UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Aplicação das técnicas de Feynman no ensino do teorema de Bayes no ensino fundamental

Janaina Isabela de Jesus
Magister Scientiae

FLORESTAL - MINAS GERAIS
2026

JANAINA ISABELA DE JESUS

Aplicação das técnicas de Feynman no ensino do teorema de Bayes no ensino fundamental

Dissertação Mestrado Profissional apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (Profissional), para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Gerson R. dos Santos

Coorientador: Luis F. Goncalves Fonseca

FLORESTAL - MINAS GERAIS
2026

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

J58a
2026

Jesus, Janaina Isabela de, 1993-

Aplicação das técnicas de Feynman no ensino do teorema de Bayes no ensino fundamental / Janaina Isabela de Jesus. – Florestal, MG, 2026.

1 dissertação eletrônica (39 f.)

Orientador: Gerson Rodrigues dos Santos.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2026.

Referências bibliográficas: f.37-39.

DOI: https://doi.org/10.47328/ufvcaf.2026.010

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Teoria bayesiana de decisão estatística. 3. Probabilbidades. 4. Ciências cognitivas. 5. Neurociência cognitiva. I. Santos, Gerson Rodrigues dos, 1974-. II. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD ed. 23 519.2

Bibliotecário(a) responsável: Elaine da Cunha CRB-6/2844

JANAINA ISABELA DE JESUS

Aplicação das técnicas de Feynman no ensino do teorema de Bayes no ensino fundamental

Dissertação Mestrado Profissional apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (Profissional), para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 6 de março de 2026.

Assentimento:

Janaina Isabela de Jesus
Autora

Gerson Rodrigues dos Santos
Orientador

Dedico este trabalho à minha mãe Gislaine, pelo amor incondicional e pelo apoio em todos os momentos da minha vida. Aos meus avós Edite e Jonas, que já partiram, mas permanecem vivos em minhas lembranças e em meu coração. Ao meu companheiro William, pela parceria, paciência e incentivo constante. Aos meus familiares, que sempre torceram por mim, e aos amigos que conquistei durante o mestrado, cuja presença tornou esta jornada mais leve e significativa.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pela força e serenidade que sempre me sustentaram diante dos desafios e pela inspiração constante na busca dos meus objetivos. À minha mãe Gislaine, pelo carinho, dedicação e exemplo de perseverança que me guiaram em toda a caminhada. Aos meus avós Edite e Jonas, que já não estão presentes fisicamente, mas permanecem vivos em minhas lembranças e em cada conquista. Ao meu companheiro William, pela parceria, paciência e apoio incondicional, que foram essenciais para que eu pudesse seguir em frente. Aos meus familiares, que sempre estiveram ao meu lado, e aos amigos que encontrei durante o mestrado, cuja presença tornou esta jornada mais leve e significativa. Por fim, expresso minha profunda gratidão aos professores Gérson e Luís Felipe, pela confiança, orientação e ensinamentos, além da paciência e dedicação em cada etapa deste trabalho. Sem o apoio deles, esta pesquisa não teria se concretizado.

Este trabalho foi realizado com o apoio das seguintes agências de pesquisa brasileiras: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

RESUMO

JESUS, Janaina Isabela de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2026. **Aplicação das técnicas de Feynman no ensino do teorema de Bayes no ensino fundamental**. Orientador: Gerson Rodrigues dos Santos. Coorientador: Luis Felipe Goncalves Fonseca.

A Educação Matemática tem buscado estratégias inovadoras que tornem acessível aos estudantes da Educação Básica a compreensão de conteúdos tradicionalmente considerados complexos. A introdução de conceitos probabilísticos avançados ainda representa um desafio recorrente, especialmente no caso do Teorema de Bayes, geralmente associado ao Ensino Médio e Superior. Esta dissertação discute, em caráter teórico e bibliográfico, o potencial da Técnica de Feynman como estratégia pedagógica para favorecer a compreensão de ideias como probabilidade condicional, partições e atualização de crenças no Ensino Fundamental II. A técnica, fundamentada na explicação ativa e na reorganização do pensamento, é analisada à luz de referenciais da Educação Matemática, da Ciência Cognitiva e da Neurociência, além das diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A reflexão desenvolvida evidencia que a explicação entre pares, a simplificação da linguagem e a contextualização de problemas contribuem para reduzir a carga cognitiva, ampliar o engajamento e promover a aprendizagem significativa. Conclui-se que a Técnica de Feynman constitui uma abordagem promissora para o ensino de probabilidade na Educação Básica, especialmente em conteúdos considerados complexos, e abre caminhos para futuras investigações que integrem clareza conceitual, participação ativa e fundamentos da ciência cognitiva no ensino de Matemática.

Palavras-chave: educação matemática; técnicas de Feynman; teorema de Bayes

ABSTRACT

JESUS, Janaina Isabela de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2026. **Applying Feynman's techniques to teaching Bayes' theorem in elementary school.**. Adviser: Gerson Rodrigues dos Santos. Co-adviser: Luis Felipe Goncalves Fonseca.

Mathematics Education has increasingly sought innovative strategies to make traditionally complex concepts more accessible to students in Basic Education. The introduction of advanced probabilistic ideas remains a recurring challenge, particularly in the case of Bayes’ Theorem, which is usually associated with secondary or higher education. This dissertation presents a theoretical and bibliographic discussion on the potential of the Feynman Technique as a pedagogical strategy to support the understanding of conditional probability, partitions, and belief updating in middle school. Grounded in references from Mathematics Education, Cognitive Science, and Neuroscience, as well as the guidelines of the Brazilian National Common Core Curriculum (BNCC), the analysis highlights how active explanation, simplification of language, and conceptual reorganization can foster meaningful learning. The reflection developed emphasizes that peer explanation, contextualization of problems, and verbalization of reasoning contribute to reducing cognitive load, increasing student engagement, and promoting conceptual comprehension. It is concluded that the Feynman Technique represents a promising approach for teaching probability in Basic Education, especially for complex topics, and opens pathways for future investigations that integrate conceptual clarity, active participation, and cognitive science foundations into mathematics teaching.

Keywords: mathematics education; Feynman technique; Bayes' theorem.

Sumário

1 Introdução

1.1 Introdução

O estudo da probabilidade tem raízes no século XVII, com matemáticos como Blaise Pascal e Pierre de Fermat, que iniciaram a formalização da teoria ao analisar jogos de azar e problemas relacionados à incerteza [**shafer2004**, **hald2003**]. Esses primeiros estudos abriram caminho para a construção de uma área que hoje é considerada fundamental para a ciência e para a tomada de decisões em diferentes contextos. Posteriormente, Thomas Bayes formulou o teorema que leva seu nome, introduzindo a ideia de atualização de probabilidades diante de novas evidências [**bayes1763**]. Esse princípio, aparentemente simples, revolucionou a forma como se pensa a incerteza e se interpreta a informação, tornando-se um dos pilares da estatística moderna.

Desde então, a estatística bayesiana se consolidou como uma ferramenta essencial em diversas áreas. Na medicina, é utilizada para diagnósticos e testes clínicos, permitindo avaliar a probabilidade de uma doença a partir de resultados laboratoriais. Nas ciências sociais, auxilia na análise de dados complexos e na interpretação de comportamentos coletivos. Na inteligência artificial e no aprendizado de máquina, o Teorema de Bayes é aplicado em algoritmos de classificação, reconhecimento de padrões e sistemas de recomendação. Na economia e em análises jurídicas, contribui para a tomada de decisões em cenários de incerteza. Esse panorama internacional evidencia a relevância global do teorema e reforça a necessidade de introduzi-lo de forma acessível já na educação básica, preparando os estudantes para compreender e lidar com situações reais que envolvem probabilidades.

No Brasil, o ensino de probabilidade foi incorporado gradualmente ao currículo escolar, mas ainda enfrenta desafios relacionados à abstração dos conceitos e à falta de contextualização prática. No Ensino Fundamental, o ensino costuma se restringir a noções elementares de eventos possíveis, impossíveis e prováveis, sem avançar para conceitos mais sofisticados. A introdução de ideias como o Teorema de Bayes é rara e geralmente restrita ao Ensino Médio ou Superior. Essa limitação pedagógica dificulta a formação de um raciocínio probabilístico mais robusto e impede que os alunos percebam a aplicabilidade da probabilidade em situações cotidianas, como diagnósticos médicos, previsões de eventos ou tomadas de decisão em cenários de incerteza [**lorenzato2006**, **dambrosio1993**, **coutinho2001**].

Assim, esta dissertação pretende contribuir para o campo da Educação Matemática ao mostrar que a combinação entre contextualização prática e metodologias inovadoras, como a Técnica de Feynman, pode abrir caminhos para a introdução de conceitos avançados no Ensino Fundamental. Ao aproximar os alunos da realidade científica e tecnológica contemporânea, busca-se não apenas ampliar sua compreensão da probabilidade, mas também desenvolver competências críticas para interpretar e tomar decisões em um mundo cada vez mais orientado por dados e incertezas.

1.1.1 Adequação ao nível escolar e pré-requisitos cognitivos

A escolha do 9º ano como contexto para introduzir o Teorema de Bayes fundamenta-se em dois aspectos principais. Do ponto de vista curricular, os alunos já tiveram contato com noções básicas de probabilidade e proporção, que são pré-requisitos indispensáveis para compreender a lógica da atualização de probabilidades. Do ponto de vista cognitivo, estudos em Educação Matemática e em psicologia do desenvolvimento indicam que, por volta dos 14–15 anos, os estudantes começam a consolidar o pensamento formal, condição necessária para lidar com abstrações como inferência probabilística [**batanero2016**, **carvalho2018**].

Essa opção também se justifica por contraste: no 8º ano, muitos alunos ainda estão consolidando noções fundamentais de frações e porcentagens, o que dificulta a compreensão de probabilidades condicionais; já no Ensino Médio, o currículo tende a priorizar estatística descritiva e funções, reduzindo o espaço para introduzir Bayes de forma contextualizada. O 9º ano representa, portanto, um ponto de equilíbrio entre maturidade cognitiva e oportunidade pedagógica.

A literatura especializada sugere que alunos do final do Ensino Fundamental II são capazes de compreender noções básicas de inferência bayesiana quando apoiados por representações visuais (diagramas de árvore, tabelas de dupla entrada) e exemplos contextualizados. Assim, a escolha do 9º ano encontra respaldo tanto em aspectos curriculares quanto em evidências sobre desenvolvimento cognitivo, reforçando a pertinência de se discutir a introdução de conceitos avançados nessa etapa da educação básica.

1.2 Objetivo Geral

O objetivo geral desta dissertação é analisar o potencial da Técnica de Feynman como recurso pedagógico para o ensino do Teorema de Bayes no Ensino Fundamental II. Busca-se compreender de que forma essa metodologia pode contribuir para a aprendizagem significativa e para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, considerando aspectos curriculares e cognitivos. Pretende-se discutir se, ao simplificar a linguagem e contextualizar os problemas em situações do cotidiano, os estudantes podem compreender e aplicar conceitos tradicionalmente considerados complexos. Além disso, destaca-se o papel da explicação entre pares como estratégia de consolidação do conhecimento, evidenciado em estudos sobre aprendizagem colaborativa e metacognição [**novak1998**, **vygotsky1991**].

1.3 Objetivos Específicos

Com base no objetivo geral, esta dissertação se desdobra em metas mais pontuais que orientam a reflexão teórica e a análise da proposta metodológica:

- Discutir a fundamentação teórica da Técnica de Feynman aplicada ao ensino de conceitos matemáticos;
- Analisar a pertinência da introdução do Teorema de Bayes no Ensino Fundamental II, considerando aspectos curriculares e cognitivos;
- Examinar como a simplificação da linguagem e a contextualização de problemas favorecem a aprendizagem significativa;
- Identificar, a partir da literatura, as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes no aprendizado de probabilidade e como metodologias inovadoras podem contribuir para superá-las.

Esses objetivos específicos delimitam o escopo da investigação e fornecem um caminho claro para a análise teórica. Ainda que outras questões relevantes possam emergir, o tempo e os limites da dissertação não permitem aprofundar todas elas, ficando como possibilidades para estudos futuros.

2

Teorema de Bayes

A compreensão moderna da probabilidade não surgiu de forma linear ou imediata. Ela foi construída ao longo de séculos, em meio a debates filosóficos, avanços matemáticos e problemas concretos relacionados à incerteza. Entre os nomes que marcaram essa trajetória, destaca-se Thomas Bayes (1702–1761), um matemático e ministro presbiteriano inglês cuja obra permaneceu praticamente desconhecida em vida. Bayes não publicou seu famoso teorema; quem o trouxe à luz foi seu amigo próximo, o também ministro e cientista Richard Price, que encontrou entre os manuscritos de Bayes um ensaio inacabado sobre como inferir causas a partir de efeitos observados.

Em 1763, dois anos após a morte de Bayes, Price apresentou o trabalho à Royal Society, argumentando que aquele resultado oferecia uma nova forma de pensar a probabilidade: não apenas como frequência de eventos, mas como um processo de atualização racional de crenças diante de novas evidências. Essa ideia, que hoje parece natural em diagnósticos médicos, previsões e algoritmos de aprendizado de máquina, era profundamente inovadora para a época. O teorema permite inverter a direção do raciocínio probabilístico: em vez de perguntar "qual a chance de observarmos um resultado dado uma causa?", ele responde "qual a chance de uma causa ser verdadeira dado o resultado observado?".

Embora Bayes e Price não pudessem imaginar a dimensão que seu trabalho alcançaria, o teorema tornou-se um dos pilares da estatística contemporânea. Sua força reside justamente na simplicidade conceitual: a probabilidade não é estática, mas se transforma à medida que novas informações são incorporadas. Essa perspectiva dialoga diretamente com a formação do raciocínio probabilístico na Educação Básica, pois aproxima a matemática de situações reais em que decisões precisam ser tomadas com base em evidências parciais.

Neste capítulo, apresentamos os fundamentos matemáticos necessários para a compreensão do Teorema de Bayes, desde os conceitos elementares de probabilidade até os resultados que sustentam sua formulação. A abordagem adotada busca manter o rigor formal, sem perder de vista a clareza e a acessibilidade, de modo a preparar o terreno para a discussão pedagógica desenvolvida nos capítulos subsequentes.

2.1 Teorema de Bayes na Educação Básica

A introdução do Teorema de Bayes na Educação Básica, sobretudo no Ensino Fundamental exige que alguns conceitos essenciais da teoria das probabilidades sejam revisitados com clareza e coerência. Embora o teorema seja frequentemente associado a aplicações avançadas, sua estrutura matemática repousa sobre ideias elementares, como espaço amostral, eventos, probabilidade condicional e partições. Esses conceitos, quando bem compreendidos, permitem que o estudante desenvolva um raciocínio probabilístico mais robusto e seja capaz de interpretar situações de incerteza de maneira lógica e fundamentada.

Além disso, ao trabalhar com alunos da Educação Básica, é fundamental que o professor disponha de uma base conceitual sólida para adaptar explicações, criar exemplos contextualizados e estabelecer conexões entre a matemática formal e situações do cotidiano. Por essa razão, antes de apresentar o Teorema de Bayes em si, retomamos nesta seção os principais elementos da teoria da probabilidade que sustentam sua formulação. Essa revisão não apenas organiza o percurso matemático necessário, mas também prepara o terreno para a abordagem pedagógica discutida nos capítulos seguintes.

A seguir, apresentamos os conceitos fundamentais que servirão de base para a compreensão do Teorema de Bayes.

2.1.1 Conceitos de probabilidade

O ponto de partida para o estudo do Teorema de Bayes é a noção de experimento aleatório e de probabilidade. Um experimento aleatório é uma situação em que, mesmo sendo possível descrever todos os resultados possíveis, não se pode prever com certeza qual resultado ocorrerá em uma realização específica.

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral e será denotado por S. Qualquer subconjunto $A \subseteq S$ é chamado de evento. Dizemos que o evento A ocorre quando o resultado observado pertence a A.

Do ponto de vista matemático moderno, uma probabilidade é uma função

$$P : \mathcal{F} \to [0,1],$$

definida em uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S (chamada de álgebra de eventos ou σ-álgebra), que satisfaz os axiomas propostos por Kolmogorov em 1933 [**kolmogorov1933**]. Esses axiomas formalizam a ideia intuitiva de probabilidade e servem de base para toda a teoria.

Axioma 2.1.1 (Axiomas de Kolmogorov): Seja $(S,\mathcal{F},P)$ um espaço de probabilidade. Então:

1. **Não negatividade:** para todo evento $A \in \mathcal{F}$,

$$P(A) \geq 0.$$

2. **Normalização:** a probabilidade do espaço amostral é igual a 1,

$$P(S) = 1.$$

3. **Aditividade contável:** se $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ são eventos dois a dois disjuntos, isto é, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

No contexto da Educação Básica, costuma-se trabalhar com situações em que o espaço amostral é finito e todos os resultados são igualmente prováveis. Nesse caso, recupera-se a chamada probabilidade clássica, associada a Laplace [**laplace1812**]. Se S é finito e todos os seus elementos têm a mesma chance de ocorrer, então, para um evento $A \subseteq S$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|},$$

isto é, a probabilidade é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis.

Essa abordagem é adequada para introduzir o conceito de probabilidade a alunos do Ensino Fundamental, pois permite trabalhar com exemplos simples, como lançamentos de dados, moedas e sorteios. No entanto, a teoria moderna de probabilidade, inspirada em interpretações frequentistas e axiomáticas [**vonmises1928**, **feller1970**], permite tratar situações mais complexas, nas quais os resultados não são necessariamente equiprováveis.

2.1.2 Eventos coletivamente exaustivos

Seja $(S,\mathcal{F},P)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que eventos $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{F}$ são coletivamente exaustivos se a união desses eventos coincide com o espaço amostral:

$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = S.$$

Isso significa que, sempre que o experimento é realizado, pelo menos um dos eventos E_i ocorre. Em termos didáticos, podemos pensar em uma classificação de todos os resultados possíveis em categorias que cobrem todas as possibilidades.

Exemplo 2.1.1: Considere o lançamento de um dado honesto, com espaço amostral

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Defina os eventos:

$$E_1 = \{1,2\}, \quad E_2 = \{3,4\}, \quad E_3 = \{5,6\}.$$

Temos

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{1,2,3,4,5,6\} = S,$$

logo E_1, E_2 e E_3 são eventos coletivamente exaustivos.

A noção de eventos coletivamente exaustivos será importante para a formulação do Teorema da Probabilidade Total e, posteriormente, do Teorema de Bayes.

2.1.3 Partição do espaço amostral

Uma família de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ é chamada de partição do espaço amostral S se satisfaz as seguintes condições:

1. $A_i \neq \varnothing$ para todo $i = 1, \ldots, n$;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$ sempre que $i \neq j$ (os eventos são dois a dois disjuntos);
3. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$ (os eventos são coletivamente exaustivos).

Em termos intuitivos, uma partição divide o espaço amostral em "blocos" que não se sobrepõem e que, juntos, cobrem todas as possibilidades. Essa ideia é central para a compreensão da probabilidade condicional e do Teorema da Probabilidade Total.

Exemplo 2.1.2: No lançamento de um dado, com $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, considere:

$$A_1 = \{1,2,3\}, \quad A_2 = \{4,5,6\}.$$

Temos:

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing \quad \text{e} \quad A_1 \cup A_2 = S,$$

logo $\{A_1,A_2\}$ é uma partição de S.

No contexto do Teorema de Bayes, as partições costumam representar diferentes hipóteses possíveis sobre uma situação (por exemplo, diferentes diagnósticos médicos), enquanto um evento observado representa uma evidência que será usada para atualizar probabilidades.

2.1.4 Probabilidade condicional

Dados dois eventos $A,B \in \mathcal{F}$, com $P(A) > 0$, a probabilidade condicional de B dado A é definida por

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Essa definição formaliza a ideia de que, ao sabermos que A ocorreu, restringimos o espaço de possibilidades ao evento A, e medimos a fração desse novo "universo" em que B também ocorre.

Exemplo 2.1.3: Considere novamente o lançamento de um dado honesto. Seja

$$A = \{\text{número par}\} = \{2,4,6\}, \quad B = \{\text{número maior que } 3\} = \{4,5,6\}.$$

Temos:

$$A \cap B = \{4,6\}, \quad P(A) = \frac{3}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{6}.$$

Logo,

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

A probabilidade condicional é um conceito central para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e para a compreensão do Teorema de Bayes. Do ponto de vista didático, trabalhar com exemplos concretos e representações visuais (como diagramas de Venn e tabelas de dupla entrada) pode facilitar a compreensão desse conceito por alunos do Ensino Fundamental [**batanero2005**].

2.1.5 Teorema do produto

A definição de probabilidade condicional permite reescrever a probabilidade da interseção de dois eventos em termos de uma probabilidade condicional. De fato, se $P(A) > 0$, então

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A).$$

Esse resultado é conhecido como Teorema do Produto para dois eventos.

Mais geralmente, para três eventos A,B,C com probabilidades positivas, pode-se escrever

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B \mid A)\,P(C \mid A \cap B),$$

e, por indução, obtém-se uma expressão análoga para a interseção de um número finito de eventos. Esse tipo de decomposição é útil para modelar situações em que um evento ocorre em etapas sucessivas, cada uma influenciando a seguinte.

Exemplo 2.1.4: Suponha uma urna com 3 bolas vermelhas e 2 bolas azuis. Retiram-se duas bolas, sem reposição. Seja:

$$A = \{\text{primeira bola é vermelha}\}, \quad B = \{\text{segunda bola é vermelha}\}.$$

Temos:

$$P(A) = \frac{3}{5}, \quad P(B \mid A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pelo Teorema do Produto,

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10},$$

que é a probabilidade de retirar duas bolas vermelhas em sequência.

2.1.6 Teorema da probabilidade total

O Teorema da Probabilidade Total permite calcular a probabilidade de um evento a partir de uma partição do espaço amostral. Seja $(S,\mathcal{F},P)$ um espaço de probabilidade e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ uma partição de S, isto é, eventos dois a dois disjuntos, não vazios e coletivamente exaustivos. Seja $B \in \mathcal{F}$ um evento qualquer. Então,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B \mid A_i).$$

Ideia da demonstração. Como os eventos $A_1, \ldots, A_n$ formam uma partição de S, temos

$$B = B \cap S = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i),$$

e os eventos $B \cap A_i$ são dois a dois disjuntos. Pela aditividade da probabilidade,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i).$$

Usando o Teorema do Produto, obtemos

$$P(B \cap A_i) = P(A_i)\,P(B \mid A_i),$$

o que leva à expressão desejada. □

Do ponto de vista interpretativo, o Teorema da Probabilidade Total permite decompor a probabilidade de um evento B em termos de diferentes "cenários" A_i que podem ter levado à ocorrência de B. Essa ideia é fundamental para o Teorema de Bayes, no qual se deseja, justamente, inverter essa relação: a partir de $P(B \mid A_i)$ e $P(A_i)$, obter $P(A_i \mid B)$.

Em contextos educacionais, o Teorema da Probabilidade Total pode ser explorado por meio de situações em que um mesmo resultado observável pode ter causas distintas, como em problemas de diagnósticos médicos, testes de qualidade ou decisões em condições de incerteza [**garfield2002**, **batanero2005**]. Esses contextos aproximam a probabilidade da realidade dos estudantes e preparam o terreno para a introdução do Teorema de Bayes em nível introdutório.

2.1.7 Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes é um dos resultados centrais da teoria das probabilidades, pois permite atualizar a probabilidade de uma hipótese à luz de uma nova evidência. Em termos gerais, ele responde à seguinte pergunta: dada uma informação observada, qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida por uma determinada causa ou hipótese?

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral S, isto é, eventos dois a dois disjuntos, não vazios e coletivamente exaustivos, e seja B um evento com $P(B) > 0$. O Teorema de Bayes fornece a probabilidade de A_i dado que B ocorreu.

Teorema 2.1 (Teorema de Bayes): Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ uma partição de S e B um evento com $P(B) > 0$. Então, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\, P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P(B \mid A_j)}.$$

Em particular, no caso de dois eventos A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$,

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}.$$

Demonstração. Pelo Teorema do Produto, para cada i temos

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)\, P(B \mid A_i).$$

Por outro lado, pela definição de probabilidade condicional,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}.$$

Substituindo a primeira expressão na segunda, obtemos

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\, P(B \mid A_i)}{P(B)}.$$

Resta, então, escrever $P(B)$ em função dos eventos $A_1, \ldots, A_n$. Como esses eventos formam uma partição de S, temos

$$B = \bigcup_{j=1}^{n} (B \cap A_j),$$

e os eventos $B \cap A_j$ são dois a dois disjuntos. Pelo Teorema da Probabilidade Total,

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P(B \mid A_j).$$

Substituindo essa expressão de $P(B)$ na fórmula anterior, obtemos

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\, P(B \mid A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P(B \mid A_j)},$$

como queríamos demonstrar. □

Do ponto de vista conceitual, o Teorema de Bayes mostra como combinar duas informações:

- a probabilidade a priori de cada hipótese A_i, dada por $P(A_i)$;
- a verossimilhança da evidência B sob cada hipótese, dada por $P(B \mid A_i)$.

O resultado $P(A_i \mid B)$ é chamado de probabilidade a posteriori, pois incorpora a nova informação B. Em termos de sala de aula, essa ideia pode ser apresentada como: "a probabilidade muda quando recebemos novas informações", o que dialoga diretamente com a abordagem da Técnica de Feynman.

2.1.8 Complemento Didático e Intuitivo

Para tornar o Teorema de Bayes mais acessível em sala de aula, é importante esclarecer alguns pontos conceituais que frequentemente geram dúvidas:

Probabilidade a priori vs. a posteriori. A probabilidade a priori é aquela que atribuímos a uma hipótese antes de observar qualquer evidência. É como uma "crença inicial" baseada em informações prévias ou conhecimento geral. Já a probabilidade a posteriori é a atualização dessa crença após levar em conta uma nova evidência. Em termos simples: o a priori é o ponto de partida, e o a posteriori é o ponto de chegada depois que recebemos novas informações.

Por que o denominador é necessário? O denominador do Teorema de Bayes corresponde ao Teorema da Probabilidade Total. Ele garante que a soma das probabilidades condicionais seja igual a 1, isto é, que estamos comparando hipóteses dentro de um mesmo espaço de possibilidades. Sem o denominador, teríamos apenas uma medida relativa da verossimilhança, mas não uma probabilidade válida. Em linguagem acessível: o denominador “normaliza” os resultados, garantindo que todas as hipóteses juntas formem um quadro completo.

Diferença entre $P(B \mid A)$ e $P(A \mid B)$. Essas duas expressões não são iguais porque representam perguntas diferentes:

- $P(B \mid A)$: qual é a chance de observar a evidência B se a hipótese A for verdadeira?
- $P(A \mid B)$: qual é a chance de a hipótese A ser verdadeira dado que observamos a evidência B?

A inversão muda completamente o sentido da relação. Em termos práticos, confundir essas duas probabilidades pode levar a interpretações equivocadas, especialmente em contextos como testes médicos ou diagnósticos.

Exemplo 2.1.5 (Teste diagnóstico simplificado): Considere um teste para uma certa doença, aplicado em uma população de estudantes. Suponha que:

- a probabilidade de um estudante ter a doença é $P(D) = 0{,}10$;
- a probabilidade de o teste dar positivo quando o estudante tem a doença é $P(T^+ \mid D) = 0{,}90$;
- a probabilidade de o teste dar positivo quando o estudante <u>não</u> tem a doença é $P(T^+ \mid \overline{D}) = 0{,}05$.

Queremos calcular a probabilidade de um estudante ter a doença, dado que o teste deu positivo, isto é, $P(D \mid T^+)$.

Primeiro, calculamos $P(T^+)$ usando o Teorema da Probabilidade Total:

$$P(T^+) = P(D)\, P(T^+ \mid D) + P(\overline{D})\, P(T^+ \mid \overline{D}),$$

onde $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 0{,}90$. Assim,

$$P(T^+) = 0{,}10 \cdot 0{,}90 + 0{,}90 \cdot 0{,}05 = 0{,}09 + 0{,}045 = 0{,}135.$$

Aplicando o Teorema de Bayes,

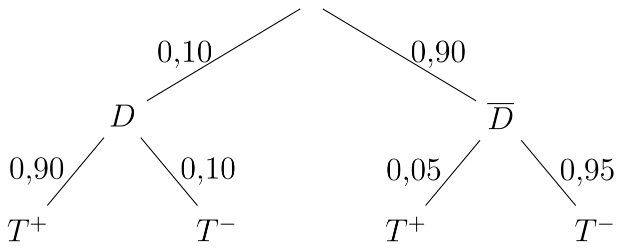
$$P(D \mid T^+) = \frac{P(D)\, P(T^+ \mid D)}{P(T^+)} = \frac{0{,}10 \cdot 0{,}90}{0{,}135} = \frac{0{,}09}{0{,}135} \approx 0{,}667.$$

Uma outra forma de resolver este exemplo é através do Diagrama de Árvore:

Exemplo 2.1.6 (Teste diagnóstico com diagrama de árvore): Retomemos o exemplo do teste para uma doença em uma população de estudantes, com:

- $P(D) = 0{,}10$: probabilidade de o estudante ter a doença;
- $P(T^+ \mid D) = 0{,}90$: probabilidade de teste positivo se o estudante tem a doença;
- $P(T^+ \mid \overline{D}) = 0{,}05$: probabilidade de teste positivo se o estudante não tem a doença.

Podemos representar essa situação por um diagrama de árvore, em duas etapas: primeiro, se o estudante tem ou não a doença; depois, se o teste dá positivo ou negativo.



Cada caminho da árvore corresponde a uma combinação de eventos, e a probabilidade de cada caminho é o produto das probabilidades ao longo dos ramos. Assim:

$$P(D \cap T^+) = P(D)\, P(T^+ \mid D) = 0{,}10 \cdot 0{,}90 = 0{,}09,$$

$$P(\overline{D} \cap T^+) = P(\overline{D})\, P(T^+ \mid \overline{D}) = 0{,}90 \cdot 0{,}05 = 0{,}045.$$

A probabilidade de o teste dar positivo é a soma das probabilidades dos caminhos que terminam em T^+:

$$P(T^+) = P(D \cap T^+) + P(\overline{D} \cap T^+) = 0{,}09 + 0{,}045 = 0{,}135.$$

Aplicando o Teorema de Bayes, ou, de forma equivalente, usando a própria árvore:

$$P(D \mid T^+) = \frac{P(D \cap T^+)}{P(T^+)} = \frac{0{,}09}{0{,}135} \approx 0{,}667.$$

Do ponto de vista didático, o diagrama de árvore ajuda os alunos a:

- visualizar as etapas do experimento (doença $\rightarrow$ resultado do teste);
- entender que cada caminho tem uma probabilidade própria;
- perceber que $P(D \mid T^+)$ não é simplesmente $P(T^+ \mid D)$, mas depende de todos os caminhos que levam a T^+.

Portanto, mesmo com um teste relativamente confiável, a probabilidade de o estudante realmente ter a doença, dado um resultado positivo, é de aproximadamente $66{,}7\%$. Esse tipo de situação é particularmente rico para discutir, com alunos do Ensino Fundamental II, a diferença entre "teste positivo" e "certeza absoluta", além de introduzir a ideia de atualização de probabilidades.

Do ponto de vista educacional, o Teorema de Bayes pode ser explorado em contextos próximos à realidade dos estudantes, como exames médicos, previsões meteorológicas ou decisões escolares, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e da tomada de decisão fundamentada em dados. Trabalhos recentes em Educação Matemática apontam que o uso de situações contextualizadas e representações visuais (tabelas, diagramas de árvore, diagramas de Venn) contribui para a compreensão de conceitos de probabilidade condicional e de inferência bayesiana em níveis básicos de ensino [**batanero2016**, **carvalho2018**, **caetano2020**].

Exemplo 2.1.7 (O paradoxo do teste positivo.): Um ponto que costuma surpreender os alunos é o chamado "paradoxo do teste positivo" (também conhecido como falácia do promotor). Mesmo quando um teste é considerado "90% confiável", a probabilidade de realmente ter a doença após um resultado positivo pode ser bem menor do que 90%. Isso ocorre porque a probabilidade a posteriori depende não apenas da sensibilidade do teste ($P(T^+ \mid D)$), mas também da frequência da doença na população ($P(D)$). Se a doença é rara, muitos dos resultados positivos podem vir de pessoas saudáveis, devido à taxa de falsos positivos.

Para explicar a um aluno do 9º ano por que $P(D \mid T^+) \neq P(T^+ \mid D)$, pode-se usar a seguinte intuição:

> *"Saber que o teste acerta 90% das vezes quando a doença está presente não significa que 90% dos positivos sejam verdadeiros. Isso porque existem muito mais pessoas sem a doença do que com ela. Assim, mesmo uma pequena taxa de erro nos saudáveis gera muitos positivos falsos. O Teorema de Bayes serve justamente para ajustar essa intuição e mostrar que precisamos considerar tanto a precisão do teste quanto a raridade da doença."*

Esse paradoxo é uma oportunidade pedagógica valiosa: ajuda os estudantes a perceber que a interpretação de probabilidades condicionais exige cuidado, e que a matemática pode corrigir intuições enganosas.

3

Técnica de Feynman

A busca por compreender como os seres humanos aprendem acompanha a história da educação desde suas origens. De métodos intuitivos empregados em civilizações antigas às teorias sistematizadas que emergiram a partir do século XIX, diferentes sociedades procuraram desenvolver estratégias capazes de tornar o conhecimento mais acessível, significativo e duradouro. Essa preocupação atravessa culturas e épocas, refletindo um interesse universal: compreender os mecanismos que permitem ao indivíduo construir, organizar e aplicar ideias.

Com o avanço das ciências cognitivas, da psicologia da aprendizagem e, mais recentemente, da neurociência, esse interesse ganhou novas dimensões. Estudos contemporâneos investigam como o cérebro processa informações, como a memória é consolidada e quais práticas favorecem a compreensão profunda de conceitos. Nesse cenário, metodologias que valorizam a clareza, a explicação ativa e a reorganização do pensamento têm recebido atenção especial, pois dialogam diretamente com processos cognitivos fundamentais para a aprendizagem.

É nesse contexto que se insere a Técnica de Feynman, uma abordagem que, embora tenha sido popularizada por um físico do século XX, encontra ressonância em princípios amplamente reconhecidos pelas ciências da aprendizagem. Ao propor que o estudante explique um conceito com suas próprias palavras, de forma simples e intuitiva, a técnica mobiliza processos de metacognição, reduz a carga cognitiva e favorece a construção de significados — elementos essenciais para a aprendizagem matemática.

Antes de discutirmos sua aplicação no ensino do Teorema de Bayes, apresentamos a seguir os fundamentos da Técnica de Feynman e suas conexões com pesquisas atuais sobre como aprendemos.

3.1 Conexões com a Neurociência e a Ciência Cognitiva

Richard Feynman (1918–1988), físico norte-americano e prêmio Nobel de Física em 1965, destacou-se não apenas por suas contribuições científicas, mas também por sua habilidade singular em explicar conceitos complexos de forma clara e acessível. Essa característica originou o que hoje é conhecido como **Técnica de Feynman**, uma metodologia de estudo e ensino que se baseia na simplificação e na clareza da comunicação. Embora tenha sido desenvolvida de forma pragmática e intuitiva, essa técnica encontra respaldo em princípios da **Ciência Cognitiva** e da **Neurociência**, áreas que investigam como o ser humano aprende, processa informações e consolida conhecimentos.

3.1.1 Princípios fundamentais e relação com a Ciência Cognitiva

A Técnica de Feynman parte da ideia de que o conhecimento só é verdadeiramente consolidado quando o indivíduo é capaz de explicá-lo de forma simples e compreensível. Esse princípio dialoga diretamente com teorias da Ciência Cognitiva, que estudam os processos mentais envolvidos na aprendizagem.

A Técnica de Feynman dialoga diretamente com a **Teoria dos Níveis de Processamento**, proposta por Craik e Lockhart (1972), segundo a qual a retenção da memória depende da profundidade com que a informação é processada. Ao transformar conceitos complexos em linguagem simples, o estudante realiza um processamento semântico, favorecendo a consolidação da memória de longo prazo.

Do ponto de vista da **Teoria da Carga Cognitiva** (Sweller, 1988), a técnica contribui para reduzir a sobrecarga da memória de trabalho, permitindo que os alunos reorganizem o conhecimento em esquemas mentais mais claros. Esse processo facilita a aprendizagem significativa e a aplicação dos conceitos em diferentes contextos.

Além disso, a técnica estimula a **metacognição** (Flavell, 1979), pois ao tentar explicar um conceito, o estudante identifica lacunas em sua compreensão e desenvolve estratégias para superá-las. Esse exercício de autorregulação é essencial para a aprendizagem significativa, pois permite que o aluno monitore seu próprio processo de construção do conhecimento.

3.1.2 Conexões com a Neurociência

Na perspectiva da Neurociência, Kandel (2006) destaca que o esforço de recuperar informações fortalece conexões sinápticas por meio da *Long-Term Potentiation* (LTP). Assim, cada tentativa de explicação reforça as redes neurais associadas ao conhecimento, tornando o aprendizado mais duradouro.

Outro ponto importante é o papel das **redes de associação**. A Neurociência mostra que o aprendizado ocorre quando novas informações são integradas a redes neurais já existentes. Ao utilizar analogias e exemplos cotidianos, parte central da Técnica de Feynman, o estudante conecta novos conceitos a conhecimentos prévios, ampliando sua rede de significados e facilitando a compreensão.

O erro também desempenha um papel relevante nesse processo. Quando o estudante falha ao tentar explicar um conceito, o cérebro identifica uma discrepância entre o modelo mental existente e a informação que deveria ser recuperada. Essa discrepância ativa áreas como o córtex cingulado anterior, sinalizando a necessidade de ajuste. Esse mecanismo favorece a **neuroplasticidade**, permitindo que o cérebro se reorganize e corrija falhas na compreensão. Assim, a dificuldade inicial não deve ser vista como um obstáculo, mas como parte essencial do processo de aprendizagem.

3.1.3 Diferenciação da Técnica de Feynman em termos de processamento cognitivo

A Técnica de Feynman distingue-se de outras metodologias ativas, como a Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), o Estudo de Caso ou o Peer Instruction, por ter como núcleo a simplificação da linguagem e a explicação dirigida a outro interlocutor. Essa diferença metodológica possui implicações relevantes para o processamento cognitivo e para a consolidação da aprendizagem.

Do ponto de vista da **Teoria da Carga Cognitiva** (Sweller, 1988), a ABP expõe o estudante a problemas abertos e multifacetados, o que tende a aumentar a carga extrínseca da memória de trabalho, já que o indivíduo precisa lidar simultaneamente com informações novas, hipóteses e estratégias de resolução. Em contraste, a Técnica de Feynman atua como um mecanismo de redução dessa carga: ao traduzir conceitos em termos simples, o estudante reorganiza o conhecimento em esquemas mentais mais claros, liberando recursos cognitivos para o processamento profundo. Assim, enquanto a ABP favorece a integração de múltiplas fontes de informação, a Técnica de Feynman otimiza a clareza conceitual, tornando-se particularmente eficaz para reduzir sobrecarga cognitiva.

Na perspectiva da **Teoria dos Níveis de Processamento** (Craik & Lockhart, 1972), resolver problemas em contextos de ABP exige processamento semântico e episódico, mas frequentemente o foco recai sobre a estratégia de resolução, não necessariamente sobre a compreensão conceitual. Já a Técnica de Feynman força o estudante a operar no nível semântico mais profundo, pois exige reconstruir o conceito em linguagem acessível. Esse esforço de reconstrução promove maior retenção de longo prazo do que simplesmente aplicar o conceito em um problema.

Sob a ótica da **Teoria Sociocultural** (Vygotsky, 1978), a ABP valoriza a interação social e a construção coletiva do conhecimento. A Técnica de Feynman, embora possa ser aplicada individualmente, ganha força quando o estudante explica para um colega. Nesse caso, o ato de ensinar mobiliza a *zona de desenvolvimento proximal*, pois o estudante não apenas internaliza o conceito, mas também ajusta sua explicação conforme o feedback do outro. Explicar para alguém é qualitativamente diferente de resolver um problema sozinho: envolve metacognição e autorregulação, já que o estudante precisa monitorar se sua explicação está clara e corrigir lacunas em tempo real.

Na perspectiva da **Neurociência da Aprendizagem** (Kandel, 2006), a ABP ativa múltiplas redes de associação ao integrar informações diversas, mas o foco está na resolução de problemas complexos. A Técnica de Feynman, por sua vez, enfatiza o esforço de recuperação e simplificação, fortalecendo conexões sinápticas específicas por meio da

Long-Term Potentiation (LTP). Cada tentativa de explicação funciona como um treino de recuperação, reconhecidamente uma das estratégias mais eficazes para consolidar memória de longo prazo. Além disso, o erro durante a explicação ativa mecanismos de monitoramento de conflito (córtex cingulado anterior), favorecendo a neuroplasticidade e a reorganização conceitual.

3.1.4 Síntese Crítica

Portanto, enquanto metodologias como a ABP são poderosas para desenvolver competências de resolução de problemas e pensamento crítico em contextos complexos, a Técnica de Feynman mostra-se particularmente eficaz para promover clareza conceitual e retenção de longo prazo. Sua ênfase na simplificação da linguagem e na explicação dirigida a outro não apenas reduz a carga cognitiva, mas também ativa processos metacognitivos e mecanismos de recuperação que diferenciam qualitativamente essa abordagem das demais metodologias ativas.

3.1.5 Aplicação no ensino de Matemática e do Teorema de Bayes

No ensino de Matemática, a Técnica de Feynman mostra-se particularmente relevante. Muitos conteúdos são percebidos como abstratos ou distantes da realidade dos alunos, o que gera resistência e desmotivação. Ao incentivar que os estudantes expliquem conceitos em suas próprias palavras e os relacionem a situações cotidianas, o professor promove uma aprendizagem mais significativa. Essa prática não apenas facilita a compreensão, mas também desenvolve habilidades de comunicação científica e organização do pensamento.

No caso específico do **Teorema de Bayes**, a técnica pode ser aplicada para simplificar a linguagem, contextualizar problemas e promover protagonismo estudantil. Explicações como "a probabilidade muda quando recebemos novas informações" tornam o conceito mais acessível, enquanto exemplos ligados a exames médicos, jogos ou escolhas escolares aproximam o conteúdo da realidade dos alunos. Ao perceberem que conseguem explicar um teorema complexo, os estudantes ganham confiança e motivação, reduzindo a resistência inicial ao aprendizado.

3.1.6 Benefícios pedagógicos e desafios

Pesquisas recentes em Educação Matemática (Roza, 2019; Barros, 2020) reforçam que metodologias que privilegiam a explicação simplificada e a contextualização aumentam o engajamento e a compreensão dos estudantes. Nesse sentido, a Técnica de Feynman mostra-se uma ferramenta promissora para introduzir conceitos avançados, como o Teorema de Bayes, no Ensino Fundamental.

Apesar de seus benefícios, a técnica apresenta alguns desafios. Ela exige tempo para que os alunos construam explicações consistentes e demanda acompanhamento próximo do professor, para evitar simplificações incorretas. Além disso, pode gerar resistência inicial, já que muitos estudantes não estão acostumados a explicar conceitos em suas próprias palavras. No entanto, essas limitações podem ser superadas com planejamento pedagógico adequado e integração com outras metodologias ativas, como a aprendizagem baseada em problemas e a sala de aula invertida.

3.1.7 Síntese

Em síntese, a Técnica de Feynman, embora tenha surgido de forma intuitiva, encontra respaldo sólido em princípios da Ciência Cognitiva e da Neurociência. Ao estimular o processamento profundo (Craik & Lockhart, 1972), reduzir a carga cognitiva (Sweller, 1988), promover a metacognição (Flavell, 1979) e favorecer a plasticidade cerebral (Kandel, 2006), essa metodologia contribui para uma aprendizagem mais significativa e duradoura. No contexto da Educação Matemática, sua aplicação representa uma oportunidade de aproximar conteúdos complexos da realidade dos alunos, tornando-os protagonistas de sua própria aprendizagem e ampliando sua capacidade de lidar com conceitos probabilísticos em diferentes situações.

4
A Base Nacional Comum Curricular

A **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)** é um documento normativo que orienta a educação básica brasileira, estabelecendo os direitos de aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes. Homologada em 2017 para a Educação Infantil e Ensino Fundamental e em 2018 para o Ensino Médio, a BNCC busca garantir a equidade educacional em todo o país, definindo competências e habilidades essenciais que devem ser desenvolvidas ao longo da escolaridade. Trata-se de um marco regulatório que procura alinhar a educação brasileira às demandas contemporâneas, promovendo uma formação integral que contemple aspectos cognitivos, sociais, culturais e éticos [**Brasil2018**, **MEC2020**].

4.1 BNCC como um todo

A BNCC organiza-se em torno de dez competências gerais que visam formar cidadãos críticos, criativos e capazes de atuar em diferentes contextos sociais. Essas competências incluem o desenvolvimento do pensamento científico, crítico e criativo; a valorização da diversidade cultural e social; o uso de diferentes linguagens (matemática, artística, científica e digital); e a responsabilidade socioambiental. Ao propor tais competências, o documento reforça a ideia de que a educação deve preparar os estudantes não apenas para o mercado de trabalho, mas também para a vida em sociedade, estimulando a autonomia intelectual e a capacidade de tomar decisões fundamentadas em valores éticos e democráticos [**Lorenzato2019**].

4.2 BNCC na Matemática

No campo da Matemática, a BNCC organiza o ensino em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Essa estrutura busca garantir que os estudantes desenvolvam não apenas habilidades técnicas, mas também competências relacionadas à resolução de problemas, à argumentação lógica e à modelagem de situações reais. A Matemática é apresentada como uma linguagem que permite interpretar fenômenos, construir modelos e tomar decisões fundamentadas em dados. Além disso, a BNCC enfatiza a importância da **resolução de problemas** como eixo estruturante do ensino, promovendo o raciocínio crítico e a criatividade dos alunos

[**Onuchic2021**].

4.3 BNCC no ensino de Probabilidade e Estatística

Especificamente em relação à **Probabilidade e Estatística**, a BNCC estabelece que os alunos devem desenvolver competências voltadas para a análise de dados, a compreensão de situações de incerteza e o raciocínio probabilístico. O documento destaca que, desde os anos iniciais, os estudantes devem ser expostos a situações que envolvam coleta, organização e interpretação de dados, utilizando representações gráficas e medidas estatísticas como média, mediana e moda. No Ensino Fundamental II, o foco passa a incluir noções de aleatoriedade e cálculo de probabilidades em contextos cotidianos, preparando os alunos para lidar com informações numéricas em diferentes áreas do conhecimento.

Entre os objetivos específicos, destacam-se:

- compreender e utilizar conceitos de aleatoriedade e incerteza;
- calcular e interpretar medidas estatísticas em diferentes contextos;
- analisar e representar dados em tabelas e gráficos;
- aplicar conceitos de probabilidade em situações cotidianas e científicas;
- desenvolver o raciocínio crítico para interpretar informações em contextos sociais e tecnológicos.

A BNCC reconhece que o ensino de Probabilidade e Estatística contribui para a formação de cidadãos capazes de lidar com informações numéricas e tomar decisões fundamentadas em dados. Essa perspectiva dialoga diretamente com a proposta deste trabalho, que busca introduzir o **Teorema de Bayes** de forma acessível, utilizando a **Técnica de Feynman** como recurso pedagógico para favorecer a aprendizagem significativa e aproximar conteúdos abstratos da realidade dos estudantes [**Silva2021**, **Barros2020**].

5 Metodologia

Este capítulo apresenta a metodologia adotada para fundamentar a análise sobre o ensino de Probabilidade Condicional e do Teorema de Bayes no Ensino Fundamental II. A abordagem é de caráter teórico e bibliográfico, organizada em etapas que permitem compreender como a Técnica de Feynman pode ser aplicada como recurso pedagógico, sem recorrer a dados empíricos de pesquisa prática.

5.1 Aspectos Éticos e Normativos

A discussão sobre metodologias de ensino deve considerar princípios éticos e normativos que orientam a prática docente. No Brasil, documentos como a **BNCC** estabelecem diretrizes para o desenvolvimento de competências e habilidades, incluindo o raciocínio probabilístico [**Brasil2018**, **MEC2020**]. Além disso, a literatura em Educação Matemática enfatiza que metodologias ativas devem respeitar a autonomia dos estudantes e promover ambientes de aprendizagem inclusivos [**Lorenzato2019**]. Dessa forma, qualquer proposta metodológica precisa estar alinhada às normas oficiais e aos princípios éticos da educação, garantindo legitimidade e equidade.

5.2 Fundamentação Teórica da Metodologia

A metodologia proposta baseia-se em uma análise teórica que articula quatro dimensões principais:

1. **Aprendizagem significativa:** Ausubel (1968) defende que novos conceitos são melhor assimilados quando conectados a conhecimentos prévios. Isso justifica o uso de exemplos cotidianos e linguagem acessível como estratégia para reduzir a abstração inicial.

2. **Metacognição:** Flavell (1979) destaca a importância de monitorar e avaliar o próprio processo de aprendizagem. A Técnica de Feynman favorece esse processo ao exigir que o estudante explique conceitos em suas próprias palavras, identificando lacunas e reorganizando o conhecimento.

3. **Colaboração e protagonismo:** Vygotsky (1978) mostra que a aprendizagem é potencializada nas interações sociais. A explicação entre pares fortalece a autonomia intelectual e o protagonismo estudantil, permitindo que os alunos atuem como agentes ativos na construção do conhecimento.

4. **Carga cognitiva e clareza conceitual:** Sweller (1988) demonstra que reduzir a carga cognitiva extrínseca favorece o aprendizado. A simplificação da linguagem, característica da Técnica de Feynman, contribui para liberar recursos mentais e facilitar a compreensão profunda.

5.3 Estrutura da Abordagem Metodológica

A metodologia é organizada em etapas que podem ser aplicadas em contextos educacionais:

1. **Apresentação conceitual:** introdução dos conceitos de probabilidade condicional e Teorema de Bayes com exemplos simples e contextualizados, criando uma base comum de entendimento.

2. **Exercícios teóricos:** elaboração de problemas variados que permitem aplicar os conceitos em diferentes situações, favorecendo a prática e a consolidação da lógica probabilística.

3. **Explicação simplificada:** incentivo para que os estudantes reconstruam os conceitos em linguagem acessível, promovendo clareza conceitual e identificação de lacunas.

4. **Reflexão crítica:** discussão das dificuldades comuns apontadas pela literatura (Garfield, 2002; Batanero, 2005) e análise de como a Técnica de Feynman pode contribuir para superá-las.

5.4 Aplicação Teórica da Técnica de Feynman

A Técnica de Feynman é discutida como recurso pedagógico que promove reorganização do conhecimento, identificação de lacunas conceituais, protagonismo estudantil e maior motivação. Esses elementos, sustentados por estudos em Educação Matemática e Ciências Cognitivas [**Sweller1988**, **Craik1972**, **Flavell1979**, **Vygotsky1978**, **Kandel2006**, **Moran2015**], mostram como a técnica contribui para transformar conteúdos complexos em experiências acessíveis e significativas.

5.5 Síntese

Em síntese, a metodologia aqui apresentada não se baseia em coleta de dados empíricos, mas em uma análise teórica que articula fundamentos da Educação Matemática, da Ciência

Cognitiva e da Neurociência. Essa abordagem permite discutir o potencial da Técnica de Feynman para o ensino de conteúdos complexos, como o Teorema de Bayes, de forma acessível e significativa.

5.6 Discussão Pedagógica

A literatura em Educação Matemática reforça que a aprendizagem não depende apenas da exposição a conteúdos, mas da forma como esses conteúdos são organizados, explicados e reconstruídos pelos estudantes. A Técnica de Feynman mostra-se especialmente eficaz porque dialoga com princípios amplamente reconhecidos pela Educação Matemática e pela Neurociência Cognitiva contemporânea.

Do ponto de vista pedagógico, a técnica favorece a aprendizagem significativa (Ausubel, 2003), pois incentiva o aluno a relacionar novos conceitos com estruturas cognitivas já existentes. Ao explicar o Teorema de Bayes com suas próprias palavras, o estudante precisa integrar informações, construir exemplos e estabelecer relações entre probabilidade condicional, partições e atualização de crenças. Esse processo gera ancoragem conceitual e reduz a aprendizagem mecânica.

A técnica também se alinha às metodologias ativas previstas na BNCC, que destacam a importância do protagonismo estudantil, da argumentação e da tomada de decisão fundamentada em dados. Ao assumir o papel de explicador, o aluno deixa de ser receptor passivo e passa a atuar como agente na construção do conhecimento, desenvolvendo autonomia intelectual e habilidades de comunicação matemática.

Sob a perspectiva da Neurociência Cognitiva, a técnica mobiliza mecanismos essenciais para o aprendizado: atenção sustentada, recuperação ativa, reorganização conceitual e consolidação sináptica. Estudos recentes mostram que atividades que exigem explicação verbal ativam redes neurais associadas à memória de trabalho, ao controle executivo e à integração semântica, favorecendo a compreensão profunda de conceitos abstratos.

Por fim, a técnica contribui para reduzir a resistência dos alunos diante de conteúdos tradicionalmente percebidos como difíceis. Ao perceberem que são capazes de explicar um conceito complexo, os estudantes desenvolvem confiança e motivação, elementos fundamentais para o engajamento e para a continuidade da aprendizagem matemática.

5.7 Contribuições Teóricas

A análise teórica evidencia que conceitos tradicionalmente considerados avançados, como o Teorema de Bayes, podem ser introduzidos de forma acessível no Ensino Fundamental quando acompanhados de metodologias adequadas. A literatura mostra que os alunos conseguem compreender ideias como probabilidade condicional, partições e atualização de crenças quando essas noções são apresentadas com linguagem clara, exemplos contextualizados e representações visuais.

Além disso, a utilização de situações reais — como exames médicos, jogos e decisões escolares — aproxima a matemática do cotidiano dos estudantes, favorecendo a construção de significados e ampliando o interesse pelo conteúdo. Essa aproximação está em consonância com as orientações da BNCC, que destaca a importância do pensamento estatístico e da tomada de decisão fundamentada em dados.

5.8 Limitações Teóricas

Embora a Técnica de Feynman seja promissora, a literatura aponta algumas limitações. A simplificação excessiva pode levar a interpretações equivocadas se não houver supervisão adequada. Além disso, alguns alunos podem sentir dificuldade inicial em verbalizar conceitos matemáticos, o que exige tempo e apoio para que desenvolvam confiança. Outro ponto é que a técnica demanda mediação cuidadosa do professor, que precisa equilibrar clareza conceitual com rigor matemático.

5.9 Implicações para a Prática Docente

A análise teórica permite identificar implicações pedagógicas relevantes para o ensino de matemática no Ensino Fundamental:

- A Teoria da Carga Cognitiva (Sweller, 1988) indica que explicações claras e organizadas reduzem o esforço mental desnecessário, permitindo que o estudante concentre seus recursos cognitivos na compreensão conceitual.
- Pesquisas sobre aprendizagem por explicação (Fiorella & Mayer, 2015) mostram que verbalizar conceitos ativa mecanismos metacognitivos essenciais para a consolidação da memória.
- Estudos em Neurociência Cognitiva (Kandel, 2006) indicam que a recuperação ativa de informações fortalece conexões sinápticas e favorece a memória de longo prazo.
- A BNCC destaca a importância do desenvolvimento do pensamento estatístico, da argumentação e da tomada de decisão fundamentada em dados, competências diretamente favorecidas pela Técnica de Feynman.

5.10 Perspectivas Futuras

A partir das contribuições e limitações identificadas, sugerem-se algumas direções para investigações futuras:

- comparar a Técnica de Feynman com outras metodologias ativas;
- investigar o impacto da técnica em alunos com dificuldades de aprendizagem;
- analisar efeitos de longo prazo por meio de estudos longitudinais;

- explorar o uso da técnica em outros conteúdos matemáticos, como funções, estatística descritiva e proporcionalidade.

5.11 Síntese

Este capítulo sintetizou as contribuições, limitações e perspectivas futuras da análise teórica, oferecendo uma visão ampliada sobre o potencial da Técnica de Feynman no ensino do Teorema de Bayes. No capítulo seguinte, apresentamos as considerações finais, nas quais retomamos os objetivos da dissertação e discutimos seus desdobramentos para a prática docente e para a Educação Matemática.

6

Considerações Finais

A presente dissertação teve como propósito analisar o potencial da Técnica de Feynman como recurso pedagógico para o ensino de Probabilidade Condicional e do Teorema de Bayes no Ensino Fundamental II. A reflexão desenvolvida ao longo do trabalho buscou articular referenciais da Educação Matemática, da Ciência Cognitiva e da Neurociência, além das diretrizes estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nesse percurso, foi possível discutir como a simplificação da linguagem, a explicação ativa e a reorganização conceitual podem favorecer a aprendizagem significativa de conteúdos tradicionalmente considerados complexos.

A análise teórica evidenciou que a Técnica de Feynman contribui para a clareza conceitual, ao incentivar que os estudantes expliquem conceitos em suas próprias palavras, reduzindo a carga cognitiva e favorecendo a retenção de longo prazo. Essa prática dialoga com a perspectiva da aprendizagem significativa, ao conectar novos conteúdos a conhecimentos prévios, e com a abordagem sociocultural, ao valorizar a interação entre pares e o protagonismo estudantil. Além disso, encontra respaldo em estudos da Neurociência Cognitiva, que destacam o papel da recuperação ativa e da reorganização conceitual na consolidação da memória. A técnica também se mostra alinhada às competências da BNCC, que enfatizam o desenvolvimento do pensamento estatístico, da argumentação e da tomada de decisão fundamentada em dados.

Apesar de suas potencialidades, reconhece-se que a Técnica de Feynman apresenta desafios. A simplificação excessiva pode gerar interpretações equivocadas se não houver acompanhamento docente adequado, e alguns estudantes podem apresentar resistência inicial em verbalizar conceitos matemáticos, exigindo tempo e apoio para desenvolver confiança. Além disso, a técnica demanda mediação cuidadosa do professor, que deve equilibrar clareza conceitual com rigor matemático.

As reflexões apresentadas abrem possibilidades para futuras investigações, como a comparação da Técnica de Feynman com outras metodologias ativas, a exploração de sua aplicação em diferentes conteúdos matemáticos, a análise de seu impacto em alunos com dificuldades de aprendizagem e o estudo de seus efeitos de longo prazo. Tais perspectivas reforçam que a técnica não deve ser vista como solução única, mas como parte de um conjunto de estratégias pedagógicas que podem enriquecer o ensino de matemática.

Em conclusão, a Técnica de Feynman representa uma estratégia promissora para aproximar conteúdos complexos da realidade dos estudantes, favorecendo a aprendizagem significativa e ampliando o potencial formativo da Educação Básica. Ao articular simplicidade, clareza e protagonismo estudantil, essa metodologia contribui para transformar a matemática em uma experiência mais acessível, motivadora e relevante para a formação integral dos alunos.

Bibliografia

[1] AUSUBEL, D. P. Educational Psychology: A Cognitive View. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

[2] AUSUBEL, D. P. Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

[3] BAYES, T. An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. Philosophical Transactions of the Royal Society, v. 53, p. 370–418, 1763.

[4] BATANERO, C.; GODINO, J. D. Estatística e probabilidade na educação matemática. São Paulo: Editora Autêntica, 2016.

[5] BATANERO, C.; HENRY, M.; PARZYSZ, B. The nature of chance and probability. In: Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning. New York: Springer, 2005. p. 15–37.

[6] BARROS, R. A explicação como estratégia pedagógica: reflexões sobre a Técnica de Feynman. Educação Matemática em Revista, v. 25, n. 68, p. 101–118, 2020.

[7] BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

[8] CAETANO, A. P. O ensino de probabilidade condicional e o Teorema de Bayes na Educação Básica. Revista Brasileira de Educação Matemática, v. 24, n. 68, p. 45–62, 2020.

[9] CARVALHO, R. S. Psicologia do desenvolvimento e aprendizagem. Campinas: Papirus, 2018.

[10] COUTINHO, C. Probabilidade e estatística no ensino fundamental. Belo Horizonte: UFMG, 2001.

[11] CRAIK, F. I. M.; LOCKHART, R. S. Levels of processing: A framework for memory research. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, v. 11, n. 6, p. 671–684, 1972.

[12] D'AMBRÓSIO, U. Educação Matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1993.

[13] FELLER, W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1. New York: Wiley, 1970.

[14] FIORELLA, L.; MAYER, R. E. Learning by Teaching: Evidence and Implications. Educational Psychology Review, v. 27, n. 4, p. 1–23, 2015.

[15] FLAVELL, J. H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. American Psychologist, v. 34, n. 10, p. 906–911, 1979.

[16] GARCIA, M. A. Metodologias ativas e aprendizagem colaborativa em matemática. Revista Brasileira de Educação Matemática, v. 28, n. 73, p. 55–70, 2020.

[17] GARFIELD, J.; BEN-ZVI, D. Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice. New York: Springer, 2002.

[18] HALD, A. A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750. New York: Wiley, 2003.

[19] KANDEL, E. R. In Search of Memory: The Emergence of a New Science of Mind. New York: W. W. Norton Company, 2006.

[20] KOLMOGOROV, A. N. Foundations of the Theory of Probability. Berlin: Springer, 1933.

[21] LAPLACE, P.-S. Théorie analytique des probabilités. Paris: Courcier, 1812.

[22] LORENZATO, S. O ensino de matemática: fundamentos e métodos. Campinas: Autores Associados, 2006.

[23] LORENZATO, S. Educação Matemática: fundamentos e práticas. Campinas: Autores Associados, 2019.

[24] MEC. BNCC e políticas educacionais. Brasília: MEC, 2020.

[25] MORAN, J. Metodologias ativas para uma educação inovadora. Revista de Educação, v. 20, n. 45, p. 15–29, 2015.

[26] NOVAK, J. D. Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1998.

[27] ONUCHIC, L. H. Resolução de problemas na BNCC: reflexões sobre o ensino de Matemática. Revista de Educação Matemática, v. 29, n. 74, p. 55–72, 2021.

[28] ROZA, M. Metodologias ativas no ensino de matemática: contribuições para a aprendizagem significativa. Revista de Educação Matemática, v. 17, n. 2, p. 45–60, 2019.

[29] SHAFER, G. The Early Development of Mathematical Probability. International Statistical Review, v. 72, n. 3, p. 437–465, 2004.

[30] SILVA, J. P. Probabilidade e Estatística na BNCC: desafios e possibilidades. Educação Matemática em Revista, v. 26, n. 70, p. 88–104, 2021.

[31] SWELLER, J. Cognitive load during problem solving: Effects on learning. Cognitive Science, v. 12, n. 2, p. 257–285, 1988.

[32] VON MISES, R. Probability, Statistics and Truth. London: Allen Unwin, 1928.

[33] VYGOTSKY, L. S. Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1978.

[34] VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. São Paulo: Martins Fontes, 1991.