



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

ROMÁRIO DE JESUS

ENSINO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVADAS NO ENSINO BÁSICO, COM
ÊNFASE EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

CAMPINA GRANDE - PB

2026

ROMÁRIO DE JESUS

**ENSINO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVADAS NO ENSINO BÁSICO, COM
ÊNFASE EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO**

Dissertação apresentada à coordenação do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e Suas Tecnologias.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

CAMPINA GRANDE - PB

2026

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

J58e Jesus, Romário de.
Ensino de funções contínuas e derivadas no ensino básico, com ênfase em problemas de otimização [manuscrito] / Romário de Jesus. - 2026.
104 f. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2026.

"Orientação : Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo, Departamento de Matemática - CCT".

1. Funções contínuas. 2. Derivadas. 3. Problemas de otimização. I. Título

21. ed. CDD 372.7

ROMÁRIO DE JESUS

ENSINO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVADAS NO ENSINO BÁSICO, COM ÊNFASE EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Aprovada em: 27/02/2026.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Gustavo da Silva Araújo** (***.427.484-**), em **11/03/2026 10:53:16** com chave **a773e5fc1d5111f1bd5e820fe4141fec**.
- **Luciana Roze de Freitas** (***.867.174-**), em **11/03/2026 12:47:33** com chave **9e9397ba1d6111f1b4f7760d47736b89**.
- **Giovana Siracusa Gouveia** (***.178.824-**), em **11/03/2026 13:22:37** com chave **84782bde1d6611f1b398768ee953ea65**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final

Data da Emissão: 11/03/2026

Código de Autenticação: 80e9d4



A Deus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me guiar e me dar força para nunca desistir, mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo, pela paciência e apoio durante todo o processo.

Ao PROFMAT e aos professores da UEPB que contribuíram significativamente na minha jornada acadêmica e profissional.

Aos meus colegas de turma, pela parceria, trocas de experiências e apoio mútuo nas horas difíceis.

Aos meus amigos e parceiros de trabalho Kelven e Jorge, que estiveram ao meu lado durante todos os momentos do mestrado e sempre disponíveis para me ajudar nas horas mais difíceis.

Aos meus colegas professores, à Gestão e aos estudantes da ECIT Irmã Stefanie, em especial à turma da 2ª série, pela valiosa participação e contribuição para o desenvolvimento desta dissertação.

À minha família, que mesmo de longe sempre me apoiou e me motivou a continuar lutando pelos meus sonhos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Se não conseguir resolver um problema, existe outro problema que você consegue resolver:

encontre-o.

(Polya)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal analisar a aplicabilidade dos conceitos de continuidade e derivabilidade no ensino de Matemática na Educação Básica, com ênfase em problemas de otimização. Assim, o ponto-chave consistiu no estudo das funções contínuas, da definição intuitiva de limites, dos conceitos de derivadas e de problemas de otimização contextualizados e aplicados ao cotidiano de uma comunidade escolar. Para isso, foi realizada uma intervenção pedagógica para fortalecer a necessidade de não utilizar a memorização de fórmulas para a determinação de máximos e mínimos de funções quadráticas em uma turma da 2ª série do Ensino Médio. Dessa forma, foi elaborado e utilizado um material didático, no qual os conteúdos dividem-se em quatro grupos: revisão de funções, taxa de variação, limite e derivadas. Nessa intervenção, foram aplicadas as partes iniciais do material didático, revelando bons resultados e evolução acadêmica da turma. A investigação assume uma natureza mista, articulando as abordagens quantitativa e qualitativa. O procedimento metodológico partiu de uma avaliação diagnóstica para o mapeamento dos conhecimentos prévios, seguida da intervenção pedagógica e da análise qualitativa dos resultados. Os dados coletados sinalizam o êxito da proposta ao ratificar que novas estratégias de ensino são determinantes para a aprendizagem de funções contínuas sob a ótica da otimização.

Palavras-chave: funções contínuas; derivadas; problemas de otimização.

ABSTRACT

This work aims primarily to analyze the applicability of the concepts of continuity and differentiability in the teaching of Mathematics in Basic Education, with emphasis on optimization problems. Thus, the key point consisted in the study of continuous functions, the intuitive definition of limits, the concepts of derivatives, and optimization problems contextualized and applied to the daily life of a school community. To this end, a pedagogical intervention was carried out to reinforce the importance of not relying on the memorization of formulas for determining maxima and minima of quadratic functions in a 2nd-year high school class. In this way, a didactic material was developed and used, in which the contents are divided into four groups: review of functions, rate of change, limit, and derivatives. In this intervention, the initial parts of the didactic material were applied, revealing good results and academic progress of the class. The investigation assumes a mixed nature, articulating quantitative and qualitative approaches. The methodological procedure began with a diagnostic assessment to map prior knowledge, followed by the pedagogical intervention and qualitative analysis of the results. The collected data indicate the success of the proposal by confirming that new teaching strategies are decisive for the learning of continuous functions from the perspective of optimization.

Keywords: continuous functions; derivatives; optimization problems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama de Venn definindo função	19
Figura 2 – Domínio, contradomínio e imagem de um elemento	22
Figura 3 – Resposta dada pelo estudante 01 para a questão 01	80
Figura 4 – Resposta dada pelo estudante 02 para a questão 03	83
Figura 5 – Resposta dada pelo estudante 03 para a questão 07	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Aproximação de $f(x)$ para $x \rightarrow 1^-$	43
Tabela 2 – Aproximação de $f(x)$ para $x \rightarrow 1^+$	43
Tabela 3 – Tabela de aproximações usando valor absoluto	43
Tabela 4 – Valores de x maiores que 2	48
Tabela 5 – Derivadas das Funções Elementares	61
Tabela 6 – Desempenho dos Estudantes na Questão 01	80
Tabela 7 – Desempenho dos Estudantes na Questão 02	82
Tabela 8 – Desempenho dos Estudantes na Questão 03	83
Tabela 9 – Desempenho dos Estudantes na Questão 04	85
Tabela 10 – Desempenho dos Estudantes na Questão 05	86
Tabela 11 – Desempenho dos Estudantes na Questão 06	87
Tabela 12 – Desempenho dos Estudantes na Questão da Caixa sem Tampa	88

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Alguns valores de área do quadrado	20
Quadro 2 – Valores de x menores que 1	42
Quadro 3 – Valores de x maiores que 1	42
Quadro 4 – Valores de x menores que 2	49

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Função $f(x) = x^2 - 6x + 8$	28
Gráfico 2 – Função $f(x) = -x^2 + 2x - 2$	28
Gráfico 3 – Função $f(x) = 2^x$, ou seja, função exponencial crescente	32
Gráfico 4 – Função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, ou seja, função exponencial decrescente	32
Gráfico 5 – Função logarítmica crescente	38
Gráfico 6 – Função logarítmica decrescente	38
Gráfico 7 – Função $\text{sen}(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ com coordenadas	39
Gráfico 8 – Função $\text{cos}(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ com coordenadas	40
Gráfico 9 – Função $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ com destaque para $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$	45
Gráfico 10 – Função $f(x) = \frac{(x - 1)^3}{8} + x - 2$ com destaque em $x = 1$	46
Gráfico 11 – Função $g(x)$	49
Gráfico 12 – Função $f(x)$ com representação do limite quando x tende a 1	53
Gráfico 13 – Função $f(x)$ com representação do limite quando x tende a 1	53
Gráfico 14 – Função $f(x)$ e seus limites laterais	54
Gráfico 15 – Análise da continuidade da função $f(x)$	54
Gráfico 16 – Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$	55
Gráfico 17 – Função com duas retas tangentes nos pontos P e Q	59
Gráfico 18 – Análise da Derivada na Função $f(x) = -x^2 + 4x$	64
Gráfico 19 – Análise da derivada na função $g(x) = x^2 - 6x + 5$	65
Gráfico 20 – Função $f(x) = 1 - x^2$ com máximo local em $x = 0$	67
Gráfico 21 – Função $f(x) = x $ com mínimo local em $x = 0$	67
Gráfico 22 – Função $f(x) = \text{sen } x$ com extremos locais destacados	68

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	CONTEÚDO PRELIMINAR	18
2.1	Funções: conceitos básicos	18
2.1.1	Função	19
2.1.2	Domínio, contradomínio e imagem da função	21
2.1.3	Funções polinomiais	24
2.1.3.1	<i>Função afim</i>	24
2.1.3.2	<i>Função quadrática</i>	26
2.1.4	Função exponencial e logarítmica	31
2.1.5	Funções periódicas	38
2.1.5.1	<i>Função seno</i>	39
2.1.5.2	<i>Função cosseno</i>	40
2.2	Uma introdução ao limite de função	42
2.2.1	Noção intuitiva de limite função	42
2.2.2	Propriedades do limite de uma função	47
2.2.3	Limite de uma função polinomial	47
2.2.4	Limites laterais	48
2.2.5	Limites especiais	51
2.2.6	Continuidade	52
2.3	Derivadas: conceito e interpretação	55
2.3.1	Derivada	55
2.3.2	Taxa de variação	58
2.3.3	Interpretação geométrica	59
2.3.4	Diferenciabilidade implica continuidade	60
2.3.5	Função derivada	60
2.3.6	Derivadas das funções elementares	61
2.3.7	Análise do comportamento de funções através da derivada	63
2.3.7.1	<i>Crescimento e decrescimento</i>	63
2.3.7.2	<i>Concavidade e a segunda derivada</i>	64

2.4	Problemas de otimização e aplicações	65
2.4.1	Máximos e mínimos	66
2.4.2	Problema 01: maximização do lucro na venda de empadas	70
2.4.3	Problema 02: otimização de embalagens	73
2.5	Dificuldades no ensino de limites e derivadas	74
3	METODOLOGIA	76
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	78
4.1	Avaliação diagnóstica de entrada	78
4.2	Aplicação do material didático	89
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
	REFERÊNCIAS	96
	APÊNDICE A – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE ENTRADA	97

1 INTRODUÇÃO

O estudo do Cálculo Diferencial e Integral é altamente eficaz na resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento, inclusive na própria Matemática. No entanto, os conteúdos abordados nessa disciplina costumam representar grandes obstáculos para os estudantes, especialmente no ingresso em cursos das ciências exatas. Nesse sentido, torna-se fundamental a realização de um trabalho minucioso no que se refere ao ensino e à aprendizagem de conceitos básicos, indispensáveis para o fortalecimento e a melhoria do desempenho nas disciplinas iniciais do ensino superior. Para isso, é necessário desmistificar o conhecimento matemático e torná-lo mais acessível aos estudantes da Educação Básica.

Ademais, a Matemática tem sido historicamente percebida por muitos estudantes brasileiros como um “bicho de sete cabeças” ou como a vilã entre as disciplinas previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Dessa forma, pensar em ações que modifiquem essa percepção e que levem os estudantes a reconhecer a importância do que estão estudando torna-se cada vez mais necessário. Em outras palavras, os estudantes precisam identificar uma utilidade prática desses conteúdos em seu cotidiano. Além disso, as atuais formas de avaliação para ingresso no ensino superior encontram-se defasadas, uma vez que conteúdos relevantes para a evolução acadêmica na área de Matemática têm sido desconsiderados. Moreno (2016) reforça essa ideia ao afirmar que:

Embora o Ensino Médio seja uma etapa de ensino mais avançada, expressivo número de alunos não domina conceitos básicos deste componente curricular. Nesta vertente, hipoteticamente, estes alunos, ao ingressarem no Ensino Superior, terão sérias dificuldades para compreenderem conteúdos que dependem de conceitos prévios.

Além disso, ao analisar os livros didáticos do Ensino Médio, observa-se que, em muitos casos, os conteúdos matemáticos são apresentados de forma superficial, com ênfase na memorização de fórmulas e no uso de “macetes”, geralmente voltados apenas para o desempenho em avaliações como o ENEM. Esse tipo de abordagem pouco favorece a compreensão conceitual e a aplicação prática dos conteúdos, dificultando o desenvolvimento de um pensamento crítico, investigativo e criativo por parte dos discentes. Como consequência, reduzem-se as oportunidades de estabelecer conexões mais profundas entre a Matemática e suas diversas aplicações.

Diante disso, o presente trabalho tem por objetivo geral uma análise crítica do estudo das funções contínuas na Educação Básica, apresentando conceitos, problemáticas e aplicações

que possam facilitar a compreensão desse conteúdo, como, por exemplo, o uso de derivadas, especialmente em problemas de otimização. Pois, o estudo das derivadas possibilita a interpretação de diversos fenômenos do cotidiano, como o crescimento populacional e a velocidade de um objeto em movimento. Além disso, o ensino de derivadas no Ensino Médio contribui para o desenvolvimento de habilidades necessárias à formação do discente, auxiliando na resolução de problemas tanto no âmbito acadêmico quanto no profissional, sobretudo para aqueles que pretendem seguir áreas como Matemática, Física ou Engenharias.

Dessa forma, o estudo das funções é essencial para a formação do estudante, dada a sua ampla aplicação na descrição de situações do cotidiano, perceptível desde os primeiros contatos com o tema ao longo da vida escolar. Além disso, ao ingressar em um curso de Licenciatura em Matemática, o estudante depara-se com disciplinas que abordam funções de maneira mais aprofundada, exigindo um conhecimento mais sólido acerca desse tema. Assim, o estudo das funções no Ensino Médio, aliado à aplicação das derivadas, mostra-se fundamental para a resolução de diversos problemas de otimização, pois:

As ideias sobre funções percorrem o conhecimento escolar desde as primeiras noções de proporcionalidade nas séries iniciais do Ensino Fundamental, na Educação Básica, até o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, na Universidade. Funções estão entre as mais poderosas e úteis noções em toda a matemática e inclusive em várias outras ciências. (Caires e Nascimento, 2012)

Nesse contexto, as ferramentas matemáticas voltadas à resolução de problemas envolvendo funções tornam-se ainda mais atrativas e necessárias, uma vez que permitem otimizar processos, aumentar a eficiência e obter resultados mais precisos, contribuindo para a tomada de decisões fundamentadas e para a superação de desafios cada vez mais complexos.

Diante desse cenário, o presente trabalho está fundamentado no desenvolvimento e na aplicação de uma proposta material voltada ao estudo de funções contínuas e à introdução de conceitos básicos de derivadas no Ensino Médio, com ênfase em problemas de otimização. A proposta tem como objetivo aproximar os conteúdos matemáticos da realidade dos estudantes, por meio de duas situações-problema contextualizadas e atreladas ao curso técnico de Gastronomia em que estão matriculados, de modo a favorecer o pensamento investigativo e criativo dos discentes.

Para isso, foi elaborado um produto educacional, em que os conteúdos estão organizados em grupos, a saber: revisão de funções, taxa de variação, limite e derivadas. Neste trabalho, foram aplicadas apenas as duas seções iniciais desse material didático, tendo sido evidenciada a

necessidade de dar continuidade à aplicação das duas últimas. A pesquisa caracteriza-se como quantitativa e qualitativa, uma vez que foi realizada uma avaliação diagnóstica inicial para a análise do conhecimento dos estudantes, foi aplicada duas seções e foi realizada uma análise qualitativa da participação dos estudantes e do desempenho em aula. Além disso, deixa prevista a aplicação das duas seções restantes. Desse modo, os resultados obtidos mostram-se positivos, pois evidenciam a importância da busca por novas metodologias e estratégias de ensino para o estudo de funções contínuas, com ênfase nos problemas de otimização.

A avaliação diagnóstica inicial desempenhou um papel muito importante nesta pesquisa, pois foi utilizada como um instrumento essencial de investigação para levantar os conhecimentos prévios e as lacunas de aprendizagem dos estudantes no que se refere aos conteúdos de função e à ideia de achar máximos e mínimos. Sem assumir um caráter punitivo ou meramente classificatório, essa avaliação possibilitou o mapeamento das dificuldades da turma antes da aplicação do material didático, fornecendo insumos reais para um ajuste metodológico de acordo com às necessidades específicas dos discentes. Além disso, comparando os resultados obtidos nesta fase com o desempenho posterior, é possível mensurar, com maior precisão, o impacto da metodologia proposta e a evolução do processo de construção do conhecimento matemático e científico dos estudantes.

A proposta pedagógica foi aplicada a estudantes da 2ª série do Ensino Médio da ECIT Irmã Stefanie, considerando as dificuldades conceituais previamente identificadas em relação ao estudo de funções, área, volume e interpretação algébrica. As atividades desenvolvidas buscaram estimular não apenas a resolução mecânica de exercícios, mas, sobretudo, a compreensão dos conceitos envolvidos, incentivando os estudantes a formular hipóteses, testar estratégias e refletir sobre os resultados obtidos.

Dessa forma, a análise das produções escritas e das estratégias adotadas pelos estudantes ao longo do desenvolvimento das duas primeiras etapas do material didático permitiu investigar a relevância de um projeto pedagógico estruturado para a introdução de ideias relacionadas às derivadas nessa turma. As atividades evidenciaram que, embora os estudantes apresentem dificuldades significativas na identificação e no uso de fórmulas associadas a máximos e mínimos, muitos conseguiram compreender o problema proposto e mobilizar estratégias intuitivas para buscar soluções, reforçando, assim, a necessidade de continuidade das últimas etapas do material didático com a finalidade de facilitar a resolução de problemas de otimização e fugir da memorização de fórmulas.

Para melhor compreensão, este trabalho está organizado em 4 capítulos além da introdução. O primeiro capítulo apresenta a organização dos conteúdos necessários para a intervenção na sala de aula e traz uma revisão sobre funções contínuas. O segundo capítulo detalha a metodologia e a elaboração do produto educacional voltado ao curso técnico de Gastronomia. O terceiro capítulo traz a análise dos dados coletados na ECIT Irmã Stefanie e uma discussão a respeito das atividades aplicadas na turma e, por fim, apresentam-se as considerações finais e as referências utilizadas.

2 CONTEÚDO PRELIMINAR

Para se ter uma fundamentação teórica mais consistente e um maior entendimento acerca da aplicação desse projeto na educação básica, é importante que nos habituemos com alguns conceitos necessários. Neste capítulo, dividido em cinco seções, podemos entender os conteúdos trabalhados, bem como fortalecemos os conhecimentos que os estudantes precisam adquirir. Assim, definimos função e continuidade, vemos a ideia de limite de função, de forma algébrica e geométrica, além de derivadas e suas interpretações, chegando assim às aplicações que são objeto de estudo dessa dissertação, os problemas de otimização. E para encerrar, discutimos algumas dificuldades de aprendizagem destes conteúdos.

Além disso, os conceitos trabalhados no Cálculo Diferencial, que a partir de agora chamaremos apenas de Cálculo, revelam-se por meio da sua grande importância e contribuição na ciência. Isaac Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716) deram início a esse processo e suas contribuições perpetuam até os dias de hoje, e as aplicações de seus estudos e pesquisas são utilizadas em várias situações do dia a dia. Em se tratando de cidadania, por exemplo,

o cálculo é imprescindível para formação do cidadão. Resolução de problemas de juros ou de crescimento de população (ou do aumento do custo de vida, da dívida externa, etc.), cálculos de velocidades ou de taxas de variações, interpretações de gráficos de funções reais, resolução de problemas de otimização (de áreas, de orçamento doméstico, etc.) são habilidades cada vez mais requisitadas para o exercício pleno da cidadania em uma sociedade de crescente complexidade. (Rezende, 2003)

O cálculo é, de fato, essencial para a formação do cidadão, pois proporciona ferramentas fundamentais e necessárias para o entendimento e a resolução de problemas do cotidiano e da sociedade de modo geral. Situações como o cálculo de juros, seja em investimentos ou dívidas, o estudo do crescimento populacional, a análise de gráficos que representam funções reais e a otimização de recursos financeiros e cálculo de áreas são exemplos claros de como a utilização da derivada se aplica diretamente à vida prática. Esses conceitos contribuem para uma melhor tomada de decisão individual, além de fortalecerem uma participação mais consciente e crítica na sociedade.

2.1 Funções: conceitos básicos

O estudo das funções e continuidade é crucial no entendimento da Matemática, pois permite entender como os fenômenos variam e se comportam. As funções são relações que

associam cada elemento de um conjunto a exatamente um elemento de outro, sendo amplamente utilizadas para descrever situações do mundo real, como movimento, educação financeira, crescimento populacional e fenômenos físicos, químicos ou biológicos. Enquanto continuidade, por sua vez, trata da ausência de quebras ou saltos em uma função, garantindo que pequenas mudanças na entrada resultem em pequenas mudanças na saída. A análise da continuidade é essencial para o cálculo, além de ser uma ferramenta indispensável na modelagem matemática e em diversas aplicações científicas e tecnológicas.

Além disso, no nosso dia a dia, frequentemente nos deparamos com situações em que diferentes grandezas estão relacionadas por uma dependência direta. Imagine, por exemplo, em uma conta de energia elétrica: quanto mais tempo utilizamos aparelhos eletrônicos, maior será o valor a ser pago ao final do mês. Nesse caso, o custo a ser pago depende diretamente da quantidade de energia consumida. Outro exemplo comum é em uma corrida de táxi: quanto maior o trajeto percorrido, maior será o valor cobrado por essa viagem. Essas situações mostram como vários contextos cotidianos podem ser descritos e analisados por meio de relações de dependência entre grandezas.

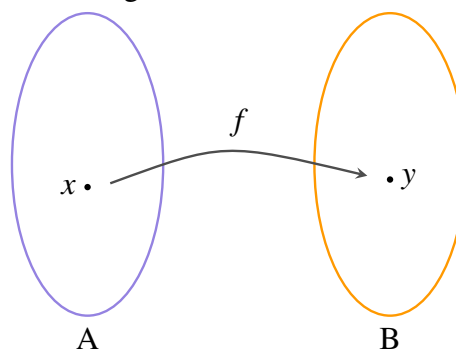
2.1.1 Função

Iniciamos essa seção, definindo função.

Definição 2.1. Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Usamos a seguinte notação: $f : A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: f é uma função de A em B). A função f transforma x de A em y de B . Escrevemos isso assim: $y = f(x)$. Podemos visualizar essa ideia no diagrama a seguir:

Figura 1 – Diagrama de Venn definindo função



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Em outras palavras, para ser função, a relação deve ter duas características em comum:

- Todos os valores para funções numéricas que podem ser assumidos pela variável independente (elementos do conjunto A) são associados a valores da variável dependente (elementos do conjunto B).
- Cada valor atribuído à variável independente está associado a um único valor da variável dependente.

Uma relação que possui essas duas características é chamada de **função**.

Exemplo 2.1. Para determinar a área A de um quadrado, multiplicamos a medida de seu lado l por ela mesma, ou seja, elevamos l ao quadrado. Podemos representar esse cálculo por meio da fórmula $A = l^2$. Considerando A e l números reais positivos, essa fórmula estabelece uma correspondência entre esses valores, de modo que a área de um quadrado é uma função da medida de seu lado. Por exemplo, se l for igual a 5 cm , a área A será 25 cm^2 .

Observe algumas medidas do lado de um quadrado e da área correspondente.

Quadro 1 – Alguns valores de área do quadrado

l (u.c.) [unidade de comprimento]	1	2	3	10	50	100
A (u.a.) [unidade de área]	1	4	9	100	2 500	10 000

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Como a área do quadrado depende da medida de seu lado, a variável independente é a medida do lado, e a variável dependente é a área. A fórmula da área de um quadrado pode ser interpretada como a lei de formação ou a lei de correspondência da função que relaciona a área A de um quadrado e a medida do lado l correspondente.

Exemplo 2.2. Um grupo de estudantes da ECIT Irmã Stefanie participará de uma competição de foguetes. Participarão deste projeto 20 estudantes; o preço individual dos produtos para a produção dos foguetes será de R\$ 100,00 e, para cada estudante que desistir, o preço individual dos participantes aumentará R\$ 5,00; por exemplo, se dois estudantes desistirem, o preço da excursão será de R\$ 130,00. Qual o valor máximo que poderá ser arrecadado para que os estudantes consigam participar dessa competição?

Neste exemplo é trabalhada a ideia de função num problema de otimização. Para que a questão seja resolvida, é necessário que, inicialmente, encontre-se a lei de formação, e para isso

precisa-se identificar as variáveis. O valor muda, de acordo com a quantidade de desistentes, portanto,

- A quantidade de desistentes será: x .
- A quantidade de estudantes participantes: $20 - x$.
- Valor pago por estudante participante: $100 + 5x$.

Dessa forma, a função que descreve o valor total arrecadado é dada pela multiplicação da quantidade de estudantes participantes pelo valor unitário. Isto é;

$$A(x) = (20 - x) \cdot (100 + 5x)$$

$$A(x) = 2000 - 100x + 100x - 5x^2 \Rightarrow A(x) = 2000 - 5x^2.$$

Assim, temos aqui uma função em que a quantidade total de dinheiro arrecadado depende exclusivamente da quantidade de estudantes desistentes. Ou seja, x é a variável independente e $A(x)$ é a variável dependente.

Para podermos achar o valor máximo possível de ser arrecadado, precisamos usar algumas estratégias e manipulações, que não precisariam se os estudantes do Ensino Médio tivessem acesso ao ensino de derivadas anteriormente. Sem a utilização de derivadas, inicialmente, acha-se o eixo de simetria para encontrar a abscissa do vértice da parábola e depois calcular a função aplicada a esse ponto, sendo o valor máximo que essa função pode atingir.

Para o eixo de simetria, encontra-se o zero da função:

$$-5x^2 + 2000 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 2000 \Rightarrow x^2 = 400.$$

Logo, os zeros dessa função são $x = -20$ e $x = 20$, ou seja, o ponto central é $x = 0$ e, portanto, o máximo arrecadado é

$$A(0) = -5 \cdot 0^2 + 2000 \Rightarrow A(0) = 2000.$$

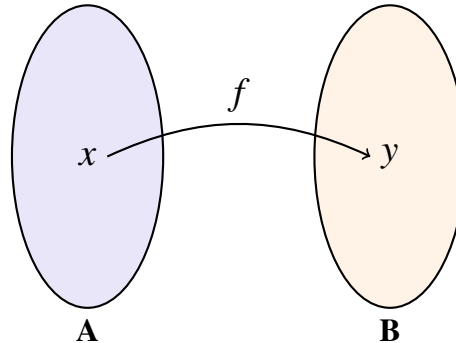
Dessa maneira, o valor máximo arrecadado será R\$ 2.000,00, quando ninguém desistiu.

2.1.2 Domínio, contradomínio e imagem da função

Dada uma função f definida de A em B , dizemos que o conjunto A é domínio da função ($D(f)$) e o conjunto B é o contradomínio ($CD(f)$) da função. Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$

chama-se imagem de x pela função f ou o valor da função f para $x \in A$, e o representamos por $f(x)$ (lê-se f de x). Assim, $y = f(x)$.

Figura 2 – Domínio, contradomínio e imagem de um elemento



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

O conjunto de todos os valores de y é chamado conjunto imagem da função f e é indicado por $\text{Im}(f)$. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.3. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considere a função $f : A \rightarrow B$ que transforma $x \in A$ em $2x \in B$.

Neste exemplo, dizemos que a função $f : A \rightarrow B$ é definida por $f(x) = 2x$ ou por $y = 2x$. Se usarmos a indicação $x \xrightarrow{f} 2x$, estamos dizendo que a função f toma x em A e transforma em $2x$ de B . É perceptível que, para caracterizar uma função, é necessário conhecer seus três componentes: o domínio (A), o contradomínio (B) e a regra que associa cada elemento x de A a um único elemento $y = f(x)$ de B . Neste exemplo, temos: o domínio $A = \{0, 1, 2, 3\}$, o contradomínio $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a regra $y = 2x$ e a imagem $\text{Im}(f) = \{0, 2, 4, 6\}$.

Exemplo 2.4. Vamos considerar a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$.

Nesse caso, a função f transforma todo número natural x em outro número natural y , que é o sucessor de x , indicado por $x + 1$. Observemos a imagem de alguns elementos do domínio:

- para a imagem de $x = 0$ temos $y = 1$
- para $x = 1$ temos $y = 2$
- para $x = 2$ temos $y = 3$

Observando esse padrão, é fácil ver que o conjunto imagem da função f é dado pelo conjunto dos números naturais, excluindo o zero, isto é, $\text{Im}(f) = \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

Conforme a forma como os elementos do domínio e do contradomínio se ligam por meio de uma função, utilizamos algumas classificações importantes para descrevê-la. Entre as mais comuns, estão os termos **injetora**, **sobrejetora** e **bijetora**. Vamos entender o que cada uma significa:

Definição 2.2. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *injetiva* (ou *injetora*) quando elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes de B , ou seja, não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A .

Podemos dizer então que uma função é injetora se, e somente se, $x_1 \neq x_2$ implicar $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição 2.3. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *sobrejetiva* (ou *sobrejetora*) quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, f é sobrejetiva quando todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A , isto é, quando $Im(f) = B$.

Definição 2.4. Uma função $f : A \rightarrow B$ é *bijetiva* se ela for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Quando isso ocorre, dizemos que há uma bijeção ou uma correspondência biunívoca entre A e B .

Exemplo 2.5. Vamos analisar a função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}_+$, onde $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Note que:

- i. Domínio: $D(f) = \mathbb{R}_+$.
- ii. Contradomínio: $CD(f) = \mathbb{R}$.
- iii. Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}_+$.
- iv. Injetiva: não é injetiva, pois, se tomarmos $x_1 = -1 \neq 1 = x_2$, com $-1, 1 \in D(f)$, então $f(x_1) = 1^2 = (-1)^2 = f(x_2)$.
- v. Sobrejetiva: perceba que $CD(f) = \mathbb{R}$ enquanto $Im(f) = \mathbb{R}_+$, logo $Im(f) \neq CD(f)$, implicando que f não é sobrejetiva.
- vi. Bijetiva: como f não é sobrejetiva nem injetiva, então não é bijetiva.

Existem uma infinidade de funções, mas muitas delas podem ser classificadas com base em seus comportamentos e características. Algumas dessas categorias específicas se destacam por sua importância e frequência no estudo da Matemática, especificamente no Ensino Médio.

Entre tais funções, podemos citar as polinomiais, que são expressões algébricas formadas por somas de potências de uma variável com coeficientes reais.

Outro grupo importante de funções que se estuda no Ensino Médio inclui as funções exponenciais, nas quais a variável aparece no expoente e que modelam crescimentos e decrescimentos rápidos, como em fenômenos populacionais ou financeiros. Já as funções periódicas, destacam-se as trigonométricas, como seno e cosseno, que se repetem em intervalos regulares e são amplamente utilizadas na modelagem de movimentos oscilatórios, como ondas e vibrações. Portanto, compreender esses tipos de funções é essencial para interpretar e representar diferentes situações do mundo real por meio da linguagem matemática e é uma base necessária e importante para a introdução de derivadas na Educação Básica com ênfase em problemas de otimização.

Para deixar mais detalhada a importância desse estudo, traremos uma subseção de cada grupo de funções, com alguns problemas de otimização que serão trabalhados na turma da 2ª série da ECIT Irmã Stefanie, em que o projeto será aplicado.

2.1.3 Funções polinomiais

O primeiro grupo de funções detalhadas aqui será o mais estudado em nosso trabalho, que é o das funções polinomiais. Nesse grupo, daremos ênfase às funções que mais nos oferecem problemas de otimização no Ensino Médio, que são as funções constante, afim (do 1º grau) e quadrática (do 2º grau). Inicialmente, definimos o que é uma função polinomial.

Definição 2.5. $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que a função p tem grau n .

Partindo dessa definição, analisamos os casos em que $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$.

2.1.3.1 Função afim

Definição 2.6. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *função afim* quando existem números a e b tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Exemplo 2.6. As funções a seguir são funções afim.

- $f(x) = x + 1$ ($a = 1$ $b = 1$)

- $f(x) = -2x + 4$ ($a = -2$ $b = 4$)
- $f(x) = \frac{1}{5}x - 3$ ($a = \frac{1}{5}$ $b = -3$)

Exemplo 2.7. A turma da 2ª série da ECIT Irmã Stefanie está organizando a festa de formatura e precisa arrecadar dinheiro para cobrir os custos do evento. Eles decidiram vender camisetas personalizadas da turma por R\$ 30,00 cada. O custo fixo da confecção das camisetas é de R\$ 500,00, referente à arte, logística e taxas iniciais, mais R\$ 15,00 por camiseta produzida.

- (a) Monte a função que representa o lucro $L(x)$ obtido pela turma em função do número x de camisetas vendidas.

Vamos calcular a função do lucro, que é dada por:

$$\text{Lucro} = \text{Receita} - \text{Custo}.$$

A receita é quanto entra de dinheiro com a venda das camisetas, ou seja,

$$R(x) = 30x \quad (\text{R\$ } 30,00 \text{ por camiseta vendida}).$$

O custo é composto por:

- Um custo fixo de R\$ 500,00;
- Um custo variável de R\$ 15,00 por camiseta;

$$C(x) = 500 + 15x.$$

Então, o lucro será:

$$L(x) = R(x) - C(x) = 30x - (500 + 15x)$$

$$\Rightarrow L(x) = 30x - 500 - 15x.$$

Portanto, a função do lucro é

$$L(x) = 15x - 500.$$

- (b) Qual será o lucro se forem vendidas 100 camisetas?

Substituímos $x = 100$ na função:

$$L(100) = 15 \cdot 100 - 500 = 1500 - 500 = \text{R\$}1000,00.$$

(c) Quantas camisetas precisam ser vendidas para que a turma comece a ter lucro?

Para saber quando o lucro começa (ou seja, quando $L(x) > 0$), basta resolver:

$$15x - 500 > 0 \Leftrightarrow 15x > 500 \Leftrightarrow x > \frac{500}{15} \Leftrightarrow x > 33,\bar{3}.$$

Logo, para obter lucro, a venda deve ser de 34 camisetas ou mais.

Separamos as funções afim em alguns casos particulares, veja-os a seguir:

1º) Função Identidade

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, $a = 1$ e $b = 0$.

2º) Função Linear

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, $b = 0$.

3º) Função Constante

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, $a = 0$.

Outro elemento importante da função afim é a taxa de variação, que é representada pelo parâmetro a da função afim $f(x) = ax + b$. Para obtê-lo, bastam dois pontos quaisquer, porém distintos, $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, da função considerada.

Assim, $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, de onde obtemos que $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$ e, portanto,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

com $x_1 \neq x_2$.

A taxa de variação a é sempre constante para cada função afim, e isso é uma característica importante das funções afins. Por exemplo, a taxa de variação da função afim $f(x) = 5x + 2$ é 5 e a da função $g(x) = -2x + 3$ é -2 .

2.1.3.2 Função quadrática

Quando lidamos com situações do cotidiano que envolvem decisões estratégicas, como, por exemplo, determinar o melhor valor de ingresso para maximizar o lucro em um evento cultural e escolar, é fundamental aplicar alguns conhecimentos matemáticos que permitam analisar o comportamento de variáveis e encontrar as melhores soluções.

Em problemas desse tipo, a função quadrática se mostra uma ferramenta poderosa, pois permite modelar relações entre variáveis como preço e lucro, quantidade e custo, entre outras. Ao

construir uma equação do segundo grau que represente a arrecadação total em função do preço do ingresso, por exemplo, podemos determinar o valor máximo arrecadado ou a quantidade máxima de ingressos vendidos. Mas para que consigamos utilizar essas ferramentas de maneira clara e objetiva, precisamos conhecer algumas definições e características importantes da função quadrática.

Definição 2.7. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c , com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Essa função é dita função polinomial do 2º grau, pois o maior expoente numa variável é 2. Esse tipo de função é o que mais será trabalhado nesse processo, pois muitos problemas de otimização trabalhados na educação básica, de acordo com os livros didáticos de matemática, resultam em uma função quadrática. Assim, trabalharemos problemas que envolvem ciências naturais, como fenômenos físicos, esportistas, químicos, biológicos e outros.

A partir da definição, poderemos analisar alguns tópicos essenciais da função quadrática, como: zeros da função, vértice da parábola e concavidade. Esses conceitos são fundamentais para compreender a ideia de máximos e mínimos e, assim, facilitar a resolução de problemas de otimização, objeto da presente pesquisa.

- **Concavidade:**

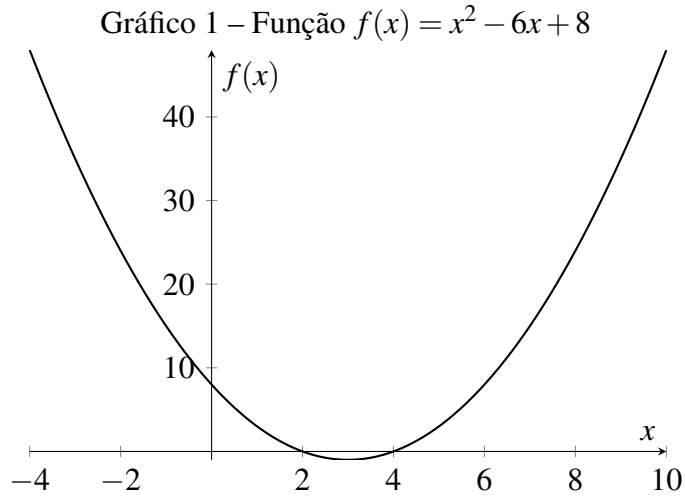
O gráfico de uma função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, e para essa verificação usa-se a equação geral dessa figura, representada por $y - y_0 = a(x - x_0)^2$. Observe que a função quadrática é $y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, assim,

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &\Leftrightarrow y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \Leftrightarrow y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c \\ &\Leftrightarrow y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) \Leftrightarrow y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \\ &\Leftrightarrow y - y_0 = a(x - x_0)^2, \end{aligned}$$

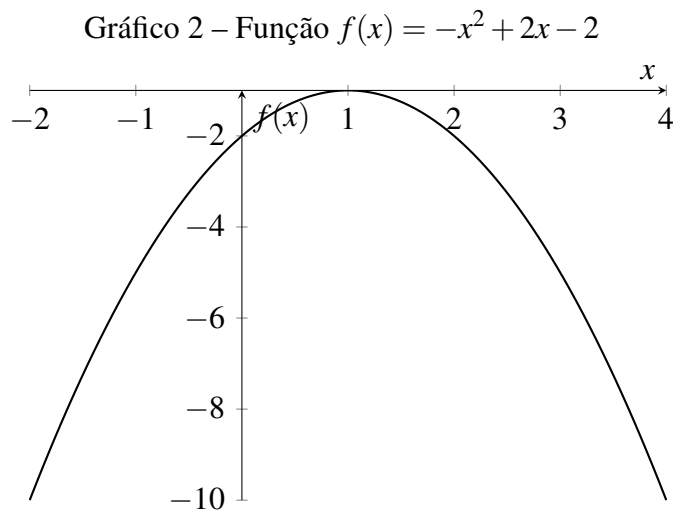
com $x_0 = -\frac{b}{2a}$ e $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Portanto, ela pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo, e o que definirá essa posição é o valor do coeficiente a , isto é, se $a > 0$, a parábola é côncava para cima e possuirá um mínimo global; se $a < 0$, a parábola é côncava para baixo e existirá um máximo global. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.8. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 6x + 8$; o gráfico é uma parábola, com concavidade voltada para cima, pois $a = 1 > 0$.



Exemplo 2.9. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + 2x - 2$; o gráfico é uma parábola, com concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$.



Nos exemplos 2.8 e 2.9, vemos dois casos simples de como o coeficiente a pode influenciar na concavidade da parábola.

- **Zeros da função:**

O zero de uma função é o valor de x que anula a função, ou seja, o valor de x para o qual $f(x) = 0$. Logo, para determinar os zeros de uma função quadrática, devemos resolver uma

equação do segundo grau, isto é, os zeros da função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Agora, vamos explorar a maneira mais utilizada para resolver esse tipo de equação, que é chamada de Fórmula de *Bhaskara*, vejamos como obtê-la:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c.$$

Dividindo a equação por a , visto que $a \neq 0$, obtemos

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}.$$

Queremos aqui achar um quadrado perfeito; para isso, precisamos somar em ambos os lados da equação $\frac{b^2}{4a^2}$, ficando

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2},$$

que é equivalente a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Organizando o membro direito, obtemos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}.$$

Ou seja,

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}.$$

Assim, o valor de x será

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

se $x + \frac{b}{2a} > 0$, ou

$$x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

se $x + \frac{b}{2a} < 0$. Reunindo as duas expressões acima em uma única forma, obtemos uma expressão conhecida como *Fórmula de Bhaskara*.

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

E esses dois valores de x , caso estejam bem definidos em \mathbb{R} , serão exatamente os pontos em que o gráfico cruzará o eixo x , também conhecido como eixo das abscissas. Logo, podemos

identificar se o gráfico toca ou não o eixo x e, em caso afirmativo, quantas vezes toca, analisando apenas o sinal do discriminante que chamamos de $\Delta = b^2 - 4ac$. Esse valor é a expressão que aparece dentro da raiz quadrada na “Fórmula de Bháskara”, assim, pela definição de raiz quadrada em \mathbb{R} , podemos concluir que, se $\Delta > 0$, o gráfico cruza o eixo x duas vezes distintas, pois a raiz quadrada será positiva; se $\Delta = 0$, cruza apenas em um ponto, pois a raiz quadrada é zero; e, se $\Delta < 0$, o gráfico não cruza o eixo x , pois a raiz quadrada de números negativos não está definida em \mathbb{R} .

• Vértice da parábola

Aqui, estudaremos o vértice da parábola, que é essencial para a resolução de problemas de otimização, pois ele representa o ponto exato onde a função quadrática atinge seu valor máximo ou mínimo, e isso depende do coeficiente a , como foi visto no tópico de concavidade: se $a > 0$, teremos um mínimo e, se $a < 0$, teremos um máximo. Em situações práticas, como maximizar lucros, minimizar custos ou determinar trajetórias ideais, a identificação do vértice permite encontrar a solução ótima com precisão. Por exemplo, em um modelo que relaciona lucro com quantidade produzida, o vértice indica a produção ideal para obter o maior retorno. Assim, compreender e calcular corretamente o vértice é uma ferramenta poderosa na resolução de problemas que envolvem decisões eficientes e resultados ideais.

O estudo das derivadas é um ponto crucial para resolver esse tipo de problema, pois traz ferramentas mais eficientes e isso fortalece o repertório matemático de um estudante da educação básica, mostrando a ele que esse tipo de conteúdo não está restrito a fórmulas. Na educação básica, para encontrar a “fórmula” para esses pontos máximos ou mínimos, acham-se os zeros da função, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Posteriormente, encontramos seu ponto médio:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Fazendo alguns cálculos, obtemos:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{4a}.$$

Logo,

$$x_m = \frac{-b}{2a}.$$

Para encontrar o valor de y , também chamado de ordenada, substituímos o valor de x_m na função quadrática:

$$y_m = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c.$$

Ou seja,

$$y_m = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}.$$

Portanto,

$$y_m = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Assim, obtemos duas fórmulas para achar as coordenadas do vértice de uma parábola que denotaremos por V , representado no gráfico da função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, por $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

2.1.4 Função exponencial e logarítmica

Estudar a função exponencial é fundamental porque ela está presente em diversos fenômenos naturais e situações do cotidiano, como o crescimento populacional, o decaimento radioativo, a propagação de vírus e o funcionamento dos juros compostos na economia. Logo, compreender esse tipo de função permite uma análise e previsão de comportamentos que envolvam crescimento ou decrescimento acelerado, sendo uma ferramenta essencial em áreas como a matemática, a biologia, a física, a economia e a engenharia. Assim, dominar os conceitos da função exponencial amplia a capacidade de interpretar dados e resolver problemas reais de otimização com maior precisão. Assim, a seguir veremos algumas definições e propriedades que ajudarão na resolução desses problemas.

Definição 2.8. Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base a uma função f de \mathbb{R} em \mathbb{R}_+^* definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.

Exemplo 2.10. As funções a seguir são exponenciais.

(a) $f(x) = 3^x$

(b) $f(x) = (0,4)^x$

(c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

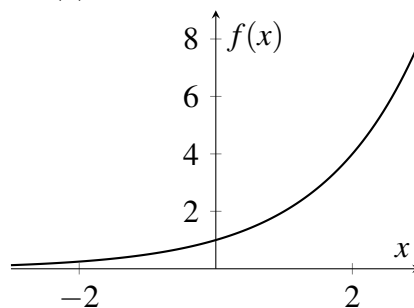
Observação 2.1. As restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ dadas na definição são necessárias, pois:

- Para $a = 0$ e x negativo, não existiria a^x . (Não teríamos uma função definida em \mathbb{R} , pois quando o expoente de uma potência é negativo, usamos a fração inversa e assim teríamos $\frac{1}{0}$, que não é definido.)
- Para $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, não haveria a^x . (não teríamos uma função definida em \mathbb{R} , pois o valor de a seria negativo, e o expoente $\frac{1}{2}$ torna a potência numa raiz quadrada de radicando negativo, que não tem resposta em \mathbb{R}).
- Para $a = 1$ e x qualquer número real, $a^x = 1$ (a função seria constante e igual a 1).

O gráfico de uma função exponencial obedece um padrão específico, ou cresce rapidamente ou decresce rapidamente, e o que vai definir o crescimento e decrescimento da função é determinado pelo valor de a . Vejamos os casos:

- Se $a > 1$, a função é crescente.

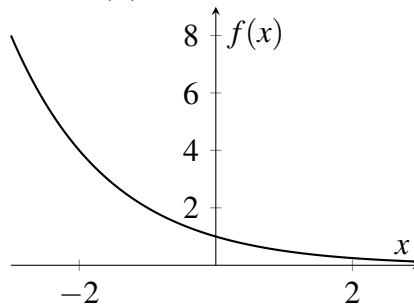
Gráfico 3 – Função $f(x) = 2^x$, ou seja, função exponencial crescente



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

- Se $0 < a < 1$, a função é decrescente.

Gráfico 4 – Função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, ou seja, função exponencial decrescente



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Além disso, as funções exponenciais têm muitas aplicações em problemas de otimização, e para fazer tais aplicações sem a ferramenta das derivadas pode ser bem mais trabalhoso, como vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.11. Uma colônia de bactérias cresce em um ambiente ideal, dobrando sua quantidade a cada 3 horas. A população de bactérias é dada pela função:

$$P(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t}{3}}.$$

Nessa função temos:

- $P(t)$ representa a população de bactérias após t horas,
- 500 representa a população inicial,
- a base 2 indica a duplicação da população,
- o expoente $\frac{t}{3}$ indica que o dobro ocorre a cada 3 horas.

Sabendo que o recipiente suporta no máximo 8.000 bactérias, em quanto tempo a população atingirá a capacidade máxima do recipiente?

Solução: Queremos resolver $P(t) = 8.000$:

$$8.000 = 500 \cdot 2^{\frac{t}{3}}.$$

Dividindo ambos os lados por 500:

$$16 = 2^{\frac{t}{3}}.$$

Sabemos que $2^4 = 16$, então:

$$\frac{t}{3} = 4 \quad \Rightarrow \quad t = 12 \text{ horas.}$$

Se o recipiente deve conter no máximo 8.000 bactérias após exatamente 9 horas, qual deveria ser a base da função exponencial?

Solução: Queremos que $P(9) = 8.000$, com $P(t) = 500 \cdot b^t$. Substituindo na expressão inicial temos:

$$8.000 = 500 \cdot b^9.$$

Dividindo por 500 nos dois membros da equação:

$$16 = b^9.$$

Tirando a raiz 9ª de ambos os lados:

$$b = \sqrt[9]{16}.$$

Este problema deixa clara a aplicação de funções exponenciais em problemas de otimização, além de trazer esse conteúdo para a realidade do estudante, utilizando-se da etnomatemática como estratégia de ensino e aprendizagem, ou seja, explora a Matemática e seu uso dentro de uma perspectiva cultural e social, à qual pertence a comunidade escolar, alvo do projeto.

Para podermos resolver alguns problemas que envolvam funções exponenciais, precisaremos trazer algumas discussões, definições e propriedades dos logaritmos, que é uma operação matemática que serve para determinar qual expoente foi aplicado a uma base para se obter um determinado valor. Em outras palavras, ele representa o número de vezes que uma base precisa ser multiplicada por ela mesma para alcançar um certo resultado. O logaritmo surge naturalmente em contextos nos quais é necessário quantificar escalas, resolver equações exponenciais ou compreender relações de proporcionalidade em larga escala. Logo, podemos definir logaritmo da seguinte forma:

Definição 2.9 (Logaritmo). Dados os números reais positivos a e b , com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de b na base a , ou seja:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

com a e b positivos e $a \neq 1$.

Assim, nessa equivalência temos duas formas de escrita: a forma logarítmica e a forma exponencial. A **forma logarítmica**: $\log_a b = c$ nos diz que c é o logaritmo, a é a base e b é o logaritmando. Já na **forma exponencial**: $b = a^c$, temos a sendo a base da potência, b é a potência e c é o expoente. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.12. (a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

$$(b) \log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 32$$

$$(c) \log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{5}^2 = 5$$

Observação 2.2. 1. Veja que, de acordo com as restrições impostas, não são definidos, por exemplo: $\log_3 -81$ (não existe expoente para usar no 3 e ele ficar negativo), $\log_{10} 0$ (10 elevado a qualquer número será diferente de zero), $\log_0 3$ (0 elevado a qualquer número

é 0), e $\log_1 6$ (1 elevado a qualquer número é 1). Portanto, quando aplicamos a definição nesses casos, teremos alguns problemas.

2. Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la. Assim, $\log 2$ é o logaritmo de 2 na base 10. Aos logaritmos na base 10 damos o nome de logaritmos decimais ou de Briggs.

Para garantir a existência de um logaritmo, como, por exemplo, $\log_a N$, devemos obedecer duas condições básicas: a primeira é que N deve ser um número positivo, e a segunda é que a base deve ser um número positivo e diferente de 1, ou seja, $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Logo, com a definição e as condições de existência, temos algumas consequências imediatas, são elas:

- 1^a) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.
- 2^a) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$, para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.
- 3^a) $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.
- 4^a) $a^{\log_a N} = N$, com $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.
- 5^a) se $\log_a x = \log_a y$ então $x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Vejamos as propriedades dos logaritmos:

1^a propriedade: logaritmo de um produto

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N.$$

Demonstração: Se considerarmos $\log_a (M \cdot N) = p$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$. Pela definição de logaritmos, essas igualdades são equivalentes, respectivamente, a: $a^p = M \cdot N$; $a^m = M$ e $a^n = N$. Assim, $a^p = M \cdot N = a^m \cdot a^n$, usando as propriedades de potências estudadas no Ensino Fundamental, temos $a^p = a^{m+n}$. Portanto, $p = m + n$ e, conseqüentemente $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$, como queríamos demonstrar.

2^a propriedade: logaritmo de um quociente

$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N.$$

Demonstração: Se considerarmos $\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = q$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$. Pela definição de logaritmos, essas igualdades são equivalentes, respectivamente, a: $a^q = \frac{M}{N}$; $a^m = M$ e

$a^n = N$. Assim, $a^q = \frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n}$, usando as propriedades de potências estudadas no Ensino Fundamental, temos $a^q = a^{m-n}$. Portanto, $q = m - n$ e, conseqüentemente $\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$, como queríamos demonstrar.

3ª propriedade: logaritmo de uma potência

$$\log_a M^N = N \cdot \log_a M.$$

Demonstração: Consideremos $\log_a M^N = r$ e $\log_a M = m$. Pela definição de logaritmos, essas igualdades são equivalentes, respectivamente, a: $a^r = M^N$ e $a^m = M$. Assim, $a^r = M^N = (a^m)^N$, usando as propriedades de potências estudadas no Ensino Fundamental, temos $a^r = a^{mN}$. Portanto, $r = mN$ e, conseqüentemente, $\log_a M^N = N \log_a M$, como queríamos demonstrar.

4ª propriedade: mudança de base

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Demonstração: Consideremos $\log_b N = p$, $\log_a N = q$ e $\log_a b = r$; teremos, respectivamente, $b^p = N$, $a^q = N$ e $a^r = b$. O que implica $a^q = b^p = (a^r)^p = a^{rp}$, assim, $q = rp$, conseqüentemente, $p = \frac{q}{r}$. Portanto, $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$.

Com esse repertório de propriedades, podemos resolver problemas mais complexos de função exponencial.

Exemplo 2.13. Sabemos que o número de bactérias numa cultura, depois de um tempo t , é dado por $N = N_0 \cdot e^{rt}$, em que N_0 é o número inicial (quando $t = 0$) e r é a taxa de crescimento relativo. Em quanto tempo o número de bactérias dobrará se a taxa de crescimento contínuo é de 5% ao minuto?

Pelos dados coletados na questão, queremos achar o tempo em que $N = 2N_0$, quando $r = 0,05$. Assim, teremos:

$$N = N_0 \cdot e^{rt} \Leftrightarrow 2N_0 = N_0 \cdot e^{0,05t} \Leftrightarrow 2 = e^{0,05t} \Leftrightarrow \ln 2 = \ln e^{0,05t} \Leftrightarrow \ln 2 = 0,05t \ln e \Leftrightarrow \ln 2 = 0,05t.$$

Logo,

$$t = \frac{\ln 2}{0,05},$$

usando uma calculadora para achar $\ln 2$, obtemos $\ln 2 = 0,6931$, e portanto,

$$t = \frac{0,6931}{0,05} = 13,8 \text{ min},$$

diante do exposto, o tempo necessário é de 13 minutos e 48 segundos.

Oservação 2.3. \ln é conhecido como logaritmo natural, isto é, logaritmo de base e .

Após compreender o que é um logaritmo e explorar suas propriedades fundamentais, podemos agora introduzir a **função logarítmica**. Essa função é definida a partir da definição de logaritmo, associando a cada número real positivo x , isto é, o valor do logaritmo de x em uma determinada base a , com $a > 0$ e $a \neq 1$. Assim, a função logarítmica é expressa por $f(x) = \log_a x$. Essa função tem domínio nos reais positivos e desempenha um papel importante na modelagem de fenômenos que envolvem crescimento e decrescimento, inversamente relacionados a funções exponenciais.

Definição 2.10 (Função logarítmica). Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Define-se a função logarítmica de base a como a função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \log_a x,$$

ou seja, f associa a cada número real positivo x o expoente ao qual a base a deve ser elevada para resultar em x .

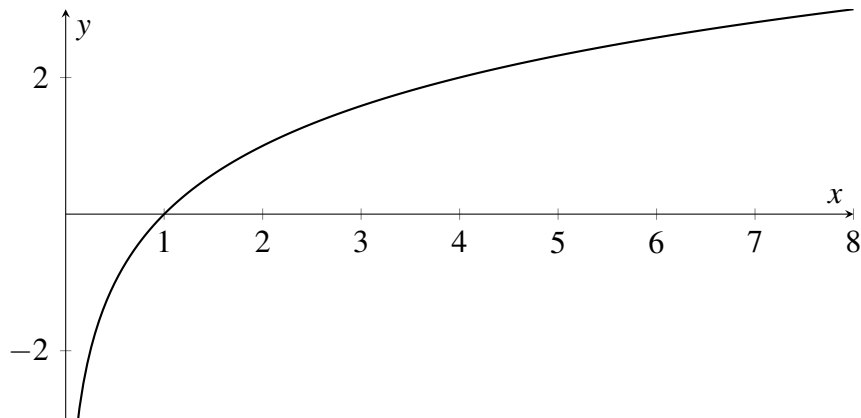
Vejamos os gráficos de uma função logarítmica.

- Se $a > 1$, a função é **crecente**.
- Se $0 < a < 1$, a função é **decrescente**.

Nos dois casos, a imagem da função é \mathbb{R} , e o gráfico passa pelo ponto $(1, 0)$, pois $\log_a 1 = 0$ para qualquer base válida.

Função logarítmica crescente ($a = 2$)

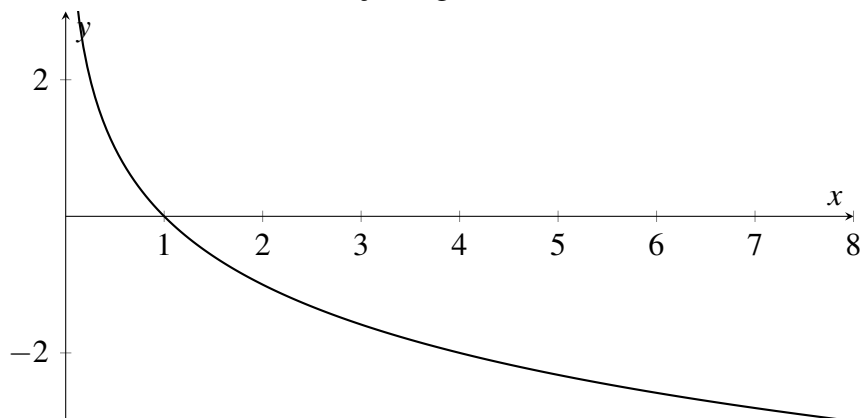
Gráfico 5 – Função logarítmica crescente



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Função logarítmica decrescente ($a = \frac{1}{2}$)

Gráfico 6 – Função logarítmica decrescente



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

2.1.5 Funções periódicas

Um grupo de funções importantes, quando se estudam problemas de otimização, é o grupo das funções trigonométricas, e para entendermos todas elas, devemos compreender o que é uma função periódica.

Definição 2.11. Uma função $f : A \rightarrow B$ é periódica se existir um número p satisfazendo a condição

$$f(x + p) = f(x), \quad \forall x \in A.$$

O menor valor de p que satisfaz a condição acima é chamado período de f .

O gráfico da função periódica se caracteriza por apresentar um elemento de curva que se repete, isto é, se quisermos desenhar toda a curva, bastará perceber um padrão. O período é

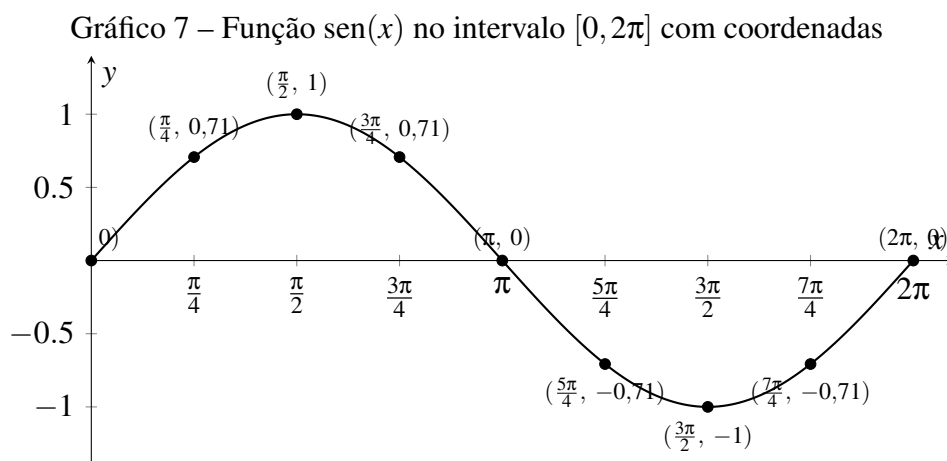
o comprimento desse padrão (medido no eixo dos x). Esse tipo de função é muito presente no cotidiano, como nas marés, e outros diversos fenômenos naturais cujo comportamento se repete com o tempo: movimento dos planetas, ondas sonoras, pressão sanguínea no coração, fases da Lua, ciclos menstruais, entre outros. Fenômenos com essa característica são denominados fenômenos periódicos e podem ser modelados por funções periódicas.

2.1.5.1 Função seno

Em anos iniciais do Ensino Médio, estuda-se a forma de associar números reais a pontos do ciclo trigonométrico e, a partir desse estudo, como determinar o seno de um número real. Agora, vamos estudar a **função seno**, que associa um número real x qualquer ao número real correspondente ao seno de x . Por exemplo, associamos pela função seno o número real $\frac{\pi}{6}$ ao número real $\frac{1}{2}$, pois $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Definição 2.12. Denominamos **função seno** a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei de formação $f(x) = \text{sen } x$.

Para esboçar o gráfico da função seno, vamos atribuir alguns valores arbitrários para x e determinar $f(x) = y$, obtendo pares ordenados (x, y) . Como $D(f) = \mathbb{R}$, é possível obter infinitos pares ordenados (x, y) correspondentes a pontos do gráfico de f . Assim, considerando os valores que atribuímos para x , obtemos parte do gráfico de f definida no intervalo $[0, 2\pi]$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Logo, podemos destacar algumas características da função seno dada por $f(x) = \text{sen } x$:

- o domínio e o contradomínio de f são iguais a \mathbb{R} ;

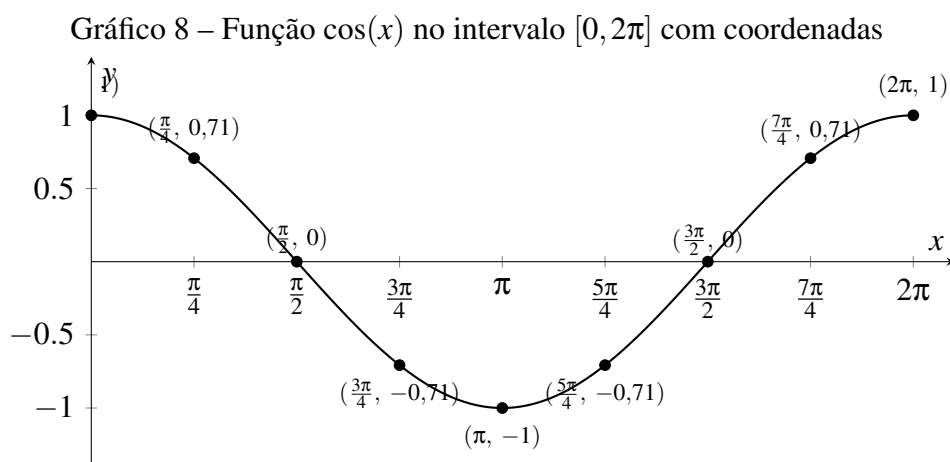
- o conjunto imagem de f é $[-1, 1]$. Assim, o menor e o maior valor que f pode assumir são -1 e 1 , respectivamente, e a amplitude de f é 2 , que corresponde à diferença entre o maior e o menor valor que f pode assumir $[1 - (-1) = 2]$;
- f é periódica e tem período igual a 2π , pois $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$;
- f é crescente para $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ e decrescente para $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, em que $k \in \mathbb{Z}$;
- $f(x) = 0$ para $x = k\pi$, $f(x) > 0$ para $x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[$ e $f(x) < 0$ para $x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

2.1.5.2 Função cosseno

Assim como ocorre com o seno, também podemos associar um número real x qualquer ao número real correspondente ao cosseno de x , de maneira a estabelecer a função cosseno. Por exemplo, associamos, por meio dessa função, o número real $\frac{\pi}{2}$ ao número real 0 , pois $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Definição 2.13. Denominamos função cosseno a função $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei de formação $f(x) = \cos x$.

Realizando os mesmos procedimentos utilizados para esboçar o gráfico da função seno, obtemos parte do gráfico da função dada por $f(x) = \cos x$, definida no intervalo $[0, 2\pi]$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Podemos destacar algumas características da função $f(x) = \cos x$:

- o domínio e o contradomínio de f são iguais a \mathbb{R} ;

- o conjunto imagem de f é $[-1, 1]$. Assim, o menor e o maior valor que f pode assumir são -1 e 1 , respectivamente, e a amplitude de f é 2 , que corresponde à diferença entre o maior e o menor valor que f pode assumir $[1 - (-1) = 2]$;
- f é periódica e tem período igual a 2π .
- f é crescente para $x \in [-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ e decrescente para $x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, em que $k \in \mathbb{Z}$;
- $f(x) = 0$ para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $f(x) > 0$ para $x \in \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$ e $f(x) < 0$ para $x \in \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

Para concluir este capítulo sobre o estudo de funções, é fundamental refletirmos sobre como tais conceitos se conectam ao cotidiano e ao desenvolvimento do raciocínio matemático no Ensino Médio. Aqui, fechamos a discussão sobre como a ideia de função, apesar de parecer abstrata num primeiro momento, está presente em diversas situações que envolvem relações entre variáveis, como o tempo e a distância, o preço e a quantidade, ou a altura e a área de alguma figura plana. Logo, compreender o que é uma função, seu domínio, imagem e contradomínio é o primeiro passo para que os estudantes do Ensino Médio consigam interpretar e modelar situações reais de maneira lógica, independente e estruturada.

Os diferentes grupos de funções exploradas aqui, como polinomiais, exponenciais e periódicas, oferecem ferramentas muito poderosas e importantes para a resolução de problemas. A função afim e a função quadrática, por exemplo, são fundamentais para introduzir noções de crescimento, decrescimento, máximos e mínimos. Essas ideias são a porta de entrada para o estudo de problemas de otimização, que ajudam os estudantes a responder perguntas como: qual é a melhor forma de distribuir um recurso? Qual o maior lucro possível? Qual o menor custo? Tais questões não são apenas matemáticas, mas fazem parte de decisões do dia a dia, o que dá muito mais sentido ao aprendizado.

Portanto, finalizamos este capítulo, fazendo com que os estudantes não apenas reconheçam as funções como objetos matemáticos, mas também percebam seu valor como ferramentas para resolver problemas cotidianos. Com essa base bem estruturada e entendida, eles estarão mais preparados para enfrentar desafios mais complexos, tanto na matemática quanto na vida prática, desenvolvendo uma postura crítica, criativa e investigativa diante das situações que envolvem análise e tomada de decisão.

2.2 Uma introdução ao limite de função

Neste capítulo, introduzimos limite de uma função, de uma forma mais detalhada e clara para estudantes de Ensino Básico. Usamos todos os conceitos de funções estudados, bem como discutimos a importância de seu estudo para o entendimento de continuidade de função. Aqui, passeamos pelos conceitos intuitivos, definição formal, propriedades e aplicações, além de alguns teoremas fundamentais para o estudo do cálculo e para os problemas de otimização.

Antes de mergulharmos na ideia intuitiva de limite, é importante entender que esse conceito surge da necessidade de analisar o comportamento de funções em pontos onde elas podem não estar definidas diretamente, ou onde o valor exato é difícil de determinar. O limite nos permite “prever” ou “aproximar” o valor que a função tende a assumir à medida que nos aproximamos de um ponto específico, tornando-se uma ferramenta fundamental para compreender o funcionamento das funções e preparar o terreno para conceitos mais avançados como continuidade, derivada e otimização. Para entendermos esse conceito de limite de uma forma mais clara e didática, começaremos analisando uma função específica.

2.2.1 Noção intuitiva de limite função

Consideremos a função

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}.$$

Definida para todo x real e $x \neq 1$. Quando $x \neq 1$, podemos verificar que a função pode ser reduzida, ou simplificada, para $f(x) = 2x + 1$. Mas nosso objetivo aqui é analisar todos os valores da função quando os valores de x se aproximam do número 1. Observemos as seguintes tabelas, em que a primeira é composta por valores menores do que 1 e próximos dele, e a segunda por valores maiores do que 1.

Quadro 2 – Valores de x menores que 1

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
$f(x)$	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Quadro 3 – Valores de x maiores que 1

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Observemos em ambas as tabelas que, quando x se aproxima cada vez mais de 1, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 3, isto é, quanto mais próximo de 1 estiver o x , mais próximo de 3 estará $f(x)$.

Notemos na primeira tabela que:

Tabela 1 – Aproximação de $f(x)$ para $x \rightarrow 1^-$

• Valor de x e $f(x)$	Implicações
$x = 0,9, f(x) = 2,8$	$x - 1 = -0,1 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,2$
$x = 0,99, f(x) = 2,98$	$x - 1 = -0,01 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,02$
$x = 0,999, f(x) = 2,998$	$x - 1 = -0,001 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,002$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

A segunda tabela nos mostra que:

Tabela 2 – Aproximação de $f(x)$ para $x \rightarrow 1^+$

• Valor de x e $f(x)$	Implicações
$x = 1,1, f(x) = 3,2$	$x - 1 = 0,1 \Rightarrow f(x) - 3 = 0,2$
$x = 1,01, f(x) = 3,02$	$x - 1 = 0,01 \Rightarrow f(x) - 3 = 0,02$
$x = 1,001, f(x) = 3,002$	$x - 1 = 0,001 \Rightarrow f(x) - 3 = 0,002$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Portanto, pelas duas tabelas vemos que:

Tabela 3 – Tabela de aproximações usando valor absoluto

$ x - 1 = 0,1$	\Rightarrow	$ f(x) - 3 = 0,2$
$ x - 1 = 0,01$	\Rightarrow	$ f(x) - 3 = 0,02$
$ x - 1 = 0,001$	\Rightarrow	$ f(x) - 3 = 0,002$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Podemos perceber que, ao escolher valores de x cada vez mais próximos de 1, os valores correspondentes de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de 3. Isso significa que conseguimos fazer $f(x)$ ficar tão próximo de 3 quanto quisermos, desde que escolhamos x suficientemente perto de 1. Em termos matemáticos, isso quer dizer que o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e 3, ou seja, $|f(x) - 3|$, pode ser tornado arbitrariamente pequeno, contanto que o valor absoluto da diferença entre x e 1, isto é, $|x - 1|$, também seja pequeno o bastante. Essa relação entre a proximidade de x em relação a 1 e a proximidade de $f(x)$ em relação a 3 é a base intuitiva do conceito de limite.

Essa forma de discutir a ideia de limite de uma função é bem intuitiva e não tem uma linguagem matemática, pois ao dizermos “ $|f(x) - 3|$ tão pequeno quanto desejarmos” e “ $|x - 1|$ suficientemente pequeno”, não sabemos quantificar essas diferenças tão pequenas, ou quais são esses valores. Assim, para indicar essas diferenças pequenas, usaremos símbolos matemáticos, como ε (epsilon) e δ (delta). Dessa forma, se eu quiser que $|f(x) - 3|$ seja menor que um certo número positivo ε , preciso escolher $|x - 1|$ bem pequeno. Ou seja, tenho que encontrar um número positivo δ , pequeno o suficiente, que garanta essa aproximação.

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

A condição $0 < |x - 1|$ significa que estamos considerando valores de x que estão próximos de 1, mas **diferentes** de 1. Em outras palavras, isso é equivalente a dizer que $x \neq 1$, pois o nosso interesse é analisar o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de 1, sem que x seja exatamente igual a 1. É importante perceber que δ depende do ε considerado. Analisando a tabela 5, se for dado $\varepsilon = 0,2$, tomamos $\delta = 0,1$; se for dado $\varepsilon = 0,02$, tomamos $\delta = 0,01$. De maneira geral, fica evidente que, para ε dado, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Dessa forma, para qualquer valor positivo ε , podemos encontrar um valor apropriado para δ tal que:

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

Dizemos que o limite de $f(x)$, para x tendendo a 1, é 3. Em símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3.$$

Com base nisso, podemos definir formalmente a ideia de limite de uma função.

Definição 2.14. Seja f uma função definida em um intervalo aberto que contém o ponto a , exceto talvez no próprio ponto a . Dizemos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que, sempre que $0 < |x - a| < \delta$, temos:

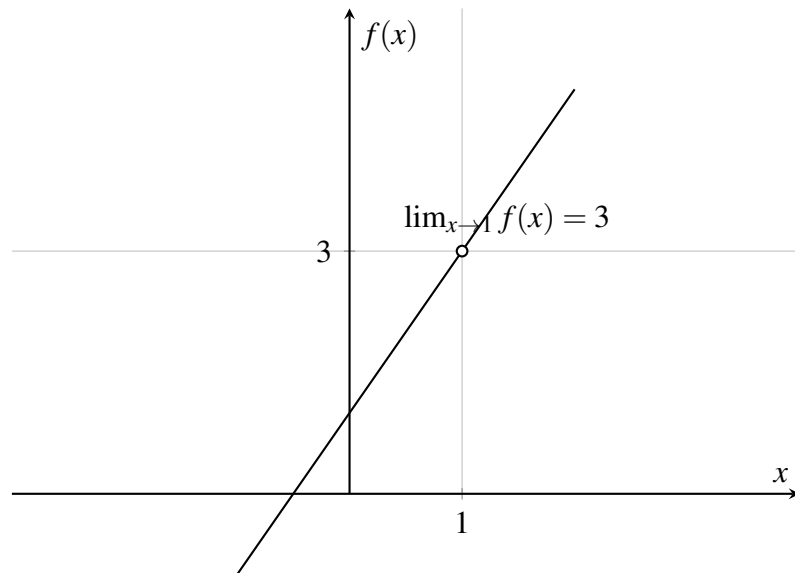
$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Usando uma simbologia matemática, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

É possível observar a ideia de limite por meio dos gráficos da função. Observemos a situação da função $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$.

Gráfico 9 – Função $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ com destaque para $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



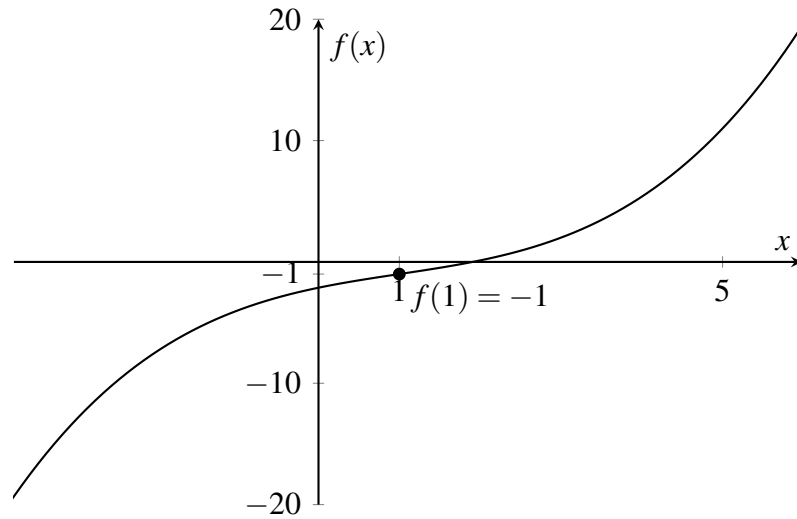
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Observando o gráfico da figura 9, quando o valor de x se aproxima de 1, seja pela direita (números maiores que 1) ou pela esquerda (números menores que 1), a função se aproxima de 3, e isso acontece pelo fato de, mesmo a função não estar definida nesse ponto, existir o limite nele.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.14. Considere a função $f(x) = \frac{(x-1)^3}{8} + x - 2$. Calculemos seu limite observando apenas o seu gráfico.

Gráfico 10 – Função $f(x) = \frac{(x-1)^3}{8} + x - 2$ com destaque em $x = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Intuitivamente, quando x se aproxima de 1, o valor da função se aproxima de -1 , tanto pela direita quanto pela esquerda. Assim, dizemos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$.

É importante destacar que o limite é único; vejamos o teorema:

Teorema 2.1.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Demonstração. Sejam L_1 e L_2 limites de f no ponto a , ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$. Queremos provar que $L_1 = L_2$. Dessa forma, consideremos $\Delta = |L_1 - L_2|$. Como L_1 é limite, então existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo x ,

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\Delta}{2}.$$

Analogamente, existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo x

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\Delta}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta &= |L_1 - L_2| \\ &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &= |-(f(x) - L_1) + (f(x) - L_2)| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \\ &< \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{2} = \Delta. \end{aligned}$$

Ou seja, temos $\Delta < \Delta$, o que gera uma contradição. Pois, como Δ é não negativo, a única forma de termos a existência desse limite é $\Delta = 0$. Portanto, $L_1 = L_2$. \square

2.2.2 Propriedades do limite de uma função

A fim de que não tenhamos que voltar repetidamente à definição de limite para provarmos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, vamos apresentar as propriedades algébricas do limite de uma função.

No que segue, estamos supondo que a é elemento de um intervalo aberto I , e que em $I \setminus \{a\}$ estão definidas as funções f, g, \dots “envolvidas” na propriedade.

1ª propriedade

Se $c \in \mathbb{R}$ e f é a função definida por $f(x) = c$, para todo x real, então $\lim_{x \rightarrow a} c = c$.

2ª propriedade

Se $c \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot L$.

3ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = L + M$.

4ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = L - M$.

5ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = LM$.

6ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} (f)^n(x) = L^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

7ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$.

8ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ com $L \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$ ou $L \in \mathbb{R}$ e n ímpar.

2.2.3 Limite de uma função polinomial

Uma das consequências das propriedades de limites é a regra para obter o limite de uma função polinomial, vejamos:

Teorema 2.2. *O limite de uma função polinomial*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, para x tendendo para a , é igual ao valor numérico de $f(x)$ para $x = a$.

Exemplo 2.15. Aplicando a propriedade do limite de polinômios:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 3(2) - 5 = 6 - 5 = 1.$$

Exemplo 2.16. Aplicando a propriedade do limite de polinômios:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 4x + 1) = (-1)^2 + 4(-1) + 1 = 1 - 4 + 1 = -2.$$

Exemplo 2.17. Usando as propriedades da Soma e do Coeficiente Constante para justificar o resultado:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 + 2x) = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x^2) + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x) = 4 \cdot (3^2) + 2 \cdot (3) = 36 + 6 = 42.$$

Exemplo 2.18. Usando a Propriedade do Produto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(x + 5)(x^3 - 1)] = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 5) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) = (1 + 5) \cdot (1^3 - 1) = 6 \cdot 0 = 0.$$

Exemplo 2.19. Usando a Propriedade do Quociente (já que o limite do denominador é $2(4) + 1 = 9 \neq 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2}{2x + 1} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} x^2}{\lim_{x \rightarrow 4} (2x + 1)} = \frac{4^2}{2(4) + 1} = \frac{16}{9}.$$

2.2.4 Limites laterais

Lembre-se que considerando $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, a análise feita é do comportamento da função nos valores próximos de a , isto é, nos valores de x pertencentes a um intervalo aberto contendo a mas diferentes de a e, portanto, nos valores desse intervalo que são maiores ou menores que a .

Entretanto, o comportamento em algumas funções, quando x está próximo de a , mas assume valores menores que a , é diferente do comportamento da mesma função, quando x está próximo de a , mas assume valores maiores que a .

Vamos considerar agora a função

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \\ x + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Atribuindo a x valores próximos de 2, porém maiores que 2 (à direita de 2), temos:

Tabela 4 – Valores de x maiores que 2

x	3	2,5	2,1	2,01	2,001
$g(x)$	4	3,5	3,1	3,01	3,001

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Para a mesma função, vamos agora atribuir a x valores próximos de 2, porém menores que 2 (à esquerda de 2). Temos:

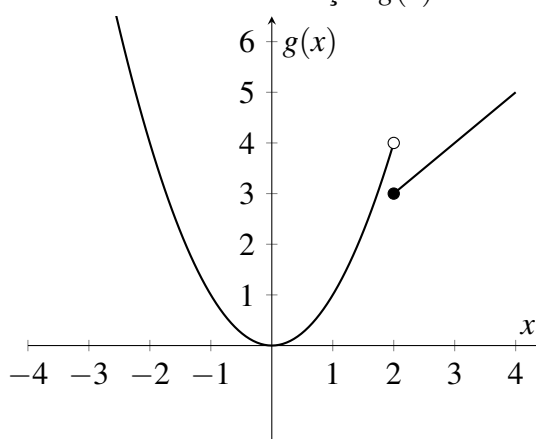
Quadro 4 – Valores de x menores que 2

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999
$g(x)$	1	2,25	3,61	3,9601	3,996001

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Analisando o comportamento da função $g(x)$ nas proximidades de $x = 2$, observamos duas situações distintas baseadas nas tabelas. A primeira é que, se x está próximo de 2, mas **à esquerda** de 2 (ou seja, valores como 1,9; 1,99; 1,999), os valores da função $g(x) = x^2$ estão próximos de 4. E a segunda é que, se x está próximo de 2, mas **à direita** de 2 (ou seja, valores como 2,1; 2,01; 2,001), os valores da função $g(x) = x + 1$ estão próximos de 3.

Gráfico 11 – Função $g(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Casos como este, em que supomos x assumindo valores próximos de 2, mas somente à esquerda ou somente à direita de 2, são chamados de **limites laterais** pela esquerda ou pela direita de 2. A partir dessa ideia definiremos a seguir o que são limites laterais.

Definição 2.15. Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

e dizemos que o **limite à esquerda** de $f(x)$ quando x tende a a [ou o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L , ao restringirmos x a uma região suficientemente pequena em torno de a , com x menor que a .

Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

e dizemos que o **limite à direita** de $f(x)$ quando x tende a a [ou o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L ao restringirmos x a uma região suficientemente pequena em torno de a , com x maior que a .

Todas as propriedades que foram vistas anteriormente e que são válidas para limites também se estendem para os limites laterais. Além disso, dizemos que o limite existe quando os limites laterais existem e são iguais, como mostra o teorema a seguir:

Teorema 2.3. *Seja I um intervalo aberto contendo a e seja f uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Temos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, existirem $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e forem ambos iguais a L .*

Exemplo 2.20. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 4x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solução:

a) Para $x \rightarrow 1^+$ (valores maiores que 1), usamos $f(x) = 3x - 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 2) = 3(1) - 2 = 1.$$

b) Para $x \rightarrow 1^-$ (valores menores que 1), usamos $f(x) = 4x + 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x + 1) = 4(1) + 1 = 5.$$

c) Para o limite bilateral existir, os limites laterais devem ser iguais. Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad (\text{pois } 1 \neq 5).$$

Concluimos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **não existe**.

Exemplo 2.21. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{se } x \geq -1 \\ 4 - x & \text{se } x < -1 \end{cases}.$$

Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Solução:

a) Para $x \rightarrow -1^+$ (valores maiores que -1), usamos $f(x) = 3 - 2x$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3 - 2x) = 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5.$$

b) Para $x \rightarrow -1^-$ (valores menores que -1), usamos $f(x) = 4 - x$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (4 - x) = 4 - (-1) = 4 + 1 = 5.$$

c) Para o limite bilateral existir, os limites laterais devem ser iguais. Como

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 5.$$

Concluimos que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 5$.

2.2.5 Limites especiais

Limites trigonométricos

Estes são limites essenciais envolvendo funções trigonométricas:

$$\lim_{x \rightarrow a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \text{cos}(x) = \text{cos}(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \text{tan}(x) = \text{tan}(a) \quad \forall a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Limites exponenciais

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim_{x \rightarrow b} a^x = a^b$.

Limites das funções logarítmicas

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim_{x \rightarrow b} (\log_a x) = \log_a b$ em que $b > 0$.

2.2.6 Continuidade

Definição 2.16. Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I . Dizemos que f é contínua em a , se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Além disso, uma função f é contínua em um intervalo aberto I se f for contínua em qualquer elemento x desse intervalo.

Notemos que, para falarmos em continuidade de uma função em um ponto, é necessário que esse ponto pertença ao domínio da função. Da definição decorre que, se f é contínua em a , então as três condições a seguir deverão estar satisfeitas:

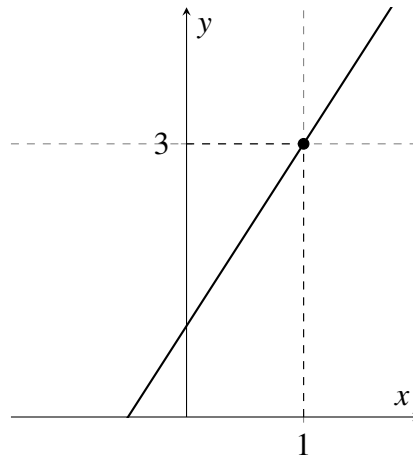
- 1º) existe $f(a)$.
- 2º) existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- 3º) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I . Dizemos que f é descontínua em a se f não for contínua em a . Observemos também que, para falarmos em descontinuidade de uma função em um ponto, é necessário que esse ponto pertença ao domínio da função. Da definição decorre que, se f é descontínua em a , então as duas condições abaixo deverão estar satisfeitas:

- 1ª) existe $f(a)$.
- 2ª) não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Definição 2.17. Seja x_0 um ponto do domínio da função f . Dizemos que f é contínua à direita de x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ e dizemos que f é contínua à esquerda de x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ se f for contínua no intervalo aberto $]a, b[$ e se também for contínua à direita de a e à esquerda de b .

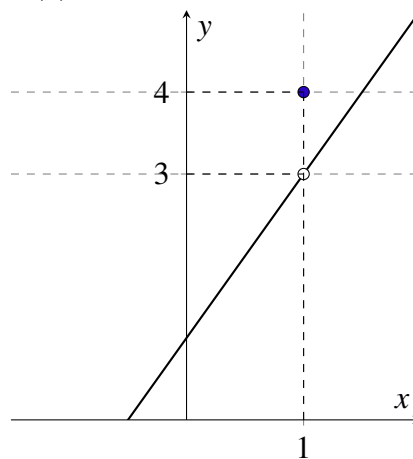
Exemplo 2.22. A função $f(x) = 2x + 1$ definida em \mathbb{R} é contínua em 1 , pois $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3 = f(1)$.

Gráfico 12 – Função $f(x)$ com representação do limite quando x tende a 1

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Notemos que f é contínua em \mathbb{R} , pois para todo $a \in \mathbb{R}$, temos: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (2x + 1) = 2a + 1 = f(a)$

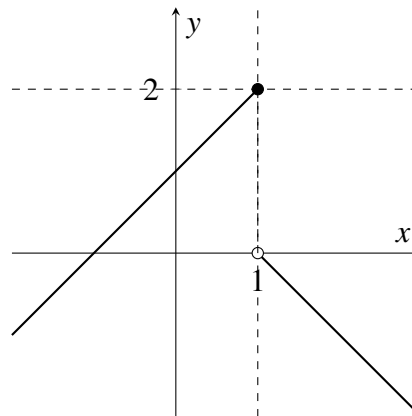
Exemplo 2.23. A função $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ definida em \mathbb{R} é descontínua em 1, pois $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3 \neq 4 = f(1)$.

Gráfico 13 – Função $f(x)$ com representação do limite quando x tende a 1

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Observemos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$ pois, para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ temos: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (2x + 1) = 2a + 1 = f(a)$.

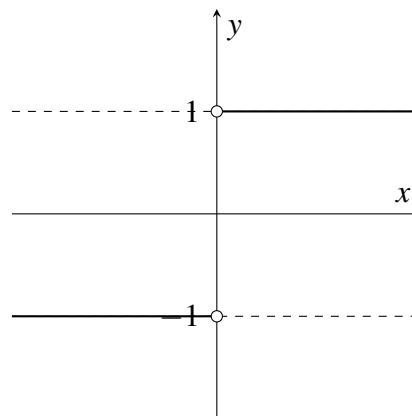
Exemplo 2.24. A função $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$ definida em \mathbb{R} é descontínua em 1, pois $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) = 0$; portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Gráfico 14 – Função $f(x)$ e seus limites laterais

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Observemos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$, pois, para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, temos: se $a > 1$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (1 - x) = 1 - a = f(a)$ se $a < 1$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x + 1) = a + 1 = f(a)$

Exemplo 2.25. Na função $f(x) = \frac{|x|}{x}$ definida em \mathbb{R}^* não podemos afirmar que f é descontínua em $x = 0$, pois $x = 0$ não pertence ao domínio da função.

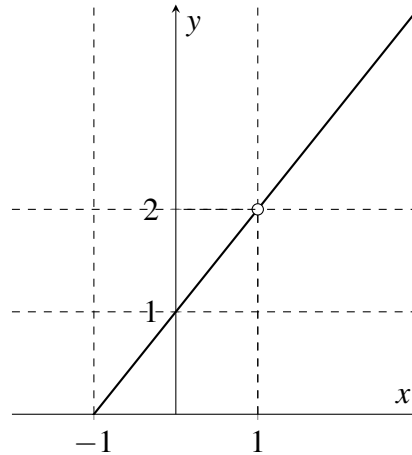
Gráfico 15 – Análise da continuidade da função $f(x)$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Observemos que $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ é contínua em \mathbb{R}^* , pois, para todo $a \in \mathbb{R}^*$,

temos: se $a > 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1 = f(a)$; se $a < 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-1) = -1 = f(a)$.

Exemplo 2.26. Na função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$, não podemos afirmar que f é descontínua em $x = 1$, pois $x = 1$ não pertence ao domínio da função.

Gráfico 16 – Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Notemos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$, pois, para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, temos: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow a} (x+1) = a+1 = f(a)$.

2.3 Derivadas: conceito e interpretação

Nesta seção, e munidos das ferramentas discutidas anteriormente, podemos definir o objeto principal desse estudo, que são as derivadas. E para isso discutiremos algumas definições importantes, além das propriedades das derivadas e de sua interpretação analítica e geométrica.

2.3.1 Derivada

Definição 2.18. Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I . Chama-se **derivada de f no ponto x_0** o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se este existir e for finito.

A derivada de f no ponto x_0 é habitualmente indicada com uma das seguintes notações:

$$f'(x_0) \quad \text{ou} \quad \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} \quad \text{ou} \quad Df(x_0).$$

A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada acréscimo ou incremento da variável x relativamente ao ponto x_0 . A diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é chamada acréscimo ou incremento da função f relativamente ao ponto x_0 . O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

recebe o nome de razão incremental de f relativamente ao ponto x_0 .

Frisemos que a derivada de f no ponto x_0 pode ser indicada das seguintes formas:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Quando existe $f'(x_0)$, dizemos que f é **derivável no ponto** x_0 . Dizemos também que f é derivável no intervalo aberto I quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

Exemplo 2.27. Calculemos a derivada de $f(x) = 2x$ no ponto $x_0 = 3$.

Utilizando a definição em termos de x :

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3)}{x - 3} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Outra maneira de proceder seria esta, utilizando a definição em termos de Δx :

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(3 + \Delta x) - 6}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6 + 2\Delta x - 6}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Exemplo 2.28. Calculemos a derivada de $f(x) = x^2 + x$ no ponto $x_0 = 1$.

Utilizando a definição em termos de Δx :

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x)] - [1^2 + 1]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2) + (1 + \Delta x)] - [2]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 + \Delta x - 2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 3)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 3) \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.29. Calculemos a derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ em um ponto genérico $x_0 \neq 0$.

Pela definição,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Com $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ e $f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$, ou seja,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x}.$$

Primeiro, calculamos o numerador, unificando as frações (tirando o M.M.C.):

$$\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{(x_0 + \Delta x)x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

Substituindo este resultado no limite principal:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x}.$$

Para simplificar a fração composta, multiplicamos o numerador pelo inverso do denominador:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}.$$

Cancelando Δx , já que $\Delta x \neq 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

Aplicando o limite (substituindo $\Delta x = 0$):

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0 + 0)} = \frac{-1}{x_0^2}.$$

Exemplo 2.30. Calculemos a derivada de $f(x) = \text{sen } x$ em $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

$$f' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \Delta x \right) - \text{sen} \frac{\pi}{3}}{\Delta x}.$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\text{sen } a - \text{sen } b = 2 \text{sen} \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b}{2} \right)$:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\frac{\pi}{3} + \Delta x + \frac{\pi}{3}}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x}.$$

Prosseguindo:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x}.$$

Reorganizando a expressão e usando o limite fundamental $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u} = 1$:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2} \right) \right].$$

Quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos $\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$ e, portanto, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$. O limite se torna:

$$= 1 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} + 0 \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

2.3.2 Taxa de variação

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A análise da variação de $f(x)$ em resposta à variação em x é fundamental no Cálculo Diferencial; dessa forma, considere x_1 e x_2 dois pontos distintos no domínio D da função. Assim, o incremento de x , denotado por Δx , é dado por:

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Além disso, o incremento correspondente de y (ou de f), denotado por Δy ou Δf , é dado por:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

Definição 2.19. A Taxa Média de Variação (T.M.V.) da função f no intervalo $[x_1, x_2]$ é o quociente das diferenças:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Oservação 2.4. A T.M.V. representa a razão de variação média de y por unidade de variação de x ao longo do intervalo. Geometricamente, é o coeficiente angular da reta secante que conecta os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ no gráfico de f .

Nesse sentido, o conceito de derivada surge da necessidade de determinar a taxa de variação instantânea, ou seja, o comportamento da função em um único ponto. Isso é alcançado através do processo de limite, em que o incremento Δx tende a zero.

2.3.3 Interpretação geométrica

A interpretação fundamental da derivada é a geométrica:

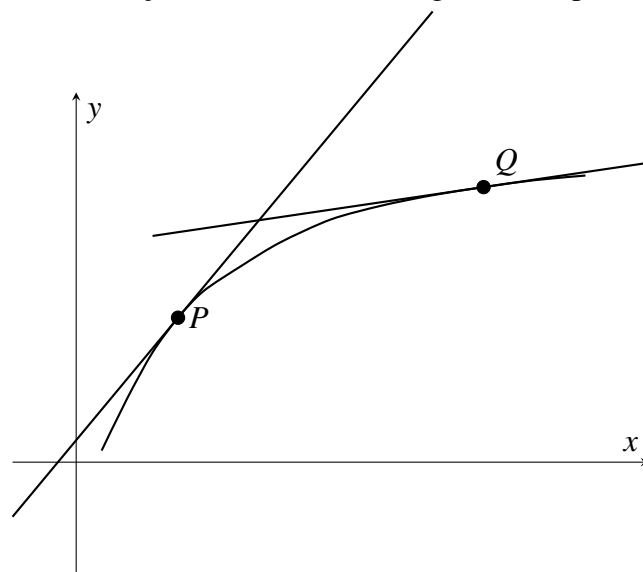
Definição 2.20. Se f é diferenciável em a , então $f'(a)$ é o **coeficiente angular (inclinação)** da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(a, f(a))$.

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é dada por:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

A reta tangente é o melhor ajuste linear local para a função f na vizinhança do ponto a .

Gráfico 17 – Função com duas retas tangentes nos pontos P e Q



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

De modo geral, a análise geométrica, visualmente confirmada pelo comportamento das retas tangentes ilustradas na no gráfico 17, estabelece o alicerce intuitivo para o Cálculo. A derivada $f'(a)$ deixa de ser uma mera inclinação, tornando-se a quantificação da taxa instantânea de variação da função f no ponto a , servindo como o **melhor ajuste linear local** para a curva. Essa perspectiva geométrica é crucial, pois permite estender o conceito de taxa de variação além do domínio estritamente espacial, possibilitando a modelagem de fenômenos dinâmicos em que a mudança ocorre continuamente. Conceitos esses, que ajudarão a responder e otimizar os problemas base do projeto.

2.3.4 Diferenciabilidade implica continuidade

Um resultado teórico crucial é a relação entre diferenciabilidade e continuidade.

Teorema 2.4. Se uma função f é **diferenciável** em um ponto a , então f é necessariamente **contínua** em a .

Demonstração. Para $x \neq a$, podemos escrever $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$. Tomando o limite quando $x \rightarrow a$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} (x - a) \right).\end{aligned}$$

Pela definição de derivada, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

O que implica $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, que é a definição de continuidade em a . □

Oservação 2.5. O recíproco não é verdadeiro: uma função pode ser contínua em um ponto, mas não ser diferenciável (e.g., $f(x) = |x|$ em $x = 0$). A falta de diferenciabilidade está associada à existência de "bicos"(pontos angulares) ou tangentes verticais no gráfico.

2.3.5 Função derivada

Seja f uma função derivável no intervalo aberto I . Para cada ponto $x_0 \in I$, existe e é único o limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Esse limite representa a **taxa de variação instantânea** da função f no ponto x_0 .

Assim, podemos definir uma nova função.

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R},$$

que associa a cada $x \in I$ o valor da derivada de f nesse ponto. Essa função é chamada de **função derivada de f** , ou simplesmente **derivada de f** .

Habitualmente, a derivada de f é representada pelas notações

$$f'(x), \quad \frac{df}{dx} \quad \text{ou} \quad Df(x).$$

De modo geral, a expressão da função derivada pode ser obtida a partir da lei $f(x)$, aplicando-se a definição de derivada de uma função f , em um ponto genérico $x \in I$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

É essa definição que será utilizada, a seguir, para calcular as derivadas das principais funções elementares.

2.3.6 Derivadas das funções elementares

A seguir podemos ver alguns exemplos de derivadas de funções conhecidas, que neste momento não focaremos em demonstrações.

Tabela 5 – Derivadas das Funções Elementares

Nome da Função	Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$
Constante	c	0
Potência	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
Seno	$\text{sen}(x)$	$\text{cos}(x)$
Cosseno	$\text{cos}(x)$	$-\text{sen}(x)$
Exponencial (base e)	e^x	e^x
Exponencial (base a)	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
Logaritmo Natural	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Logaritmo Natural	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Exemplo 2.31. Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa $x = 2$.

Substituímos o valor de x na função original para encontrar a ordenada y :

$$y_0 = f(2) = e^2.$$

Portanto, o ponto de tangência é $P(2, e^2)$.

A inclinação da reta tangente (m) é dada pela derivada da função no ponto dado:

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$$

$$m = f'(2) = e^2.$$

Utilizamos a equação geral da reta:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Substituindo os valores encontrados ($x_0 = 2$, $y_0 = e^2$ e $m = e^2$):

$$y - e^2 = e^2(x - 2).$$

Distribuindo o termo e^2 :

$$y - e^2 = e^2x - 2e^2.$$

Isolando y para obter a equação reduzida:

$$y = e^2x - 2e^2 + e^2$$

$$y = e^2x - e^2.$$

Exemplo 2.32. Um móvel desloca-se sobre uma reta obedecendo à equação horária $s = t^4$

Para respondermos as questões a seguir precisamos achar algumas equações importantes, são elas:

Velocidade:

$$v(t) = s'(t) = 4t^3$$

Aceleração:

$$a(t) = v'(t) = 12t^2.$$

Determine:

(a) sua velocidade no instante $t = 2$ s.

$$v(2) = 4(2)^3 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ m/s.}$$

(b) sua aceleração no instante $t = 3$ s.

$$a(3) = 12(3)^2 = 12 \cdot 9 = 108 \text{ m/s}^2.$$

(c) em que instante sua velocidade é 108 m/s.

$$4t^3 = 108 \implies t^3 = 27 \implies t = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ s.}$$

(d) em que instante sua aceleração é 48 m/s².

$$12t^2 = 48 \implies t^2 = 4 \implies t = \sqrt{4} = 2 \text{ s.}$$

2.3.7 Análise do comportamento de funções através da derivada

A utilização da derivada no Ensino Médio permite que o estudante realize uma transição da matemática estática para uma análise dinâmica das funções. Isto é, não focamos apenas no cálculo mecânico, mas usamos a derivada como uma ferramenta para descrever o movimento e a curvatura do gráfico.

2.3.7.1 Crescimento e decrescimento

A introdução do cálculo no Ensino Médio permite que o estudante deixe de enxergar as funções como estruturas estáticas e passe a interpretá-las por meio do movimento. A derivada, neste contexto, funciona para indicar a inclinação e a direção da curva em cada instante. Dessa forma, para entender se uma função está aumentando ou diminuindo seus valores, analisamos o sinal de sua primeira derivada, $f'(x)$. Geometricamente, isso corresponde à inclinação da reta tangente ao gráfico, assim:

- **Derivada positiva** ($f'(x) > 0$): Localmente, a função é crescente. Imagine uma reta tangente com inclinação ascendente; conforme x aumenta, y também aumenta.
- **Derivada negativa** ($f'(x) < 0$): Localmente, a função é decrescente. A reta tangente aponta para baixo, indicando que a função está perdendo valor conforme avançamos no eixo das abscissas.

- **Derivada nula** ($f'(x) = 0$): Indica um ponto de repouso instantâneo, também chamado de ponto crítico. A reta tangente é horizontal, sinalizando que a função atingiu o ponto mais alto ou o ponto mais baixo.

2.3.7.2 Concavidade e a segunda derivada

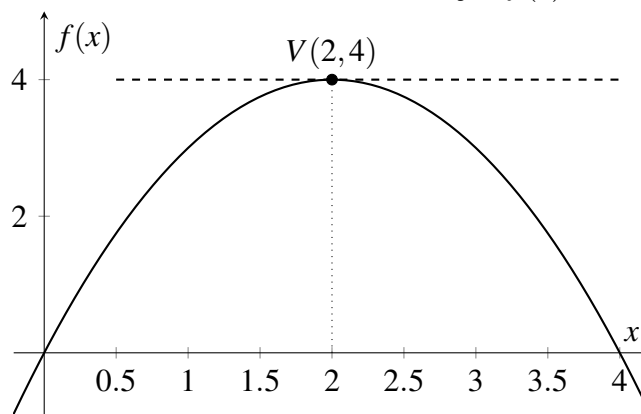
Enquanto a primeira derivada nos dá a direção, a segunda derivada, $f''(x)$, nos revela a “forma” da curva, ou seja, para onde ela abre sua concavidade. Essa análise é fundamental para garantir que encontramos a solução ótima em problemas de otimização:

- **Concavidade para Cima** ($f''(x) > 0$): O gráfico apresenta uma curvatura voltada para cima.
- **Concavidade para Baixo** ($f''(x) < 0$): O gráfico apresenta uma curvatura voltada para baixo.

Exemplo 2.33. Consideremos a função $f(x) = -x^2 + 4x$. Através do cálculo, identificaremos o ponto mais alto da função e analisaremos o comportamento da curva por meio da reta tangente.

1. **Cálculo da derivada:** $f'(x) = -2x + 4$.
2. **Ponto crítico:** Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
3. **Teste da segunda derivada:** $f''(x) = -2$. Como $f''(2) < 0$, a concavidade é voltada para baixo, confirmando que o x do vértice é $x_v = 2$.

Gráfico 18 – Análise da Derivada na Função $f(x) = -x^2 + 4x$



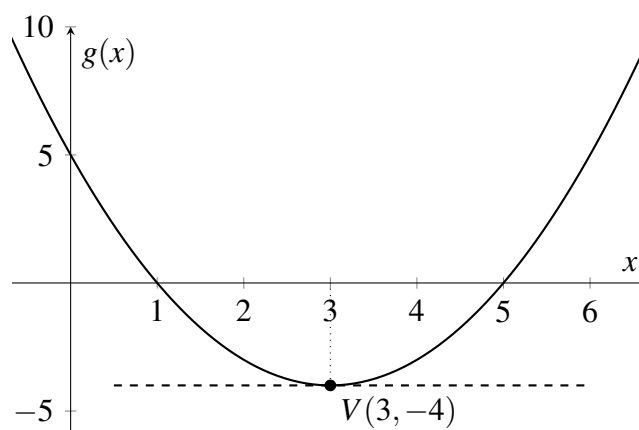
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Conforme observado na Figura 18, o ponto $x = 2$ representa o equilíbrio da função. À esquerda deste valor, a inclinação das retas tangentes é positiva ($f'(x) > 0$), indicando crescimento. À direita, a inclinação torna-se negativa ($f'(x) < 0$), caracterizando o decrescimento da função.

Exemplo 2.34. Dada a função $g(x) = x^2 - 6x + 5$, buscaremos identificar analítica e graficamente o ponto mais baixo que esta função assume através das ferramentas do cálculo.

1. **Cálculo da derivada:** $g'(x) = 2x - 6$.
2. **Ponto crítico:** $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$.
3. **Teste da segunda derivada:** $g''(x) = 2$. Como $g''(3) > 0$, a concavidade é voltada para cima, o que caracteriza $x = 3$ como o valor do x do vértice.

Gráfico 19 – Análise da derivada na função $g(x) = x^2 - 6x + 5$



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Como observado na Figura 19, o ponto $V(3, -4)$ é o local onde a função cessa seu decrescimento e inicia seu crescimento. A **reta tangente** vermelha tracejada possui inclinação nula, confirmando que a taxa de variação instantânea é zero no ponto crítico. À esquerda de $x = 3$, a função possui derivadas negativas, enquanto à direita, as derivadas são positivas.

2.4 Problemas de otimização e aplicações

Concluídos os conteúdos iniciais necessários para a aplicação do projeto na segunda série do Ensino Médio, com a revisão de funções, introdução aos limites e estudo das derivadas, pode-se introduzir o objetivo final, que é analisar problemas de otimização, que serão trabalhados em duas questões centrais: a primeira com relação ao lucro de vendas de empadas produzidas

para a formatura e a segunda numa análise de embalagem para venda dessas empadas, focando no melhor aproveitamento de materiais e utilização da menor área possível.

Desse modo, vamos estudar mais alguns conceitos básicos a respeito de maximização e minimização de funções, revisitando, principalmente, o cálculo de máximos e mínimos e seus conceitos formais. Quando apresentada anteriormente, essa ideia usava uma estratégia mais aritmética ou de decoração de fórmulas, pois ainda não se tinha conhecimento acerca de derivadas. Assim, nesse tópico será visto como calcular máximos e mínimos por meio de derivadas, o Teorema de Fermat e suas aplicações.

2.4.1 Máximos e mínimos

Iniciamos esse tópico apresentando algumas definições importantes, oficializando os dados sobre testes da primeira derivada e da segunda derivada apresentadas anteriormente.

Definição 2.21. I) Seja a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in D$. Chamamos **vizinhança de x_0** um intervalo $V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, em que δ é um número real positivo.

II) Dizemos que x_0 é um **ponto de máximo local** de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que:

$$(\forall x)(x \in V \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)).$$

Nesse caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado **máximo local** de f .

III) Dizemos que x_0 é um **ponto de mínimo local** de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que:

$$(\forall x)(x \in V \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)).$$

Nesse caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado **mínimo local** de f .

IV) Dizemos que x_0 é um **ponto extremo** se x_0 for um ponto de máximo local ou de mínimo local de f . Nesse caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado **valor extremo** de f .

As definições anteriores nos permitem identificar onde os extremos podem ocorrer. Para sistematizar essa busca, introduzimos o conceito de ponto crítico, que engloba os pontos onde a derivada se anula ou onde a função não é derivável.

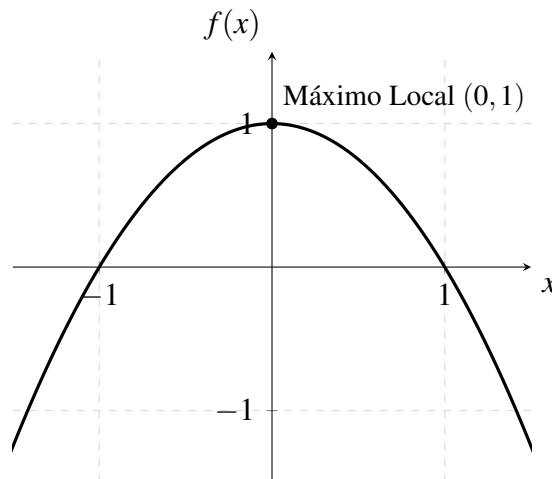
Definição 2.22 (Ponto crítico). Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo x_0 . Dizemos que x_0 é um **ponto crítico** de f se:

I) $f'(x_0) = 0$.

II) $f'(x_0)$ não existe.

Exemplo 2.35. Considere a função $f(x) = 1 - x^2$. Para determinar seus pontos extremos, calculamos sua derivada $f'(x) = -2x$. O ponto crítico ocorre quando $f'(x) = 0$, ou seja, em $x = 0$, dessa forma o valor máximo é $f(0) = 1$.

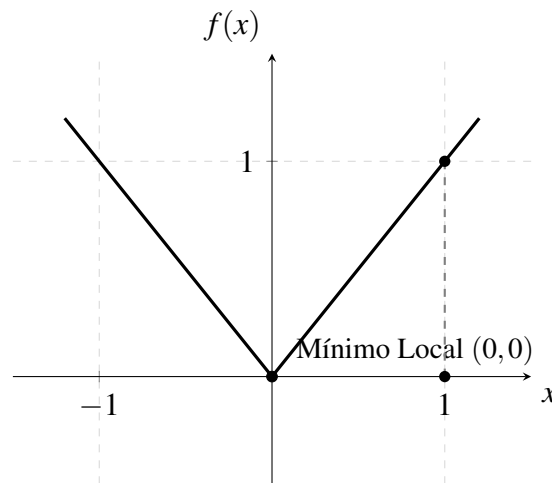
Gráfico 20 – Função $f(x) = 1 - x^2$ com máximo local em $x = 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Exemplo 2.36. Seja a função modular $f(x) = |x|$. Note que esta função não é derivável em $x = 0$. Portanto, $x = 0$ é um ponto crítico, enquadrando-se no caso onde a derivada não existe no ponto. Pela análise gráfica, verifica-se que $x = 0$ é o ponto de mínimo local de f , onde $f(0) = 0$.

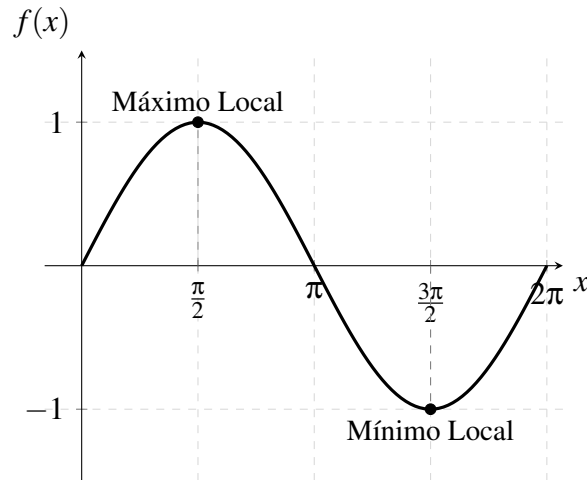
Gráfico 21 – Função $f(x) = |x|$ com mínimo local em $x = 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Exemplo 2.37. Para a função periódica $f(x) = \sin x$, os pontos críticos ocorrem onde $f'(x) = \cos x = 0$. No intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

- $x = \frac{\pi}{2}$ como ponto de máximo local, onde $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.
- $x = \frac{3\pi}{2}$ como ponto de mínimo local, onde $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$.

Gráfico 22 – Função $f(x) = \sin x$ com extremos locais destacados

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Após serem analisados os máximos e mínimos locais, ficou fácil compreender e identificar os pontos em que uma função atinge valores extremos em relação aos seus vizinhos imediatos. No entanto, em muitas situações práticas, não basta saber onde estão esses picos, é preciso determinar qual é o valor mais alto ou mais baixo que a função assume em todo o seu domínio ou em um intervalo fechado específico. É aqui que será introduzido o conceito de máximos e mínimos absolutos (ou globais). Enquanto os extremos locais dão uma visão detalhada do comportamento da curva em certas vizinhanças, os extremos absolutos fornecem a resposta definitiva sobre os limites totais da função, comparando todos os candidatos a máximos ou mínimos e os valores nos pontos de fronteira.

Definição 2.23. Dizemos que $f(x_0)$ é um **valor máximo absoluto** de f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x do domínio de f , isto é, $f(x_0)$ é o maior valor que f assume.

Dizemos que $f(x_0)$ é um **valor mínimo absoluto** de f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x do domínio de f , isto é, $f(x_0)$ é o menor valor que f assume.

Ao retomar os exemplos discutidos nos extremos locais, pode-se identificar seus valores absolutos:

2.34.) O valor máximo absoluto de $f(x) = 1 - x^2$ é 1. Como a parábola está voltada para baixo, não existe um valor mínimo absoluto (ela cresce infinitamente para o lado esquerdo).

2.35.) O valor mínimo absoluto de $f(x) = |x|$ é 0. Por ser uma função modular que cresce infinitamente para cima, ela não possui um máximo absoluto.

2.36.) $f(x) = \sin x$ tem um máximo absoluto que é 1 e um mínimo absoluto que é -1 , pois é uma função limitada.

Pôde ser visto nos exemplos anteriores, que um ponto pode ser simultaneamente um máximo local e absoluto (global), como no caso da parábola $f(x) = 1 - x^2$, ou a função pode apresentar múltiplos picos locais que não atingem o valor máximo global num intervalo. Dominar essas definições é o passo fundamental para resolver problemas de otimização, em que o objetivo é encontrar a melhor (ou pior) solução possível dentro de um conjunto de restrições.

Teorema 2.5 (Fermat). *Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável no ponto $x_0 \in D$ e x_0 é ponto extremo local interior de f , então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que x_0 seja um ponto de **máximo local** de f . Por definição, existe uma vizinhança $V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tal que, para todo $x \in V$, temos $f(x) \leq f(x_0)$.

Considere o quociente de Newton para a derivada em x_0 :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in V$, o numerador é sempre não-positivo: $f(x) - f(x_0) \leq 0$.

Analisamos agora os limites laterais:

1. Se $x \rightarrow x_0^+$, então $x - x_0 > 0$. Como o numerador é ≤ 0 e o denominador é > 0 , temos:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \implies f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

2. Se $x \rightarrow x_0^-$, então $x - x_0 < 0$. Como o numerador é ≤ 0 e o denominador é < 0 , a razão torna-se não negativa:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \implies f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Visto que a derivada $f'(x_0)$ existe por hipótese, os limites laterais devem ser iguais:

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-).$$

As únicas condições que satisfazem simultaneamente $f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0$ são:

$$f'(x_0) = 0.$$

A demonstração para o caso de um mínimo local é análoga, invertendo-se apenas o sinal das desigualdades. \square

Com a fundamentação do Teorema de Fermat, deixamos o cálculo puramente abstrato para ingressar no campo da Matemática Aplicada. Pois, se a derivada representa a taxa de variação de uma função, o ponto em que essa taxa se anula indica o exato instante de equilíbrio em que uma grandeza atinge seu ápice ou seu esgotamento. No contexto da Educação Básica, essa compreensão permite que o estudante deixe de apenas executar algoritmos ou aplicar fórmulas para se tornar um modelador de situações reais. A seguir, aplicaremos essa lógica em dois contextos práticos e interdisciplinares: a gestão financeira, por meio da busca pelo lucro máximo em um empreendimento escolar na venda de empadas, e a otimização de recursos, por meio do design geométrico de embalagens que minimizem o desperdício de material. Em ambos os casos, a derivada deixará de ser apenas uma “inclinação de reta tangente” para se transformar em uma estratégia de viabilidade para o mundo real.

2.4.2 Problema 01: maximização do lucro na venda de empadas

Começamos agora a aplicação prática, iniciando com o 1º problema, que foca em calcular o melhor lucro possível que se pode obter na venda de empadas. E para isso analisamos a seguinte questão:

Enunciado: A comissão de formatura da 3ª série do Ensino Médio da ECIT Irmã Stefanie decidiu vender empadas durante o intervalo para arrecadar recursos financeiros. No entanto, surgiu um impasse: qual preço deve ser cobrado? Se o preço for muito alto, poucos alunos comprarão e, se for muito baixo, a receita pode não cobrir os custos de produção.

Dessa forma, a turma estimou que a relação entre o preço unitário p e a quantidade vendida x segue a lei de demanda linear. Além disso, sabe-se que existe um custo fixo para a produção, além de um custo variável.

Para determinar o lucro máximo na venda das empadas, deve-se, primeiramente, modelar a função lucro $L(x)$, que é definida pela diferença entre a função receita $R(x)$ e a função custo $C(x)$:

$$L(x) = R(x) - C(x).$$

Analisando cada função, percebe-se que o custo total de produção é composto por uma parcela fixa (insumos básicos, transporte, gás) e uma parcela variável que depende da quantidade produzida:

$$C(x) = C_f + C_v \cdot x.$$

em que C_f representa o custo fixo e C_v o custo unitário de produção por empada.

Já a receita depende da quantidade vendida x e do preço unitário p . No entanto, o preço não é estático, ele varia de acordo com a demanda. Modelamos essa relação como uma função linear decrescente:

$$p(x) = ax + b \quad (a < 0).$$

Assim, a função receita $R(x)$ torna-se uma função quadrática:

$$R(x) = x \cdot p(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx.$$

Substituindo as funções de receita e custo, obtemos a função lucro final:

$$L(x) = (ax^2 + bx) - (C_v \cdot x + C_f)$$

$$L(x) = ax^2 + (b - C_v)x - C_f.$$

Para encontrar o ponto de lucro máximo, aplicamos o Teorema de Fermat, buscando o ponto crítico onde a taxa de variação do lucro é nula ($L'(x) = 0$):

$$L'(x) = 2ax + (b - C_v).$$

Igualando a zero para encontrar a quantidade ideal x_{max} :

$$2ax + b - C_v = 0 \implies x_{max} = \frac{C_v - b}{2a}.$$

Como $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo, garantindo que o ponto crítico encontrado é, de fato, um ponto de máximo global para o lucro.

Agora vejamos um exemplo real, e com valores que podem ser usados pelos estudantes. A análise da viabilidade econômica para a produção e comercialização de empadas no ambiente escolar exige, primeiramente, a correta estruturação das funções de custo. A partir dos dados observados em simulações de preços, estabeleceu-se que a produção de 20 unidades acarreta um custo total de R\$ 15,00, decomposto em um custo fixo de R\$ 3,00 e um custo variável de R\$ 12,00. Disso, conclui-se que o custo variável unitário é de $c_v = R\$ 0,60$, permitindo a

modelagem da função custo total como $C(q) = 0,60q + 3$, em que q representa a quantidade produzida.

No entanto, a maximização do lucro não depende exclusivamente das despesas, mas da compreensão do preço e da demanda no contexto escolar. Dessa forma, podemos modelar a função demanda a partir de uma regressão, em que, se forem cobrados R\$ 4,00 apenas 20 empadas seriam vendidas e, se forem cobrados R\$ 2,00, seriam vendidas 60 empadas. Assim, o coeficiente angular é dado por $a = \frac{4 - 2}{20 - 60} = -0,05$, e o linear é $b = 5$, que é o preço em que ninguém compraria.

$$p(q) = 5 - 0,05q,$$

refletindo a disposição de compra dos alunos em relação ao preço unitário p .

Para determinar o ponto de eficiência máxima, é necessário construir a função lucro, definida pela diferença entre a receita total e o custo total, ou seja,

$$L(q) = R(q) - C(q).$$

Sendo a receita o produto do preço pela quantidade, temos

$$R(q) = (5 - 0,05q)q = 5q - 0,05q^2.$$

Ao subtrairmos a função custo, obtemos a função lucro quadrática:

$$L(q) = -0,05q^2 + 4,40q - 3.$$

Sob a ótica do cálculo diferencial, o ponto de lucro máximo é encontrado onde a taxa de variação do lucro em relação à quantidade produzida é nula. Aplicando-se a primeira derivada à função, obtemos

$$L'(q) = -0,10q + 4,40.$$

Ao igualarmos a derivada a zero,

$$0 = -0,10q + 4,40.$$

isolamos a variável para encontrar a quantidade ideal a ser vendida

$$q = 44.$$

Substituindo a quantidade ótima de 44 unidades na função de demanda inicial, encontramos o preço de venda ideal de

$$p(44) = 5 - 0,05 \cdot 44 = R\$ 2,80.$$

Conclui-se, portanto, que a estratégia mais eficaz para o empreendedor escolar não é a produção em massa voltada ao menor preço possível, mas sim o equilíbrio matemático entre a variação do custo e a variação da receita. Neste cenário, a produção de 44 empadas vendidas a R\$2,80 cada assegura o maior retorno financeiro possível, otimizando tanto o esforço produtivo quanto a absorção pelos estudantes da escola.

2.4.3 Problema 02: otimização de embalagens

Este segundo problema investiga a aplicação do cálculo diferencial na busca pela eficiência geométrica de prismas retos, confrontando a economia de material com a viabilidade logística para embalar e vender as empadas do problema 01. Ele será iniciado com uma modelagem teórica, ou seja, uma aplicação genérica em busca do prisma ideal.

Consideramos inicialmente uma embalagem prismática de base quadrada com lado L e altura h , projetada para conter um volume fixo V_0 . O objetivo é minimizar a função da área superficial total A . Definamos algumas funções iniciais:

A área total A é dada pela soma das áreas das bases e das faces laterais:

$$A(L, h) = 2L^2 + 4Lh.$$

A restrição de volume é definida por:

$$V_0 = L^2 \cdot h \implies h = \frac{V_0}{L^2}.$$

Substituindo (2) em (1), obtemos a área em função apenas do lado da base:

$$A(L) = 2L^2 + 4L \left(\frac{V_0}{L^2} \right) = 2L^2 + \frac{4V_0}{L}.$$

Para encontrar o valor de L que minimiza a área, derivamos $A(L)$ em relação a L e igualamos a zero:

$$A'(L) = 4L - \frac{4V_0}{L^2} = 0.$$

Resolvendo para L :

$$4L = \frac{4V_0}{L^2} \implies L^3 = V_0.$$

Como $V_0 = L^2h$, temos $L^3 = L^2h$, o que implica em $L = h$. O prisma de base quadrada mais eficiente é o **cubo**.

2.5 Dificuldades no ensino de limites e derivadas

Ao longo da aplicação das duas partes iniciais do material didático propostos nesta intervenção, ficou evidente que o ensino de Cálculo no nível médio vai muito além da simples transmissão de fórmulas para a determinação de máximos e mínimos ou da aplicação de regras de derivação. Ensinar limites e derivadas a alunos em fase de conclusão da educação básica exige o enfrentamento de barreiras que são, simultaneamente, de natureza cognitiva e motivacional. Percebeu-se que o maior desafio não reside no cálculo em si, mas em possibilitar que o estudante compreenda a relevância dos conteúdos estudados ou reconheça a presença de suas aplicações no cotidiano, isto é, em promover a transição de uma Matemática centrada em valores fixos para uma Matemática que investiga o movimento, as taxas de variação instantânea e os problemas de otimização.

Observa-se que um dos principais obstáculos à fluidez das aulas reside na fragilidade dos conhecimentos prévios dos estudantes, especialmente daqueles conceitos fundamentais abordados em etapas anteriores da escolarização, bem como na ausência de uma prática sistemática de revisão desses conteúdos fora do ambiente escolar. Essa dificuldade torna-se ainda mais evidente em problemas de otimização, como o exemplo visto anteriormente, da maximização do lucro na produção de empadas, nos quais os alunos enfrentam sérios desafios ao traduzir situações do cotidiano em funções matemáticas. O processo de modelagem matemática configura-se, portanto, como um dos momentos de maior complexidade cognitiva, exigindo a articulação entre o raciocínio lógico e a técnica operatória. Tal cenário sugere que as dificuldades observadas no ensino de derivadas nem sempre decorrem da introdução de novos conceitos teóricos, mas frequentemente estão associadas à insegurança dos estudantes em relação a manipulações algébricas elementares, como fatoração e simplificação de expressões.

Por fim, não se pode ignorar o papel da abstração no ensino de Cálculo. O conceito de limite, associado à ideia de aproximação infinita, constitui um dos pontos em que os alunos tendem a apresentar maior resistência. Contudo, observa-se que essa barreira pode ser significativamente atenuada quando o foco deixa de recair exclusivamente sobre o rigor das demonstrações formais e passa a privilegiar a aplicação desses conceitos em situações concretas do cotidiano dos estudantes, como, por exemplo, a organização de sua própria formatura. A possibilidade de perceber a derivada como uma ferramenta prática, seja para maximizar lucros ou para reduzir o consumo de material, revela-se um elemento decisivo para a consolidação da compreensão conceitual.

A introdução dos conceitos de limite e derivada impõe ao discente uma ruptura com a Matemática predominantemente aritmética e estática vivenciada ao longo de grande parte de sua trajetória escolar. Até então, o estudante encontrava-se habituado a resolver equações envolvendo valores fixos e determinados. Ao deparar-se com a noção de variação instantânea, passa a lidar com a ideia de movimento no contexto das funções. Essa transição demanda um esforço cognitivo significativo, pois requer a capacidade de visualizar o comportamento de uma grandeza à medida que outra se aproxima de um valor, sem necessariamente atingi-lo. Em razão disso, tais conceitos abstratos podem gerar insegurança e desmotivação.

Ademais, a transposição da linguagem natural para a linguagem algébrica configura-se como um obstáculo relevante. No problema de otimização envolvendo a produção de empadas, observa-se que muitos alunos compreendem, em nível conceitual, a lógica do lucro, mas encontram dificuldades ao estruturar matematicamente as funções de receita e de custo. Essa limitação na organização dos dados do problema em uma expressão algébrica impede, muitas vezes, o avanço para a etapa da derivação, evidenciando que o domínio das técnicas de cálculo torna-se insuficiente sem uma base sólida de interpretação e modelagem matemática.

Nesse contexto, os problemas de otimização destacam-se como um ponto central do conteúdo, embora possam trazer consigo a complexa exigência da redução do número de variáveis. Em situações reais, como no design da embalagem das empadas, o volume depende de múltiplas dimensões inter-relacionadas. O principal desafio para o estudante consiste em isolar uma dessas variáveis e expressar a função objetivo em termos de uma única incógnita, condição necessária, nesse nível, para o processo de derivação. Embora muitos alunos compreendam o procedimento conceitualmente, acabam se perdendo nas substituições algébricas, o que revela dificuldades em compreender a interdependência entre as grandezas geométricas envolvidas.

Soma-se a isso a dificuldade de validar o resultado matemático à luz da realidade física do problema. No cálculo do volume máximo, por exemplo, é comum que a derivada forneça mais de um ponto crítico, exigindo do aluno uma análise criteriosa sobre qual deles é compatível com as restrições físicas, como as dimensões reais da folha de papelão. Essa etapa de interpretação crítica é frequentemente negligenciada, uma vez que os estudantes tendem a aceitar o resultado numérico final como uma verdade absoluta, sem questionar sua viabilidade prática. Desenvolver essa capacidade analítica constitui, possivelmente, um dos aspectos mais desafiadores e, ao mesmo tempo, mais relevantes no ensino de problemas de otimização.

3 METODOLOGIA

A presente pesquisa tem por objetivo avaliar o impacto do uso de Metodologias Ativas, mediante a aplicação de um material didático fundamentado em problemas de otimização, na aprendizagem de conceitos de Cálculo Diferencial. O foco reside na transposição da teoria das derivadas para situações práticas de modelagem matemática no Ensino Médio. Para tanto, o enfoque desta pesquisa é a metodologia mista, que define-se como o tipo de pesquisa em que o pesquisador mistura ou combina técnicas, métodos, abordagens, conceitos ou linguagem de pesquisa quantitativa e qualitativa em um único estudo.

Neste caso, a investigação articula os métodos qualitativo e quantitativo por meio de um delineamento experimental, no intuito de investigar o envolvimento e a aprendizagem dos estudantes na apropriação de conceitos de derivadas nos problemas de otimização. A análise pauta-se nos resultados de uma avaliação diagnóstica inicial, aplicada anteriormente à intervenção pedagógica com a aplicação do material didático para diagnosticar competências a respeito das funções. Essa estrutura permite mensurar compreender os processos cognitivos mobilizados na resolução de problemas reais que envolvem o uso de derivadas.

A proposta pedagógica foi aplicada na Escola Cidadã Integral Técnica (ECIT) Irmã Stefanie. Os sujeitos da pesquisa foram estudantes da 2^a série do Ensino Médio, que possuem a particularidade de estarem matriculados no curso técnico de Gastronomia. Essa escolha justifica-se pela possibilidade de alinhar os conteúdos matemáticos à realidade prática dos discentes, utilizando situações-problema contextualizadas com a área técnica escolhida por eles.

Para a operacionalização da pesquisa, foram utilizados os seguintes instrumentos:

- **Avaliação diagnóstica inicial:** Utilizada como instrumento essencial de investigação para levantar os conhecimentos prévios e as lacunas de aprendizagem no que se refere aos conteúdos de função e à ideia de achar máximos e mínimos.
- **Produto educacional:** Consiste em um material didático que busca estimular a formulação de hipóteses e levar os estudantes a uma reflexão acerca da memorização de fórmulas. Este material está organizado em quatro partes: revisão de funções, taxa de variação, limite e derivadas. Para este trabalho, foram aplicadas as duas seções iniciais, com previsão de continuidade para as demais.

A análise dos dados ocorreu de forma processual, considerando:

- **Análise qualitativa:** Focada na observação da participação dos estudantes e no desempenho em aula, bem como na análise das produções escritas e das estratégias intuitivas mobilizadas durante o desenvolvimento do material didático.
- **Análise quantitativa:** Realizada através da mensuração dos resultados da avaliação diagnóstica e do desempenho posterior, permitindo avaliar a evolução do conhecimento matemático e o impacto da metodologia proposta.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A proposta pedagógica tem como foco a análise de conceitos matemáticos necessários para o entendimento das derivadas aplicadas a problemas de otimização. Além disso, a aplicação ocorreu na turma da 2ª série do Ensino Médio da ECIT Irmã Stefanie, escola estadual no município de Campina Grande e contou com a participação dos 17 estudantes matriculados. O estudo aconteceu em duas fases principais: uma análise conceitual, com a construção do referencial teórico, e uma fase de aplicação, em que ocorreu o trabalho de revisão e apresentação dos conteúdos de funções e taxas de variação, com o intuito de analisar a viabilidade e necessidade de aprofundar no estudo de derivadas e suas aplicações nos problemas de otimização. A execução se deu por meio da aplicação do material didático e aulas estruturadas em slides.

As ações iniciaram com a apresentação do projeto para a turma e da importância de se estudar tais assuntos, seguindo com a apresentação dos materiais utilizados e da aplicação de uma avaliação diagnóstica de entrada, que aconteceu antes do início da aplicação do material didático. Nessa avaliação pudemos analisar os conhecimentos prévios dos estudantes em alguns assuntos básicos de função e suas propriedades, também pôde ser estudada a forma como os estudantes achavam os máximos e mínimos de uma função sem uso de derivadas, isto é, se eles lembravam das fórmulas que foram aprendidas na 1ª série.

4.1 Avaliação diagnóstica de entrada

A avaliação diagnóstica de entrada constituiu uma etapa muito importante nesta pesquisa, sendo utilizada como um instrumento de sondagem indispensável para identificar os conhecimentos prévios e as lacunas de aprendizagem dos estudantes da 2ª série do Ensino Médio no que tange aos conteúdos de função e à ideia de achar máximos e mínimos. Longe de possuir um caráter punitivo ou classificatório, essa etapa permitiu mapear as dificuldades da turma antes da aplicação do produto educacional, fornecendo subsídios reais para ajustar as metodologias às necessidades específicas dos discentes. Ao confrontar os resultados obtidos nesta fase inicial com o desempenho posterior, é possível mensurar, com maior precisão, o impacto da metodologia proposta e a evolução do processo de construção do conhecimento matemático e científico dos estudantes.

A avaliação diagnóstica foi dividida em duas seções, sendo a primeira com conceitos

básicos de funções, dividida em quatro questões: uma questão com modelagem de função afim, a segunda com análise gráfica, de crescimento, decrescimento e continuidade, a terceira modelando função quadrática e a quarta questão modelando e analisando função exponencial. Na segunda seção, o foco foram os problemas de otimização, e foi dividida em três questões: a quinta sobre lucro máximo na venda de peças em um bazar, a sexta, uma questão que esteve presente no ENEM 2024, que envolve maximização de áreas, e a sétima, focada na análise do maior volume para uma caixa de papelão.

Agora, faremos a análise de cada questão presente na avaliação diagnóstica de entrada. Começando com a primeira, que tinha como objetivo entender se os estudantes conseguiam modelar uma função afim a partir de determinada situação.

Aos interessados, a avaliação diagnóstica, conforme foi preparada, diagramada e aplicada aos estudantes, encontra-se reproduzida no apêndice desta dissertação.

Questão 01

Um grupo de estudantes está organizando um bazar para ajudar na festa de formatura, e para isso terá um custo fixo (campanha de doações, sacolas, organização do espaço) no valor de R\$ 80,00. Além disso, cada peça vendida tem um custo específico de R\$ 3,00. O preço de venda para cada peça é de em média R\$ 10,00.

- a) Escreva uma função $C(x)$ que represente o **Custo total** do bazar em um dia que ele vende x peças.
- b) Escreva uma função $R(x)$ que represente a **Receita total** (dinheiro arrecadado) em um dia que ele vende x peças.
- c) Escreva uma função $L(x)$ que represente o **Lucro** (Receita menos Custo) em um dia que ele vende x peças.

No item a) desta questão, obtivemos 66,7% de acertos (10 dos 15 estudantes que participaram da avaliação), o que demonstra uma fragilidade em conceitos matemáticos básicos. O item b) seguiu com o mesmo índice, apresentando também 66,7% de aproveitamento. Já o item c) registrou uma redução para 60% de acertos (9 de 15), uma vez que um estudante não conseguiu realizar as manipulações algébricas necessárias para chegar ao resultado. Com esses dados, ficou evidente que os estudantes necessitavam de um reforço maior, principalmente em conteúdos do Ensino Fundamental, como manipulações algébricas e resolução de equações simples.

Tabela 6 – Desempenho dos Estudantes na Questão 01

Categoria de Resposta	Nº de Alunos	Percentual (%)
Totalmente Correta	9	60,0%
Parcialmente Correta	1	6,7%
Incorreta	5	33,3%

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Por exemplo, o estudante 01 conseguiu compreender os itens a) e b) mas, por dificuldades nas manipulações algébricas, não conseguiu finalizar o item c), como podemos ver na imagem abaixo.

Figura 3 – Resposta dada pelo estudante 01 para a questão 01

Um grupo de estudantes está organizando um bazar para ajudar na festa de formatura, e para isso terá um custo fixo (campanha de doações, sacolas, organização do espaço) no valor de R\$ 80,00. Além disso, cada peça vendida tem um custo específico de R\$ 3,00. O preço de venda para cada peça é de em média R\$ 10,00.

- a) Escreva uma função $C(x)$ que represente o **Custo total** do bazar em um dia que ele vende x peças.

Custo fixo + custo específico = custo total
 $C(x) = 80 + 3x$

- b) Escreva uma função $R(x)$ que represente a **Receita total** (dinheiro arrecadado) em um dia que ele vende x peças.

$$R(x) = 10x$$

- c) Escreva uma função $L(x)$ que represente o **Lucro** (Receita menos Custo) em um dia que ele vende x peças.

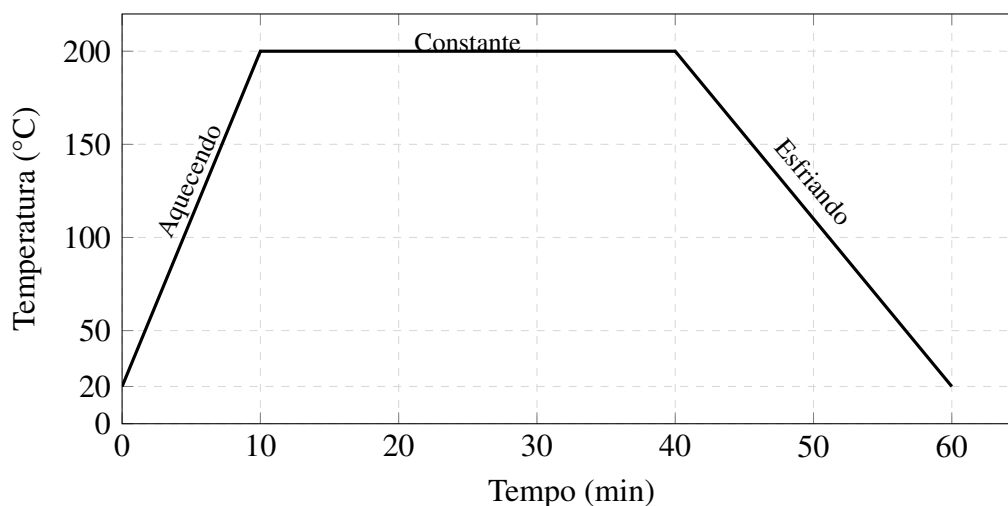
$$L(x) = 10 - 3x$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Para o item c), o estudante deveria montar a expressão $L(x) = R(x) - C(x) = 10x - (80 + 3x) = 7x - 80$, mas ele confundiu e colocou apenas $L(x) = 10 - 3x$, demonstrando uma fragilidade na resolução e manipulação de expressões algébricas simples.

Questão 02

O gráfico abaixo mostra a temperatura (em °C) dentro de um forno industrial usado no curso de gastronomia da EECIT Irmã Stefanie, desde o momento em que ele é ligado até ser desligado e esfriar.



- Em quais intervalos de tempo a temperatura estava **aumentando**?
- Em quais intervalos de tempo a temperatura estava **diminuindo**?
- Em qual intervalo de tempo a temperatura permaneceu **constante**?
- Qual foi a temperatura **máxima** atingida pelo forno?

A Questão 02 teve como objetivo avaliar a capacidade dos discentes de interpretar o comportamento de uma função a partir de sua representação gráfica, focando nos conceitos de intervalos de crescimento, decrescimento e valores máximos em um contexto cotidiano. Ao analisar o desempenho da turma, observou-se que a maioria dos estudantes (aproximadamente 53%) obteve êxito total, identificando corretamente todos os intervalos e o ponto de temperatura máxima. Por outro lado, o grupo de 5 alunos (33%) que apresentou respostas parcialmente corretas demonstrou, em sua maioria, dificuldade na notação dos intervalos ou na confusão entre o eixo das ordenadas (temperatura) e o das abscissas (tempo) ao descrever onde a função era constante. A presença de apenas dois erros totais indica que os estudantes conseguem identificar, em sua maioria, os pontos mais importantes na análise de gráficos.

Tabela 7 – Desempenho dos Estudantes na Questão 02

Categoria de Resposta	Nº de Alunos	Percentual (%)
Totalmente Correta	8	53,3%
Parcialmente Correta	5	33,3%
Incorreta	2	13,4%

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Questão 03

A turma da 2ª série da ECIT Irmã Stefanie, do curso técnico em gastronomia, quer construir uma horta retangular para plantar temperos. A escola cedeu uma área ao lado de um muro. A turma tem 40 metros de tela e vai usá-la para cercar os outros três lados da horta (dois lados de medida x e um lado de medida y), como na figura abaixo.



Os estudantes calcularam que, para plantar tudo o que precisam, a horta deve ter uma área de exatamente 150 m^2 . Quais devem ser as medidas x e y da horta para que isso aconteça? (Dica: Lembre-se que o comprimento total da tela é 40m e a Área é $x \cdot y$).

Na Questão 03, que tratava da modelagem da horta retangular, obtivemos 46,7% de acertos totais (7 dos 15 estudantes). Um ponto de extrema relevância para a pesquisa é que todos os alunos que acertaram a questão a fizeram por meio do raciocínio lógico, e não pela aplicação formal de equações do segundo grau. Houve dificuldades significativas de interpretação e, principalmente, na montagem das equações, o que resultou em quatro respostas parciais (26,7%) e quatro erros (26,6%). Esses dados reforçam que, embora os estudantes consigam compreender o problema intuitivamente, existe uma barreira na formalização algébrica, o que justifica a necessidade de uma intervenção pedagógica que conecte a lógica prática ao rigor matemático.

Tabela 8 – Desempenho dos Estudantes na Questão 03

Categoria de Resposta	Nº de Alunos	Percentual (%)
Totalmente Correta	7	46,7%
Parcialmente Correta	4	26,7%
Incorreta	4	26,6%

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

A estudante 02 conseguiu responder corretamente à questão, entretanto apresentou dificuldades na interpretação algébrica do problema. Para chegar à solução, utilizou uma estratégia baseada em tentativa e erro, realizando testes com diferentes valores para as dimensões do retângulo.

Conforme se observa na Figura 4, a estudante identificou que a área da horta deveria ser de 150m^2 e verificou que uma possível combinação seria $x = 15$ e $y = 10$. Em seguida, testou esses valores na condição do perímetro, que deveria totalizar 40m, confirmando que a soma dos três lados cercados atendia à restrição do problema.

Figura 4 – Resposta dada pelo estudante 02 para a questão 03

A turma da 2ª série da ECIT Irmã Stefanie, do curso técnico em gastronomia, quer construir uma horta retangular para plantar temperos. A escola cedeu uma área ao lado de um muro. A turma tem 40 metros de tela e vai usá-la para cercar os outros três lados da horta (dois lados de medida x e um lado de medida y), como na figura abaixo.

Os estudantes calcularam que, para plantar tudo o que precisam, a horta deve ter uma área de exatamente 150m^2 . Quais devem ser as medidas x e y da horta para que isso aconteça? (Dica: primeiro, escreva uma equação para a área).

$a = b \cdot h$ $p = 15 + 15 + 10 = 40\text{ metros}$

$a = 15 \cdot 10 = 150\text{m}^2$

$y = 10$

$x = 15$

$a = 150\text{m}^2 (15 \cdot 10)$

$p = 40\text{ metros} (15 + 15 + 10)$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Dessa forma, evidencia-se que a estudante compreendeu a situação-problema e identificou corretamente o que era solicitado, porém não recorreu à modelagem algébrica formal, limitando-se a uma abordagem intuitiva. Tal resultado indica dificuldades na tradução do enunciado para expressões matemáticas, especialmente no que se refere à construção de equações que relacionam área e perímetro.

Questão 04

Miguel Victor, da turma da 2ª série de Gastronomia da ECIT Irmã Stefanie, está fazendo um experimento sobre segurança alimentar. Ele analisa uma amostra de carne contaminada com a bactéria *Escherichia coli* (*E. coli*), mantida em temperatura ideal para proliferação (37 °C).

Sua observação (tempo $t = 0$) se inicia com uma população de 500 bactérias. Em condições ideais, a *E. coli* é conhecida por dobrar sua população a cada 20 minutos.

- a) Sabendo que a população dobra a cada 20 minutos, ela se multiplica por quanto em 1 hora?
- b) Escreva a função $N(t)$ que modela o número de bactérias N em relação ao tempo t , medido em **horas**.
- c) Quantas bactérias haverá na amostra após 2 horas de observação?
- d) Após quantas horas a amostra atingirá uma população de 4.000 bactérias?

A questão 04 teve como objetivo avaliar se os estudantes tinham os conhecimentos necessários no estudo das funções exponenciais. Essa questão foi dividida em quatro itens dependentes, ou seja, o item a) era mais simples, pois só se pedia a análise lógica do problema, já o item b) exigia um grau de conhecimento algébrico maior, porque era necessário modelar a função, isto é, achar a lei de formação em relação ao tempo. Enquanto os itens c) e d) cobravam a resolução de equações exponenciais, exigindo um bom aprendizado nas propriedades das potências.

Ao analisar os resultados, observou-se que no item a), embora a maioria dos estudantes (11 alunos) tenha compreendido o ciclo de crescimento, apenas 5 conseguiram identificar que a população dobrava três vezes dentro do intervalo de uma hora. Entre estes, somente 1 estudante conseguiu realizar o passo final de concluir que o fator de multiplicação total era 8. Essa dificuldade refletiu diretamente nos itens subsequentes: apenas 1 estudante conseguiu obter êxito nos itens b), c) e d). Ficou evidente que a transição do raciocínio aritmético (dobrar

sucessivamente) para a modelagem algébrica ($N(t) = 500 \cdot 8^t$) representa o maior obstáculo cognitivo para a turma. A dependência entre os itens revelou que, sem a construção correta da lei de formação, os discentes não conseguiram aplicar as propriedades de potência necessárias para resolver as equações exponenciais propostas, mesmo possuindo uma noção intuitiva sobre o crescimento bacteriano.

Tabela 9 – Desempenho dos Estudantes na Questão 04

Categoria de Resposta	Nº de Alunos	Percentual (%)
Totalmente Correta	1	6,7%
Parcialmente Correta	4	26,7%
Incorreta	10	66,6%

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Finalizada a primeira seção, partimos para a segunda, que analisava o conhecimento dos estudantes a respeito dos problemas de otimização. Esta seção foi dividida em três questões.

Questão 05

Voltando ao bazar da Questão 01, suponha que, após uma pesquisa de mercado, a turma descobriu que o Lucro Diário L (em reais) depende do preço p (em reais) de cada peça, de acordo com a função:

$$L(p) = -2p^2 + 80p - 600$$

- Qual seria o lucro se o preço de cada peça fosse R\$ 15,00?
- Qual deve ser o **preço** p da peça para que o bazar tenha o **lucro máximo** possível?
- Qual é esse **lucro máximo**?

Essa questão teve como foco principal a aplicação do conteúdo de função quadrática e de suas propriedades. Ela foi dividida em três itens: o item a) solicitava o cálculo do valor da função em um ponto específico, enquanto os itens b) e c) tinham como objetivo a determinação do valor máximo assumido pela função, o que envolve a identificação das coordenadas do vértice. Para a resolução, esperava-se que os estudantes mobilizassem conceitos já trabalhados na 1ª série do Ensino Médio, como a forma algébrica da função quadrática e a interpretação do vértice.

Dos 15 estudantes, 13,3% deixaram todos os itens em branco. No item a), 100% dos estudantes que responderam ao item conseguiram montar corretamente a função, porém apenas

66,7% deles chegaram ao resultado final, o que indica dificuldades nos procedimentos algébricos e nas operações básicas matemáticas. Nos itens b) e c), somente 26,7% dos estudantes conseguiram recordar e aplicar a fórmula do vértice, evidenciando fragilidades na compreensão das propriedades da função quadrática, especialmente na determinação do ponto de máximo.

Tabela 10 – Desempenho dos Estudantes na Questão 05

Categoria de Resposta	Nº de Alunos	Percentual (%)
Totalmente Correta	4	26,7%
Parcialmente Correta	9	60,0%
Incorreta	2	13,3%

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Questão 06 (ENEM 2024)

Um fazendeiro pretende construir um galinheiro ocupando uma região plana de formato retangular, com lados de comprimentos L metros e C metros. Os lados serão cercados por telas de tipos diferentes. Nos lados de comprimento L , será utilizada uma tela cujo metro linear custa R\$ 20,00, enquanto, nos outros dois lados, uma que custa R\$ 15,00. O fazendeiro quer gastar, no máximo, R\$ 6.000,00 na compra de toda a tela necessária para o galinheiro, e deseja que o galinheiro tenha a maior área possível.

Qual será a medida, em metro, do maior lado do galinheiro?

A Questão 06 teve como foco principal a aplicação do conteúdo de função quadrática em um problema de otimização, exigindo a determinação da maior área possível sob uma restrição de custo. Para sua resolução, esperava-se que os estudantes mobilizassem conceitos de modelagem de funções a partir de enunciados, o isolamento de variáveis e a identificação das coordenadas do vértice (x_v e y_v). Diferente das questões anteriores, esta exigia uma transição complexa entre a equação do custo e a lei de formação da área, o que representou o maior desafio para a turma.

Nessa questão, apenas 3 estudantes (20%) apresentaram a resposta correta. Observou-se que nenhum dos estudantes conseguiu modelar a situação por meio de uma função, evidenciando dificuldades na tradução do problema para a linguagem matemática. Os três estudantes que acertaram recorreram à estratégia de tentativa e erro, ajustando valores até atender às condições do problema, sem o uso de procedimentos algébricos formais. Esse resultado indica fragilidades no processo de modelagem matemática e na utilização de ferramentas analíticas para a resolução

de problemas de otimização.

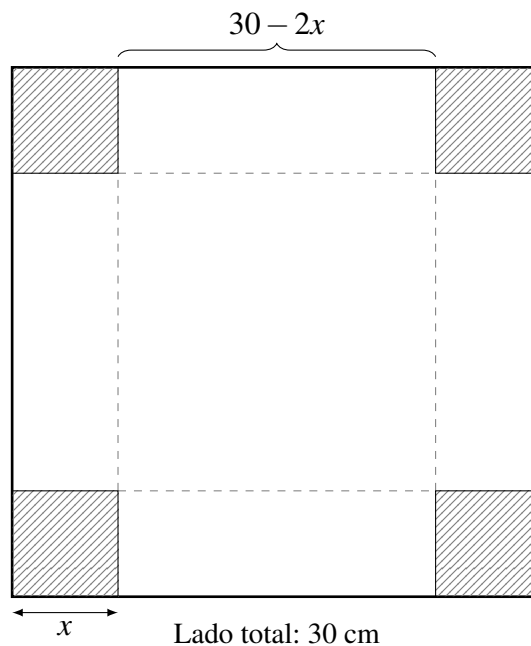
Tabela 11 – Desempenho dos Estudantes na Questão 06

Categoria de Resposta	Nº de Alunos	Percentual (%)
Totalmente Correta	3	20,0%
Parcialmente Correta	0	0,0%
Incorreta	12	80,0%

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Questão 07

Na sua aula de gastronomia, você recebe uma folha de papel manteiga quadrada de 30 cm de lado. Você precisa fazer uma caixa (sem tampa) para armazenar bombons, cortando quadrados iguais de x cm de lado em cada um dos quatro cantos e dobrando as abas para cima, como mostra a figura abaixo.



- Se você cortar quadrados de $x = 5$ cm de lado, qual será o volume da caixa formada? (Lembre-se: $\text{Volume} = \text{Comprimento} \times \text{Largura} \times \text{Altura}$).
- (Pergunta principal)** Como você faria para descobrir qual o tamanho do corte x que cria a caixa com o **maior volume possível**? Explique qual seria sua *estratégia* ou *plano* para encontrar esse valor.

A questão citada teve como objetivo avaliar a percepção geométrica e a capacidade de planejamento estratégico dos estudantes diante de um problema de otimização de volume. Essa questão foi dividida em dois itens, que exigiam no item a) a aplicação de operações aritméticas básicas para o cálculo de volume, enquanto o item b) solicitava a descrição de uma estratégia para encontrar o valor máximo da função. Nesse caso, era esperada dos estudantes a explicação dos conhecimentos de geometria espacial e a demonstração das noções iniciais de análise funcional, mesmo sem o domínio formal do cálculo diferencial.

Analisando as respostas dos estudantes, observou-se que apenas 2 estudantes (13,3%) resolveram corretamente todos os itens. No item a), observou-se que a maioria dos estudantes apresentou dificuldades no cálculo do volume da caixa, possivelmente relacionadas a lacunas de conhecimentos prévios sobre grandezas geométricas. No item b), embora alguns estudantes tenham apresentado comentários pertinentes sobre a estratégia para maximizar o volume, nenhuma das respostas apresentou modelagem algébrica, caracterizando abordagens predominantemente intuitivas. Outros 2 estudantes (13,3%) apresentaram respostas parcialmente corretas, enquanto 11 estudantes (73,4%) não conseguiram responder adequadamente à questão.

Tabela 12 – Desempenho dos Estudantes na Questão da Caixa sem Tampa

Categoria de Resposta	Nº de Alunos	Percentual (%)
Totalmente Correta	2	13,3%
Parcialmente Correta	2	13,3%
Incorreta	11	73,4%

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

O estudante 03 respondeu corretamente à questão demonstrando entendimento acerca do que se pediu e domínio dos conteúdos requisitados. No item a), identificou corretamente as dimensões da caixa ao considerar o corte de quadrados de $x = 5$ cm, reconhecendo que o comprimento e a largura da base passam a medir $30 - 2 \cdot 5 = 20$ cm e que a altura corresponde ao valor de x . Assim, calculou corretamente o volume da caixa como $V = 20 \cdot 20 \cdot 5 = 2000 \text{ cm}^3$.

Figura 5 – Resposta dada pelo estudante 03 para a questão 07

x

a) Se você cortar quadrados de $x = 5$ cm de lado, qual será o volume da caixa que você formou? (Lembre-se: Volume = Comprimento \times Largura \times Altura).

$30 - 10 = 20$ $V = 2000 \text{ cm}^3$

$V = 20 \cdot 20 \cdot 5$

b) (Pergunta principal) Como você faria para descobrir qual o tamanho do corte x que cria a caixa com o maior volume possível? (Não precisa achar o valor exato, explique apenas qual seria sua estratégia ou plano para encontrar esse valor).

$V = C \cdot L \cdot h$

$V = (30 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x$

$V = (30 - 2x)^2 \cdot x$

$V = (9x^2 - 120x + 900) \cdot x$

$V = 4x^3 - 120x^2 + 900x$

↳ fazendo o cálculo de máximo nesse desenvolvimento, só que tem que ter cuidado pois tem que ter mais atenção nesse desenvolvimento na forma de 2º grau

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Na letra (b), o estudante demonstrou um nível mais elevado de compreensão ao construir explicitamente a função volume em função da variável x . Partindo da expressão geral $V = C \cdot L \cdot h$, obteve $V(x) = (30 - 2x)(30 - 2x) \cdot x = (30 - 2x)^2 x$, expandindo-a corretamente até chegar à função polinomial $V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$.

Além da construção algébrica adequada, o estudante indicou, de forma coerente, que a determinação do maior volume estaria associada ao estudo do máximo da função, mencionando a necessidade do uso de ferramentas do cálculo para encontrar esse valor. Embora não tenha realizado o procedimento completo de otimização, sua estratégia está alinhada com o que se espera em termos de modelagem matemática e interpretação funcional do problema.

4.2 Aplicação do material didático

Após a aplicação e análise da avaliação diagnóstica de entrada, foi elaborado um material didático dividido em quatro partes, partindo dos conteúdos prévios presentes nessa dissertação. Os temas trabalhados nesse material têm como objetivo revisar conteúdos básicos sobre funções, introduzir a ideia de taxa de variação e adentrar em conceitos de limites e derivadas, a fim de capacitar os estudantes a resolverem problemas de otimização sem a necessidade da memorização

das fórmulas apresentadas na 1ª série do Ensino Médio. Nesta fase, foram aplicadas apenas as duas partes iniciais.

Os interessados podem acessar o material didático publicado no Portal eduCapes com o seguinte título: **FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVADAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA, COM ÊNFASE EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO.**

Diante disso, a análise deste trabalho concentra-se na aplicação das duas partes iniciais do material didático, conforme detalhado abaixo:

- **Parte I – Revisão de conceitos de função e suas propriedades:** Esta etapa foi fundamental para nivelar os conhecimentos da turma. O cronograma reservou aulas para a exploração de domínios, imagens e interpretação de gráficos, buscando sanar as lacunas identificadas sobre funções, área e volume. O foco foi sair da memorização mecânica e alcançar uma visão investigativa, preparando o terreno para ferramentas mais voltadas aos problemas de otimização.
- **Parte II – Estudo da taxa de variação média e instantânea:** Nesta fase, a intervenção avançou para a introdução da ideia de movimento. As aulas foram dedicadas a construir o conceito de taxa de variação de forma intuitiva e posteriormente formalizada. Essa etapa foi o elo necessário para que os estudantes compreendam limite e derivada não como uma fórmula isolada, mas como uma ferramenta capaz de resolver problemas reais de otimização, especialmente os aplicados ao contexto da Gastronomia.

O cronograma permitiu que cada atividade estimulasse o protagonismo dos discentes, incentivando-os a formular hipóteses e testar estratégias. Embora o produto educacional completo preveja módulos subsequentes de Limites e Derivadas, a decisão de aprofundar as duas partes iniciais do material didático garantiu uma base sólida, evidenciando que a continuidade do projeto é essencial para facilitar a resolução de problemas de máximos e mínimos sem recorrer ao uso excessivo de "macetes" ou fórmulas decoradas.

Dessa forma, a primeira parte do material didático foi dividida em quatro seções: Introdução à função e função afim, que necessitou de dois encontros de 50 minutos, função quadrática - gráfico e zeros, que também necessitou de duas aulas de 50 minutos, função quadrática - vértice e problemas, que precisou de duas aulas de 50 minutos e, por fim, função exponencial e logaritmos, que precisou de quatro encontros, totalizando um tempo maior que o planejado inicialmente. Ou seja, pelo fato dos estudantes apresentarem uma acentuada defasagem nos conteúdos de função,

foi necessária a utilização de 10 aulas de 50 minutos para a conclusão dessa primeira parte. Essa organização foi fundamental para que a intervenção ocorresse a partir das necessidades reais dos estudantes da ECIT Irmã Stefanie, diagnosticadas na avaliação inicial, garantindo a base necessária para o prosseguimento do estudo de taxas de variação. Além disso, em todos esses encontros foram trabalhados problemas contextualizados e aplicáveis ao cotidiano.

Para fortalecer o trabalho nessa primeira parte do material didático, foram integradas diferentes metodologias ativas que buscou abacar com a mera repetição de fórmulas. Dessa forma, utilizou-se a abordagem investigativa para que os estudantes pudessem formular hipóteses e refletir sobre os resultados obtidos, aliada a aulas expositivas e dialogadas que permitiram uma construção conjunta do conhecimento. Além disso, aplicou-se a metodologia da Sala de Aula Invertida (SAI), na qual eram propostos temas sobre funções para os discentes estudarem, otimizando o tempo em sala para a resolução de problemas práticos e discussões críticas. Essas metodologias fortaleceram o aprendizado dos estudantes e motivaram um amadurecimento acerca dos procedimentos matemáticos, pois:

As metodologias ativas de ensino-aprendizagem promovem maior engajamento dos alunos, estimulam o pensamento crítico e a autonomia, além de possibilitar a aplicação prática dos conteúdos, tornando o aprendizado mais significativo e conectado à realidade dos estudantes. (Silva, Lira e Ruela (2024))

Para cada aula, foram estruturados slides com os temas selecionados e, durante as aulas, discutíamos os conteúdos, víamos exemplos e usávamos o que o estudante já conhecia ou lembrava daquele assunto. Nas duas primeiras aulas, pudemos relembrar a ideia de função e como ela surgiu de uma relação entre dois conjuntos não vazios, nesse momento, os estudantes participaram e deram muitas contribuições. Ainda nessas aulas relembramos como definimos uma função afim e finalizamos deixando uma proposta de estudo, para que os estudantes revissem função quadrática e apresentassem seus resultados nas aulas seguintes, principalmente com relação à definição, gráfico e zeros.

Na aula seguinte, ainda na mesma semana, os estudantes trouxeram a definição, como se constrói o gráfico de uma função quadrática e a forma de achar os zeros da função com a fórmula de Bháskara, que eles não sabiam como desenvolver, e nesse momento fizemos a demonstração juntos. E da mesma forma seguimos para o terceiro momento, em que estudamos vértice de uma função quadrática e resolvemos alguns problemas de máximos e mínimos usando a fórmula vista na 1ª série.

A conclusão da primeira parte do material didático foi dedicada ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas, etapa que exigiu um esforço analítico mais acentuado por parte dos discentes. Enquanto a função exponencial foi abordada sob uma perspectiva de revisão, conectando conceitos de crescimento e decréscimo já vistos anteriormente, a introdução aos logaritmos apresentou-se como um conteúdo inteiramente novo para a maioria dos estudantes. Essa transição para uma notação menos intuitiva gerou desafios na compreensão das propriedades operatórias, o que demandou quatro encontros de 50 minutos, um tempo superior ao planejamento inicial. Foi necessário realizar uma mediação constante para que os alunos pudessem desmistificar o uso dos logaritmos, focando na sua aplicação como ferramenta de inversão da exponencial, garantindo assim que a defasagem conceitual fosse superada antes do avanço para os tópicos de cálculo.

Para finalizar a aplicação programada para este trabalho, partimos para a segunda parte do material didático, que, por possuir uma estrutura mais delimitada, demandou um cronograma menor em comparação à etapa anterior. A estratégia de ensino foi centrada na utilização de recursos visuais e tecnológicos, materializados em dois blocos de projeções digitais: o primeiro focou na formalização matemática das taxas de variação média e instantânea, enquanto o segundo apresentou aplicações diretas dessas ferramentas, com ênfase na interpretação geométrica da reta tangente e na análise física da velocidade escalar. Cada intervenção foi distribuída em encontros de duas aulas de 50 minutos, resultando em um processo extremamente produtivo, no qual os estudantes conseguiram visualizar a transição do conceito algébrico de função para a dinâmica do cálculo. Essa abordagem permitiu que os discentes compreendessem a utilidade prática das derivadas antes mesmo de sua formalização rigorosa, consolidando a ideia de que a matemática é uma ferramenta capaz de descrever fenômenos de mudança e movimento presentes no cotidiano.

Como instrumento avaliativo, foi elaborada uma rubrica de avaliação detalhada para o acompanhamento contínuo do desenvolvimento dos estudantes ao longo da intervenção. O uso desse recurso foi fundamental para sistematizar a observação das competências adquiridas, indo além da correção de erros e acertos. Além de fornecer um feedback mais claro sobre a evolução individual, a rubrica serviu como base para a geração da nota final da disciplina de Matemática no quarto bimestre, garantindo que o desempenho nas atividades práticas e investigativas do material didático fosse devidamente valorizado na composição da média escolar.

Após a análise criteriosa dos resultados obtidos e do desempenho dos estudantes após o desenvolvimento das duas primeiras partes do material didático, evidenciou-se de forma

clara e consistente a necessidade de dar continuidade à aplicação das duas últimas partes previstas no estudo. Os indícios observados ao longo da intervenção reforçam que a pesquisa contempla, de maneira intencional, uma abordagem qualitativa para a aplicação do material didático remanescentes, uma vez que o foco está na compreensão dos processos de aprendizagem, nas estratégias mobilizadas pelos alunos e na evolução conceitual ao longo do percurso formativo.

Cabe destacar que a proposta pedagógica foi aplicada a estudantes da 2ª série do Ensino Médio da ECIT Irmã Stefanie, levando em consideração dificuldades conceituais previamente identificadas por meio de uma avaliação diagnóstica inicial, especialmente no que se refere ao estudo de funções, área, volume e interpretação algébrica. Diante desse cenário, as atividades desenvolvidas nas duas primeiras partes do material didático foram planejadas com o propósito de ir além da simples resolução mecânica de exercícios, priorizando a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Para isso, buscou-se incentivar os estudantes a formular hipóteses, testar diferentes estratégias de resolução e refletir criticamente sobre os resultados obtidos.

A análise qualitativa das produções gráficas e resoluções escritas, desenvolvidas durante a aplicação das duas etapas iniciais do material didático, revela o impacto positivo de uma abordagem metodológica estruturada para o primeiro contato com o ensino de derivadas. Além disso, observou-se que, mesmo diante de entraves na manipulação algébrica e fórmulas tradicionais de otimização, os estudantes demonstraram uma capacidade notável de interpretar os fenômenos propostos, mobilizando esquemas intuitivos para o enfrentamento das situações-problema. Esses indícios de aprendizagem confirmam a possibilidade de dar continuidade ao cronograma planejado, permitindo que a construção dos conceitos de máximos e mínimos ocorra de forma gradativa e fundamentada na investigação. Tal percurso é essencial para consolidar o entendimento das derivadas como uma ferramenta de leitura da realidade, distanciando o processo de ensino da simples memorização e promovendo uma formação matemática mais crítica e autônoma.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das dificuldades no processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica, é evidente a necessidade de buscar meios que facilitem o entendimento dos estudantes e fortaleçam a construção de conhecimento. Para isso, a procura por métodos matemáticos que ajudem no ensino de funções contínuas e na introdução de derivadas numa turma de Ensino Médio se torna viável e necessário. Dessa forma, o uso de metodologias ativas fortalece ainda mais esse processo, pois os estudantes demonstram muitas dificuldades na interpretação de situações-problemas e na modelagem matemática, reflexo das lacunas conceituais construídas ao longo do Ensino Fundamental.

A aplicação da avaliação diagnóstica de entrada deixou essas lacunas ainda mais evidentes, necessitando de uma intervenção inicial antes de discutir os conceitos matemáticos mais formais, pois, mesmo alguns estudantes demonstrando ter maior intimidade com os conteúdos básicos de função, a grande maioria ainda tinha muita fragilidade a respeito dessa base. Assim, a aplicação das duas etapas iniciais do material didático possibilitou analisar que, embora a maioria dos estudantes ainda demonstre insegurança em relação ao uso de procedimentos algébricos mais estruturados, houve avanços importantes na compreensão conceitual e na capacidade de análise de situações reais. Porque, mesmo com resultados negativos na avaliação diagnóstica, os estudantes conseguiram responder muitos questionamentos realizados durante as aulas.

Nesse sentido, a aplicação de intervenções pedagógicas como essa fortalece a construção dos conhecimentos matemáticos e descarta a ideia de que a disciplina é apenas memorização de fórmulas, como é vista por muitos estudantes. Além disso, o contato com problemas de otimização, mesmo sem o conhecimento de derivadas, demonstra um caminho promissor no fortalecimento do senso investigativo, crítico e melhora a argumentação dos estudantes, que são competências fundamentais para o caminho acadêmico e profissional.

Apesar do produto educacional propor quatro etapas, por limitação de tempo foram aplicadas apenas as duas iniciais, mesmo assim os resultados observados através das avaliações internas demonstraram uma grande evolução dos estudantes, principalmente quando analisamos os dados dessa turma na finalização do ano letivo, não indo nenhum estudante fazer prova final em nenhuma disciplina, isso é resultado de um amadurecimento pessoal e acadêmico que o projeto contribuiu para a construção.

Para finalizar, fica claro que a inserção gradual e contextualizada dos conceitos de Cálculo

no Ensino Médio, especialmente focado em problemas de otimização, contribui significativamente para a redução das dificuldades enfrentadas pelos estudantes, sejam na continuidade do Ensino Médio, ou quando ingressarem no Ensino Superior. Espera-se que este trabalho fomente novas discussões a respeito desse tema e incentive a ampliação desses meios de se estudar esse conteúdo na Educação Básica, e que seja explorado todo o material didático por meio de outras estratégias metodológicas.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 10520: Informação e documentação — Citações em documentos — Apresentação**. Rio de Janeiro, 2023.

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. de. **Prisma matemática: conjuntos e funções: ensino médio: manual do professor**. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020. Área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. ISBN 978-65-5742-016-4.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, DF: Ministério da Educação / Secretaria de Educação Fundamental, 2000. Acesso em: 11 ago. 2025. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/pcn_ensmed.pdf>.

_____. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Acesso em: 11 ago. 2025. Disponível em: <<https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/base-nacional-comum-curricular-bncc>>.

CAIRES, J. B. S.; NASCIMENTO, J. C. d. Um estudo de funções polinomiais de 1º e 2º graus em ambiente informatizado. **Revista Eventos Pedagógicos**, v. 3, n. 3, p. 390–409, 2012.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2010.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar: conjuntos, funções**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 1. ISBN 978-85-357-1680-1.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar: limites, derivadas, noções de integral**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 8. ISBN 978-85-357-1756-3.

MORENO, A. C. Brasil cai em ranking mundial de educação em ciências, leitura e matemática. **G1**, 2016. Disponível em: <<https://g1.globo.com/educacao/noticia/brasil-cai-em-ranking-mundial-deeducacao-em-ciencias-leitura-e-matematica.ghtml>>.

PELIZZARI, A.; KRIEGL, M. d. L.; BARON, M. P.; FINCK, N. T. L.; DOROCINSKI, S. I. Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel. **PEC**, Curitiba, v. 2, n. 1, p. 37–42, jul. 2001–2002.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese (Tese de Doutorado) — Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, 2003. Área de Ensino de Ciências e Matemática. Orientador: Prof. Dr. Nilson José Machado.

SILVA, A. L. d. R.; LIRA, B. R. F.; RUELA, G. d. A. A importância das metodologias ativas de ensino-aprendizagem no ensino superior: uma revisão integrativa. **Research, Society and Development**, v. 14, n. 3, p. e7313445360, 2024. Acesso em: 10 ago. 2025. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/380171828_Importancia_das_metodologias_ativas_de_ensino-aprendizagem_no_ensino_superior_Uma_revisao_integrativa>.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1. Tradução de EZ2 Translate. Título original: Calculus: early transcendentals. ISBN 978-85-221-1461-0.

APÊNDICE A – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE ENTRADA

A avaliação diagnóstica de entrada constituiu uma etapa fundamental desta pesquisa, sendo utilizada como instrumento de sondagem para identificar os conhecimentos prévios e as lacunas de aprendizagem dos estudantes da 2ª série do Ensino Médio no que se refere aos conteúdos de funções e à noção de determinação de máximos e mínimos.

A avaliação diagnóstica foi estruturada em duas seções. A primeira abordou conceitos básicos de funções e foi composta por quatro questões: a primeira envolveu a modelagem de uma função afim; a segunda tratou da análise gráfica, contemplando crescimento, decrescimento e continuidade; a terceira abordou a modelagem de uma função quadrática; e a quarta envolveu a modelagem e a análise de uma função exponencial.

A segunda seção teve como foco problemas de otimização e foi composta por três questões: a quinta tratou da determinação do lucro máximo na venda de peças em um bazar; a sexta correspondeu a uma questão presente no ENEM 2024, envolvendo a maximização de áreas; e a sétima concentrou-se na análise do maior volume possível para uma caixa de papelão.

Aos interessados, a avaliação diagnóstica, conforme foi preparada, diagramada e aplicada aos estudantes, encontra-se nas páginas a seguir.



Universidade Estadual da Paraíba

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/UEPB



PROFMAT

E.E.C.I.T. IRMÃ STEFANIE	Data: ____/____/____
Protagonista:	Turma: 2ª SÉRIE
Disciplina: Matemática	Turno: Integral
Professor(a): Romário de Jesus	4º PERÍODO

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE ENTRADA

Tema: Funções e Noções de Otimização

Objetivo: Verificar os conhecimentos prévios sobre conceitos de funções (afim, quadrática e exponencial) e a capacidade intuitiva de resolver problemas de otimização.

Instruções: Leia atentamente cada questão e responda com clareza. Deixe todos os seus cálculos e raciocínios registrados na folha.

Seção 1: Conceitos Básicos de Funções

Questão 1:

Um grupo de estudantes está organizando um bazar para ajudar na festa de formatura, e para isso terá um custo fixo (campanha de doações, sacolas, organização do espaço) no valor de R\$ 80,00. Além disso, cada peça vendida tem um custo específico de R\$ 3,00. O preço de venda para cada peça é de em média R\$ 10,00.

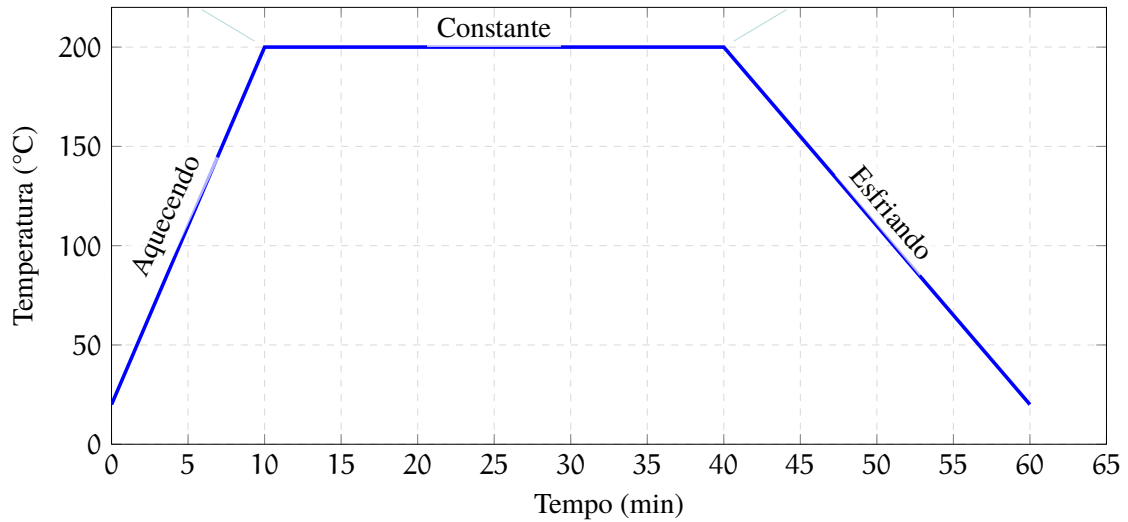
- a) Escreva uma função $C(x)$ que represente o **Custo total** do bazar em um dia que ele vende x peças.

- b) Escreva uma função $R(x)$ que represente a **Receita total** (dinheiro arrecadado) em um dia que ele vende x peças.

- c) Escreva uma função $L(x)$ que represente o **Lucro** (Receita menos Custo) em um dia que ele vende x peças.

Questão 2:

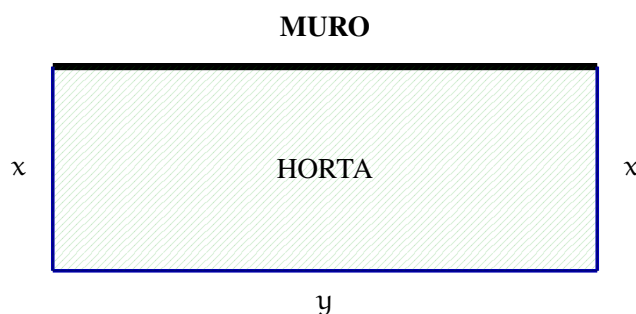
O gráfico abaixo mostra a temperatura (em °C) dentro de um forno industrial usado no curso de gastronomia da EECIT Irmã Stefanie, desde o momento em que ele é ligado (assumindo uma temperatura ambiente média de 20°C) até ser desligado e esfriar.



- Em quais intervalos de tempo a temperatura estava **aumentando**?
- Em quais intervalos de tempo a temperatura estava **diminuindo**?
- Em qual intervalo de tempo a temperatura permaneceu **constante**?
- Qual foi a temperatura **máxima** atingida pelo forno?

Questão 3:

A turma da 2ª série da ECIT Irmã Stefanie, do curso técnico em gastronomia, quer construir uma horta retangular para plantar temperos. A escola cedeu uma área ao lado de um muro. A turma tem 40 metros de tela e vai usá-la para cercar os outros três lados da horta (dois lados de medida x e um lado de medida y), como na figura abaixo.



Os estudantes calcularam que, para plantar tudo o que precisam, a horta deve ter uma área de exatamente 150 m^2 . Quais devem ser as medidas x e y da horta para que isso aconteça? (Dica: primeiro, escreva uma equação para a área).

Questão 4:

Miguel Victor, da turma da 2ª série de Gastronomia da ECIT Irmã Stefanie, está fazendo um experimento sobre segurança alimentar. Ele analisa uma amostra de carne contaminada com a bactéria *Escherichia coli* (*E. coli*), mantida em temperatura ideal para proliferação (37 °C).

Sua observação (tempo $t = 0$) se inicia com uma população de 500 bactérias. Em condições ideais, a *E. coli* é conhecida por dobrar sua população a cada 20 minutos.

- a) Sabendo que a população dobra a cada 20 minutos, ela se multiplica por quanto em 1 hora?

- b) Escreva a função $N(t)$ que modela o número de bactérias N em relação ao tempo t , medido em **horas**.

- c) Quantas bactérias haverá na amostra após 2 horas de observação?

- d) Após quantas horas a amostra atingirá uma população de 4.000 bactérias?

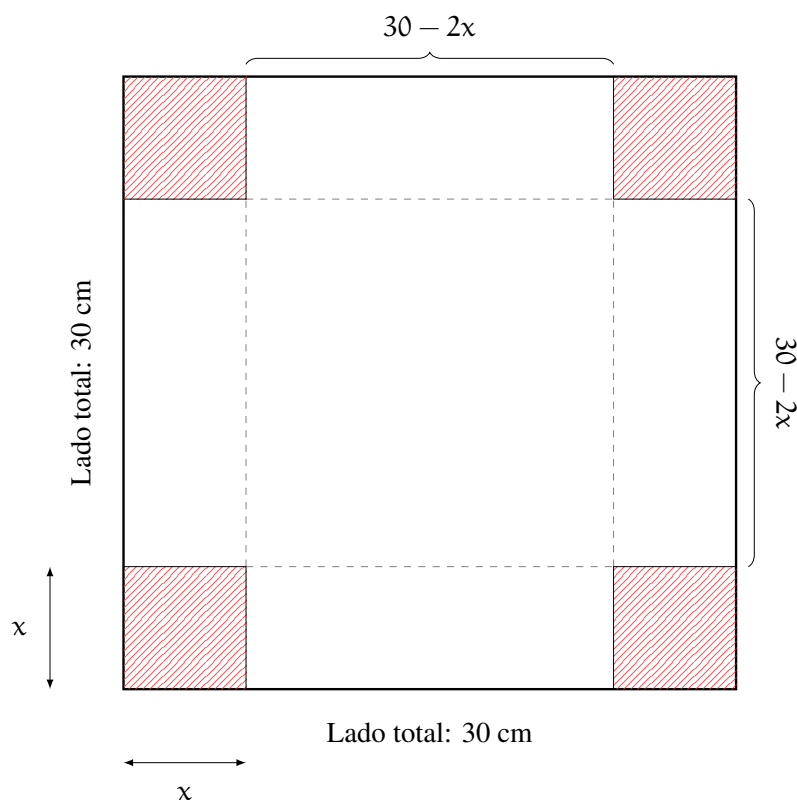
Questão 6:

(ENEM 2024) Um fazendeiro pretende construir um galinheiro ocupando uma região plana de formato retangular, com lados de comprimentos L metro e C metro. Os lados serão cercados por telas de tipos diferentes. Nos lados de comprimento L metro, será utilizada uma tela cujo metro linear custa R\$ 20,00, enquanto, nos outros dois lados, uma que custa R\$ 15,00. O fazendeiro quer gastar, no máximo, R\$ 6000,00 na compra de toda a tela necessária para o galinheiro, e deseja que o galinheiro tenha a maior área possível.

Qual será a medida, em metro, do maior lado do galinheiro?

Questão 7:

Na sua aula de gastronomia, você recebe uma folha de papel manteiga quadrada de 30 cm de lado. Você precisa fazer uma caixa (sem tampa) para armazenar bombons, cortando quadrados iguais de x cm de lado em cada um dos quatro cantos e dobrando as abas para cima, como mostra a figura.



- a) Se você cortar quadrados de $x = 5$ cm de lado, qual será o volume da caixa que você formou? (Lembre-se: $\text{Volume} = \text{Comprimento} \times \text{Largura} \times \text{Altura}$).
- b) **(Pergunta principal)** Como você faria para descobrir qual o tamanho do corte x que cria a caixa com o **maior volume possível**? (Não precisa achar o valor exato, explique apenas qual seria sua *estratégia* ou *plano* para encontrar esse valor).