Coletânea de Problemas com Invariantes
para o Ensino Fundamental

Com Orientações para o Professor

José Lopes de Andrade

UEPB
UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JOSÉ LOPES DE ANDRADE

Coletânea de Problemas com Invariantes para o Ensino Fundamental

Produto Educacional apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT/UEPB como requisito para obtenção do título de mestre.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Profª. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE
2025

A554i Andrade, José Lopes de.
Coletânea de problemas com invariantes para o ensino fundamental com orientações para o professor [manuscrito] / José Lopes de Andrade. - 2025.
26 f.

Digitado.

Produto Educacional apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/UEPB

"Orientação : Prof. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho, Departamento de Matemática - CCT".

1. Invariantes. 2. Ensino Fundamental. 3. Resoluçã0 de problemas. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021 BC

Sumário

Considerações Iniciais

Neste texto apresentamos uma coleção de problemas com o tema de Invariantes em Matemática, especificamente, envolvendo conteúdos trabalhados nos anos finais do Ensino Fundamental II.

A Matemática é amplamente reconhecida como a ciência que busca padrões. Nesse contexto, justifica-se a investigação das propriedades invariantes, que, como o próprio nome sugere, referem-se a algo que não muda. Seja no campo da chamada Matemática Pura, em suas diversas Aplicações, ou até mesmo no Ensino de Matemática, as propriedades invariantes desempenham um papel central em variados momentos, sendo utilizadas para identificar características que permanecem constantes sob determinadas transformações ou operações.

Uma propriedade invariante pode ser representada por uma expressão, equação ou característica que não se altera conforme o sistema evolui ou é transformado. Em diversas áreas da Matemática — como Geometria, Álgebra, Teoria dos Números e Combinatória — os invariantes aparecem como ferramentas fundamentais na análise de Situações-Problema. Um exemplo clássico é a propriedade comutativa da adição, que afirma que a ordem das parcelas não altera o resultado da soma, sendo assim um invariante. O mesmo princípio se aplica à multiplicação, em que a ordem dos fatores não altera o produto, outra manifestação da comutatividade.

Entretanto, embora seja uma característica presente em muitos momentos nos estudos de matemática, em diversas etapas de ensino, não temos o hábito de dar o devido destaque a essa característica que é mais comumente relacionada, quando pensamos na etapa escolar da Educação Básica, à atividade Olímpica.

Nesse sentido, selecionamos uma coleção de problemas que envolvem propriedades invariantes e estão relacionados a conteúdos de matemática do Ensino Fundamental que podem ser trabalhados no cotidiano da sala de aula, ao ser abordado o tema de que trata o problema escolhido. Para ilustrar a diversidade de situações em que podemos procurar propriedades invariantes, apresentamos problemas de Álgebra, Aritmética e Geometria. Além disso, com o intuito de auxiliar o professor, apresentamos a habilidade da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) (BRASIL, 2018) a que cada problema pode ser associado.

Ainda, ao apresentar as soluções, optamos por sugerir recomendações metodológicas ao professor, de modo a direcionar a construção da solução por parte dos estudantes. Ao nomearmos de **Solução Comentada**, apresentamos uma solução rigorosa para o problema, mas com direcionamentos ao professor sobre procedimentos possíveis, metologicamente falando, e entregamos um material de apoio mais completo.

Esse texto é, ainda, o Produto Educacional resultante do Trabalho de Conclusão de Curso do Autor, intitulado “Invariantes no Ensino de Matemática: Uso de Problemas na Educação Básica”e tem como objetivo orientar melhor o professor a trabalhar com alunos do Ensino Fundamental II, na resolução de problemas sobre invariantes, destacando sua importância para o desenvolvimento de estratégias, busca de padrões e a promoção de uma aprendizagem ativa. Assim, esse Produto Educacional apresenta uma sequência que envolve conteúdos matemáticos de ideias que podem ser aprimoradas de acordo com a realidade de cada escola. Lembrando que as questões desse produto estão norteadas pelas diretrizes contidas na BNCC, pois traz as habilidades referentes a cada problema apresentado.

Problema 01 - Problema do Poliômio Quadrático

O primeiro enunciado é pautado foi escolhido para que o professor, além de mostrar a importância de reconhecer as propriedades invariantes, reforce a necessidade do estudo da equação quadrática no Ensino Fundamental como uma ferramenta importante na resolução dos mais variados problemas. Além disso, o propósito desse problema é trabalhar a Habilidade EF09MA09, da BNCC(BRASIL,2018), cuja descrição é Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2° grau, tendo como objetivo específico conhecer e compreender a fórmula resolutiva da equação quadrática.

Este problema foi extraído de (LOPES, 2012).

Problema: Considere o polinômio quadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$. Em p, podemos fazer as seguintes operações:

1. trocar a com c ;
2. trocar x por $x + t$ com $t \in \mathbb{R}$.

Usando essas operações é possível transformar o polinômio $p_1(x) = x^2 - x - 2$ em $p_2(x) = x^2 - x - 1$?

Objetivo: Ao trabalhar com esse problema, buscamos identificar propriedades invariantes a partir das operações apresentadas ao relacioná-las com elementos e propriedades de todas os polinômios quadráticos, fixando assim conceitos fundamentais desse tema.

Solução Comentada: De modo a direcionar a resolução por parte dos alunos, deve-se orientá-los a observar que o discriminante de uma equação quadrática fornece informações importantes sobre o polinômio associado. Sendo, assim, a análise do discriminante de $p(x) = 0$, pode ser um ponto de partida para a discussão do problema.

A partir disso, mostraremos que é invariante o valor do discriminante de todas equações obtidas pela aplicação das operações permitidas.

De fato, aplicando a primeira operação, em $p(x) = 0$, obtemos a expressão

$$cx^2 + bx + c = 0,$$

Chamando de Δ_0 o discriminante da equação $p(x) = 0$ e Δ_1 o discriminante da equação acima, podemos concluir que

$$\Delta_0 = b^2 - 4ac = b^2 - 4ca = \Delta_1.$$

Agora, utilizando a segunda operação, em $p(x) = 0$, obtemos

$$a(x + t)^2 + b(x + t) + c = 0$$

logo,

$$ax^2 + (b + 2at)x + (at^2 + bt + c) = 0.$$

Se Δ_2 é o discriminante desta última equação, na incógnita x, então

$$\Delta_2 = (b+2at)^2-4a(at^2+bt+c) = b^2+4abt+4a^2t^2-4a^2t^2-4abt-4ac = b^2-4ac = \Delta_0.$$

Assim, deve-se concluir que ao realizar qualquer das operações listadas, o valor do discriminante da equação correspondente permanece invariante. Daí, para tentar resolver a questão imposta pode-se comparar os discriminantes das equações $p_1(x) = 0$ e $p_2(x) = 0$.

Observamos que os discriminates de $p_1(x) = 0$ e $p_2(x) = 0$ são, respectivamente,

$$\Delta = (-1)^2 - 4 * 1 * (-2) = 9 \text{ e } \tilde{\Delta} = (-1)^2 - 4 * 1 * (-1) = 5.$$

Como $\Delta \neq \tilde{\Delta}$, então, com as operações indicadas não é possível transformar p_1 em p_2.

Problema 02 - O Problema do Cavalo

O segundo enunciado escolhido é particularmente interessante, pois proporciona aos estudantes uma oportunidade de trabalhar com o jogo de xadrez, tema que foge à disciplina de Matemática, em geral, ao mesmo tempo em que possibilita a exploração de conteúdos como a paridade e localização no Plano Cartesiano.Tal problema foi extraído de (MAGALHÃES, 2021).

Aqui, a habilidade trabalhada da BNCC é a habilidade EF05MA15, que é descrita por “Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.”

Problema: É possível em um tabuleiro de xadrez um cavalo sair do canto superior esquerdo desse tabuleiro e chegar no canto inferior direito desse mesmo tabuleiro passando uma única vez por todas as suas casas?

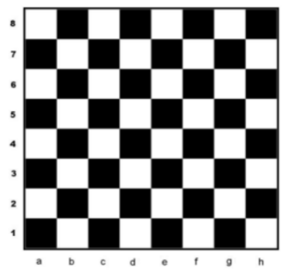
Objetivo: Como esse problema envolve o Jogo de Xadrez, objetiva-se, além do trato com o Plano Cartesiano, a noção de espaço, representação e as ideias envolvidas, apresentar o Jogo e características deste aos estudantes.

Solução Comentada: Para o encaminhamento da resolução desse problema, pode-se entregar tabuleiros de xadrez e as peças que representam o cavalo para os estudantes, de modo que o trabalho com o concreto possa ajudá-los na visualização do problema. Além disso, é importante recordar (ou introduzir) o movimento do Cavalo, popularmente chamado de “formato de L”. Caso não seja possível entregar tabuleiros físicos, pode-se pedir que os alunos pintem um tabuleiro e identifiquem suas linhas e colunas como na figura abaixo:

O objetivo agora é identificar algum padrão invariante no movimento do cavalo sobre o tabuleiro.

Ora, como o cavalo anda em forma de L, ele sempre sairá de uma casa branca para uma casa preta e vice-versa, ou seja, o cavalo sair de uma casa de

Figura 1: Tabuleiro usual de xadrez



Fonte: (ZANDONADI, 2016)

determinada cor e chegar numa casa de mesma cor é impossível. E este é um dos invariantes do nosso problema. Esta análise deve ser feita com a representação das coordenadas da casa, no plano cartesiano associado ao tabuleiro.

Agora, enumerando as casas de acordo com os movimentos feitos, pelo cavalo, considerando a casa 1, como a casa de saída (canto superior esquerdo), e a análise feita acima, concluímos que

- casa 1: branca;
- casa 2: preta;
- casa 3: branca;
- casa 4: preta;
- ⋮

Ou seja, as casas pares serão de cor preta e as casas ímpares serão de cor branca. O que nos dá nosso segundo invariante.

Percebemos então, que, uma vez que a casa final será a sexagésima quarta casa, que é um valor par, ela seria, necessariamente, de cor preta e, como ilustrado na Figura 1, esta casa é de cor branca, o que nos leva a concluir que o problema proposto é impossível de ser realizado.

Para este problema, destacamos que as invariantes são as cores das casas do tabuleiro e sua relação com a paridade da casa que está sendo tomada como referência.

Problema 03 - Cortando Dígitos

Para este terceiro enunciado, consideramos que a aplicação desse problema é relevante para o trabalho com alunos no tema de sequências, permitindo abordar conceitos como equidistância e revisar os critérios de divisibilidade. Esse conteúdo é adequado para estudantes a partir do 8º ano do Ensino Fundamental II, alinhando-se à habilidade EF08MA10PE, que contempla a identificação de regularidades em sequências numéricas ou figurais não recursivas e a construção de algoritmos, através de fluxogramas, para indicar os próximos elementos. Esse problema foi retirado de (MAGALHÃES, 2021)

> Escreva seis 0´s e cinco 1´s em um pedaço de papel. Daí comece a cortar os pares de dígitos: dois 1´s, dois 0´s ou um 1 e um 0. Se os dígitos cortados são iguais, escreva um novo 0. Se eles forem diferentes, escreva um novo 1. Continue assim, até que não haja mais dígitos a serem cortados ou até haver somente um dígito restante. O que você verá ?

Objetivo: O objetivo deste enunciado é explorar as operações de adição e subtração no conjunto dos Números Naturais, com ênfase no estudo da invariante destacada no problema, evidenciada por meio da análise de sua paridade, conforme apresentado na solução.

Solução Comentada: Deve-se orientar os estudantes a pensar quais propriedades numéricas são possíveis de serem observadas no enunciado. Espera-se que alguma das respostas conclua que a soma dos números inscritos no papel, conforme a proposta, é igual a 5, ou seja, um número ímpar.

A partir daí, é possível orientá-los a respeito do que acontece com o resultado da soma, quando cada uma das ações possíveis é feita, inclusive, recomendamos que eles saiam testando no papel as possibilidades e registrando os resultados encontrados.

Vejamos:

1. quando dois 0´s forem cortados, deve-se escrever no pedaço de papel um novo 0. Ou seja, haverá na papel apenas um 0 a menos, e a mesma quantidade de 1's anterior aos cortes feitos. Dessa forma a soma dos números escritos no papel será a mesma e, portanto, a sua paridade será mantida.

2. quando dois 1´s forem cortados, deve-se escrever no pedaço de papel um novo 0. Ou seja, haverá no papel dois 1´s a menos que a quantidade anterior anterior aos cortes e um 0 a mais. Dessa forma, a soma dos números escritos no papel será duas unidades menor o que mantém a paridade anterior aos cortes.

3. quando forem cortados números diferentes, deve-se escrever no pedaço de papel um novo 1. Ou seja, haverá na papel apenas um 0 a menos, e a mesma quantidade de 1´s anterior aos cortes feitos. Dessa forma, a soma dos números escritos no papel será a mesma e, mais uma vez, sua paridade será mantida.

Assim, pode-se concluir que que a soma dos números escritos no papel após cada jogada ou será mantida ou ficará diminuída em duas unidades. Em ambos a casos, a paridade dessa soma será mantida. Como inicialmente a soma tem paridade ímpar conclui-se que, ao final teremos um único número 1 escrito no papel, porque esse é o menor número natural ímpar.

Cabe aqui uma observação: essa conclusão é a esperada para o problema, mas é possível que os estudantes tirem outras conclusões relevantes. Estimulamos que tais considerações não sejam descartadas, pelo contrário, que sejam acrescentadas a solução oficial dada.

Problema 04 - Uma Questão de Divisibilidade

Neste quarto enunciado, o problema aborda alguns assuntos na matemática de Ensino Fundamental II, onde destacamos a adição e subtração dos números naturais, resultado da adição do algarismos das unidades no sistema binário de numeração e módulos da subtração. Todos esses assuntos sendo destacados pelas habilidades (EF06MA03PE), que aborda a resolução e elaboração de problemas que envolvam cálculos(mentais ou escrito, exatos ou aproximados)com números naturais por meio de estratégias variadas com compreensão dos processos neles envolvidos, enfatizando os diferentes significados das operações fundamentais com ou sem uso da calculadora. De onde faremos o problema em seguida.

Esse problema foi extraído de (MAGALHÃES, 2021).

Problema: Os números 1,2,3,4,...,999,1000 estão escritos na lousa. Duas pessoas decidem jogar um jogo com estes números que consiste em apagar alternadamente um dos números da lista (cada um deles apaga um número por vez) até que só restem dois números. Se a soma desses números for divisível por 3, o primeiro jogador vence, caso contrário vence o segundo. É possível indicar uma estratégia vencedora ?

Objetivo: Apresentar o conceito de termos equidistantes em uma sequência e revisitar os critérios de divisibilidade por 3 no conjunto dos Números Naturais

Solução Comentada: Para que os estudantes comecem a pensar no problema, pode-se incentivá-los a escreverem uma sequência menor de números, de 1 a 10, por exemplo, de modo que eles comecem a testar as possibilidades e observar os resultados. Aqui, é importante também que o professor recorde o critério de divisibilidade por 3, isto é, que a soma dos dígitos que componhem o número seja divisível por 3. Por exemplo, 18 é divisível por 3, pois 1 + 8 = 9 e 9 é divisível por 3, 23454 é divisível por 3, pois 2 + 3 + 4 + 5 + 4 = 18 e 18 é divisível por 3, etc.

Ainda, a introdução do conceito de termos equidistantes de uma sequência pode ser colocada, como ideia, para levar os estudantes a observar o que acontece ao somar tais termos na sequência considerada. Eles devem observar que a soma de dois elementos equidistantes sempre é 1001 que não é múltiplo de 3.

Como o primeiro jogador só vence o jogo se a soma dos números por divisível por 3, então se o segundo jogador adota a seguinte estratégia de simetria, ou seja, de apagar o termo equidistante ao termo apagado pelo primeiro jogador, então ele vence. Por exemplo, quando o primeiro jogador apagar o número 1, o segundo deve apagar 1000, quando o primeiro jogador apagar o número 2, o segundo deve apagar o número 999, e assim sucessivamente, ou seja generalizando se o jogador número 1, apagar o número x, o segundo jogador deverá apagar o número 1001 - x. Assim, os dois números que sobraram no final da partida terão necessariamente soma igual a 1001.

Observe que a invariante do problema é a soma dos termos equidistantes.

Além disso, pode-se incentivar os estudantes a jogarem o jogo do enunciado (com um problema adaptado a uma sequência menor de dígitos) e que eles possam ir testando a divisibilidade por outros números como forma, inclusive, de fixar tais resultados.

Problema 05 - Um Problema de Paridade

No quinto enunciado o problema é de grande interesse, pois permite uma revisão sobre a paridade dos números, ressaltando, mais uma vez, a importância da paridade na resolução de problemas relacionados ao estudo das invariantes. É importante destacar que esse tema pode ser abordado em qualquer série dos anos finais do Ensino Fundamental. Com isso destacamos a habilidade (EF06MA04PE) construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples e envolva a ideia de contagem (por exemplo, se um número natural qualquer é par).

Esse problema foi adaptado de (GOMES, 2022).

> **Problema:** Emanuela comprou um caderno com 96 folhas, com páginas numeradas de 1 a 192. Para fazer algumas anotações, ela arrancou 25 folhas aleatórias do caderno. Se somarmos todos os 50 números escritos nessas folhas, é possível que essa soma seja 2024?

Objetivo: O objetivo dessa questão é fazer com que os alunos percebam e entendam que a soma de dois números pares é sempre par e a soma de um número par com um número ímpar é sempre ímpar.

Solução Comentada: Aqui, mais uma vez, estimula-se que os alunos peguem um bloquinho de anotações ou algo semelhante, numerem as páginas, rasguem ou risquem os números de algumas páginas e testem os resultados.

O que espera-se é que eles observem que a soma dos números escritos em uma folha é sempre ímpar. Ou seja a invariante do problema é a relação de paridade (ímpar) da soma da numeração das folhas, pois uma folha contém duas páginas e uma página é sempre numerada com um número par e a outra, ímpar.

Como a soma de um número par com um número ímpar resulta num número ímpar, então a soma das numerações de todas as páginas arrancadas, independente de quantas sejam, é sempre um número ímpar. Assim, em particular, essa soma não pode ser 2024, pois, a soma das numerações das 25 folhas arrancadas será um número ímpar.

Problema 06 - As formigas e o retângulo

No sexto enunciado, o problema traz situações interessantes no estudo da Geometria de modo a despertar no aluno a ideia de que a Geometria não são apenas fórmulas, uma vez que temos algumas propriedades que são muito relevantes na resolução de situações problemas. Ainda, podemos destacar a habilidade (EF08MA16) que trata de Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Este problema foi extraído de (OBMEP, 2023).

Problema: Três formigas estão paradas em três dos quatro vértices de um retângulo (uma formiga em cada vértice). As formigas movem-se no plano, uma por vez. A cada vez, a formiga que se move, o faz segundo uma reta paralela à determinada pelas posições das outras duas formigas. É possível que, após alguns movimentos, as formigas se situem nos pontos médios de três dos quatro lados do retângulo original?

Objetivo: O objetivo desta questão é proporcionar aos alunos do Ensino Fundamental II a compreensão de uma propriedade fundamental no cálculo da área de triângulos. Essa propriedade estabelece que a área de um triângulo permanece inalterada quando sua base é mantida fixa e o terceiro vértice se desloca ao longo de uma reta paralela à base.

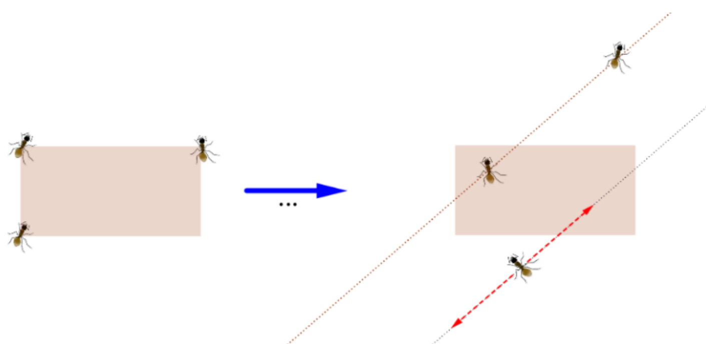
Solução Comentada: È importante que os estudantes representem no papel o enunciado e façam movimentos para cada uma das formigas para entender de forma clara o enunciado. Também é importante que o professor recorde o conceito de paralelismo e chame a atenção de que a posição das formigas pode ser considerada como os vértices de um triângulo, de modo que, ao movimentar as formigas, eles devem observar o que acontece com o triângulo e se há relação entre o triângulo original e o novo triângulo determinado pela posição das formigas. É importante que se incentive as comparações de todas as características dos triângulos: tamanhos dos lados, ângulos, áreas, etc.

Assim, os estudantes podem observar que após o movimento de qualquer uma das formigas, a área do triângulo formada por suas posições não se altera. E esta é nossa invariante. Assim, independente da quantidade (finita) de movimentos feitos para a formiga, a área dos triângulos formadas pelas suas posições permanece igual a área do triângulo original que, por sua vez, mede metade da área do retângulo original.

Como a área de um triângulo formado pelos pontos médios de três lados do retângulo $ABCD$ é igual a um quarto da área do mesmo, a situação descrita no enunciado não poderá ocorrer.

A imagem abaixo apresenta uma ilustração dos dados do enunciado.

Figura 2: Movimentação das Formigas



Fonte: (OBMEP, 2023)

Problema 07 - Brincando com Triângulos

O problema desta seção tem o potencial de despertar nos estudantes interesse pelo desenho que se apresenta como uma ferramenta fundamental para que, de maneira dinâmica, possamos compreender melhor o problema selecionado. Além disso, podemos utilizar o GeoGebra[1], uma ferramenta extremamente importante na construção de figuras Geométricas, além de contribuir significativamente para o aprendizado. Ao empregar essa tecnologia, os estudantes podem visualizar e manipular as formas, o que facilita a compreensão dos teoremas e propriedades que envolvem formas geométricas, em particular, os triângulos.

Ainda, este sétimo enunciado foi extraído de (MACHADO, 2015), e é uma questão onde podemos destacar em suas habilidades a congruência de triângulos e demonstrações de propriedades dos quadriláteros, bem como o reconhecimentos de triângulos congruentes de acordo com os casos de congruência: Lado, Ângulo, Lado $(\mathrm{L.A.L})$; Ângulo, Lado, Ângulo $(\mathrm{A.L.A})$; Lado,Lado,Lado $(\mathrm{L.L.L})$ e Lado, Ângulo e Ângulo $(\mathrm{L.A.A})$, além da demonstração das propriedades dos quadriláteros a partir da congruência de triângulos. Assi, associamos a habilidade (EF08MA14PE) que cujo teor é o enunciado acima.

Problema: Desenhe um triângulo isósceles ABC de base AB. Em seguida construa três triângulos equiláteros BCF, ACE e ABD para fora desse triângulo. Por fim, trace os segmentos BE, AF e CD. O que se conclui?

Solução Comentada: A atividade tanto pode ser proposta para que os alunos o façam no papel, como, como dito antes, incentivamos que eles possam utilizar a ferramenta do GeoGebra. É importante que os estudantes tentem fazer as construções e sejam incentivados a analisar cada elemento que vai aparecendo na imagem, como novos segmentos, novos triângulos ou novos polígonos.

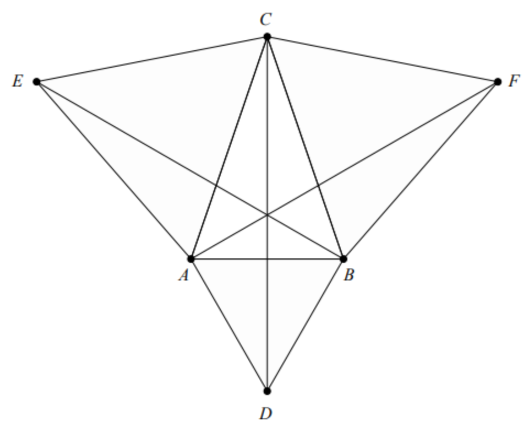
[1]Software de matemática dinâmica livre e gratuito. Disponível em <https://www.geogebra.org/>

A partir da construção observa-se que os triângulos AFB e ABE são congruentes pelo caso LAL (Lado-Ângulo-Lado), pois $\mathrm{BF} = \mathrm{BC} = \mathrm{AC} = \mathrm{AE}$, $\overline{\mathrm{AB}}$ é comum ao ângulo $\mathrm{A\widehat{B}F} = \mathrm{C\widehat{B}A} + \mathrm{F\widehat{B}C} = \mathrm{C\widehat{B}A} + 60^\circ = \mathrm{B\widehat{A}C} + \mathrm{C\widehat{A}E} = \mathrm{E\widehat{A}B}$. Em particular, $\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{BE}}$.

Considerando agora os triângulos DBC e ABF, temos $\overline{\mathrm{DB}} = \overline{\mathrm{AB}}$ (lados do triângulo equilátero ABD), $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BF}}$.

A imagem abaixo ilustra a construção.

Figura 3: Construção de Triângulos



Fonte: Machado (2015)

Problema 08 - Um Invariante Retangular

No oitavo enunciado, o problema se refere a habilidade (EF07MA23PE) que trata de verificar a relação entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.Trazendo a relação entre ângulos formadas por retas paralelas intersectadas por uma transversal, medição e construção de diferentes ângulos usando ou não softwares de geometria dinâmica e a classificação dos ângulos como complementares, suplementares e a definição dos ângulos opostos pelo vértice e ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Este problema possui grande relevância para os estudantes do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II, uma vez que abordaremos o tema das retas paralelas cortadas por uma transversal. Na Geometria, esse assunto abrange diversos tópicos relacionados a polígonos. É importante considerar que esse tema nos proporciona a oportunidade de explorar várias propriedades, incluindo ângulos alternos internos, ângulos alternos externos, ângulos colaterais internos, ângulos colaterais externos, ângulos correspondentes, ângulos opostos pelo vértice, ângulos complementares e ângulos suplementares, entre outros.

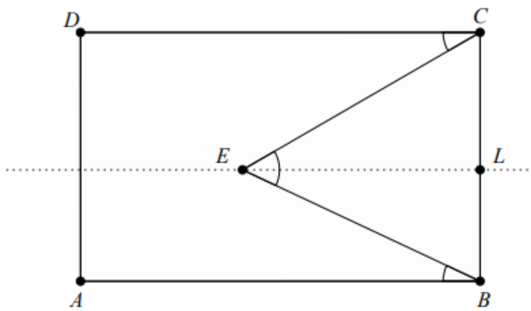
O problema também foi extraído de (MACHADO, 2015).

Problema: Desenhe um retângulo ABCD e marque um ponto E no interior do retângulo. Em seguida, trace os segmentos BE e CE. Por fim, construa os ângulos $\mathrm{E\widehat{B}A}$, $\mathrm{D\widehat{C}E}$ e $\mathrm{B\widehat{E}C}$ e identifique a invariante geométrica.

Solução Comentada Mais uma vez, incentivamos o uso de desenhos para auxiliar, seja a partir de traçados manuais, com lápis e régua, seja por meio do GeoGebra. É importante que o processo de investigação por parte dos estudantes seja incentivado para que eles tirem as próprias conclusões.

Agora, note que, ao traçar por E uma reta paralela ao lado AB, denotando por L o ponto de intersecção desta reta com o lado BC, concluímos que os

Figura 4: Retângulo e uma Invariante



Fonte: Machado (2015)

ângulos $D\widehat{C}E$ e $C\widehat{E}L$ são congruentes, pois são ângulos alternos internos com relação as retas paralelas EL e CD.

Os ângulos $A\overline{B}E$ e $B\widehat{E}L$, por sua vez, também são congruentes, pois são ângulos alternos internos com relação às retas paralelas EL e AB. Logo, a invariante procurada é que, independentemente da posição de E no interior do retângulo, temos $B\widehat{E}C = C\widehat{E}L + B\widehat{E}L = D\widehat{C}E + A\widehat{B}E$.

Considerações Finais

Nesse produto de Educacional, fizemos uma introdução ao tema invariantes no Ensino de Matemática que foi desenvolvido para ajudar os estudantes do Ensino Fundamental II a aprender sobre invariantes por meios de resolução de problemas de áreas distintas. Por serem problemas de áreas distintas a busca por padrões ou a busca por invariantes também apresenta estratégias distintas, as quais tentamos apresentar de forma clara em cada uma das soluções comentadas.

Com as recomendações sugeridas ao professor, esperamos ter contribuído para aumentar seu leque de possibilidades metodológicas e, portanto, contribuído com a melhoria da prática docente.

As invariantes em matemática são realmente muito poderosas, pois permitem que os alunos façam abstrações e generalizações, o que é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Esperamos que esse recurso possa inspirar novas abordagens pedagógicas e tornar o aprendizado ainda mais eficiente e envolvente.

Referências Bibliográficas

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*: Educação infantil e ensino fundamental. Brasília, 2018.

GOMES, M. H. A. *Invariantes*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, Fevereiro 2022.

LOPES, D. Invariantes – como algo que não muda mudará sua vida. *15ª Semana Olímpica - OBM*, 2012.

MACHADO, E. J. C. *Explorando Invariantes Geométricos com Geogebra: Uma seleção para a sala de aula.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2015.

MAGALHÃES, C. T. *Stolimpíadas: Jogos e Invariantes*. YouTube, 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/live/9FP3K_rwJdo>.

OBMEP, C. de Matemática da. *Problemão: Formigas Geométricas*. [S.l.], 2023. Disponível em: <https://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-formigas-geometricas/>.

ZANDONADI, E. G. *Uma proprosta de sequência didática para o uso de invariantes na resolução de problemas*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.