



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CÂMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT**

ROMÁRIO DE JESUS

**MATERIAL DIDÁTICO: ENSINO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS E
DERIVADAS NO ENSINO BÁSICO, COM ÊNFASE EM PROBLEMAS
DE OTIMIZAÇÃO**

**CAMPINA GRANDE - PB
2026**

ROMÁRIO DE JESUS

MATERIAL DIDÁTICO: ENSINO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVADAS NO ENSINO BÁSICO, COM ÊNFASE EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Produto Educacional apresentado à coordenação do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e Suas Tecnologias.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

J58e Jesus, Romário de.
Material didático [manuscrito] : ensino de funções contínuas e derivadas no ensino básico, com ênfase em problemas de otimização / Romário de Jesus. - 2026.
53 f. : il. color.

Digitado.
Produto Educacional apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/UEPB
"Orientação : Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo,
Departamento de Matemática - CCT".

1. Funções contínuas. 2. Derivadas. 3. Problemas de otimização. I. Título

21. ed. CDD 372.7

APRESENTAÇÃO

O produto educacional a seguir propõe um guia prático e teórico a respeito do ensino de funções contínuas e derivadas na educação básica. Ele é composto por quatro partes que servirão para professores guiarem suas aulas, bem como para os estudantes seguirem e entenderem as formas de se resolver problemas de otimização usando derivadas.

Antes de chegar no conteúdo final, ou nas propostas de problemas de otimização, os estudantes poderão mergulhar sobre as funções e suas propriedades, compreender taxas de variação, ver os conceitos e ideia que o limite traz, além de estudar as formas de derivar funções e entender algumas aplicações. Os problemas de otimização podem ser modelados de inúmeras maneiras, podendo sempre incluir a realidade dos estudantes, para que ele se sinta pertencente àquele momento e interaja muito mais na aula.

Sumário

2	FUNÇÃO CONTINUA	8
2.1	Função afim	9
2.1.1	Domínio, contradomínio e Imagem da Função	10
2.2	Função quadrática	13
2.2.1	Concavidade	13
2.2.2	Zero da função quadrática	14
2.2.3	Vértice da parábola	16
2.3	Hora de praticar!	17
2.4	Função exponencial e logarítmica	18
2.4.1	Gráfico da função exponencial	18
2.4.2	Logaritmos	19
2.4.3	Propriedades dos logaritmos	20
2.4.4	Função logarítmica	22
2.5	Hora de praticar!	23
3	TAXA DE VARIAÇÃO	25
3.1	Taxa de variação da função afim	26
3.2	Taxa de variação da função quadrática	27
3.3	Reta tangente	29
3.4	Hora de praticar!	32
4	LIMITE	34
4.1	A ideia de limite	34
4.2	Propriedades do limite de uma função	37
4.3	Limite de uma função polinomial	37
4.4	Limites laterais	38
4.5	Hora de praticar!	41
5	DERIVADAS	43
5.1	Conceito e interpretação	43
5.2	Hora de praticar!	46
5.3	Interpretação Geométrica	46
5.4	Diferenciabilidade Implica Continuidade	47
5.5	Função Derivada	47
5.6	Análise do Comportamento de funções através da derivada	49
5.6.1	Crescimento e decrescimento	49
5.6.2	Concavidade e a segunda derivada	49
5.7	Hora de praticar!	51

5.8	Problemas de otimização	52
5.8.1	Problema 01: Maximização do lucro na venda de empadas . . .	52
5.8.2	Problema 02: Otimização de Embalagens	52
	REFERÊNCIAS	53

HABILIDADES DA BNCC

EM13MAT101 – Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT103 - Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

EM13MAT302 - Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT302 – Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT303 – Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

EM13MAT304 – Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

EM13MAT313 - Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

EM13MAT401 - Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

EM13MAT402 - Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

EM13MAT403 - Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

EM13MAT501 - Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representa-

ção é de função polinomial de 1º grau.

EM13MAT502 - Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

EM13MAT503 - Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.



PARTE I

**FUNÇÃO CONTÍNUA E
GRÁFICOS DE FUNÇÃO
CONTÍNUA**

FUNÇÃO CONTÍNUA

O estudo das funções e continuidade é crucial no entendimento da Matemática, pois permite entender como os fenômenos variam e se comportam. As funções são relações que associam cada elemento de um conjunto a exatamente um elemento de outro, sendo amplamente utilizadas para descrever situações do mundo real, como movimento, educação financeira, crescimento populacional e fenômenos físicos, químicos ou biológicos. Enquanto continuidade, por sua vez, trata da ausência de quebras ou saltos em uma função, garantindo que pequenas mudanças na entrada resultem em pequenas mudanças na saída. A análise da continuidade é essencial para o cálculo, além de ser uma ferramenta indispensável na modelagem matemática e em diversas aplicações científicas e tecnológicas.

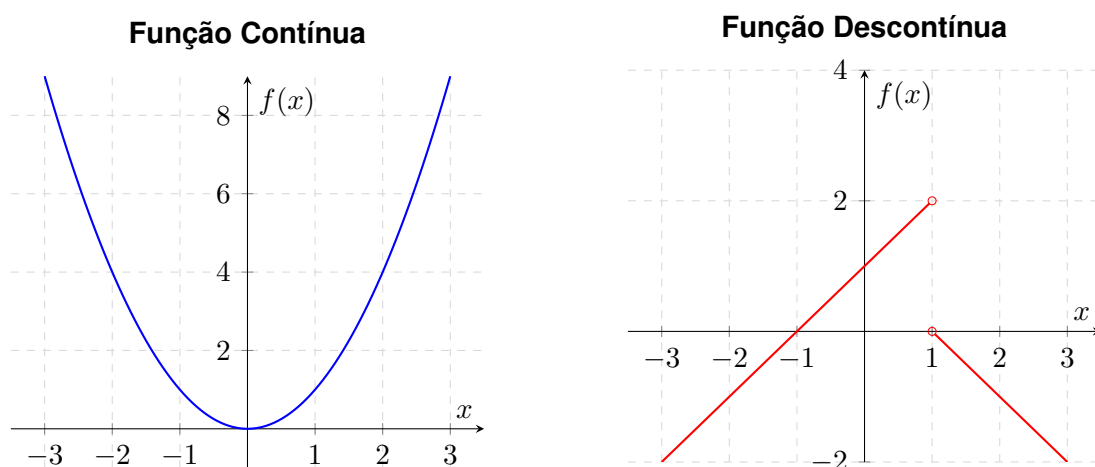
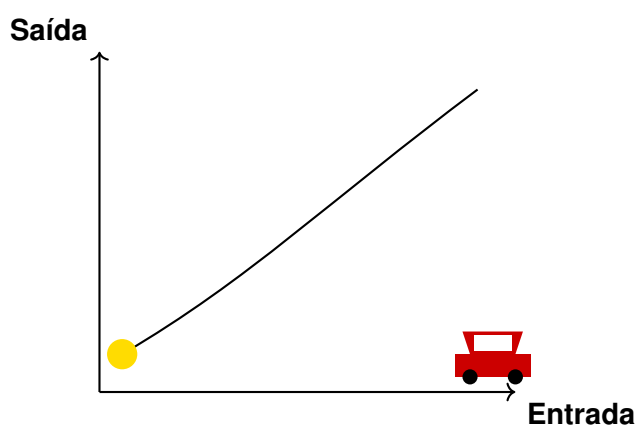


Figura 1: Comparação gráfica entre uma função contínua, cujo traço não possui interrupções, e uma função descontínua, que apresenta um "salto" em um ponto específico.

Além disso, no nosso dia a dia, frequentemente nos deparamos com situações em que diferentes grandezas estão relacionadas por uma dependência direta. Imagine, por exemplo, em uma conta de energia elétrica: quanto mais tempo utilizamos aparelhos eletrônicos, maior será o valor a ser pago ao final do mês. Nesse caso, o custo a ser pago depende diretamente da quantidade de energia consumida. Outro exemplo comum é em uma corrida de táxi: quanto maior o trajeto percorrido, maior será o valor cobrado por essa viagem. Essas situações mostram como vários contextos cotidianos podem ser descritas e analisadas por meio de relações de dependência entre grandezas.



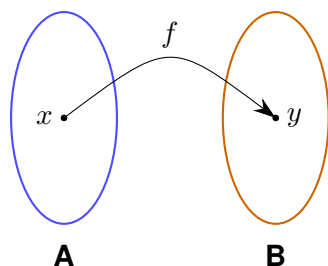
Função afim

Tomando dois conjuntos não vazios A e B , definimos função, como sendo a relação que associa cada elemento x de A a um único elemento y de B .

Usamos a seguinte notação: $f : A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: f é uma função de A em B). A função f transforma x de A em y de B . Escrevemos isso assim:

$$y = f(x).$$

Podemos visualizar essa ideia no diagrama a seguir:

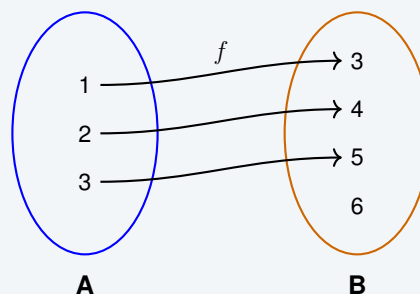


Em outras palavras, para ser função a relação deve ter duas características em comum: Todos os valores que podem ser assumidos pela variável independente são associados a valores da variável dependente. E Cada valor atribuído à variável independente está associado a um único valor da variável dependente.

Uma relação que possui essas duas características é chamada de **função**.

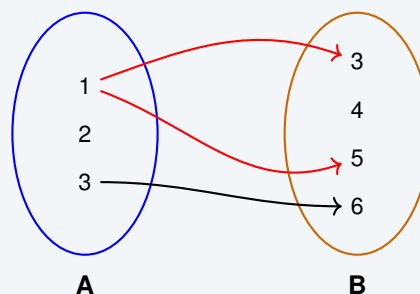
Exemplo

(a)



É uma função, pois todo elemento do conjunto A está associado a um **único** elemento do conjunto B .

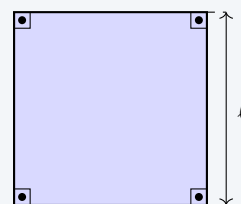
(b)



Não é uma função, pois o elemento 1 de A está associado a **mais de um** elemento de B (o 3 e o 5). Além disso, o elemento 2 de A não está associado a nenhum elemento de B .

Exemplo

Para determinar a área A de um quadrado, multiplicamos a medida de seu lado l por ela mesma, ou seja, elevamos l ao quadrado. Podemos representar esse cálculo por meio da fórmula $A = l^2$.



Considerando A e l números reais positivos, essa fórmula estabelece uma correspondência entre esses valores, de modo que a área de um quadrado é uma

função da medida de seu lado. Por exemplo, se l for igual a 5 cm , a área A será 25 cm^2 .

Observe algumas medidas do lado de um quadrado e da área correspondente.

Tabela 1: Tabela com alguns valores de área do quadrado

l (u.c.) [unidade de comprimento]	1	2	3	10	50	100
A (u.a.) [unidade de área]	1	4	9	100	2500	10000

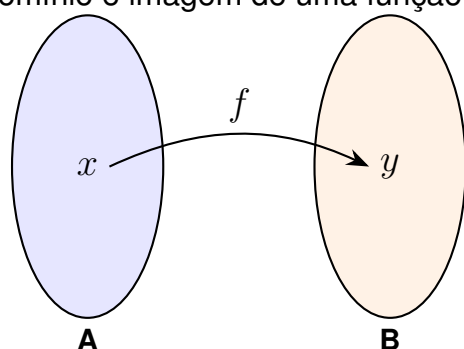
Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Como a área do quadrado depende da medida de seu lado, a variável independente é a medida do lado, e a variável dependente é a área. A fórmula da área de um quadrado pode ser interpretada como a lei de formação ou a lei de correspondência da função que relaciona a área A de um quadrado e a medida do lado l correspondente.

Domínio, contradomínio e Imagem da Função

Dada uma função f definida de A em B , dizemos que o conjunto A é domínio da função ($D(f)$) e o conjunto B é o contradomínio ($CD(f)$) da função. Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ chama-se imagem de x pela função f ou o valor da função f para $x \in A$, e o representamos por $f(x)$ (lê-se f de x). Assim, $y = f(x)$.

Figura 2: Demonstração do domínio, contradomínio e imagem de uma função



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

O conjunto de todos os valores de y é chamado conjunto imagem da função f e é indicado por $Im(f)$. Veja o exemplo:

Exemplo

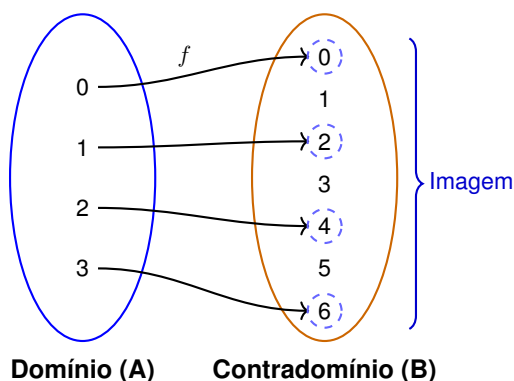
Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, consideremos a função $f : A \rightarrow B$ que transforma $x \in A$ em $2x \in B$.

Neste exemplo, dizemos que a função $f : A \rightarrow B$ é definida por $f(x) = 2x$ ou por $y = 2x$. Se usarmos a notação $x \xrightarrow{f} 2x$, estamos dizendo que a função f toma x em A e transforma em $2x$ de B . É perceptível que para caracterizar uma função é necessário conhecer seus três componentes: O domínio (A), o contradomínio (B) e a regra que associa cada elemento x de A a um único elemento $y = f(x)$ de B .

Neste exemplo, temos: o domínio $A = \{0, 1, 2, 3\}$, o contradomínio $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a regra $y = 2x$ e a imagem

$$Im(f) = \{0, 2, 4, 6\}.$$

Veja no diagrama:



Conforme os elementos do domínio e do contradomínio se ligam por meio de uma função, utilizamos algumas classificações importantes para descrevê-la. Entre as mais comuns, estão os termos **injetora**, **sobrejetora** e **bijetora**. Vamos entender o que cada uma significa.

Definição

Uma função $f : A \rightarrow B$ é *injetiva* (ou *injetora*) quando elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes de B , ou seja, não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A .

Podemos dizer então que uma função é injetora se, e somente se, $x_1 \neq x_2$ implicar $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição

Uma função $f : A \rightarrow B$ é *sobrejetiva* (ou *sobrejetora*) quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, f é sobrejetiva quando todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A , isto é, quando $Im(f) = B$.

Definição

Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetiva se ela for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Quando isso ocorre dizemos que há uma bijeção ou uma correspondência biunívoca entre A e B .

Exemplo

Vamos analisar a função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}_+$, onde $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Note que:

- i. Domínio: $D(f) = \mathbb{R}_+$.
- ii. Contradomínio: $CD(f) = \mathbb{R}$.
- iii. Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}_+$.
- iv. Injetiva: não é injetora pois se tomarmos $x_1 = -1 \neq 1 = x_2$, com $-1, 1 \in D(f)$, então $f(x_1) = 1^2 = (-1)^2 = f(x_2)$.
- v. Sobrejetiva: perceba que $CD(f) = \mathbb{R}$ enquanto $Im(f) = \mathbb{R}_+$, logo $Im(f) \neq CD(f)$, implicando que f não é sobrejetiva.
- vi. Bijetiva: como f não é sobrejetiva nem injetiva, então não é bijetiva.

Agora, que já entendemos o que é função, podemos definir formalmente **função afim**.

Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *função afim* quando existem números **a** e **b** tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Algumas funções afim e seus coeficientes.

(a) $f(x) = x + 1$ ($a = 1$ $b = 1$)

(b) $f(x) = -2x + 4$ ($a = -2$ $b = 4$)

(c) $f(x) = \frac{1}{5}x - 3$ ($a = \frac{1}{5}$ $b = -3$)

Exemplo

A turma da 2ª série da ECIT Irmã Stefanie está organizando a festa de formatura e precisa arrecadar dinheiro para cobrir os custos do evento. Eles decidiram vender camisetas personalizadas da turma por R\$ 30,00 cada. O custo fixo da confecção das camisetas é de R\$ 500,00, referente à arte, logística e taxas iniciais, mais R\$ 15,00 por camiseta produzida.

- Monte a função que representa o lucro $L(x)$ obtido pela turma em função do número x de camisetas vendidas.
- Qual será o lucro se forem vendidas 100 camisetas?
- Quantas camisetas precisam ser vendidas para que a turma comece a ter lucro?

Solução:

- (a) Vamos calcular a função do lucro, que é dada por:

$$\text{Lucro} = \text{Receita} - \text{Custo}.$$

A receita é quanto entra de dinheiro com a venda das camisetas:

$$R(x) = 30x.$$

R\$ 30,00 por camiseta vendida.

O custo é composto por:

- Um custo fixo de R\$ 500,00.
- Um custo variável de R\$ 15,00 por camiseta.

$$C(x) = 500 + 15x.$$

Então, o lucro será:

$$L(x) = R(x) - C(x) = 30x - (500 + 15x)$$

$$\Rightarrow L(x) = 30x - 500 - 15x.$$

Função do lucro:

$$L(x) = 15x - 500.$$

- (b) Substituímos $x = 100$ na função:

$$L(100) = 15 \cdot 100 - 500 = 1500 - 500$$

$$L(100) = \text{R}\$1000,00.$$

- (c) Para saber quando o lucro começa (ou seja, quando $L(x) > 0$), basta resolver:

$$15x - 500 > 0 \Rightarrow 15x > 500$$

$$\Rightarrow x > \frac{500}{15}$$

$$\Rightarrow x > 33, \bar{3}.$$

Logo, para obter lucro a venda deve ser de 34 camisetas ou mais.

Função quadrática

Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c , com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Essa função é dita **função polinomial do 2º grau**, pois o maior expoente numa variável é 2. Esse tipo de função é o que mais será trabalhado nesse processo, pois muitos problemas de otimização trabalhados na educação básica, de acordo com os livros didáticos de matemática, resultam em uma função quadrática. Assim, trabalharemos problemas que envolvem ciências naturais, como fenômenos físicos, esportistas, químicos, biológicos e outros.

A partir da definição, poderemos analisar alguns tópicos essenciais da função quadrática, como: **zeros da função**, **vértice da parábola** e **concavidade**. Esses conceitos são fundamentais para compreender a ideia de máximos e mínimos, e assim, facilitar a resolução de problemas de otimização.

Concavidade

O gráfico de uma função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, e para essa verificação usa-se a equação geral dessa figura, re-presentada por: $y - y_0 = a(x - x_0)^2$.

Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Completando o quadrado, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Note que

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0 \quad \text{para todo } x.$$

Se $a > 0$, então o termo $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ é

sempre não negativo e cresce quando $|x|$ aumenta. Assim, o valor mínimo de $f(x)$ ocorre no vértice $x = -\frac{b}{2a}$.

Logo, o gráfico da função possui um *mínimo* e sua concavidade é voltada para cima.

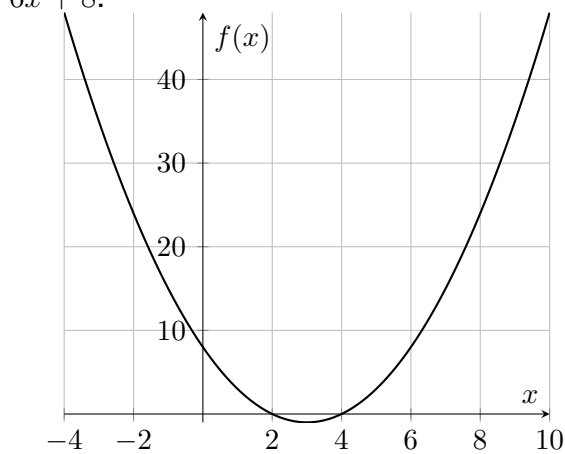
Portanto, ela pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo, e o que definirá essa posição é o valor do coeficiente a , isto é, se $a > 0$ a parábola é côncava para cima e possuirá um mínimo global, se $a < 0$ a parábola é côncava para baixo e existirá um máximo global. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^2 - 6x + 8$, o gráfico é uma parábola, com concavidade voltada para cima.

Zero da função quadrática

Figura 3: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

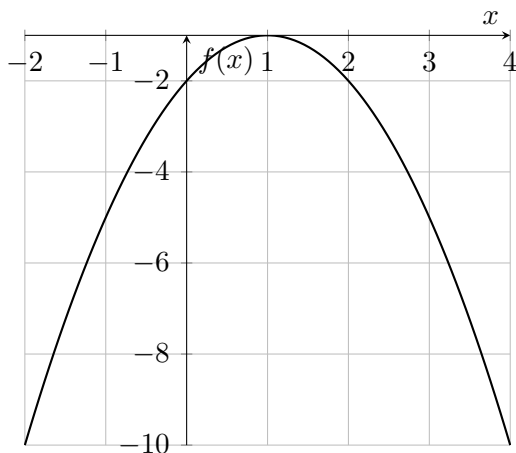


Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Exemplo

Agora, considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = -x^2 + 2x - 2$, o gráfico é uma parábola, com concavidade voltada para baixo.

Figura 4: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 2x - 2$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Nos exemplos anteriores, vemos dois casos simples de como o coeficiente a pode influenciar na concavidade da parábola.

O zero de uma função é o valor de x que anula a função, ou seja, o valor de x para o qual $f(x) = 0$. Logo, para determinar os zeros de uma função quadrática, devemos resolver uma equação do segundo grau, ou seja, os zeros da função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Agora, vamos explorar a maneira mais utilizada para resolver esse tipo de equação, que é chamada de *Fórmula de Bháskara*, vejamos como obtê-la:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c.$$

Dividindo a equação por a , visto que $a \neq 0$, obtemos

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}.$$

Queremos aqui, achar um quadrado perfeito, para isso, precisamos somar em ambos os lados da equação $\frac{b^2}{4a^2}$, ficando

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2},$$

que é equivalente a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Organizando o membro direito, obtemos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

ou seja,

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}.$$

Assim, o valor de x será

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}},$$

se $x + \frac{b}{2a} > 0$, ou

$$x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}},$$

se $x + \frac{b}{2a} < 0$. Condensando as duas expressões acima numa só, obtemos uma expressão conhecida como *Fórmula de Bháskara*.

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

E esses dois valores de x , caso estejam bem definidos em \mathbb{R} , serão exatamente os pontos em que o gráfico cruzará o eixo x também conhecido como eixo das abscissas.

Logo, podemos identificar se o gráfico toca ou não o eixo x e, em caso afirmativo, quantas vezes toca, analisando apenas o sinal do discriminante que chamamos de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Esse valor é a expressão que aparece dentro da raiz quadrada na “Fórmula de Bháskara”, assim, pela definição de raiz quadrada em \mathbb{R} , podemos concluir que se $\Delta > 0$, o gráfico cruza o eixo x duas vezes distintas, pois a raiz quadrada será positiva, se $\Delta = 0$, cruza apenas em um ponto, pois a raiz quadrada é zero, e se $\Delta < 0$, o gráfico não cruza o eixo x , pois a raiz quadrada de números negativos não está definida em \mathbb{R} .

Exemplo

Os **zeros** ou **raízes** de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x para os quais a função se anula, ou seja, $f(x) = 0$. Geometricamente, são os pontos onde o gráfico da parábola cruza o eixo x . Vamos encontrar os zeros da função:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8.$$

Para isso, igualamos a função a zero e usamos a fórmula resolutive (Bhaskara):

Acha-se o valor de Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8,$$

$$\Delta = 36 - 32 = 4.$$

e para achar as raízes, usamos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

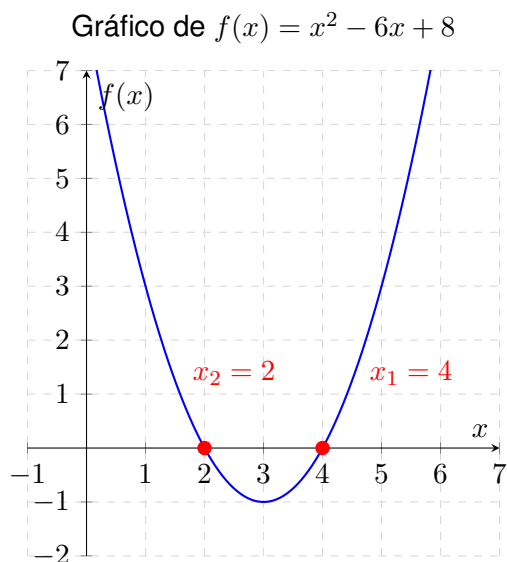
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{6 \pm 2}{2}.$$

As duas raízes são:

$$x_1 = \frac{6 + 2}{2} = 4 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{6 - 2}{2} = 2.$$

Portanto, os zeros da função são $x = 2$ e $x = 4$.

O gráfico abaixo ilustra os pontos do exemplo anterior.



Vértice da parábola

Aqui, estudaremos o vértice da parábola, que é essencial para a resolução de problemas de otimização, pois ele representa o ponto exato onde a função quadrática atinge seu valor **máximo** ou **mínimo**, e isso depende do coeficiente a , como foi visto no tópico de concavidade: se $a > 0$ teremos um mínimo e se $a < 0$ teremos um máximo.

Em situações práticas, como maximizar lucros, minimizar custos ou determinar trajetórias ideais, a identificação do vértice permite encontrar a solução ótima com precisão.

Por exemplo, em um modelo que relaciona lucro com quantidade produzida, o vértice indica a produção ideal para obter o maior retorno. Assim, compreender e calcular corretamente o vértice é uma ferramenta poderosa na resolução de problemas que envolvem decisões eficientes e resultados ideais.

Para encontrar a “fórmula” dos pontos máximos ou mínimos, acha-se os zeros

da função, que são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

e, posteriormente, encontramos seu ponto médio

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right), \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-2b}{2a} \right), \\ &= -\frac{b}{2a}. \end{aligned}$$

logo,

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

E para encontrar uma expressão que ache o valor de y , também conhecida como ordenada, substituímos o valor de x_v na função quadrática:

$$y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c,$$

ou seja,

$$y_v = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a},$$

e, portanto,

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Assim, obtemos duas fórmulas para achar as coordenadas do vértice de uma parábola que denotaremos por V , representado no gráfico da função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, por $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Exemplo

O **vértice** de uma função quadrática é o ponto onde a parábola atinge seu valor máximo ou mínimo. Suas co-

ordenadas (x_v, y_v) são dadas pelas fórmulas:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Vamos encontrar o vértice da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$, que é um ponto de mínimo, pois a concavidade da parábola é para cima ($a > 0$).

Cálculo de Δ :

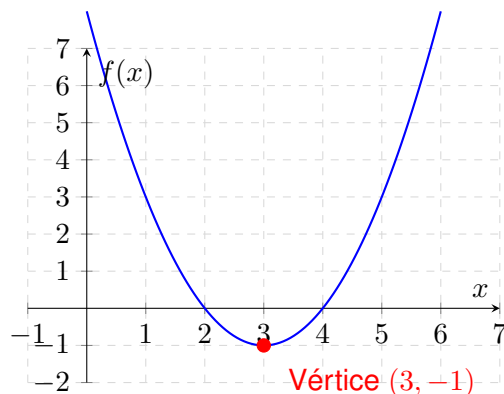
$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac, \\ &= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8, \\ &= 36 - 32, \\ &= 4. \end{aligned}$$

Cálculo das coordenadas do vértice:

$$\begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3, \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1. \end{aligned}$$

Portanto, o vértice da parábola é o ponto $V = (3, -1)$.

Podemos ver abaixo, que essa função, por ser côncava para cima, possui um ponto mínimo.



Hora de praticar!

Questão 01 Um golfinho salta da água seguindo uma trajetória que pode ser descrita pela função $h(t) = -t^2 + 6t$, onde h é a altura em metros e t é o tempo em segundos. Após quantos segundos o golfinho retorna à água?

Questão 02 Uma empresa de software descobriu que o lucro mensal L , em milhares de reais, ao vender um aplicativo por um preço p , em reais, pode ser modelado pela função $L(p) = -4p^2 + 160p - 1000$. Para maximizar o lucro, qual deve ser o preço de venda do aplicativo?

Questão 03 Durante um jogo de basquete, um jogador arremessa uma bola cuja trajetória é descrita pela função $h(x) = -x^2 + 8x + 2$, onde h é a altura da bola em metros e x é a distância horizontal percorrida, também em metros. Qual é a altura máxima que a bola atinge e qual a distância horizontal aproximada que ela percorre até cair no chão (considerando $h = 0$)?

Função exponencial e logarítmica

Estudar a função exponencial é fundamental porque ela está presente em diversos fenômenos naturais e situações do cotidiano, como o crescimento populacional, o decaimento radioativo, a propagação de vírus e o funcionamento dos juros compostos na economia. Logo, compreender esse tipo de função permite analisar e prever comportamentos que envolvem crescimento ou decrescimento acelerado, sendo uma ferramenta essencial em áreas como a matemática, a biologia, a física, a economia e a engenharia. Assim, dominar os conceitos da função exponencial amplia a capacidade de interpretar dados e resolver problemas reais de otimização com maior precisão. Assim, a seguir veremos algumas definições e propriedades que ajudarão na resolução desses problemas.

Definição

Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base a uma função f de \mathbb{R} em \mathbb{R}_+^* definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.

Exemplo

(a) $f(x) = 3^x$.

(b) $f(x) = (0,4)^x$.

(c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Observações: As restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ dadas na definição são necessárias, pois:

- Para $a = 0$ e x negativo, não existiria a^x . (não teríamos uma função definida em \mathbb{R} , pois quando o expoente de uma potência é negativa, usamos a fração inversa, assim teríamos $\frac{1}{0}$, que não é definido.)
- Para $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, não haveria a^x . (não teríamos uma função definida em \mathbb{R} , pois o valor de a seria negativo, e o expoente $\frac{1}{2}$ torna a potência numa raiz quadrada

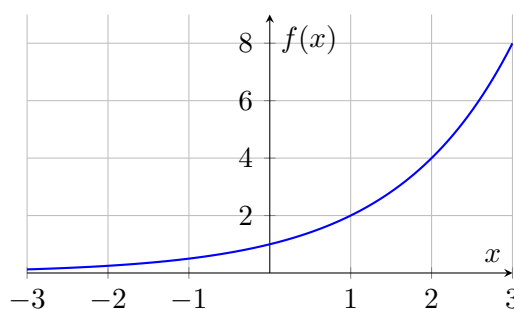
de radicando negativo, que não tem resposta em \mathbb{R}).

- Para $a = 1$ e x qualquer número real, $a^x = 1$ (a função seria constante e igual a 1).

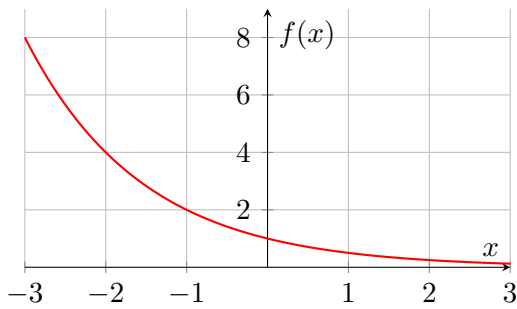
Gráfico da função exponencial

O gráfico de uma função exponencial obedece um padrão específico, ou cresce rapidamente ou decresce rapidamente, e o que vai definir o crescimento e decrescimento da função é determinado pelo valor de a . Vejamos os casos.

- Se $a > 1$, a função é crescente. Vejamos o gráfico:



- Se $0 < a < 1$, a função é decrescente. Vejamos o gráfico:



Exemplo

Uma colônia de bactérias cresce em um ambiente ideal, dobrando sua quantidade a cada 3 horas. A população de bactérias é dada pela função:

$$P(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

onde:

- $P(t)$ é a população de bactérias após t horas,
- 500 é a população inicial,
- a base 2 representa a duplicação da população,
- o expoente $\frac{t}{3}$ indica que o dobro ocorre a cada 3 horas.

O recipiente suporta no máximo **8.000 bactérias**.

Pergunta 1: Em quanto tempo a população atingirá a capacidade máxima do recipiente?

Pergunta 2: Se o recipiente deve conter no máximo 8.000 bactérias após exatamente 9 horas, qual deveria ser a base da função exponencial?

Soluções:

1. Resolver $P(t) = 8.000$:

$$8.000 = 500 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

Dividindo ambos os lados por 500:

$$16 = 2^{\frac{t}{3}}$$

Sabemos que $2^4 = 16$, então:

$$\frac{t}{3} = 4 \Rightarrow t = 12 \text{ horas.}$$

2. Queremos que $P(9) = 8.000$, com $P(t) = 500 \cdot b^t$ Substituindo:

$$8.000 = 500 \cdot b^9$$

Dividindo por 500:

$$16 = b^9 \Rightarrow b = \sqrt[9]{16}$$

Logaritmos

Para podermos resolver alguns problemas que envolvam funções exponenciais, precisaremos trazer algumas discussões, definições e propriedades dos **logaritmos**, que é uma operação matemática que serve para determinar qual expoente foi aplicado a uma base para se obter um determinado valor. Em outras palavras, ele representa o número de vezes que uma base precisa ser multiplicada por ela mesma para alcançar um certo resultado.

O logaritmo surge naturalmente em contextos onde é necessário quantificar escalas, resolver equações exponenciais ou compreender relações de proporcionalidade em larga escala. Logo, podemos definir logaritmo da seguinte forma:

Definição

Dados os números reais positivos a e b , com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de b

na base a , ou seja:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,$$

com a e b positivos e $a \neq 1$.

Assim, nessa equivalência temos duas formas de escrita: a forma logarítmica e a forma exponencial. **A forma logarítmica:** $\log_a b = c$ nos diz que c é o logaritmo, a é a base e b é o logaritmando. Já na **forma exponencial:** $b = a^c$, temos a sendo a base da potência, b é a potência e c é o expoente. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo

(a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$.

(b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 32$.

(c) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{5}^2 = 5$.

Observações:

1ª) De acordo com as restrições impostas, não são definidos, por exemplo: $\log_3 -81$ (não existe expoente para usar no 3 e ele ficar negativo), $\log_{10} 0$ (10 elevado a qualquer número será diferente de zero), $\log_0 3$ (0 elevado a qualquer número é 0), e $\log_1 6$ (1 elevado a qualquer número é 1). Portanto, quando aplicamos a definição nesses casos teremos alguns problemas.

2ª) Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la. Assim, $\log 2$ é o logaritmo de 2 na base 10. Aos logaritmos na base 10 damos o nome de logaritmos decimais ou de Briggs.

Para garantir a existência de um logaritmo como por exemplo $\log_a N$ devemos obedecer duas condições básicas, **a primeira** é que N deve ser um número positivo, e **a segunda** é que a base deve ser

um número positivo e diferente de 1, ou seja, $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Logo, com a definição e as condições de existência, temos algumas consequências imediatas, são elas:

1ª) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

2ª) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$, para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

3ª) $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

4ª) $a^{\log_a N} = N$, com $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

5ª) se $\log_a x = \log_a y$ então $x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Propriedades dos logaritmos

Vejamos as propriedades dos logaritmos:

Propriedade 1: Logaritmo de um produto

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N.$$

Demonstração: Se considerarmos $\log_a (M \cdot N) = p$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$. Pela definição de logaritmos, essas igualdades são equivalentes, respectivamente, a: $a^p = M \cdot N$; $a^m = M$ e $a^n = N$. Assim, $a^p = M \cdot N = a^m \cdot a^n$, usando as propriedades de potências estudadas no Ensino Fundamental, temos $a^p = a^{m+n}$. Portanto, $p = m + n$ e conseqüentemente $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$, como queríamos de-

monstrar.

Propriedade 2: Logaritmo de um quociente

$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N.$$

Demonstração: Se considerarmos $\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = q$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$. Pela definição de logaritmos, essas igualdades são equivalentes, respectivamente, a: $a^q = \frac{M}{N}$; $a^m = M$ e $a^n = N$. Assim, $a^q = \frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n}$, usando as propriedades de potências estudadas no Ensino Fundamental, temos $a^q = a^{m-n}$. Portanto, $q = m-n$ e conseqüentemente $\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$, como queríamos demonstrar.

Propriedade 3: Logaritmo de uma potência

$$\log_a M^N = N \cdot \log_a M.$$

Demonstração: Consideremos $\log_a M^N = r$ e $\log_a M = m$. Pela definição de logaritmos, essas igualdades são equivalentes, respectivamente, a: $a^r = M^N$ e $a^m = M$. Assim, $a^r = M^N = (a^m)^N$, usando as propriedades de potências estudadas no Ensino Fundamental, temos $a^r = a^{mN}$. Portanto, $r = mN$ e conseqüentemente $\log_a M^N = N \log_a M$, como queríamos demonstrar.

Propriedade 4: Mudança de base

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Demonstração: Consideremos $\log_b N = p$, $\log_a N = q$ e $\log_a b = r$, teremos, respectivamente, $b^p = N$, $a^q = N$ e $a^r = b$. O que implica, $a^q = b^p = (a^r)^p = a^{rp}$, assim, $q = rp$, conseqüentemente, $p = \frac{q}{r}$. Portanto, $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$.

Com esse repertório de propriedades, podemos resolver problemas mais complexos de função exponencial.

Exemplo

Sabemos que o número de bactérias numa cultura, depois de um tempo t , é dado por $N = N_0 \cdot e^{rt}$, em que N_0 é o número inicial (quando $t = 0$) e r é a taxa de crescimento relativo. Em quanto tempo o número de bactérias dobrará se a taxa de crescimento contínuo é de 5% ao minuto?

Pelos dados coletados na questão, queremos achar o tempo em que $N = 2N_0$, quando $r = 0,05$. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} N &= N_0 \cdot e^{rt}, \\ \Leftrightarrow 2N_0 &= N_0 \cdot e^{0,05t}, \\ \Leftrightarrow 2 &= e^{0,05t}, \\ \Leftrightarrow \ln 2 &= \ln e^{0,05t}, \\ \Leftrightarrow \ln 2 &= 0,05t \ln e, \\ \Leftrightarrow \ln 2 &= 0,05t. \end{aligned}$$

Logo,

$$t = \frac{\ln 2}{0,05},$$

usando uma calculadora para achar $\ln 2$, obtemos $\ln 2 = 0,6931$, e portanto,

$$t = \frac{0,6931}{0,05} = 13,8 \text{ min},$$

diante do exposto, o tempo necessário é de 13 minutos e 48 segundos **Observação:** \ln é conhecido como logaritmo natural, isto é, logaritmo de base e .

Função logarítmica

Após compreender o que é um logaritmo e explorar suas propriedades fundamentais, podemos agora introduzir a **função logarítmica**. Essa função é definida a partir da definição de logaritmo, associando a cada número real positivo x , isto é, o valor do logaritmo de x em uma determinada base a , com $a > 0$ e $a \neq 1$. Assim, a função logarítmica é expressa por $f(x) = \log_a x$.

Essa função tem domínio nos reais positivos e desempenha um papel importante na modelagem de fenômenos que envolvem crescimento e decrescimento, inversamente relacionados a funções exponenciais.

Definição

Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Define-se a **função logarítmica de base a** como a função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \log_a x,$$

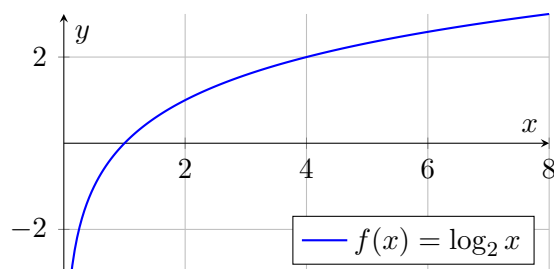
ou seja, f associa a cada número real positivo x o expoente ao qual a base a deve ser elevada para resultar em x .

Vejam os gráficos de uma função logarítmica.

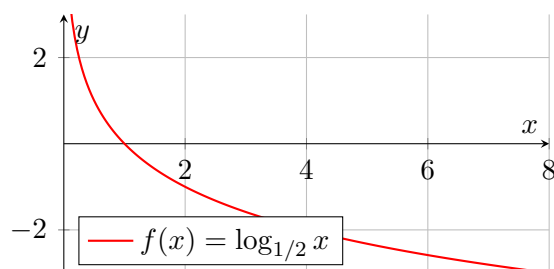
- Se $a > 1$, a função é **crecente**.
- Se $0 < a < 1$, a função é **decrescente**.

Nos dois casos, a imagem da função é \mathbb{R} , e o gráfico passa pelo ponto $(1, 0)$, pois $\log_a 1 = 0$ para qualquer base válida.

Função logarítmica crescente ($a = 2$)



Função logarítmica decrescente ($a = \frac{1}{2}$)



Hora de praticar!

Questão 01 A população de uma cidade cresce a uma taxa de 2% ao ano. Se a população atual é de 100.000 habitantes, a função que modela esse crescimento é $P(t) = 100.000 \cdot (1,02)^t$, onde t é o tempo em anos. Usando $\log(1,02) \approx 0,0086$ e $\log(2) \approx 0,3010$, em aproximadamente quantos anos a população dobrará?

Questão 02 Usando as propriedades dos logaritmos e sabendo que $\log_2(3) \approx 1,58$ e $\log_2(5) \approx 2,32$, qual é o valor aproximado de $\log_2(45)$?

Questão 03 Qual é a solução da equação exponencial $5^{x-1} = 15$?

Questão 04 A meia-vida de uma substância radioativa é de 10 dias. Se uma amostra contém inicialmente 200 gramas dessa substância, a massa M restante após t dias é dada por $M(t) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$. Após quanto tempo a amostra terá apenas 25 gramas?

Questão 05 Resolva a equação logarítmica $\log_3(x) + \log_3(x-2) = 1$.

Questão 06 Um laboratório realiza um experimento com uma cultura de bactérias. Inicialmente, há 1000 bactérias. A

cada hora, essa população aumenta em 20%. A função que descreve o número de bactérias P em função do tempo t (em horas) é dada por:

$$P(t) = 1000 \cdot (1,2)^t$$

Após quantas horas, aproximadamente, a população de bactérias será de 2073?

Dados: $\log_{10}(1,2) \approx 0,08$ e $\log_{10}(2,073) \approx 0,317$

- (a) 2 horas
- (b) 4 horas
- (c) 10 horas
- (d) 12 horas
- (e) 24 horas

Questão 07 A magnitude de um terremoto na escala Richter é calculada pela fórmula:

$$M = \frac{3}{2} \log \left(\frac{E}{E_0} \right)$$

em que: M é a magnitude, E é a energia liberada (em joules) e $E_0 = 10^{4,5}$ joules. Qual foi a energia liberada E por um terremoto de magnitude $M = 7,0$?

- (a) 10^{15} joules
- (b) $10^{13,5}$ joules
- (c) 10^{12} joules
- (d) $10^{9,5}$ joules
- (e) $10^{7,5}$ joules



PARTE II

**IDEIA DE VARIACÃO E TAXA DE
VARIACÃO**

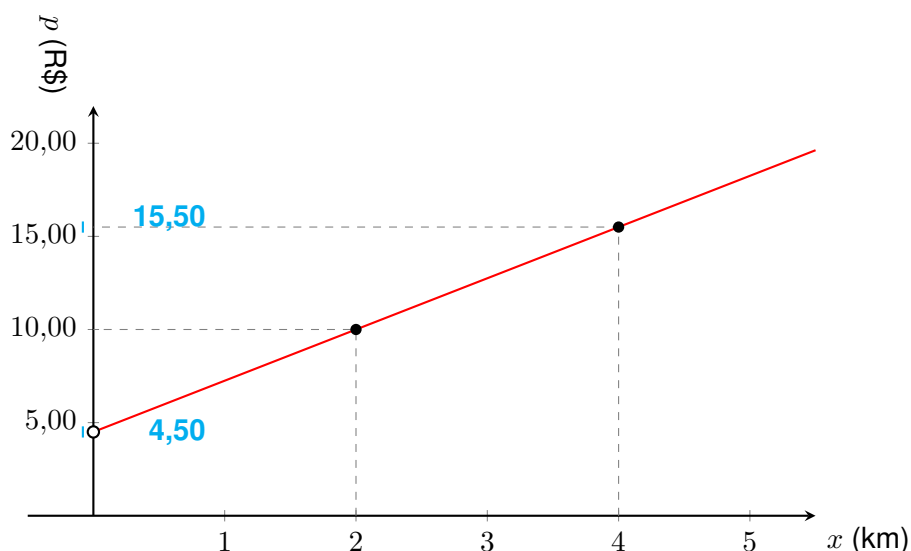
TAXA DE VARIAÇÃO

Imaginem que você e sua família decidiram fazer uma viagem de carro de uma Campina Grande para João Pessoa. Ao final desse percurso, você calcula a velocidade média, isto é, divide a distância total percorrida pelo tempo gasto. Esse cálculo é uma média, um valor constante que representa a viagem como um todo. Agora, imagine que no meio dessa viagem vocês passaram por um radar de velocidade. Este radar não está nem um pouco interessado na sua média. Ele quer saber sua velocidade naquele exato instante em que seu carro passou por ele. Essa é a velocidade instantânea.

A maioria das situações que analisamos em ciências, economia e tecnologia se parece mais com essa viagem de carro do que com um movimento constante. Pois, podemos acelerar, frear, atingir picos altos e descer ladeiras. Assim, o objetivo desta sequência é exatamente aprender a ser o "radar" da matemática. Sairemos do conforto da "velocidade média" (a taxa de variação da reta) e aprender a calcular a "velocidade instantânea" em qualquer ponto de uma curva.

Descobriremos como a inclinação de uma reta tangente a um gráfico pode nos dizer se algo está crescendo ou diminuindo, e quão rápido isso acontece. Ao entender quando essa "velocidade instantânea" é positiva, negativa ou simplesmente zero, seremos capazes de desvendar os segredos por trás do comportamento de qualquer função. Vamos começar nossa viagem!

Observe a seguir o gráfico da função $p(x) = 2,75x + 4,50$, verificando que, nessa situação, temos $x > 0$.



Perceba que, na situação apresentada, há uma variação nos valores da função p à medida que os valores correspondentes de x também variam. Estudaremos agora uma maneira de fazer essa análise utilizando a taxa de variação média.

Definição

Considerando uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e dois números reais x_1 e x_2 , tais que $x_1 < x_2$, a **taxa de variação média da função** no intervalo $[x_1, x_2]$ é dada por

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Taxa de variação da função afim

Podemos determinar a taxa de variação média da função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, em um intervalo $[x_1, x_2]$, com $x_1 \neq x_2$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a. \end{aligned}$$

Logo, a taxa de variação média da função afim definida por $f(x) = ax + b$, em relação a x , é dada pelo coeficiente a . O coeficiente a é também conhecido como **coeficiente angular** ou **declividade** da reta correspondente ao gráfico da função afim e está relacionado com a inclinação da reta em relação ao eixo x .

Exemplo

Um caminhoneiro iniciou uma viagem com o tanque de combustível de seu caminhão cheio, contendo **350 litros** de diesel. Ele percebeu que, a cada **100 km** percorridos na estrada, o caminhão consumia **30 litros** de diesel.

- (a) Determine a função afim $V(d)$ que representa o volume de

combustível (V , em litros) restante no tanque em relação à distância (d , em km) percorrida.

- (b) Qual é a taxa de variação (coeficiente angular) dessa função e o que ela significa no contexto do problema?

1. Cálculo da Taxa de Variação (a)

A taxa de variação a é o consumo de combustível por quilômetro percorrido. Ela é calculada como a razão entre a variação no volume (ΔV) e a variação na distância (Δd).

$$\text{Taxa de Variação } a = \frac{\Delta V}{\Delta d}.$$

Como o volume **diminui** em 30 litros a cada 100 km, temos:

$$a = \frac{-30 \text{ L}}{100 \text{ km}} = -0,3 \text{ L/km}.$$

2. Montagem da Função Afim

A função afim tem a forma geral $V(d) = ad + b$.

- $a = -0,3$ (Taxa de Variação).
- $b = 350$ (Volume inicial, Coeficiente Linear).

A função que modela o volume de combustível restante é:

$$V(d) = -0,3d + 350.$$

3. Análise da Taxa de Variação

O coeficiente angular (taxa de variação) da função é $a = -0,3$.

Taxa de variação da função quadrática

Após explorarmos as funções afins e suas taxas de variação constantes, como no consumo de combustível, vamos agora mergulhar nas **funções quadráticas**. Essas funções são cruciais para descrever fenômenos onde a taxa de variação *não* é constante, como em movimentos com aceleração.

Imagine um corredor iniciando uma prova de 100 metros rasos. Ele não arranca com sua velocidade máxima; em vez disso, ele **acelera** gradualmente do repouso. Como podemos modelar a **posição** desse corredor ao longo do tempo, assumindo uma aceleração constante? A resposta está nas funções quadráticas.

Exemplo

Considere um corredor que parte do repouso e acelera de forma constante. Sua posição $P(t)$ (em metros, em relação ao ponto de partida) em função do tempo t (em segundos) pode ser modelada por uma função quadrática simples, como a seguinte:

$$P(t) = t^2.$$

- Calcule a posição do corredor nos instantes $t = 0, 1, 2, 3$ e 4 segundos.
- Apresente o gráfico desta função. Este gráfico representa a posição de um corredor que acelera ao longo do tempo.
- A posição varia de forma uniforme? Justifique sua resposta

com base nos valores calculados e no formato do gráfico.

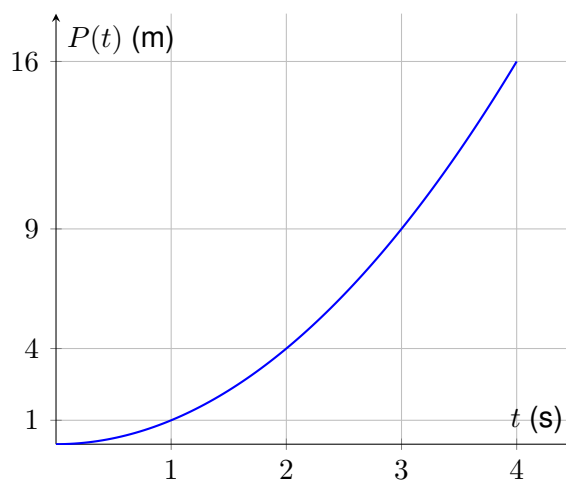
1. Posição do Corredor em Diferentes Tempos

Vamos calcular a posição $P(t)$ para os instantes solicitados:

- Para $t = 0$ s: $P(0) = (0)^2 = 0$ m.
- Para $t = 1$ s: $P(1) = (1)^2 = 1$ m.
- Para $t = 2$ s: $P(2) = (2)^2 = 4$ m.
- Para $t = 3$ s: $P(3) = (3)^2 = 9$ m.
- Para $t = 4$ s: $P(4) = (4)^2 = 16$ m.

2. Gráfico da Função $P(t) = t^2$

O gráfico da função $P(t) = t^2$ é uma **parábola** com concavidade voltada para cima, com seu vértice na origem $(0, 0)$.



3. Análise da Variação da Posição

Para determinar se a posição varia de forma uniforme, vamos analisar a variação da posição a cada segundo:

- De $t = 0$ para $t = 1$
 $\Delta P = P(1) - P(0) = 1 - 0 = 1$ m.
- De $t = 1$ para $t = 2$
 $\Delta P = P(2) - P(1) = 4 - 1 = 3$ m.
- De $t = 2$ para $t = 3$
 $\Delta P = P(3) - P(2) = 9 - 4 = 5$ m.

- De $t = 3$ para $t = 4$

$$\Delta P = P(4) - P(3) = 16 - 9 = 7 \text{ m.}$$

Perceba que a posição **não varia de forma uniforme**, ou seja, a cada segundo que passa, o corredor percorre uma distância **maior** do que no segundo anterior (1 m, depois 3 m, 5 m, 7 m, etc.). Isso é uma característica de um movimento **acelerado**, onde a velocidade está aumentando constantemente.

No gráfico, essa não uniformidade é visível no formato da parábola: ela se curva para cima, ficando cada vez mais "íngreme", o que indica que a taxa de variação (velocidade instantânea) está aumentando ao longo do tempo.

Assim, concluímos que aqui não é mais calculada a "taxa de variação" da função, mas sim a taxa de variação média naquele intervalo específico. Além disso, essa taxa será o coeficiente angular da reta secante a parábola, que passa pelos dois extremos do intervalo.

Vejamos no exemplo anterior, a reta secante a parábola que passa pelos pontos em que $t = 0$ e $t = 1$ é dada por uma equação que possui coeficiente angular $a = 1$, e para achar o coeficiente linear se torna fácil, pois a equação da reta é dada por $y = ax + b$, já temos $a = 1$ e um ponto $(0, 0)$, logo $0 = 1 \cdot 0 + b$, ou seja, $b = 0$ e portanto a reta secante procurada é $y = x$. Isso pode ser feito em qualquer intervalo, e o resultado será sempre a reta secante.

Exemplo

Em um experimento de climatização, a temperatura (T , em graus Celsius) de uma sala variou em função da

hora do dia (h). A variação da temperatura pode ser modelada pela função quadrática:

$$T(h) = 0,5h^2 - 6h + 40.$$

Qual a Taxa de Variação Média da temperatura da sala entre as 6h da manhã e as 10h da manhã?

O intervalo de tempo é dado por $h_1 = 6$ e $h_2 = 10$.

1. Cálculo da Temperatura nos Limites do Intervalo

- Às 6 h ($T(6)$):

$$T(6) = 0,5(6)^2 - 6(6) + 40$$

$$T(6) = 0,5(36) - 36 + 40$$

$$T(6) = 18 - 36 + 40 = 22^\circ C.$$

- Às 10 h ($T(10)$):

$$T(10) = 0,5(10)^2 - 6(10) + 40$$

$$T(10) = 0,5(100) - 60 + 40$$

$$T(10) = 50 - 60 + 40 = 30^\circ C.$$

2. Aplicação da Fórmula da taxa de variação média

Substituímos os valores na fórmula da Taxa de Variação Média:

$$TVM_{[6,10]} = \frac{T(10) - T(6)}{10 - 6},$$

$$TVM_{[6,10]} = \frac{30 - 22}{4},$$

$$\text{TVM}_{[6,10]} = \frac{8}{4} = 2^\circ \text{ C/h.}$$

Portanto, concluímos que a taxa de Variação Média da temperatura entre $6h$ e $10h$ foi de 2° C/h . Isso significa que, em média, a temperatura aumentou em 2 graus Celsius a cada hora durante esse período.

Até aqui, calculamos taxas de variação em intervalos específicos, mas será que é possível calcular a velocidade do atleta exatamente quando $t = 1$, ou a temperatura da sala às 9h? É isso que veremos a seguir.

Reta tangente

Vimos que a taxa de variação num intervalo específico é dado pela fórmula:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Essa fórmula nos dá exatamente o coeficiente angular da reta secante à curva que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Ou seja, cruza dois pontos do gráfico.

A palavra tangente vem do latim *tangens*, que significa "tocando". Podemos pensar na tangente como uma curva que se parece com uma reta que toca a curva e segue a mesma direção da curva no ponto de contato. Para um círculo, poderíamos simplesmente, como Euclides, dizer que a tangente é uma reta (que intercepta o círculo uma única vez, conforme a Figura (a)). Para as curvas mais complicadas essa definição é inadequada. A Figura (b) mostra uma reta (que aparenta ser tangente à curva C no ponto P, mas que intercepta C

duas vezes.

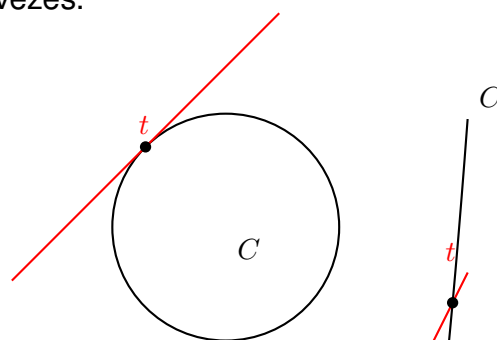


Figura (a)

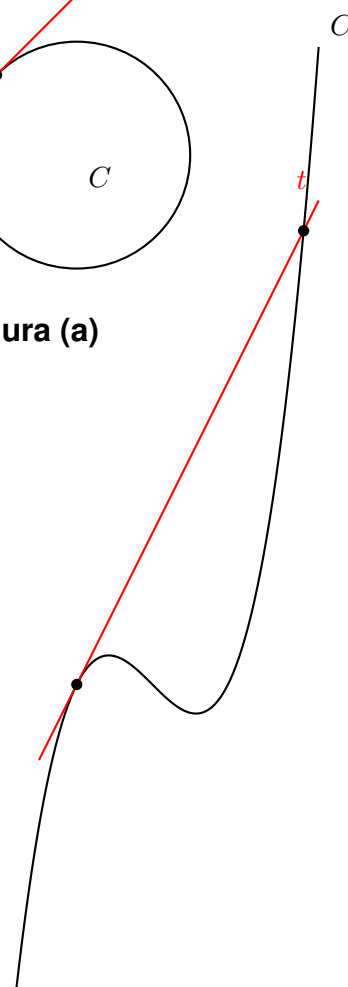


Figura (b)

Para entendermos melhor, essa ideia de "tocar em um único ponto", usaremos a reta secante como base. Retomemos a função $f(t) = t^2$ e fixemos o ponto $P = (1, 1)$. Agora, tomemos o ponto $Q = (2, 4)$, sabemos que o coeficiente angular da reta secante que passa por P e Q é a taxa de variação média do intervalo $[1, 2]$, ou seja, $a = 3$. Assim, aproximaremos o ponto Q ao ponto P , reduzindo cada vez mais o intervalo. Veja a tabela:

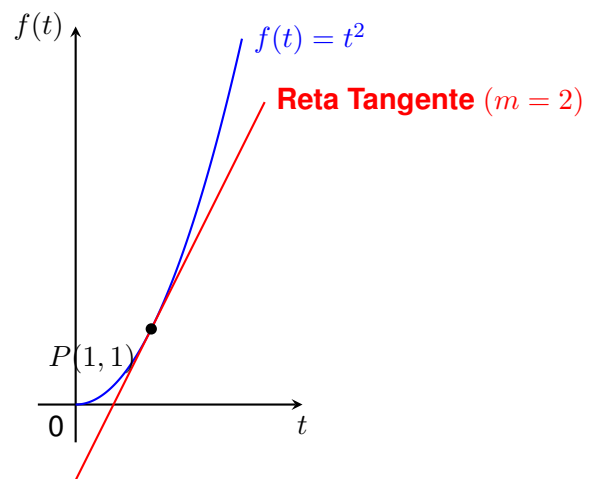
Intervalo de Tempo $[t_1, t_2]$	Δt $(t_2 - t_1)$	Taxa de Variação Média (TVM)
[1, 2]	1	3
[1, 1.5]	0,5	2,5
[1, 1.1]	0,1	2,1
[1, 1.01]	0,01	2,01

Ao observar a tabela, é impossível não notar um padrão claro: à medida que o intervalo de tempo Δt se torna cada vez menor, ou seja, à medida que o ponto Q se aproxima cada vez mais do nosso ponto fixo P , a taxa de variação média se aproxima de um valor específico. A sequência dos resultados (3; 2,5; 2,1; 2,01; ...) está "encurralando" o número 2.

Se continuássemos esse processo com intervalos ainda menores, como [1, 1.001] ou [1, 1.00001], a taxa de variação média seria 2,001 e 2,00001, respectivamente, tornando a tendência ainda mais evidente.

Esse valor para o qual a taxa de variação vai é o que chamamos de **limite**. Geometricamente, ele representa o momento exato em que a reta secante, ao ter seus dois pontos (P e Q) infinitamente próximos, se torna a **reta tangente**.

Portanto, podemos concluir que a **Taxa de Variação Instantânea** da função $f(t) = t^2$ no ponto $P = (1, 1)$ é exatamente 2. Esse valor corresponde ao **coeficiente angular da reta tangente** à parábola nesse ponto. Essa poderosa estratégia de usar o limite de aproximações de retas secantes para encontrar a inclinação em um único ponto é a ideia fundamental por trás do conceito de **Derivada** em Cálculo.



Exemplo

Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

Podemos encontrar uma equação da reta tangente r assim que soubermos sua inclinação a . A dificuldade está no fato de conhecermos somente o ponto P , em r , quando precisamos de dois pontos para calcular a inclinação. Observe, porém, que podemos calcular uma aproximação de a escolhendo um ponto próximo $Q(x, x^2)$ sobre a parábola e calculando a inclinação a , da reta secante PQ . (Uma reta secante, do latim secans, que significa "corte", é uma linha que corta [intersecta] uma curva mais de uma vez.)

Escolhemos $x \neq 1$ de forma que $Q \neq P$. Então

$$a_{pq} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Por exemplo, para o ponto $Q(1,5; 2,25)$, temos

$$a_{pq} = \frac{(1,5)^2 - 1}{1,5 - 1} = \frac{2,25 - 1}{1,5 - 1} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5.$$

Quanto mais próximo Q estiver de P , mais próximo x estará de 1, e o valor de

a_{pq} , estará mais próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente deve ser $a_{pq} = 2$.

Assim, sabendo que a equação da reta é $y = ax + b$ e ela passa pelo ponto $P(1, 1)$, e $a = 2$, temos $1 = 2 \cdot 1 + b$, implicando $b = -1$, e portanto a equação da reta tangente é:

$$y = 2x - 1.$$

Podemos visualizar no gráfico anterior.

Exemplo

A distância s percorrida por um corpo em queda livre (desprezando a resistência do ar) após t segundos é dada pela equação:

$$s(t) = 4,9t^2.$$

Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

A dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo ($t = 5$), ou seja, não temos um intervalo de tempo. Porém, podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um

décimo de segundo, de $t = 5$ até $t = 5, 1$:

$$\begin{aligned} \text{velocidade média} &= \frac{\text{mudança de posição}}{\text{tempo decorrido}}, \\ &= \frac{s(5,1) - s(5)}{0,1}, \\ &= \frac{4,9(5,1)^2 - 4,9(5)^2}{0,1}, \\ &= 49,49 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

A tabela a seguir mostra os resultados de cálculos similares da velocidade média em períodos cada vez menores.

Tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leq t \leq 5,1$	49,49
$5 \leq t \leq 5,05$	49,245
$5 \leq t \leq 5,01$	49,049
$5 \leq t \leq 5,001$	49,0049

Veja que, à medida que encurtamos o período do tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima de 49 m/s. A velocidade instantânea quando $t = 5$ é definida como o valor limite dessas velocidades médias em períodos cada vez menores, começando em $t = 5$. Assim, concluímos que a velocidade (instantânea) após 5 segundos é 49 m/s.

Hora de praticar!

Questão 01 Um projétil é lançado para cima e sua altura h (em metros) em função do tempo t (em segundos) é dada por $h(t) = -5t^2 + 20t$. Determine a taxa de variação média da altura no intervalo entre $t = 1$ e $t = 3$ segundos.

Questão 02 Considere a função $f(x) = x^2 - 4x$. Calcule o coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos do gráfico onde $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$.

Questão 03 O custo de produção de x unidades de um produto é dado por $C(x) = 2x^2 + 10x + 50$. Qual é a taxa de variação média do custo quando a produ-

ção aumenta de 10 para 20 unidades?

Questão 04 Dada a função $g(x) = \frac{1}{x}$, determine a taxa de variação média no intervalo $[2, 2.5]$. O que o sinal do resultado indica sobre o comportamento da função nesse intervalo?

Questão 05 A posição de um objeto em movimento retilíneo é descrita por $s(t) = t^3 - t$.

- Calcule a velocidade média no intervalo $t \in [1, 2]$.
- Se reduzirmos o intervalo para $[1, 1.1]$, a taxa de variação média aumenta ou diminui? Justifique calculando o novo valor.



PARTE III

LIMITES E PROPRIEDADES

LIMITE

Nesta sequência didática introduziremos limite de uma função, de uma forma mais detalhada e clara para estudantes de Ensino Básico. Usaremos todos os conceitos de funções estudados, bem como, discutiremos a importância de seu estudo para o entendimento de continuidade de função. Aqui, passaremos pelos conceitos intuitivos, definição formal, propriedades e aplicações, além de alguns teoremas fundamentais para o estudo do cálculo e para os problemas de otimização.

Antes de mergulharmos na ideia intuitiva de limite, é importante entender que esse conceito surge da necessidade de analisar o comportamento de funções em pontos onde elas podem não estar definidas diretamente, ou onde o valor exato é difícil de determinar. O limite nos permite “prever” ou “aproximar” o valor que a função tende a assumir à medida que nos aproximamos de um ponto específico, tornando-se uma ferramenta fundamental para compreender o funcionamento das funções e preparar o terreno para conceitos mais avançados como continuidade, derivada e otimização. Para entendermos esse conceito de limite de uma forma mais clara e didática, começaremos analisando uma função específica.

A ideia de limite

Consideremos a função

$$f(x) = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{(x - 1)},$$

definida para todo x real e $x \neq 1$. Quando $x \neq 1$, podemos verificar que a função pode ser reduzida, ou simplificada, para $f(x) = 2x + 1$. Mas nosso objetivo aqui, é analisar o “valor” de $f(1)$, ou melhor, tentaremos analisar todos os valores da função quando os valores de x se aproximam do número 1. Observemos as seguintes tabelas, em que, a primeira é composta por valores menores do que 1 e próximos dele, e a segunda por valores maiores do que 1.

Tabela 2: valores de x menores que 1

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
$f(x)$	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

Tabela 3: valores de x maiores que 1

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

Observemos em ambas as tabelas que, quando x se aproxima cada vez mais de 1, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 3, isto é, quanto mais próximo de 1 estiver o x , mais próximo de 3 estará $f(x)$.

Notemos na primeira tabela que:

Tabela 4: Aproximação de $f(x)$ para $x \rightarrow 1^-$

• Valor de x e $f(x)$	Implicações
$x = 0,9, f(x) = 2,8$	$x - 1 = -0,1 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,2$
$x = 0,99, f(x) = 2,98$	$x - 1 = -0,01 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,02$
$x = 0,999, f(x) = 2,998$	$x - 1 = -0,001 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,002$

e a segunda tabela nos mostra que:

Tabela 5: Aproximação de $f(x)$ para $x \rightarrow 1^+$

• Valor de x e $f(x)$	Implicações
$x = 1,1, f(x) = 3,2$	$x - 1 = 0,1 \Rightarrow f(x) - 3 = 0,2$
$x = 1,01, f(x) = 3,02$	$x - 1 = 0,01 \Rightarrow f(x) - 3 = 0,02$
$x = 1,001, f(x) = 3,002$	$x - 1 = 0,001 \Rightarrow f(x) - 3 = 0,002$

portanto, pelas duas tabelas vemos que:

Tabela 6: Tabela de aproximações usando valor absoluto

$ x - 1 = 0,1$	\Rightarrow	$ f(x) - 3 = 0,2$
$ x - 1 = 0,01$	\Rightarrow	$ f(x) - 3 = 0,02$
$ x - 1 = 0,001$	\Rightarrow	$ f(x) - 3 = 0,002$

Podemos perceber que, ao escolher valores de x cada vez mais próximos de 1, os valores correspondentes de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de 3. Isso significa que conseguimos fazer $f(x)$ ficar tão próximo de 3 quanto quisermos, desde que escolhamos x suficientemente perto de 1. Em termos matemáticos, isso quer dizer que o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e 3, ou seja, $|f(x) - 3|$, pode ser tornado arbitrariamente pequeno, contanto que o valor absoluto da diferença entre x e 1, isto é, $|x - 1|$, também seja pequeno o bastante. Essa relação entre a proximi-

dade de x em relação a 1 e a proximidade de $f(x)$ em relação a 3 é a base intuitiva do conceito de limite.

Essa forma de discutir a ideia de limite de uma função é bem intuitiva e não tem uma linguagem matemática, pois ao dizermos “ $|f(x) - 3|$ tão pequeno quanto desejarmos” e “ $|x - 1|$ suficientemente pequeno”, não sabemos quantificar essas diferenças tão pequenas, ou quais são esses valores. Assim, para indicar essas diferenças pequenas usaremos símbolos matemáticos, como ε (epsilon) e δ (delta). Dessa forma, se eu quiser que $|f(x) - 3|$

seja menor que um certo número positivo ε , preciso escolher $|x - 1|$ bem pequeno. Ou seja, tenho que encontrar um número positivo δ , pequeno o suficiente, que garanta essa aproximação.

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

A condição $0 < |x - 1|$ significa que estamos considerando valores de x que estão próximos de 1, mas **diferentes** de 1. Em outras palavras, isso é equivalente a dizer que $x \neq 1$, pois o nosso interesse é analisar o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de 1, sem que x seja exatamente igual a 1. É importante perceber que δ depende do ε considerado. Analisando a tabela 5, se for dado $\varepsilon = 0,2$, tomamos $\delta = 0,1$, se for dado $\varepsilon = 0,02$, tomamos $\delta = 0,01$. De maneira geral, fica evidente que para ε dado, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Dessa forma, para qualquer valor positivo ε , podemos encontrar um valor apropriado para δ tal que:

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

dizemos que o limite de $f(x)$, para x tendendo a 1, é 3. Em símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3.$$

Com base nisso, podemos definir formalmente a ideia de limite de uma função.

Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto que contém o ponto a , exceto talvez no próprio ponto a .

Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que, sempre que $0 < |x - a| < \delta$, temos

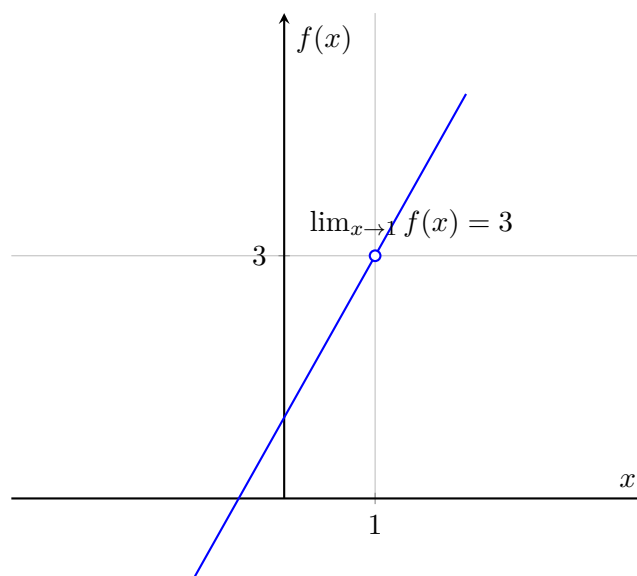
$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Usando uma simbologia matemática, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

É possível, observar a ideia de limite através dos gráficos da função, observemos a situação da função $f(x) = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{(x - 1)}$.



observando o gráfico da figura, quando o valor de x se aproxima de 1, seja pela direita (números maiores que 1) ou pela esquerda (números menores que 1) a função se aproxima de 3, e isso acontece, pelo fato, de mesmo a função não estar definida nesse ponto, existir o limite nele. Dizemos,

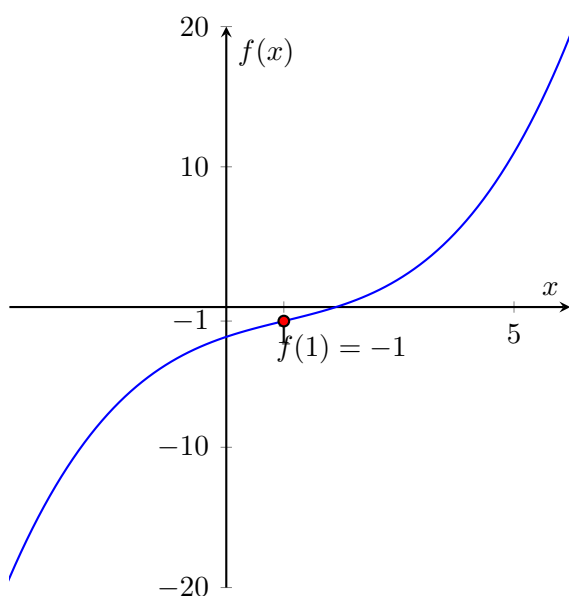
que a função não é contínua, pois há um “salto” no ponto em que x é igual a 1. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo

Considere a função

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{8} + x - 2.$$

Calculemos seu limite observando apenas o seu gráfico.



Intuitivamente, quando x se aproxima de 1, o valor da função se aproxima de -1 , tanto pela direita, quanto pela esquerda. Assim, dizemos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$.

Propriedades do limite de uma função

A fim de que não tenhamos que voltar repetidamente à definição de limite para provarmos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, vamos apresentar as propriedades algébricas do limite de uma função.

No que segue estamos supondo que a é elemento de um intervalo aberto I ,

e que em $I \setminus \{a\}$ estão definidas as funções f, g, \dots “envolvidas” na propriedade.

1ª propriedade

Se $c \in \mathbb{R}$ e f é a função definida por $f(x) = c$, para todo x real, então $\lim_{x \rightarrow a} c = c$.

2ª propriedade

Se $c \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot L$.

3ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = L + M$.

4ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = L - M$.

5ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = LM$.

6ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} (f)^n(x) = L^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

7ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$.

8ª propriedade

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ com $L \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$ ou $L < 0$ e n é ímpar.

Limite de uma função polinomial

Uma das consequências das propriedades de limites é a regra para obter o limite de uma função polinomial, vejamos:

Definição

O limite de uma função polinomial

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$+ a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, para x tendendo para a , é igual ao valor numérico de $f(x)$ para $x = a$.

Exemplo

Aplicando a propriedade do limite de polinômios:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 3(2) - 5 = 6 - 5 = 1.$$

Exemplo

Aplicando a propriedade do limite de polinômios:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 4x + 1) &= (-1)^2 + 4(-1) + 1, \\ &= 1 - 4 + 1, \\ &= -2. \end{aligned}$$

Exemplo

Usando as propriedades da Soma e do Coeficiente Constante para justificar o resultado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 + 2x) &= 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x^2) + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x), \\ &= 4 \cdot (3^2) + 2 \cdot (3), \\ &= 36 + 6, \\ &= 42. \end{aligned}$$

Exemplo

Usando a Propriedade do Produto:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} [(x + 5)(x^3 - 1)], \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 5) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1), \\ &= (1 + 5) \cdot (1^3 - 1), \\ &= 6 \cdot 0, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo

Usando a Propriedade do Quociente (já que o limite do denominador é $2(4) + 1 = 9 \neq 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2}{2x + 1} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 4} x^2}{\lim_{x \rightarrow 4} (2x + 1)}, \\ &= \frac{4^2}{2(4) + 1}, \\ &= \frac{16}{8 + 1}, \\ &= \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

Limites laterais

Lembre-se que considerando $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, a análise feita é do comportamento da função nos valores próximos de a , isto é, nos valores de x pertencentes a um intervalo aberto contendo a mas diferentes de a e, portanto, nos valores desse intervalo que são maiores ou menores que a .

Entretanto, o comportamento em algumas funções, quando x está próximo de a , mas assume valores menores que a , é diferente do comportamento da mesma função, quando x está próximo de a , mas assume valores maiores que a .

Vamos considerar agora a função

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ 3 & \text{se } x = 2, \\ x + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

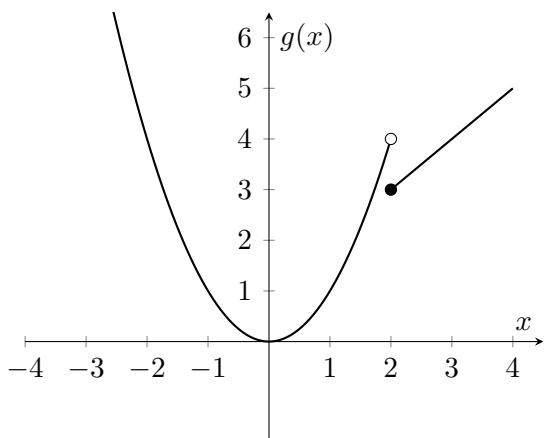
atribuindo a x valores próximos de 2, porém maiores que 2 (à direita de 2), temos:

x	3	2,5	2,1	2,01	2,001
$g(x)$	4	3,5	3,1	3,01	3,001

Para a mesma função vamos agora atribuir a x valores próximos de 2, porém menores que 2 (à esquerda de 2), temos:

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999
$g(x)$	1	2,25	3,61	3,960	3,996

Analisando o comportamento da função $g(x)$ nas proximidades de $x = 2$, observamos duas situações distintas baseadas nas tabelas, a primeira é que se x está próximo de 2, mas **à esquerda** de 2 (ou seja, valores como 1,9; 1,99; 1,999), os valores da função $g(x) = x^2$ estão próximos de 4. E a segunda é que se x está próximo de 2, mas **à direita** de 2 (ou seja, valores como 2,1; 2,01; 2,001), os valores da função $g(x) = x + 1$ estão próximos de 3.



Casos como este, em que supomos x assumindo valores próximos de 2, mas somente à esquerda ou somente à direita de 2, são chamados de **limites laterais** pela esquerda ou pela direita de 2. A partir dessa ideia definiremos a seguir, o que são limites laterais.

Definição

Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

e dizemos que o **limite à esquerda** de $f(x)$ quando x tende a a [ou o limite de $f(x)$ quando x tende a a *pela esquerda*] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L , ao restringirmos x a uma região suficientemente pequena em torno de a , com x menor que a .

Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

e dizemos que o **limite à direita** de $f(x)$ quando x tende a a [ou o limite de $f(x)$ quando x tende a a *pela direita*] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L ao restringirmos x a uma região suficientemente pequena em torno de a , com x maior que a .

Todas as propriedades que foram vistas anteriormente e que são válidas para limites, também se estendem para os limites laterais. Além disso, dizemos que o limite existe, quando os limites laterais existem e são iguais, como mostra no

teorema a seguir:

Definição

Seja I um intervalo aberto contendo a e seja f uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Temos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, existirem $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e forem ambos iguais a L .

Exemplo

Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x = 1, \\ 4x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

calcule:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solução:

- a) Para $x \rightarrow 1^+$ (valores maiores que 1), usamos $f(x) = 3x - 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 2) = 3(1) - 2 = 1.$$

- b) Para $x \rightarrow 1^-$ (valores menores que 1), usamos $f(x) = 4x + 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x + 1) = 4(1) + 1 = 5.$$

- c) Para o limite bilateral existir, os limites laterais devem ser iguais. Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad (\text{pois } 1 \neq 5).$$

concluimos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **não**

existe.

Hora de praticar!

Questão 01 Calcule o limite da função polinomial abaixo aplicando as propriedades da soma e do produto:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 4)$$

Questão 02 Determine o valor do limite racional, certificando-se de que o denominador não se anula no ponto indicado:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4}{2x + 5}$$

Questão 03 Calcule o seguinte limite eliminando a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ por meio da fatoração:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Questão 04 Resolva o limite abaixo utilizando a simplificação de polinômios (fatoração de trinômios):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

Questão 05 Calcule o limite envolvendo radicais. Caso encontre uma indeterminação, utilize a técnica de racionalização:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Questão 06 Determine o valor do limite para a função dada, analisando a continuidade da expressão no ponto $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2}$$



PARTE IV

**INTRODUÇÃO ÀS DERIVADAS E
PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO**

DERIVADAS

Nesta seção, e munidos das ferramentas discutidas anteriormente, principalmente os conceitos de taxa de variação e limite, podemos definir o objeto principal desse estudo, que são as derivadas. E para isso discutiremos algumas definições importantes, além das propriedades das derivadas e de sua interpretação analítica e geométrica.

Conceito e interpretação

Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I . Chama-se **derivada de f no ponto x_0** o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se este existir e for finito.

A derivada de f no ponto x_0 é habitualmente indicada com uma das seguintes notações:

$$f'(x_0) \quad \text{ou} \quad \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} \quad \text{ou} \quad Df(x_0).$$

A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada **acrésimo** ou **incremento** da variável x relativamente ao ponto x_0 . A diferença

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é chamada **acrésimo** ou **incremento** da função f relativamente ao ponto x_0 . O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

recebe o nome de **razão incremental** de f relativamente ao ponto x_0 .

Frisemos que a derivada de f no ponto x_0 pode ser indicada das seguintes formas:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \\ f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Quando existe $f'(x_0)$, dizemos que f é **derivável no ponto x_0** . Dizemos também que f é **derivável no intervalo aberto I** quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

Exemplo

Calculemos a derivada de $f(x) = 2x$ no ponto $x_0 = 3$. Utilizando a definição em termos de x :

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3)}{x - 3} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Outra maneira de proceder seria esta, utilizando a definição em termos de Δx :

$$\begin{aligned}f'(3) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(3 + \Delta x) - 6}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6 + 2\Delta x - 6}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \\&= 2.\end{aligned}$$

Exemplo

Calculemos a derivada de $f(x) = x^2 + x$ no ponto $x_0 = 1$. Utilizando a definição em termos de Δx :

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x)] - [1^2 + 1]}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2) + (1 + \Delta x)] - [2]}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 + \Delta x - 2}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 3)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 3) \\&= 3.\end{aligned}$$

Exemplo

Calculemos a derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ em um ponto genérico $x_0 \neq 0$.

Pela definição,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Com $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ e $f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$, ou seja,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x}.$$

Primeiro, calculamos o numerador, unificando as frações (tirando o M.M.C.):

$$\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{(x_0 + \Delta x)x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

Substituindo este resultado no limite principal:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x) \Delta x}.$$

Para simplificar a fração composta, multiplicamos o numerador pelo inverso do denominador:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}.$$

Cancelando Δx , já que $\Delta x \neq 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

Aplicando o limite (substituindo $\Delta x = 0$):

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0 + 0)} = \frac{-1}{x_0^2}.$$

Exemplo

Calculemos a derivada de $f(x) = \sin x$ em $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \sin\frac{\pi}{3}}{\Delta x}.$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + \Delta x + \frac{\pi}{3}}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Prosseguindo:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Reorganizando a expressão e usando o limite fundamental $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right) \right].$$

Quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos $\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$ e, portanto, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$. O limite se

torna:

$$= 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + 0\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Hora de praticar!

Questão 01 Utilizando a definição de derivada por meio do limite,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

calcule a derivada da função $f(x) = x^2 + 3x$.

Questão 02 Determine, pela definição, a taxa de variação instantânea (derivada) da função $f(x) = 5x - 2$ em um ponto qualquer x .

Questão 03 Dada a função $f(x) = \frac{1}{x}$, mostre, aplicando o limite do quociente de incrementos, que sua derivada é $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Questão 04 Encontre a inclinação da reta tangente à curva $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x = 4$, utilizando estritamente a definição de derivada por limite.

Interpretação Geométrica

A interpretação fundamental da derivada é a geométrica:

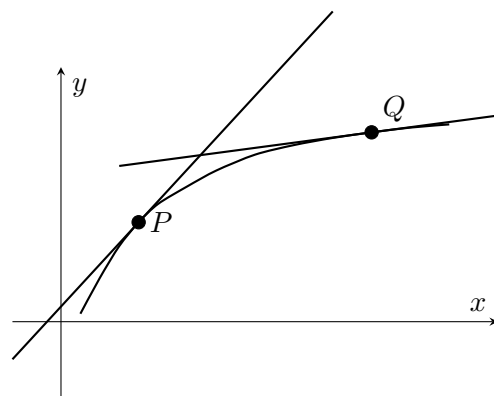
Definição

Se f é diferenciável em a , então $f'(a)$ é o **coeficiente angular (inclinação)** da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(a, f(a))$.

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é dada por:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

A reta tangente é o melhor ajuste linear local para a função f na vizinhança do ponto a .



De modo geral, a análise geométrica, visualmente confirmada pelo comportamento das retas tangentes ilustradas na figura 15, estabelece o alicerce intuitivo para o Cálculo Diferencial. A derivada $f'(a)$ deixa de ser uma mera inclinação, tornando-se a quantificação da taxa instantânea de variação da função f no ponto a , servindo como o **melhor ajuste linear local** para a curva. Essa perspectiva geométrica é crucial, pois permite estender o conceito de taxa de variação além do domínio estritamente espacial, possibilitando a modelagem de fenômenos dinâmicos em que a mudança ocorre continuamente. Conceitos esses, que ajudarão a responder e otimizar os problemas base do projeto.

Diferenciabilidade Implica Continuidade

Um resultado teórico crucial é a relação entre diferenciabilidade e continuidade.

Teorema

Se uma função f é **diferenciável** em um ponto a , então f é necessariamente **contínua** em a .

Demonstração

Para $x \neq a$, podemos escrever $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$. Tomando o limite quando $x \rightarrow a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right].$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} (x - a) \right).$$

Pela definição de derivada, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

O que implica $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, que é a definição de continuidade em a .

Observação

O recíproco não é verdadeiro: uma função pode ser contínua em um ponto, mas não ser diferenciável (e.g., $f(x) = |x|$ em $x = 0$). A falta de diferenciabilidade está associada à existência de "bicos" (pontos angulares) ou tangentes verticais no gráfico.

Função Derivada

Seja f uma função derivável no intervalo aberto I . Para cada ponto $x_0 \in I$, existe e é único o limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Esse limite representa a **taxa de variação instantânea** da função f no ponto x_0 .

Assim, podemos definir uma nova função.

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R},$$

que associa a cada $x \in I$ o valor da de-

rivada de f nesse ponto. Essa função é chamada de **função derivada de f** , ou simplesmente **derivada de f** .

Habitualmente, a derivada de f é representada pelas notações

$$f'(x), \quad \frac{df}{dx} \quad \text{ou} \quad Df(x).$$

De modo geral, a expressão da função derivada pode ser obtida a partir da lei $f(x)$, aplicando-se a definição de derivada de uma função f , em um ponto genérico $x \in I$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

É com essa definição que conseguimos calcular as derivadas das funções elementares mostradas na tabela a seguir:

Tabela 7: Derivadas das Funções Elementares

Nome da Função	Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$
Constante	c	0
Potência	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
Seno	$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
Cosseno	$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
Exponencial (base e)	e^x	e^x
Exponencial (base a)	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
Logaritmo Natural	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Logaritmo (base a)	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Exemplo

Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa $x = 2$.

Substituímos o valor de x na função original para encontrar a ordenada

y :

$$y_0 = f(2) = e^2.$$

Portanto, o ponto de tangência é $P(2, e^2)$.

A inclinação da reta tangente (m) é dada pela derivada da função no ponto dado:

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$$

$$m = f'(2) = e^2.$$

Utilizamos a equação geral da reta:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Substituindo os valores encontrados ($x_0 = 2, y_0 = e^2$ e $m = e^2$):

$$y - e^2 = e^2(x - 2).$$

Distribuindo o termo e^2 :

$$y - e^2 = e^2x - 2e^2.$$

Isolando y para obter a equação reduzida:

$$y = e^2x - 2e^2 + e^2$$

$$y = e^2x - e^2.$$

Exemplo

Um móvel desloca-se sobre uma reta obedecendo à equação horária $s = t^4$ (Unidades SI). Determine:

Equações base:

$$v(t) = s'(t) = 4t^3$$

$$a(t) = v'(t) = 12t^2$$

(a) sua velocidade no instante $t = 2s$;

$$v(2) = 4(2)^3 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ m/s.}$$

(b) sua aceleração no instante $t = 3 \text{ s}$

$$a(3) = 12(3)^2 = 12 \cdot 9 = 108 \text{ m/s}^2.$$

(c) em que instante sua velocidade é 108 m/s

$$4t^3 = 108$$

$$t^3 = 27$$

$$t = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ s.}$$

(d) em que instante sua aceleração é 48 m/s^2 .

$$12t^2 = 48$$

$$t^2 = 4$$

$$t = \sqrt{4} = 2 \text{ s.}$$

Análise do Comportamento de funções através da derivada

A utilização da derivada no Ensino Médio permite que o estudante realize uma transição da matemática estática para uma análise dinâmica das funções. Isto é, não focamos apenas no cálculo mecânico, mas usamos a derivada como uma ferramenta para descrever o movimento e a curvatura do gráfico.

Crescimento e decréscimo

A introdução do cálculo no Ensino Médio permite que o estudante deixe de enxergar as funções como estruturas es-

táticas e passe a interpretá-las por meio do movimento. A derivada, neste contexto, funciona para indicar a inclinação e a direção da curva em cada instante. Dessa forma, para entender se uma função está aumentando ou diminuindo seus valores, analisamos o sinal de sua primeira derivada, $f'(x)$. Geometricamente, isso corresponde à inclinação da reta tangente ao gráfico, assim:

- **Derivada positiva ($f'(x) > 0$):** Localmente, a função é crescente. Imagine uma reta tangente com inclinação ascendente; conforme x aumenta, y também aumenta.
- **Derivada negativa ($f'(x) < 0$):** Localmente, a função é decrescente. A reta tangente aponta para baixo, indicando que a função está perdendo valor conforme avançamos no eixo das abscissas.
- **Derivada nula ($f'(x) = 0$):** Indica um ponto de repouso instantâneo, também chamado de ponto crítico. A reta tangente é horizontal, sinalizando que a função atingiu o ponto mais alto ou o ponto mais baixo.

Concavidade e a segunda derivada

Enquanto a primeira derivada nos dá a direção, a segunda derivada, $f''(x)$, nos revela a “forma” da curva, ou seja, para onde ela abre sua concavidade. Essa análise é fundamental para garantir que encontramos a solução ótima em problemas de otimização:

- **Concavidade para Cima ($f''(x) >$**

0): O gráfico apresenta uma curvatura voltada para cima.

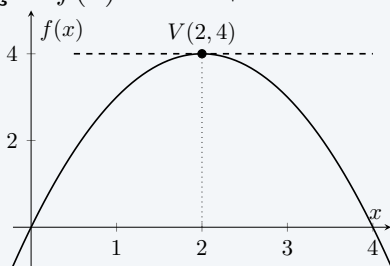
- **Concavidade para Baixo** ($f''(x) < 0$): O gráfico apresenta uma curvatura voltada para baixo.

Exemplo

Consideremos a função $f(x) = -x^2 + 4x$. Através do cálculo, identificaremos o ponto mais alto da função e analisaremos o comportamento da curva por meio da reta tangente.

1. **Cálculo da derivada:** $f'(x) = -2x + 4$.
2. **Ponto crítico:** Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
3. **Teste da segunda derivada:** $f''(x) = -2$. Como $f''(2) < 0$, a concavidade é voltada para baixo, confirmando que o x do vértice é $x_v = 2$.

Figura 5: Análise da Derivada na Função $f(x) = -x^2 + 4x$



Fonte: Elaborado pelo autor (2026) [cite: 1192]

Conforme observado na Figura 5, o ponto $x = 2$ representa o equilíbrio da função. À esquerda deste valor, a inclinação das retas tangentes é

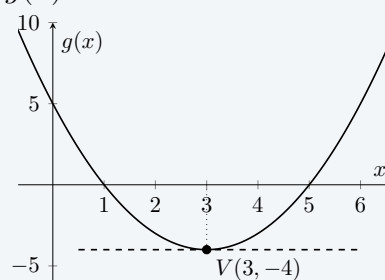
positiva ($f'(x) > 0$), indicando crescimento. À direita, a inclinação torna-se negativa ($f'(x) < 0$), caracterizando o decréscimo da função.

Exemplo

Dada a função $g(x) = x^2 - 6x + 5$, buscaremos identificar analítica e graficamente o ponto mais baixo que esta função assume através das ferramentas do cálculo.

1. **Cálculo da derivada:** $g'(x) = 2x - 6$.
2. **Ponto crítico:** $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$.
3. **Teste da segunda derivada:** $g''(x) = 2$. Como $g''(3) > 0$, a concavidade é voltada para cima, o que caracteriza $x = 3$ como o valor do x do vértice.

Figura 6: Análise da derivada na função $g(x) = x^2 - 6x + 5$



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Como observado na Figura 6, o ponto $V(3, -4)$ é o local onde a função cessa seu decréscimo e inicia seu crescimento. A **reta tangente** vermelha tracejada possui inclinação nula, confirmando que a taxa de variação instantânea é zero no ponto

crítico. À esquerda de $x = 3$, a função possui derivadas negativas, enquanto à direita, as derivadas são positivas.

Hora de praticar!

Questão 01 Qual é a equação da reta tangente à curva $y = x^2 - 3x$ no seu ponto de abscissa $x = 4$?

Questão 02 Determine, em cada caso, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 .

- a) $f(x) = x + 1$, $x_0 = 3$
- b) $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0 = 1$
- c) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$
- d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$
- e) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$
- f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 2\sqrt{2}$

Questão 03 Um ponto percorre uma curva obedecendo à equação horária $s(t) = t^2 + t - 2$. Calcule a sua velocidade no instante $t_0 = 2$. (Unidades do SI)

Questão 04 Calcule, no instante $t_0 = 3$, a velocidade de uma partícula que se move obedecendo à equação horária $s(t) = \frac{1}{t}$. (Unidades do SI)

Questão 05 Obtenha a derivada das seguintes funções:

- a) $f(x) = 5$
- b) $g(x) = x^6$
- c) $h(x) = x^{15}$

Questão 06 Obtenha a derivada das seguintes funções:

- a) $f(x) = c \cdot x^n$ ($c \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$)
- b) $g(x) = \tan x$
- c) $h(x) = \sec x$

Problemas de otimização

Para finalizar esta sequência didática e a aplicação do projeto, deixo dois problemas de otimização para serem respondidos e discutidos.

Problema 01: Maximização do lucro na venda de empadas

A comissão de formatura da 3ª série do Ensino Médio da ECIT Irmã Stefanie decidiu vender empadas durante o intervalo para arrecadar recursos financeiros. No entanto, surgiu um impasse: qual preço deve ser cobrado? Se o preço for muito alto, poucos alunos comprarão e, se for muito baixo, a receita pode não cobrir os custos de produção. Como calcular o melhor valor a ser vendido e qual a quantidade mais viável?

Problema 02: Otimização de Embalagens

O segundo problema visa analisar qual a melhor embalagem para colocar as empadas do problema 01. Assim, qual as melhores dimensões de um prisma reto que embale quatro empadas com um determinado diâmetro?

REFERÊNCIAS

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. de. *Prisma matemática: conjuntos e funções: ensino médio: manual do professor*. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020. Área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. ISBN 978-65-5742-016-4.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2010.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar: conjuntos, funções*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 1. ISBN 978-85-357-1680-1.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. *Fundamentos de matemática elementar: limites, derivadas, noções de integral*. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 8. ISBN 978-85-357-1756-3.

STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1. Tradução de EZ2 Translate. Título original: Calculus: early transcendentals. ISBN 978-85-221-1461-0.