UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ LOPES DE ANDRADE

INVARIANTES NO ENSINO DE MATEMÁTICA: USO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

CAMPINA GRANDE
2025

JOSÉ LOPES DE ANDRADE

INVARIANTES NO ENSINO DA MATEMÁTICA: USO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico Matemática

Orientadora: Profª. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE
2025

A554i Andrade, José Lopes de.
Invariantes no ensino de matemática [manuscrito] : uso de problemas na educação básica / José Lopes de Andrade. - 2025.
41 f. : il.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação : Prof. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho, Departamento de Matemática - CCT".

1. Invariantes. 2. Ensino Fundamental. 3. Resoluçã0 de problemas. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021 BC

JOSÉ LOPES DE ANDRADE

INVARIANTES NO ENSINO DE MATEMÁTICA: USO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Linha de Pesquisa: Ensino Básico Matemática.

Aprovada em: 19/12/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Emanuela Régia de Sousa Coelho** (***.622.214-**), em **25/02/2026 09:59:11** com chave **c7b36f8a124911f19b1c0e2a655ef069**.
- **Francisco Siberio Bezerra Albuquerque** (***.528.183-**), em **25/02/2026 10:35:07** com chave **cc58d318124e11f1af8a2684aadcce22**.
- **LUIS HAVELANGE SOARES** (***.952.604-**), em **27/02/2026 13:47:54** com chave **0fb6547413fc11f1ab512684aadcce22**.

Dedico, in memoriam, aos meus pais Otávio Lopes de Andrade e Maria Das dores Soares, que mesmo com pouco estudo , sempre acreditaram na educação como um poder transformador. Aos meus filhos Maria Emanuele Barboza Andrade e José Otávio Barboza Andrade e especialmente a minha esposa Joelma Oliveira Barboza Andrade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me conceder paciência e perseverança ao longo desta caminhada, que não foi fácil. Manifesto minha gratidão, também, à minha esposa, Joelma Oliveira Barboza Andrade, e aos meus filhos, Maria Emanuele Barboza Andrade e José Otávio Barboza Andrade. Sem o apoio deles, nada disso teria sido possível. Aos meus irmãos, que sempre foram grandes incentivadores para que eu conseguisse concluir este mestrado, deixo igualmente o meu sincero agradecimento.

Aos colegas de curso do PROFMAT, agradeço pelo companheirismo e pela união nos momentos mais desafiadores. Aos colegas de viagem — Wirander Pereira, Carlos Gonzaga, Wellington Faustino, Mozart William e Pedro Valentim, minha gratidão pela parceria ao longo dessa jornada.

Um agradecimento especial ao meu amigo e professor, Mestre Bruno Lopes Oliveira da Silva, pelo apoio e pela disponibilidade demonstrados durante todo o curso.

Estendo meus agradecimentos aos professores do PROFMAT, sempre tão atenciosos e dispostos a colaborar com nosso aprendizado. Em especial, à minha orientadora, Professora Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho, por sua orientação dedicada e constante.

Por fim, agradeço aos membros da banca examinadora ao Professor Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque e ao Professor Dr. Luís Havelanges Soares que contribuíram para abrilhantar este momento tão significativo em minha vida.

"Pela via do coração e do amor consegue-se tudo mas, um pouco de cada vez. "
(Santa Paula)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo evidenciar a importância de abordar problemas relacionados ao conceito de invariantes na educação básica, especialmente no Ensino Fundamental, considerando sua escassa presença em livros didáticos e pesquisas acadêmicas. A motivação decorre tanto da curiosidade quanto da relevância pedagógica do tema, que, apesar de pouco explorado, apresenta aplicações práticas no cotidiano. Nesse sentido, apresentamos um referencial teórico que relaciona o tema de invariantes em matemática com a metologia de Resolução de Problemas e a importância de inclui-los no cotidiano da sala de aula. Além disso, apresentamos uma breve discussão sobre como o tema vem sendo tratado nos trabalhos do PROFMAT. Por fim, como Produto Educacional, para apoiar educadores interessados em explorar esse conteúdo, apresentamos um material didático que aborda alguns problemas selecionados que se relacionam com o tema incluindo objetivos, conteúdos abordados, habilidades correspondentes à BNCC e soluções comentadas com recomendações metodológicas direcionadas ao professor.

Palavras-Chave: invariantes; ensino fundamental; resolução de problemas.

ABSTRACT

This study underscores the significance of addressing problems related to the concept of invariants in basic education, particularly at the elementary level, considering their scarce presence in textbooks and academic research. The motivation stems from both curiosity and the pedagogical relevance of the topic, which, despite being underexplored, has practical applications in everyday situations. It is emphasized that solving such problems requires logical reasoning and interpretation skills rather than proficiency in calculations. To support educators interested in exploring this content, a didactic material is proposed, including objectives, covered topics, skills corresponding to the BNCC (Brazilian National Common Curricular Base), and commented solutions for each problem, aiming to foster students' curiosity and critical thinking.

Keywords: invariants; elementary school; problem-solving.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

- $\mathbb{N}$ conjunto dos números naturais
- $\mathbb{R}$ conjunto dos números reais
- $\mathbb{C}$ conjunto dos números complexos
- $\in$ pertence
- $\neq$ diferente

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é amplamente reconhecida como a ciência dos padrões ou estuda a busca de padrões. Nesse contexto, justifica-se a investigação das propriedades invariantes, que, como o próprio nome sugere, referem-se a algo que não muda. Seja no campo da chamada Matemática Pura, em suas diversas Aplicações, ou no Ensino de Matemática, as propriedades invariantes desempenham um papel central em variados momentos, sendo utilizadas para identificar características que permanecem constantes sob determinadas transformações ou operações.

Uma propriedade invariante pode ser representada por uma expressão, equação ou característica que não se altera conforme o sistema evolui ou é transformado. Em diversas áreas da Matemática — como Geometria, Álgebra, Teoria dos Números e Combinatória — os invariantes aparecem como ferramentas fundamentais na análise de Situações-Problema. Um exemplo clássico é a propriedade comutativa da adição, que afirma que a ordem das parcelas não altera o resultado da soma, sendo assim um invariante. O mesmo princípio se aplica à multiplicação, em que a ordem dos fatores não altera o produto, outra manifestação da comutatividade.

Na Geometria, propriedades invariantes aparecem, por exemplo, quando uma figura é recortada em várias partes: a soma das áreas recortadas permanece igual à área da figura original. Além disso, os poliedros convexos ilustram bem a presença de invariantes: a relação de Euler, $V + F - A = 2$ [1], é um exemplo clássico de uma propriedade que se mantém constante independentemente da subdivisão ou manipulação do poliedro (LOPES, (2012)). Um outro exemplo particular é quando um cubo é subdividido em cubos menores; embora a subdivisão possa alterar a aparência do sólido, a relação entre suas faces, vértices e arestas se mantém constante. Ainda, podemos considerar o caso de um cordão utilizado para formar diferentes figuras; mesmo que a forma mude, o perímetro permanece invariável, pois é sempre igual ao comprimento do cordão.

A compreensão das propriedades invariantes é essencial para resolver muitos problemas matemáticos complexos, pois elas permitem focar naquilo que permanece estável (SOUZA (2023)). Isso proporciona um maior discernimento sobre as estruturas envolvidas e assegura que certas características fundamentais sejam preservadas, independentemente das transformações que ocorram.

Embora seja amplamente reconhecida a importância da busca por propriedades invariantes em problemas matemáticos, essa não é uma tarefa simples. A dificuldade em identificar

[1] V representa a quantidade de Vértices do Poliedro, F representa a quantidade de Faces e A representa a quantidade de Arestas do Poliedro considerado.

algo que permanece inalterado pode, no entanto, ser explorada como uma ferramenta motivadora no Ensino da Matemática, por meio de problemas desafiadores. Assim, aliado a Metodologia de Resolução de Problemas, o estudo de Invariantes nos mais diversos temas e mais diversos níveis de Ensino de Matemática pode se tornar uma ferramenta poderosa de auxílio ao professor.

De acordo com Souza (2023), a obra intitulada “A Arte de Resolver Problemas”, (Polya, 1995), cuja primeira versão foi publicada em 1945, marcou o início das discussões sobre Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino de modo que, desde a década de 1980, os mais variados documentos oficiais recomendam essa abordagem para o Ensino de Matemática.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL,2018), no que se refere a etapa do Ensino Fundamental, traz “Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental.” E, com respeito ao Ensino Médio, A BNCC (BRASIL,2018) “ os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas.” Assim, entende-se que a Resolução de Problemas deve estar inserida em todas as etapas da vida escolar do estudante.

Em suma, a abordagem matemática via Resolução de Problemas, não apenas desperta o interesse dos alunos, como também se estende a várias áreas da Matemática e níveis de conhecimento.

Assim, nesse trabalho, apresentamos alguns problemas que envolvem o tema invariantes, direcionados ao Ensino Fundamental, com temas diversos que podem ser desenvolvidos em sala de aula, seja para despertar o interesse dos estudantes, seja para aprofundamento dos conteúdos abordados.

A metodologia utilizada neste trabalho foi organizada por meio de pesquisa bibliográfica, acerca do tema de Invariantes na Educação Básica, e, como recurso pedagógico, apresentamos uma série de problemas com este tema a serem trabalhados na Educação Básica, em particular, na Etapa do Ensino Fundamental. Assim, apresentamos e discutimos problemas matemáticos que fazem uso de invariantes, com o objetivo de explorar soluções e aprofundar a compreensão de conceitos diversos, tal discussão não é uma mera formalização da solução dos problemas introduzidos, mas uma recomendação didática de procedimentos que podem ser utilizados em sala de aula pelo professor.

Assim, nossa proposta é apresentar uma coleção de problemas que envolvem o tema de invariantes, localizando-os no currículo escolar, através das habilidades da BNCC, com sugestões metodológicas direcionadas ao professor, de modo que este direcione os estudantes na busca pelas propriedades invariantes e, consequentemente, pelas soluções. Tal abordagem difere dos textos apresentados sobre o tema, em especial, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, sendo esta, portanto, nossa contribuição para o trabalho com os Invariantes na Educação Básica.

Com isso, este trabalho está organizado da seguinte forma: No próximo Capítulo, o Capítulo 2, tratamos de discutir sobre o tema de Invariantes, em especial na Educação Básica. O Capítulo 3, trata de uma breve revisão da literatura sobre a Resolução de Problemas como recurso metodológico no ensino de Matemática. No Capitulo 4, apresentamos uma coletânea de problemas que podem ser observados sob a óptica de invariantes. Para cada problema apresentado, destacamos uma resolução comentada, o seu objetivo e as habilidades a serem desenvolvidas, a partir da BNCC.

2 INVARIANTES

O termo “invariante”é um adjetivo que significa aquilo que não varia, ou seja, que permanece imutável. Nas enciclopédias online, como a *Wikipedia* [1], lê-se que, em Matemática, um invariante é uma propriedade de um objeto matemático (ou classes de objetos matemáticos) que permanece inalterada após a aplicação de operações ou transformações de um certo tipo. A classe particular de objetos e transformações é geralmente indicada pelo contexto em que o termo é usado. Por exemplo, a área de um triângulo é um invariante em relação às isometrias do plano euclidiano. As expressões “invariantes sob” e “invariante para” uma transformação são ambas utilizadas.

De uma forma mais geral, um invariante em relação a uma mesma relação de equivalência é uma propriedade que é constante em cada classe de equivalência. Os invariantes possuem aplicações em diversas áreas da Matemática, como Geometria, Topologia, Álgebra e Matemática Discreta. Algumas classes importantes de transformações são definidas por um invariante que elas preservam. Por exemplo, aplicações conformes são transformações do plano que preservam ângulos.

A descoberta de invariantes é um passo importante no processo de classificação de objetos matemáticos. Vandervelde (2018) sugere que procurar uma invariante é uma técnica fundamental na resolução de problemas, pois geralmente é o segredo para entender o que está acontecendo. Invariantes são ferramentas valiosas para demonstrar resultados matemáticos, oferecendo uma abordagem elegante e concisa na resolução de problemas de diversas naturezas. Eles são relevantes não só na Matemática, mas também na Física Teórica Moderna, onde muitas teorias são formuladas em torno de suas simetrias invariantes. Exemplos incluem a velocidade da luz sob uma transformação de Lorentz, o tempo sob uma transformação de Galileu e a conservação da energia.

2.1 Origem do termo Invariante em Matemática

Na História da Matemática, destacamos a série de palestras intitulada *Theory of algebric Invariants* (Teoria dos Invariantes Algébricos, em português) proferidas por David Hilbert (1862-1943) na Universidade de Göttingen em 1897. Seu conteúdo abrange os resultados mais relevantes sobre práticas que ficaram conhecidas como Teoria dos Invariantes. (FERREIRA, 2024). A teoria dos invariantes ou a teoria das formas binárias começou a ser investigada no Reino Unido através dos esforços de George Boole (1815-1864) e Arthur Cayley (1821-

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Invariant_(mathematics)`

1895) nos anos 1840, e se estabeleceu como uma área de pesquisa com apoio de James Joseph Sylvester (1814-1897) na década seguinte, consolidando-se com os trabalhos de Alfred Clebsch (1833-1872) e Paul Gordan (1837-1912). De acordo com Ferreira (2024), "a expressão invariante surge pela primeira vez nos textos de Sylvester"e, a partir das aulas de Hilbert, o assunto contou com a produção de livros-texto que garantiram a divulgação de conceitos relevantes que aparecem nas palestras de 1897.

Godoy e Mattos (2011) afirmam que "A Teoria Clássica dos Invariantes investigava propriedades relativas às formas homogêneas (George Boole, 1841) ou aos polinômios homogêneos (denominação atual) ou aos quânticos (Cayley, 1854) que não são alteradas por transformações lineares."E embora tenha sido muito relevante no segunda metade do Século XIX, o tema da forma que se propõe foi perdendo relevância para os matemáticos do início do Século XX.

Por outro lado, o termo continuou sendo usado agora em diversas outras subáreas da matemática, de modo que os estudos de Hilbert, Sylvester e demais é conhecida como Teoria Clássica dos Invariantes (*Classical Invariant Theory*), mas são conhecidos estudos de Invariantes Topológicos, Geométricos, entre outros. Sendo o termo utilizado em diversos contextos na Matemática.

2.2 Invariantes e o Ensino de Matemática

No que se refere à matemática da Educação Básica, os invariantes aparecem como "coadjuvantes"em diversos momentos, como nas propriedades comutativa da adição e produto de números ou na relação de Euler, por exemplo, de modo que o tema e a relevância de se destacar uma propriedade que não muda, mesmo que os objetos mudem, não é, em geral, considerado.

Em verdade, o destaque dos invariantes na Educação Básica, em sua maior parte, fica restrito à preparação olímpica. Diversos materiais que se referem ao tema de Invariantes nessa etapa do ensino são direcionados exclusivamente ao trabalho com estudantes que participam das mais diversas Olimpíadas de Matemática, é o caso de (BITARÃES, s.d), (STONE,), (MAGALHÃES, 2021), entre outros.

Entendemos que o tema invariantes tem um caráter bastante abstrato e mesmo seu próprio princípio muitas vezes permanece vago e complicado para os alunos, mas é possível introduzi-los no cotidiano da sala de aula, assim como é feito nos treinamentos olímpicos, de modo a ampliar o repertório dos estudantes. Ainda, destacamos que o tema, por não ser um conteúdo do currículo, pode ser trabalhado em diversos contextos e associado as mais diversas áreas e etapas escolares.

Por não ser um conteúdo, a busca por invariantes na educação básica, em geral, se dá através do estudo de problemas propostos. Assim, em particular, deve-se prestar atenção especial à análise da lógica de aplicação de invariantes na resolução de problemas e, portanto, o tema de invariantes está diretamente relacionado à Metodologia de Resolução de Problemas.

2.2.1 Invariantes nos trabalhos do ProfMat

Nossa proposta é apresentar uma coleção de problemas que envolvem o tema de invariantes, localizando-os no currículo escolar, através das habilidades da BNCC, com sugestões metodológicas direcionadas ao professor, de modo que este direcione os estudantes na busca pelas propriedades invariantes e, consequentemente, pelas soluções. Tal abordagem difere dos textos apresentados sobre o tema, em especial, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - ProfMat, sendo esta, portanto, nossa contribuição para o trabalho com os Invariantes na Educação Básica.

Nessa seção, objetivamos apresentar as principais pesquisas pertinentes ao tema dos Invariantes no Ensino da Matemática realizadas no ProfMat, com o intuito de articulá-las, tanto teórica quanto metodologicamente, com a presente pesquisa. Como consequência, busca-se evidenciar de que forma nosso trabalho está inserido nas discussões relacionadas a problemas com invariantes.

Assim, faremos uma breve apresentação das pesquisas realizadas, tendo o tema dos invariantes como objeto de estudo, destacando seus objetivos e a metodologia empregada. Dessa forma, procuramos delimitar nossas investigações, e destacar as contribuições de cada texto, em particular, o nosso.

Ao efetuarmos a busca pelo termo "invariante"no banco de dissertações do ProfMat, encontramos sete resultados, sendo eles:

1. **Autor:** Edilson José Curvello Machado
   Título: Explorando Invariantes Geométricos com Geogebra: Uma seleção para a sala de aula.
   Instituição/Ano: Universidade Federal Fluminense (UFF) - 2015

2. **Autor:** João Helton Mendonça Gonçalves
   Título: A igualdade do produto escalar euclidiano entre linhas e colunas dos quadrados mágicos Invariantes
   Instituição/Ano: Universidade Estadual do Ceará (UECE) - 2015

3. **Autor:** Euzebio Glauder Zandonadi
   Título: Uma Proposta de Sequência Didática para o uso de Invariantes na Resolução

de Problemas.
Instituição/Ano: Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)- 2016

4. **Autor:** André Luis Tatarim
   Título: O triângulo e suas Invariantes:Investigações por meios de aplicativos Dinâmicos
   Instituição/Ano: Universidade Federal do Paraná (UFPR) - 2017

5. **Autor:** Suzana do Prado Bochoski
   Título: O triângulo e suas Invariantes:Investigações por meios de aplicativos Dinâmicos (Parte II).
   Instituição/Ano: Universidade Federal do Paraná (UFPR) - 2017

6. **Autor:** Renato Conceição Júnior
   Título: Versões Digitais para Jogos Matemáticos: Invariantes em Paridade, Congruência Modular, Frações e P.G.
   Instituição/Ano: Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR)- 2020

7. **Autor:** Márcio Henrique Augusto Gomes
   Título: Invariantes
   Instituição/Ano: Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) - 2022

O primeiro trabalho desta lista, o trabalho de Machado (2015), aborda uma questão importante relacionada à apresentação de figuras geométricas em livros didáticos, que, na maioria das vezes, são ilustradas basicamente com desenhos de figuras com características semelhantes e o mesmo formato, levando o estudante a entender que a Geometria é uma disciplina estática. Assim, o autor propõe uma série de problemas com invariantes em geometria plana, em diversos níveis, a serem trabalhados em sala de aula com o uso do *software* GeoGebra[2], indicando as ferramentas do *software* a serem utilizadas.

Ao explorar mais a construção dos objetos geométricos, os estudantes teriam um maior domínio dos conceitos geométricos relacionados, uma vez que, na formação dos conceitos de Geometria, a componente figural desempenha um papel fundamental. E, ao utilizar um *software* de geometria dinâmica os estudantes podem experimentar mais e terão condições mais favoráveis para perceber as propriedades Invariantes nas figuras. Sendo assim, em resumo, este trabalho consiste em uma seleção de exercícios classificados por nível de dificuldade nos quais o estudante deve implementar a construção sugerida no exercício no *software* GeoGebra.

O Segundo trabalho, (Gonçalves, 2015), trata de estudos acerca das propriedades dos quadrados mágicos, que, de forma geral, são matrizes quadradas, em que a soma de cada

[2]Software de matemática dinâmica livre e gratuito. Disponível em `https://www.geogebra.org/`

coluna, linha e das diagonais é um valor constante. O trabalho é direcionado à busca por propriedades invariantes desse objeto, restringindo apenas uma seção à aplicação em sala de aula, cujo direcionamento é o uso do quadrado mágico e, portanto, não sendo nosso objeto de interesse.

O trabalho de Zandoni (2016) propõe uma sequência didática direcionada à procura por invariantes em problemas de diferentes níveis e pensada para ser aplicada na etapa do Ensino Médio. No texto, o autor descreve uma sequência de passos com o objetivo de investigar se um determinada situação pode ou não ocorrer após a execução dessa sequência. Destacamos que o autor realiza um agrupamento dos problemas propostos por conteúdo, a partir de uma classificação por nível de dificuldade. A estrutura do trabalho está organizada em cinco etapas principais, cada uma delas explora diferentes tipos de problemas e estratégias, todas com o apoio de aulas expositivas, a saber:

1. Discussão introdutória sobre o uso de Invariantes em problemas matemáticos.

2. Problemas envolvendo paridade (Números pares e ímpares).

3. Resolução de problemas por meio de coloração.

4. Problemas que utilizam restos (módulos) como Invariantes.

5. Problemas que envolvem experiências numéricas e algébricas.

Os trabalhos de Tatarim (2017) e Bochiski (2017) são complementares, juntos, eles apresentam de forma detalhada 12 possibilidades de uso do GeoGebra a partir de miniaplicativos, envolvendo o estudo do triângulo e suas invariantes, com o objetivo de fornecer ao professor ferramentas que possam ser utilizadas em suas aulas. Ainda, foram elaborados planos de aulas para os professores, relacionados a cada um dos miniaplicativos. Embora destacado no título, as características invariantes aparecem nas construções dos miniaplicativos e não em problemas apresentados aos alunos, ou seja, a proposta é que os estudantes concluam as propriedades relativas à triângulos a partir do uso dos miniaplicativos.

O texto de Conceição Júnior (2020) teve como propósito a implementação, na linguagem de programação Scratch[3] , de versões digitais online para jogos com intencionalidade didática em matemática. Todos os jogos foram inspirados em desafios propostos no livro “Uma Década do Círculo Matemático de Berkeley — A Experiência Americana”, de Zvezdelina Stankova e Tom Rike. Assim, o autor apresenta o desafio, sua solução e o jogo idealizado por ele associado ao desafio proposto.

[3]Linguagem de Programação de Código aberto, criada em 2007.

No último trabalho da lista, Gomes (2022) apresenta uma coleção de problemas de invariantes, em especial em análise combinatória, com suas soluções, direcionados especialmente ao trabalho com Olimpíadas de Matemática, ressaltando a importância das Olimpíadas, com destaque para a IMO (International Mathematical Olympiad) e a OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), cujas principais áreas são Geometria, Teoria dos Números, Álgebra e Análise Combinatória.

O autor ainda enumera algumas técnicas para ajudar no reconhecimento de uma invariante, que são úteis em qualquer contexto

i) estudar alguns casos menores em busca de um padrão;

ii) ficar atento às propriedades que não mudam;

iii) verificar a paridade;

iv) precaver-se contra falsos invariantes e classificar os invariantes em vários tipos. Salientando que professores que desejam preparar estudantes para as Olimpíadas de Matemática devem estar familiarizados com essas técnicas de resolução de problemas, para terem mais segurança ao ministrar suas aulas, apresentamos uma coletânea de questões com suas respectivas resoluções.

Os trabalhos listados acima exploram diversas possibilidades para o uso de Invariantes na Educação Básica, através do estudo teórico de proposições matemáticas, como é o caso de Gonçalves (2015), Tatarim(2017) e Bochoski (2017); através de ferramentas digitais para uso em sala de aula, como em Machado (2015) e Conceição Júnior (2020); direcionado a atividade olímpica (Gomes,2022) e como proposta de sequência didática no Ensino Médio (Zardoni, 2016).

Nosso texto vem contribuir para essa lista, ao passo que coloca as recomendações e sugestões metodológicas ao professor como objetivo, além de recomendar e direcionar o trabalho com os invariantes desde a etapa do Ensino Fundamental.

3 SOBRE METODOLOGIAS DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Como discutido anteriormente, em geral, o trabalho com Invariantes está relacionado a resolução de problemas, seja no contexto de Olimpíadas de Matemática, seja no estudo teórico da matemática. Assim, de forma natural, ao propor o uso do tema Invariantes na Educação Básica, associamos à Metodologia de Resolução de Problemas. Entretanto, entende-se que, na maior parte, as abordagens metodológicas não aparecem sozinhas, no contexto de sala de aula, em especial, a Resolução de Problemas pode ser utilizada em conjunto com o uso de Tecnologias, com a Metodologia de Investigação em Matemática, Modelagem, etc.

Nessa seção, apresentamos um pouco das abordagens que são recomendadas na Coletânea de Problemas que sugerimos, com especial enfoque na Resolução de Problemas que é a proposta presente em todas as atividades.

3.1 Considerações sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL,2018) é um documento de caráter normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagens e desenvolvimento, em conformidade com o Plano Nacional de Educação - PNE.

Espera-se que as aprendizagens consideradas essenciais, definidas na BNCC, assegurem aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais. No documento, "**competência** é definida como mobilização de conhecimentos (conceitos procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho."(BRASIL, 2018).

> As **competências gerais da Educação Básica** [...] inter-relacionam-se e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil,Ensino Fundamental e Ensino Médio), articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores. (BRASIL,2018, p.8)

Em cada área de conhecimento, a BNCC indica competências e habilidades a serem desenvolvidas, de modo a desenvolver as competências gerais. Especificamente, em relação à matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, o documento destaca "é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. (BRASIL, 1998, p. 298)"e completa "Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação."(BRASIL, 1998, p. 298)

Nessa direção, ao propormos as recomendações metodológicas aos professores, damos especial destaque à construção da argumentação e das representações em consonância com o indicado na BNCC. Ainda, indicamos, em cada problema proposto, qual a habilidade a ser trabalhada com aquela atividade, de modo a auxiliar o professor na sua aplicação em sala de aula. Dos oito problemas selecionados, seis se relacionam com habilidades propostas na BNCC.

Após a implementação da BNCC, os estados e municípios se dedicaram a preparar um documento curricular que incluísse as orientações da BNCC e acrescentasse problemáticas relativas às suas particularidades. Assim, os outros dois problemas (Problemas 07 e 08) se relacionam com habilidades específicas contidas no documento curricular de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2019)

3.2 O Metodologia de Resolução de Problemas

A metodologia de Resolução de Problemas é uma ferramenta poderosa no ensino de matemática e destacada em diversos documentos curriculares. A BNCC, por exemplo, indica que "Os processos matemáticos de Resolução de Problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. "(BRASIL, 2018, p. 266)

Nesta seção introduzimos algumas discussões acerca da resolução de problemas no Ensino de Matemática, discorrendo sobre a importância dessa temática ser trabalhada em sala de aula, pois a partir dela os estudantes são desafiados a pensar criticamente e a analisar situações sob diferentes ângulos e perspectivas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN

> "Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais." (BRASIL, 2000, p. 40)

Sendo assim, o estímulo à associação entre matemática e os mais diversos problemas estimula a curiosidade e a investigação, permitindo que os estudantes desenvolvam habilidades de raciocínio lógico e dedutivo. Eles aprendem a identificar padrões e a formular conjecturas o que é essencial para construção de um pensamento matemático sólido.

A resolução de um problema muitas vezes exige tentativas e erros. Os estudantes aprendem que a solução nem sempre é imediata e que a persistência é uma qualidade valiosa. Essa experiência de enfrentar desafios e buscar soluções alternativas ajuda a construir a resiliência, uma habilidade que será útil não apenas na Matemática, mas em diversas áreas da vida. Em um mundo cada vez mais orientado por dados e tecnologia, a capacidade de resolver problemas complexos é uma habilidade essencial. Ao trabalhar sob o ponto de vista da resolução de problemas, os estudantes desenvolvem uma mentalidade analítica que os preparam para enfrentar os desafios do futuro, seja em carreiras científicas, tecnológicas ou em qualquer campo que exija pensamento crítico e resolução de problemas. Portanto, a importância de trabalhar com problemas na Educação Básica não pode ser subestimada. Essa abordagem não apenas fortalece as habilidades matemáticas dos estudantes, mas também promove o desenvolvimento de competências essenciais para vida.

Ao cultivar um ambiente de aprendizado que valoriza a investigação, a persistência e a interdisciplinaridade, estamos preparando nossos estudantes para se tornarem pensadores críticos e solucionadores de problemas eficazes no futuro. De acordo com Souza (2023), o livro "*A arte de Resolver Problemas*, de Polya (1995), que teve sua primeira versão publicada em (1945), é uma obra que marca uma nova concepção de ensinar Matemática, como também, apresenta a Resolução de Problemas como metodologia de ensino."

Polya (1995) comenta que uma grande descoberta resolve um grande problema, o problema pode ser modesto, mas se ele é desafiador e causar curiosidade, e colocar em jogo as faculdades inventivas, quem o resolverá gozará o triunfo da descoberta. Assim, a Resolução de Problemas é uma metodologia de Ensino da Matemática que ajuda os estudantes a compreender conceitos Matemáticos de forma mais profunda e significativa. É também uma forma de desenvolver o raciocínio lógico interpretativo, e de motivar os estudantes. A BNCC (BRASIL,2018) propõe a Resolução de Problemas como uma metodologia/processo de ensino com o objetivo de que os estudantes desenvolvam a capacidade de agir matematicamente em diversas situações, especialmente, integrando os diferentes campos da Matemática, como Aritmética, álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade. Sendo assim um professor de Matemática tem a grande oportunidade de trabalhar com seus estudantes de uma forma sistemática a resolução de problemas em sala de aula, mostrando a eles a importância significante para seu desenvolvimento cognitivo.

É necessário um cuidado especial ao propor um problema a ser utilizado a partir da

Metodologia de Resolução de Problemas, nesse sentido, destacamos Proença (2018)

> “uma situação de Matemática se torna um problema quando a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar a uma resposta. Não se trata, assim, do uso direto de uma fórmula ou regra conhecidas – quando isso ocorre, a situação tende a se configurar como um exercício (PROENÇA, 2018, p. 18)

Além disso, diversos autores, incluindo Polya (1995) e Proença (2018, 2022) , entendem que resolver um problema passa por seguir algumas etapas. Proença (2022) destaca as etapas de representação, planejamento, execução e monitoramento, e explica

> “ A etapa de *representação* é aquela em que a pessoa apresenta a sua compreensão do problema, a qual envolve a mobilização de conhecimentos linguísticos, semânticos e esquemáticos.[...]
> A etapa de *planejamento* é aquela que a pessoa deve apresentar sua estratégia de resolução, a qual envolve a mobilização de conhecimento estratégico. [...] Por fim, a etapa de *execução* é aquela em que a pessoa precisa executar a estratégia proposta[...]
> Na etapa de *monitoramento*, a pessoa precisa avaliar a resposta, bem como rever a resolução seguida.”(PROENÇA, 2022, p. 1137)

Essas etapas colocam o estudante como protagonista da atividade e, portanto, a Metologia de Resolução de Problemas contribui para um aprendizado com significado, a partir de uma perspectiva em que a ação do estudante é o foco principal do processo. E concluímos com o apontamento de Souza (2023, p.28), “a Resolução de Problemas, quando bem trabalhada em sala de aula, tem contribuído para o ensino colaborativo, crítico e reflexivo dos conteúdos de Matemática, acarretando assim numa aprendizagem significativa.”

3.3 Algumas Considerações Relevantes

Abrimos essa seção para um comentário sobre outras abordagens metodológicas que estão presentes nos enunciados que propomos. A Resolução de Problemas é o procedimento metodológico principal, uma vez que todas as recomendações partem de um problema a ser trabalhado em sala de aula, entretanto, outras abordagens aparecem como suporte para esta. São elas: Uso de Tecnologias, Investigação em Sala de Aula e uso de Jogos. Aqui, apresentamos um pequeno recorte de cada uma.

A BNCC, como apontado antes, indica a Instigação em Matemática como um processo metodológico a ser utilizado na sala de aula. Essa recomendação não é exclusividade da BNCC, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) apontam que as atividades de natureza investigativa tem ganhado visibilidade nos currículos escolares, uma vez que diversos estudos em educação tem mostrado que investigar constitui uma importante forma de construir conhecimento. Segundo esses mesmos autores, as atividades de investigação são tarefas abertas que necessitam do envolvimento ativo do aluno para resolução. Ainda sobre isso, Braumann (2002) destaca

> “Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. (BRAUMAN, 2002, p.55) ”

Sobre o uso de Tecnologias nas aulas de Matemática, destacamos que desde o início do Século XXI vivemos uma crescente no uso de ferramentas tecnológicas no dia a dia e essa crescente não pode se distanciar da sala de aula. Nesse sentido, Dantas e Machado (2014) pontuam

> “A utilização de computadores pessoais a partir de 1980 permitiu que iniciássemos o questionamento do papel das tecnologias digitais (TDs) e sua aplicação como elemento apoiador de atividades relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem. O surgimento das redes de computadores, e, especialmente, a internet e seus serviços, consolidou de forma irreversível o uso e o impacto causado pelas TDs no contexto escolar (DANTAS; MACHADO, 2014, p. 20). ”

Assim, é importante que os professores se utilizem dessa ferramenta, especialmente por estar cada vez mais presente na vida cotidiana dos estudantes.

Ao propor a utilização de procedimentos metodológicos que fogem a estrutura padrão das aulas (o professor fala e o aluno escuta) esperamos contribuir para um processo de ensino e aprendizagem mais significativo, centrado especialmente no estudante.

4 PROPOSTAS PROBLEMAS COM INVARIANTES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Neste Capítulo apresentamos uma série de problemas que podem ser resolvidos sob a ótica de invariantes. Para cada um dos problemas exibidos, destacamos as habilidades da BNCC (BRASIL,2018) relacionadas, além de ressaltar o objetivo do problema e expor uma solução comentada para o enunciado indicado. A solução comentada contém sugestões de procedimentos metodológicos direcionados ao professor, de modo que a atividade não se restrinja a simples tentativa de resolver o problema, mas que coloque o aluno como protagonista do processo.

Os problemas que escolhemos são direcionados à etapa dos Anos Finais do Ensino Fundamental e referem-se a conteúdos das áreas de Álgebra, Aritmética e Geometria, de modo a ilustrar a diversidade de situações em que podemos procurar propriedades invariantes. Intencionalmente, não apresentamos a base (conteúdos) matemática a ser utilizada em cada situação, com o intuito de podermos apresentar situações diversas e conteúdos diversos, de modo a incentivar também que professores possam trabalhar com outros problemas a partir dessas abordagens, sem se limitar a algum conteúdo escolhido.

4.1 Problema 01 - Problema do Polinômio Quadrático

O primeiro enunciado foi escolhido para que o professor, além de mostrar a importância de reconhecer as propriedades invariantes, reforce a necessidade do estudo da equação quadrática no Ensino Fundamental como uma ferramenta importante na resolução dos mais variados problemas. Além disso, o propósito desse problema é trabalhar a Habilidade EF09MA09, da BNCC (BRASIL,2018), cuja descrição é "Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2° grau, tendo como objetivo específico conhecer e compreender a fórmula resolutiva da equação quadrática."

Este problema foi extraído de Lopes (2012).

Problema: Considere o polinômio quadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$. Em p, podemos fazer as seguintes operações:

1. trocar a com c ;
2. trocar x por $x + t$ com $t \in \mathbb{R}$.

Usando essas operações é possível transformar o polinômio $p_1(x) = x^2 - x - 2$ em $p_2(x) = x^2 - x - 1$?

Objetivo: Ao trabalhar com esse problema, buscamos identificar propriedades invariantes a partir das operações apresentadas ao relacioná-las com elementos e propriedades de todas os polinômios quadráticos, fixando assim conceitos fundamentais desse tema.

Solução Comentada: De modo a direcionar a resolução por parte dos alunos, deve-se orientá-los a observar que o discriminante de uma equação quadrática fornece informações importantes sobre o polinômio associado. Sendo, assim, a análise do discriminante de $p(x) = 0$, pode ser um ponto de partida para a discussão do problema.

A partir disso, mostraremos que é invariante o valor do discriminante de todas equações obtidas pela aplicação das operações permitidas.

De fato, aplicando a primeira operação, em $p(x) = 0$, obtemos a expressão

$$cx^2 + bx + a = 0, \tag{4.1}$$

Chamando de Δ_0 o discriminante da equação $p(x) = 0$ e Δ_1 o discriminante da equação acima, podemos concluir que

$$\Delta_0 = b^2 - 4ac = b^2 - 4ca = \Delta_1.$$

Agora, utilizando a segunda operação, em $p(x) = 0$, obtemos

$$a(x+t)^2 + b(x+t) + c = 0$$

logo,

$$ax^2 + (b + 2at)x + (at^2 + bt + c) = 0. \tag{4.2}$$

Se Δ_2 é o discriminante desta última equação, na incógnita x, então

$$\Delta_2 = (b + 2at)^2 - 4a(at^2 + bt + c) = b^2 + 4abt + 4a^2t^2 - 4a^2t^2 - 4abt - 4ac = b^2 - 4ac = \Delta_0.$$

Assim, deve-se concluir que ao realizar qualquer das operações listadas, o valor do discriminante da equação correspondente permanece invariante. Daí, para tentar resolver a questão imposta pode-se comparar os discriminantes das equações $p_1(x) = 0$ e $p_2(x) = 0$.

Observamos que os discriminantes de $p_1(x) = 0$ e $p_2(x) = 0$ são, respectivamente,

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-2) = 9 \text{ e } \tilde{\Delta} = (-1)^2 - 4.1.(-1) = 5.$$

Como $\Delta \neq \tilde{\Delta}$, então, com as operações indicadas não é possível transformar p_1 em p_2.

Ressaltamos que nesse problema percebemos que o termo invariante é o discriminante pois trocando a por c e c por a o discriminante não sofre alteração.

4.2 Problema 02 - O Problema do Cavalo

O segundo enunciado escolhido é particularmente interessante, pois proporciona aos estudantes uma oportunidade de trabalhar com o jogo de xadrez, tema que foge à disciplina de Matemática, em geral, ao mesmo tempo em que possibilita a exploração de conteúdos como a paridade e localização no Plano Cartesiano. Tal problema foi extraído de Magalhães (2021).

Aqui, a habilidade trabalhada da BNCC é a habilidade EF05MA15, que é descrita por "Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros."

Problema: É possível em um tabuleiro de xadrez um cavalo sair do canto superior esquerdo desse tabuleiro e chegar no canto inferior direito desse mesmo tabuleiro passando uma única vez por todas as suas casas?

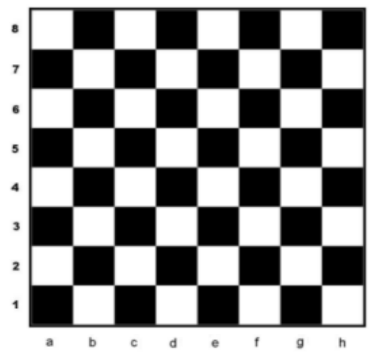
Objetivo: Como esse problema envolve o Jogo de Xadrez, objetiva-se, além do trato com o Plano Cartesiano, a noção de espaço, representação e as ideias envolvidas, apresentar o Jogo e características deste aos estudantes.

Solução Comentada: Para o encaminhamento da resolução desse problema, pode-se entregar tabuleiros de xadrez e as peças que representam o cavalo para os estudantes, de modo que o trabalho com o concreto possa ajudá-los na visualização do problema. Além disso, é importante recordar (ou introduzir) o movimento do Cavalo, popularmente chamado de "formato de L". Caso não seja possível entregar tabuleiros físicos, pode-se pedir que os alunos pintem um tabuleiro e identifiquem suas linhas e colunas como na figura abaixo:

O objetivo agora é, através de um procedimento de investigação, identificar algum padrão invariante no movimento do cavalo sobre o tabuleiro.

Ora, como o cavalo anda em forma de L, ele sempre sairá de uma casa branca para uma casa preta e vice-versa, ou seja, o cavalo sair de uma casa de determinada cor e chegar numa casa de mesma cor é impossível. E este é um dos invariantes do nosso problema. Esta análise deve ser feita com a representação das coordenadas da casa, no plano cartesiano associado

Figura 1 – Tabuleiro usual de xadrez



Fonte: (Zandonadi, 2016)

ao tabuleiro.

Agora, enumerando as casas de acordo com os movimentos feitos, pelo cavalo, considerando a casa 1, como a casa de saída (canto superior esquerdo), e a análise feita acima, concluímos que

- casa 1: branca;
- casa 2: preta;
- casa 3: branca;
- casa 4: preta;
- ⋮

Ou seja, as casas pares serão de cor preta e as casas ímpares serão de cor branca. O que nos dá nosso segundo invariante.

Percebemos então, que, uma vez que a casa final será a sexagésima quarta casa, que é um valor par, ela seria, necessariamente, de cor preta e, como ilustrado na Figura **??**, esta casa é de cor branca, o que nos leva a concluir que o problema proposto é impossível de ser realizado.

Para este problema, destacamos que as invariantes são as cores das casas do tabuleiro e sua relação com a paridade da casa que está sendo tomada como referência.

4.3 Problema 03 - Cortando Dígitos

Para este terceiro enunciado, consideramos que a aplicação desse problema é relevante para o trabalho com alunos no tema de sequências, permitindo abordar conceitos como equidistância e revisar os critérios de divisibilidade. Esse conteúdo é adequado para estudantes a partir do 8º ano do Ensino Fundamental II, alinhando-se à habilidade EF08MA10PE, que contempla a identificação de regularidades em sequências numéricas ou figuras não recursivas e a construção de algoritmos, através de fluxogramas, para indicar os próximos elementos.

Esse problema foi extraído de Magalhães (2021).

Problema: Escreva seis 0´s e cinco 1´s em um pedaço de papel. Daí comece a cortar os pares de dígitos: dois 1´s, dois 0´s ou um 1 e um 0. Se os dígitos cortados são iguais, escreva um novo 0. Se eles forem diferentes, escreva um novo 1. Continue assim, até que não haja mais dígitos a serem cortados ou até haver somente um dígito restante. O que você verá ?

Objetivo: O objetivo deste enunciado é explorar as operações de adição e subtração no conjunto dos Números Naturais, com ênfase no estudo do invariante destacado no problema, evidenciado por meio da análise de sua paridade, conforme apresentado na solução.

Solução Comentada: Deve-se orientar os estudantes a pensar quais propriedades numéricas são possíveis de serem observadas no enunciado. Espera-se que alguma das respostas conclua que a soma dos números inscritos no papel, conforme a proposta, é igual a 5, ou seja, um número ímpar.

A partir daí, é possível orientá-los a respeito do que acontece com o resultado da soma, quando cada uma das ações possíveis é feita, inclusive, recomendamos que eles saiam testando no papel as possibilidades e registrando os resultados encontrados.

Vejamos:

1. quando dois 0´s forem cortados, deve-se escrever no pedaço de papel um novo 0. Ou seja, haverá na papel apenas um 0 a menos, e a mesma quantidade de 1's anterior aos cortes feitos. Dessa forma a soma dos números escritos no papel será a mesma e, portanto, a sua paridade será mantida.

2. quando dois 1´s forem cortados, deve-se escrever no pedaço de papel um novo 0. Ou seja, haverá no papel dois 1´s a menos que a quantidade anterior anterior aos cortes e um 0 a mais. Dessa forma, a soma dos números escritos no papel será duas unidades menor o que mantém a paridade anterior aos cortes.

3. quando forem cortados números diferentes, deve-se escrever no pedaço de papel um novo 1. Ou seja, haverá na papel apenas um 0 a menos, e a mesma quantidade de 1´s anterior aos cortes feitos. Dessa forma, a soma dos números escritos no papel será a mesma e, mais uma vez, sua paridade será mantida.

Assim, pode-se concluir que que a soma dos números escritos no papel após cada jogada ou será mantida ou ficará diminuída em duas unidades. Em ambos os casos, a paridade dessa soma será mantida. Como inicialmente a soma tem paridade ímpar conclui-se que, ao final teremos um único número 1 escrito no papel, porque esse é o menor número natural ímpar. Sendo assim o invariante é a paridade, que será um número ímpar.

Cabe aqui uma observação: essa conclusão é a esperada para o problema, mas, através do processo de investigação, é possível que os estudantes tirem outras conclusões relevantes. Estimulamos que tais considerações não sejam descartadas; pelo contrário, que sejam acrescentadas à solução oficial dada.

4.4 Problema 04 - Uma Questão de Divisibilidade

Neste quarto enunciado, o problema aborda alguns assuntos na matemática de Ensino Fundamental II, onde destacamos a adição e subtração dos números naturais, resultado da adição do algarismos das unidades no sistema binário de numeração e módulos da subtração. Todos esses assuntos sendo destacados pelas habilidades (EF06MA03PE), que aborda a resolução e elaboração de problemas que envolvam cálculos(mentais ou escrito, exatos ou aproximados) com números naturais por meio de estratégias variadas com compreensão dos processos neles envolvidos, enfatizando os diferentes significados das operações fundamentais com ou sem uso da calculadora. De onde faremos o problema em seguida.

Esse problema foi extraído de Magalhães (2021).

Problema: Os números 1,2,3,4,...,999,1000 estão escritos na lousa. Duas pessoas decidem jogar um jogo com estes números que consiste em apagar alternadamente um dos números da lista (cada um deles apaga um número por vez) até que só restem dois números. Se a soma desses números for divisível por 3, o primeiro jogador vence, caso contrário vence o segundo. É possível indicar uma estratégia vencedora ?

Objetivo: Apresentar o conceito de termos equidistantes em uma sequência e revisitar os critérios de divisibilidade por 3 no conjunto dos Números Naturais

Solução Comentada: Para que os estudantes comecem a pensar no problema, pode-se incentivá-los a escreverem uma sequência menor de números, de 1 a 10, por exemplo, de modo que eles comecem a testar as possibilidades e observar os resultados. Aqui, é importante também que o professor recorde o critério de divisibilidade por 3, isto é, que a soma dos dígitos que compõe o número seja divisível por 3. Por exemplo, 18 é divisível por 3, pois $1 + 8 = 9$

e 9 é divisível por 3, 23454 é divisível por 3, pois $2 + 3 + 4 + 5 + 4 = 18$ e 18 é divisível por 3, etc.

Ainda, a introdução do conceito de termos equidistantes de uma sequência pode ser colocada, como ideia, para levar os estudantes a observar o que acontece ao somar tais termos na sequência considerada. Eles devem observar que a soma de dois elementos equidistantes sempre é 1001 que não é múltiplo de 3.

Como o primeiro jogador só vence o jogo se a soma dos números por divisível por 3, então se o segundo jogador adota a seguinte estratégia de simetria, ou seja, de apagar o termo equidistante ao termo apagado pelo primeiro jogador, então ele vence. Por exemplo, quando o primeiro jogador apagar o número 1, o segundo deve apagar 1000, quando o primeiro jogador apagar o número 2, o segundo deve apagar o número 999, e assim sucessivamente, ou seja generalizando se o jogador número 1, apagar o número x, o segundo jogador deverá apagar o número $1001 - x$. Assim, os dois números que sobraram no final da partida terão necessariamente soma igual a 1001.

Observe que o invariante do problema é a soma dos termos equidistantes, que nesse caso será a soma 1001.

Além disso, pode-se incentivar os estudantes a jogarem o jogo do enunciado (com um problema adaptado a uma sequência menor de dígitos) e que eles possam ir testando a divisibilidade por outros números como forma, inclusive, de fixar tais resultados.

4.5 Problema 05 - Um Problema de Paridade

No quinto enunciado o problema é de grande interesse, pois permite uma revisão sobre a paridade dos números, ressaltando, mais uma vez, a importância da paridade na resolução de problemas relacionados ao estudo dos invariantes. É importante destacar que esse tema pode ser abordado em qualquer série dos anos finais do Ensino Fundamental. Com isso destacamos a habilidade (EF06MA04PE) "construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples e envolva a ideia de contagem (por exemplo, se um número natural qualquer é par)".

Este problema foi adaptado de Gomes (2022).

Problema: Emanuela comprou um caderno com 96 folhas, com páginas numeradas de 1 a 192. Para fazer algumas anotações, ela arrancou 25 folhas aleatórias do caderno. Se somarmos todos os 50 números escritos nessas folhas, é possível que essa soma seja 2024?

Objetivo: O objetivo dessa questão é fazer com que os alunos percebam e entendam que a soma de dois números pares é sempre par e a soma de um número par com um número ímpar é sempre ímpar.

Solução Comentada: Aqui, mais uma vez, estimula-se que os alunos peguem um bloquinho de anotações ou algo semelhante, numerem as páginas, rasguem ou risquem os números de algumas páginas e testem os resultados.

O que espera-se é que eles observem que a soma dos números escritos em uma folha é sempre ímpar. Ou seja o invariante do problema é a relação de paridade (ímpar) da soma da numeração das folhas, pois uma folha contém duas páginas e uma página é sempre numerada com um número par e a outra, ímpar.

Como a soma de um número par com um número ímpar resulta num número ímpar, então a soma das numerações de todas as páginas arrancadas, independente de quantas sejam, é sempre um número ímpar. Assim, em particular, essa soma não pode ser 2024, pois, a soma das numerações das 25 folhas arrancadas será um número ímpar.

4.6 Problema 06 - As formigas e o retângulo

No sexto enunciado, o problema traz situações interessantes no estudo da Geometria de modo a despertar no aluno a ideia de que a Geometria não são apenas fórmulas, uma vez que temos algumas propriedades que são muito relevantes na resolução de situações problemas. Ainda, podemos destacar a habilidade (EF08MA16) que trata de "Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos."

Esse problema foi extraído Clubes (2023).

Problema: Três formigas estão paradas em três dos quatro vértices de um retângulo (uma formiga em cada vértice). As formigas movem-se no plano, uma por vez. A cada vez, a formiga que se move, o faz segundo uma reta paralela à determinada pelas posições das outras duas formigas. É possível que, após alguns movimentos, as formigas se situem nos pontos médios de três dos quatro lados do retângulo original?

Objetivo: O objetivo desta questão é proporcionar aos alunos do Ensino Fundamental II a compreensão de uma propriedade fundamental no cálculo da área de triângulos. Essa propriedade estabelece que a área de um triângulo permanece inalterada quando sua base é mantida fixa e o terceiro vértice se desloca ao longo de uma reta paralela à base.

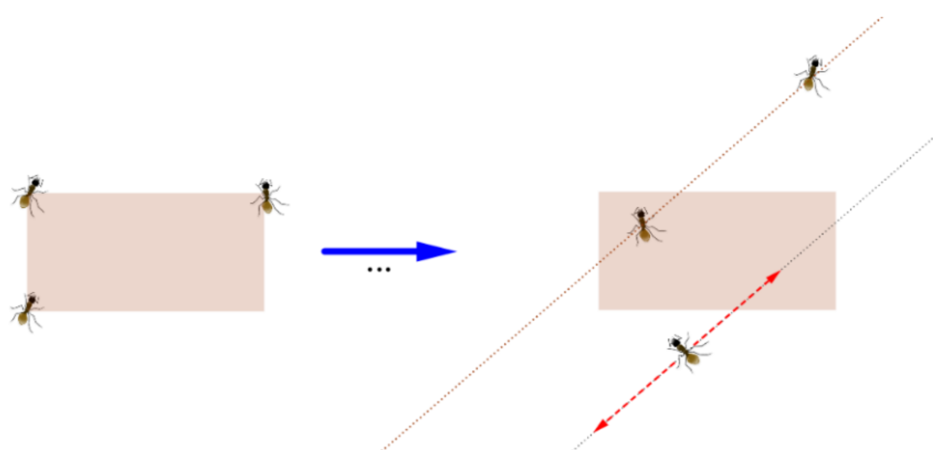
Solução Comentada: É importante que os estudantes representem no papel o enunciado e façam movimentos para cada uma das formigas para entender de forma clara o enunciado. Também é importante que o professor recorde o conceito de paralelismo e chame a atenção de que a posição das formigas pode ser considerada como os vértices de um triângulo, de modo que, ao movimentar as formigas, eles devem observar o que acontece com o triângulo e se há relação entre o triângulo original e o novo triângulo determinado pela posição das formigas. É importante que se incentive as comparações de todas as características dos triângulos: tamanho dos lados, ângulos, áreas, etc.

Assim, os estudantes podem observar que após o movimento de qualquer uma das formigas, a área do triângulo formada por suas posições não se altera. E esta é nossa invariante. Assim, independente da quantidade (finita) de movimentos feitos para a formiga, a área dos triângulos formadas pelas suas posições permanece igual a área do triângulo original que, por sua vez, mede metade da área do retângulo original.

Como a área de um triângulo formado pelos pontos médios de três lados do retângulo $ABCD$ é igual a um quarto da área do mesmo, a situação descrita no enunciado não poderá ocorrer.

A imagem abaixo apresenta uma ilustração dos dados do enunciado.

Figura 2 – Movimentação das Formigas



Fonte: Clubes (s.d.)

4.7 Problema 07 - Brincando com Triângulos

O problema desta seção tem o potencial de despertar nos estudantes interesse pelo desenho que se apresenta como uma ferramenta fundamental para que, de maneira dinâmica, possamos compreender melhor o problema selecionado. Além disso, podemos utilizar o GeoGebra, uma ferramenta extremamente importante na construção de figuras Geométricas, além de contribuir significativamente para o aprendizado. Ao empregar essa tecnologia, os estudantes podem visualizar e manipular as formas, o que facilita a compreensão dos teoremas e propriedades que envolvem formas geométricas, em particular, os triângulos.

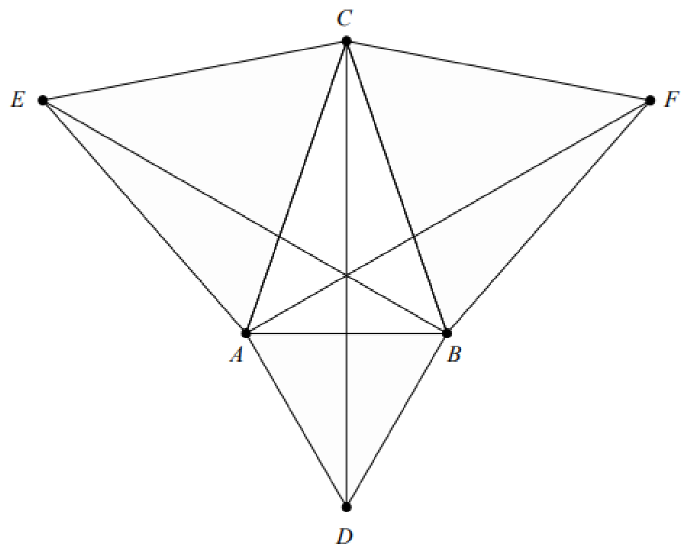
Ainda, este sétimo enunciado foi extraído de Machado (2015) e é uma questão onde podemos destacar em suas habilidades a congruência de triângulos e demonstrações de propriedades dos quadriláteros, bem como o reconhecimentos de triângulos congruentes de acordo com os casos de congruência: Lado, Ângulo, Lado $(L.A.L)$; Ângulo, Lado, Ângulo $(A.L.A)$; Lado,Lado,Lado $(L.L.L)$ e Lado, Ângulo e Ângulo $(L.A.A)$, além da demonstração das propriedades dos quadriláteros a partir da congruência de triângulos. Assim, associamos a habilidade (EF08MA14PE) que cujo teor é o enunciado acima.

Problema: Desenhe um triângulo isósceles ABC de base AB. Em seguida construa três triângulos equiláteros BCF, ACE e ABD para fora desse triângulo. Por fim, trace os segmentos BE, AF e CD. O que se conclui sobre os novos triângulos constuídos na figura?

Solução Comentada: A atividade tanto pode ser proposta para que os alunos o façam no papel, como, como dito antes, incentivamos que eles possam utilizar a ferramenta do GeoGebra. É importante que os estudantes tentem fazer as construções e sejam incentivados a analisar cada elemento que vai aparecendo na imagem, como novos segmentos, novos triângulos ou novos polígonos. Como os triângulos construídos são equiláteros, os ângulos envolvidos são sempre de 60°. Essa medida angular não se altera durante a construção, funcionando como um invariante. Por isso, os segmentos AF, BE e CD se encontram num mesmo ponto. A partir da construção observa-se que os triângulos AFB e ABE são congruentes pelo caso LAL (Lado-Ângulo-Lado), pois $BF = BC = AC = AE$, $\overline{AB}$ é comum ao ângulo $A\widehat{B}F = C\widehat{B}A + F\widehat{B}C = C\widehat{B}A + 60° = B\widehat{A}C + C\widehat{A}E = E\widehat{A}B$. Em particular, $\overline{AF} = \overline{BE}$. Considerando agora os triângulos DBC e ABF, temos $\overline{DB} = \overline{AB}$ (lados do triângulo equilátero ABD), $\overline{BC} = \overline{BF}$.

A imagem abaixo ilustra a construção.

Figura 3 – Construção de Triângulos



Fonte: Machado (2015)

4.8 Problema 08 - Um Invariante Retangular

No oitavo enunciado, o problema se refere a habilidade (EF07MA23PE) que trata de verificar a relação entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.Trazendo a relação entre ângulos formadas por retas paralelas intersectadas por uma transversal, medição e construção de diferentes ângulos usando ou não softwares de geometria dinâmica e a classificação dos ângulos como complementares, suplementares e a definição dos ângulos opostos pelo vértice e ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Este problema possui grande relevância para os estudantes do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II, uma vez que abordaremos o tema das retas paralelas cortadas por uma transversal. Na Geometria, esse assunto abrange diversos tópicos relacionados a polígonos. É importante considerar que esse tema nos proporciona a oportunidade de explorar várias propriedades, incluindo ângulos alternos internos, ângulos alternos externos, ângulos colaterais internos, ângulos colaterais externos, ângulos correspondentes, ângulos opostos pelo vértice, ângulos complementares e ângulos suplementares, entre outros.

Este problema também foi extraído de Machado (2015) .

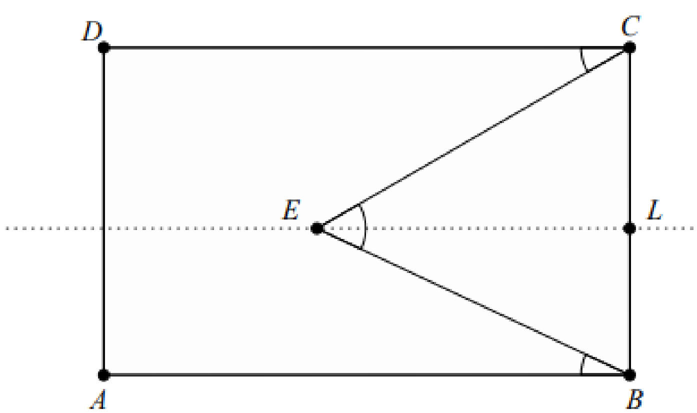
Problema: Seja um retângulo $ABCD$ e marque um ponto E no interior do retângulo. Em seguida, trace os segmentos BE e CE. Por fim, construa os ângulos $E\widehat{B}A$, $D\widehat{C}E$ e $B\widehat{E}C$ e identifique a invariante geométrica.

Solução Comentada Mais uma vez, incentivamos o uso de desenhos para auxiliar, seja a partir de traçados manuais, com lápis e régua, seja por meio do GeoGebra. É importante que o processo de investigação por parte dos estudantes seja incentivado para que eles tirem as próprias conclusões.

Agora, note que, ao traçar por E uma reta paralela ao lado AB, denotando por L o ponto de intersecção desta reta com o lado BC, concluímos que os ângulos $D\widehat{C}E$ e $C\widehat{E}L$ são congruentes, pois são ângulos alternos internos com relação as retas paralelas EL e CD.

Os ângulos $A\overline{B}E$ e $B\widehat{E}L$, por sua vez, também são congruentes, pois são ângulos alternos internos com relação às retas paralelas EL e AB. Logo, o invariante procurado é que, independentemente da posição de E no interior do retângulo, temos $B\widehat{E}C = C\widehat{E}L + B\widehat{E}L = D\widehat{C}E + A\widehat{B}E$.

Figura 4 – Retângulo e uma Invariante



Fonte: Machado (2015)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta última parte do trabalho está dividida em duas partes: as considerações finais sobre o trabalho e algumas considerações sobre a experiência pessoal do autor no ProfMat, apresentadas na primeira pessoa do singular.

Sobre o Trabalho

Nesse trabalho, fizemos uma introdução ao tema invariantes no Ensino de Matemática, de modo a direcionar seu uso na educação básica, em especial no Ensino Fundamental. O texto apresentado foi desenvolvido para ajudar os estudantes do Ensino Fundamental II a aprender sobre invariantes por meios de resolução de problemas de áreas distintas. Por serem problemas de áreas distintas a busca por padrões ou a busca por invariantes também apresenta estratégias distintas, as quais tentamos apresentar de forma clara em cada uma das soluções comentadas.

Com as recomendações sugeridas ao professor, esperamos ter contribuído para aumentar seu leque de possibilidades metodológicas e, portanto, contribuído com a melhoria da prática docente.

As invariantes em matemática são realmente muito poderosas, pois permitem que os alunos façam abstrações e generalizações, o que é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Esperamos que esse trabalho possa inspirar novas abordagens pedagógicas e tornar o aprendizado ainda mais eficiente e envolvente.

Sobre o PROFMAT/UEPB

Ingressar no ProfMat foi sem dúvida um das decisões mais significativas da minha carreira profissional e pessoal. Ao longo da formação, fui apenas ampliando meus conhecimentos em Matemática, mas também ganhando segurança para discutir temas complexos com mais propriedades e clareza tanto dentro, quanto fora de sala de aula.

O curso oferece uma abordagem profunda dos conteúdos, mas sempre com um olhar voltado para a prática docente. Isso faz toda diferença, os temas são tratados constantemente dentro da realidade da Educação Básica, onde tivemos a oportunidade de vivenciarmos de uma forma dinâmica e prática. Com isso, nos foi permitido uma reflexão crítica e, ao mesmo tempo, dinâmica sobre como levar esses temas para o cotidiano escolar. Essa conexão entre a teoria e a prática fortalece o trabalho do professor e enriquece a aprendizagem dos alunos.

Outro ponto interessante foi a troca de experiências com os colegas, cada um traz consigo um repertório único construído ao longo dos anos de atuação na educação, assim como também suas angústias. Compartilhar essas vivências e aprender a aprender com eles foi um processo enriquecedor que contribuiu para ampliar minha visão sobre a prática pedagógica em diferentes contextos.

Os professores do ProfMat (UEPB) foram fundamentais nessa trajetória sempre com muita dedicação, conhecimento e sensibilidade, nos orientam de forma esplêndida, sempre abertos ao diálogo e nos incentivando durante todo o curso para seguirmos em frente, pois sabemos que não é fácil. Além disso, eventos como o Encontro Campinense de Matemática proporcionam momentos valiosos de Integração com a Comunidade Acadêmica, em um ambiente tão singular, ampliando ainda mais nossos conhecimentos.

Atualmente, sinto-me mais preparado para o exercício da docência, uma vez que o ProfMat contribuiu de forma significativa para minha formação acadêmica e para meu desenvolvimento como educador. Tenho mais confiança nas abordagens sobre os conteúdos que irei ministrar em minhas aulas e mais confiança para atuar de maneira crítica e atuante em qualquer espaço de aprendizagem matemático.

REFERÊNCIAS

BITARÃES, V. Invariantes. Programa de Olimpíadas de Treinamento Intensivo – POTI. Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Disponível em: https://poti.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=32. Acesso em: 14 maio 2025.

BOCHOSKI, S. P, O triângulo e suas Invariantes:Investigações por meios de aplicativos Dinâmicos (Parte II). Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem de matematica. In: PONTE, J. P. et al. Atividades de investigação na aprendizagem da ˜ matemática e na formação de professores. p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular : Ensino medio. Brasılia, 2017.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular : Educação infantil e ensino fundamental. Brasılia, 2018.

CONCEIÇÃO JR., R.,Versões Digitais para Jogos Matemáticos: Invariantes em Paridade, Congruência Modular, Frações e P.G. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2020.

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. Problemão: Formigas Geométricas. Blog dos Clubes de Matemática da OBMEP, 2023. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-formigas-geometricas/. Acesso em: 14 maio 2025.

DANTAS, L. G.; MACHADO, M. J. (2014). Tecnologias e educação [livro eletrônico]: perspectivas para gestão, conhecimento e prática docente. (2a ed.)

FERREIRA, M. L. Teoria dos invariantes: Uma análise texto prática comum em livros-texto publicados na segunda metade do século XIX. Anais do 19º Seminário Nacional de História da Ciência e Tecnologia, Salvador. 2024.

GODOY, K. V.; MATTOS, A. C. Um breve estudo sobre invariantes de formas quadráticas binárias. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. Anais. Recife: CIAEM, 2011. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1345/768. Acesso em: 14 maio 2025.

GOMES, M. H. A., Invariantes. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2022.

GONÇALVES, J. H.M., A igualdade do produto escalar euclidiano entre linhas e colunas dos quadrados mágicos Invariantes. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015.

LOPES, D. Invariantes – como algo que não muda mudará sua vida. 15ª Semana Olímpica - OBM, 2012.

MACHADO, E. J.C., Explorando Invariantes Geométricos com Geogebra: Uma seleção para a sala de aula. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2015.

MAGALHÃES, C. T. Stolimpíadas: Jogos e Invariantes. YouTube, 2021. Disponível em: `https:www.youtube.com/live/9FP3KrwJdo`.Acesso em: 14 maio 2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. Currículo de Pernambuco: Ensino Fundamental. Recife: SEE-PE, 2019. Disponível em: `https://portal.educacao.pe.gov.br/wp-content/uploads/2024/08/CURRICULO-DE-PERNAMBUCO-ENSINO-FUNDAMENTAL.pdf`. Acesso em: 14 maio 2025.

POLYA, G. A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autentica, 2003.

PROENÇA, M. C. Resolução de problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Maringá: EDUEM, 2018.

PROENÇA, M. C. Habilidades matemáticas na resolução de problemas: análise da compreensão de futuros professores. Bolema: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 36, n. 74, p. 1–24, set./dez. 2022.

SOUZA, B. V. D.; Problemas do 2º grau: Uma proposta de sequências didáticas sob a perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2023.

TATARIM, A. L, O triângulo e suas Invariantes:Investigações por meios de aplicativos Dinâmicos . Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

VANDERVELDE, S. Pisadas. Jogos com Invariantes. In: STANKOVA, Z.; RIKE, T.; Uma Década do Círculo Matemático de Berkley: A Experiência Americana. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. p. 225-248.

ZANDONADI, E. G. Uma proprosta de sequência didática para o uso de invariantes na resolução de problemas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.