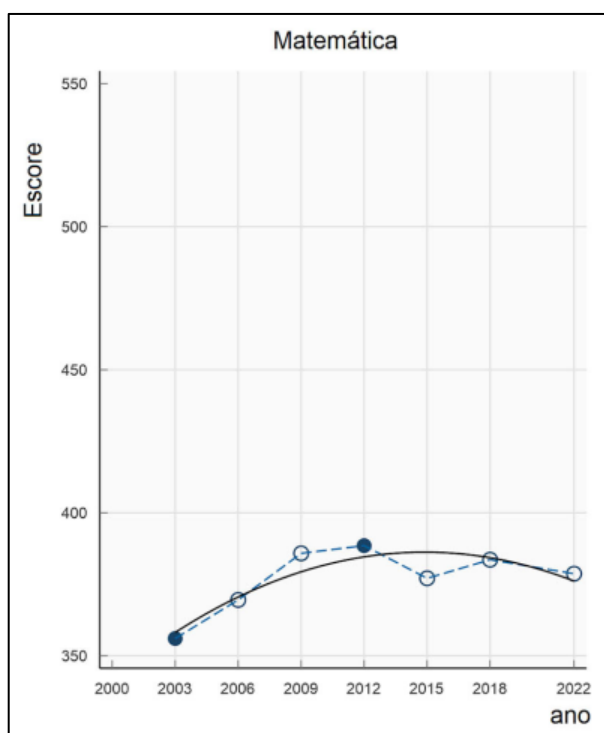
## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1. Contexto histórico das olimpíadas de matemática

Historicamente, a matemática é considerada pelos estudantes como a disciplina mais desafiadora, fato que é corroborado pelos dados do Programa Internacional de Avaliação do Estudante (PISA).

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) avalia o conhecimento e as habilidades dos estudantes na faixa etária dos 15 anos em matemática, leitura e ciências. Os testes exploram a capacidade dos estudantes de resolver problemas complexos, pensar criticamente e se comunicar de forma eficaz. O Pisa apresenta uma noção de como os sistemas educacionais preparam os estudantes para os desafios da vida real e para o sucesso futuro. O Brasil participou pela primeira vez do Pisa em 2000. Ao comparar os resultados internacionais, os formuladores de políticas e educadores do Brasil podem aprender com as políticas e práticas de outros países (Brasil, 2023, p. 6).

**Figura 1 – Tendências no desempenho em Matemática.**



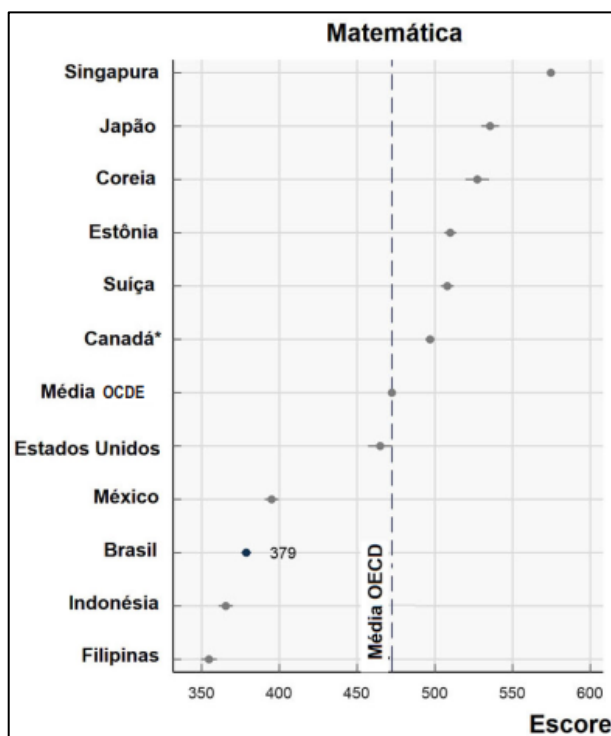
Fonte: OCDE, Banco de dados do Pisa 2022.<sup>2</sup>

De acordo com esses dados, os resultados médios em matemática de 2022 foram praticamente idênticos aos de 2018, mantendo-se notavelmente estáveis ao longo do tempo, com apenas leves flutuações que, em geral, não foram significativas. O relatório também indica que, no período mais recente (2018 a 2022), a diferença entre os estudantes com as maiores

<sup>2</sup> Observação: Os pontos brancos indicam estimativas de desempenho médio que não são estatisticamente significativas acima/abaixo das estimativas do Pisa 2022. As linhas pretas indicam a tendência mais bem ajustada.

pontuações (os 10% melhores) e os estudantes com as menores pontuações (os 10% piores) diminuiu em matemática. No entanto, observou-se que os estudantes de baixo desempenho melhoraram, enquanto os de alto desempenho apresentaram uma leve queda.

**Figura 2 – Brasil, média da OCDE e países de comparação selecionados.**



Fonte: OCDE, Banco de dados do Pisa 2022.<sup>3</sup>

Os dados do PISA apontam ainda que no Brasil, apenas 27% dos estudantes alcançaram pelo menos o Nível 2 de proficiência em matemática, um percentual significativamente inferior à média dos países da OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico), correspondente a 69%. Além disso, apenas cerca de 1% dos estudantes brasileiros alcançaram um alto desempenho em matemática, atingindo o Nível 5 ou 6 no teste de matemática do PISA, em contraste com a média de 9% entre os países da OCDE.

Com isso as olimpíadas de matemática surgiram na intenção de estimular o estudo da matemática entre alunos e professores, identificar e motivar jovens talentos, e encaminhá-los para áreas de ciência e tecnologia. Além disso, Souza Neto, Vilela e Farias (2022), complementam dizendo que essas competições buscam promover a inclusão social e melhorar a qualidade da educação básica no Brasil.

<sup>3</sup> Observações: Os países comparados incluem os seis países com melhor desempenho em cada disciplina e os cinco países com a maior população de estudantes na faixa etária dos 15 anos de idade. As linhas horizontais que se estendem além dos marcadores representam uma medida de incerteza associada às estimativas médias (o intervalo de confiança de 95%).

Souza Neto (2013), destaca que competições de matemática surgiram na Romênia no ano de 1884, sendo o primeiro passo para várias outras competições pelo leste europeu. Porém, apenas em 1959 surge a primeira grande olimpíada de matemática, a *International Mathematical Olympiad* (IMO) realizada na também na Romênia, apenas com participações de países daquela região da Europa. O Brasil participou pela primeira vez apenas da IMO em 1979, sendo anfitrião em 2017, quando foi realizada no Rio de Janeiro.

Além da IMO podemos destacar diversas outras olimpíadas de matemática, como a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), Canguru de Matemática, entre tantas outras, porém neste trabalho iremos focar a OBMEP.

Segundo o IMPA<sup>4</sup> (2025), a OBMEP, realizada pela primeira vez em 2005, é promovida com recursos do Ministério da Educação (MEC) e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI). Trata-se de um projeto nacional voltado para escolas públicas e privadas brasileiras, conduzido pelo IMPA. Seu objetivo é estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área. Os principais objetivos da OBMEP são:

- Estimular e promover o estudo da Matemática;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2025).

Alves (2021), levanta algumas preocupações sobre a forma como a OBMEP é conduzida e seus impactos. O autor destaca que muitos professores de matemática não participam diretamente na elaboração das questões da OBMEP, o que resulta em uma prática didática que pode estar desconectada do modelo e das nuances específicas da Matemática promovida pela competição. Além disso ele condena o caráter seletivo da OBMEP, que tende a eliminar muitos estudantes ao longo de suas fases. Isso significa que muitos alunos não têm a oportunidade de se envolver com a cultura matemática promovida pela competição, perdendo uma experiência educacional valiosa.

Em vista disso, o autor enfatiza a importância de uma compreensão mais profunda do papel dos professores de Matemática. Ele sugere que as interações adequadas entre a tríade

---

<sup>4</sup> Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

estudantes, professores e saber são essenciais para uma verdadeira incorporação e aquisição de novas formas de conhecimento matemático.

Com base no pensamento de Alves (2021), a respeito da OBMEP com seu caráter de competição e da necessidade de uma abordagem mais integrada e compreensiva no ensino de Matemática, nas seções subsequentes abordaremos a respeito de Situações Didáticas voltadas a problemas oriundos de olimpíadas de matemática.

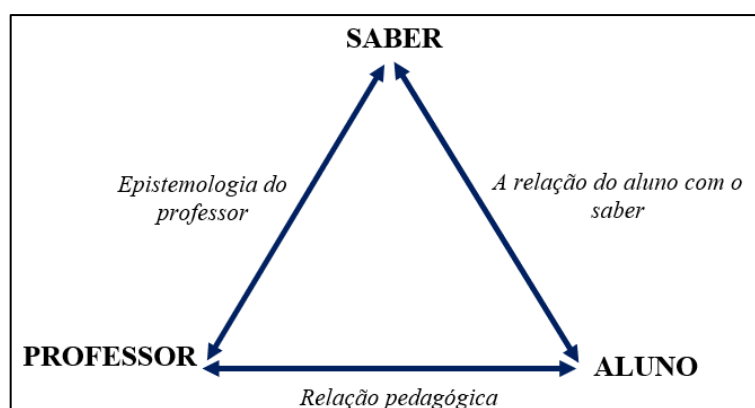
## 2.2. Um pouco sobre a Teoria das Situações Didáticas (TSD)

Como destaca Almouloud (2007) a Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi desenvolvida pelo pesquisador francês Guy Brousseau (1986), com a intenção de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, permitindo a interação entre o aprendiz, o saber e o meio (*milieu*).

Um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos (Brousseau, 1975, p. 6 *apud* Almouloud, 2007, p. 31, tradução do autor).

Santiago e Santana (2023, p. 2), nos dizem que essa teoria tem o objetivo de “identificar as relações entre o professor, estudante e saber”, sendo importante “a teorização de fenômenos ligados a essas três relações”. Essa teorização é denominada por Almouloud (2007) como “Triângulo Didático”.

**Figura 3 – Triângulo didático.**



Fonte: Almouloud (2007, p. 32) adaptado pelo autor.

Almouloud (2007), complementa dizendo que a TSD se apoia em três hipóteses:

1. O aluno aprende adaptando-se a um milieu que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. [...]

2. O milieu não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um milieu no qual serão desenvolvidas situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens.
3. A terceira hipótese postula que esse milieu e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem (Almouloud, 2007, p. 32-33).

Sobre as hipóteses de Almouloud percebemos que a primeira se trata da necessidade de interação do aluno com o meio, sendo uma manifestação de adaptação do aluno, que por meio do “desconforto”, gerando soluções novas que assim como o próprio autor citando Brousseau (1986) diz que isso é “prova da aprendizagem”.

Na segunda hipótese, o autor já argumenta que um ambiente de aprendizagem que não possui intenções didáticas claras, não é suficiente para que facilite o processo de aprendizagem de conhecimentos matemáticos por parte dos alunos. Ressalta ainda a relevância da intencionalidade didática, ou seja, a necessidade do professor planejar e organizar o ambiente de aprendizado de maneira favorável, de tal forma que promova as situações que levem a aprendizagem de forma efetiva. Assim dizendo, o autor acredita que o ensino eficaz de matemática requer uma estrutura e um planejamento intencionais por parte do professor para criar oportunidades que desencadeiem e suportem o processo de aprendizagem dos alunos.

Na terceira hipótese, Almouloud nos sugere que além de ser intencionalmente planejado, o *milieu* e as situações didáticas devem estar ligados aos conhecimentos matemáticos que estão sendo ensinados e aprendidos previamente. Em resumo, o autor destaca a importância de um ambiente de aprendizagem que integre de maneira eficaz e direta os conhecimentos matemáticos no processo de ensino.

A situação didática para Brousseau (1986), pode ser definida como o conjunto de interações entre professor, aluno e conhecimento, estruturadas com o objetivo de promover a aprendizagem. Nessa dinâmica, o professor formula problemas e desafios que estimulam o aluno a agir, refletir e construir conhecimento de maneira autônoma. A situação didática abrange tanto elementos intencionais, associados ao ensino, quanto aspectos naturais, que emergem de um contexto de interação. Dessa forma, o professor busca criar condições para que o aluno se adapte e desenvolva habilidades e conhecimentos em um ambiente que favoreça sua independência e crescimento.

Almouloud (2007), descreve a situação adidática como uma parte essencial da situação didática. Onde a intenção de ensinar não é explicitamente revelada ao aprendiz, mas a situação foi planejada e construída pelo professor para criar um ambiente favorável à apropriação do novo conhecimento. Isso reforça a ideia de que, na situação adidática, o aluno

deve identificar padrões e relações de forma independente, enquanto o professor atua como mediador e observador, intervindo apenas para devolver o problema e estimular a reflexão.

Com base nos estudos de Brousseau (1986), Almouloud (2007) explica que a situação fundamental é um tipo específico de situação adidática que preserva o significado essencial de um conhecimento e define a forma como ele será ensinado. Essa situação assume um papel crucial na aprendizagem, pois considera variáveis didáticas, restrições e reformulações envolvidas na estruturação do conteúdo.

Além disso, a situação fundamental é composta por um conjunto restrito de situações adidáticas, nas quais o conceito matemático surge como a solução mais adequada ao problema proposto. Isso garante que a aprendizagem ocorra dentro de uma perspectiva epistemológica científica, permitindo que o aluno construa seu saber de maneira autônoma, explorando relações e padrões que fortalecem sua compreensão.

Almouloud (2007), nos diz que Brousseau para analisar o processo de aprendizagem, caracterizou a TSD em quatro fases diferentes, nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o saber. As quatro fases fundamentais para aprendizagem são: ação, formulação, validação e institucionalização.

#### 2.2.1. Fase da ação

Teixeira e Passos (2014, p. 155), dizem que é nessa fase que “o aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, por intermédio da interação com o *milieu*, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema”.

Almouloud (2007), acrescenta que a fase de ação coloca o aluno em uma situação em que o problema proposto a ele, tem como melhor solução o saber a ser ensinado e que o aluno aja de maneira que transmita de volta informações sobre sua ação.

Portanto, nela os alunos devem se envolver em uma atividade em que eles possam interagir diretamente com o problema sem a intervenção direta do professor. Os alunos devem por conta própria agir para resolver o problema explorando e tentando encontrar soluções de maneira autônoma. Nessa fase o aluno deve estar focado na experimentação e na descoberta por meio da tentativa e erro.

Almouloud (2007) complementa então que:

Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre,

graças à retroação do milieu. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação (Almouloud, 2007, p. 37).

Um bom exemplo disso, é um professor dá aos alunos um problema de matemática prático, como medir o comprimento de uma sala. Os alunos tentam diferentes métodos podendo chegar a diferentes resultados.

### 2.2.2. Fase da formulação

A fase de formulação é um momento crucial no processo de aprendizagem, pois permite que os alunos organizem e expressem suas ideias de maneira estruturada. Nessa etapa, ocorre a transição entre a experimentação inicial e a explicitação do conhecimento adquirido. Os alunos são incentivados a comunicar suas descobertas, justificando suas escolhas e estratégias, o que contribui para a construção de um modelo mais claro e compartilhável. Essa troca de informações fortalece a compreensão coletiva e individual, promovendo uma aprendizagem mais significativa.

Almouloud (2007), define esta fase:

Nesta fase de uma situação adidática, o aluno troca informações com uma ou várias pessoas, que serão os emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais. Estas mensagens podem estar redigidas em língua natural ou matemática, segundo cada emissor. Como resultado, essa dialética permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas. É o momento em que o aluno ou grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que utilizou e a solução encontrada (Almouloud, 2007, p. 38).

Esse processo de formulação não apenas reforça o aprendizado, mas também desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, essenciais para o desenvolvimento acadêmico e profissional dos alunos.

Levar os alunos a expressarem verbalmente ou por escrito os conhecimentos e procedimentos que utilizaram na fase de ação. Os alunos são incentivados a formular e comunicar suas descobertas e estratégias. O foco está na troca de informações entre os colegas, enfatizando suas diferentes abordagens e descrevendo seus processos utilizados e resultados encontrados.

Um bom exemplo, após medir a sala, do exemplo anterior, os alunos discutem entre si sobre os métodos que usaram e escrevem uma breve descrição dos passos que seguiram para medir a sala com precisão, será perceptível que alguns usarão medidas de comprimento diferentes, como o passo, a polegada, o palmo, entre outras.

### 2.2.3. Fase da validação

É nesta fase em que a solução do aluno é comparada com a solução matemática ou científica “correta”. Então, com essa comparação irá ocorrer o debate, onde o aluno poderá discutir suas ideias com o professor e demais colegas, ou seja, a validação permitirá organizar as interações com o meio.

Uma situação de validação é uma situação cuja solução exige que os atores estabeleçam juntos a validade do conhecimento característico dessa situação. Sua realização efetiva depende, portanto, também da capacidade dos protagonistas de estabelecerem juntos explicitamente essa validade. Esta se apoia no reconhecimento por todos de uma conformidade a uma norma, de uma construtibilidade formal dentro de um certo repertório de regras ou de teoremas conhecidos, de uma pertinência para descrever elementos de uma situação, e/ou de uma adequação verificada para resolvê-la. Ela implica que os protagonistas confrontem suas opiniões sobre a evolução do meio e se acordem segundo as regras do debate científico (Brousseau, 2010, p. 4, tradução nossa).

Portanto, é nesta fase que será avaliado com a intenção de validar ou não as soluções e procedimentos formulados pelos alunos, verificando se são corretos e eficazes. Os alunos são incentivados a criticar e avaliar as soluções uns dos outros.

Tomando como base o exemplo anterior onde os alunos têm que medir o comprimento da sala, nessa etapa os alunos apresentam suas medidas e métodos para a classe. O professor e os colegas discutem quais métodos foram mais precisos e por quê, validando as melhores estratégias e corrigindo erros.

### 2.2.4. Fase da institucionalização

É onde o professor e os alunos discutem e consolidam o conhecimento adquirido, tornando-o uma “norma” ou “regra” na sala de aula. Conforme aponta Almouloud (2007), as situações de institucionalização são caracterizadas pelo momento em que o professor estabelece, de maneira convencional e explícita, o estatuto cognitivo do saber. Depois disso, o conhecimento adquirido torna-se parte do “patrimônio matemático” dos alunos. Deve-se ter o cuidado nessa etapa para que ela seja realizada no tempo certo.

- Se feita muito cedo, a institucionalização interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades para o professor e os alunos;
- Quando feita após o momento adequado, ela reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificulta as aplicações;
- É negociada numa dialética (Almouloud, 2007, p. 40).

Portanto, nessa fase o professor intervém para formalizar o conhecimento adquirido pelos alunos durante as fases anteriores. Tudo aquilo que foi gerado pelos alunos de forma

informal, será transformado em conhecimento matemático formal e reconhecido. Este conhecimento é então “institucionalizado”, ou seja, é incorporado ao currículo oficial e aos esquemas mentais dos alunos.

Do exemplo que estamos trabalhando então, o professor explica como o método de medição que os alunos descobriram está relacionado a conceitos matemáticos formais, como unidades de medida e precisão. Ele introduz termos como “perímetro” e “área” e mostra como usar instrumentos de medição padrão.

Essas fases são sequenciais e cada uma constrói sobre a anterior, promovendo um aprendizado profundo e compreensivo através da interação, comunicação, validação e formalização dos conhecimentos matemáticos. Após seguir essas quatro fases o aluno terá aptidão para aplicar todo o saber adquirido em problemas similares, ou até mesmo outro problema.

### **2.3. Situações Didáticas Olímpicas (SDO)**

Visto que a TSD propõe que o professor crie um cenário (*milieu*) no qual, sob determinadas condições, o aluno possa se adaptar, investigar e apropriar-se do conhecimento. Alves (2021), nos diz que a Situação Didática Olímpica (SDO) refere-se a um conjunto de relações, estabelecidas de forma implícita ou explícita, guiadas por uma metodologia de ensino (TSD).

Essas interações englobam um aluno ou grupo de alunos, um contexto específico (incluindo o conhecimento matemático explorado por meio de problemas de competição e olimpíadas) e um sistema educacional. A meta é possibilitar que esses alunos adquiram um conhecimento já consolidado ou em evolução, oriundo de um ambiente de competição coletiva e discussão científica do grupo, incentivando a competição solidária e a resolução de problemas característicos das olimpíadas de matemática.

Alves (2019), define Problema Olímpico (PO) como um conjunto de situações matemáticas apresentadas em um contexto competitivo oficial, restrito exclusivamente aos estudantes participantes, cujo objetivo é alcançar metas e medalhas por meio de estratégias, raciocínios e argumentos matemáticos eficientes, previamente ensinados pelos professores envolvidos nos ciclos de competição.

Desta forma, uma SDO pode ser definida como:

Um conjunto de relações estabelecidas implícita ou explicitamente, balizado por uma metodologia de ensino (TSD) entre um aluno ou grupo(s) de alunos, um certo meio (compreendo, ainda, o conhecimento matemático abordado por intermédio de

problemas de competição e de olimpíadas) e um sistema educativo, com o objetivo de permitir a apropriação, por parte destes alunos, a um conhecimento constituído ou em vias de constituição, oriundo de um ambiente de competição coletiva e debate científico do grupo, a competição solidária e problemas ou conjunto de problemas característicos e abordados nas olimpíadas de Matemática (Alves, 2021, p. 125-126).

Por conseguinte, o autor define SDO como um conceito que visa integrar uma perspectiva didática transpositiva aos PO. Com objetivo de proporcionar uma discussão sobre elementos que devem ser incorporados na prática do professor de matemática. Isso inclui a resolução e a criação de problemas típicos das olimpíadas de matemática, promovendo um ambiente de competição solidária e debate científico, além de inserir aqueles alunos que são excluídos naturalmente durante o processo de competição.

Em síntese, Alves (2021) acrescenta que a noção de SDO tem origem na TSD, formulada por Brousseau (1986), e é voltada para a compreensão dos fenômenos de ensino e aprendizagem matemática. Entende-se então, a SDO como uma adaptação da TSD, objetivando a aprendizagem matemática dos estudantes, onde o professor cria o cenário (*milieu*), com base na resolução de PO. Com isso, o autor estrutura logicamente por meio de uma equação característica a SDO como sendo:  $SDO = PO + TSD$ . Desse modo, as SDO destacam-se como uma ponte essencial entre o aprendizado competitivo e inclusivo, transformando os PO em ferramentas de construção coletiva do saber.

A Figura 4 traz um quadro desenvolvido por Alves (2021) que apresenta algumas relações características da SDO.

**Figura 4 – Descrição e distinção entre as noções de PO e SDO, amparo na TSD.**

| <i>Características</i>             | <i>Problema Olímpico (PO)</i>                                                                                                                                     | <i>Situação Didática Olímpica (SDO)</i>                                                                                                                                                            |
|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Dos problemas envolvidos</b>    | Problemas de competições, elaborados e estruturados de forma serial, tendo em vista a aplicação dos três níveis hierárquicos previstos pela OBMEP em competições. | Problemas de competições readaptados, reestruturados, modificados e circunstanciados, tendo em vista um grupo ou grupos de alunos particulares, com o amparo da TSD.                               |
| <b>Dos competidores</b>            | Ação individual de participação nas etapas das OBMEP, visando à obtenção de colocações distinguidas no certame.                                                   | Ação e trabalho em equipe, visando à investigação científica e à evolução coletiva do conhecimento do grupo.                                                                                       |
| <b>Do professor</b>                | Não presente. Equipes de profissionais especialistas na confecção/produção de questões visando à seleção (identificação) de prodígios e medalhistas.              | Promotor da situação de ação, situação de formulação, situação de validação e a institucionalização do conhecimento matemático para o grupo ou grupos de competidores em sua própria sala de aula. |
| <b>Uso e emprego da tecnologia</b> | Ausente e não prevista sua exploração em certames oficiais ou competições nacionais.                                                                              | Empregada para resultar nas alterações, modificações necessárias e adaptação para o grupo ou grupos de estudantes.                                                                                 |
| <b>Dos objetivos finais</b>        | Seleção, classificação. Distinção social para os alunos mais eficientes e notáveis no certame, objetivando a certificação e o laureamento.                        | Promoção do grupo ou grupos de estudantes com habilidades acima da média, bem como estudantes com poucas chances de maior êxito individual.                                                        |

Fonte: Alves (2021).

No quadro há a comparação entre os PO e SDO, destacando que os PO são problemas estruturados para competições individuais, focados na seleção e distinção dos melhores alunos, enquanto as SDO são problemas adaptados para grupos, promovendo a colaboração, investigação científica e desenvolvimento coletivo. Nos PO, os problemas são elaborados por especialistas e o professor não participa diretamente, ao passo que nas SDO, o professor atua como facilitador, promovendo a formulação e validação do conhecimento matemático.

Concluimos então, que o quadro evidencia que a SDO representa um avanço significativo em relação ao PO, ao incorporar uma abordagem pedagógica e inclusiva. Essa integração amplia as oportunidades educacionais, tornando o aprendizado matemático um processo colaborativo e acessível. Dessa forma, as SDO destacam-se como uma estratégia eficaz para transformar os problemas olímpicos em ferramentas de ensino, favorecendo tanto a inclusão quanto o debate científico.

No quarto capítulo, apresentaremos algumas SDO que estruturam um percurso metodológico, baseado nas etapas previstas pela TSD, com auxílio do *software* GeoGebra como suporte na visualização ou até mesmo resolução do PO.

## 2.4. Alguns aspectos sobre o *software* GeoGebra

O GeoGebra é um *software* gratuito dinâmico de matemática criado em 2001 por Markus Hohenwarter como parte de sua dissertação de mestrado. Inicialmente desenvolvido para conectar álgebra e geometria, o programa evoluiu rapidamente e hoje abrange estatística, cálculo, tabelas e gráficos, tornando-se uma ferramenta versátil para diferentes níveis de ensino.

Sua interface intuitiva e compatível com diversas plataformas, fazem dele um recurso acessível para professores e alunos, independentemente de sua experiência com tecnologia. Segundo Lavicza *et al.* (2020), como *software* livre, ele desempenha um papel fundamental na promoção de novas estratégias de ensino e aprendizagem, permitindo a exploração de conceitos matemáticos, a formulação de conjecturas e a investigação de relações matemáticas. Dessa forma, o GeoGebra contribui significativamente para a construção e o aprofundamento do conhecimento.

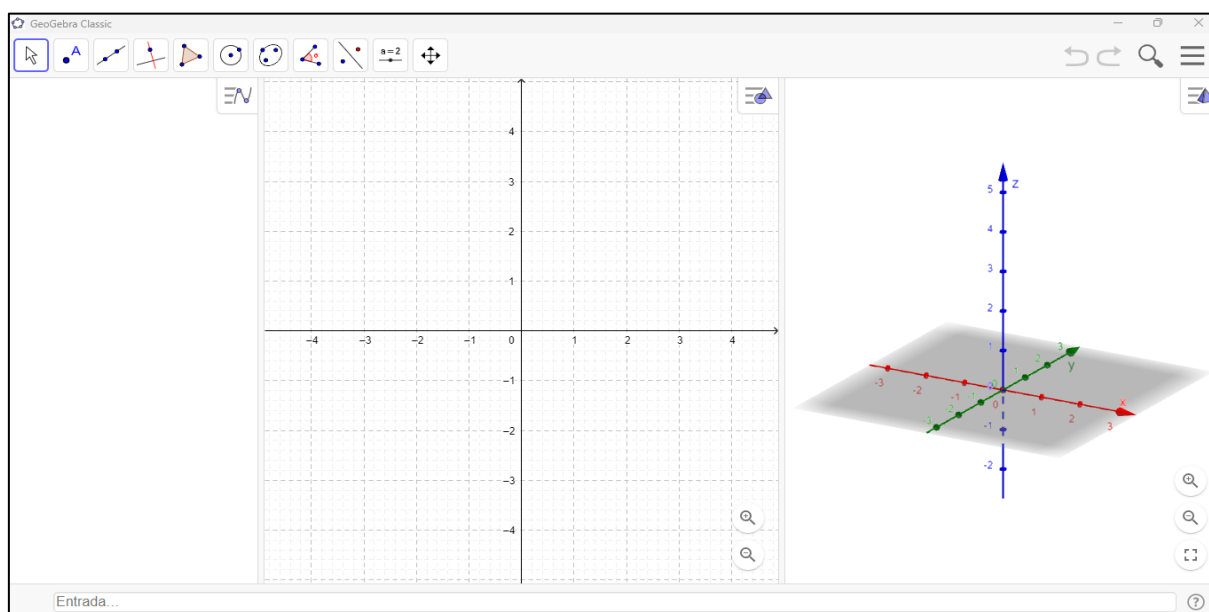
[...] o GeoGebra foi originalmente criado para conectar álgebra e geometria em uma única plataforma. Porém, devido ao seu rápido desenvolvimento, atualmente o *software* pode ser utilizado na maioria das disciplinas matemáticas e estende-se a tecnologias como Realidade Virtual e Aumentada, Impressão 3D e dispositivos móveis (Mathias, *et. al.*, 2022, p. 9-10).

O GeoGebra se destaca como uma ferramenta inclusiva, especialmente para alunos que não participam de olimpíadas de matemática. Muitos desses estudantes enfrentam dificuldades na disciplina devido à abordagem tradicional, que prioriza a memorização de fórmulas em vez da experimentação e construção ativa do conhecimento. O *software* rompe com essa lógica ao permitir uma exploração visual e interativa dos conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais valioso e com maior alcance.

Segundo Andrade (2017), o grande diferencial do GeoGebra está na eficiência com que trabalha conceitos matemáticos, abrangendo desde geometria e álgebra até áreas mais avançadas, como geometria espacial, cálculo e estatística. Sua versatilidade permite sua aplicação em diferentes níveis de ensino, desde as séries iniciais até o ensino superior, tornando-o uma ferramenta acessível e adaptável para alunos iniciantes e avançados.

Ribeiro e Souza (2016), dizem que o GeoGebra proporciona aos alunos maior controle sobre o próprio ritmo de aprendizagem, pois transforma objetos estáticos em dinâmicos, permitindo manipulação e visualização de movimentos. Dessa forma, o software facilita a compreensão dos conteúdos e apoia a superação de dificuldades cognitivas durante o processo de ensino. Desta maneira, promove a autonomia dos alunos e inclui a parcela de alunos que não obtém êxito em competições olímpicas de matemática, além de incentivar a experimentação.

**Figura 5 – Interface do *Software* GeoGebra.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

A integração das SDO ao GeoGebra amplia seu impacto educacional, tornando o ensino da matemática mais acessível e dinâmico. Tradicionalmente voltadas para alunos de alto

desempenho, as olimpíadas de matemática, quando adaptadas ao GeoGebra, permitem que todos os estudantes desenvolvam habilidades por meio da resolução de problemas desafiadores, sem o caráter competitivo. Dessa forma, o aprendizado se transforma em uma experiência investigativa, onde os alunos podem testar hipóteses, visualizar resultados em tempo real e construir seu próprio conhecimento.

Ao incorporar tecnologia e metodologias inovadoras, como as SDO, o GeoGebra se consolida como uma ferramenta essencial para democratizar o ensino da matemática. Sua versatilidade também se destaca na resolução de PO, especialmente quando associado à TSD. Essa abordagem possibilita a criação de SDO interativas, que combinam desafios matemáticos com um ambiente exploratório, favorecendo a construção do conhecimento de forma dinâmica.

O GeoGebra surge como uma ferramenta para equilibrar os diferentes perfis de alunos. Enquanto alunos considerados “olímpicos” demonstram facilidade em visualizar e desenvolver mentalmente modelos geométricos de resolução, muitos outros enfrentam dificuldades nesse processo e, por isso, não obtêm êxito em contextos competitivos.

Dessa forma, cabe ao professor utilizar o *software* para criar situações didáticas que auxiliem esses alunos, permitindo que também desenvolvam modelos de resolução por meio de PO. Esse processo favorece a aprendizagem ao tornar a construção do conhecimento mais palatável. Esse é um desafio real para qualquer educador que busca ensinar por meio da resolução de PO, encontrar formas de nivelar e inserir alunos com capacidades altamente distintas no processo de aprendizagem.

Para compreender melhor essa aplicação, foi realizada uma análise do acervo de dissertações do PROFMAT, investigando como o GeoGebra tem sido utilizado na formulação e resolução de problemas matemáticos, contribuindo para novas estratégias de ensino e aprendizagem dentro desse contexto acadêmico.

## **2.5. Análise de dissertações sobre olimpíadas no PROFMAT**

Essa pesquisa busca também analisar dentre o acervo de trabalhos dissertativos oriundos do PROFMAT, aqueles que deram foco a falar de nossa problemática, pois, essa é uma dúvida que surgiu, pois, como vimos as olimpíadas de matemática tem como objetivo principal captar jovens talentos, considerados prodígios. Porém, nesse processo, uma grande parcela dos alunos fica pelo caminho, por não obterem êxito diante dessas competições, sendo desconsiderados desse processo de aprendizagem por meio de PO, por motivos que serão discutidos no decorrer desse trabalho.

A parte desconsiderada deste enredo diz respeito aos estudantes que não alcançaram sucesso representativo em competições e, acima de tudo, aos estudantes que, por razões gerais que não queremos discutir aqui, ficaram fora do processo ou careceram de motivação e incentivo para perseverar no processo de estudo da Matemática, de acordo com as características marcantes de sua forma padrão de apresentação por meio de (POs) (Alves, 2019, p. 98, tradução nossa).

Os trabalhos foram inicialmente organizados com base no conteúdo matemático explorado, conforme identificado nos títulos. Para ampliar a análise e proporcionar uma compreensão mais profunda das contribuições apresentadas, foram adotados critérios adicionais de organização.

Severino (2000), nos diz que nem sempre o título reflete com precisão o tema abordado, em alguns casos, ele sugere o conteúdo por associação ou analogia, em outros, pode não ter relação direta com o assunto tratado. Dessa forma, torna-se essencial captar a perspectiva de abordagem do autor, que delimita o escopo da discussão e define os contornos dentro dos quais o tema é explorado.

Com isso em mente, em um segundo momento, realizou-se a leitura dos resumos para identificar a questão de pesquisa, os objetivos, os públicos envolvidos e os aportes teóricos e metodológicos empregados, permitindo uma categorização mais precisa e significativa dos trabalhos.

Ao realizar uma filtragem no acervo de dissertações de mestrado disponíveis no site oficial do PROFMAT, utilizando a palavra-chave “olimpíada”, foram identificados 55 registros. Desses, apenas 3 abordam o tema “semelhança e áreas de triângulos” no contexto de olimpíadas. Notavelmente, nenhum dos trabalhos mencionados fez uso da TSD como base, o que evidencia que os alunos não competidores acabam sendo deixados de lado nas práticas pedagógicas desenvolvidas para tais estudos. Além disso, destaca-se o fato de que nenhum desses trabalhos utilizou o *software* GeoGebra como recurso educacional.

**Tabela 1 – Análise das dissertações do PROFMAT pela palavra-chave “olimpíada”.**

|                | Faz uso da<br>TSD? | Aborda<br>Semelhança e<br>área de<br>triângulos? | Faz uso do<br>GeoGebra? |
|----------------|--------------------|--------------------------------------------------|-------------------------|
| <b>Sim</b>     | 0                  | 3                                                | 0                       |
| <b>Não</b>     | 55                 | 52                                               | 55                      |
| <b>Sim (%)</b> | 0,00%              | 5,45%                                            | 0,00%                   |
| <b>Não (%)</b> | 100,00%            | 94,55%                                           | 100,00%                 |

Fonte: Elaborado pelo autor.

A aplicação da TSD em problemas olímpicos, ou seja, uma SDO, tem demonstrado grande potencial para atrair alunos não competidores, tornando o ensino de matemática mais acessível. Estudos como os de Silva, Alves e Menezes (2021) e Sousa e Alves (2024) evidenciam que a SDO, ao estruturar o aprendizado por meio de situações didáticas bem definidas, favorece a autonomia dos alunos e amplia seu interesse pela matemática, independentemente de sua experiência prévia em competições.

Nesse contexto, a integração da SDO com o GeoGebra representa uma abordagem inovadora, especialmente no estudo de semelhança e áreas de triângulos. O GeoGebra permite que os alunos visualizem interativamente os conceitos matemáticos, manipulando figuras geométricas e explorando propriedades fundamentais. Por exemplo, ao trabalhar com triângulos semelhantes, os estudantes podem alterar dinamicamente os lados e ângulos das figuras, observando como as razões de proporcionalidade se mantêm constantes. Esse tipo de experimentação facilita a compreensão dos conceitos e estimula o pensamento crítico.

Além disso, o GeoGebra cria um ambiente de aprendizagem exploratório, no qual os alunos podem testar hipóteses e validar suas descobertas, tornando o ensino mais democrático e acessível. Diferente das abordagens tradicionais voltadas para olimpíadas, que muitas vezes favorecem apenas os alunos mais avançados, essa metodologia permite que todos os estudantes desenvolvam suas habilidades matemáticas de forma intuitiva e envolvente.

Dessa forma, a integração do GeoGebra com a TSD não apenas fortalece o ensino da matemática, mas também transforma a sala de aula em um espaço mais inclusivo e estimulante. Ao permitir que os alunos explorem conceitos matemáticos de maneira interativa, essa abordagem contribui para a construção de uma educação mais democrática, na qual cada estudante se sente motivado a aprender e desenvolver suas habilidades, independentemente de sua experiência prévia em competições.

Realizando a mesma análise com relação à expressão “situações didáticas”, encontramos apenas 7 registros (Ver Tabela 2). Desses, nenhum está voltado para problemas olímpicos, destacando a escassez de pesquisas que abordam essa temática específica no PROFMAT, sugerindo uma necessidade crescente de estudos que explorem a aplicação da TSD em contextos olímpicos. Diversos autores têm iniciado essa exploração, mas ainda há um vasto campo a ser investigado para enriquecer o ensino de matemática e incluir mais alunos em competições matemáticas. Ressalta-se a existência que apenas um destes trabalhos aborda a temática “Semelhança e área de triângulos” com uso do *software* GeoGebra, porém este não utiliza PO como base para sua proposta.

**Tabela 2 – Análise das dissertações do PROFMAT pela palavra-chave “situações didáticas”.**

|                | Faz uso da TSD? | Aborda Semelhança e área de triângulos? | Faz uso do GeoGebra? | Aborda PO? |
|----------------|-----------------|-----------------------------------------|----------------------|------------|
| <b>Sim</b>     | 7               | 1                                       | 4                    | 0          |
| <b>Não</b>     | 0               | 6                                       | 3                    | 7          |
| <b>Sim (%)</b> | 100,00%         | 14,29%                                  | 57,14%               | 0,00%      |
| <b>Não (%)</b> | 0,00%           | 85,71%                                  | 42,86%               | 100,00%    |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Abar (2012), diz que a presença da TSD como suporte teórico pode ser explicada pelo fato de essa teoria oferecer fundamentos sólidos para a construção de modelos de situações destinadas ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, orientando práticas pedagógicas de forma estruturada e eficaz.

Progredindo com a pesquisa, foi realizado o filtro para a palavra-chave “geometria plana”, buscando ampliar nosso campo de investigação dentro da mesma temática. Essa abordagem visa incluir uma gama mais ampla de tópicos relacionados às olimpíadas de matemática, mantendo o foco na análise de práticas educacionais e métodos de ensino. Com isso, pretendemos identificar novos pontos de convergência entre os temas tratados nas dissertações e os recursos pedagógicos disponíveis, como o *software* GeoGebra, de modo a proporcionar uma visão mais abrangente e enriquecedora do cenário acadêmico.

**Tabela 3 – Análise das dissertações do PROFMAT pela palavra-chave “geometria plana”.**

|                | Faz uso da TSD? | Aborda Semelhança e área de triângulos? | Faz uso do GeoGebra? | Aborda PO? |
|----------------|-----------------|-----------------------------------------|----------------------|------------|
| <b>Sim</b>     | 0               | 26                                      | 29                   | 14         |
| <b>Não</b>     | 88              | 62                                      | 59                   | 74         |
| <b>Sim (%)</b> | 0,00%           | 29,55%                                  | 32,95%               | 15,91%     |
| <b>Não (%)</b> | 100,00%         | 70,45%                                  | 67,05%               | 84,09%     |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, foram encontrados 88 registros, embora nenhum deles utilize a TSD como base (Ver Tabela 3). Ainda assim, observa-se uma representatividade mais significativa dos trabalhos que fazem uso do *software* GeoGebra, totalizando 29 registros, o que corresponde a aproximadamente um terço dos resultados. Além disso, destaca-se que 14 trabalhos adotam PO

como recurso metodológico em suas propostas pedagógicas, demonstrando tanto a diversidade de abordagens dentro do escopo analisado quanto a relevância de incluir esses tipos de problemas no contexto do ensino.

De acordo com Santiago, Santos e Santana (2024), a TSD aliada ao uso do *software* GeoGebra favorece tanto a formação inicial quanto a continuada de professores de Matemática, ao proporcionar uma abordagem interativa que promove a visualização e a compreensão de conteúdos geométricos. Essa combinação permite que os professores desenvolvam práticas pedagógicas mais dinâmicas e envolventes, facilitando o aprendizado e estimulando a construção de significados mais profundos pelos alunos.

Embora essas ferramentas não sejam imprescindíveis, sua ausência pode resultar em práticas pedagógicas mais tradicionais e menos eficazes para atender às demandas de aprendizagem atuais. Essa limitação pode restringir o desenvolvimento de competências relacionadas ao uso de tecnologias e à manipulação de representações matemáticas digitais, aspectos que se tornaram fundamentais para o ensino de Matemática no contexto contemporâneo.

A análise da Tabela 3 revela uma interseção de três dissertações que utilizam o *software* GeoGebra e adotam os PO como recurso metodológico. Os trabalhos de Bachir (2017), Prina (2017) e Martins (2024) destacam-se por explorar o potencial do GeoGebra na construção do conhecimento matemático, aliando sua abordagem à resolução de problemas desafiadores característicos das competições olímpicas.

No entanto, apesar dessa contribuição significativa, essas dissertações não incorporam a TSD em suas metodologias, evidenciando uma lacuna na aplicação desse referencial teórico na interseção entre GeoGebra e PO. Esse aspecto reforça a necessidade de pesquisas que integrem a TSD como estrutura didática para potencializar ainda mais o ensino da Matemática por meio dessas estratégias.

Bachir (2017) apresenta e resolve alguns PO com o suporte do GeoGebra, porém sua abordagem não está alinhada à TSD. Seu estudo tem um foco maior na resolução de problemas envolvendo semelhança de figuras planas, sem a aplicação dos princípios da TSD na estruturação didática dos conceitos.

Um aspecto relevante do trabalho da autora é a análise sob duas perspectivas distintas para o mesmo problema: uma abordagem baseada na solução tradicional, conforme apresentada oficialmente, e outra utilizando o GeoGebra como ferramenta de resolução. No entanto, apesar dessa contribuição metodológica, observa-se que não há uma fundamentação

na TSD, indicando uma oportunidade para explorar como essa teoria poderia enriquecer o ensino de problemas de semelhança por meio do GeoGebra.

Prina (2017) apresenta, em seu estudo, situações da Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU) e utiliza o GeoGebra para a resolução de alguns PO. Seu trabalho se destaca pela atenção aos detalhes na construção das soluções dentro do GeoGebra, explorando minuciosamente cada etapa do processo de modelagem matemática.

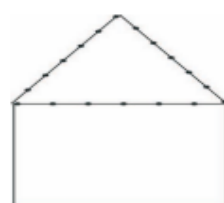
No entanto, um ponto relevante observado na pesquisa é a ênfase atribuída ao papel do professor como protagonista do processo de aprendizagem, o que contrasta com os pressupostos da TSD. Enquanto a TSD enfatiza a autonomia do aluno na construção do conhecimento, o estudo de Prina (2017) direciona sua abordagem para uma dinâmica onde o professor assume a posição central na condução e mediação das atividades, indicando uma abordagem mais tradicional no ensino dos PO.

Martins (2024), embora utilize PO em conjunto com o GeoGebra, apresenta uma abordagem focada exclusivamente na resolução dos problemas, sem envolver ativamente os alunos no processo de construção das soluções. Seu estudo se concentra na aplicação da ferramenta tecnológica para demonstrar resultados, mas não explora estratégias de ensino que incentivem a participação dos estudantes na formulação das respostas, o que limita o desenvolvimento da autonomia e do pensamento crítico dos alunos.

Essa característica diferencia seu trabalho de abordagens baseadas na TSD, que enfatiza a interação do aluno com o problema como parte essencial do aprendizado. A ausência dessa interação sugere uma oportunidade para pesquisas que busquem integrar GeoGebra, PO e TSD, promovendo um ensino mais ativo e centrado no estudante.

Vamos analisar um exemplo de um problema do caderno de questões da OBMEP de 2010, que foi abordado na dissertação de Silva (2013). Esse problema também poderia ser tratado utilizando a TSD.

**Figura 6 – Questão 78 do caderno de questões da OBMEP (2010).**

| Nível 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                       |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>78. Geometria com palitos</b> – A figura dada é formada por um triângulo e um retângulo, usando-se 60 palitos iguais. Para cada lado do triângulo são necessários seis palitos. Se cada palito mede 5 cm de comprimento, qual é a área (em <math>\text{cm}^2</math>) do retângulo da figura?</p> <p>(a) 1 200      (c) 2 700      (e) 4 500<br/>           (b) 1 800      (d) 3 600</p> |  |                                                                                       |

Fonte: IMPA (2010).

A abordagem descrita na dissertação (Ver Figura 7) tem como objetivo principal a solução do problema, mas não envolve os alunos ativamente no processo, mantendo o professor como figura central das ações.

**Figura 7 – Resolução do PO por Silva (2013).**

**Resolução:**

O total de palitos para construir o retângulo é obtido através da expressão  $60 - 12 = 48$ .

O retângulo possui 6 palitos na base, logo  $b = 300$  cm

Na altura serão usados 18 palitos, pois  $2 \cdot 6 + 2 \cdot 18 = 48$ , então  $h = 90$ .

Cálculo para área do retângulo:

$$S = b \cdot h$$

$$S = 300 \cdot 90$$

$$S = 27000$$

Fonte: Silva (2013).

A partir disso, é possível desenvolver uma situação didática baseada nesse problema, em que, na etapa de ação, os alunos utilizem o *software* GeoGebra como ferramenta para permitir que os alunos visualizem o problema de maneira interativa. Essa estratégia possibilitaria que eles explorassem diferentes configurações e possibilidades de disposição dos palitos, promovendo a manipulação direta e, conseqüentemente, a construção de soluções para o problema com maior autonomia e engajamento, essa atividade pode ser individual ou grupo.

Durante a etapa de formulação no GeoGebra, os estudantes identificam o triângulo e o retângulo na figura e calculam suas dimensões, levando em consideração os palitos utilizados nos lados de cada figura e as medidas fornecidas. O professor pode solicitar que eles desenvolvam as expressões matemáticas necessárias para calcular a área do retângulo, considerando o comprimento dos palitos.

Nesse contexto, os alunos podem compreender que a área do retângulo está relacionada à quantidade de palitos utilizada no lado do triângulo. No problema apresentado, há um total de 60 palitos disponíveis, e o triângulo é equilátero, com 6 palitos em cada lado. Dessa forma, o retângulo apresenta um dos seus lados com comprimento equivalente a 6 palitos. Como consequência, há dois lados do retângulo com 6 palitos cada, totalizando 4 segmentos com essa medida. Logo, temos  $4 \cdot 6 = 24$  palitos, nessa situação.

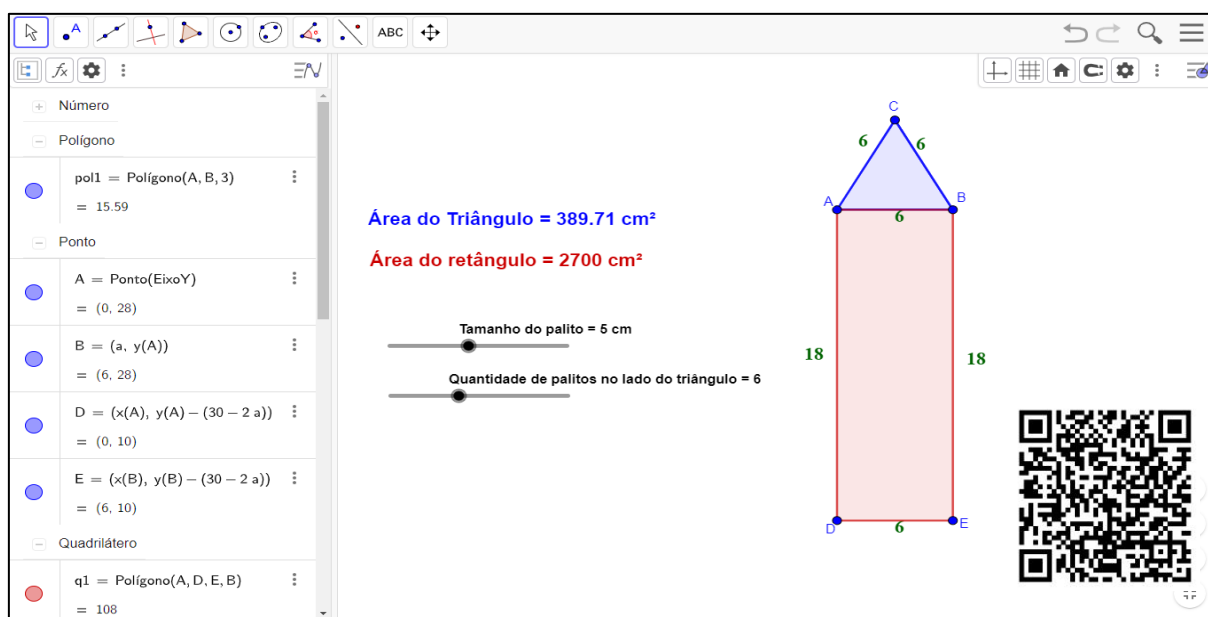
Portanto, restam  $60 - 24 = 36$  palitos, que são divididos igualmente entre os outros dois lados do retângulo. Assim, o retângulo apresenta medidas de 18 palitos de altura e 6 palitos de base. Sabendo que cada palito mede 5 cm, conclui-se que os lados do retângulo possuem 90 cm (altura) e 30 cm (base), respectivamente. Consequentemente, a área do retângulo será:

$$A_{\text{Retângulo}} = 90 \cdot 30 = 2700 \text{ cm}^2$$

Esse problema pode ser facilmente ajustado conforme os interesses do professor, permitindo aos alunos desenvolverem uma compreensão mais aprofundada desse tipo de situação matemática. Além disso, nesta etapa, o diálogo entre os alunos desempenha um papel fundamental. Eles podem, juntos, relembrar fórmulas, compartilhar técnicas de resolução, trocar dicas e, dessa maneira, validar as ideias obtidas na etapa anterior, e assim seguir para próxima etapa.

Na fase de validação no GeoGebra, os alunos analisam o triângulo e o retângulo na figura, calculando suas dimensões com base nos palitos utilizados nos lados de cada forma. O professor pode solicitar que eles desenvolvam as expressões matemáticas necessárias para calcular a área do retângulo, considerando o comprimento dos palitos. Nesta etapa, os estudantes apresentam e defendem suas ideias, permitindo que os demais possam questioná-las e, através dessa discussão, cheguem juntos a um consenso.

**Figura 8 – Questão 78 do caderno de questões da OBMEP (2010) no GeoGebra.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, na etapa de institucionalização, o professor reassume seu papel como figura central do processo, com o objetivo de consolidar os conhecimentos adquiridos pelos

alunos ao longo das etapas anteriores. Esse momento é dedicado ao reforço ou à revisão de conceitos que não tenham sido plenamente compreendidos pela maioria dos estudantes. Desse modo, o saber desenvolvido ao longo das fases anteriores é sistematizado e transformado em conhecimento matemático estruturado, capaz de ser aplicado na resolução de problemas futuros. Por exemplo, nessa etapa, o professor pode relembrar os conceitos relacionados à área de figuras planas e reaplicar problemas semelhantes para reforçar o aprendizado.

Agora, analisemos um segundo exemplo de situação identificado nas dissertações, que poderia ser aprimorado com o uso da TSD. O problema apresentado a seguir (Ver Figura 9) é oriundo da OBMEP (2011), nível 3, e foi abordado por Bachir (2017) como uma proposta de exercício, sendo deixado à disposição do leitor para resolução.

**Figura 9 – Questão 4 da OBMEP (2011), nível 3.**

**4.** Na figura, os lados do triângulo  $DEF$  são paralelos aos lados do triângulo retângulo  $ABC$ . Os pontos  $H, D, F$  e  $G$  estão alinhados e  $0 \leq x \leq 5$ .

a) Calcule o comprimento de  $GH$  em função de  $x$ .

b) Mostre que  $CG = FG = \frac{5x}{4}$  cm.

c) Faça o gráfico da área  $A$  do triângulo  $DEF$  em função de  $x$ .

Fonte: IMPA (2011).

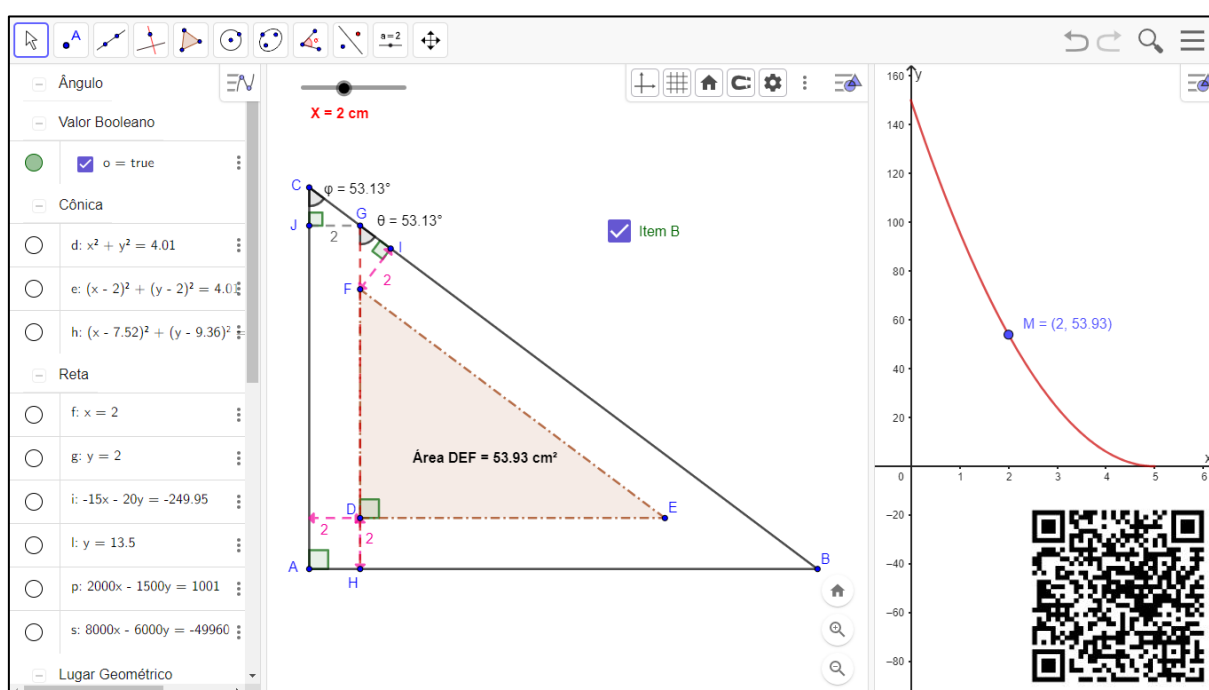
A inclusão da TSD na abordagem desse problema poderia contribuir para uma estruturação mais eficaz do processo de ensino, promovendo maior interação entre os alunos e a situação matemática proposta, garantindo que o aprendizado ocorra de forma mais ativa e significativa.

Este problema pode ser estruturado dentro de uma SDO, onde na fase de ação, o professor, atuando como mediador, deve apresentar o problema aos alunos e permitir que eles, de maneira autônoma, explorem diferentes estratégias para desenvolver a solução. Essa

abordagem favorece a experimentação, a exploração ativa e a construção do conhecimento, tornando os alunos protagonistas do processo de aprendizagem.

Durante a resolução, os estudantes poderão relembrar conceitos, fórmulas e teoremas que possam contribuir para a solução do problema. O uso do GeoGebra pode potencializar essa etapa, permitindo que os alunos manipulem o controle deslizante  $x$  (Ver Figura 10) e observem de forma dinâmica as principais características do problema. Essa interação possibilita uma compreensão mais intuitiva, tornando o processo de resolução mais acessível e eficaz.

**Figura 10 – Questão 4 da OBMEP (2011), nível 3 no GeoGebra.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na próxima fase, os alunos devem formular a resolução do problema, consolidando as estratégias desenvolvidas na etapa anterior. O papel do professor nesse momento é estimular o diálogo e a troca de informações entre os estudantes, criando um ambiente colaborativo onde possam compartilhar ideias, discutir diferentes abordagens e refiná-las em conjunto. Essa interação é essencial para que os alunos não apenas encontrem a solução, mas também compreendam o raciocínio matemático por trás dela, fortalecendo sua autonomia intelectual. O professor pode intervir com questionamentos estratégicos, incentivando a reflexão e guiando a construção do conhecimento sem oferecer respostas diretas.

Então, a partir dessa interação espera-se que eles percebam que os triângulos  $ABC$  e  $HBG$  são semelhantes, pois tem os lados  $\overline{CA}$  e  $\overline{GH}$  paralelos entre si, e o ângulo  $\hat{B}$  em comum. Logo, eles podem fazer uma pequena relação entre seus lados obtendo:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{CA} &= \frac{HB}{GH} \\ \frac{20}{15} &= \frac{20-x}{GH} \\ \overline{GH} &= \frac{15 \cdot (20-x)}{20} \\ \overline{GH} &= 15 - \frac{3}{4}x\end{aligned}$$

Para mostrar que os segmentos  $\overline{CG}$  e  $\overline{FG}$  possuem medida igual a  $\frac{5}{4}x$ , os alunos nessa interação pode usar do fato dos lados  $\overline{CA}$  e  $\overline{GH}$  serem paralelos entre si, e com isso traçarem segmentos  $\overline{JG}$  perpendicular a  $\overline{CA}$  e o segmento  $\overline{IF}$  perpendicular a  $\overline{BC}$ . Logo, eles poderão observar a semelhança dos triângulos  $JGC$  e  $IFG$ , pois ambos têm um cateto de medida  $x$  e são triângulos retângulos, além de possuírem os ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{G}$  correspondentes. Além disso, essa relação de semelhança se estende ao triângulo  $ABC$ , permitindo uma análise ainda mais detalhada.

A visualização dessa semelhança pode ser facilitada pelo uso do GeoGebra, onde os alunos podem manipular os elementos geométricos e confirmar as propriedades matemáticas de maneira dinâmica e interativa. A possibilidade de ajustar variáveis como o controle deslizante  $x$  dentro do *software* oferece um recurso visual poderoso.

Dessa forma, eles podem relacionar novamente os lados desses triângulos e juntos comprovar o que é solicitado. A relação mais provável de ser escolhida por eles é entre os triângulos  $ABC$  e  $JGC$ , ficando de tal modo:

$$\begin{aligned}\frac{CG}{JG} &= \frac{CB}{AB} \\ \frac{CG}{x} &= \frac{25}{20} \\ \overline{CG} &= \frac{5}{4} \cdot x\end{aligned}$$

Por fim, a construção do gráfico da área do triângulo  $DEF$  pode ser iniciada determinando, primeiramente, o valor do segmento  $\overline{DF}$ . A partir dessa descoberta, será possível estruturar a relação entre os elementos dos triângulos  $DEF$  e  $ABC$ . Dito isso, basta fazermos:

$$\overline{DF} = \overline{GH} - \overline{FG} - \overline{DH} = 15 - \frac{3x}{4} - \frac{5x}{4} - x = 15 - 3x$$

Com isso, podemos descobrir a razão de semelhança entre os lados do triângulo  $ABC$  e  $DEF$ :

$$k = \frac{AC}{DF} = \frac{15}{15 - 3x}$$

Como a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre os lados do triângulo, temos:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{A_{ABC}}{A_{DEF}} \\ A_{DEF} &= \frac{150}{\left(\frac{15}{15 - 3x}\right)^2} \\ A_{DEF} &= \frac{2}{3} \cdot (9x^2 - 90x + 225) \\ A_{DEF} &= 6x^2 - 60x + 150 \end{aligned}$$

Como  $0 \leq x \leq 5$ , o gráfico fica como da Figura 10. Esse resultado destaca o potencial do GeoGebra para proporcionar uma imersão significativa dos alunos no PO.

Inicialmente, esses desafios são voltados para um grupo seletivo de alunos considerados competidores, porém, esses alunos representam apenas uma pequena parcela dos estudantes. No entanto, com o uso do GeoGebra, o problema se torna mais acessível, permitindo que todos os alunos, inclusive aqueles que tradicionalmente enfrentam dificuldades nesse processo competitivo, possam interagir, explorar e compreender a matemática de maneira mais visual e intuitiva.

Essa democratização do ensino reflete o impacto positivo da tecnologia educacional, possibilitando que um maior número de estudantes participe ativamente da resolução de problemas matemáticos avançados.

Na próxima etapa, os alunos, individualmente ou em grupo, conforme a orientação do professor, devem defender e validar o que foi desenvolvido nas fases anteriores. A fase de validação desempenha um papel crucial no processo de aprendizagem, pois cria um ambiente de argumentação matemática, possibilitando que os estudantes revisem suas soluções, justifiquem suas escolhas e aperfeiçoem sua compreensão dos conceitos trabalhados.

Durante esse momento, eventuais dúvidas ou imprecisões na resolução podem ser identificadas e discutidas, promovendo um debate construtivo entre os próprios alunos e o professor. Essa troca de ideias possibilita uma interação dinâmica, na qual conceitos são ajustados, erros são corrigidos e lacunas no entendimento são preenchidas, fortalecendo a aprendizagem coletiva.

Por fim, na etapa de institucionalização, o professor assume um papel central no processo de aprendizagem, consolidando os conhecimentos desenvolvidos pelos alunos ao longo das fases anteriores. Nesse momento, ele tem duas funções essenciais: esclarecer eventuais dúvidas remanescentes e sistematizar todo o conteúdo trabalhado, transformando-o em saber científico.

Esse conhecimento formalizado poderá ser reutilizado pelos estudantes na resolução de problemas similares no futuro, ampliando sua compreensão matemática e fortalecendo sua autonomia no aprendizado. Dessa forma, a institucionalização garante que as descobertas e construções feitas ao longo do processo didático sejam validadas e absorvidas de maneira estruturada.

No capítulo 4 deste trabalho, serão apresentados mais SDO com maior profundidade e enfoque, oferecendo uma análise detalhada. Aqui, apresentamos apenas uma amostra com caráter ilustrativo e comparativo, evidenciando o processo abordado nas dissertações analisadas em contraste com o uso da TSD para trabalhar este PO em um contexto de ensino voltado à Semelhança e à área de triângulos.

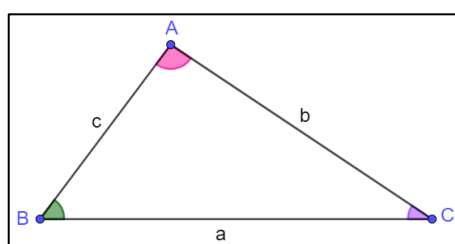
### 3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos conceitos matemáticos sobre semelhança e área de triângulos, amplamente conhecidos e aceitos, que constituem a base fundamental de nosso entendimento atual. Para embasar e ilustrar esses conhecimentos, utilizamos as obras de diversos autores renomados, como Barbosa (1995), Dolce e Pompeu (2013), Antar Neto *et. al.* (2010) e Muniz Neto (2022), cujas contribuições são reconhecidas na literatura matemática. Assim, as referências citadas são essenciais para garantir a precisão e a credibilidade das informações discutidas ao longo deste trabalho.

Exploramos os conceitos essenciais que definem a semelhança entre triângulos, incluindo critérios de semelhança e suas aplicações práticas. Além disso, abordamos fórmulas para o cálculo da área de triângulos, destacando diferentes métodos e teoremas que facilitam a compreensão e a resolução de problemas relacionados. O objetivo deste capítulo é, portanto, fornecer uma base sólida de conhecimento que facilite a compreensão durante a resolução das SDO apresentadas no capítulo seguinte.

**Definição 1.** Dados três pontos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , não colineares, a reunião dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  chama-se triângulo  $ABC$  ( $\triangle ABC$ ).

**Figura 11 – Triângulo.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são denominados **vértices** do  $\triangle ABC$  e os segmentos  $\overline{AB}$  (de medida  $c$ ),  $\overline{AC}$  (de medida  $b$ ) e  $\overline{BC}$  (de medida  $a$ ) são os **lados** do triângulo. Já os ângulos  $B\hat{A}C$  ou  $\hat{A}$ ,  $A\hat{B}C$  ou  $\hat{B}$  e  $A\hat{C}B$  ou  $\hat{C}$  são os ângulos do  $\triangle ABC$  (ou ângulos internos do  $\triangle ABC$ ). Diz-se que os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  e os ângulos  $\hat{C}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{A}$  são, respectivamente, opostos.

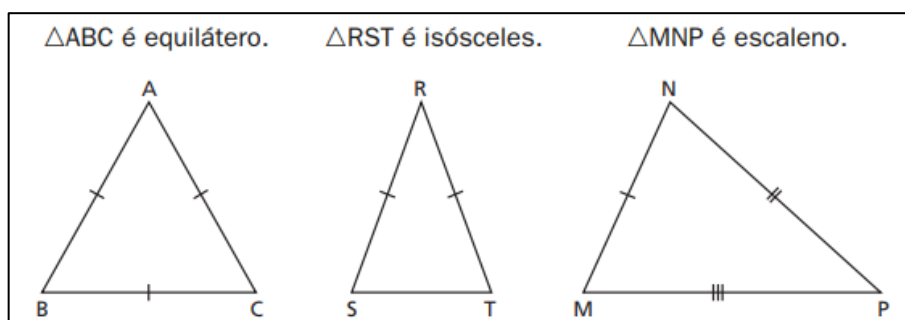
Os triângulos podem ser classificados de duas formas, em relação aos lados ou em relação aos seus ângulos internos.

Quanto aos lados os triângulos são classificados como:

- **Equilátero:** Possui os três lados congruentes. Todos os ângulos internos também são congruentes, cada um medindo  $60^\circ$ .

- **Isósceles:** Possui dois lados iguais e um lado diferente. Os ângulos opostos aos lados iguais também são iguais.
- **Escaleno:** Possui todos os lados com medidas diferentes. Consequentemente, todos os ângulos internos também são diferentes.

**Figura 12 – Classificação de triângulo com relação aos lados.**

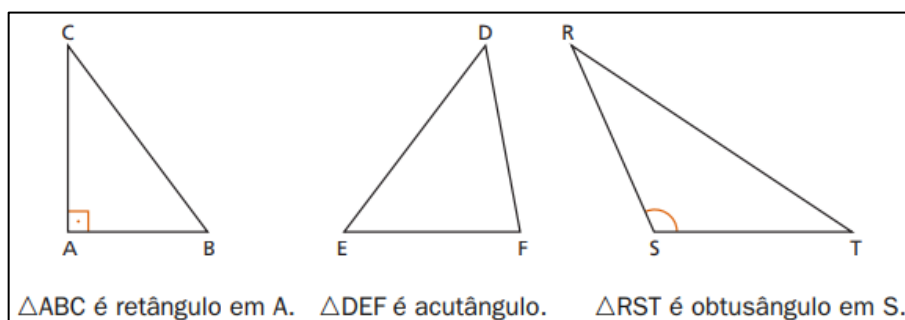


Fonte: Dolce e Pompeu (2013).

Quanto aos ângulos os triângulos são classificados como:

- **Acutângulo:** Possui os três ângulos internos agudos, ou seja, menores que  $90^\circ$ .
- **Retângulo:** Possui um ângulo interno reto, ou seja, igual a  $90^\circ$ .
- **Obtusângulo:** Possui um ângulo interno obtuso, ou seja, maior que  $90^\circ$ .

**Figura 13 – Classificação de triângulo com relação aos ângulos.**



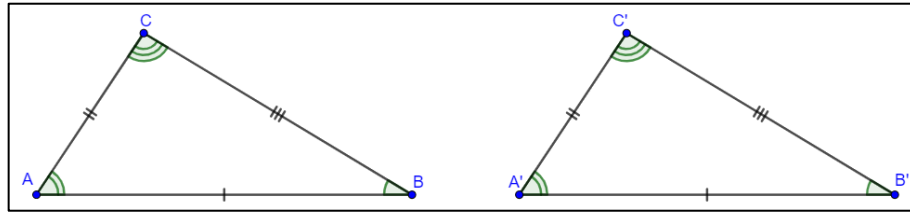
Fonte: Dolce e Pompeu (2013).

O lado oposto ao ângulo reto em um triângulo retângulo é chamado de **hipotenusa**, enquanto os outros dois lados são conhecidos como **catetos**.

### 3.1. Congruência de triângulos

**Postulado 2.** *Um triângulo é congruente ( $\equiv$ ) a outro, se, e somente se, for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus ângulos e seus lados, de modo que seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro. E seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.*

**Figura 14 – Congruência de triângulos.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} AB \equiv A'B' \\ CA \equiv C'A' \\ BC \equiv B'C' \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \end{cases}$$

A congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.

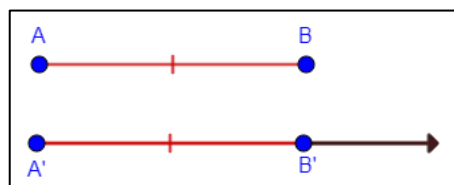
- **Reflexiva:**  $\triangle ABC \equiv \triangle ABC$ .
- **Simétrica:**  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Leftrightarrow \triangle DEF \equiv \triangle ABC$ .
- **Transitiva:**  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  e  $\triangle DEF \equiv \triangle GHI \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle GHI$ .

Essas propriedades são fundamentais na geometria e ajudam a estabelecer relações entre diferentes triângulos.

Existem condições mínimas que garantem a congruência entre dois triângulos. Essas condições são conhecidas como casos ou critérios de congruência. O 1º caso consideraremos um postulado e os demais casos como teoremas, para demonstração de alguns casos necessitaremos dos seguintes postulados previamente apresentados a seguir.

**Postulado 3.** (Transporte de segmentos). *Dados um segmento  $\overline{AB}$  e uma semirreta de origem  $A'$ , existe sobre esta semirreta um único ponto  $B'$  tal que  $\overline{A'B'}$  seja congruente a  $\overline{AB}$ .*

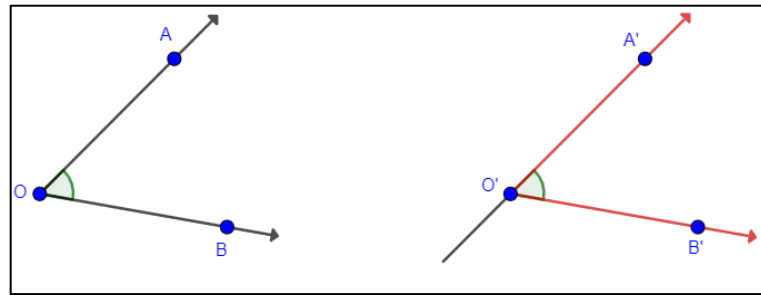
**Figura 15 – Transporte de segmentos.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Postulado 4.** (Transporte de ângulos). *Dados um ângulo  $\hat{AÔB}$  e uma semirreta  $O'A'$  de um plano, existe sobre este plano, e num dos semiplanos que  $O'A'$  permite determinar, uma única semirreta que forma com  $O'A'$  um ângulo  $\hat{A'Ô'B'}$  congruente ao ângulo  $\hat{AÔB}$ .*

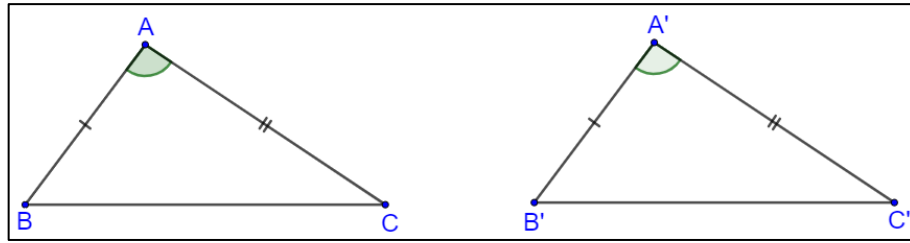
**Figura 16 – Transporte de ângulos.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Postulado 5.** (1º Caso – LAL). *Se dois triângulos possuem dois lados congruentes e o ângulo entre esses lados também é congruente, então os triângulos são congruentes.*

**Figura 17 – 1º caso de congruência (LAL).**

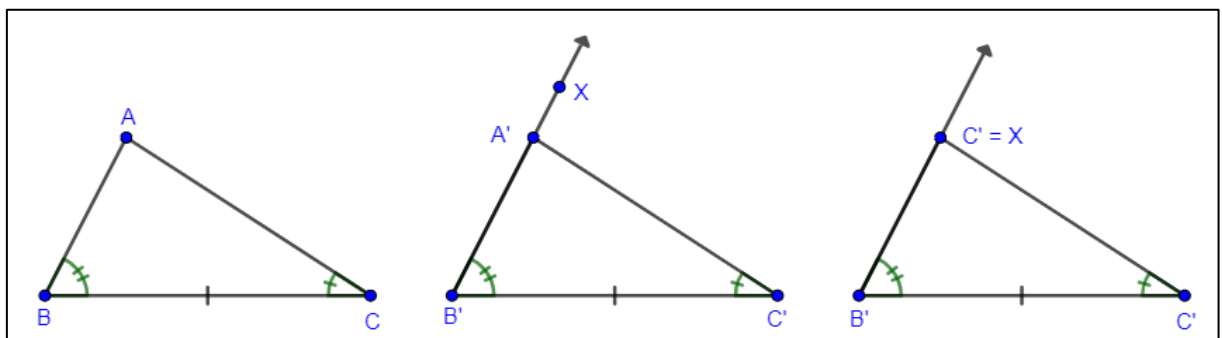


Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array} \right\} \xRightarrow{LAL} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{B} \equiv \hat{B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \hat{C} \equiv \hat{C'} \end{array} \right.$$

**Teorema 6.** (2º Caso – ALA). *Se dois triângulos possuem um lado congruente e os dois ângulos adjacentes a esse lado também são congruentes, então esses triângulos são congruentes.*

**Figura 18 – 2º caso de congruência (ALA).**



Fonte: Elaborado pelo autor.

*Demonstração.*

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \equiv \hat{B}' \quad (1) \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \quad (2) \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \quad (3) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Inicialmente, iremos provar que  $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$ , para que possamos utilizar o 1º caso de congruência. Do Postulado 3 obtemos na semirreta  $\overrightarrow{B'A'}$  um ponto  $X$  de tal maneira que  $\overline{B'X} \equiv \overline{BA}$  (4).

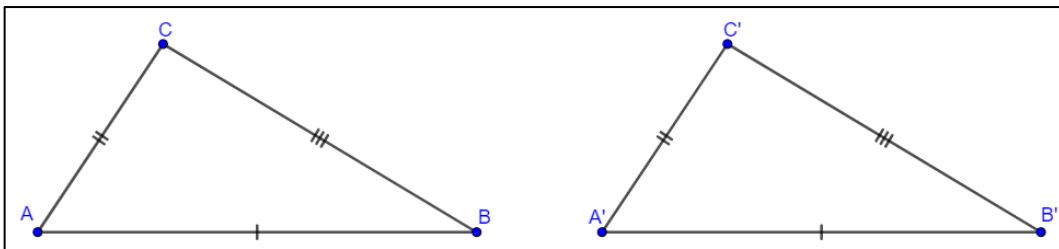
$$\left. \begin{array}{l} (2) \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ (1) \quad \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ (4) \quad \overline{BA} \equiv \overline{B'X'} \end{array} \right\} \xRightarrow{LAL} \triangle ABC \equiv \triangle XB'C' \Rightarrow B\hat{C}A \equiv B\hat{C}X \quad (5)$$

De (3), (5) e do Postulado 4,  $B\hat{C}A \equiv B'\hat{C}'A' \equiv B'\hat{C}'X$ , implica que  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CX} \equiv \overrightarrow{C'A'}$  interceptando-se em um único ponto, logo  $X = A'$ , disso,  $X \equiv A'$ , com (4), implicando em  $\overline{B'A'} \equiv \overline{BA}$ . Então:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BA} \equiv \overline{B'A'} \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{array} \right\} \xRightarrow{LAL} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \quad \square$$

**Teorema 7.** (3º Caso – LLL). *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.*<sup>5</sup>

**Figura 19 – 3º caso de congruência (LLL).**



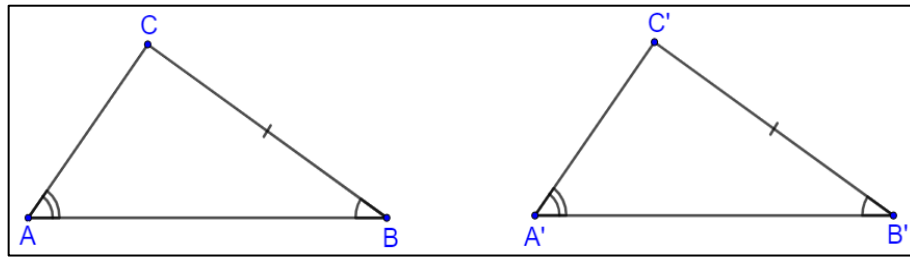
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Teorema 8.** (4º Caso – LAAo). *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.*<sup>6</sup>

<sup>5</sup> Ver demonstração em Barbosa (1995, p. 30-31).

<sup>6</sup> Ver demonstração em Dolce e Pompeu (2013, p. 45).

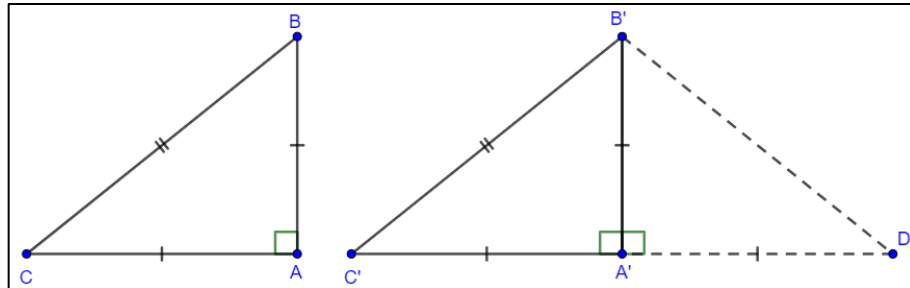
**Figura 20 – 4º caso de congruência (LAAo).**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Teorema 9.** (Caso especial de congruência em triângulos retângulos). *Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.*<sup>7</sup>

**Figura 21 – Caso particular de congruência em triângulos retângulos.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.2. Semelhança de triângulos

**Definição 10.** *Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados homólogos sejam proporcionais. Ou seja:*

$$\left( \begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{M} \\ \hat{B} \equiv \hat{N} \\ \hat{C} \equiv \hat{P} \end{array} \text{ e } \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = k \right) \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

- $\sim$ : semelhante.
- $k$  é chamado de razão de semelhança dos triângulos, onde  $k = 1 \Leftrightarrow \triangle ABC \equiv \triangle MNP$ .

Da definição 10, decorre as seguintes propriedades:

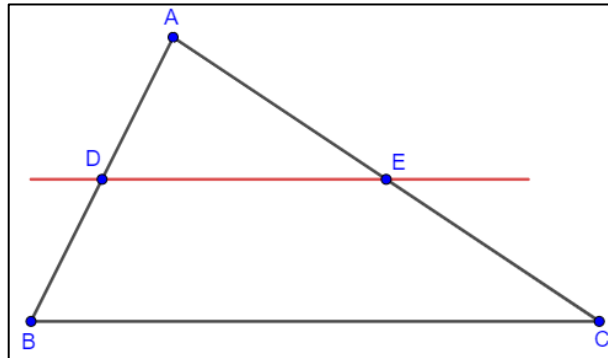
- Reflexiva:  $\triangle ABC \sim \triangle ABC$
- Simétrica:  $\triangle ABC \sim \triangle RST \Leftrightarrow \triangle RST \sim \triangle ABC$
- Transitiva:  $\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \sim \triangle RST \\ \triangle RST \sim \triangle XYZ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle XYZ$

<sup>7</sup> Ver demonstração em Dolce e Pompeu (2013, p. 45-46).

**Teorema 11.** (Teorema fundamental da semelhança). *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*<sup>8</sup>

$$\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

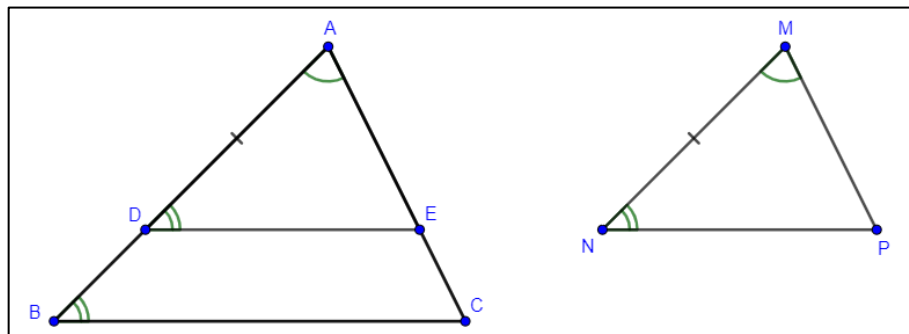
**Figura 22 – Teorema fundamental da semelhança.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Teorema 12.** (1º caso de semelhança – AA). *Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.*

**Figura 23 – 1º caso de semelhança (AA).**



Fonte: Elaborado pelo autor.

*Demonstração.* Queremos mostrar que:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{M} \\ \hat{B} \equiv \hat{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

Supondo que  $\triangle ABC$  e  $\triangle MNP$  não sejam congruentes, se forem congruentes não há nada a provar, e que  $\overline{AB} > \overline{MN}$ . Desta forma, tomemos um ponto  $D \in \overline{AB}$ , de tal maneira que  $\overline{AD} \equiv \overline{MN}$ , e o  $\triangle ADE$  com  $\hat{D} \equiv \hat{N}$  e  $E \in \overline{AC}$ .

<sup>8</sup> Ver demonstração em Dolce e Pompeu (2013, p. 194-195).

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{M} \\ \overline{AD} \equiv \overline{MN} \\ \hat{A} \equiv \hat{M} \end{array} \right\} \xRightarrow{ALA} \triangle ADE \equiv \triangle MNP \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \equiv \hat{N} \\ \hat{N} \equiv \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{D} \Rightarrow \overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC} \xRightarrow{\text{Teorema 11}} \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

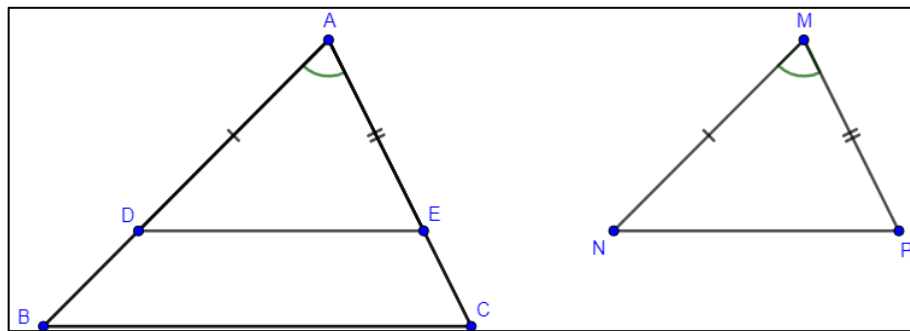
$$(1) \text{ e } (2) \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP \quad \square$$

**Teorema 13.** (2º caso de semelhança – LAL). *Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes.*

*Demonstração.* Queremos mostrar que:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{M} \\ \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = k \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

**Figura 24 – 2º caso de semelhança (LAL).**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se  $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ , não há nada a ser feito, portanto suporemos que eles não sejam congruentes. Desta forma de maneira análoga ao 1º caso, tomemos um ponto  $D \in \overline{AB}$ , de modo que  $\overline{AD} \equiv \overline{MN}$ , e o  $\triangle ADE$  com  $\hat{D} \equiv \hat{B}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} \equiv \overline{MN} \\ \hat{A} \equiv \hat{M} \\ \overline{AE} \equiv \overline{MP} \end{array} \right\} \xRightarrow{LAL} \triangle ADE \equiv \triangle MNP \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \equiv \hat{N} \\ \hat{N} \equiv \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{D} \Rightarrow \overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC} \xRightarrow{\text{Teorema 11}} \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

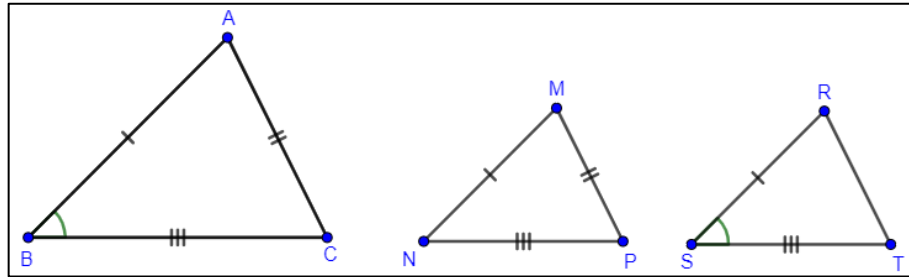
$$(1) \text{ e } (2) \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP \quad \square$$

**Teorema 14.** (3º caso de semelhança – LLL). *Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.*

*Demonstração.* Queremos mostrar que:

$$\left\{ \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = k \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

**Figura 25 – 3º caso de semelhança (LLL).**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Novamente, se  $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ , não há nada a ser feito, portanto, suporemos que eles não sejam congruentes. Construindo o  $\triangle SRT$ , onde  $\hat{S} \equiv \hat{B}$ ,  $\overline{ST} \equiv \overline{NP}$  e  $\overline{RS} \equiv \overline{MN}$ . Da hipótese do teorema, temos que,  $\frac{BC}{ST} = \frac{AB}{RS}$ . Portanto, segundo o Teorema 13,  $\triangle ABC \sim \triangle RST$ . Com isso, então,  $\frac{BC}{ST} \equiv \frac{AC}{RT}$ . Disso, e da hipótese do teorema, temos que  $\overline{MP} \equiv \overline{RT}$ . Desta maneira, concluímos que,  $\triangle MNP \equiv \triangle RST$  (por construção e pelo Teorema 7. Dito isso, da transitividade da semelhança, temos  $\triangle RST \sim \triangle MNP \sim \triangle ABC$ .  $\square$

**Teorema 15.** (Teorema de Pitágoras). *A soma dos quadrados dos catetos é igual a soma do quadrado da hipotenusa.*<sup>9</sup>

### 3.3. Área de triângulo

Para assegurar a objetividade deste estudo e garantir que todos os conceitos de áreas para triângulos tenham utilidade, postulamos as seguintes propriedades como válidas:

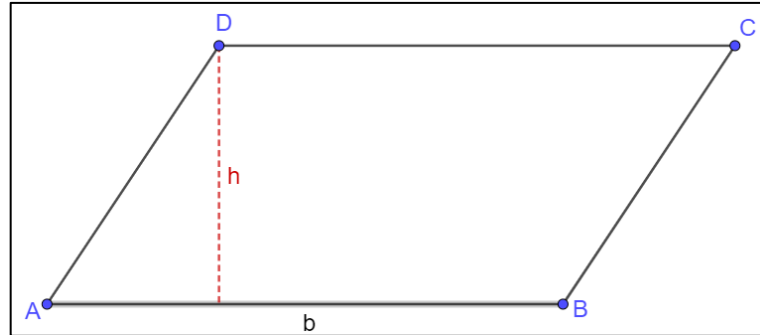
- Polígonos congruentes têm áreas iguais.
- A uma soma de superfícies está associada uma área que é a soma das áreas das superfícies menores.
- Se uma superfície está contida em outra, então sua área é menor (ou igual) que a área da outra.
- A um quadrado de lado 1 cm associamos a área de 1 cm<sup>2</sup>.

**Postulado 16.** *A área de um paralelogramo é calculada multiplicando o comprimento de um de seus lados pela altura correspondente a esse lado.*

<sup>9</sup> Ver demonstração em Barbosa (1995, p. 80).

$$A_{\text{Paralelogramo}} = b \cdot h$$

**Figura 26 – Paralelogramo.**

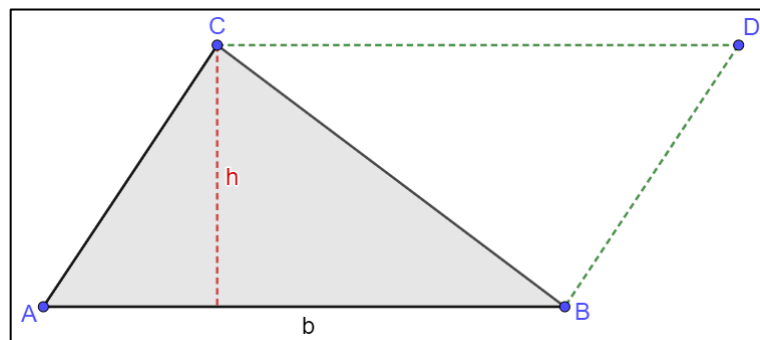


Fonte: Elaborado pelo autor.

**Teorema 17.** (Área do triângulo). *Dado um  $\triangle ABC$  sua área é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.*

$$A_{\text{Triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

**Figura 27 – Demonstração da área do triângulo.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

*Demonstração.* Com  $AC \parallel BD$  e  $CD \parallel AB$ , obtemos o paralelogramo  $ABDC$ , cuja área é  $A_{ABDC} = b \cdot h$ . Mas  $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ , pelo caso *ALA*, logo a área do  $\triangle ABC$  é igual metade da área do paralelogramo  $ABDC$ :

$$A_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

**Corolário 18.** (Área do triângulo equilátero).<sup>10</sup> *Um triângulo equilátero de lado  $a$ , tem altura  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  e sua área é  $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .*

<sup>10</sup> Ver demonstração em Antar Neto *et. al.* (2010).

#### 4. SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

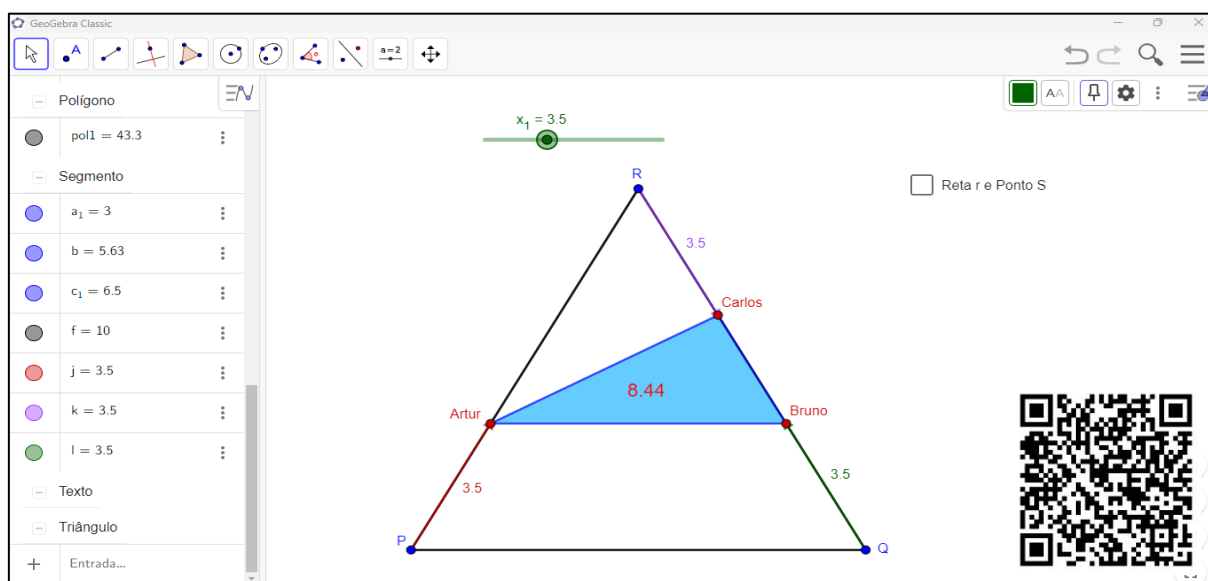
Neste capítulo, com base nos elementos discutidos anteriormente, analisaremos alguns PO e os adaptaremos à noção de SDO. A partir de enunciados de alguns problemas da OBMEP, apresentaremos formas alternativas de explorar e modificar esses conteúdos. Nosso objetivo é utilizar a SDO como uma metodologia de ensino inclusiva, que possa engajar e sensibilizar um maior número de estudantes, especialmente aqueles que não são competidores, para isso usaremos do *software* GeoGebra como arrimo para visualização ou até mesmo solução do PO.

##### 4.1. Situação Didática Olímpica 1

**SDO 1.** (Questão 3 – OBMEP 2017 – Nível 3) Um parque triangular tem três caminhos que formam um triângulo equilátero de lado medindo 10 m de comprimento. Em cada vértice do triângulo, temos um dos três amigos: Artur, Bruno ou Carlos. Eles começam a caminhar ao mesmo tempo, cada um partindo de um dos vértices do triângulo. Artur e Carlos caminham no sentido horário, e o Bruno caminha no sentido anti-horário. Ambos se movem na mesma velocidade e sempre constante (Ver Figura 28). Com base nisso:

- Quando os três amigos tiverem caminhado 2 metros, qual será a área do triângulo formado por eles?
- Em quais momentos a área do triângulo formado pelos amigos será zero?

**Figura 28 – SDO 1 no *software* GeoGebra (Questão 3 – OBMEP 2017).**

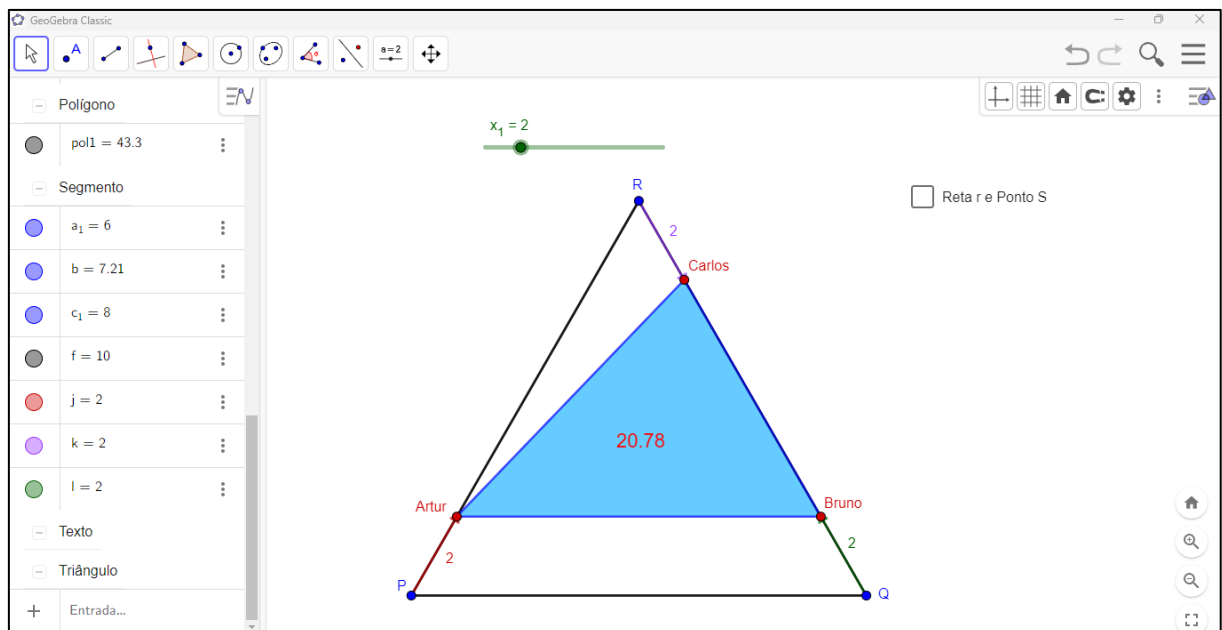


Fonte: Elaborado pelo autor.

Em nossa primeira SDO, temos uma situação adaptada da questão 3 da 2ª fase da OBMEP de nível 3 do ano de 2017. Podemos notar que ela requer dos alunos conhecimentos pré-adquiridos de semelhança e área de triângulos.

**Fase de Ação:** Com tudo aquilo que assumimos até o momento, nessa fase o professor apresentará o problema aos alunos e por meio da análise visual da SDO no GeoGebra (Ver Figura 28) e a manipulação do controle deslizante  $x_1$ , com a variação  $0 \leq x_1 \leq 10$ , promoverá a compreensão das propriedades fundamentais de semelhança e de área de triângulos. É esperado que com a visualização no *software*, eles notem também que:  $\triangle ABC = \triangle ABR - \triangle ACR$ , como podemos notar na Figura 29<sup>11</sup>.

**Figura 29 – SDO 1 no *software* GeoGebra (Resolução).**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Fase de Formulação:** Nessa fase os alunos entre si discutirão o processo de resolução do problema, como já foi dito anteriormente, nessa fase a troca de informações é muito importante. Com isso, os alunos entre si, podem relembrar de informações, fórmulas, teoremas, entre outras coisas que foram previamente vistos em aula.

É esperado que aqui os alunos relembrem que em um triângulo equilátero de lado medindo ( $a$ ) a área ( $A$ ) e altura ( $h$ ), podem ser encontrados a partir das fórmulas:

- $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

<sup>11</sup> Usaremos as letras A, B e C para representar os pontos designados no problema para Artur, Bruno e Carlos, respectivamente.

- $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Além disso, como:

$$\triangle ABR \sim \triangle PQR \xRightarrow{LAL} \begin{cases} \overline{AR} = \overline{BR} = 8 \\ \hat{R} = 60^\circ \text{ (ângulo comum)} \end{cases}$$

Com essas fórmulas em mãos e pelo fato dos triângulos serem semelhantes, os alunos em suas interações podem perceber que tomando  $\overline{BR}$  e  $\overline{CR}$  como bases dos  $\triangle ABR$  e  $\triangle ACR$ , respectivamente, que suas alturas terão mesma medida. Logo,  $H_{\triangle ACR} = H_{\triangle ABR}$ .

Diante disso, os alunos podem agora calcular a área formada pelos três rapazes:

$$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle ABR} - A_{\triangle ACR} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ m}^2$$

Complementando isso, os alunos podem agora formular uma fórmula de encontrar a área desse triângulo mesmo com a variação dos três rapazes. Da seguinte maneira:

$$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle ABR} - A_{\triangle ACR} = \frac{(10-x)^2\sqrt{3}}{4} - \frac{x(10-x)\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{(10-x)(10-2x)\sqrt{3}}{4}$$

Com isso, permeados por suas discussões, eles podem solucionar a segunda parte do problema, onde é solicitado que encontrem os momentos quando a área do triângulo formado pelos rapazes tem área igual a zero. Para isto, podem igualar a equação encontrada para a área a zero, ficando do seguinte modo:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{(10-x)(10-2x)\sqrt{3}}{4} = 0$$

Nesse momento eles terão diversas formas de concluir a solução desse problema, uns poderão fazer utilizando da fórmula resolutive de uma equação do 2º grau, outros podem notar que a equação pode ser reescrita como:

$$(10-x)(10-2x) = 0$$

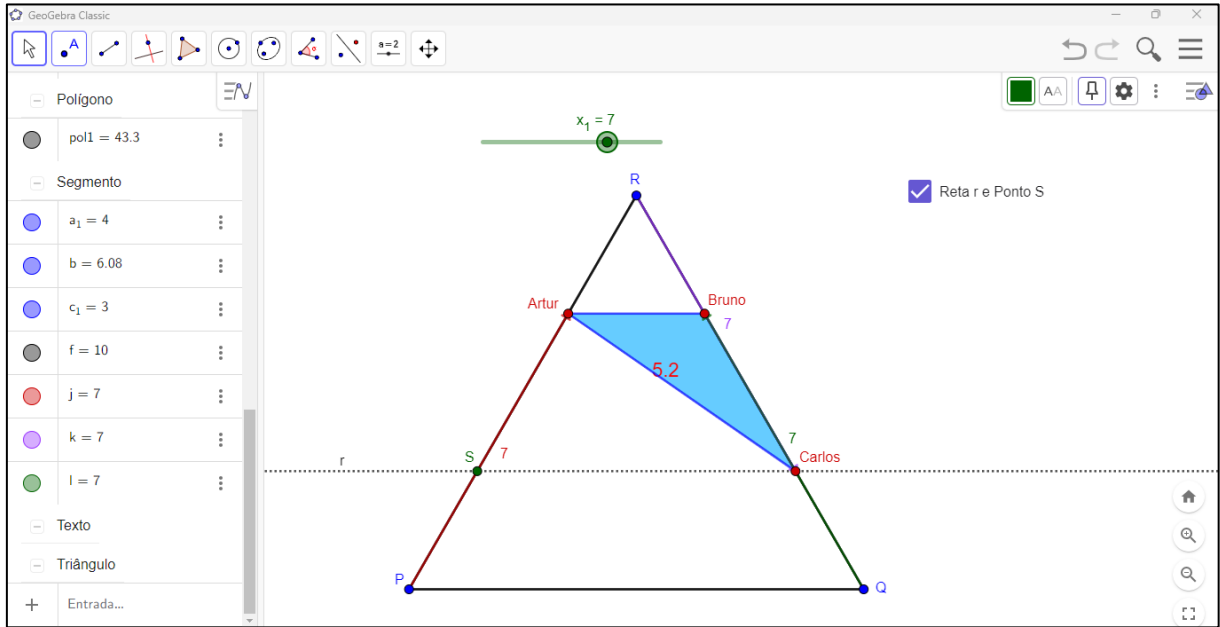
Onde a solução será  $10-x=0$  ou  $10-2x=0$ . Logo,  $x=5$  ou  $x=10$ .

Acrescenta-se aqui nesse momento a perspectiva de que alguns percebam com auxílio do GeoGebra que a área do triângulo será zero, quando os três rapazes estiverem alinhados e isso ocorre quando colocamos no controle deslizante  $x_1 = 5$  ou  $x_1 = 10$ .

Porém, há a possibilidade que o aluno não perceba que equação encontrada para calcular a área do  $\triangle ABC$  serve apenas quando  $0 \leq x_1 \leq 5$ . Sendo necessário então, analisar quando  $5 < x_1 \leq 10$ . Caso isso ocorra, na fase de institucionalização o professor pode comentar, ou previamente na fase de ação, induzi-los a pensarem a respeito quando o valor de

$x$  varia de  $0 \leq x_1 \leq 5$  e de  $5 < x_1 \leq 10$ , isto pode ser feito oscilando o controle deslizante e indagando-os a respeito. Desta forma, na fase de formulação os alunos poderão entre eles discutir tal situação e gerar aprendizado suficiente para resolução do problema.

**Figura 30 – SDO 1 no software GeoGebra (Continuação da resolução).**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Feito isso os alunos podem nessa fase, formular a solução para o restante do problema. Escolhendo agora  $\overline{AB}$  como base do  $\triangle ABC$ , além disso,  $\overline{PA} = \overline{QB} = \overline{RC} = x$  e o lado do triângulo equilátero  $\triangle ABR$  é igual a  $(10 - x)$ . Por  $C$ , traçando  $\overline{SC} \parallel \overline{PQ}$ , onde  $S \in \overline{PR}$ , como na Figura 30. Portanto, a altura  $h$  do  $\triangle ABC$  será igual a diferença entre as alturas do  $\triangle SCR$  e  $\triangle ABR$ :

$$h_{\triangle ABC} = h_{\triangle SCR} - h_{\triangle ABR}$$

$$h_{\triangle ABC} = \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{(10-x)\sqrt{3}}{2} = (x-5)\sqrt{3}$$

Dito isso, a área do  $\triangle ABC$  será:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{(x-5)\sqrt{3} \cdot (10-x)}{2}$$

Analogamente ao caso em que  $x$  varia de 0 a 5, o aluno encontrará que  $x = 5$  ou  $x = 10$ , para que a área seja nula.

**Fase de Validação:** Nessa fase os alunos validam suas conjecturas através de argumentos matemáticos rigorosos. O professor pode pedir aos alunos para justificarem suas conjecturas usando propriedades geométricas e cálculos matemáticos. Promover a dialética

deve ser o foco nesse momento, para que eles possam questionar e validar as soluções uns dos outros.

Conforme Alves (2021), a mediação do professor é crucial para garantir que os dados e conjecturas gerados durante a exploração do *software* nas fases iniciais sejam aproveitados e, na fase final, contribuam para a avaliação do progresso do grupo. Nesse momento, o professor de matemática deve incentivar a identificação dos teoremas e definições matemáticas formais que respaldam as decisões tomadas anteriormente.

Nesse cenário o GeoGebra torna-se essencial, pois, até o momento foi crucial na visualização e percepção de propriedades geométricas e algébricas apresentadas no problema, que por muitas vezes no gabarito oficial do problema vem de forma sintetizada, com enfoque principal aos alunos competidores, deixando de lado o restante dos alunos (não competidores).

**Fase de Institucionalização:** Até agora, o professor desempenhou o papel de mediador dentro da SDO, ele guiou os alunos por um percurso previamente traçado, conforme preconizado pela TSD. Conforme discutido nos capítulos anteriores, é nesta fase que o professor desempenhará um papel crucial para garantir que os alunos compreendam os conceitos matemáticos científicos relevantes e a teoria matemática formal que os sustenta.

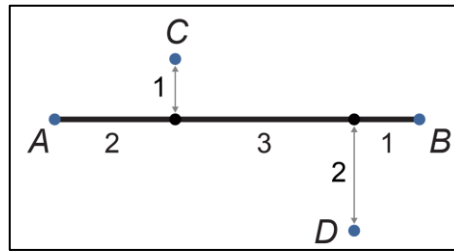
Essa fase deve ser realizada no momento certo para que não interrompa ou atrase a construção do significado. Para o problema trabalhado na SDO 1 é sugerido que com o *software* GeoGebra o professor deduza a solução do problema juntamente dos alunos, aferindo os pontos principais necessários para resolvê-lo, fórmulas, teoremas, entre outras coisas. Desta maneira, o saber agora é institucionalizado como oficial para os alunos, tornando-se um patrimônio de todos, podendo ser reutilizado futuramente em problemas similares.

## 4.2. Situação Didática Olímpica 2

**SDO 2.** (Questão 3 – OBMEP 2023 – Nível 3) Um carro percorre um trajeto retilíneo  $AB$  indicado na Figura 31. Nas proximidades do trajeto, existem antenas de celular com suas bases nos pontos  $C$  e  $D$ , também indicados. A distância do carro ao ponto  $A$  é representada por  $x$ . Considere a função  $f$  que associa ao  $x$  ao quadrado da distância do carro à base da antena mais próxima. Por exemplo, quando o carro está em  $A$ , a antena mais próxima é  $C$  e o quadrado da distância do carro a ela é  $2^2 + 1^2 = 5$ . Portanto,  $f(0) = 5$ . Com isso:

- a) Quando  $x = 3$  qual será a antena utilizada pelo carro?
- b) Qual é o valor de  $x$  para que as distâncias do carro às antenas sejam iguais?

**Figura 31 – SDO 2 (Questão 3 – OBMEP 2023).**

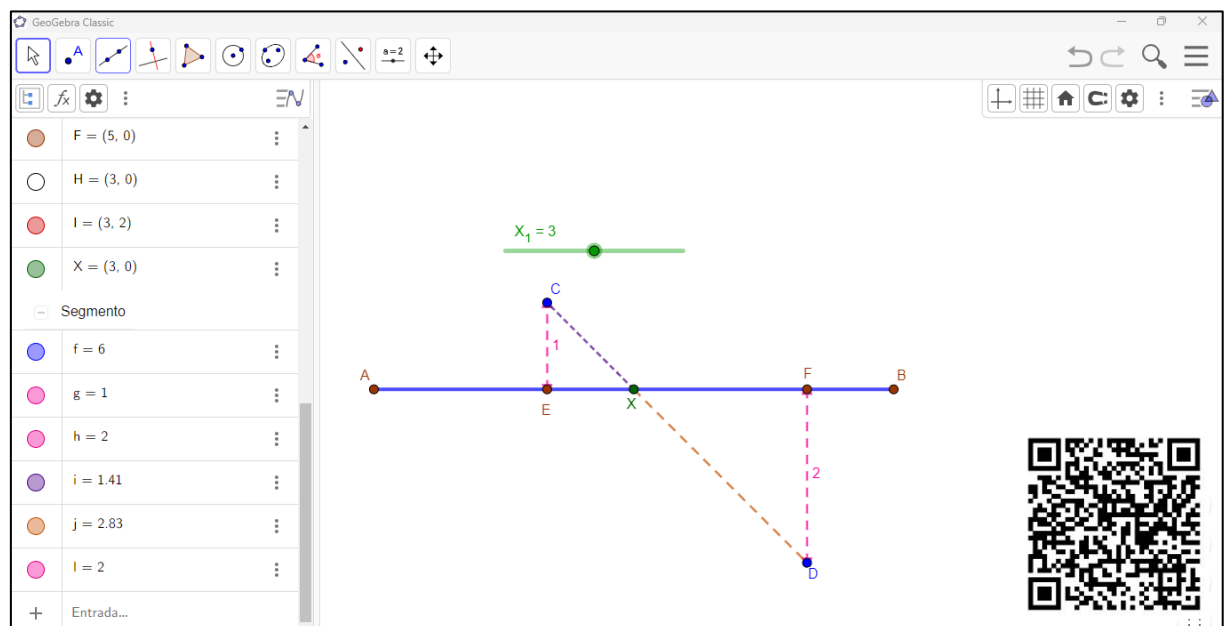


Fonte: IMPA (2023).

**Fase de Ação:** Como vimos anteriormente nessa fase o professor deve apresentar o problema aos alunos de forma clara e permitir que os alunos comecem a explorá-lo. O professor pode pedir que os alunos descrevam o problema com suas próprias palavras e identifiquem as informações principais.

Com amparo da visualização do *software* GeoGebra, os alunos podem visualizar a construção e o dinamismo que o controle deslizante  $X_1$  (Ver Figura 32) tem sobre ponto  $X$  (carro), no segmento  $\overline{AB}$ .

**Figura 32 – SDO 2 (Item a) no *software* GeoGebra.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Fase de Formulação:** Esta fase destina-se a que os alunos, por meio do diálogo com seus colegas, formulem hipóteses e conjecturas. Espera-se que, devido à manipulação realizada na etapa anterior utilizando o GeoGebra, os alunos percebam que a distância do carro a cada uma das antenas pode ser determinada através do Teorema de Pitágoras, e assim determinar a que será utilizada.

Dessa forma, no item (a), quando  $x = 3$ , basta fazer no *software* GeoGebra  $X_1 = 3$ , com isso os estudantes poderão comparar os segmentos  $\overline{CX}$  e  $\overline{DX}$ , onde  $X$  representa o carro e  $C$  e  $D$  representam as antenas. Dito isso:

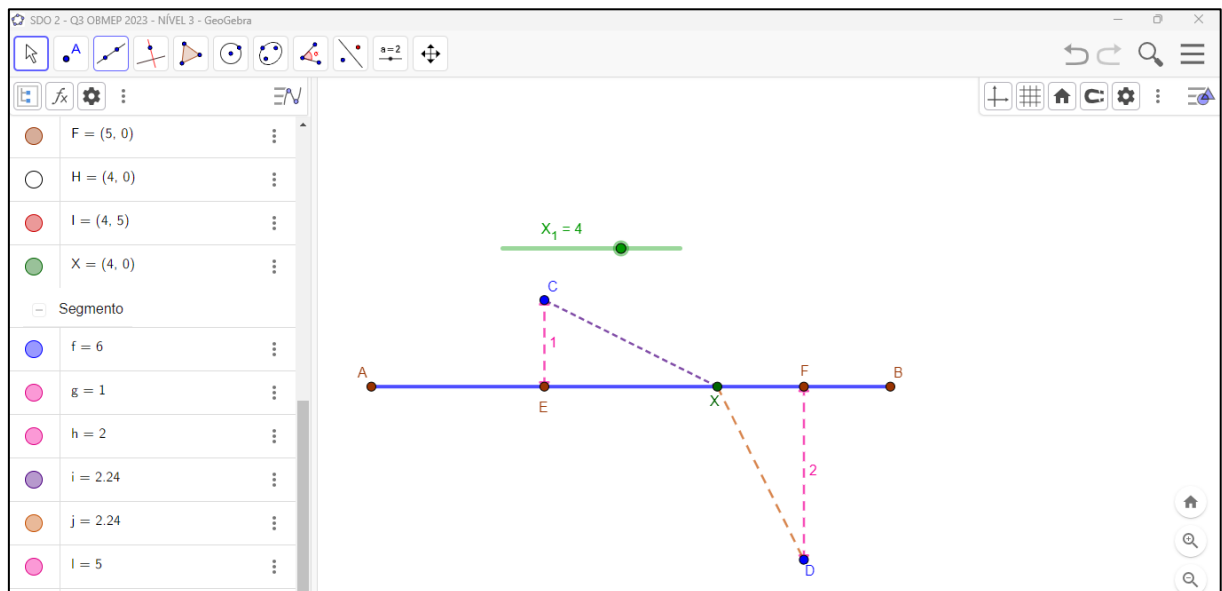
$$(\overline{CX})^2 = (\overline{CE})^2 + (\overline{EX})^2 \therefore \overline{CX}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$(\overline{DX})^2 = (\overline{FD})^2 + (\overline{FX})^2 \therefore \overline{DX}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

Portanto, com esses cálculos amparados na visualização no GeoGebra, fazem com que os alunos garantam que a antena utilizada será a  $C$ .

Agora, a partir da exploração da construção apresentada na Figura 33, os estudantes poderão compreender e resolver a segunda parte do problema de maneira clara e eficiente.

**Figura 33 – SDO 2 (Item b) no *software* GeoGebra.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Deste modo, entre eles, poderão elaborar a melhor estratégia de resolução. Nesse caso, eles podem determinar que as distâncias entre o carro e as antenas serão iguais quando o carro estiver entre os pontos  $E$  e  $F$ , como podemos ver na Figura 33. Com isso, o quadrado da distância do carro até a antena  $C$  é  $1^2 + (X_1 - 2)^2 = 5 - 4X_1 + X_1^2$ , já o quadrado da distância do carro até a antena  $D$  é  $2^2 + (X_1 - 5)^2 = 29 - 10X_1 + X_1^2$ . Igualando as duas expressões os alunos encontrarão que:

$$5 - 4X_1 + X_1^2 = 29 - 10X_1 + X_1^2$$

$$6X_1 = 24$$

$$X_1 = 4$$

Logo, quando o controle deslizante  $X_1$  for igual a 4, as distâncias do carro até ambas as antenas serão iguais.

Uma outra abordagem esperada é os alunos utilizarem do fato de que as distâncias só serão iguais se ocorrer a congruência entre os  $\triangle CEX$  e  $\triangle XFD$ . Visto que, as distâncias das antenas até a pista (segmento  $\overline{AB}$ ) são fixas, a congruência irá acontecer quando  $\overline{EX} \equiv \overline{FD}$  e isso acontece quando  $\overline{EX} = 2$ , logo  $X_1$  deve ser igual a 4.

**Fase de Validação:** Conforme nossos registros atuais, a mediação do professor é fundamental para assegurar a retenção de todo o conhecimento adquirido nas fases anteriores, a partir do GeoGebra.

Para Silva, Ferreira e Tozetti (2015), a fase de validação caracteriza-se pela transição para uma nova formulação, onde o emissor deixa de ser apenas um informante para se tornar um proponente, enquanto o receptor assume o papel de oponente. Ambos colaboram em uma busca mútua pela verdade, empenhando-se em conectar, de maneira fundamentada, novos conhecimentos a um corpus já estabelecido de saberes. Durante essa fase, cada participante pode adotar uma posição em relação a um enunciado e, em caso de discordância, solicitar uma demonstração ou exigir que o interlocutor aplique suas declarações no contexto da interação com o *milieu*.

Este processo de validação é crucial para a consolidação do conhecimento, permitindo que se estabeleça uma comunicação dialógica e crítica entre os envolvidos. Desta forma os alunos irão defender suas ideias e estratégias de soluções, é esperado que com o auxílio do *software* GeoGebra eles cheguem nesta etapa de forma mais tranquila e com menos lacunas em seus conhecimentos, a serem preenchidas pelo professor na próxima etapa (Fase de Institucionalização).

Conforme Almouloud (2007), durante a fase de validação na TSD, o emissor é responsável por justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo, fornecendo, sempre que possível, validações semânticas e sintáticas. O receptor, por sua vez, pode solicitar explicações adicionais ou rejeitar mensagens que não compreenda ou com as quais discorde, justificando suas objeções. Desta forma, a teoria se aplica tanto nos debates científicos quanto nas discussões entre alunos, funcionando como um meio para estabelecer ou refutar provas. Concluindo que o objetivo principal é validar as premissas formuladas durante os momentos de ação e formulação, abrangendo níveis diversos de validade: sintática, semântica e até mesmo pragmática.

**Fase de Institucionalização:** Nesta etapa, o professor finalmente revelará sua “intenção de ensinar”, algo que não estava perceptível nas fases anteriores, onde o aluno era a engrenagem central de todo o processo de aprendizagem. O docente, que conduziu a SDO desde a Fase de Ação, passando pela Fase de Formulação até a Fase de Validação, neste momento irá sintetizar tudo o que foi adquirido e explicado pelos alunos nas etapas anteriores e transformá-lo em conhecimento consolidado. Esse saber matemático será, então, formalizado pelo professor, passando a integrar o repertório de conhecimentos dos alunos. Almouloud (2007), diz que depois dessa fase então o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos futuros.

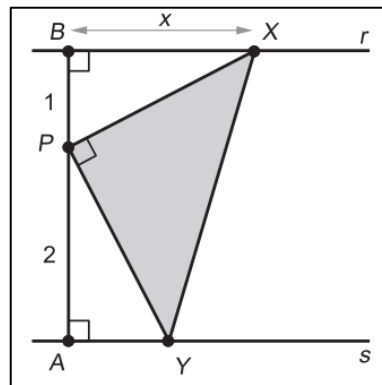
Dito isso, essa é a oportunidade de serem esclarecidas todas as dúvidas existentes, podendo ser corrigidos possíveis erros existentes nas soluções dos alunos. Dessa forma, o professor pode utilizar o *software* GeoGebra para reforçar o entendimento sobre o movimento do carro (ponto X) ao longo do segmento  $\overline{AB}$ , lembrando conceitos fundamentais necessários para a solução, como o Teorema de Pitágoras e os casos de congruência no triângulo retângulo. Embora esses temas sejam básicos, os alunos não competidores enfrentam algumas dificuldades em sua aprendizagem, no entanto, ao compreender como esses conteúdos se relacionam com situações do dia a dia, a assimilação desses tópicos pode se tornar mais eficiente.

### 4.3. Situação Didática Olímpica 3

**SDO 3.** (Questão 4 – OBMEP 2012 – Nível 3) Dona Maria está planejando construir um canteiro de hortaliças em seu jardim. Ela deseja que o canteiro tenha a forma de um triângulo retângulo  $XPY$ , onde  $\overline{XP}$  e  $\overline{PY}$  são os catetos, e  $\overline{XY}$  é a hipotenusa. O ponto X está em uma borda do jardim que é paralela à cerca do vizinho (reta  $r$ ), e o ponto Y está na outra borda do jardim, que é paralela à rua (reta  $s$ ). O segmento  $\overline{AB}$  é perpendicular às retas  $r$  e  $s$ , e o ponto P está localizado no segmento  $\overline{AB}$  de tal forma que  $\overline{AP} = 2$  m e  $\overline{BP} = 1$  m. O ponto X pertence à reta  $r$ , e a medida do segmento  $\overline{BX}$  é indicada por  $x$ .

- a) Explique por que os triângulos  $BPX$  e  $PAY$  são semelhantes.
- b) Qual será a área do canteiro de Dona Maria em função da medida de  $x$ ?
- c) Quando a área do canteiro de Dona Maria será de  $2,5$  m<sup>2</sup>?

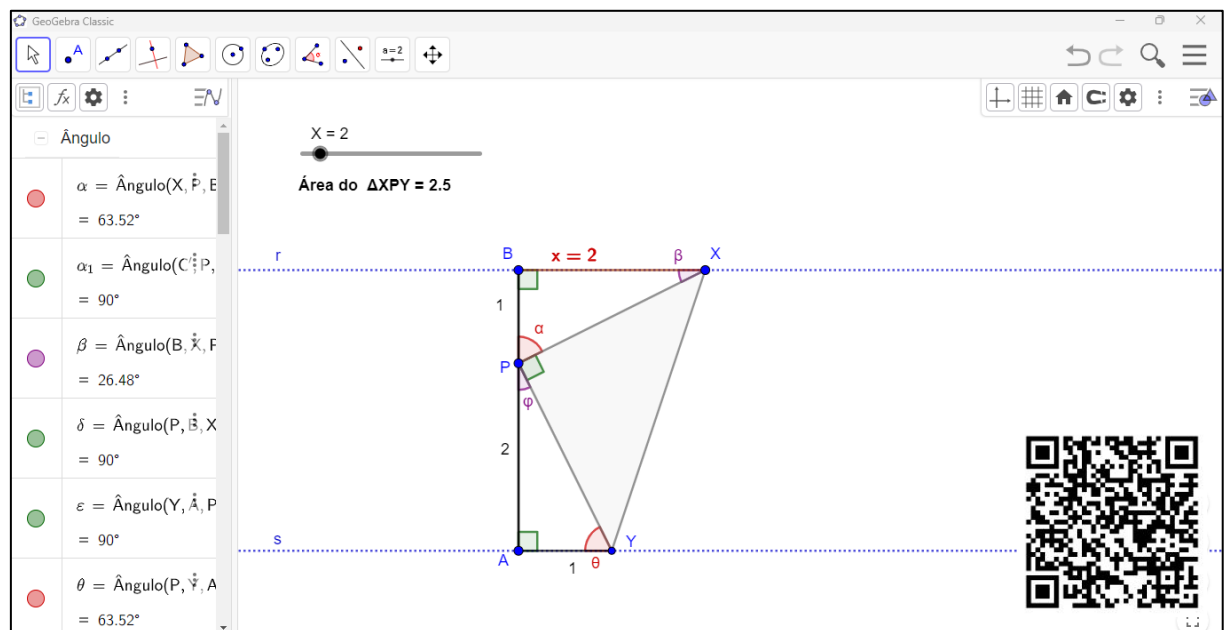
**Figura 34 – Ilustração da Questão 4 da OBMEP 2012 (Nível 3).**



Fonte: IMPA (2012).

Essa SDO é uma adaptação da questão 4 da 2ª fase da OBMEP 2012 do Nível 3. A proposta foi reformulada com o objetivo de ampliar seu potencial pedagógico, tornando-a mais acessível e eficaz no processo de ensino. Essa adaptação busca favorecer especialmente os alunos que encontram dificuldades na resolução de PO, oferecendo uma abordagem mais dinâmica.

**Figura 35 – SDO 3 no software GeoGebra.**



Fonte: Elaborador pelo autor.

**Fase de Ação:** Com o problema apresentado, os alunos aplicarão todos os conhecimentos adquiridos previamente sobre a semelhança de triângulos. Espera-se que, a partir dessa base, sejam capazes de elaborar uma estratégia inicial, que, mesmo que não seja a mais eficiente, poderá ser aprimorada posteriormente. Esse aperfeiçoamento ocorrerá na fase

de formulação, por meio da colaboração entre os colegas, possibilitando ajustes e refinamentos para uma melhor solução.

Com o auxílio do *software* GeoGebra (Ver Figura 35), o professor deve ajustar o valor do controle deslizante  $X$ , que determina o comprimento do segmento  $\overline{BX}$ . Essa variação permitirá que os alunos comecem a desenvolver estratégias de resolução para o PO, sendo o ponto de partida crucial para a boa resolução deste problema.

**Fase de Formulação:** Como vimos anteriormente, nesta fase, o foco está em transformar a situação proposta em uma atividade didática que envolva os alunos na exploração e formulação de conjecturas. Isso promove a interação entre eles para que possam formular ideias e descobrir as melhores estratégias de resolução do problema. Assim, com uma abordagem prévia realizada pelo professor, os alunos devem aplicar seus conhecimentos sobre semelhança de triângulos. Este é um ponto chave para que eles compreendam a base do problema.

Portanto, espera-se que os alunos façam a seguinte abordagem, ou algo similar, para solucionar o primeiro item: fazendo  $B\hat{X}P = \beta$ ,  $X\hat{P}B = \alpha$ ,  $A\hat{P}Y = \varphi$  e  $P\hat{Y}A = \theta$ . Como,  $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$ , logo,  $\alpha = 90^\circ - \beta$  e  $\beta = 90^\circ - \alpha$ . Além disso,  $\alpha + X\hat{P}Y + \varphi = 180^\circ$ , e como  $X\hat{P}Y = 90^\circ$ , temos que,  $\varphi = 90^\circ - \alpha$ , logo,  $\varphi \equiv \beta$ . Analogamente,  $\theta \equiv \alpha$ . De tal modo que os alunos consigam afirmar que os  $\triangle BPX \sim \triangle PAY$ , pelo 1º caso de semelhança de triângulos – AA (Teorema 14). Além disso, tudo pode ser visualizado facilmente no GeoGebra, acentuando ainda mais a estratégia que eles devem tomar.

No segundo item, a partir da semelhança entre os triângulos, provada no item anterior, calcular a área do  $\triangle XPY$  que representa a área do canteiro de Dona Maria. Da semelhança, temos:

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{XB}} \therefore \frac{\overline{AY}}{1} = \frac{2}{x} \therefore \overline{AY} = \frac{2}{x}$$

Dessa maneira uma estratégia que pode ser encontrada durante o debate entre os alunos, é utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida dos segmentos  $\overline{PX}$  e  $\overline{PY}$ , que são base e altura do  $\triangle XPY$ . Seguindo essa ideia, temos:

$$\begin{aligned} \overline{PX}^2 &= x^2 + 1 \therefore \overline{PX} = \sqrt{x^2 + 1} \\ \overline{PY}^2 &= \left(\frac{2}{x}\right)^2 + 2^2 \therefore \overline{PY} = \sqrt{\frac{4}{x^2} + 4} \therefore \overline{PY} = \frac{2}{x}\sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Com isso,

$$A_{\triangle XPY} = \frac{\overline{PX} \cdot \overline{PY}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2} \cdot \frac{2}{x} \sqrt{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x}$$

Dessa maneira, os alunos podem solucionar o terceiro item apenas igualando a área encontrada ao valor pedido no PO.

$$x + \frac{1}{x} = 2,5 \therefore x^2 - 2,5x + 1 = 0 \therefore x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Ressalta-se que, no *software*, essa área é perceptível ao variar o controle deslizante  $X$ , permitindo aos alunos observarem que a área buscada é obtida quando o controle deslizante atinge o valor encontrado na solução da equação. Dessa forma, o GeoGebra se alinha perfeitamente à teoria, possibilitando não apenas a visualização, como também a comprovação.

**Fase de Validação:** Com base nas descobertas realizadas até o momento, nesta etapa, os alunos deverão defender suas estratégias, apresentando a solução e todos os elementos necessários para validar suas respostas. Durante esse processo, os demais alunos e/ou o professor podem tirar dúvidas ou até mesmo discordar. Esse processo pode dar origem a diversas estratégias que possibilitem a resolução do problema proposto.

Brousseau (2008), confirma que, nesta fase, os alunos defendem suas estratégias e, eventualmente, mostram a razão pela qual as outras estratégias não estão corretas. Utilizam-se de todas as ferramentas necessárias, como teoremas, definições e tudo aquilo que o professor previamente deverá ter antecipado.

Dessa forma, o professor deve tomar cuidado para interferir minimamente, possibilitando a validação de todo o conhecimento adquirido na SDO, sem queimar etapas e promovendo o desenvolvimento cognitivo dos alunos, de modo que eles desenvolvam a capacidade de defender suas ideias.

**Fase de Institucionalização:** Por fim, nesse momento, o professor resolverá o problema da maneira mais indicada, apresentando as dificuldades encontradas pelos alunos e oferecendo sugestões e alternativas para superá-las em situações futuras. Dessa forma, o professor validará toda a atitude matemática, como um resumo do processo desenvolvido pelos alunos nas fases anteriores, consolidando o conhecimento adquirido em saber científico e refletindo sobre o processo de aprendizagem de forma geral.

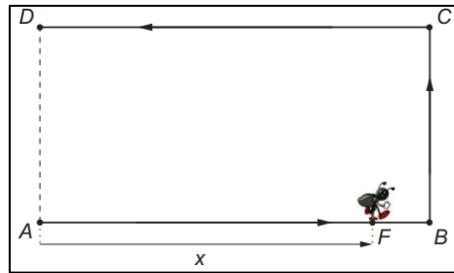
#### 4.4. Situação Didática Olímpica 4

**SDO 4.** (Q2 – OBMEP 2014 – Nível 3) Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo  $ABCD$ . Ela parte do ponto  $A$ , anda 20 centímetros até chegar em  $B$ , depois anda mais

10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar  $x$  centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno.

- Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D?
- Calcule a área do triângulo ADF quando  $x = 22$  centímetros.
- Qual é a maior área possível para um triângulo ADF?

**Figura 36 – Ilustração da Questão 2 da OBMEP 2014 (Nível 3).**

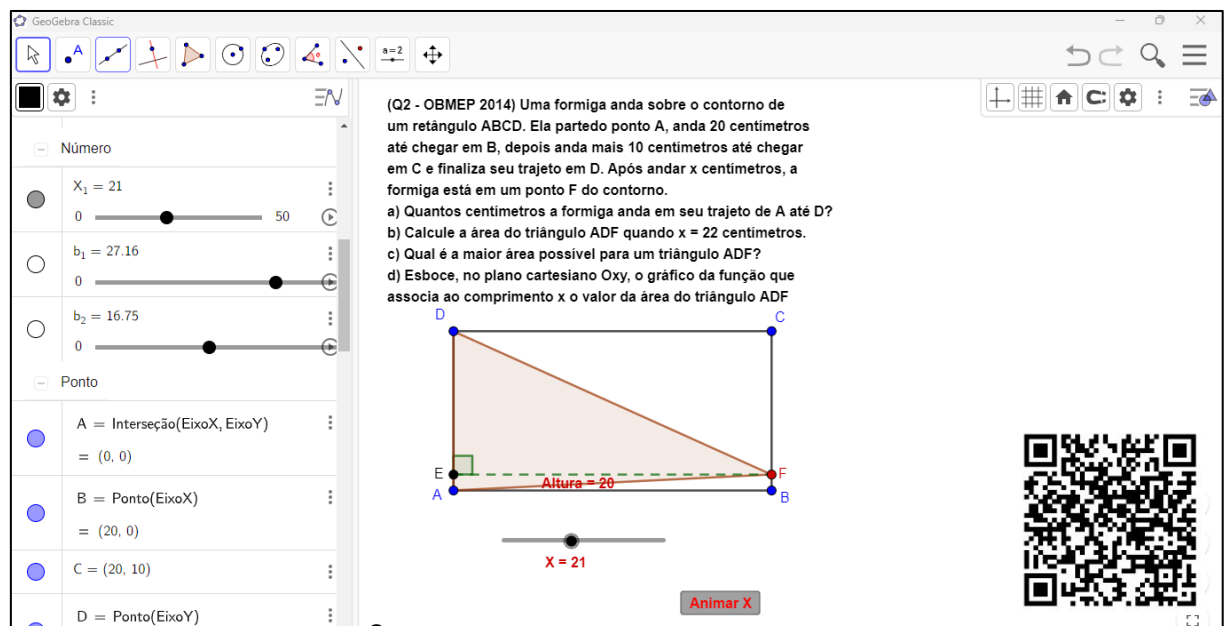


Fonte: IMPA (2012).

**Fase de Ação:** Brousseau (2008), nos diz que nesta fase o objetivo é permitir que os alunos explorem e resolvam o problema de forma autônoma, desenvolvendo habilidades de resolução de problemas, estimulando a curiosidade, identificando dificuldades iniciais e aumentando o engajamento ativo.

Para isso, o professor com uso do GeoGebra deve oscilar o controle deslizante  $X$ , com intuito de que os alunos observem o que ocorre com a área do triângulo ADF com essa variação que representa a distância percorrida pela formiga sobre o contorno do retângulo.

**Figura 37 – SDO 4 no software GeoGebra.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Fase de Formulação:** Neste momento o professor deve instigar os alunos a dialogarem entre si, com a intenção de formular ideias que ajudem a resolver o PO. Brousseau (2008), nos diz que a comunicação eficaz é essencial para que uma estratégia seja implementada com sucesso. Um aluno precisa não só saber como responder, mas também comunicar sua estratégia aos colegas. Essa comunicação passa por dois tipos de retroação: um imediato, feito por parte dos colegas, que podem concordar ou não, e uma retroação mediata, realizada por parte do *milieu*, logo, quando a estratégia é testada e comprovada se ela é suficiente ou não para solucionar o problema.

Com isso, no item (a) do PO, espera-se que os alunos, mesmo aqueles que não são competidores, percebam que a melhor estratégia de solução é simplesmente somar as medidas dos segmentos da seguinte maneira:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 20 + 10 + 20 = 50 \text{ cm}$$

Já no item (b) do PO, pode ocorrer que o aluno confunda o valor de  $x$  com a altura do  $\triangle ADF$ . Com o *software* GeoGebra, esse problema pode ser evitado, pois, ao ajustarmos o valor do controle deslizante  $X$ , os alunos, mesmo os que não são olímpicos, notarão que, quando o valor de  $X$  oscila entre 20 e 30, a altura do triângulo permanece constante em 20 cm.

Dito isso, ao considerar o segmento  $\overline{EF}$  como a altura do  $\triangle ADF$ , onde o ponto  $E$  é a projeção do ponto  $F$  no segmento  $\overline{AD}$ , espera-se que se observe que  $\overline{EF} = 20$  cm, quando  $20 \leq X \leq 30$ . Com isso, temos que:

$$A_{\triangle ADF} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100 \text{ cm}^2.$$

Esta dinamização realizada no *software* GeoGebra possibilita que, no item (c) do PO, os alunos percebam que a área do  $\triangle ADF$  será máxima quando a altura do triângulo também for máxima, já que a base do triângulo será sempre  $\overline{AD} = 10$  cm. Com base no item anterior, observa-se que a altura máxima ocorre quando  $20 \leq X \leq 30$ . No GeoGebra, isso se torna interessante, pois o aluno notará exatamente quando o  $\triangle ADF$  alcançará sua área máxima. Esta visualização permite que eles comprovem suas estratégias, o que já é um passo importante para a próxima fase: a validação.

**Fase de Validação:** Nesta etapa, os alunos precisarão expor e defender suas ideias para resolver o PO, demonstrar e apresentar teoremas, sustentando as opiniões que foram construídas nas fases anteriores.

Nesse novo tipo de situação, os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias – na qualidade de conjuntos de enunciados de referência – e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer sem ceder a argumentos retóricos, à autoridade, à sedução, à soberba, a intimidações etc. As razões

que um aluno possa fornecer para convencer o outro, ou as que possa aceitar para mudar de opinião, serão progressivamente elucidadas, construídas, testadas, debatidas e acordadas. O aluno não só deve comunicar uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado. Deve sustentar sua opinião ou apresentar uma demonstração (Brousseau, 2008, p. 27).

Brousseau (2008), argumenta que nesta etapa, o emissor (aluno) deixa de ser apenas um informante e passa a atuar como um proponente, enquanto o receptor assume o papel de oponente. O autor ainda destaca a importância da colaboração e do confronto construtivo na busca pelo conhecimento. Ele pressupõe que todos os envolvidos têm acesso às mesmas informações necessárias para resolver um problema. Nesse contexto, eles colaboram para descobrir a verdade, tentando ligar esse conhecimento a um campo de saberes já estabelecidos.

Porém, mesmo colaborando, surgem confrontos quando há dúvidas ou desacordos. Os envolvidos se responsabilizam pelas relações estabelecidas entre um meio e o conhecimento relativo a esse meio. Cada um pode adotar uma posição em relação a uma afirmação, e, se houver desacordo, pode pedir uma demonstração ou exigir que o outro coloque suas declarações em prática no contexto relevante. Assim, o processo de validação do conhecimento é tanto colaborativo quanto crítico, promovendo um ambiente de aprendizagem robusto e fundamentado.

**Fase de Institucionalização:** Até algum tempo atrás, essa fase não existia. No entanto, conforme Brousseau (2008), surgiu a necessidade de estabelecer uma nova fase para que o professor tivesse a oportunidade de revisar o trabalho realizado até então, validando o que não foi validado pelos alunos. Dessa forma, todos os conteúdos abordados nas fases anteriores seriam consolidados como conhecimentos adquiridos pelos alunos. Assim, qualquer questão semelhante ao PO que surgir a partir desse ponto, os alunos poderão desenvolver de maneira mais prática e sem dificuldades.

[...] conferir um *status* aos eventos da classe vistos como resultados dos alunos e do processo de ensino; determinar um objeto de ensino e identificá-lo; aproximar as produções dos conhecimentos de outras criações (culturais ou do programa) e indicar quais poderiam ser reutilizadas.

[...] posteriormente, a argumentação – o fato de garantir a consistência do conjunto das modelagens, eliminando as que são contraditórias, exige um trabalho teórico – mostraram a necessidade de considerar as fases de *institucionalização* que deram determinados conhecimentos o *status* cultural indispensável de saber (Brousseau, 2008, p. 31).

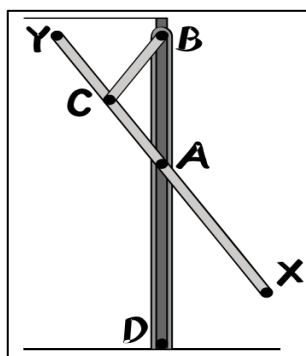
Nessa etapa do PO em questão, o professor pode revisar a diferença entre perímetro e área, explicando como calcular a área do triângulo. Dessa maneira, a fase de institucionalização se mostra essencial no contexto educacional, pois permite ao professor revisar e validar o trabalho realizado, garantindo que os conteúdos abordados nas fases

anteriores sejam efetivamente consolidados como conhecimentos adquiridos pelos alunos. Assim, ao enfrentar questões similares ao PO, no futuro os alunos estarão bem preparados para desenvolver soluções de maneira prática e eficiente. A institucionalização assegura a consistência e a reutilização dos saberes, reforçando o papel fundamental dessa etapa no processo de aprendizagem.

#### 4.5. Situação Didática Olímpica 5

**SDO 5.** (Questão 3 – OBMEP 2010 – Nível 3) A figura ilustra o funcionamento de uma porta de garagem, representada pelo segmento  $\overline{XY}$ . Ao mover o ponto  $X$ , o ponto  $A$  desliza por um trilho vertical, representado pelo segmento  $\overline{BD}$ . Algumas das medidas na figura são  $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CY} = 0,5\text{ m}$  e  $\overline{AX} = 1\text{ m}$ .

**Figura 38 – Ilustração da Questão 3 da OBMEP 2010 (Nível 3).**

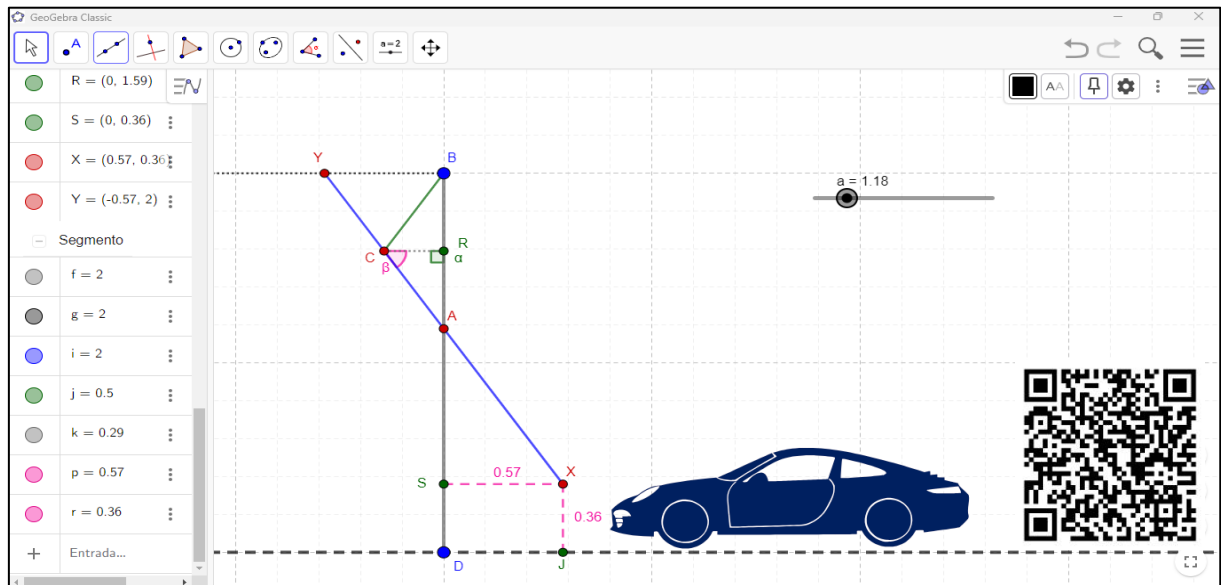


Fonte: IMPA (2010).

- Na Figura 38, o ponto  $X$  está a 0,2 m do trilho  $\overline{BD}$ . Qual é a distância de  $C$  ao trilho?
- Mostre que a altura do ponto  $Y$  com relação ao chão não se altera com o movimento da porta.
- Se o para-choque de um carro tem altura de 0,4 m, como na figura, qual deve ser a distância mínima entre o trilho e o para-choque para que ele não seja atingido ao abrir a porta?

**Fase de Ação:** O professor pode iniciar essa fase apresentando o problema aos alunos com suporte do *software* GeoGebra, onde poderá por meio do controle deslizante “a” mostrar diversas situações que acontece quando o portão representado pelo segmento  $\overline{YX}$  desliza sobre o segmento  $\overline{BD}$ . Com isso, o aluno deve nesse momento tentar pôr em prática todo aquele conhecimento adquirido durante as aulas de semelhança de triângulos. Portanto, é ideal que o professor após essa breve introdução do problema inserido no GeoGebra, saia de cena e deixe todo o cenário para os alunos tentarem desenvolver o conhecimento.

**Figura 39 – SDO 5 no software GeoGebra.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Fase de Formulação:** Aqui os alunos são incentivados, até mesmo por meio do professor, ao diálogo com seus colegas, mirando uma comunicação assertiva a respeito do problema proposto. Essa interação entre eles provoca de certa maneira uma aprendizagem mutualista, onde ambas as partes saem ganhando, claramente, se necessário o professor deve intervir (o mínimo possível), mas com indagações que gerem nos alunos as respostas necessárias para o problema.

Sendo assim, espera-se que os alunos consigam mostrar a solução do primeiro item, tomando como base o conteúdo de semelhança de triângulos. Vejamos:

Consideremos os pontos  $C$  e  $X$  e suas respectivas projeções sobre o segmento  $\overline{BD}$ , os pontos  $R$  e  $S$ . De tal modo, obtemos os triângulos  $\triangle ACR$  e  $\triangle AXS$ , notemos que os dois triângulos são semelhantes pelo 1º caso de semelhança de triângulos – AA (Teorema 12), pois  $\widehat{XAS} \equiv \widehat{CAR}$  (opostos pelo vértice) e  $\widehat{XSA} \equiv \widehat{ARC}$  (ângulos retos). Sendo assim, a constante de proporcionalidade entre esses triângulos pode ser obtida pela razão dos segmentos  $\overline{AX}$  e  $\overline{AC}$ :

$$k = \frac{\overline{AX}}{\overline{AC}} = \frac{1}{0,5} = 2.$$

Desta forma, fica mais compreensível aos alunos notarem em suas discussões que a medida de  $\overline{CR}$  é metade de  $\overline{SX}$ , logo medindo 0,1 m.

No segundo item os alunos devem ter a percepção de que os triângulos  $\triangle ACB$  e  $\triangle CYB$  são isósceles, pois  $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CY}$ . Disso,  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CBA}$  e  $\widehat{YBC} \equiv \widehat{CYB}$ , além disso,  $\widehat{CBA} + \widehat{YBC} = 90^\circ$ , sendo o segmento  $\overline{YB}$  sempre perpendicular ao segmento  $\overline{BD}$ , logo paralelo ao chão em todas as ocasiões. Esse problema é um exemplo claro da colaboração do

*software* na aprendizagem do aluno, visto que eles terão a percepção que o ponto  $Y$  não está tendo sua altura modificada, mesmo oscilando a abertura do portão.

Já no terceiro item, devemos encontrar a medida do segmento  $\overline{SX}$ , mas antes notemos na Figura 39 que o segmento  $\overline{XJ}$  tem a mesma medida do segmento  $\overline{SD}$ , logo  $\overline{BS} = 2\text{ m} - 0,4\text{ m} = 1,6\text{ m}$ . Complementar a isso, observemos que os triângulos  $\triangle SAX$  e  $\triangle BAY$ , são congruentes, pois,  $\widehat{BY} \equiv \widehat{SX}$ , pois são ângulos retos, além disso,  $\widehat{BY} \equiv \widehat{SX}$ , pois são opostos pelos vértices, e  $\overline{BY} = \overline{SX}$ , logo congruentes pelo 4º caso de congruência – LAAo. De tal modo,  $\overline{AS} = \overline{AB} = 0,8\text{ m}$ , e como  $\overline{AX} = 1\text{ m}$ , então basta aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida do terceiro lado  $\overline{SX}$ .

$$\overline{AX}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{SX}^2$$

$$\overline{SX} = \sqrt{\overline{AX}^2 - \overline{AS}^2}$$

$$\overline{SX} = \sqrt{1^2 - 0,8^2}$$

$$\overline{SX} = \sqrt{1 - 0,64}$$

$$\overline{SX} = \sqrt{0,36}$$

$$\overline{SX} = 0,6\text{ m}.$$

Logo, a distância mínima que o carro deve estar para o portão não bater é 0,6 metros. Esses cálculos, ou até mesmo outros que os alunos podem vir a fazer se somam a visualização do problema no GeoGebra. O *software* nesse caso vem a colaborar bastante com a visualização e demonstração do que está acontecendo em cada item, agregando de maneira construtiva na solução do problema por parte do discente.

**Fase de Validação:** Com o problema resolvido na fase anterior, os alunos devem, neste momento, defender sua resolução, utilizando os teoremas, definições e postulados aprendidos previamente nas aulas. Nesta fase, os demais alunos e até mesmo o professor podem e devem interpelar quem está apresentando com o objetivo de refinar o conhecimento aplicado no processo, transformando-o em um conhecimento matemático que poderá ser replicado em problemas futuros.

**Fase de Institucionalização:** Após a discussão, o educador deve elaborar uma síntese das ideias e métodos mais relevantes que foram apresentados, enfatizando os aspectos cruciais e esclarecendo eventuais dúvidas. Ao perceber essas incertezas, o professor pode usar a oportunidade para aprofundar o conteúdo matemático necessário para solucionar o problema, tornando esse conhecimento uma parte integrante do repertório dos alunos.



problema, permitindo que os alunos visualizem o que ocorre quando manipulam as medidas dos segmentos abordados no problema. Esse momento é crucial para que eles tenham um primeiro contato com a situação proposta.

**Fase de Formulação:** Para essa fase, o professor pode juntar os alunos em grupos para que possam trocar informações. Esse diálogo é importante, pois é na interação que os alunos vão formular a solução, trocando ideias e apresentando suas propostas e argumentos. Durante essas discussões em grupo, o papel do professor é atuar como mediador, incentivando a participação de todos e guiando o debate para que seja produtivo e focado no problema apresentado.

Nesse momento, os alunos terão a chance de confrontar diferentes pontos de vista, aprimorar suas ideias e desenvolver um entendimento mais profundo do problema. A colaboração e o diálogo são fundamentais para que cada aluno possa contribuir com suas habilidades e conhecimentos específicos, enriquecendo o processo de formulação da solução. Além disso, o professor pode incentivar o uso do *software* GeoGebra para que os alunos possam testar suas hipóteses e verificar se suas soluções são viáveis. Essa etapa é crucial para que os alunos desenvolvam autonomia e confiança na busca e aplicação do conhecimento.

Nessa interação espera-se então que eles consigam pôr em prática os conhecimentos que devem ter sido adquirido durante as aulas de Semelhança e área de triângulos. É possível que eles iniciem explorando algumas propriedades matemáticas da semelhança de triângulos, de tal modo que percebam que devido a congruência dos triângulos  $ABC$  e  $BDE$  (ver Figura 41), temos,  $\gamma \equiv \varepsilon$ ,  $\alpha \equiv \delta$  e  $\theta \equiv \beta$ , além disso  $\theta = \beta = 90^\circ$ , e da congruência desses triângulos podemos constatar que suas áreas são iguais. Com isso, então:

$$A_{ABC} = A_{BDE}$$

Daí, subtraindo de ambos os membros da igualdade a área referente ao triângulo  $EFB$ , obtemos:

$$A_{ABC} - A_{EFB} = A_{BDE} - A_{EFB}$$

Notemos que o resultado dessa subtração em ambos os triângulos serão:

$$A_{AEFC} = A_{BDF}$$

Dessa forma concluímos que as duas regiões citadas no problema possuem a mesma área, logo a razão entre elas é:

$$\frac{A_{AEFC}}{A_{BDF}} = 1$$

Já para o descobrir a medida do ângulo  $B\hat{F}E$ , partimos da congruência dos triângulos  $ABC$  e  $BDE$  garantida pelo PO (ver Figura 41), decorrente disso temos:

$$\triangle ABC \equiv \triangle BDF \Rightarrow \begin{cases} \beta \equiv \theta = 90^\circ \\ \alpha \equiv \varphi \\ \gamma \equiv \varepsilon \end{cases}$$

Com isso, pode-se concluir que:

$$\triangle ABC \sim \triangle EFB \xrightarrow{\text{Teorema 12}} \begin{cases} \varphi \equiv \alpha \\ \gamma \text{ é comum} \end{cases} \Rightarrow \beta \equiv \delta = 90^\circ$$

□

Então, o  $\triangle EFB$  é retângulo em  $F$ , algo que os alunos podem verificar facilmente usando o GeoGebra. Para calcular a área desse triângulo, a primeira tarefa dos alunos será identificar a constante de proporcionalidade  $k$  entre os triângulos  $ABC$  e  $BDE$ . Para isso, eles podem começar descobrindo o comprimento do segmento  $\overline{BC}$ , já que ele é equivalente ao segmento  $\overline{BE}$ . Das estratégias que eles podem usar para isso, a que provavelmente será a mais escolhida por eles usar o Teorema de Pitágoras no  $\triangle ABC$ :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 12^2 + 5^2 = 169$$

$$\overline{BC} = \sqrt{169} = 13$$

Da congruência de  $\triangle ABC \equiv \triangle BDF$ , temos que  $\overline{AC} = \overline{BE} = 5$ , com isso, temos:

$$k = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{13}{5}$$

De porte da constante  $k$  os alunos podem agora descobrir as medidas dos segmentos  $\overline{EF}$  e  $\overline{FB}$ , da seguinte maneira:

$$\overline{AC} = \frac{13}{5} \cdot \overline{EF} \therefore \overline{EF} = \frac{5}{13} \cdot \overline{AC} = \frac{5}{13} \cdot 5 \therefore \overline{EF} = \frac{25}{13}$$

$$\overline{AB} = \frac{13}{5} \cdot \overline{FB} \therefore \overline{FB} = \frac{5}{13} \cdot \overline{AB} = \frac{5}{13} \cdot 12 \therefore \overline{FB} = \frac{60}{13}$$

Desse modo a área do triângulo  $EFB$ , pode ser obtida do seguinte modo:

$$A_{\triangle EFB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{FB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{13} \cdot \frac{60}{13} = \frac{750}{169}$$

Observe que essa etapa da TSD é uma das mais significativas, pois as interações e discussões entre os alunos promovem uma aprendizagem colaborativa, de aluno para aluno, que se diferencia bastante da abordagem tradicional, centrada na relação professor-aluno.

**Fase de Validação:** Partindo do entendimento construído na etapa anterior, este momento é dedicado à apresentação, pelos alunos (individualmente, em pequenos grupos ou de forma coletiva), de argumentos consistentes e bem fundamentados para justificar e validar a solução do problema. Nesse processo, as estratégias utilizadas devem ser claramente expostas

e explicadas, podendo ser rebatidas pelos demais alunos e/ou professor com intuito de aprimorar a resolução.

**Fase de Institucionalização:** Nessa última etapa, o professor que liderou a SDO deve retomar o comando da situação didática, assumindo um papel central na organização e na formalização do conhecimento matemático adquirido durante o processo. Além disso, é sua responsabilidade consolidar de forma clara e estruturada a solução encontrada para o problema, garantindo que os alunos compreendam plenamente os conceitos envolvidos.

Nessa etapa, espera-se que o professor esclareça todas as dúvidas que possam ter surgido nas fases anteriores, corrija soluções inadequadas e apresente estratégias pedagógicas que favoreçam a aprendizagem dos alunos, além de simplificar a resolução dos problemas. Também é essencial que ele consolide tudo o que foi discutido entre os alunos, transformando esses debates em conhecimento matemático estruturado, capaz de ser aplicado por eles em problemas similares.

Além disso, o professor pode aproveitar essa oportunidade para revisar conteúdos que apresentaram déficits de aprendizagem, como, por exemplo, reforçar com os alunos o conceito de semelhança de triângulos, os principais teoremas e os casos de semelhança necessários à resolução do problema.

Por fim, a implementação do *software* GeoGebra pode ser uma ferramenta valiosa para que os alunos desenvolvam uma nova perspectiva sobre a resolução do problema, ampliando suas habilidades e o interesse pelo uso de tecnologias no estudo da Matemática.

## 5. CONCLUSÃO

No ensino da matemática, é comum que o professor adote estratégias que enfatizam os procedimentos operatórios algébricos. Como consequência, o aluno pode assumir uma postura mais passiva, o que contraria a concepção de que ele deve participar ativamente da construção do próprio conhecimento.

Dessa forma, torna-se essencial uma abordagem que possibilite um aprendizado baseado na interação, permitindo que os próprios alunos construam coletivamente o conhecimento almejado pelo professor. Para isso, sugerimos a utilização de problemas olímpicos como ponto de partida, a partir dos quais o docente pode estruturar um processo sequenciado em etapas previamente planejadas. Cada uma dessas etapas deve ser cuidadosamente elaborada para que as situações vivenciadas ao longo do percurso contribuam de maneira significativa para a aquisição do conhecimento.

Sob essa perspectiva, a aplicação da TSD como abordagem metodológica para promover a aprendizagem revela-se altamente eficaz. Conforme Alves (2019, 2020, 2021), define em sua proposta da SDO, estruturar o ensino por meio de PO permite organizar estrategicamente os processos pedagógicos, tornando a aprendizagem mais dinâmica e significativa. No entanto, para que essa abordagem seja plenamente aproveitada, é necessário que os professores tenham à disposição ferramentas tecnológicas que ampliem suas possibilidades didáticas. Nesse sentido, o *software* GeoGebra surge como um importante aliado, permitindo a visualização intuitiva de conceitos matemáticos e fortalecendo a compreensão por meio da interação e experimentação dos alunos.

Dito isso, ao longo deste estudo, a investigação sobre a TSD possibilitou uma análise aprofundada de seus fundamentos e de sua aplicação no ensino da matemática. A pesquisa demonstrou que a TSD, ao destacar a interação entre aluno, meio e saber, favorece a construção ativa do conhecimento e a autonomia na resolução de problemas. A adaptação dessa abordagem para a resolução de PO revelou-se uma estratégia bastante eficiente para estimular o pensamento matemático, ampliando as oportunidades de aprendizagem dos alunos que não participam dessas competições. Dessa forma, o objetivo de explorar a TSD como um recurso metodológico capaz de tornar o ensino matemático mais inclusivo e dinâmico foi plenamente alcançado, contribuindo para o avanço das discussões sobre práticas pedagógicas inovadoras.

Além disso, a utilização das SDO possibilita uma mudança na forma como os alunos se relacionam com o conhecimento matemático, estimulando um aprendizado ativo e engajador. A resolução de PO estruturados nessa perspectiva permite que os estudantes

experimentem diferentes abordagens matemáticas, desenvolvendo não apenas habilidades técnicas, mas também raciocínio crítico e autonomia no processo de aprendizagem. Isso reforça o papel do professor como mediador, incentivando a descoberta e reflexão por parte dos alunos.

Diante dos pontos apresentados neste trabalho, fica claro que há uma necessidade desse estudo ser realizado, pois, ao longo dele, evidenciou-se que as olimpíadas, embora enriquecedoras, apresentam limitações que podem excluir uma parcela significativa dos alunos. Dessa forma, para o professor, trabalhar problemas oriundos dessas competições é de certo modo desafiador. Como, então, os professores podem garantir que todos os alunos, competidores ou não, se engajem e assimilem os conteúdos por meio desses problemas?

Apresentamos então aqui, a utilização do *software* GeoGebra como uma possível resposta, oferecendo aos professores novas estratégias para tornar o aprendizado mais inclusivo e diligente. Ainda assim, essas tecnologias continuam subutilizadas no ambiente escolar, sem que todo o seu potencial seja plenamente explorado.

A implementação eficaz de ferramentas tecnológicas na educação matemática requer não apenas um domínio técnico por parte dos professores, mas também um planejamento pedagógico adequado. O GeoGebra, aliado às SDO, pode representar uma mudança significativa nas práticas de ensino, especialmente ao promover um aprendizado mais dinâmico. No entanto, para que essa transformação ocorra em larga escala, é essencial que haja iniciativas de formação docente e maior incentivo ao uso de tecnologias no contexto escolar.

Portanto, este estudo reforça a importância da implementação de metodologias que aliam teoria, prática e tecnologia no ensino da matemática. Deste modo, o uso das SDO, apoiada pelo GeoGebra, demonstra um caminho promissor para tornar o aprendizado um ambiente de integração, onde todos os alunos participam do processo educacional, inclusive aqueles que não conseguem êxito em competições olímpicas. Desta forma, é necessário um esforço contínuo para que tais práticas sejam difundidas e aplicadas de forma mais abrangente nas escolas.

A análise das dissertações do acervo do PROFMAT evidenciou uma escassez de trabalhos que abordam essa temática, demonstrando a necessidade de ampliação desse campo de pesquisa. Assim, espera-se que este estudo contribua para o enriquecimento acadêmico da área, incentivando docentes a adotarem a metodologia proposta como estratégia para a inclusão de todos os alunos, independentemente de seu desempenho em competições matemáticas. A finalidade é promover práticas pedagógicas que garantam a participação uniforme dos estudantes, assegurando-lhes um ensino matemático mais dinâmico, sem exclusões decorrentes de resultados olímpicos.

Além disso, este trabalho obteve êxito na formulação de SDO mediadas no *software* GeoGebra. A integração do GeoGebra ao desenvolvimento das SDO favorece uma aprendizagem visual e experimental, permitindo uma compreensão mais intuitiva dos conceitos de “semelhança e área de triângulos”. Os resultados da pesquisa indicam que essa abordagem fortalece o engajamento dos alunos, incentivando a formulação de hipóteses e o desenvolvimento de estratégias matemáticas de maneira exploratória.

Dessa forma, a estruturação do ensino por meio das SDO, aliadas às potencialidades tecnológicas do GeoGebra, revela-se uma estratégia promissora para tornar a matemática mais significativa e acessível, especialmente para os alunos “não olímpicos”.

Este trabalho não busca igualar as capacidades dos estudantes, mas sim assegurar que todos, independentemente do nível de conhecimento, sejam inseridos de maneira engajante no ensino por meio de PO. A partir desse processo, o aprendizado acontece de forma natural, como resultado da participação ativa dos alunos na construção do conhecimento.

## REFERÊNCIAS

- ABAR, C. A. A. P. Aportes teóricos de pesquisas que utilizaram o GeoGebra. *In*: CONFERENCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 2012, Montevideo, Uruguai. **Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**. Montevideo, Uruguai: Departamento de Matemática, 2012. p. 1-13. Disponível em: <https://www.geogebra.org.uy/2012/home.php?pagina=trabajos/actas.php>. Acesso em: 17 out. 2024.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 109, 2 mar. 2017. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p109>.
- ALVES, F. R. V. Situação didática olímpica (SDO): aplicações da teoria das situações didáticas para o ensino de Olimpíadas. **Revista Contexto & Educação**, v. 36, n. 113, p. 116-142, 2021. Disponível em: <https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/contextoeducacao/article/view/7992>. Acesso em: 10 jul. 2024. DOI: <https://doi.org/10.21527/2179-1309.2021.113.116-142>.
- ALVES, F. R. V. Situação Didática Olímpica (SDO): aplicações da teoria das situações didáticas para o ensino de olimpíadas. **Revista Contexto & Educação**, Fortaleza - CE, v. 36, n. 113, p. 116-142, 23 fev. 2021. Editora Unijuí. <http://dx.doi.org/10.21527/2179-1309.2021.113.116-142>. Disponível em: <https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/contextoeducacao/article/view/7992>. Acesso em: 14 ago. 2024.
- ALVES, F. R. V. Situações didáticas olímpicas (SDOs): ensino de olimpíadas de matemática com arrimo no *software* geogebra como recurso na visualização. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis - SC, v. 13, n. 1, p. 319-349, 13 maio 2020. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). <http://dx.doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n1p319>. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2020v13n1p319>. Acesso em: 11 ago. 2024.
- ALVES, F. R. V. Visualizing the Olympic Didactical Situation. (ODS): teaching mathematics with support of geogebra software. **Acta Didactica Napocensia**, [S.L.], v. 12, n. 2, p. 97-116, 27 dez. 2019. Babes-Bolyai University Cluj-Napoca. <http://dx.doi.org/10.24193/adn.12.2.8>.
- ANDRADE, W. M. **Um estudo sobre a aprendizagem das funções quadráticas com a mediação do software geogebra**. 2017. 170 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Programa Pós-Graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE, 2017. Disponível em: [https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/28833/1/2017\\_dis\\_wmandrade.pdf](https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/28833/1/2017_dis_wmandrade.pdf). Acesso em: 23 set. 2024.

ANTAR NETO, A. *et al.* **Noções de Matemática - Vol 5: Geometria Plana e Espacial**. 2. ed. Fortaleza - CE: VestSeller, 2010. 494 p. v. 5. ISBN 978856065308-9.

ARAGÃO, A. C. **A construção de sequências lineares recursivas por meio de uma engenharia didática com a aplicação da teoria das situações didáticas junto a um grupo de alunos do ensino médio**. 2023. 111 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual do Ceará, Sobral, 2023. Disponível em: [https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=7223&id2=171057201](https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7223&id2=171057201). Acesso em: 07 jul. 2024.

BACHIR, M. F. **A semelhança de figuras no ensino da geometria plana**. 2017. 90 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória - ES, 2017.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1995. 133 p. ISBN 85-85818-02-6.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Notas sobre o Brasil no Pisa 2022**. Brasília, DF: Inep, 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 18 abr. 2023.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 7.2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques**, 2010. 9p. Disponível em: [https://sites.unipa.it/grim/Gloss\\_fr\\_Brousseau.pdf](https://sites.unipa.it/grim/Gloss_fr_Brousseau.pdf). Acesso em: 16 ago. 2024.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008. 128p.

BROUSSEAU, G. **Guy Brousseau: “A cultura matemática é um instrumento para a cidadania”**. [Entrevista concedida a] Thais Gurgel. Nova Escola, São Paulo, Edição 228, 01 dez. 2009. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/545/guy-brousseau-a-culturamatematica-e-um-instrumento-para-a-cidadania>. Acesso em: 04 jul. 2024.

BROUSSEAU, G. **La théorie des situations didactiques en mathématiques. Éducation Et Didactique**, [S.L.], n. 5-1, p. 101-104, 30 maio 2011. OpenEdition. <http://dx.doi.org/10.4000/educationdidactique.1005>. Disponível em: <https://journals.openedition.org/educationdidactique/1005>. Acesso em: 25 out. 2024.

BROUSSEAU, G. **Problème de didactique des décimaux: recherches en didactiques des mathématiques**. v. 2, n. 3, p. 37-127, 1981. Disponível em: <https://revue-rdm.com/1981/problemes-de-didactique-des/>. Acesso em: 17 jun. 2023.

DAMASCO NETO, J. R.; COAN, L. G. W. **Fundamentos da didática das ciências e da matemática**. 2. ed. Florianópolis - Sc: Publicações do IF-SC, 2012. 55 p.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. 458 p. ISBN 978-85-357-1687-0.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. 176 p.

HOHENWARTER, M. *et al.* Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. In: ICME 11 – **11th International Congress on Mathematical Education**. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico, 2008.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Banco de Questões: OBMEP** 2010. Rio de Janeiro: IMPA, 2025. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1mImxD9CS4QACwOohFMBIwvU4upoqCQD0/view>. Acesso em: 21 jul. 2024.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **OBMEP – Apresentação**. Rio de Janeiro: IMPA, 2025. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acesso em: 03 jan. 2025.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Provas da OBMEP**. Rio de Janeiro: IMPA, 2025. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 20 jun. 2024.

LAKATOS, E. M., MARCONI, M. A. **Metodologia científica, ciência e conhecimento, métodos científicos, teoria, hipóteses e variáveis**. Atlas, 2a Edição revista e ampliada, 1991.

LAVICZA, Z. *et. al.* Integrating STEM-related Technologies into Mathematics Education at a Large Scale. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, [S.l.], v. 27, n. 1, 2020.

LIMA, M. L. O.; AZEVEDO, I. F.; ALVES, F. R. V. Situações Didáticas Olímpicas: uma proposta de ensino amparada com o geogebra. **Trilhas Pedagógicas**, Pirassununga, v. 10, n. 12, p. 342-361, ago. 2020. Faculdade de Tecnologia Ciências e Educação - FATECE. Disponível em: <https://fatece.edu.br/arquivos/arquivos-revistas/trilhas/volume10/Maria%20Luziana%20Oliveira%20Lima;%20Italandia%20Ferreira%20de%20Azevedo;%20Francisco%20Regis%20Vieira%20Alves.pdf>. Acesso em: 18 set. 2024.

MARTINS, W. H. B. S. **A utilização do software GeoGebra como instrumento para compreensão dos conceitos e resultados da Geometria Plana**. 2024. 181 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió - AL, 2024.

MATHIAS, C. V. *et al.* **O software GeoGebra e alternativas para o ensino de matemática**. Santa Maria - RS: Pró-Reitoria de Extensão - UFSM, 2022. Disponível em: [https://ogeogebra.com.br/arquivos/O\\_software\\_GeoGebra\\_e\\_alternativas\\_para\\_o\\_ensino\\_de\\_matematica.pdf](https://ogeogebra.com.br/arquivos/O_software_GeoGebra_e_alternativas_para_o_ensino_de_matematica.pdf). Acesso em: 25 fev. 2025.

MIRANDA, N. G. Teoria das Situações Didáticas (TSD): contextualização e compreensão na educação matemática. In: CONEDU - CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 7.,

2020, Maceió – AL. **Anais VII CONEDU – Edição Online**. Maceió – AL: Realize Editora, 2020. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/69594>. Acesso em: 15 out. 2024.

MOREIRA, M. M.; SILVA, A. G. F. G.; ALVES, F. C. (org.). **O ensino de matemática na educação contemporânea: o devir entre a teoria e a práxis**. Iguatu - CE: Quipá Editora, 2021. 396 p. Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/600536/2/O%20ENSINO%20DA%20MATEMATICA.pdf>. Acesso em: 11 set. 2024.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 2. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2022. 474 p.

PRINA, A. F. **O ensino de geometria plana a partir da construção de figuras geométricas: uma aplicação do geogebra**. 2017. 60 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop - MT, 2017.

RIBEIRO, T. N.; SOUZA, D. N. A utilização do *software* GeoGebra como ferramenta pedagógica na construção de uma unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS). **ReviSeM: Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Aracaju - SE, v. 1, n. 1, p. 36-51, 17 ago. 2016. Disponível em: <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1201076/Ribeiro2016A.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2024.

RODRIGUES, J. A.; ALVES, F. R. V.; SOUSA, R. T. International Mathematical Olympiad (IMO) e situações didáticas olímpicas: uma abordagem para o estudo dos triângulos com arrimo do geogebra. **Conexões - Ciência e Tecnologia**, Fortaleza - CE, v. 18, p. 01-10, 10 jul. 2024. DOI: 10.21439/conexoes.v18i0.3491. Disponível em: <https://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/3491/1682>. Acesso em: 15 set. 2024.

SANTIAGO, P. V. S. **Olimpíada Internacional de Matemática: situações didáticas olímpicas no ensino de geometria plana**. 2021. 160 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE, 2021. Disponível em: [https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/61842/5/2021\\_dis-pvssantiago.pdf](https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/61842/5/2021_dis-pvssantiago.pdf). Acesso em: 06 dez. 2024.

SANTIAGO; P. V. S.; SANTANA, J. R. Teoria das Situações Didáticas na Geometria Plana com uso do GeoGebra: uma aplicação da Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém/PA, v. 18, n. 43, e2023015, Jan.-Dez., 2023. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n43.pe2023015.id481>

SANTIAGO, P. V. S.; SANTOS, M. J. C.; SANTANA, J. R. Teoria das Situações Didáticas e Engenharia Didática com aporte do GeoGebra no ensino da Geometria Plana Olímpica. **RIDEMA - Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, Juiz de Fora - MG, v. 8, n. 1, 2024. Disponível em: <https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/45478>. Acesso em: 20 out. 2024.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 21. ed. São Paulo: Cortez Editora, 2000. 189 p.

SILVA, C. G. **Resolução de problemas sobre geometria para as olimpíadas brasileira de matemática das escolas públicas – OBMEP**. 2013. 41 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém - PA, 2013.

SILVA, J. G. A.; ALVES, F. R. V.; MENEZES, D. B. Situação Didática Olímpica - SDO: um problema olímpico aplicado à teoria das situações didáticas. **Revista Thema**, v. 19, n. 2, p. 265–278, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.15536/thema.V19.2021.265-278.1725>.

SILVA, J. G. A.; ALVES, F. R. V.; MENEZES, D. B. Situações Didáticas Olímpicas (SDO): uma aplicação de problemas olímpicos (PO) à luz da Teoria das Situações Didáticas (TSD) com apoio do software geogebra. **REnCiMa - Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S.L.], v. 12, n. 3, p. 1-20, 29 mar. 2021. Cruzeiro do Sul Educacional. <http://dx.doi.org/10.26843/rencima.v12n3a01.b>

SILVA, N. A.; FERREIRA, M. V. V.; TOZETTI, K. D. Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau. In: EDUCERE - XII Congresso Nacional de Educação, 12., 2015, Curitiba – PR. **Anais XII EDUCERE – Edição Online**. Curitiba – PR: PUCPR, 2015. Disponível em: [https://www.academia.edu/36553983/UM\\_ESTUDO SOBRE A SITUA%C3%87%C3%83\\_O\\_DID%C3%81TICA\\_DE\\_GUY\\_BROUSSEAU](https://www.academia.edu/36553983/UM_ESTUDO SOBRE A SITUA%C3%87%C3%83_O_DID%C3%81TICA_DE_GUY_BROUSSEAU). Acesso em: 30 ago. 2024.

SOUSA, R. T.; ALVES, F. R. V. A teoria das situações didáticas no contexto de competições olímpicas: a experiência na olimpíada internacional mathématiques sans frontières. **Revista DoCentes**, Fortaleza - CE, v. 09, n. 25, ed. 1, p. 12-19, 4 mar. 2024. Disponível em: <https://revistadocentes.seduc.ce.gov.br/revistadocentes/issue/view/35/V8%2Cn%C2%BA25%2C2024>. Acesso em: 30 ago. 2024.

SOUSA, R. T; SANTIAGO, P. V. S.; ALVES, F. R. V. Modelagem matemática em problemas da OBMEP: a visualização geométrica com aporte do *software* geogebra. **Revista Iberoamericana de Tecnología En Educación y Educación En Tecnología**, [S.L.], n. 32, p. 34-43, 1 jul. 2022. Universidad Nacional de La Plata. <http://dx.doi.org/10.24215/18509959.32.e4>. Disponível em: <https://teyet-revista.info.unlp.edu.ar/TEyET/article/view/1844>. Acesso em: 12 jul. 2024.

SOUZA NETO, J. A. **Olimpíadas de matemática e aliança entre o campo científico e o campo político**. 2013. 77 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Centro de Educação e Ciências Humanas, UFSCar, São Carlos, 2012.

SOUZA NETO, J. A.; VILELA, D. S.; FARIAS, J. V. Estratégias de Consagração e de Valorização da Matemática por meio da OBMEP. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, [S.L.], v. 36, n. 73, p. 650-675, ago. 2022. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a03>.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C M. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 21, n. 1, p. 155–168, 2014. DOI: 10.20396/zet.v21i39.8646602. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646602>. Acesso em: 13 dez. 2024.

## ANEXO A – SOLUÇÃO OFICIAL DOS PO SELECIONADOS

Figura 42 – Questão 3 da OBMEP 2017 (parte 1).

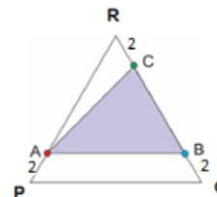
**N3Q3 – Solução**

Lembramos, para a resolução do problema, que a altura e a área de um triângulo equilátero cujo lado tem comprimento  $L$  são dadas, respectivamente, por:

$$H = \frac{L\sqrt{3}}{2} \text{ e } A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

**item a)**

Para calcular  $f(2)$ , denominemos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  os vértices do triângulo equilátero, conforme a figura ao lado. Para calcular  $f(2)$  observamos que, quando os pontos  $A$  e  $B$  se deslocam 2 cm a partir dos vértices  $P$  e  $Q$ , respectivamente, fica determinado um novo triângulo equilátero  $ABR$ , pois os lados  $RA$  e  $RB$  medem 8 cm e o ângulo do vértice  $R$  é  $60^\circ$ .



A área do triângulo  $ABC$  pode ser calculada como a diferença entre as áreas dos triângulos  $ABR$  e  $ACR$ ; a área do triângulo  $ACR$  será obtida tomando o segmento  $RC$  como base para que a altura relativa a essa base coincida com a altura do triângulo equilátero  $ABR$ , a qual pode ser facilmente calculada.

Desta forma,

$$f(2) = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

**item b)**

Ao se deslocarem 5 cm a partir de seus pontos de origem, os pontos  $A$  e  $B$  estarão nos pontos médios dos lados  $PR$  e  $QR$ , respectivamente. Simultaneamente, o ponto  $C$ , ao se deslocar 5 cm a partir do vértice  $R$ , coincidirá com o ponto  $B$  no ponto médio de  $QR$  e, neste caso, não formarão um triângulo.

Ao se deslocarem 10 cm, os pontos  $A$  e  $B$  coincidirão com o vértice  $R$  e, novamente,  $A$ ,  $B$  e  $C$  não formarão um triângulo.

Para todos os outros valores de  $x$ , os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  serão não colineares, portanto, vértices de um triângulo.

Logo, os valores de  $x$  para os quais  $f(x) = 0$ , para  $0 \leq x \leq 10$ , são  $x = 5$  e  $x = 10$ .

**item c)**

Vamos encontrar as expressões de  $f(x)$  para  $0 \leq x < 5$  e para  $5 \leq x \leq 10$ .

Fonte: IMPA (2017).

**Figura 43 – Questão 3 da OBMEP 2017 (parte 2).**

Para os valores de  $x$  entre 0 e 5, podemos tomar  $PA = QB = RC = x$  (Figura ao lado) e usar a mesma estratégia do cálculo de  $f(2)$ ; para cada valor de  $x$ , o lado do triângulo equilátero  $ABR$  terá o comprimento  $10 - x$ .

Portanto,

$$f(x) = \frac{(10-x)^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \frac{x(10-x)\sqrt{3}}{2} = \frac{(10-x)(10-2x)\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}(10-x)(5-x)}{2} \text{ cm}^2,$$

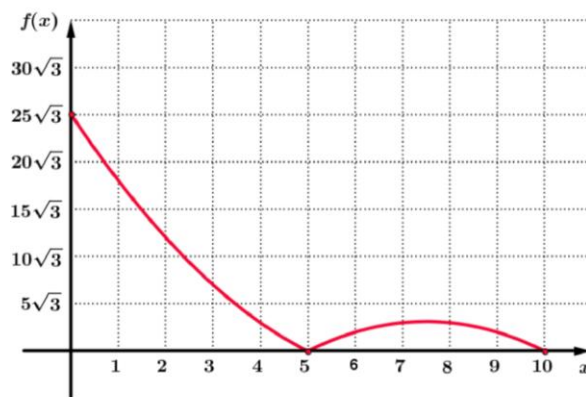
para  $0 \leq x \leq 5$ .

Para os valores de  $x$  entre 5 e 10, como  $PA = QB = RC = x$ , o lado do triângulo equilátero  $ABR$  terá comprimento  $10 - x$ . Escolhemos  $AB$  como base do triângulo  $ABC$  cuja área queremos calcular (figura ao lado). A medida do lado  $AB$  é, portanto, igual a  $10 - x$ . Traçamos uma reta paralela à reta  $PQ$ , passando por  $C$ ; ela determina sobre o lado  $PR$  o ponto  $S$ , como na figura ao lado. A altura  $h$  do triângulo  $ABC$  com relação ao lado  $AB$  é dada pela diferença das alturas dos triângulos equiláteros de lados  $SC$  e  $AB$ , ou seja,

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{(10-x)\sqrt{3}}{2} = \frac{(2x-10)\sqrt{3}}{2} = (x-5)\sqrt{3}$$

Daí,  $f(x) = \frac{\sqrt{3}(10-x)(x-5)}{2}$  para  $5 \leq x \leq 10$ .

Assim, a partir dos cálculos acima, o gráfico de  $f$ , para  $0 \leq x \leq 10$ , formado por trechos de parábolas, tem o seguinte aspecto:



Observação: A função  $f$  pode ser escrita utilizando-se a função módulo; neste caso, sua expressão é:

$$f(x) = \left| \frac{\sqrt{3}(10-x)(x-5)}{2} \right| \text{ para } 0 \leq x \leq 10.$$

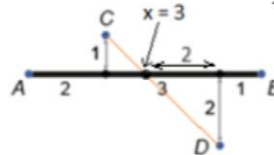
Fonte: IMPA (2017).

Figura 44 – Questão 3 da OBMEP 2023.

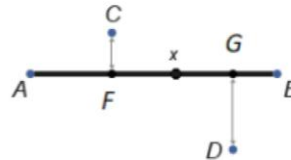
**Solução N3Q3**

Consideraremos a posição do carro como um ponto no segmento AB.

- a) A distância ao quadrado do ponto  $x = 3$  até o ponto C é, pelo Teorema de Pitágoras, igual a  $1^2 + 1^2 = 2$ , enquanto que a distância ao quadrado de  $x = 3$  até o ponto D é  $2^2 + 2^2 = 8$ . Logo,  $f(3) = 2$ .



- b) As distâncias até as bases das antenas serão iguais em um ponto  $x$  localizado entre os pontos F e G descritos na figura abaixo.

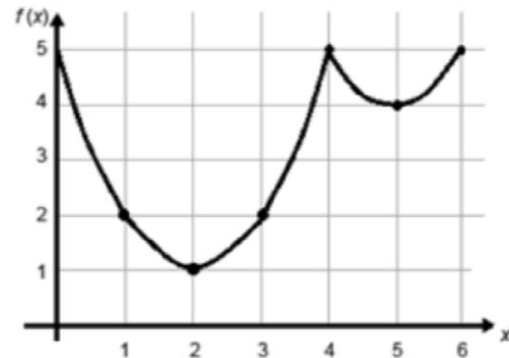


O quadrado da distância de  $x$  até C é  $1 + (x - 2)^2 = 5 - 4x + x^2$  e o quadrado da distância de  $x$  até D é  $4 + (5 - x)^2 = 29 - 10x + x^2$ .

Igualando as duas expressões temos  $6x = 24$ ; logo,  $x = 4$  é o ponto em que as distâncias até as bases são iguais.

- c) Do item b) e da simetria do quadrado da distância aos pontos F e G, temos

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 4x + x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 29 - 10x + x^2, & \text{se } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

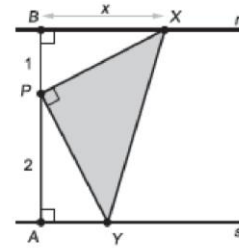


Fonte: IMPA (2023).

Figura 45 – Questão 4 da OBMEP 2012 (parte 1).

**N3Q4 – Solução**

a) Do enunciado temos (i)  $\widehat{PAY} = \widehat{XBP} = 90^\circ$ . Além disso, temos  $\widehat{BPX} + 90^\circ + \widehat{APY} = 180^\circ$ , o que nos dá (ii)  $\widehat{APY} = 90^\circ - \widehat{BPX}$ . Por outro lado, no triângulo  $XBP$  os ângulos  $\widehat{BPX}$  e  $\widehat{BXP}$  são complementares e segue que (iii)  $\widehat{BXP} = 90^\circ - \widehat{BPX}$ . De (ii) e (iii) obtemos (iv)  $\widehat{APY} = \widehat{BXP}$ . Finalmente, de (i) e (iv) segue a semelhança dos triângulos  $PAY$  e  $XBP$ .



b) 1ª solução Seja  $AY = y$ . A semelhança dos triângulos  $PAY$  e  $XBP$  nos dá

(i)  $\frac{y}{1} = \frac{2}{x}$ . Decompondo o trapézio  $AYXB$  nos triângulos  $XPY$ ,  $PAY$  e  $XBP$ , temos

$$(ii) \text{área}(XPY) = \text{área}(AYXB) - \text{área}(XBP) - \text{área}(PAY).$$

Usando (i), temos

$$\text{área}(AYXB) = \frac{x+y}{2} \cdot 3 = \frac{x+\frac{2}{x}}{2} \cdot 3 = \frac{3x}{2} + \frac{3}{x}$$

$$\text{área}(XBP) = \frac{x \cdot 1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\text{área}(PAY) = \frac{y \cdot 2}{2} = \frac{2}{x}$$

Substituindo estas expressões em (ii) obtemos

$$\text{área}(XPY) = \frac{3x}{2} + \frac{3}{x} - \frac{x}{2} - \frac{2}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

Solução análoga pode ser obtida baixando por  $X$  uma perpendicular à reta  $AB$ , denotando por  $C$  o ponto de interseção dessa perpendicular e da reta  $AB$  e fazendo

$$\text{área}(XPY) = \text{área}(ABXC) - \text{área}(PAY) - \text{área}(XBP) - \text{área}(XYC)$$

2ª solução: Seja  $AY = y$ . A semelhança dos triângulos  $PAY$  e  $XBP$  nos dá a

relação  $\frac{y}{1} = \frac{2}{x}$ . Segue do teorema de Pitágoras que  $PX = \sqrt{1+x^2}$  e

$$PY = \sqrt{4+y^2} = \sqrt{4+\frac{4}{x^2}} = \frac{2}{x} \sqrt{1+x^2}.$$

Temos então

$$\text{área}(XPY) = \frac{PX \cdot PY}{2} = \frac{\sqrt{1+x^2} \times 2\sqrt{1+x^2}}{2x} = \frac{1+x^2}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

c) Devemos resolver a equação  $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ , ou seja,  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ; suas raízes são

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = 2.$$

Fonte: IMPA (2012).

**Figura 46 – Questão 4 da OBMEP 2012 (parte 2).**

d) *1ª solução:* Queremos encontrar o menor valor positivo de  $a$  tal que a equação  $x + \frac{1}{x} = a$  tem solução positiva  $x$ . Essa equação é a mesma  $x^2 - ax + 1 = 0$ , que tem soluções  $x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$  e  $x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$  sempre que  $\Delta = a^2 - 4 \geq 0$  (nesse caso, essas soluções são sempre positivas, pois  $0 \leq \sqrt{a^2 - 4} < a$  para qualquer  $a > 0$ ). O menor valor de  $a$  que satisfaz a condição  $\Delta \geq 0$  é  $a = 2$ ; nesse caso,  $\Delta = 0$  e a única solução da equação é  $x = 1$ . Logo  $(XPY)$  assume seu valor mínimo quando  $x = 1$ , quando  $(XPY) = 2$ ; observamos que esse é o caso em que os triângulos  $PAY$  e  $XBP$  são isósceles.

*2ª solução:* Escrevemos  $x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2$ , lembrando que  $x > 0$ . Como um quadrado é sempre maior ou igual a zero, vemos que o valor mínimo da expressão  $x + \frac{1}{x}$  ocorre quando  $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ , ou seja, quando  $x = 1$ ; nesse caso, esse valor mínimo é 2.

*3ª solução:* Se  $x = 1$  então  $x + \frac{1}{x} = 2$ . Se  $x \neq 1$  então  $x + \frac{1}{x} > 2$ ; de fato, se  $x + \frac{1}{x} \leq 2$  então  $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ , ou seja,  $(x - 1)^2 \leq 0$ , um absurdo. Logo a área é mínima para  $x = 1$  e seu valor nesse ponto é 2.

*4ª solução:* Se  $x \neq 1$  podemos escrever  $x = 1 \pm k$ , com  $k > 0$ . Raciocínio análogo ao da 3ª solução mostra então que, em ambos os casos, temos  $x + \frac{1}{x} > 2$ .

*5ª solução:* a desigualdade aritmético-geométrica diz que se  $a$  e  $b$  são dois números positivos então sua média aritmética é maior que sua média geométrica, isto é,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  (exercício). Fazendo  $x = a$  e  $\frac{1}{x} = b$ , temos  $\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$ , ou seja,  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  para qualquer valor de  $x$ ; como para  $x = 1$  temos  $x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1} = 2$ , segue que esse é o valor mínimo da área.

Fonte: IMPA (2012).

Figura 47 – Questão 2 da OBMEP 2014.

**Questão 2****item a)**

A formiga anda  $20 + 10 + 20 = 50$  cm até chegar em D.

**Item b)**

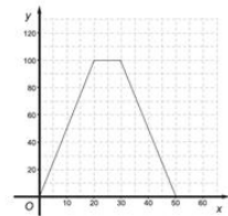
Quando  $x = 22$  centímetros ela está no ponto F do segmento BC que dista 2 cm do ponto B. Podemos considerar o segmento AD, com medida 10 cm, a base do triângulo ADF e sua altura será a distância do ponto F à base AD, distância esta igual a 20 cm. Portanto, a área do triângulo será  $\frac{10 \cdot 20}{2} = 100 \text{ cm}^2$ .

**Item c)**

Considerando sempre o segmento AD, com medida 10cm, a base do triângulo, sua área variará com a altura e será máxima quando a altura for máxima, ou seja, quando a altura for 20cm. O cálculo acima nos dá a área máxima igual a  $100 \text{ cm}^2$ .

**Item d)**

Quando o ponto F varia no lado AB,  $0 \leq x \leq 20$  e o valor da área do triângulo ADF será  $\frac{10x}{2} = 5x$ . A área será constante e igual a  $100 \text{ cm}^2$  quando  $20 \leq x \leq 30$ . Para  $30 \leq x \leq 50$ , a expressão para a área será  $\frac{10 \cdot (50-x)}{2} = -5x + 250$ . O gráfico pedido será o da figura ao lado.



Fonte: IMPA (2014).

Figura 48 – Questão 3 da OBMEP 2010.

**Questão 3**

a) 1ª solução: Na figura ao lado temos  $XS = 0,2$  e queremos achar  $CR$ . Notamos que os ângulos indicados na figura com vértices em  $C$  e  $X$  são iguais, pois são determinados pelas paralelas  $CR$  e  $XS$  e pela transversal  $XY$ . Logo os triângulos retângulos  $ARC$  e  $ASX$  são semelhantes e temos

$$\frac{CR}{XS} = \frac{AC}{AX}$$

ou seja,

$$CR = XS \times \frac{AC}{AX} = 0,2 \times \frac{0,5}{1} = 0,1.$$

Podemos também argumentar como segue. A razão de semelhança entre os triângulos  $ARC$  e  $ASX$  é igual a  $\frac{AC}{AX} = \frac{0,5}{1} = 0,5$ ; como os segmentos  $CR$  e  $XS$  são correspondentes, segue que o comprimento de  $CR$  é a metade do comprimento de  $XS$ , ou seja, é igual a  $0,1$  m.

2ª solução: Denotemos por  $\alpha$  o ângulo  $\widehat{DAX}$ , como na figura à esquerda. Como  $\widehat{DAX}$  e  $\widehat{BAY}$  são opostos pelos vértices, temos também  $\widehat{BAY} = \alpha$ . Nos triângulos retângulos  $ASX$  e  $ARC$ , temos

$$XS = AX \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \text{ e } CR = AC \cdot \sin \alpha = \sin \alpha. \text{ Logo } CR = \frac{1}{2} XS = 0,1 \text{ m.}$$

b) 1ª solução: Como  $AC = BC = YC$  os triângulos  $ACB$  e  $BCY$  são isósceles; podemos então marcar os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  como na figura à direita. A soma dos ângulos do triângulo  $ABY$  é  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ ; donde  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Logo  $BY$  é perpendicular ao trilho  $BD$ , ou seja,  $BY$  é horizontal qualquer que seja a posição de  $Y$ .

2ª solução: Como  $AC = BC = YC$ , podemos traçar um círculo com centro  $C$  e passando por  $A$ ,  $B$  e  $Y$ , como na figura à esquerda. Como os pontos  $A$ ,  $C$  e  $Y$  estão alinhados, o segmento  $AY$  é um diâmetro desse círculo. Logo o ângulo  $\widehat{ABY}$  está inscrito no semicírculo, donde sua medida é  $90^\circ$ ; com antes, segue que  $BY$  é horizontal qualquer que seja a

posição de  $Y$ .

c) Na figura à direita, queremos calcular  $DT$  quando  $XT = 0,4$ . Para isso, notamos primeiro que, quando a porta se fecha,  $XY$  coincide com  $BD$ ; logo

$$BD = XY = XA + AC + CY = 1 + 0,5 + 0,5 = 2.$$

Como  $DSTX$  é um retângulo, temos  $SD = XT = 0,4$  e segue que  $BS = BD - SD = 2 - 0,4 = 1,6$ . Por outro lado, os triângulos  $ASX$  e  $ABY$  são congruentes; de fato, eles são ambos retângulos, seus ângulos em  $X$  e  $Y$  são iguais (como no item a)) e  $AX = AY$ . Logo  $AS = AB$  e como  $BS = 1,6$  segue que  $AS = 0,8$ . O teorema de Pitágoras nos diz então que

$$SX = \sqrt{AX^2 - AS^2} = \sqrt{1 - 0,64} = \sqrt{0,36} = 0,6$$

e concluímos que  $DT = 0,6$  m.

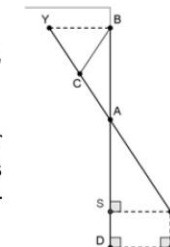
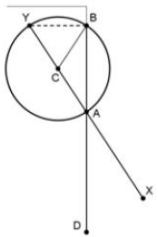
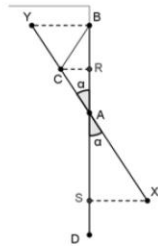
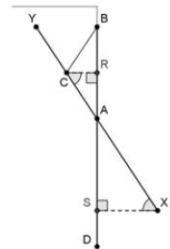


Figura 49 – Questão 3 da OBMEP 2006.

**Problema 3**

- a) Como os triângulos
- $ABC$
- e
- $BDE$
- são congruentes, temos

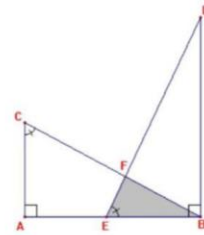
$$\text{área de } ABC = \text{área de } BDE,$$

donde

$$\begin{aligned}\text{área de } AEFC &= \text{área de } ABC - \text{área de } BFE \\ &= \text{área de } BDE - \text{área de } BFE \\ &= \text{área de } BDF.\end{aligned}$$

Logo  $\text{área de } AEFC = \text{área de } BDF$  e a razão pedida é

$$\frac{\text{área de } BDF}{\text{área de } AEFC} = 1.$$



- b) Como os triângulos
- $ABC$
- e
- $BDE$
- são congruentes, temos
- $\hat{D}EB = \hat{B}CA$
- , donde

$$\hat{D}EB + \hat{A}BC = \hat{B}CA + \hat{A}BC = 90^\circ,$$

donde

$$\hat{B}FE = 180^\circ - (\hat{D}EB + \hat{A}BC) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Outro modo de achar a medida de  $\hat{B}FE$  é observar que os triângulos  $ABC$  e  $BEF$  são semelhantes, pois têm dois ângulos iguais, a saber, o ângulo comum em  $B$  e os ângulos em  $C$  e  $E$ . Logo os ângulos em  $A$  e  $F$  são iguais, ou seja, o ângulo  $\hat{B}FE$  é reto.

- c) Como os triângulos
- $ABC$
- e
- $BDE$
- são congruentes temos
- $EB = AC = 5$
- . Os triângulos
- $ABC$
- e
- $FBE$
- são semelhantes pois são retângulos e têm em comum o ângulo em
- $B$
- , logo
- $\frac{EF}{AC} = \frac{BF}{AB}$
- , ou seja
- $\frac{EF}{5} = \frac{BF}{12}$
- , donde
- $EF = \frac{5BF}{12}$
- . Como
- $BEF$

é um triângulo retângulo, sua área é  $\frac{EF \cdot BF}{2}$ , e como  $EF = \frac{5BF}{12}$  essa área é

$$\frac{5BF^2}{24}. \text{ Pelo Teorema de Pitágoras temos } EB^2 = EF^2 + BF^2, \text{ donde}$$

$$5^2 = \frac{25BF^2}{12^2} + BF^2, \text{ ou seja, } BF^2 = \frac{3600}{169}. \text{ Logo a área de } BEF \text{ é}$$

$$\frac{5BF^2}{24} = \frac{5}{24} \cdot \frac{3600}{169} = \frac{750}{169} \text{ cm}^2.$$

Podemos também argüir como segue. Pelo Teorema de Pitágoras temos

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169 = 13^2,$$

donde  $BC = 13$ . Sejam  $\alpha = \hat{A}BC = \hat{B}DE$ . No triângulo

$ABC$  temos  $\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$  e  $\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{13}$ . No

triângulo  $BEF$ , temos  $EF = EB \cdot \sin \alpha = 5 \cdot \frac{5}{13}$  cm e

$$BF = EB \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \frac{12}{13} = \frac{60}{13} \text{ cm. Logo}$$

$$\text{área } EFB = \frac{1}{2} EF \cdot FB = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{13} \cdot \frac{60}{13} = \frac{750}{169} \text{ cm}^2.$$

