UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Francicarlos de Medeiros Santos

Cálculo de Áreas de Figuras Planas Não Comuns: uma sugestão com jogos e materiais concretos

Campina Grande - PB
Agosto/2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Francicarlos de Medeiros Santos

Cálculo de Áreas de Figuras Planas Não Comuns: uma sugestão com jogos e materiais concretos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Agosto/2025

S237c Santos, Francicarlos de Medeiros.
Cálculo de áreas de figuras planas não comuns: uma sugestão com jogos e materiais concretos / Francicarlos de Medeiros Santos. – Campina Grande, 2025.
123 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.
"Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho".
Referências.

1. Matemática – Estudo e Ensino. *2.* Áreas de Figuras Planas. 3. Material Concreto. 4. Jogo Lúdico. 5. Decomposição de Figuras. 6. Ensino de Matemática. I. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. II. Título.

UFCG/BC CDU 51(07)(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Francicarlos de Medeiros Santos

Cálculo de Áreas de Figuras Planas Não Comuns: uma sugestão com jogos e materiais concretos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 08 de Agosto de 2025:

Documento assinado digitalmente
gov.br
DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO
Data: 11/08/2025 16:21:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho
Orientador - UFCG

Documento assinado digitalmente
gov.br
ISRAEL BURITI GALVAO
Data: 13/08/2025 17:54:50-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Israel Buriti Galvão
Membro Externo - UEPB

Documento assinado digitalmente
gov.br
WEILLER FELIPE CHAVES BARBOZA
Data: 11/08/2025 22:25:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Weiller Felipe Chaves Barboza
Membro Interno - UFCG

Campina Grande - PB
Agosto/2025

Dedico este trabalho aos meus pais, que foram meus primeiros educadores e me apoiaram durante toda a jornada acadêmica.

Agradecimentos

Após trilhar este longo percurso, venho externar minha gratidão aos que contribuíram diretamente ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Agradeço a Deus pelas bençãos e realizações concebidas.

Agradeço à minha mãe Ana Maria e ao meu pai Francisco Valdivino por todo carinho, afeto, incentivo, enfim, por tudo. Também agradeço aos meus irmãos Ana Carla, Francisco, Pedro e aos sobrinhos Deyvid e Davy pelo apoio moral e emocional.

A minha tia Maria das Graças (in memoriam), que contribuiu com minha educação e na minha formação enquanto cidadão. Além de todo o carinho e afeto transmitidos.

Aos meus amigos. Destaco aqui Marianne, que sempre me incentivou e motivou durante o curso.

Agradeço aos professores do quadro do PROFMAT/UFCG, os quais contribuíram de forma majestosa para minha aprendizagem durante o curso. Em especial, agradeço ao meu orientador Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho pelos ensinamentos, paciência e por direcionar tão bem esta pesquisa.

Aos colegas de turma: Aurino, Edcarla, Eli, Emanuel, Emerson, Filipe, Freire, Geraldo, Gustavo, Joaquim, Leandro, Marcicleide (Márcia), Maciel e Renan deixo aqui meu agradecimento por todo o companheirismo e momentos de descontração, que tornavam o clima mais leve.

Não poderia esquecer de agradecer aos colegas de viagem: Antônia, Daniesio, Emanuel, Eli e Marciano, que compartilhavam suas histórias e também muitos conhecimentos durante os vários Km que rodávamos até chegar ao nosso destino.

A todos os funcionários da UAMAT/UFCG, deixo meu sincero agradecimento.

Agradeço às gestoras das escolas EMEF Macário Zulmiro e do Instituto Municipal João Cândido Filho, por todo o apoio durante esses anos.

Finalmente, agradeço a Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (FAPESQ) por todo o apoio financeiro durante parte do curso. O financiamento foi fundamental para realização e permanência no curso.

A todos, meu muito obrigado!

"É necessário sempre acreditar
que o sonho é possível."
(Racionais Mc's)

Resumo

O presente trabalho apresenta a construção de um material concreto para ser usado em forma de jogo, assim como os procedimentos metodológicos de como aplicá-lo, embasado nas etapas de resolução de problemas sugeridas pelo matemático Pólya. Com isso, visamos o desenvolvimento das habilidades da BNCC que estão interligadas ao cálculo de áreas de figuras planas. O jogo explora o cálculo de áreas de figuras planas não comuns, as quais são figuras que não possuem os cálculos das áreas de forma imediatas, mas que devem usar a decomposição em formas geométricas cujas áreas podem ser calculadas de forma imediata (como triângulos, quadrados, círculos). Além disso, relatamos e levantamos dados das aplicações feitas em sala de aula.

Palavras-chave: Áreas de figuras planas. Material concreto. Jogo lúdico. Decomposição de figuras.

Abstract

This work presents the construction of a concrete material to be used in game form, as well as the methodological procedures for its application, based on the problem-solving steps suggested by mathematician Pólya. With this, we aim to develop BNCC skills that are linked to calculating the areas of plane figures. The game explores the calculation of areas of unusual plane figures, which are figures that do not have immediate area calculations, but which must use decomposition into geometric shapes whose areas can be calculated immediately (such as triangles, squares, and circles). Furthermore, we report and gather data from classroom applications.

Keywords: Areas of plane figures. Concrete material. Fun game. Decomposition of figures.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Algumas vezes, na educação básica, o ensino de áreas de figuras planas é ministrado de forma superficial, ocasionalmente, de forma mecânica, no qual o estudante apenas memoriza as fórmulas de figuras básicas e fundamentais, acabando por não compreender o processo de construção daquele resultado. Frequentemente, o treinamento do aluno pode se concentrar apenas no uso de fórmulas, sem conexão com a geometria das figuras. Assim, é possível que o aluno possa acabar perdendo o interesse pelo aprendizado do conteúdo, ou até mesmo desenvolver uma falta de interesse acarretando um "bloqueio" pela matemática.

As metodologias de ensino são mutáveis, ou seja, estão em constante transformação, e acompanhar tais flexibilidades torna-se um desafio para os professores. Diante dos avanços tecnológicos, e com uma infinidade de conteúdos de entretenimento na internet, fica difícil (ou quase impossível) competir com esses passatempos para ganhar à atenção dos estudantes e transmitir-lhes o conteúdo programático.

Persistir no ensino mecânico, que se baseia somente em decorar e aplicar fórmulas, pode ser um fator desmotivador e menos atrativo para os estudantes. Embora, também, seja uma prática importante, pois para aprender a calcular, necessitamos da prática. Para evitar um círculo vicioso na sala de aula, é possível implementar diferentes estratégias pedagógicas para estimular e motivar os alunos no processo de construção do conhecimento.

Diante disso, sugerimos uma proposta de ensino de áreas de figuras planas a partir de um material concreto em forma de jogo, objetivando aguçar o espírito competitivo, despertar a visão geométrica dos discentes e tornar a aula mais lúdica. Nosso intuito é explorar as áreas de figuras planas não comuns, isto é, de formas geométricas que não possuem uma fórmula imediata para calcular a área. A ideia é usar a decomposição da figura pouco conhecida em figuras conhecidas e que possuem uma fórmula para calcular a área (como triângulo, quadrado, círculo).

Para que a metodologia possa alcançar os objetivos traçados é indispensável ter um bom planejamento. Pois, ele "[...] é importante e não deve ser descuidado pelo professor. As atividades precisam constituir-se de desafios para os alunos, despertando seu interesse e promovendo um desenvolvimento efetivo." (RÊGO; RÊGO, 2022). Assim, toda atividade trabalhada em sala de aula deve ser bem pensada e prevista antes de acontecer, para evitar frustrações com a turma e que possa fluir da maneira desejada.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aborda o ensino da geometria durante todo o ensino básico e afirma que "[...] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas[...]” (BRASIL, 2018, p. 270).

Usar jogos educativos para complementar o conteúdo ministrado pode ser algo bem interessante e sugestivo, pois os alunos terão a oportunidade de trabalhar o conteúdo estudado de forma lúdica, além de envolver a turma e estimular o trabalho em grupo.

A motivação e o interesse no tema desta pesquisa se deram pelas inúmeras propriedades e detalhes que o conteúdo de áreas contempla, bem como suas várias aplicabilidades em situações cotidianas.

Esperamos, com esta pesquisa, contribuir para as aulas dos professores que desejarem usar nossa proposta, a fim de complementar o conteúdo de áreas e estimular os estudantes a explorar o máximo de propriedades geométricas, estudadas anteriormente, através do nosso jogo.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Sugerir a construção e uma metodologia didática do uso de um material que possa servir para os professores em suas aulas no ensino básico e que desperte o interesse do estudante no estudo do cálculo de áreas.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Despertar a visão geométrica do aluno;
- Potencializar a capacidade de calcular áreas desconhecidas, usando a decomposição de formas geométricas planas não comuns em figuras já conhecidas;
- Analisar como alguns livros e sites abordam o cálculo de áreas e áreas não comuns;
- Desenvolver as habilidades da BNCC que têm ligação com as áreas de figuras planas;
- Apresentar as demonstrações de algumas áreas de figuras planas;
- Propor a elaboração de um material concreto e prático para trabalhar o conteúdo de áreas.

1.2 Organização

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi estruturado em sete capítulos. No primeiro capítulo, intitulado como Introdução, trazemos as considerações iniciais, juntamente com a justificativa, objetivos gerais e específicos e organização do TCC.

No Capítulo 2, destacamos algumas competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que têm ligação direta com o conteúdo de áreas. Além disso, dissertamos como as referidas habilidades podem ser desenvolvidas a partir da nossa proposta de jogo com o material concreto.

O Capítulo 3 foi dedicado à resolução de problemas matemáticos, baseados no método do matemático PÓLYA (1995). Nele, expomos as etapas para resolução de um problema, sugeridas por Pólya, e como podemos usá-las no desenvolvimento da nossa proposta de jogo. Além do mais, discorremos sobre algumas formas de estimular os estudantes a resolver problemas matemáticos.

Já no Capítulo 4, apresentamos alguns resultados preliminares de geometria e afins e, ainda, demonstramos as fórmulas de calcular as áreas do: quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio e círculo.

No Capítulo 5, fizemos uma análise de três livros didáticos e de três sites da internet para observar como tratam o conteúdo de áreas e sugerimos como nosso jogo educacional pode complementar os conteúdos trazidos nestes livros e sites.

Para o Capítulo 6 apresentamos o Jogo das decomposições, assim como os procedimentos metodológicos para usá-lo em sala de aula. Além do mais, relatamos as aplicações do jogo feitas em duas turmas de escolas distintas.

No Capítulo 7, expomos as considerações finais. E finalmente, apresentamos as referências, as quais nos baseamos para o desenvolvimento desta pesquisa, os apêndices e anexos, que expõem os materiais que serão usados para a confecção e aplicação do jogo.

2 A BNCC, o cálculo de áreas e a decomposição de uma figura geométrica em outras figuras

Neste capítulo, serão abordadas as competências (gerais e específicas) e as habilidades mencionadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), que podem ser desenvolvidas mediante o uso do produto educacional, resultante deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Daremos ênfase principalmente às habilidades relacionadas ao cálculo de áreas de figuras planas que podem usar a decomposição.

O produto educacional mencionado no último parágrafo acima, consiste em um jogo matemático concreto. Ele é composto por uma caixa com fundo em formato quadrado e peças geométricas como triângulos, quadrados, setores circulares e outras formas menos comuns, mas que podem ter as áreas calculadas por meio de decomposição nas demais figuras mencionadas neste parágrafo. O material para impressão e o roteiro de aplicação do jogo serão disponibilizados no formato digital na plataforma eduCAPES.

Vale ressaltar que o produto educacional será descrito com mais detalhes no capítulo 6 deste TCC, juntamente com o relato da aplicação em sala de aula e os resultados obtidos.

Com o jogo que disponibilizaremos, o professor poderá trabalhar o cálculo de áreas de figuras planas cujas áreas não podem ser calculadas imediatamente, que denominaremos de figuras planas não comuns. Para isso, será possível explorar a decomposição dessas figuras em outras mais simples, como triângulos, paralelogramos, círculos e setores circulares, cujos cálculos das áreas são imediatos.

A fim de evitar repetição de palavras, em alguns momentos iremos nos referir ao nosso produto educacional como recurso educacional, jogo matemático concreto, nossa proposta de jogo educacional, jogo educacional e jogo concreto.

A seguir, selecionaremos algumas habilidades previstas na BNCC que se conectam ao nosso produto educacional e apresentaremos como elas podem ser desenvolvidas a partir da nossa proposta.

2.1 Explorando as competências e habilidades pautadas na BNCC que são interligadas à geometria e ao cálculo de áreas

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), que é um documento de caráter normativo e está prevista na Lei de Diretrizes e Bases (LDB) (BRASIL, 1996) de 1996, na Constituição Federal de 1988 e no Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2014) de 2014, estabelece os conteúdos comuns que devem ser inseridos nos currículos das escolas brasileiras, como afirma:

> A BNCC é um documento plural, contemporâneo, e estabelece com clareza o conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que todos os estudantes, crianças, jovens e adultos, têm direito. Com ela, redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares passam a ter uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e propostas pedagógicas. Essa referência é o ponto ao qual se quer chegar em cada etapa da Educação Básica, enquanto os currículos traçam o caminho até lá. (BRASIL, 2018, p. 05).

Dessa maneira, a BNCC contribui para garantir uma formação comum aos alunos, assegurando que tenham acesso a um aprendizado estruturado e conectado às diretrizes nacionais.

Fazendo uma análise sobre as competências gerais da BNCC, destacamos duas delas, as quais poderemos relacioná-las com nosso trabalho.

Competência 2: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções[...].

O jogo matemático que propomos, poderá desafiar os alunos a investigar diferentes formas geométricas e suas decomposições para calcular áreas de figuras planas não comuns, que exigem decomposição.

Manipulando as peças do jogo, os alunos irão exercitar a experimentação e o raciocínio lógico, podendo testar estratégias variadas para decompor figuras menos comuns em formas geométricas mais conhecidas, como triângulos e paralelogramos. Esse processo incentiva os estudantes a formularem hipóteses sobre as áreas que serão calculadas através do recurso educacional e a procura por novas soluções. Assim sendo, o jogo não irá apenas reforçar o aprendizado matemático, mas também incentivará o pensamento crítico, a criatividade e a investigação.

Competência 4: Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para

se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

O jogo matemático proposto neste TCC e no produto educacional, está conectado com essa competência, uma vez que envolve diferentes linguagens na construção do conhecimento. Durante o jogo, os alunos utilizam a linguagem matemática para calcular áreas das figuras planas não comuns, que serão apresentadas pelo professor, a linguagem visual ao identificar e decompor formas geométricas, e a linguagem corporal ao manipular as peças físicas.

Além disso, pode-se incentivar a comunicação verbal e escrita, pois os alunos irão discutir suas estratégias, justificar seus raciocínios e tirar suas próprias conclusões.

Dentre as competências específicas de matemática nos anos finais do ensino fundamental, daremos ênfase a duas delas, as quais possivelmente podem ser alcançadas de acordo com a nossa proposta que será aplicada em sala de aula.

Competência específica 2: Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

No produto educacional, pode-se verificar as propriedades geométricas presentes nas figuras que terão as áreas calculadas, a partir da manipulação das peças do material concreto, obtendo as decomposições das figuras a partir das formas geométricas já conhecidas para calcular às áreas das figuras sugeridas pelo professor, durante o jogo. Assim, espera-se que o discente consiga construir um aprendizado matemático de forma lúdica e com argumentos sólidos.

Competência específica 6: Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens [...].

O professor poderá criar, em sala de aula, situações imaginativas e desafios que despertem a visão geométrica dos alunos a partir do nosso jogo concreto. Para isso, ele se encarregará de selecionar (ou elaborar) figuras que possam gerar essa curiosidade nos estudantes. Dessa maneira, espera que com a interação em grupo, eles possam estruturar suas respostas, chegar às conclusões e compartilhar suas ideias.

2.1.1 Como a Geometria é tratada na BNCC

A BNCC estrutura a matemática em cinco unidades temáticas, sendo elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Elas norteiam a elaboração das habilidades previstas na BNCC, que serão desenvolvidas durante o ensino básico.

A Geometria está ligada diretamente com nosso cotidiano, seja nas formas dos objetos, ou nas superfícies em geral, enfim, ela possui vários conceitos que podem ser úteis para resolver problemas em nosso mundo físico. Estes conceitos são capazes de levar os alunos a observarem os problemas, conjecturar e criar soluções, produzindo argumentos lógicos, convincentes e coerentes.

Sendo assim, "[...] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas [...]"(BRASIL, 2018, p. 270).

A proposta de usar o jogo concreto, que mencionamos neste TCC, é fazer com que o professor não se limite somente a exercícios mecânicos e aplicações imediatas de fórmulas, no entanto que possibilite aos alunos explorarem as propriedades geométricas presentes nas figuras planas que lhes forem apresentadas. Portanto, espera-se que eles construam um conhecimento que lhes permita interpretar e transformar o espaço em que vivem e não apenas se limitarem a decorar fórmulas.

A Geometria é tida como uma das cinco unidades temáticas da BNCC. Ela está presente de diferentes maneiras no currículo dos anos iniciais até os anos finais do ensino fundamental. Seja como reconhecimento das formas geométricas, comparação e classificação de figuras, áreas e perímetros, a Geometria contempla uma grande parte dos conteúdos matemáticos ensinados na educação básica.

De acordo com BRASIL (2018) a Geometria contém um vasto repertório de conceitos e procedimentos que são fundamentais para solucionar problemas no mundo físico.

Outra unidade em destaque na BNCC, nos anos finais do ensino fundamental, é a Grandezas e Medidas. Tal unidade interliga os objetos de conhecimento ao cálculo de áreas, que é o foco principal deste TCC, já que se trata do cálculo de áreas de figuras planas não comuns, a partir do uso de um jogo para fazer decomposições.

2.1.2 As competências e habilidades preconizadas pela BNCC a partir da nossa proposta de confecção de um material didático concreto

Destacaremos nesta seção algumas habilidades presentes na BNCC que podem ser desenvolvidas a partir do nosso recurso educacional. Indicaremos também como desenvolver estas habilidades por meio do nosso jogo educacional, que é mencionado em alguns parágrafos deste capítulo.

No 6º ano do ensino fundamental, pretende-se exercitar as seguintes habilidades com o uso do nosso jogo concreto:

- **(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.

Observando as peças do nosso jogo, e efetuando as decomposições nas figuras sugeridas para que calculem as áreas, os alunos irão reconhecer os triângulos, quadriláteros e outras formas geométricas. Espera-se que os discentes possam analisar a relação entre os lados dos polígonos e consigam enxergar que as áreas de alguns deles serão iguais. Assim, eles poderão fazer a substituição de uma peça por outra, quando isso ocorrer. Dessa forma, a habilidade **(EF06MA18)** será exercitada de forma parcial.

- **(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

A habilidade **(EF06MA19)** se alinha a nossa proposta de jogo, pois os estudantes terão a oportunidade de identificar, a partir dos lados dos triângulos que compõem as peças do material concreto e dos triângulos que eles podem formar juntando duas ou mais peças, se são isósceles, escalenos ou equiláteros. Dependendo da classificação do triângulo, os alunos podem adotar diferentes estratégias para calcular a área deles. E ainda, despertar a noção de área na composição do espaço.

- **(EF06MA20)** Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

Com nosso recurso educacional, os discentes poderão visualizar as características das peças geométricas do jogo, reconhecer os quadriláteros e classificá-los em quadrados, retângulos, dentre outros paralelogramos. Ademais, podem observar que juntando dois triângulos congruentes, formarão um paralelogramo e, com isso, até mesmo inferir que a área de um paralelogramo é igual a soma das áreas de dois triângulos congruentes.

- **(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Nossa proposta de jogo está diretamente relacionada a essa habilidade, uma vez que o professor irá propor que os alunos calculem as áreas das figuras planas não comuns (problemas) através da decomposição de áreas. Este método irá facilitar para que os estudantes não fiquem tão somente memorizando fórmulas. Por exemplo, o alunos não precisam decorar a fórmula de calcular a área de um trapézio, basta eles o decompor em triângulo(s) e retângulo.

Já no 7º ano do ensino fundamental, focaremos no desenvolvimento das seguintes habilidades a partir do nosso recurso educacional:

- **(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

Nosso jogo contará com uma pontuação maior, em cada rodada, para a equipe que primeiro apresentar o cálculo da área da figura que lhe foi sugerida pelo professor. Indo ao encontro da habilidade **(EF07MA05)**, as equipes que apresentarem uma solução diferente da primeira equipe, também irão receber uma pontuação diferenciada. Esta será metade da pontuação que a primeira equipe obteve na rodada.

- **(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

A habilidade **(EF07MA07)** é bastante interessante, pois visa a análise do aluno sobre a estratégia usada e a resposta construída para o problema que for apresentada ao aluno. O autor PÓLYA (1995), no livro "A Arte de Resolver Problemas", propõe o retrospecto como uma das etapas da resolução de um problema. Esta etapa vai ao encontro da habilidade citada neste parágrafo. Pode-se observar detalhadamente as etapas de resolução de problemas sugeridas por Pólya no capítulo 3.

Interligando-se com nossa proposta de jogo educacional, os estudantes terão a oportunidade de expor suas estratégias e ideias utilizadas para calcular as áreas das figuras planas não comuns, que farão parte do jogo, no quadro para os demais colegas.

- **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Ao calcular as áreas das figuras presentes no produto educacional, os estudantes estarão lidando com problemas que envolvem operações com os números racionais, sejam na forma inteira ou na forma fracionada.

- **(EF07MA31)** Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.

Espera-se, com nossa proposta educacional, que os discentes consigam identificar a relação de áreas entre os triângulos e quadriláteros. Ou seja, eles poderão deduzir que a área de um triângulo é metade da área de um paralelogramo.

- **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

A habilidade **(EF07MA32)** se conecta diretamente com nosso produto educacional, já que nossa proposta é exatamente explorar a decomposição de figuras planas que podem ser decompostas.

O 8º ano do ensino fundamental trabalhará as seguintes habilidades:

- **(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Ao manusear as peças do recurso educacional, os alunos podem construir figuras com áreas iguais a partir da rotação e translação de formas geométricas.

- **(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

O intuito do nosso jogo concreto é despertar a visão geométrica dos estudantes com o propósito de entenderem o conceito de áreas, e fazer as variadas decomposições nas figuras, tudo isso de uma forma lúdica e significativa. A partir dos conceitos estudados no jogo, posteriormente, os alunos podem se deparar, em seu cotidiano, com situações reais em que precisarão calcular a área de um terreno irregular. Se isso ocorrer, espera-se que eles tenham conseguido desencadear a habilidade de decompor a área do terreno em outras figuras que podem ter a área calculada e, com isso, alcançar a habilidade **(EF08MA19)**.

No ensino médio, a seguinte aptidão poderá ser desenvolvida através do nosso produto educacional:

- **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo [...].

A proposta de usar o jogo matemático concreto, que os alunos estarão tendo o contato tátil com o mesmo, poderá facilitar para testar soluções. Manipulando as peças do jogo, os estudantes podem usar diferentes formas de decompor a figura, seja subtraindo áreas ou acrescentando, em busca de calcular a área da figura que lhes for apresentada. Logo, espera-se, com isso, desenvolver a habilidade **(EM13MAT307)**.

Nosso produto educacional poderá complementar o conteúdo de áreas que são propostos nos livros didáticos, que inclusive analisaremos alguns no capítulo 5 deste TCC. Será uma proposta de aula lúdica, com desafios e que pode estimular a participação e construir uma aprendizagem mais significativa e dinâmica. As figuras que serão sugeridas no arquivo do produto educacional, foram bem selecionadas e variam os níveis de dificuldade. Esperamos, desse modo, incentivar o estudo de áreas e fazer com que os alunos consigam desenvolver as habilidades da BNCC que foram mencionadas neste capítulo.

3 Arte de resolver problemas de Pólya e o cálculo de áreas na decomposição de uma figura geométrica em outras figuras

O matemático húngaro George Pólya, nascido no dia 13 de dezembro de 1887 em Budapeste e falecido no dia 7 de dezembro de 1985 em Palo Alto, Califórnia, Estados Unidos, estudou as áreas de probabilidade, teoria dos números, análise, física matemática, combinatória e geometria.

Em 1905, na tentativa de seguir os passos profissionais do pai Jakab Pólya, George se matriculou no curso de direito na Universidade de Budapeste. Mas, por não se identificar com a área, ele desistiu após o primeiro semestre. Posteriormente, Pólya passou a estudar línguas e literaturas e se interessou por outras áreas como a física, filosofia e, em fim, a matemática.

Pólya também teve significativas contribuições para o ensino da matemática, especificamente na área de resolução de problemas matemáticos. Consideramos o método da resolução de problemas de Pólya 1995 como um dos seus grandes legados deixados para a educação matemática. Esse método foi descrito no livro "How to Solve It". Vale ressaltar que esse livro foi publicado em 1945 nos Estados Unidos e, ao longo dos anos, foram vendidas mais de um milhão de cópias e traduzido para 17 idiomas. Em português, o livro foi traduzido com o título *A Arte de Resolver Problemas* (PÓLYA, 1995).

O método de Pólya (1995) consiste em dividir o problema em quatro etapas principais. Sendo elas: Compreensão do problema, Elaboração de um plano, Execução do plano e Retrospecto. Veremos essas etapas com mais detalhes na próxima seção deste capítulo.

Adiante, veremos também como, possivelmente, o aluno poderá ser motivado a resolver os problemas que lhes serão propostos, em conformidade com as ideias apresentadas pelo autor George Pólya. Os problemas mencionados neste parágrafo serão associados ao nosso recurso educacional, os quais serão figuras planas que não possuem o cálculo da área de forma imediata e terão que ser decompostas em triângulos, paralelogramos, círculos ou outras figuras planas que possuem o cálculo de área imediata.

3.1 Passos para uma resolução de problemas matemáticos, baseados no método de Pólya

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe a resolução de problemas como uma das estratégias para aprendizagem, afirmando que:

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. (BRASIL, 2018, p. 264).

A estratégia de ensino, mencionada no parágrafo anterior, visa o desenvolvimento das competências e habilidades presentes na BNCC, auxiliar na formação integral dos alunos e contribuir para que os estudantes compreendam os conceitos matemáticos.

Além disso, a resolução de problemas envolve a capacidade dos discentes de analisarem os exercícios propostos, dos quais dados eles possuem para resolver as questões sugeridas, verificar se faltam informações que auxiliem na resolução e o que podem fazer para obtê-las. E ainda, os alunos podem obter a capacidade de reformular um exercício matemático de um nível de dificuldade maior em outros exercícios particulares de níveis de dificuldades menores, para enxergar a relação existente entre os exercícios até que consigam resolvê-los.

Porém, para que a abordagem possa fluir da maneira desejada, é preciso que seja bem planejada e tenha alguns critérios a serem seguidos. Para isto, o autor PÓLYA (1995) apresenta quatro etapas para a resolução de problemas, sendo elas:

- **Compreensão do problema:** Para resolver o problema, primeiramente deve-se compreender completamente a questão. PÓLYA (1995) sugere que se pergunte: Quais os dados da questão? Além de identificar se as informações fornecidas são suficientes ou se faltam mais dados.

Segundo PÓLYA (1995),

> "O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deverá ser bem escolhido, nem muito difícil, nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante." (PÓLYA, 1995, p. 04).

Se o problema não for compreendido, dificilmente o estudante conseguirá resolvê-lo, criando assim uma certa desmotivação em tentar dar prosseguimento a resolução do mesmo. A tarefa de procurar um exercício que seja interessante não é fácil, pois o professor deverá sugerir algo que desperte a curiosidade do aluno.

No nosso recurso educacional, que será publicado na plataforma eduCAPES (<https://educapes.capes.gov.br/>), faremos um roteiro para os professores seguirem, com alguns exercícios e sugestões de figuras planas não comuns, formadas a partir de triângulos, quadriláteros, círculos, setores circulares, que podem ser usadas na aplicação do recurso para que os alunos calculem a área dessas figuras não comuns.

Ainda na primeira etapa, muitos alunos podem tentar resolver um problema de forma rápida sem indagar questionamentos, ou mesmo tentar entender os passos para a sua resolução. O autor sugere que se façam algumas indagações para auxiliá-los:

- *Quais os dados?*

Utilizando nosso recurso educacional, para compreender o problema (a área da figura apresentada pelo professor a ser calculada), é importante que o docente sugira aos alunos produzirem traçados auxiliares (por exemplo, traçar a diagonal de um quadrado ou construir o raio de um círculo) para visualizar as possíveis decomposições que poderão ser feitas na figura da qual será entregue, pelo professor, aos estudantes. Com isso, os alunos estarão encontrando os "dados" da questão.

- *Quais as incógnitas?*

Ainda com relação ao nosso recurso educacional, o docente pode questionar aos alunos qual a área a ser calculada. Nisto, eles estariam refletindo sobre as incógnitas.

- *Quais as condicionantes?*

Para esta pergunta, os discentes deverão refletir quais as condições sobre as figuras eles já possuem. Imaginar se as condições são suficientes para satisfazerem as incógnitas. Por fim, indagar se os traçados auxiliares já são suficientes para a decomposição da figura, inicialmente apresentada pelo professor, em outras figuras já conhecidas (paralelogramos, triângulos, trapézios, círculos) e que possam calcular a área desejada.

No incentivo ao aluno o "professor deve auxiliar, nem de mais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho." (PÓLYA, 1995, p. 01). Ou seja, façamos com que eles busquem seus próprios meios para resolver o problema, nem que sua participação seja o mínimo possível. A sensação de conseguir resolver algo por si só pode ser um bom estímulo ao discente.

- **Elaboração de um plano:** Esta etapa é de suma importância, visto que é o momento em que os alunos irão refletir sobre quais recursos utilizar na resolução do problema sugerido. Nesta fase, Pólya (1995) sugere a indagação: Já resolveu algum problema correlato? Se a resposta for sim, há uma boa possibilidade do estudante já saber quais estratégias utilizar para iniciar com a resolução.

Uma boa estratégia seria reformular o problema em um outro mais simples para ser resolvido. Essa estratégia é bastante usada em nosso recurso educacional, pois os estudantes irão decompor a figura, apresentada pelo professor, em outras figuras (paralelogramos, triângulos, círculos) que eles podem calcular às áreas e, em seguida, basta somar as áreas das figuras decompostas para se obter a área inicialmente desejada.

Aqui nesta etapa também é ressaltada a importância dos conhecimentos prévios. Pode-se inferir que em tal fase os discentes estarão praticando a competência específica 2 de matemática, presente na BNCC, que fala em "Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes [...]" (BRASIL, 2018, p. 265).

As perguntas que podem surgir nesta etapa, com o propósito de nortear os estudantes, segundo Pólya (1995), são:

- *Percebe-se de maneira clara que os passos usados nas estratégias estão corretos?*
- *Seria possível demonstrar que os passos usados nas estratégias estão corretos?*

Caso eles percebam algum erro, ou inconsistência no argumento utilizado, poderão recorrer às estratégias traçadas anteriormente e tentar modificá-las ou recorrer a alguns ajustes necessários.

- **Execução do plano:** Este momento poderá ser mais tranquilo, caso o plano tenha sido bem elaborado na fase anterior. Se surgir dificuldade na execução do plano, o aluno pode retornar a etapa anterior e fazer modificações. Caso o aluno não apresente dificuldade em executar o plano "O professor não terá motivo de interromper o aluno se este executar corretamente as operações, a não ser possivelmente, para alertá-lo de que deverá verificar cada passo." (PÓLYA, 1995, p. 10).

A BNCC enfatiza a autonomia do aluno na resolução de problemas e deixa subentendido também na **Competência Geral 2**, que visa "Exercitar a curiosidade intelectual [...] incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções [...]." (BRASIL, 2018, p. 09).

Como frisado na **Competência Geral 10** da BNCC, o estudante deve "agir pessoal e coletivamente com autonomia [...]" (BRASIL, 2018, p. 10). Sendo assim, o professor deverá incentivá-los a formular suas hipóteses e testar soluções de forma autônoma.

Porém, é importante que os estudantes saibam descrever e demonstrar todas as estratégias usadas e, com isto, possam formalizar um argumento convincente e construir uma aprendizagem mais significativa. Dessa forma, a figura do professor é indispensável para verificar se nenhuma estratégia traçada na fase anterior está sendo usada de forma indevida e questionar os discentes.

- **Retrospecto:** O retrospecto da solução encontrada, algumas vezes é deixado de lado pelos alunos. Contudo, Pólya (1995) ressalta a sua importância para que seja compreendido o passo a passo da resolução, a consolidação do argumento e até mesmo para verificar se houve algum erro durante a solução.

A BNCC propõe, na habilidade **(EF07MA07)** que os alunos sejam capazes de "Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas." (BRASIL, 2018, p. 305).

PÓLYA (1995) recomenda tentar resolver o problema de uma outra maneira, para confirmar que a resolução faz sentido e que o problema foi resolvido corretamente e completamente.

3.2 O estímulo e a resolução de problemas

Estimular um estudante não é uma tarefa fácil, isto é fato. Uma série de fatores externos podem dificultar de modo significativo o prazer dos estudantes pelos estudos. Porém, olhando pelo lado da sala de aula e de acordo com as ideias apresentadas no livro "A arte de resolver problemas", vejamos algumas possíveis formas de motivar os alunos a solucionarem problemas matemáticos.

Segundo PÓLYA (1995), o aluno deverá desejar resolver o problema, primeiramente, para poder seguir as demais etapas da resolução descritas anteriormente. Sendo assim, o professor precisa encontrar meios que motivem os estudantes. Indo ao encontro dessa linha de raciocínio, G. Pólya propõe que os problemas devem ser selecionados de acordo com o nível de habilidade dos discentes, começando pelos mais simples e adicionando a dificuldade gradualmente, aumentando a confiança dele. A sensação de progresso é fundamental para o avanço do estudante.

Com o jogo (recurso educacional) desenvolvido, que será apresentado com mais detalhes no Capítulo 6, os discentes terão a oportunidade de desafiar uns aos outros com figuras que serão propostas para serem calculadas suas áreas usando o material concreto. O professor poderá sugerir, inicialmente, figuras mais simples que cada equipe consiga calcular as áreas dessas figuras. E de forma gradual, propor outras áreas de figuras que exigem um pouco mais de raciocínio para calculá-las, mas que podem ser decompostas nas figuras apresentadas primeiramente. Nesta estratégia podemos observar o direcionamento ao uso de problemas correlatos, como sugerido por Pólya.

Outro meio de motivação pode ser o incentivo a autonomia do pensamento independente do aluno. Fugir de padrões repetitivos e estimular o aluno a buscar diferentes formas de resolver a questão é uma forma de despertar sua curiosidade e criatividade. Tal incentivo, descrito neste parágrafo, interliga-se com a competência geral 2 da BNCC, expressa no Capítulo 2.

Persistir em busca de novas soluções para um exercício, possivelmente, incentivará uma nova motivação a longo prazo. Observar que errar também faz parte do processo e não significa que é impossível do problema ser resolvido, mas que precisa de mais esforços e reflexões. Isto ajudará os alunos a não desistir, mesmo diante das dificuldades e criar uma mentalidade de desenvolvimento, em que o mesmo se sinta motivado a continuar. Diante do exposto neste parágrafo, a confiança do aluno pode aumentar e isto poderá ser mais uma maneira de motivá-los.

O trabalho em grupo tende a ser um motivador para que os alunos se sintam colaboradores de um exercício ativo e conjunto, ofertando suas contribuições a partir das ideias compartilhadas e, possivelmente, até aumentando o prazer em participar da resolução do problema.

Outro ponto a ser considerado é no feedback positivo. Faz-se de suma importância parabenizar o processo construído pelo estudante e todo o seu progresso a cada descoberta, mesmo diante de alguns erros. Isto, certamente irá motivá-los a refletir sobre suas estratégias e ajudar a buscar soluções alternativas.

4 Área de figuras planas

Na matemática, usa-se o método hipotético-dedutivo para demonstrar a validade dos Teoremas, baseadas em axiomas e postulados a fim de manter os resultados convincentes e lógicos.

Consideramos as demonstrações como sendo essenciais no ensino das áreas de figuras planas. Enunciar uma fórmula e ocultar o processo lógico-dedutivo usado para obtê-la, pode não convencer o aluno de que ela é válida. Além do mais, através das demonstrações o estudante também pode construir um conhecimento mais significativo e a partir delas não precisar memorizar fórmulas.

Neste capítulo, iremos abordar o cálculo das áreas do: quadrado, retângulo, paralelogramo qualquer, triângulo, trapézio e do círculo. Focamos nas áreas dessas figuras, pois são algumas das formas geométricas presentes no recurso educacional deste TCC e também por serem as formas mais estudadas, durante o ensino básico.

Buscaremos usar um modelo axiomático para não nos prolongarmos demais neste capítulo. Algumas afirmações serão usadas como Axiomas, objetivando ter um ponto de partida para usar como argumento nas demonstrações dos demais resultados e não ser preciso estar enunciando e demonstrando tudo. Pois, caso isso ocorresse, "[...] se chegaria a um círculo vicioso, quando uma definição seria usada para definir uma outra e vice-versa [...]" (MORAIS FILHO, 2024, p. 132).

A seguir, faremos uma exposição de alguns conhecimentos preliminares que serão utilizados nas demonstrações das áreas das figuras citadas no último parágrafo.

4.1 Conhecimentos preliminares

Tendo em vista que este TCC será direcionado para professores de matemática, iremos usar alguns conceitos matemáticos sem necessariamente defini-los, pois subentende-se que os docentes já estejam familiarizados com tais conhecimentos. Tais conceitos são: ponto, plano, reta, segmento de reta, pontos colineares, função, congruência de triângulos, altura, bissetriz e mediana de um polígono. Os conceitos que não forem definidos, podem ser estudados nos livros (LIMA, 2009), (MUNIZ NETO, 2022) e (BARBOSA, 2012).

Observação 4.1. *Seja AB um segmento de reta. Denotaremos o comprimento de AB por $\overline{AB}$.*

Definição 4.1. *Um segmento de reta chama-se unitário, quando for igual a 1.*

Definição 4.2. *O ponto C é dito ponto médio do segmento AB, se* $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Definição 4.3. *Dois segmentos de reta AB e CD são congruentes, se* $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Definição 4.4. *Chama-se poligonal a figura obtida pela sequência de pontos* $A_1, A_2, ..., A_n$ *e pelos segmentos* $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$, *que formam os lados e são consecutivos. Os pontos são ditos vértices da poligonal.*

Definição 4.5. *Um polígono é a figura geométrica plana formada pela poligonal fechada, em que seus lados interceptam somente nas extremidades e selecionando-se quaisquer dois lados da figura, eles não pertencem a mesma reta.*

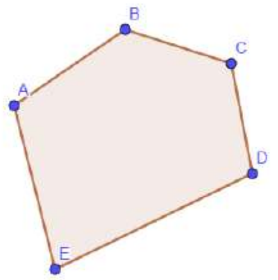
Para o autor MORAIS FILHO (2025), a etimologia da palavra polígono provém dos vocábulos gregos poli, que significa vários, e gonos, que significa ângulos. Logo, polígono seria aquilo que tem vários ângulos.

Definição 4.6. *Um polígono é convexo se, e somente se, todos os pontos de um segmento de reta, com extremidades no interior do polígono, também pertencem ao interior dele.*

A seguir, a figura 1a trata-se de um polígono convexo e na figura 1b, tem-se um polígono não convexo.

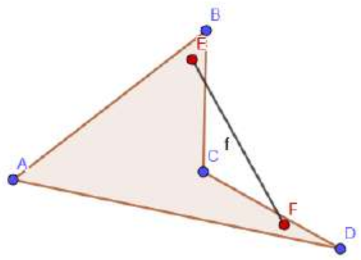
Figura 1 – Exemplos de polígonos

(a) Polígono convexo



Fonte: Elaborada pelo Autor

(b) Polígono não convexo



Fonte: Elaborada pelo Autor

Note que na figura 1b nem todos os pontos do segmento EF pertencem ao interior do polígono, pois uma parte do segmento passa por fora dele. Logo, o polígono não pode ser convexo.

Definição 4.7. *Um quadrilátero cujos lados possuem medidas iguais e os ângulos internos são todos retos, chama-se Quadrado.*

Definição 4.8. *Um quadrilátero cujos ângulos internos são todos retos, chama-se retângulo.*

Definição 4.9. *Paralelogramo é o quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.*

Definição 4.10. *Triângulo é o polígono que tem três lados, três ângulos internos e três vértices.*

Definição 4.11. *Um quadrilátero que possui um, e somente um, par de lados paralelos é dito trapézio.*

Os lados paralelos do trapézio chamam-se bases.

Definição 4.12. *Um triângulo é denominado isósceles, se pelo menos dois de seus lados forem congruentes.*

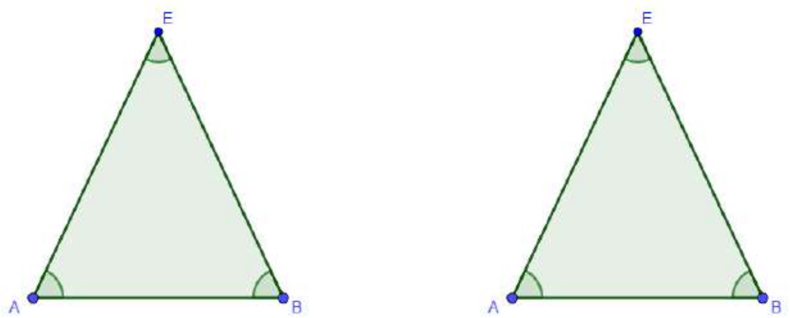
Proposição 4.1. *Um triângulo isósceles possui dois ângulos congruentes.*

Demonstração. Seja o triângulo EAB isósceles com $\overline{EA} = \overline{EB}$. Faremos a comparação do triângulo EAB com ele mesmo. Porém, faremos a correspondência $E \leftrightarrow E, A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow A$. Isto é, mostraremos que os triângulos EAB e EBA são congruentes.

Considere as figuras 2a e 2b.

Figura 2 – triângulos isósceles

(a) Triângulo EAB (b) Triângulo EBA



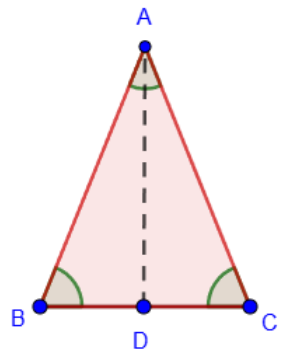
Fonte: Elaborada pelo Autor Fonte: Elaborada pelo Autor

Temos, $\overline{EA} = \overline{EB}$ e $\overline{EB} = \overline{EA}$. Além disso, $\hat{E} = \hat{E}$. Daí, pelo caso LAL, os triângulos EAB e EBA são congruentes. Portanto, $\hat{A} = \hat{B}$. ■

Proposição 4.2. *Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. A bissetriz, a altura e a mediana relativas a BC coincidem.*

Demonstração. Considere o triângulo isósceles a seguir.

Figura 3 – Triângulo isósceles de vértices ABC



Fonte: Elaborada pelo Autor

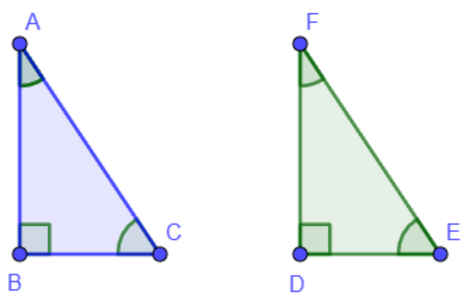
Como ABC é isósceles de base BC, segue-se que $\overline{AB} = \overline{AC}$, e ainda, conforme a Proposição 4.1 temos $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$. Caso o segmento AD seja uma bissetriz, então teremos $D\widehat{A}B = D\widehat{A}C$. Logo, os triângulos ABD e ACD serão congruentes pelo caso LAL. Dessa forma, $\overline{BD} = \overline{DC}$, isto é, o segmento AD também é uma mediana. Por fim, $A\widehat{D}B = A\widehat{D}C$. Como, $A\widehat{D}B + A\widehat{D}C = 180°$, então $A\widehat{D}B = A\widehat{D}C = 90°$. Ou seja, AD é também uma altura e, portanto, segue o resultado.

■

Proposição 4.3. *Se dois triângulos retângulos ABC e FDE são tais que a hipotenusa e um dos catetos de ABC são congruentes, respectivamente, a hipotenusa e um dos catetos de FDE, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Dados os triângulos ABC e FDE retângulos em $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$, com hipotenusas AC e FE, respectivamente, sendo $\overline{AC} = \overline{FE}$.

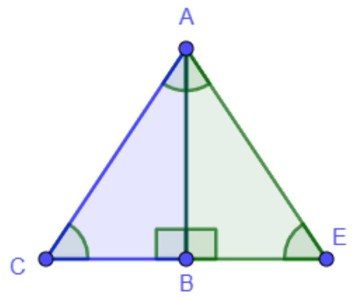
Figura 4 – Triângulos ABC e FDE



Fonte: Elaborado pelo Autor

Sem perda de generalidade, considere os catetos $\overline{AB} = \overline{FD}$. Assim, justapondo os triângulos nos catetos AB e FD, forma-se um triângulo isósceles de base CE.

Figura 5 – Triângulos justapostos



Fonte: Elaborada pelo Autor

Observe que AB é altura em relação a CE. Logo, da Proposição 4.2 segue que AB também é mediana. Daí, $\overline{CB} = \overline{BE}$. Ora, $\overline{BE} = \overline{DE}$ e pelo caso LLL os triângulos ABC e FDE são congruentes.

■

Para demonstrar a área do quadrado, iremos precisar de algumas noções topológicas. Para não nos estendermos com muitos resultados neste capítulo, pois não é o nosso foco principal. Sugerimos o livro (MACIEL; LIMA, 2005) para estudar esses conteúdos com mais detalhes.

Definição 4.13. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Diz-se que A é denso em $\mathbb{R}$, se dado um intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$, tem-se $z \in A \cap \mathbb{R}$.*

Proposição 4.4. *O conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

A demonstração da Proposição 4.4 pode ser vista com mais detalhes em (MACIEL; LIMA, 2005, p. 31).

Proposição 4.5. *O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

A demonstração da Proposição 4.5, encontra-se em (MACIEL; LIMA, 2005, p. 32).

4.2 Áreas

Intuitivamente, a área de uma figura geométrica plana $\mathcal{F}$ é a medida da porção que ela ocupa no plano. Tal medida está associada a um número real positivo, que indica, por meio de comparação, quantas vezes a unidade de área cabe em $\mathcal{F}$.

Seja $\mathcal{P}$ o conjunto das figuras geométricas planas. Definiremos a seguinte função:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} :& \mathcal{P} \to \mathbb{R}^+ \\ & P \mapsto \mathcal{A}(P). \end{aligned}$$

Onde $\mathcal{A}(P)$ representa a área da figura $P \in \mathcal{P}$.

Consideremos os seguintes Axiomas:

Axioma 4.6. *Polígonos congruentes possuem áreas iguais.*

Axioma 4.7. *Seja $\mathcal{Q}$ um quadrado de lado unitário, então $\mathcal{A}(\mathcal{Q}) = 1$.*

Axioma 4.8. *Se um polígono convexo for particionado em uma quantidade finita de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é igual a soma das áreas dos polígonos que o particionaram.*

Axioma 4.9. *Se um polígono $\mathcal{P}'$ estiver contido em um polígono $\mathcal{P}$, então a $\mathcal{A}(\mathcal{P}')$ é menor do que $\mathcal{A}(\mathcal{P})$.*

A próximo resultado é conhecido na matemática como Tricotomia. Ele é apresentado em (LIMA, 2006, p. 3). Iremos usá-lo mais adiante.

Proposição 4.10. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Somente uma das sentenças, a seguir, é verdadeira:*

- $a < b$;
- $b < a$;
- $a = b$.

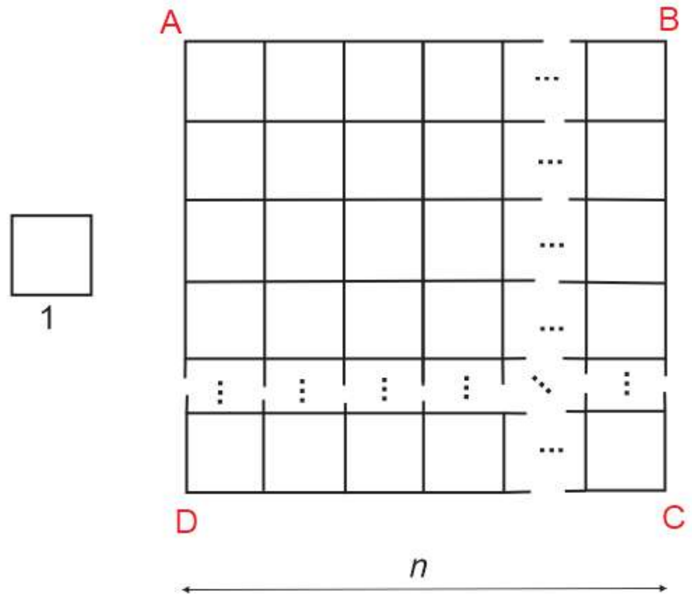
4.3 Área do Quadrado

O Teorema a seguir trata-se da generalização de uma fórmula para calcular a área de um quadrado, a partir do lado dele.

Teorema 4.11. *Seja $\mathcal{P}$ um quadrado, cujos lados possuem medidas de comprimento iguais a $n \in \mathbb{N}$. Então, $\mathcal{A}(\mathcal{P}) = n^2$.*

Demonstração. Inicialmente, considere um quadrado ABCD de lado medindo $n \in \mathbb{N}$. Pode-se dividir $ABCD$ em n^2 quadrados unitários, como ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Quadrado de lado n



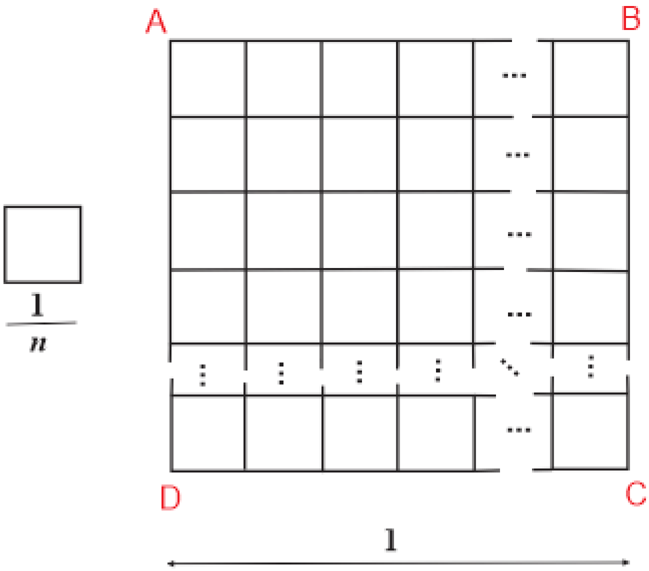
Fonte: Elaborada pelo Autor

Logo, pelo Axioma 4.8, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABCD) &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n^2 \text{ vezes}} \\ &= n^2 \cdot 1 \\ &= n^2.\end{aligned}$$

Agora, considere um quadrado unitário $ABCD$, dividido em n^2 quadrados congruentes de lados medindo $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. A Figura 7, a seguir, ilustra esse quadrado.

Figura 7 – Quadrado unitário dividido em quadrados de lados $\dfrac{1}{n}$



Fonte: Elaborada pelo Autor

Denotaremos esses quadrados (de lados $\frac{1}{n}$) por $U_1, U_2, \cdots, U_{n^2}$. Segue, pelo Axioma 4.8, que

$$A(U_1) + A(U_2) + \cdots + A(U_{n^2}) = \mathcal{A}(ABCD). \tag{4.1}$$

Além disso, pelo Axioma 4.7, temos

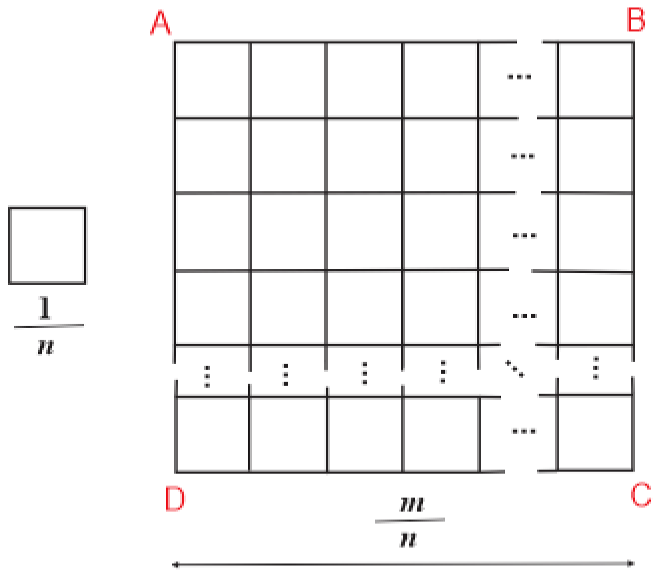
$$\mathcal{A}(ABCD) = 1. \tag{4.2}$$

Com isso, de 4.1 e 4.2 e usando o Axioma 4.6, obtemos

$$\begin{aligned} \underbrace{A(U_1) + A(U_1) + \cdots + A(U_1)}_{n^2 \text{ vezes}} &= 1 \\ n^2 \cdot A(U_1) &= 1 \\ A(U_1) &= \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Diante do exposto, se houver um quadrado cujos lados medem $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, pode-se decompor em m^2 quadrados $(\mathcal{R}_1, \cdots, \mathcal{R}_{m^2})$ congruentes, tais que os lados medem $\frac{1}{n}$. Para visualizar melhor tais informações deste parágrafo, observe a Figura 8.

Figura 8 – Quadrado de lado $\frac{m}{n}$ decomposto em quadrados de lados $\frac{1}{n}$



Fonte: Elaborada pelo Autor

Logo, como visto anteriormente, $\mathcal{A}(\mathcal{R}_1) = \frac{1}{n^2}$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABCD) &= \underbrace{\mathcal{A}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{R}_1) + \cdots + \mathcal{A}(\mathcal{R}_1)}_{m^2 \text{ vezes}} \\ &= m^2 \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{m^2}{n^2} \\ &= \left(\frac{m}{n}\right)^2.\end{aligned}$$

Por fim, sejam $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e Q um quadrado de lado igual a n. Provaremos que $\mathcal{A}(Q) = n^2$.

Suponha, por absurdo, que $\mathcal{A}(Q) < n^2$. Assim, $\sqrt{\mathcal{A}(Q)} < n$. Pela densidade dos números racionais, Proposição 4.4, existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que

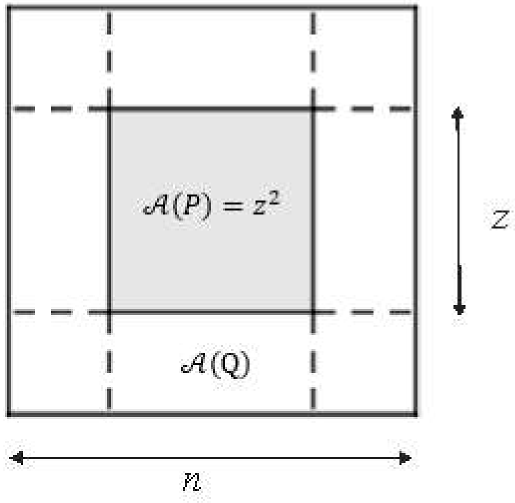
$$\sqrt{\mathcal{A}(Q)} < z < n.$$

Das últimas desigualdades, temos

$$\mathcal{A}(Q) < z^2 < n^2$$

Como $z \in \mathbb{Q}$, pode-se ter, pelo caso anterior, um quadrado P de lado z e $\mathcal{A}(P) = z^2$. Considere a Figura 9, para entender melhor os passos dessa demonstração.

Figura 9 – Quadrados Q e P



Fonte: Elaborada pelo Autor

Do que se pode observar na Figura 9 e pelo Axioma 4.9, segue que

$$\mathcal{A}(P) < \mathcal{A}(Q).$$

Pela propriedade transitiva, $z^2 < \mathcal{A}(Q)$, o que é um absurdo. De forma análoga, tem-se que $\mathcal{A}(Q) > n^2$ também é um absurdo.

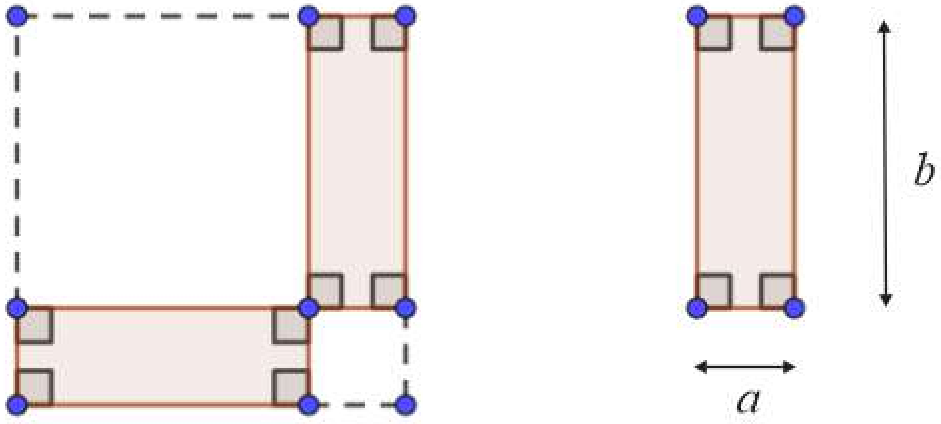
Portanto, pela Proposição 4.10, $\mathcal{A}(Q) = n^2$ e segue o resultado. ∎

4.4 Área do Retângulo

Teorema 4.12. *Seja um retângulo $\mathcal{R}$, cujos lados medem a e b, com $a, b \in \mathbb{R}^+$. Então, $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = ab$.*

Demonstração. Inicialmente, usaremos dois retângulos $\mathcal{R}$ sobrepostos por um de seus vértices a fim de formar um quadrado com lados medindo $a + b$. A Figura 10 ajudará a entender o que foi expresso neste parágrafo.

Figura 10 – Retângulos sobrepostos



Fonte: Elaborada pelo Autor

Considerando a Figura 10, chamaremos o quadrado de lado $a + b$ de $\mathcal{Q}$. Do Teorema 4.11, segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{Q}) &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por outro lado, ao observar a figura 10, nota-se que o quadrado $\mathcal{Q}$ é formado por um quadrado de lado a, um quadrado de lado b e dois retângulos $\mathcal{R}$, nos quais os lados menores e os lados maiores medem, respectivamente, a e b. Assim, pelo Axioma 4.8 e pelo Teorema 4.11, temos

$$\mathcal{A}(\mathcal{Q}) = a^2 + 2\mathcal{A}(\mathcal{R}) + b^2. \tag{4.4}$$

Logo, de 4.3 e 4.4, obtemos

$$\begin{aligned} & a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2\mathcal{A}(\mathcal{R}) + b^2 \\ & \Rightarrow 2ab = 2\mathcal{A}(\mathcal{R}) \\ & \Rightarrow ab = \mathcal{A}(\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Dessa forma, $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = ab$, como queríamos demonstrar. ■

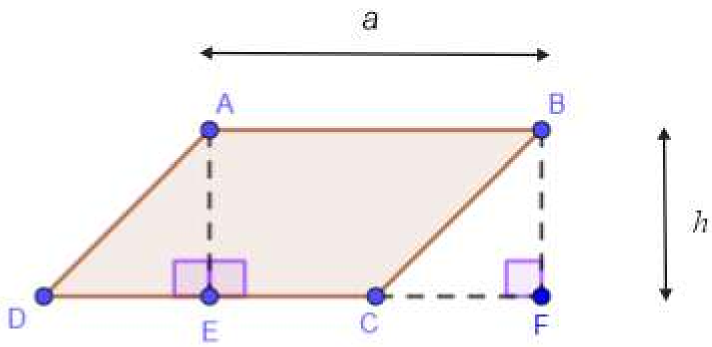
4.5 Área do Paralelogramo

Vale ressaltar que "Quando se toma um lado do paralelogramo como base, chama-se altura do paralelogramo a um segmento de perpendicular que liga a base ao lado oposto (ou ao seu prolongamento)". (LIMA, 2009, p. 18)

Teorema 4.13. *Seja $ABCD$ um paralelogramo tal que as bases e as alturas medem, respectivamente, a e h, com $a, h \in \mathbb{R}^+$. Então, $\mathcal{A}(ABCD) = ah$.*

Demonstração. Considere a Figura 11, para entendermos com mais clareza a demonstração deste Teorema.

Figura 11 – Paralelogramo de vértices ABCD



Fonte: Elaborado pelo Autor

Considere a base DC. Trace a partir dos vértices A e B, dois segmentos perpendiculares, nos pontos E e F, à reta DC, como podemos ver na imagem anterior. Os segmentos traçados serão as alturas do paralelogramo $ABCD$ referentes à base DC.

Note que $ABFE$ é um retângulo. Com isso, $\overline{AE} = \overline{BF}$.

Do paralelogramo $ABCD$, temos $\overline{AD} = \overline{BC}$. Logo, a proposição 4.3 assegura que os triângulos ADE e BCF são congruentes. Assim, conforme o Axioma 4.6, teremos $\mathcal{A}(ADE) = \mathcal{A}(BCF)$. Daí, pelo Axioma 4.8

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= \mathcal{A}(ADE) + \mathcal{A}(ABCE) \\ &= \mathcal{A}(BCF) + \mathcal{A}(ABCE) \\ &= \mathcal{A}(ABFE). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Pelo Teorema 4.12,

$$\mathcal{A}(ABFE) = ah. \tag{4.6}$$

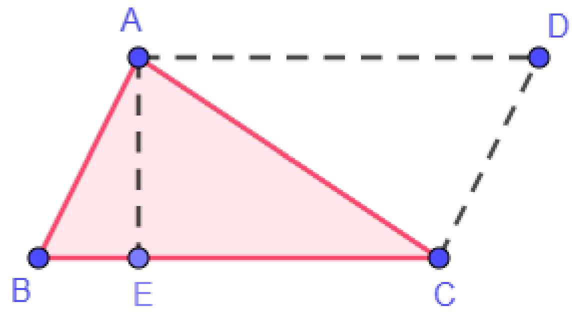
Dessa forma, de 4.5 e 4.6, $\mathcal{A}(ABCD) = ah$. ∎

4.6 Área do Triângulo

Teorema 4.14. *Seja ABC um triângulo de base a e altura, referente a esta base, h. Então, $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{ah}{2}$.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC. Sejam, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AE} = h$, com $a, h \in \mathbb{R}^+$. Considere a Figura 12 para facilitar a visualização dos passos da demonstração.

Figura 12 – Triângulo ABC



Fonte: Elaborada pelo Autor

Trace pelos vértices A e C, respectivamente, segmentos paralelos aos lados BC e AB. Observe, na Figura 12, que estes segmentos se intersectam no ponto D e forma o paralelogramo $ABCD$ de altura $\overline{AE} = h$. Note, ainda, que os triângulos ABC e CDA são congruentes pelo caso LLL. Assim, do Axioma 4.6, $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(CDA)$. E ainda,

$$\mathcal{A}(ABCD) = ah. \tag{4.7}$$

Além disso, pelo Axioma 4.8,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(CDA) \\ &= \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ABC) \\ &= 2 \cdot A(ABC). \end{aligned} \tag{4.8}$$

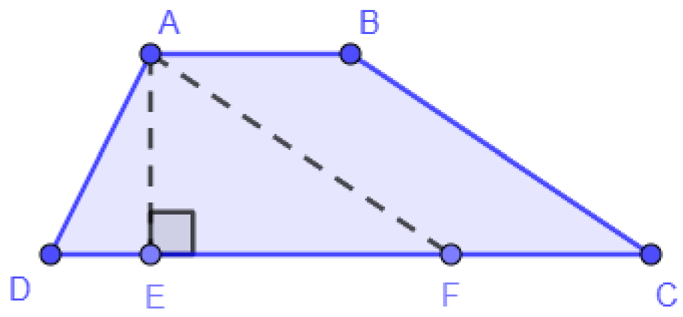
Das igualdades 4.7 e 4.8, temos $2 \cdot \mathcal{A}(ABC) = ah$ e, portanto, $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{ah}{2}$. ■

4.7 Área do Trapézio

Teorema 4.15. *A área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das bases pela altura.*

Demonstração. Considere o trapézio $ABCD$, ilustrado na Figura 13, sendo $\overline{AB} = b_1$, $\overline{CD} = b_2$ e $\overline{AE} = a$. Isto é, b_1 e b_2 são as bases e a é a altura do trapézio $ABCD$.

Figura 13 – Trapézio $ABCD$



Fonte: Elaborada pelo Autor

Trace o segmento $\overline{AF}$ paralelo a $\overline{BC}$. Daí, teremos o paralelogramo $ABCF$ e o triângulo ADF. Note que a altura do paralelogramo referente à base CF e a altura do triângulo ADF referente à base DF são ambas iguais a $\overline{AE} = a$. Logo, usando o Axioma 4.8, e os Teoremas 4.13 e 4.14, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ABCD) &= \mathcal{A}(ABCF) + \mathcal{A}(ADF) \\
&= b_1 a + \frac{(b_2 - b_1) \cdot a}{2} \\
&= b_1 a + \frac{b_2 a - b_1 a}{2} \\
&= \frac{2b_1 a + b_2 a - b_1 a}{2} \\
&= \frac{b_1 a + b_2 a}{2} \\
&= \frac{(b_1 + b_2) \cdot a}{2}.
\end{aligned}$$

Disto, segue o resultado. ■

4.8 Área do Círculo

Definição 4.14. *Sejam F e F' figuras do plano ou do espaço e $r \in \mathbb{R}^+$. Diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança igual a r, se existir uma correspondência biunívoca $\sigma : F \to F'$, entre os pontos de F e os de F', tais que se X, Y são pontos quaisquer de F e $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ são seus correspondentes em F' então $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$.*

Definição 4.15. *Dados um ponto O no plano e r um número real positivo. O círculo de centro O e raio r é o conjunto de todos os segmentos de reta, de medidas iguais a r, traçados a partir do ponto O.*

Definição 4.16. *A área de um círculo de raio 1 é igual a* π.

Teorema 4.16. *Dois círculos quaisquer são figuras semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre seus raios.*

Pode-se encontrar a demonstração do Teorema 4.16 em (LIMA, 2009, p. 46).

Teorema 4.17. *A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

A demonstração do Teorema 4.17 pode ser encontrada com mais detalhes em (LIMA, 2009, p. 47).

Teorema 4.18. *A área do círculo de raio* r *é igual a* πr^2.

Demonstração. Sejam C_1 e C_2 círculos de raios, respectivamente, r e 1. Por definição, $\mathcal{A}(C_2) = \pi$. Dos Teoremas 4.16 e 4.17, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(C_1)}{\mathcal{A}(C_2)} &= \left(\frac{r}{1}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{\mathcal{A}(C_1)}{\pi} &= r^2 \\ \Rightarrow \mathcal{A}(C_1) &= \pi r^2. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}(C_1) = \pi r^2$ e segue o resultado. ■

5 Uma análise da maneira como os livros didáticos e a internet abordam o conteúdo de áreas

O cálculo de áreas é algo presente nos trabalhos de construções civis e em diversas situações de nosso dia a dia, tais como realizar a medição da superfície de um terreno para plantações, realizar uma estimativa do número de pessoas (aproximadamente) em determinado evento. Mas como será que esse conteúdo de tanta relevância para a matemática e para nosso cotidiano é tratado pelos livros didáticos ou pelos sites de internet os quais são acessados diariamente pelos estudantes em busca de uma solução mais rápida?

Faremos uma breve análise em alguns livros didáticos e sites sobre a forma que os conteúdos de áreas aparecem neles e buscaremos fazer uma interligação com nosso recurso educacional, objetivando complementar os conteúdos dos livros e sites analisados através de nossa proposta.

Vale ressaltar que as análises feitas não são qualitativas e nem representam isso, ou seja, não temos o intuito de julgar se os livros ou sites são bons ou ruins, apenas faremos as análises de como esse conteúdo é explorado.

5.1 Análise de três livros didáticos de como trabalham o ensino de áreas

As escolas públicas do Brasil são contempladas com livros didáticos de todas as áreas, que são escolhidos de forma democrática pelos professores da rede de ensino e adquiridos pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD).

O PNLD é um programa do Governo Federal, responsável por avaliar e disponibilizar as obras didáticas para as instituições de ensino públicas de educação básica nas esferas federais, estaduais, municipais, distritais, instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o poder público.

Os livros didáticos que serão analisados nesta seção têm seu com foco no 8º ano do Ensino fundamental dos anos finais e que são estudados nas escolas do ensino básico do Brasil. Estes livros foram distribuídos pelo PNLD e fazem parte do quadriênio 2024-2027. Vale ressaltar que eles foram elaborados de acordo com as habilidades e competências da BNCC.

A escolha pelos livros do 8º ano deu-se pelo fato do autor desta pesquisa atuar como professor no ensino fundamental (anos finais), e pelo fato dos alunos já terem estudado as áreas dos triângulos e quadriláteros nos anos anteriores. No 8º ano, eles estudam as áreas circulares também, assim há uma possibilidade de existir mais variedades de exercícios para serem abordados em comparação com as séries anteriores.

5.1.1 Livro 1

O primeiro a ser analisado será o livro **Matemática e Realidade** (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2022), dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado, 10ª edição, lançado em São Paulo pela editora Saraiva Educação S.A. em 2022.

Os autores começam expondo o conteúdo de áreas através de um problema do dia a dia: "A direção de uma escola quer trocar a grama de um campo de futebol retangular cujas dimensões medem 66 m por 100 m. Qual será a medida de área de grama necessária?" (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2022, p. 206).

Usar uma situação problema ao introduzir um conteúdo pode ser uma boa estratégia para despertar a curiosidade dos estudantes em resolver a questão e prestarem atenção nos conteúdos que serão explicados em seguida.

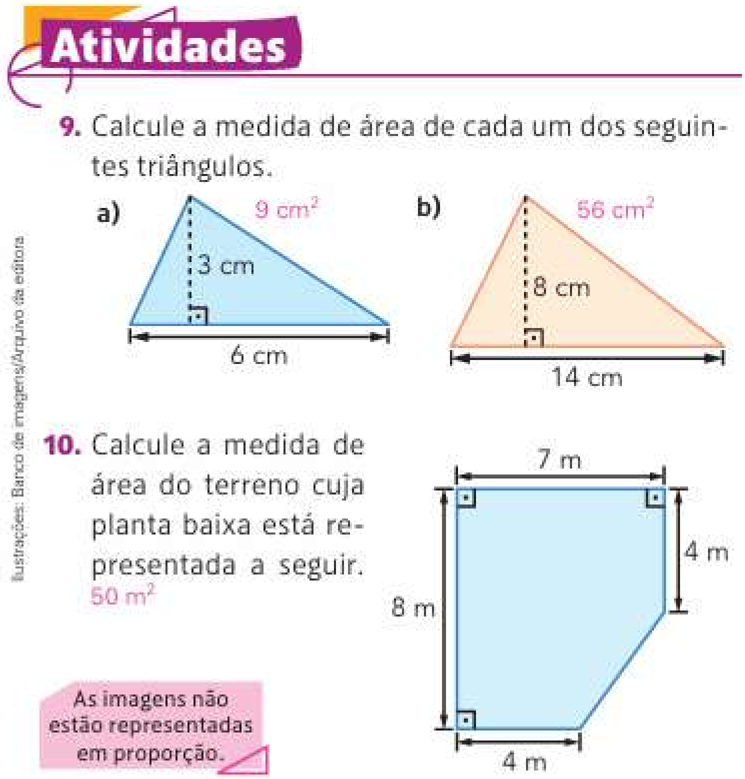
Na sequência, o autor define o que é área e, em seguida, começa a abordar a medida das áreas do retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, losango, trapézio, polígono regular e círculo.

A obra didática, citada acima, é dividida em 19 capítulos, sendo que o conteúdo de áreas é exposto no 15º capítulo. Nela, as áreas dos triângulos, quadriláteros e círculos são exibidos juntamente com suas respectivas demonstrações. Como abordamos no Capítulo 4 deste TCC, consideramos as demonstrações como fundamentais para os estudantes entenderem a lógica-dedutiva usada na obtenção das fórmulas e não aceitar como uma verdade absoluta sem entender de onde surgiram.

O livro apresenta 24 exercícios que trabalham o cálculo de áreas. Nas questões, são abordadas várias figuras planas. Em 10 dos exercícios sugeridos pelo livro, pode-se calcular as áreas das figuras somente aplicando as fórmulas, pois são formas geométricas planas conhecidas (triângulo, retângulo, paralelogramo qualquer, losango, trapézio, círculo) e que podem ser calculadas por meio de uma fórmula imediata. Dos 24 exercícios sobre áreas, 5 deles exploram a decomposição de figuras planas.

Na Figura 14, pode-se ver algumas das questões que envolvem a aplicação imediata das fórmulas para calcular as áreas das figuras.

Figura 14 – Exercícios extraídos do livro "Matemática e Realidade" que usam a aplicação imediata das fórmulas

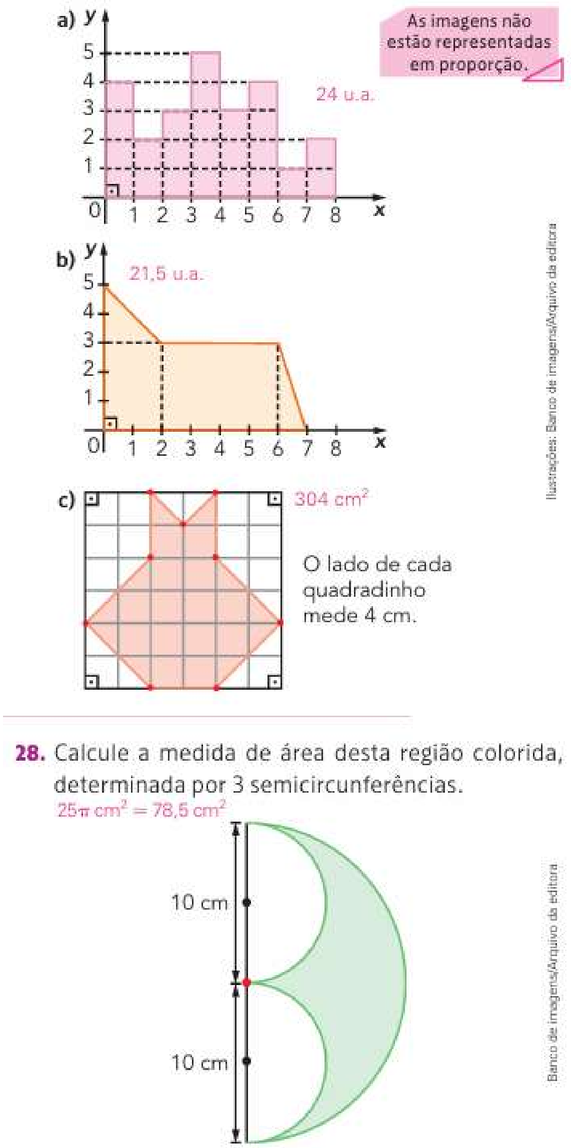


Fonte: IEZZI & DOLCE & MACHADO, 2022

No entanto, apesar de serem questões que não precisam de muito esforço para se calcular as áreas, são essenciais para os alunos praticarem o cálculo das áreas dessas figuras mais imediatas e poderem progredir para outras figuras que sejam menos imediatas.

A imagem a seguir, Figura 15, explora a decomposição de figuras para calcular as áreas. Como podemos ver na imagem, são decomposições que não exigem tanto esforço para fazê-las, mas, também, são fundamentais para os discentes treinarem a ideia inicial de decomposição.

Figura 15 – Exercícios extraídos do livro "'Matemática e Realidade" que usam decomposição de figuras para calcular as áreas



Fonte: IEZZI & DOLCE & MACHADO, 2022

Diante do que observamos, os exercícios sobre áreas apresentados pelo livro compõem um estilo mais introdutório. Os cálculos geralmente podem ser efetuados de forma mais imediatas. Nosso recurso educacional pode contribuir satisfatoriamente para complementar os exercícios do livro, já que usamos algumas figuras que não possuem o cálculo imediato e que os estudantes precisam forçar um pouco mais o raciocínio. Com isso, espera-se que os alunos se sintam desafiados e que possam despertar a curiosidade para efetuar os cálculos das áreas.

Além disso, a junção dos exercícios do livro analisado nesta subseção e nosso produto educacional pode vir a ser uma boa forma de trabalhar o cálculo de áreas de forma gradual e, ainda, lúdica.

5.1.2 Livro 2

A próxima obra didática que analisaremos é o livro **A Conquista da Matemática** (JÚNIOR, 2022), do autor José Ruy Giovanni Júnior, 1ª edição, lançado em São Paulo pela editora FTD em 2022.

O autor introduz o conteúdo de áreas através de um problema:

> "Para cobrir parte de um terreno, Marcos vai utilizar placas de grama com formato de quadrado cujos lados têm 1 m de comprimento. De quantas placas com formato de quadrado ele vai precisar para fazer um gramado retangular de 5 m por 3 m? Compartilhe com a turma o modo como você pensou para resolver esse problema e compare as resoluções." (JÚNIOR, 2022, p. 244).

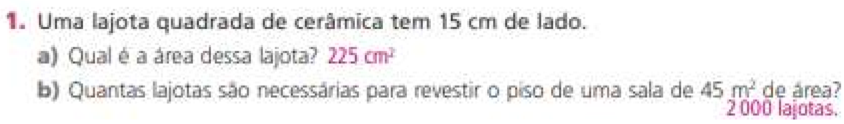
Como descrito no 3º parágrafo da subseção anterior, usar a situação problema pode ser interessante para despertar a curiosidade dos alunos e estimulá-los a resolver a questão.

Em seguida, o autor já apresenta as fórmulas de calcular as áreas do trapézio, triângulo e retângulo sem usar a demonstração de como obtê-las. Posteriormente, expõe a fórmula de calcular a área do círculo e dá uma breve demonstração.

O livro é dividido em 9 unidades e trata do cálculo de figuras geométricas planas na penúltima unidade. Nele, pode-se encontrar 13 exercícios sobre áreas de figuras planas. Algumas atividades se conectam com situações cotidianas. Nos problemas propostos, em 5 deles se pode usar a decomposição de uma figura em outras já conhecidas. Destes, 3 foram retirados da OBMEP.

A próxima imagem justifica a atividade que usa situação do cotidiano.

Figura 16 – Exercício sobre área com aplicação prática no dia a dia



1. Uma lajota quadrada de cerâmica tem 15 cm de lado.

a) Qual é a área dessa lajota? 225 cm²

b) Quantas lajotas são necessárias para revestir o piso de uma sala de 45 m² de área? 2 000 lajotas.

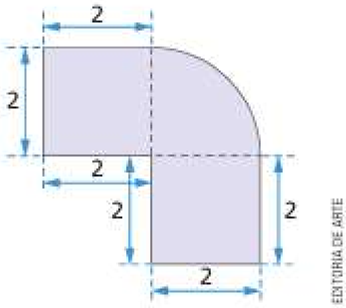
Fonte: JÚNIOR, 2022

Observe na Figura 16 que o item (a) do exercício pode ser resolvido com a aplicação imediata da fórmula da área do quadrado. Já no item (b) precisa usar a conversão de unidades e efetuar uma regra de três simples. É uma estratégia interessante para interligar conteúdos na matemática e ir aumentando o nível de dificuldade gradualmente.

A Figura 17 é para justificar os exercícios que exploram a decomposição de áreas de figuras planas, no qual um deles foi extraído da OBMEP.

Figura 17 – Questões que exploram a decomposição no cálculo das áreas

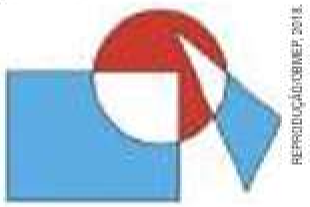
4. Considerando $\pi = 3{,}14$, calcule a área da figura a seguir, em centímetro quadrado. Alternativa c.



a) 11 **c)** 11,14 **e)** 12,14
b) 11,04 **d)** 11,24

5. (OBMEP) Na figura temos um retângulo com área igual a 120 cm², um círculo com área igual a 81 cm² e um triângulo com área igual a 29 cm². Qual é a diferença entre a soma das áreas das regiões azuis e a área da região vermelha?

a) 68 cm²
b) 55 cm²
c) 35 cm²
d) 29 cm²
e) 10 cm²



Fonte: JÚNIOR, 2022

O livro apresenta exercícios perpassando por diferentes níveis de dificuldade para resolvê-los. Alguns exigem um pouco mais de manipulações geométricas e algébricas, como é o caso do exercício 5, mostrado na Figura 17. Já o exercício 4 da referida figura, apresenta uma decomposição imediata, onde o cálculo da área da figura se torna mais simples. Estes problemas poderão fazer com que os alunos treinem seus argumentos e formulem hipóteses. Além de progredir o conhecimento de forma gradual.

Nosso TCC poderia ser usado como um material complementar deste livro, visto que no Capítulo 4 temos as demonstrações das fórmulas das áreas de algumas figuras geométricas planas, já que o livro não as expõe. Além do mais, o livro apresenta alguns exercícios com figuras interessantes que poderiam ser trabalhadas através de nosso recurso educacional e explorar mais o cálculo das áreas por meio da decomposição, complementando com as figuras que disponibilizaremos no produto educacional.

5.1.3 Livro 3

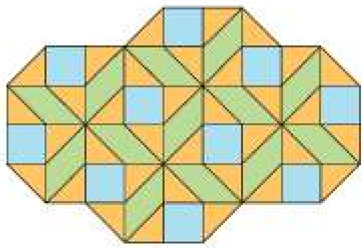
Agora, será analisado o livro **Araribá Conecta** (GAY, 2022) que é uma obra coletiva concebida da editora Moderna, editora responsável: Mara Regina Garcia Gay, 1ª edição, lançado em São Paulo, de 2022.

Os autores introduzem o capítulo, que aborda o conteúdo de áreas, com uma seção tratando sobre superfícies. De início, ele usa uma imagem de um mosaico (que são artes decorativas formadas por diversas cores e figuras geométricas) e explora as figuras que o compõem, estabelecendo comparações entre elas.

A Figura 18 expõe o que foi mencionado no parágrafo anterior.

Figura 18 – Mosaico formado por triângulos e quadriláteros

O mosaico a seguir está decorando a fachada do restaurante de Alberto.



Observe as figuras que compõem o mosaico.

Foram usadas: 10, 34 e 13.

Nesse mosaico, uma figura tem a mesma medida de área de uma figura e cada figura tem o dobro da medida de área de cada figura.

Fonte: GAY, 2022

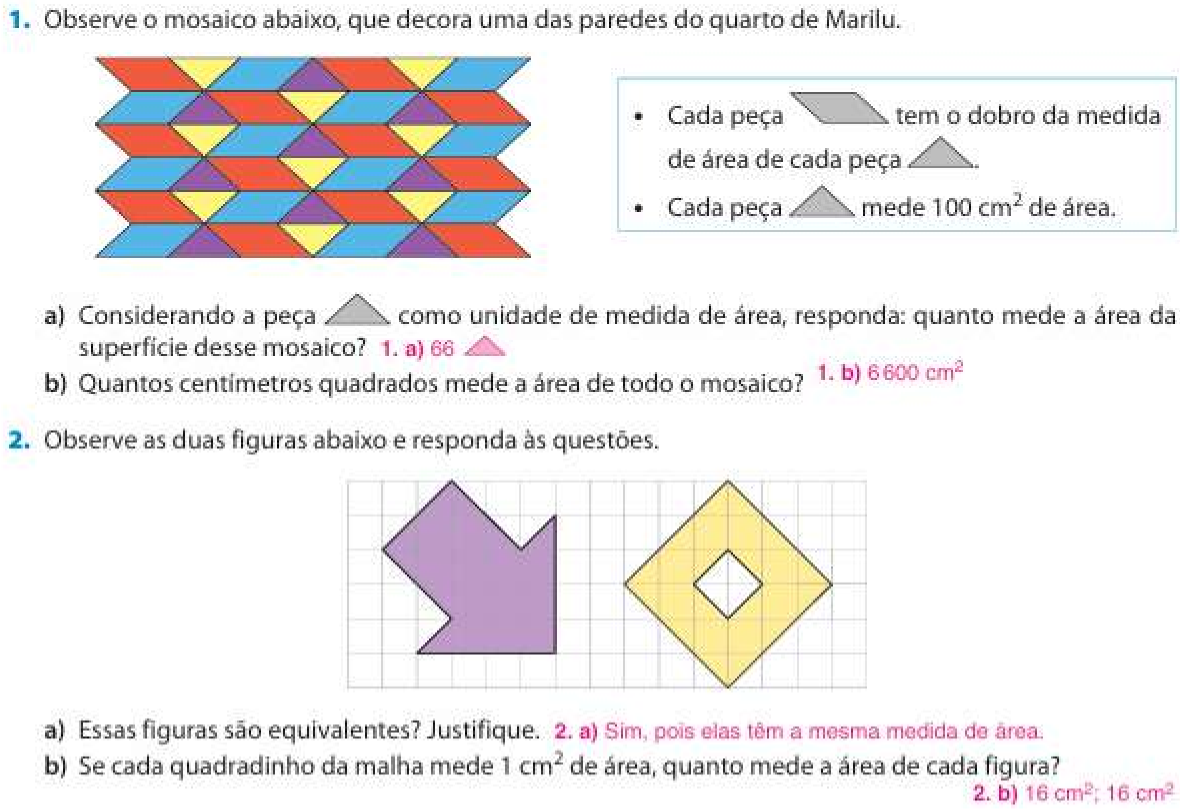
Composta por 11 capítulos, a obra didática aborda o cálculo de áreas de figuras planas no 6º capítulo. Nota-se que há uma certa preocupação em expor o conteúdo já nos bimestres iniciais do ano letivo, enquanto os estudantes ainda estão com a mente descansada.

O livro ainda revisa as fórmulas das áreas do triângulo, quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango, que foram vistas nos anos anteriores, sem demonstrá-las. E ainda, apresenta a fórmula de calcular a área do círculo (e sua demonstração), do setor circular, da coroa circular e medidas de áreas aproximadas.

Pode-se encontrar, no capítulo, um total de 36 exercícios que tratam do cálculo de áreas. São questões que possuem diferentes níveis, desde aplicações imediatas das fórmulas até questões com um certo grau de dificuldade de resolução. Um detalhe interessante dos exercícios é que há uma variedade de abordagem neles. Alguns, basta aplicar a fórmula para calcular a área, outros usam a malha quadriculada e mosaicos, para os estudantes terem a ideia de comparação. Num momento usam situações cotidianas e, em outros, utilizam-se da ideia de decomposição.

A imagem a seguir mostra as questões que abordam o mosaico e a malha quadriculada, como mencionamos no parágrafo anterior.

Figura 19 – Exercícios com uso do mosaico e malha quadriculada



1. Observe o mosaico abaixo, que decora uma das paredes do quarto de Marilu.

- Cada peça tem o dobro da medida de área de cada peça .
- Cada peça mede 100 cm^2 de área.

a) Considerando a peça como unidade de medida de área, responda: quanto mede a área da superfície desse mosaico? **1. a)** 66

b) Quantos centímetros quadrados mede a área de todo o mosaico? **1. b)** 6 600 cm^2

2. Observe as duas figuras abaixo e responda às questões.

a) Essas figuras são equivalentes? Justifique. **2. a)** Sim, pois elas têm a mesma medida de área.

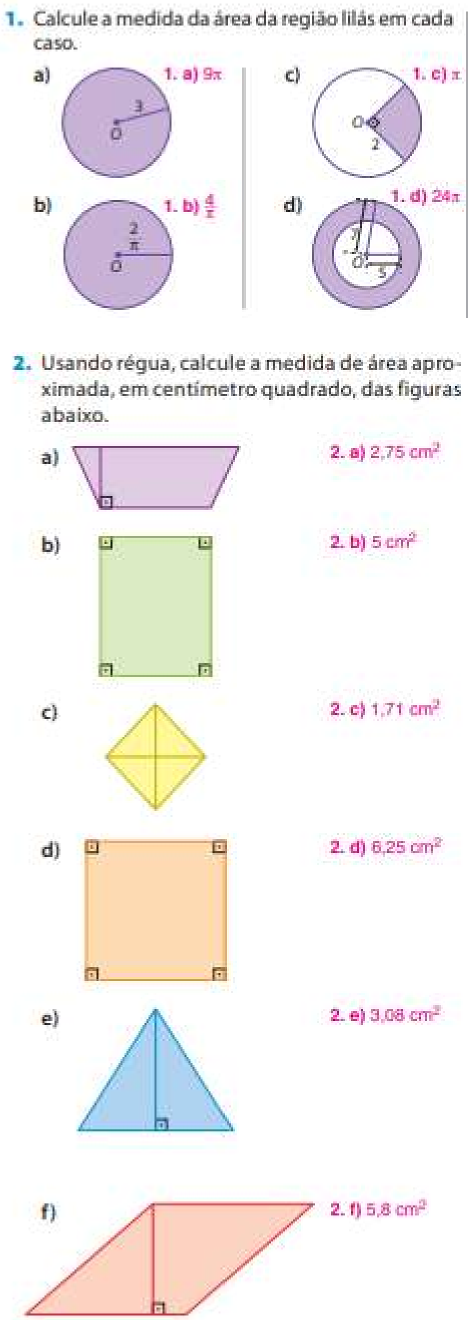
b) Se cada quadradinho da malha mede 1 cm^2 de área, quanto mede a área de cada figura? **2. b)** 16 cm^2; 16 cm^2

Fonte: GAY, 2022

As questões 1 e 2, mostradas na Figura 19, são visualmente chamativas, visto que a variação de cores e as formas geométricas presentes nas figuras podem fixar a atenção dos alunos. Ademais, tanto a atividade 1, quanto a 2 exploram o cálculo das áreas através da comparação de figuras. Nisto, o discente pratica a decomposição de figuras e pode também conjecturar fórmulas para resolver os problemas propostos, observando as formas geométricas equivalentes.

A Figura 20 expõe algumas atividades que exigem apenas a aplicação imediata da fórmula para o cálculo da área.

Figura 20 – Figuras com o cálculo da área imediato

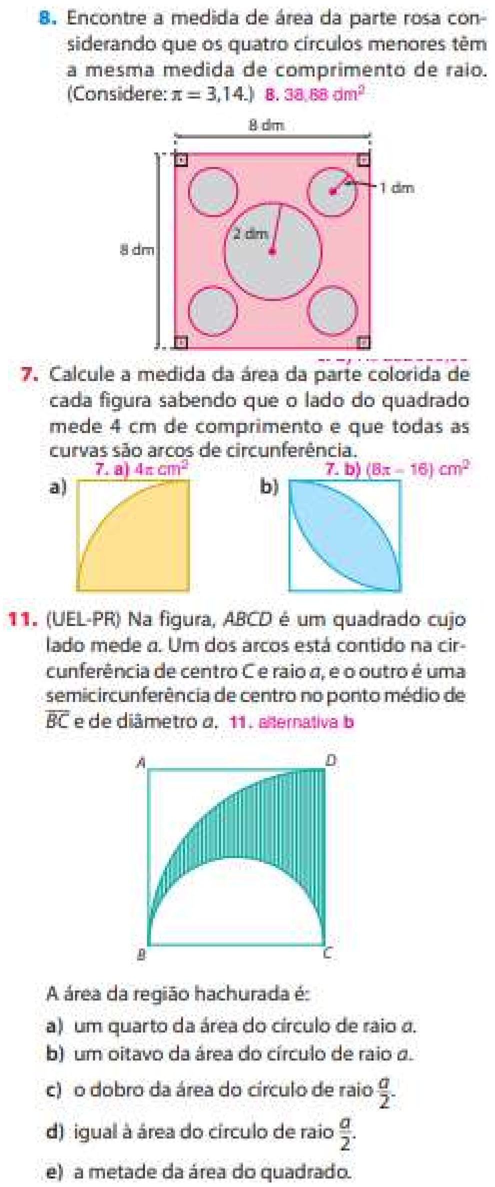


Fonte: GAY, 2022

Os exercícios da imagem anterior são fundamentais para os alunos treinarem a aplicação da fórmula, para usá-las posteriormente em outros exercícios que explorem a decomposição nessas figuras anteriormente vistas.

A próxima figura ilustra alguns exercícios que exploram a decomposição de figuras planas para calcular a área.

Figura 21 – Exercícios que utilizam a decomposição


8. Encontre a medida de área da parte rosa considerando que os quatro círculos menores têm a mesma medida de comprimento de raio. (Considere: $\pi = 3{,}14$.) **8.** 38,88 dm²

7. Calcule a medida da área da parte colorida de cada figura sabendo que o lado do quadrado mede 4 cm de comprimento e que todas as curvas são arcos de circunferência.

a) **7. a)** 4π cm²

b) **7. b)** $(8\pi - 16)$ cm²

11. (UEL-PR) Na figura, *ABCD* é um quadrado cujo lado mede *a*. Um dos arcos está contido na circunferência de centro C e raio *a*, e o outro é uma semicircunferência de centro no ponto médio de $\overline{BC}$ e de diâmetro *a*. **11.** alternativa **b**

A área da região hachurada é:

a) um quarto da área do círculo de raio *a*.
b) um oitavo da área do círculo de raio *a*.
c) o dobro da área do círculo de raio $\frac{a}{2}$.
d) igual à área do círculo de raio $\frac{a}{2}$.
e) a metade da área do quadrado.

Fonte: GAY, 2022

As questões sugeridas na Figura 21 possuem um nível de dificuldade maior em comparação com as vistas, anteriormente, no livro analisado nesta subseção. Estes tipos de questões podem trabalhar o raciocínio lógico, concentração, observação, formulação de hipóteses e a argumentação do estudante. Além disso, as questões 7 e 11, mostradas na imagem, possuem figuras parecidas com as que são usadas em nosso produto educacional.

Aos professores que trabalham com o livro analisado nesta subseção, deixamos aqui a sugestão de complementar o conteúdo com nossa dissertação para abordar as demonstrações. E, ainda, o uso do nosso produto educacional para calcular as áreas de alguns exercícios deste livro, poderá ser interessante até mesmo para suprir um pouco das aulas rotineiras e manusear um material concreto, podendo fazer várias suposições e procurando variadas formas de calcular as áreas das figuras apresentadas.

5.2 Análise de três sites de como trabalham o ensino de áreas

Nas últimas décadas, os recursos tecnológicos têm sido cada vez mais inseridos no dia a dia escolar. Com a disseminação da internet, os estudantes conseguem ter acesso a diversas informações em milésimos de segundos. Algumas ferramentas que auxiliam os alunos, seja como um complemento, seja como reforço ou até como a introdução do conteúdo antes mesmo de ser visto em sala de aula, são os sites e blogs que tratam de conteúdos educacionais.

Em busca de respostas rápidas para resolução de questões ou até mesmo para revisar os conteúdos, muitos discentes optam por pesquisar na internet. Porém, em algumas ocasiões os assuntos tratados podem estar expostos de maneira equivocada. Resta observar atentamente as fontes para concluir se são confiáveis, para não correr o risco de estudar de forma errada e acabar por “perder tempo”.

Diante desse cenário, iremos analisar 3 sites que abordam conteúdos de matemática e, em específico, sobre áreas de figuras planas.

Vale ressaltar que não é uma análise qualitativa. Observaremos se nosso produto educacional poderá (e de que forma poderá) complementar o conteúdo de áreas apresentado pelos sites a seguir.

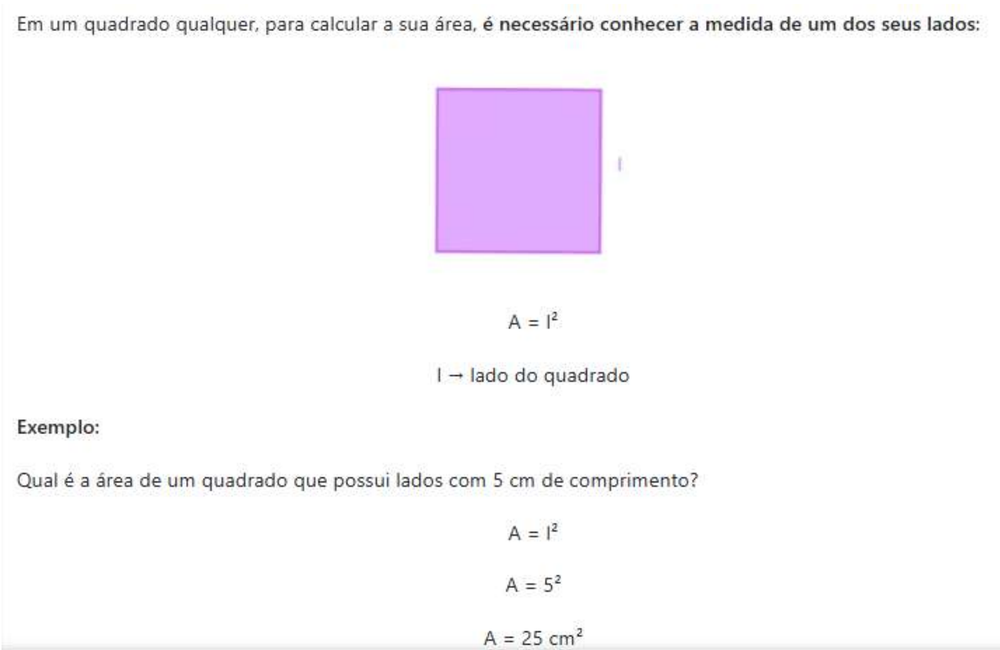
5.2.1 Site 1

Para iniciar a análise dos sites, observaremos o site **Brasil Escola** (DE OLIVEIRA, R. R., 1999). Esta página da internet faz uma pequena introdução sobre o que é área, destaca que as principais figuras planas são: triângulo, quadrado, retângulo, losango e trapézio. Posteriormente, dá a definição de cada polígono e expõe as fórmulas de como calcular a área dos polígonos citados neste parágrafo e a fórmula de calcular a área do círculo.

O website também usa exemplos práticos, em que basta aplicar as fórmulas para calcular as áreas das figuras mostradas no site. Os exemplos são resolvidos de uma forma bem didática, o que pode facilitar para que os alunos aprendam sem a intervenção qualificada.

A Figura 22 ilustra um exemplo que calcula a área do quadrado, justificando o que foi mencionado no parágrafo anterior.

Figura 22 – Exemplo prático de calcular a área do quadrado

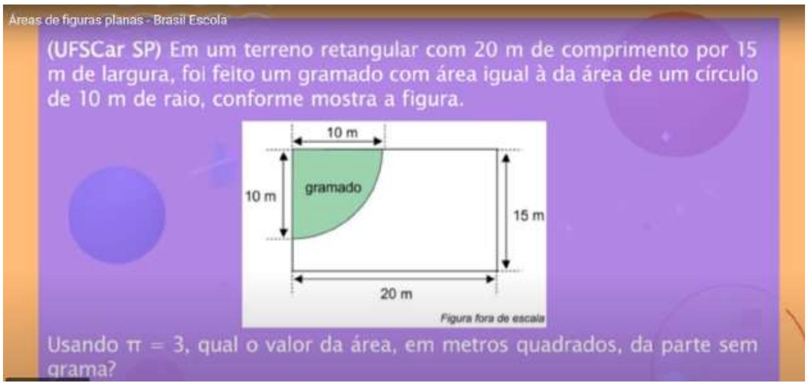


Fonte: Brasil Escola, 2024

Na mesma página do site que estamos analisando nesta subseção, tem o anexo de uma videoaula com o título "Quais são as principais figuras planas?". Nele, o professor tece alguns comentários sobre: triângulo, quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio, losango e círculo. Além do mais, resolve três questões em que se usam a decomposição das figuras mostradas nos exercícios.

Observe um dos exercícios abordados na videoaula, mostrada na imagem a seguir.

Figura 23 – Exercício abordado na videoaula



Fonte: Brasil Escola, 2024

Mais adiante, na mesma página do site, tem outras duas videoaulas em que o professor aborda as demonstrações do triângulo, dos paralelogramos e do trapézio.

Quanto aos exercícios abordados no Brasil Escola (2024), nota-se que se preza pelo uso de questões de vestibulares ou ENEM e não usam tantas imagens ilustrativas de figuras planas nas questões. Um dos exercícios sugeridos pelo site, pode ser vista na Figura 24.

Figura 24 – Relação entre área e perímetro do retângulo

Questão 2 - (IFG 2012) Em um retângulo, a razão entre a medida da altura e a medida da base é de 2/5, e o perímetro desse retângulo mede 42 cm. A área desse retângulo em cm^2 é igual a:

A) 88

B) 90

C) 91

D) 94

E) 96

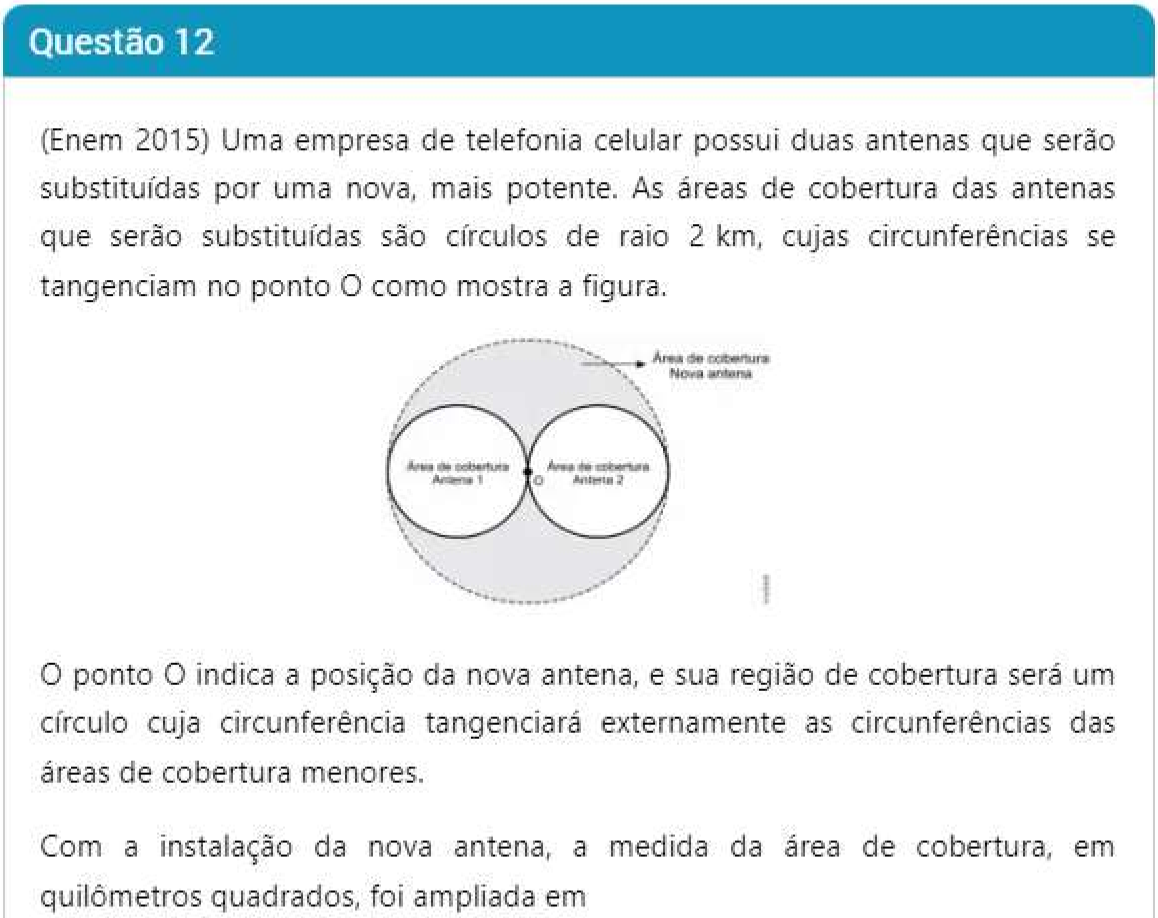
Fonte: Brasil Escola, 2024

Como pode ser observado na Figura 24, a questão não usa imagem ilustrativa das figuras geométricas mencionadas no enunciado. A atividade exige que os alunos já possuam um conhecimento prévio sobre o assunto e consigam relacionar perímetro e área, além de exercitar as manipulações algébricas e pensar nas figuras (que somente são citadas).

Em um *link* complementar, o site aborda 12 exercícios (dos quais em 2 deles mostram a imagem de figuras planas) sobre áreas de figuras planas e 3 deles foram retirados do ENEM.

A figura 25 ilustra um dos exercícios abordados no sítio eletrônico, e que foi extraído do ENEM, conforme nos referimos no parágrafo anterior.

Figura 25 – Questão abordada no ENEM 2015



Questão 12

(Enem 2015) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O como mostra a figura.

O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

Fonte: Brasil Escola, 2024

Nota-se que o site trata do conteúdo de áreas através de várias estratégias, com videoaulas, exemplos de aplicação imediata das fórmulas de áreas, e alguns exercícios de vestibulares e afins.

Nosso recurso educacional surge como um material de apoio complementar para o conteúdo visto neste site. Pois, nele usamos figuras que podem ser decompostas nas formas geométricas expostas na referida página eletrônica e com exercícios que vão aumentando gradualmente o estudo de áreas.

5.2.2 Site 2

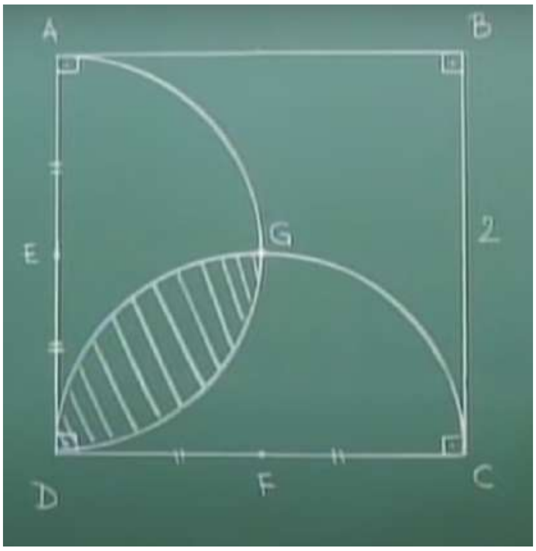
O segundo site que analisamos foi o **Portal da OBMEP** (PORTALDAOBMEP, 2005). É uma plataforma interessante para alunos que busquem aprofundar os estudos no conteúdo de áreas. Nele, há uma variedade de materiais disponibilizados. No lado esquerdo da página, existe uma guia que direciona para o tipo de exposição dos conteúdos que o aluno pretenda estudar, como podemos ver na Figura 26.

Figura 26 – Guia de trabalhos

Fonte: Portal da OBMEP, 2025

Na guia, mostrada na figura anterior, ao clicar no item “Videoaula” o estudante será direcionado para videoaulas que demonstram as áreas do quadrado, retângulo, triângulo, paralelogramos, polígonos regulares de n lados e círculos. Ainda na mesma página, tem seis videoaulas de resolução de exercícios, sendo quatro delas com questões da OBMEP. A imagem a seguir, mostra um exercício abordado na videoaula 5.

Figura 27 – Questão da vídeo aula 5



Fonte: Portal da OBMEP, 2025

A questão presente na Figura 27 é um exercício que aparece interligado com nossa proposta de TCC e que pode ser resolvido com o uso do nosso recurso educacional.

Consideramos uma questão com um nível de dificuldade interessante para os estudantes despertarem a visão geométrica e conseguir explorar as propriedades geométricas presentes na figura, inclusive, praticar as decomposições para o cálculo da área desejada.

No item "Exercícios Resolvidos", vide Figura 26, contém 12 videoaulas de resolução de exercícios, em que 11 são classificados pelo site como "fáceis" e 1 deles é classificado como "difícil".

As Figuras 28 e 29, ilustram duas questões classificadas, pelo website, como nível fácil.

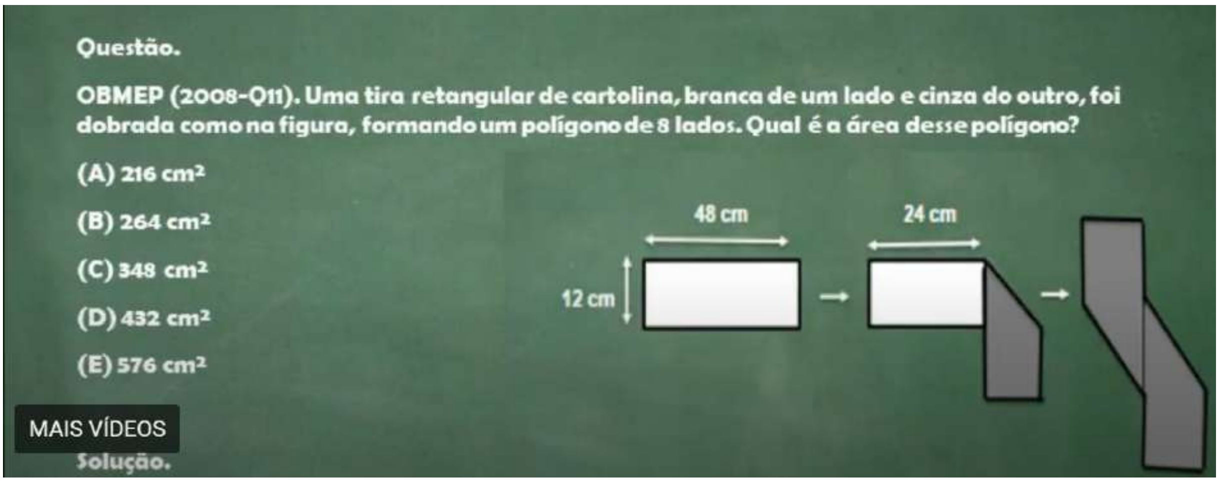
Figura 28 – Atividade da videoaula: Resultados Básicos I - 03

Fonte: Portal da OBMEP, 2025

Na última imagem, observamos um exercício que explora a aplicação imediata da fórmula da área do trapézio. É uma boa atividade para relembrar o cálculo da referida figura e, assim, prosseguir para as demais.

A próxima imagem ilustra uma questão que foi abordada na OBMEP 2008.

Figura 29 – Atividade da videoaula: Exercícios da OBMEP I - 02



Fonte: Portal da OBMEP, 2025

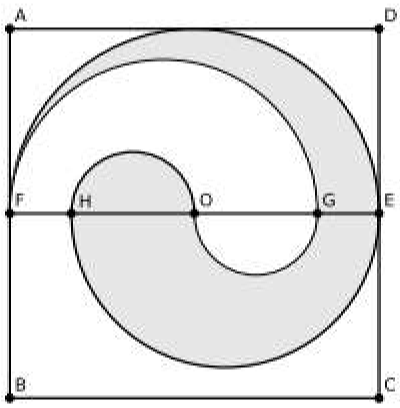
O exercício da Figura 29 já explora a interpretação e a visualização das imagens, com relação ao exercício anterior. Além disso, ao calcular a área desejada, nota-se que a figura (colorida de cinza) é composta por dois trapézios. Dessa forma, o aluno terá que calcular usando a ideia de decomposição. Também é um exercício que pode ser calculado através do nosso recurso educacional.

O site analisado nesta subseção também dispõe de um material teórico, que apresenta, de forma detalhada, as demonstrações das fórmulas que expressam o cálculo das áreas do quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, losango, polígonos regulares e círculos.

Além disso, o site possui listas de exercícios com variadas questões, desde atividades mais simples como calcular a área de um retângulo apenas usando a aplicação imediata da fórmula, a exercícios que precisam da decomposição de figuras para calcular. A Figura 30 ilustra um dos exercícios que aborda a ideia de decomposição.

Figura 30 – Questão 27 da lista de exercícios sobre áreas - Portal da OBMEP

Exercício 27. Dado o quadrado $ABCD$ de lado 2. Sejam O o centro do quadrado e E e F os pontos médios dos lados AB e CD. Se os segmentos FH e GE são iguais e os arcos FE, EH, GO, OG, FG são semicircunferências, encontre a área sombreada.



Fonte: Portal da OBMEP

Inclusive, em boa parte dos problemas sugeridos pelo site, o professor pode adotar o método de Pólya (1995), conforme vimos no Capítulo 3, para guiar os alunos a resolvê-los.

Para complementar o conteúdo do site com o método de Pólya (1995) e com uma abordagem mais lúdica, deixamos como sugestão o uso do jogo das decomposições, que é o nosso produto educacional. Seria uma combinação de metodologias perpassando por resolução de problemas e com uma forma mais divertida, estimulando a competição saudável entre os discentes.

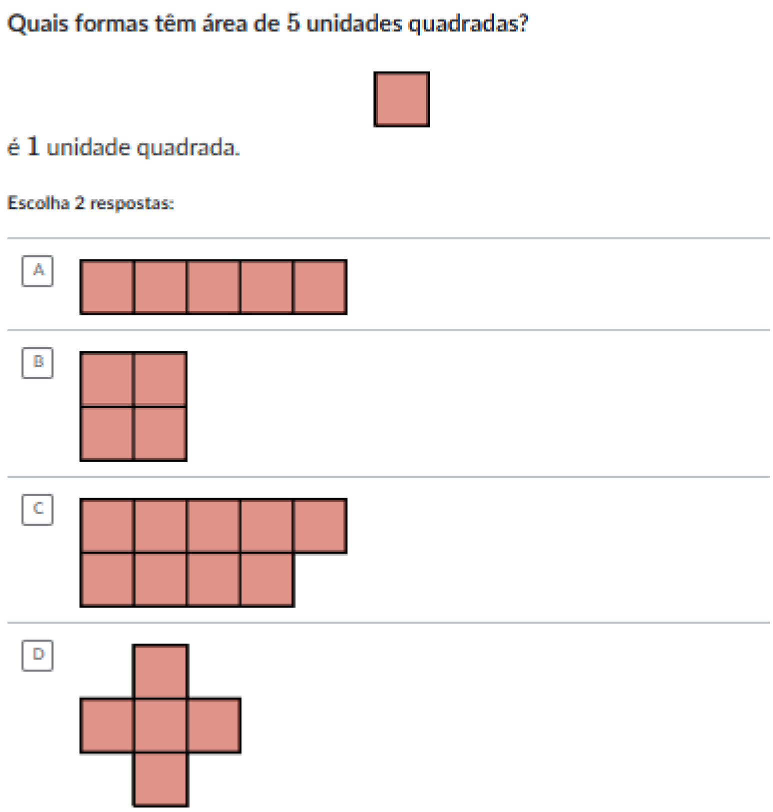
5.2.3 Site 3

Por fim, observaremos o site **Khan Academy** (KHANACADEMY, 2014). Ele oferece diversos vídeos e problemas interativos que podem auxiliar no aprendizado dos estudantes.

Com uma interface dinâmica, a página da internet, citada acima, contempla o assunto de áreas de figuras planas através de vídeos, em que as áreas são explicadas, inicialmente, a partir da definição do quadrado unitário e segue deduzindo as áreas de outras figuras planas.

Os exercícios são em forma de quizzes para serem respondidos na própria plataforma. Além disso, ao resolver uma questão, o estudante avança para outro nível. Isso pode tornar atrativo para o estudante do ensino básico por ser algo desafiador, o que pode causar uma competição saudável entre os alunos para verificar quem consegue atingir o maior nível. Na unidade 1: "Compreenda área", a primeira questão, vide Figura 31, explora o cálculo da área por comparação com o quadrado unitário.

Figura 31 – Comparação com o quadrado unitário



Fonte: Khan Academy, 2024

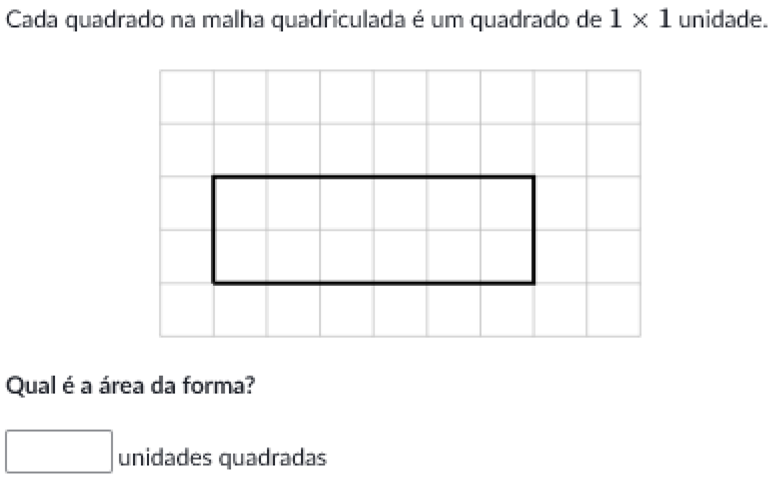
Conforme respondida a questão, o site passa para outro exercício com o nível de dificuldade maior com relação ao problema anterior. Consideramos essa estratégia interessante, pois o estudante pode ser estimulado a seguir aprofundando os conhecimentos nos conteúdos de forma gradual.

Abaixo das alternativas da questão ilustrada na figura 31, tem a sugestão de um vídeo que direciona para o site <https://www.youtube.com/watch?v=7owYJZJaoqA&t=76s>, em que o professor explica o conceito inicial de área e calcula a área de duas figuras planas, decompondo-as em quadrados unitários.

O website dispõe de alguns exercícios para calcular a área de retângulos através da malha quadriculada. Também consideramos interessante essa abordagem, pois a partir de algumas questões, os estudantes podem deduzir que para calcular a área do retângulo basta multiplicar a medida do comprimento (ou base) pela altura.

A imagem a seguir justifica o que foi escrito no parágrafo anterior.

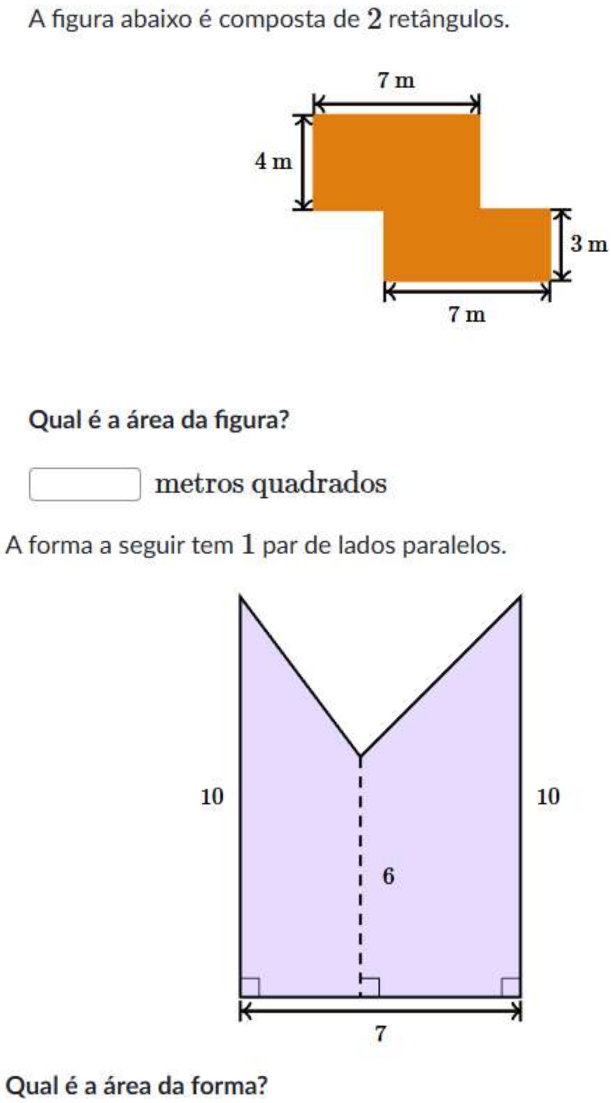
Figura 32 – Cálculo de área por meio da malha quadriculada



Fonte: Khan Academy, 2024

Na plataforma, encontram-se alguns exercícios que devem ser resolvidos por meio de decomposição, que é o nosso tema principal do TCC. Separamos dois deles, conforme podemos vê-los na Figura 33.

Figura 33 – Cálculo de áreas por meio de decomposição



Fonte: Khan Academy, 2024

As demais figuras que encontramos na plataforma, cujas áreas devem ser calculadas através da decomposição, possuem o nível de dificuldade parecido com as questões presentes na Figura 33.

Como nossa proposta é estimular o cálculo de áreas de figuras planas não comuns, ou seja, em que as áreas não terão um cálculo imediato, pode ser uma boa aliada a este site. Pois, os alunos podem praticar os exercícios iniciais na plataforma, vista nesta subseção, e aprofundar o cálculo de áreas com o uso do nosso recurso educacional.

6 Confecção de um material didático concreto para o ensino de cálculo de áreas de figuras pouco conhecidas

A matemática por vezes é tida como uma disciplina abstrata e de difícil compreensão por boa parte dos estudantes. Torná-la mais significativa e próxima à realidade do aluno não é uma missão fácil, porém, existem alguns métodos que podem auxiliar tal aproximação. A proposta de usar um material didático concreto pode ser uma ferramenta pedagógica eficiente na construção do conhecimento do aluno, pois ele poderá aprender de forma ativa desenvolvendo a percepção e o raciocínio lógico por meio tátil e experimental.

Alguns teóricos educadores defendem o uso de materiais manipuláveis em sala de aula. Comenius afirma que o ensino deve-se ocorrer do concreto ao abstrato, isto é, o conhecimento acontece de forma ativa, aprende-se fazendo. Por volta do século XVIII, Froebel e Pestalozzi também defendiam que o ensino deveria iniciar pela experimentação concreta.

Segundo LORENZATO (2021), o material didático não passa de um instrumento auxiliar de ensino e não pode substituir o professor. Por outro lado, ele afirma que:

> Os MD podem desempenhar várias funções, conforme o objetivo a que se prestam, e, por isso, o professor deve perguntar-se para que ele deseja utilizar o MD: para apresentar um assunto, para motivar os alunos, para auxiliar a memorização de resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos? São as respostas a essas perguntas que facilitarão a escolha do MD mais conveniente à aula. (LORENZATO, 2021).

Diante dessa linha de raciocínio, pode-se inferir que se deve ter um bom planejamento com objetivos claros para o uso do material didático em sala. Caso seja uma aplicação sem um fim planejado há uma boa chance de não haver sucesso na aprendizagem dos alunos.

Justificando o último parágrafo (anterior a este), "O planejamento é importante e não deve ser descuidado pelo professor. As atividades precisam constituir-se de desafios para os alunos, despertando seu interesse e promovendo um desenvolvimento efetivo." (RÊGO; RÊGO, 2022). Dessa forma, é importante o docente buscar sempre se atualizar para acompanhar as novas formas de ensino e estar preparado para conseguir desenvolver uma aula de forma mais dinâmica e com uma aprendizagem significativa de forma prática e ativa.

O uso do material didático possibilita ao aluno fazer observações, descobertas, traçar estratégias, levantar hipóteses e testar soluções, quando bem planejado, visando atingir um objetivo.

A seguir, neste capítulo, iremos fazer um relato da aplicação do nosso material didático "Jogo das decomposições" que foi aplicado em sala de aula em duas turmas de 9º ano. E ainda, ilustraremos os gráficos do formulário preenchido pelos estudantes após a aplicação do jogo.

6.1 Jogo das decomposições

Nesta seção, iremos apresentar o jogo que aplicamos em sala de aula, assim como suas regras e procedimentos metodológicos para o(a) professor(a) utilizar em sala de aula.

O jogo que intitulamos "Jogo das decomposições" é um material concreto usado para calcular áreas de figuras planas através da decomposição.

O kit que contém o jogo, dispõe de 37 peças geométricas e 1 base para encaixar as peças e efetuar as decomposições das figuras. A base será denominada "**Caixinha**", as figuras planas não comuns que são sugeridas pelo(a) professor(a) para os alunos calcularem as áreas durante o jogo são chamadas "**Figuras-mãe**" e as peças com o formato de triângulo, quadrado e setor circular são denotadas por "**Figuras auxiliares**".

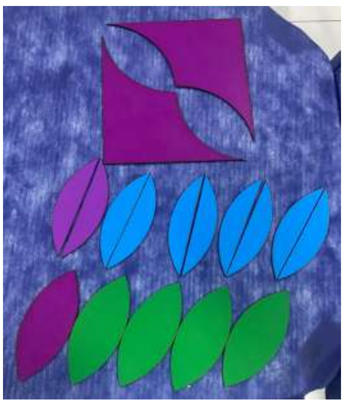
Salientamos que as figuras auxiliares são aquelas que possuem o cálculo da área de forma imediata, tais figuras representam 20 das peças do jogo. As demais 17 peças do kit podem ter as áreas calculadas usando decomposição por meio das figuras auxiliares e da caixinha.

As Figuras 34a, 34b e 34c ilustram o kit mencionado nos parágrafos anteriores.

(a) Figuras auxiliares

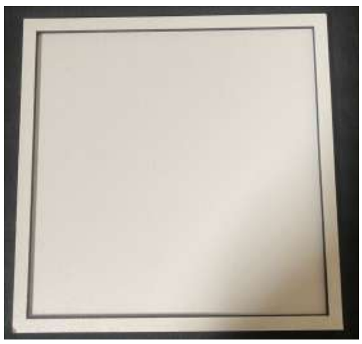
Fonte: Autor

(b) Demais peças do kit



Fonte: Autor

(c) Caixinha



Fonte: Autor

As peças e a caixinha, mostradas na figura anterior, foram confeccionadas em MDF.

No produto educacional que disponibilizaremos na plataforma eduCAPES, sugerimos alguns materiais alternativos para confecção do jogo.

Observação 6.1. *As figuras auxiliares são aquelas cujas áreas podem ser calculadas de forma imediata.*

Procedimentos Metodológicos

Para efetuar os cálculos, considerem a medida do lado da caixinha como sendo 2 u. Onde, u é uma unidade de comprimento qualquer.

Nas aulas que antecederão a aplicação do jogo, aplique atividades contendo as figuras auxiliares do jogo, pois, dessa forma os estudantes poderão usar os resultados delas nas decomposições das figuras mães que serão sugeridas durante o jogo. No Apêndice C, anexamos uma lista de exercícios como sugestão.

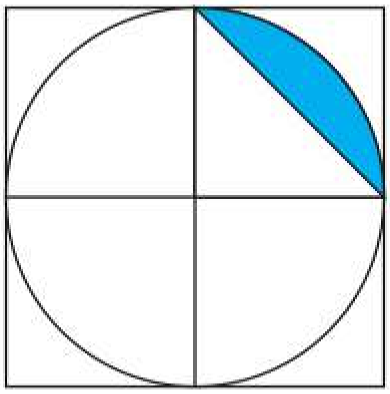
O(a) docente deverá deixar claro para os alunos que para calcular as áreas das figuras-mãe, eles deverão, obrigatoriamente, usar a decomposição da figura-mãe em figuras auxiliares ou em outras a qual eles já tenham calculado a área anteriormente.

No dia da aplicação do jogo, siga as seguintes instruções:

- **Divida a turma em duas ou mais equipes;**
- **Distribua um kit para cada equipe;**
- **Entregue (de forma impressa), em cada rodada, uma figura-mãe para os alunos fazerem traçados auxiliares na tentativa de conseguir visualizar melhor as decomposições. Estipule um tempo para que os estudantes possam calcular as áreas e apresentar os cálculos para a turma;**
- **Peça para cada equipe eleger um líder, que será o responsável pela apresentação do cálculo da área da figura-mãe para a turma.**

Para fazer as subtrações das áreas das figuras no material concreto, os estudantes deverão fazer a sobreposição das peças. Por exemplo, para calcular a área da Figura 35, deve-se calcular a área do setor e subtrair a área do triângulo retângulo.

Figura 35 – Área a ser calculada usando a subtração das áreas das figuras



Fonte: Elaborada pelo autor

Para efetuar a subtração da área do setor pela área do triângulo e obter a área colorida da Figura 35, usando as peças do nosso jogo, deve-se fazer a sobreposição das peças como indicado na Figura 36.

Figura 36 – Sobreposição das peças indicando a subtração das áreas das respectivas figuras

Fonte: Autor

Pontuações e Premiações

As equipes irão pontuar, em cada rodada, da seguinte maneira:

- **10 pontos para a equipe que primeiro apresentar o cálculo da área;**
- **5 pontos para a(s) equipe(es) que apresentar(em) um cálculo diferente do que foi apresentado pela primeira equipe;**

- **As pontuações serão cumulativas e ganhará o jogo a equipe que obtiver o maior somatório de pontos.**

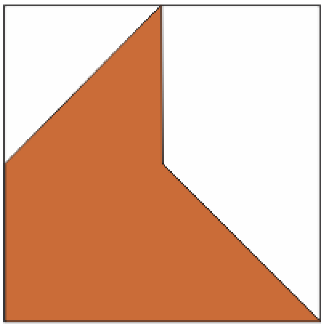
Com o intuito de motivar ainda mais a participação dos alunos no jogo, sugere-se, para premiação, algum reforço positivo para cada estudante da equipe vencedora, seja um doce ou até mesmo ponto(s) na disciplina. Porém, a premiação ficará a critério do(a) professor(a) de fazê-la ou não.

Sequência de figuras-mãe para serem apresentadas aos alunos

A sequência de figuras que serão usadas em cada rodada, que iremos sugerir, foram classificadas de acordo com o que consideramos ser um aumento gradual nos níveis dos cálculos das áreas. Porém, fica a critério do(a) docente em montar sua própria sequência e até mesmo escolher outras figuras-mãe que também achar interessantes.

Para a rodada 1, sugere-se o uso da Figura 37:

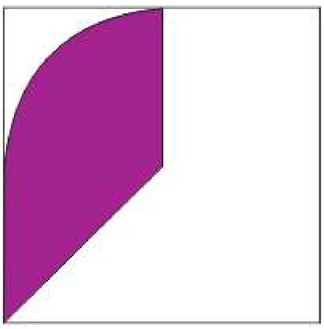
Figura 37 – Figura-mãe 1



Fonte: Elaborada pelo Autor

Para a rodada 2, sugere-se a Figura 38:

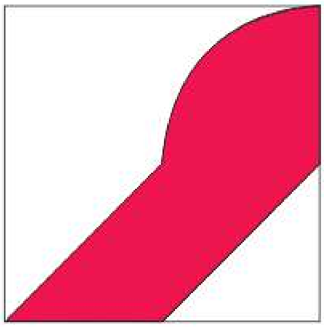
Figura 38 – Figura-mãe 2



Fonte: Elaborada pelo Autor

Para a rodada 3, pode-se usar a Figura 39:

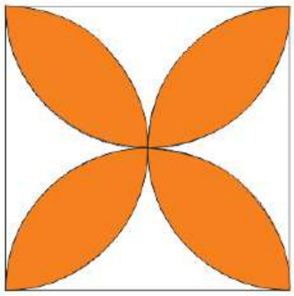
Figura 39 – Figura-mãe 3



Fonte: Elaborada pelo Autor

Para a rodada 4, use a Figura 40:

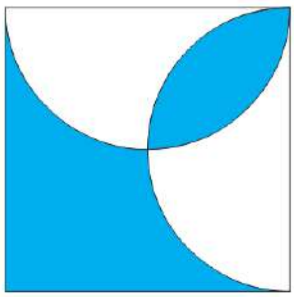
Figura 40 – Figura-mãe 4



Fonte: Elaborada pelo Autor

Para a rodada 5, aconselha-se o uso da Figura 41:

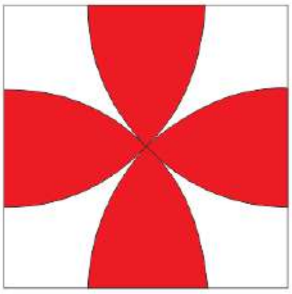
Figura 41 – Figura-mãe 5



Fonte: Autor, adaptada de Portal da OBMEP

Para a rodada Extra, use a Figura 42:

Figura 42 – Figura-mãe Extra



Fonte: Autor, adaptada de OBMEP

6.2 Relato de aplicação do jogo

O jogo foi aplicado em duas turmas de 9º ano em escolas distintas. A escola 1 faz parte da zona urbana do município de Carnaúba dos Dantas-RN. Já a escola 2 está localizada na zona rural do município de Picuí-PB.

6.2.1 Aplicação na escola 1

Antes da aplicação do jogo, usamos duas aulas de 50 minutos, cada, para fazer os exercícios da lista disponibilizada no Apêndice C deste TCC e fazer as correções no quadro. Observe que os exercícios sugeridos se tratam da caixinha, das figuras auxiliares e outras formas geométricas que usam a decomposição no cálculo da área.

O intuito do exercício era que os estudantes já pudessem usar os valores das áreas das figuras auxiliares no cálculo das figuras-mãe do jogo. Para facilitar os cálculos, sugerimos que os estudantes deixassem as respostas em função de π, quando necessário.

O jogo foi desenvolvido em duas aulas de 50 minutos, cada, também. Na primeira aula, fizemos o sorteio dos grupos (foram formados 3 grupos). Para isso, foram colocados em um envelope 10 papéis enumerados com o número 1, 9 papéis enumerados com o número 2 e 9 papéis enumerados com o número 3. As equipes foram divididas de acordo com a quantidade de alunos que compareceram no dia da aplicação, sendo um total de 28 discentes.

Em seguida, cada aluno puxou um papel do envelope e os que retiraram o papel com o número 1 formaram a equipe 1, os que pegaram o papel com número 2 compuseram a equipe 2 e os demais integraram a equipe 3.

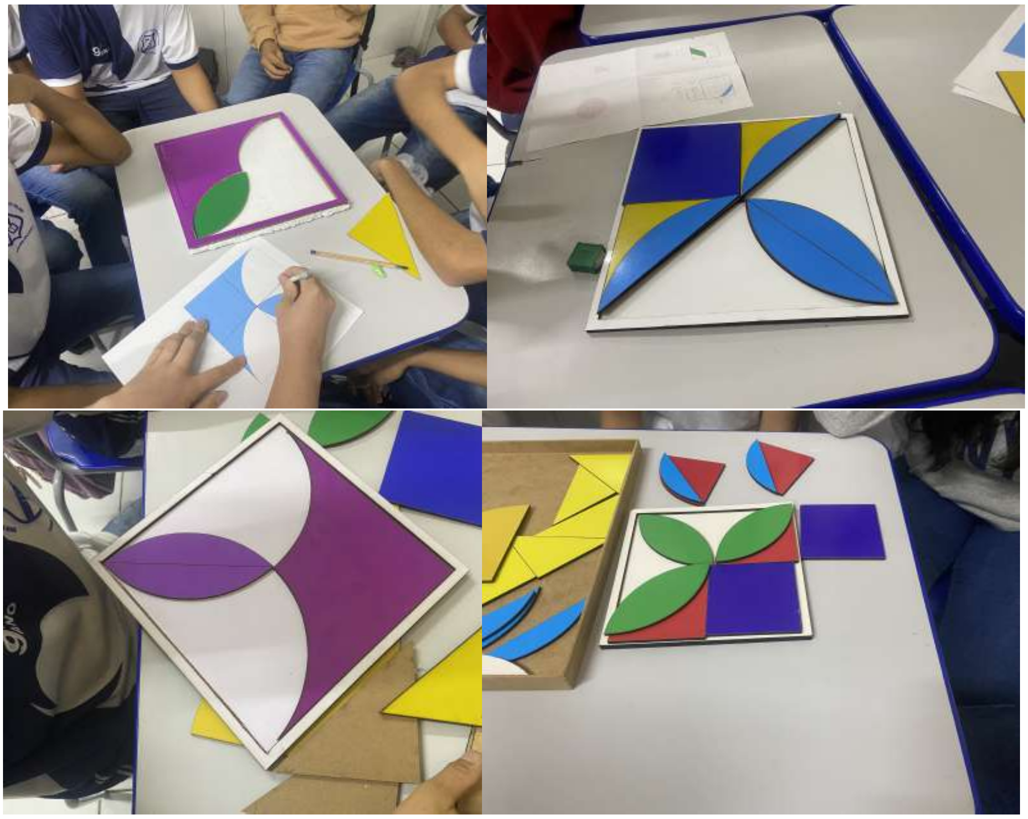
Após o sorteio e divisão das equipes, expusemos as regras do jogo, entregamos um kit contendo a caixinha e as peças do jogo para cada equipe, e ainda, mostramos as instruções para manuseio do material concreto.

Durante os exercícios, nas aulas anteriores, percebemos que os discentes já possuíam uma certa habilidade em usar as decomposições no cálculo das áreas de figuras planas. Assim, para estimular a curiosidade, começamos a rodada 1 com a Figura 41.

Foram entregues as figuras-mãe de forma impressa para as equipes. Além disso, seguindo as etapas para resolução de problemas baseado em Pólya (1995), conforme descrito no Capítulo 3 deste TCC, fomos fazendo questionamentos para os alunos raciocinarem como teriam que calcular a área da figura-mãe sugerida na rodada. De início, perguntamos quais propriedades eles conheciam da figura. Sugerimos que fizessem traçados para visualizar melhor o problema.

A Figura 43 expõe as equipes fazendo os testes com o material concreto em busca do cálculo da área da figura-mãe apresentada na rodada 1.

Figura 43 – As equipes elaborando estratégias, em grupo, e testando as hipóteses planejadas a fim de efetuar as decomposições na figura-mãe 5, apresentada na rodada 1 do jogo.



Fonte: Autor

Por volta de 10 minutos tentando obter o cálculo da área da figura sugerida pelo professor, a equipe 3 apresentou o cálculo esperado. Os estudantes observaram que dividindo uma parte da figura e fazendo os devidos encaixes, formariam um triângulo que representa a metade da caixinha, isto é, a área da figura-mãe seria igual a $2u^2$. Conforme Figura 44.

Figura 44 – Equipe 3 apresentando a resposta esperada, na 1ª rodada, e os demais colegas atentos à explicação

Fonte: Autor

Com isso, a equipe obteve 10 pontos na 1ª rodada do jogo. E ainda, a equipe 2 conseguiu apresentar uma solução alternativa e garantir 5 pontos na rodada. Os alunos notaram que fazendo alguns “recortes” na figura, formariam uma nova composição que se tratava de dois quadrados unitários, o que também seria a metade da área da caixinha. Vejamos na Figura 45.

Figura 45 – Equipe 2 apresentando uma solução alternativa, na rodada 1, explorando o material concreto para visualizar melhor a decomposição da figura-mãe e percebendo que é equivalente a um retângulo

Fonte: Autor

Particularmente, achei a solução bem criativa e interessante. Visto que, foi uma decomposição que não tinha sido prevista por mim, nem pelo orientador. Os integrantes da equipe, de início, manuseando o material concreto, perceberam que ao sobrepor o quadrado (azul) na peça geométrica de cor roxa (ilustrada na Figura 45), as partes roxas que sobravam, poderiam compor outro quadrado, juntamente com a peça geométrica de cor azul claro. Para confirmar ainda mais isso, eles fizeram os traçados auxiliares na figura mãe que foi entregue de forma impressa para eles rabiscarem.

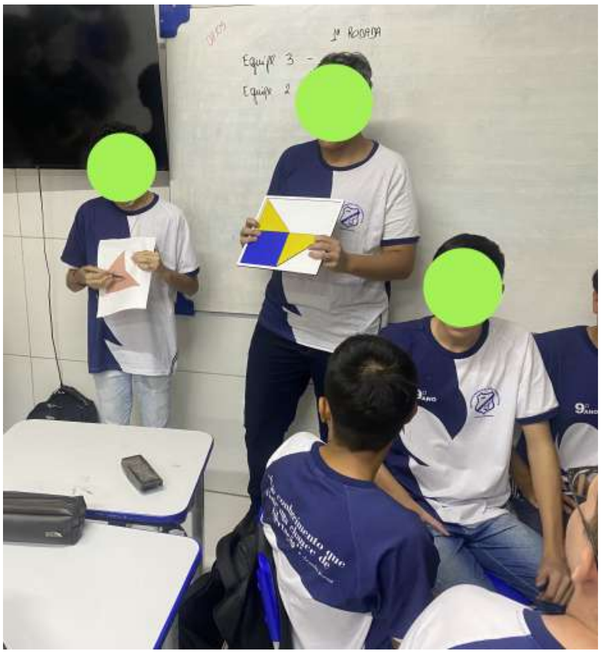
Na rodada 2, sugerimos a figura mãe 37.

As equipes 1 e 2 conseguiram calcular ao mesmo tempo a área da figura-mãe apresentada na rodada. Assim, para ser justo, as equipes obtiveram 10 pontos cada. Os discentes perceberam que a figura poderia ser decomposta em dois triângulos congruentes e um quadrado unitário. E ainda, poderiam fazer uma composição com as referidas figuras, formando um retângulo que representava a metade da área da caixinha, isto é, $2u^2$.

Detalhe que nesta rodada as equipes conseguiram fazer a decomposição da figura em apenas 2 minutos.

Confira, na imagem seguinte, a decomposição da figura-mãe sugerida na rodada 2, observada pelos estudantes da equipe 1.

Figura 46 – Equipe 1 apresentando a resposta, prevista no nosso recurso educacional, na 2ª rodada. Com o auxílio dos traçados auxiliares na figura-mãe, eles conseguiram decompor a figura mãe em dois triângulos e um quadrado.



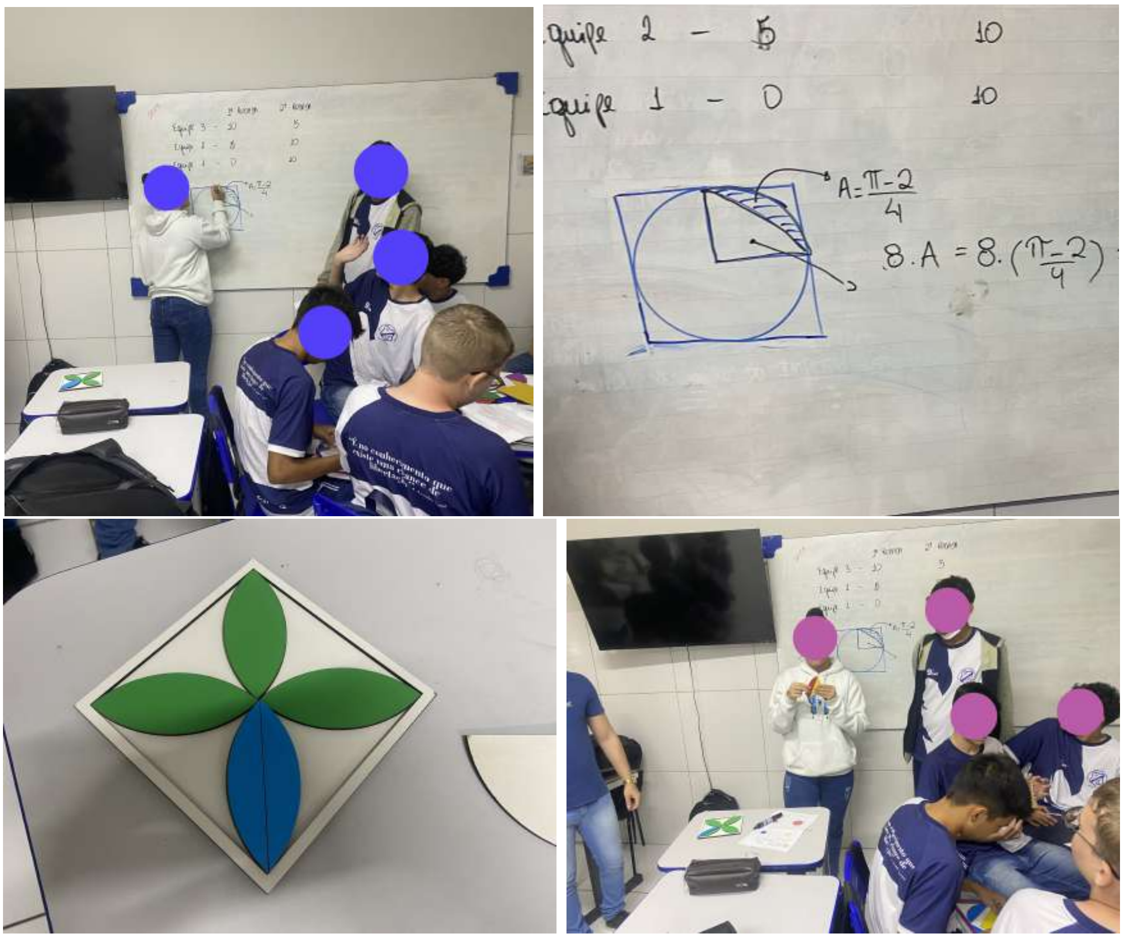
Fonte: Autor

Ainda na rodada 2, a equipe 3 conseguiu somar 5 pontos, pois apresentaram um cálculo diferente das demais equipes. A equipe notou que a figura-mãe podia ser decomposta em 4 triângulos retângulos congruentes de área igual a $\frac{1}{2}u^2$ cada. Logo, a área da figura-mãe seria igual a $4 \cdot \frac{1}{2} = 2u^2$.

Já na rodada 3, apresentamos a figura-mãe 39. Os estudantes manusearam o material concreto em busca da solução, após alguns minutos, questionamos se eles haviam calculado alguma área de figura parecida com a sugerida na rodada. A equipe 2 rapidamente notou que a área era igual a 8 vezes a área da figura presente na letra f, da lista de exercícios disponibilizada no Apêndice C. A equipe conseguiu calcular a área da figura-mãe em 8 minutos e foi a única a pontuar na 3ª rodada, acumulando mais 10 pontos.

A próxima imagem ilustra a apresentação do cálculo da área feito pela equipe 2.

Figura 47 – Equipe 2 apresentando com argumentos sólidos a resposta, na 3ª rodada, e explicando o passo a passo de como calcular a área da figura-mãe sugerida na rodada.



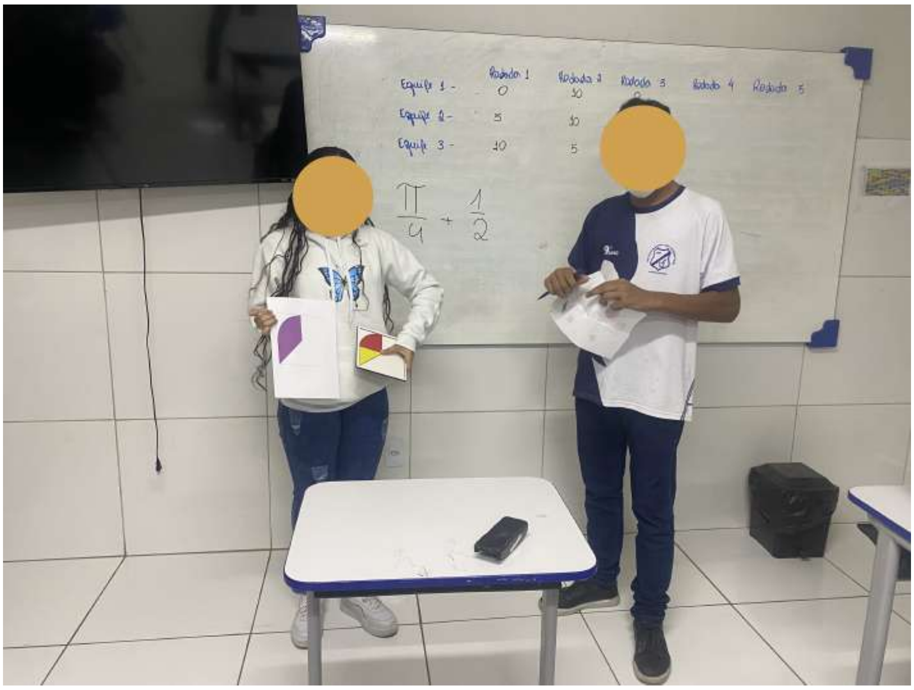
Fonte: Autor

No cálculo da área da figura sugerida na 3ª rodada, pudemos observar que os estudantes apresentavam dificuldades em efetuar adições e subtrações com frações. Assim, precisaram da ajuda do professor para chegar no resultado esperado.

Vale ressaltar que apesar da dificuldade em lidar com as frações, mas foi interessante o despertar da visão geométrica deles para enxergar as decomposições necessárias na figura-mãe e que levariam ao cálculo da área desejada.

Na rodada de número 4, pedimos que as equipes calculassem a área da figura-mãe 38. Passados 3 minutos, a equipe 2 conseguiu apresentar a resposta esperada. Os alunos perceberam que a figura-mãe podia ser decomposta em um setor circular e um triângulo retângulo, cujas áreas haviam sido calculadas no exercício da aula anterior. Vejamos na figura a seguir.

Figura 48 – Equipe 2 expondo a resposta, prevista no recurso educacional, na 4ª rodada. A partir do traçado feito na figura-mãe, eles perceberam que ela poderia ser decomposta em um setor circular e um triângulo, os quais suas áreas já haviam sido calculadas anteriormente.

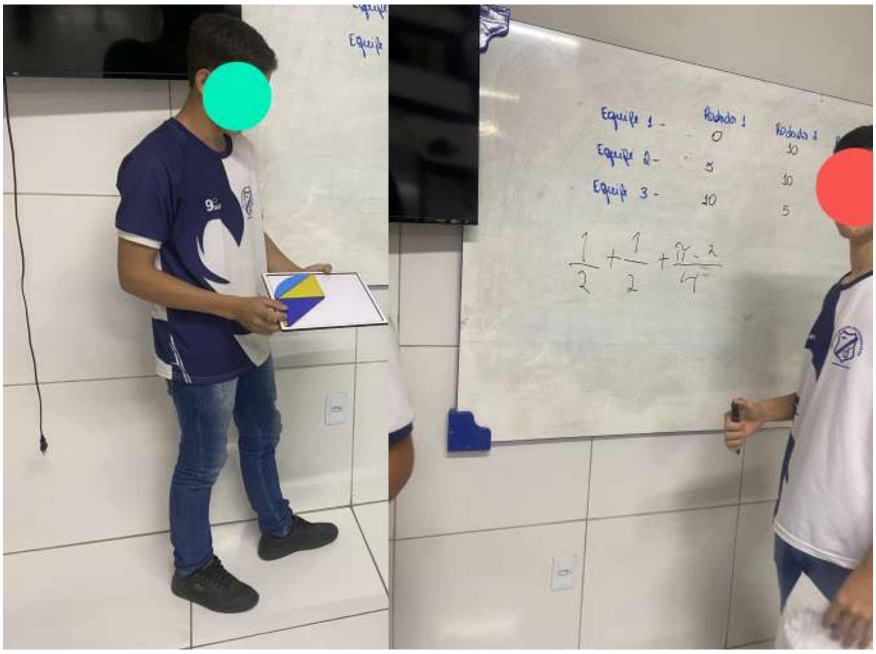


Fonte: Autor

Novamente, pela dificuldade em efetuar operações com frações, a equipe só conseguiu chegar na resposta $\dfrac{\pi + 2}{4}u^2$ com o auxílio do professor.

Ainda na 4ª rodada, a equipe 3 apresentou uma decomposição diferente da equipe 2 e obtiveram 5 pontos. Os componentes da equipe observaram que a figura mãe poderia ser decomposta em 2 triângulos retângulos e em outra figura que eles haviam calculado a área na lista de exercícios. A próxima imagem ilustra a decomposição e o cálculo feito pela equipe.

Figura 49 – Equipe 3 apresentando uma decomposição alternativa e criativa para a figura-mãe 2. Eles decompuseram em outras figuras as quais já haviam calculado a área na lista de exercícios repassada na aula que antecedeu a aplicação do jogo.



Fonte: Autor

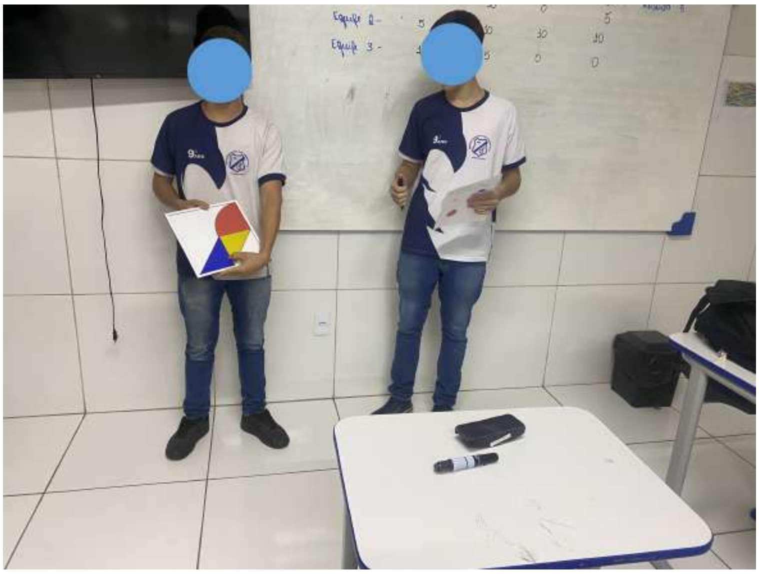
Os integrantes da equipe 3 também apresentaram dificuldade em efetuar operações com frações e só chegaram ao cálculo esperado da área com o apoio do docente.

Ao concluir a 4ª rodada, foi gratificante ver que os objetivos do jogo estavam sendo alcançados até mais do que se esperava. Os discentes continuavam comprometidos, empolgados e em busca de pontuar em todas as rodadas. Com isso, eles se instigavam a procurar soluções alternativas que, particularmente, consideramos bem criativas por parte deles.

Para a 5ª e última rodada do jogo, apresentamos a figura-mãe 39 para os grupos calcularem a área dela. Passados 4 minutos, a equipe 1 apresentou o cálculo e obteve mais 10 pontos no jogo. Os estudantes perceberam que a figura-mãe podia ser decomposta em dois triângulos retângulos e um setor circular. Dessa forma, a área da figura-mãe seria igual a $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi+4}{4}u^2$.

Na figura a seguir, podemos visualizar a decomposição feita pelos discentes no material concreto.

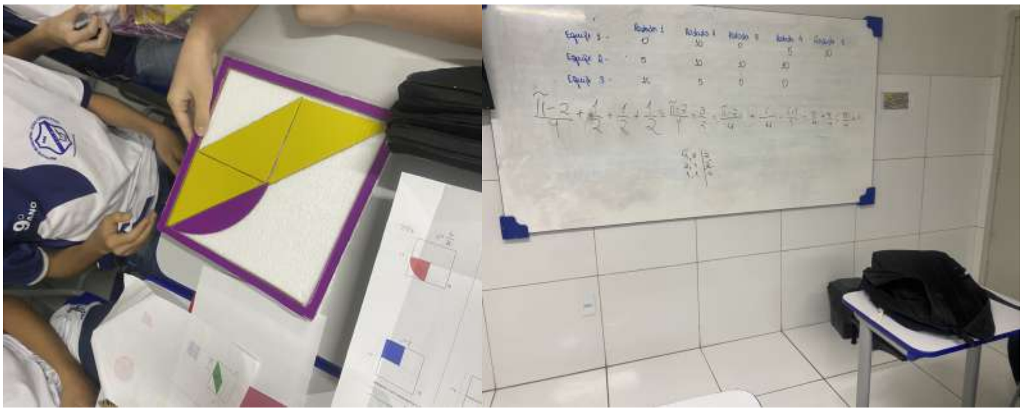
Figura 50 – Equipe 1 expondo a figura-mãe decomposta em dois triângulos e um setor circular, garantindo 10 pontos na 5ª rodada



Fonte: Autor

Já a equipe 3 notou que a figura-mãe podia ser decomposta em 3 triângulos retângulos e em outra figura a qual eles já haviam calculado a área na lista de exercícios da aula anterior, obtendo assim uma decomposição distinta da equipe 1 e garantindo mais 5 pontos no jogo. Na próxima imagem, pode-se ver a decomposição descrita neste parágrafo e o cálculo efetuado pelos discentes.

Figura 51 – Equipe 3 apresentando a decomposição da figura-mãe em figuras que eles já haviam calculado a área anteriormente na lista de exercícios.



Fonte: Autor

A Tabela 1 mostra a pontuação das equipes em cada rodada, assim como a pontuação total obtida por elas.

Tabela 1 – Pontuação das equipes durante o jogo

EQUIPES	**RODADA 1**	**RODADA 2**	**RODADA 3**	**RODADA 4**	**RODADA 5**	**TOTAL**
EQUIPE 1	0	10	0	5	10	25
EQUIPE 2	5	10	10	10	0	35
EQUIPE 3	10	5	0	0	5	20

Fonte: Autor

Dessa forma, como pode ser analisado na Tabela 1, a equipe que obteve a maior pontuação total e, consequentemente, venceu o jogo foi a equipe 2 com 35 pontos. Completando o pódio, tivemos a equipe 1 em segundo lugar com 25 pontos e na terceira posição a equipe 3 com um total de 20 pontos.

Vale frisar que durante a aplicação do jogo, os alunos estavam bem empenhados e concentrados na atividade. Alguns se mostravam bem empolgados no manuseio do material didático. Além disso, o placar total mostra um resultado equilibrado, reforçando assim o que foi escrito neste parágrafo.

6.2.2 Avaliação da intervenção pedagógica na escola 1

Ao término da aplicação do jogo, os estudantes preencheram um formulário, elaborado pelo autor deste TCC na plataforma google forms, para avaliar a proposta de ensino trabalhada com eles (o jogo das decomposições), a fim de captarmos o feedback daqueles que vivenciaram na prática.

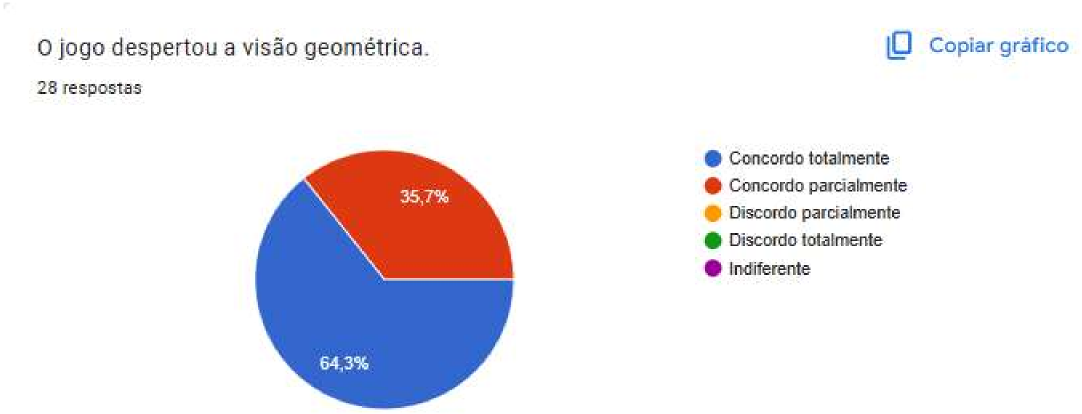
O formulário, mostrado na Figura 52, foi respondido pelos 28 estudantes que estavam presentes no dia da aplicação do jogo na turma. Ele era composto por sete questões, sendo seis delas para os alunos classificarem em: Concordo totalmente, Concordo parcialmente, Discordo parcialmente, Discordo totalmente ou Indiferente. A outra questão era aberta para os alunos responderem “O que achou das decomposições?”. Vale salientar que esse formulário foi elaborado com base em outros questionários de dissertações as quais pesquisamos durante a elaboração deste TCC.

Figura 52 – Formulário aplicado aos alunos

Fonte: Autor

Conforme a Figura 53, notamos a Questão 1 presente no formulário, que questionava se o jogo havia despertado a visão geométrica dos discentes, tivemos um percentual de 64,3% (equivalente a 18 alunos) concordando totalmente e 35,7% (equivalente a 10 alunos) concordaram parcialmente.

Figura 53 – Questão 1 do formulário



Fonte: Autor

Observe que dos 28 alunos que responderam o formulário, todos afirmaram concordar (mesmo que alguns de forma parcial) com a metodologia utilizada para despertar a visão geométrica.

A Questão 2 do formulário, mostrada na Figura 54, indagava se o material concreto contribuiu para a aprendizagem dos alunos. Perceba que 53,6% (a qual representa 15 estudantes) concordam totalmente, 25% (equivalente a 7 alunos) concordam parcialmente, 14,3% (representando 4 discente) dizem discordar totalmente e os demais (2 estudantes) afirmam discordar parcialmente.

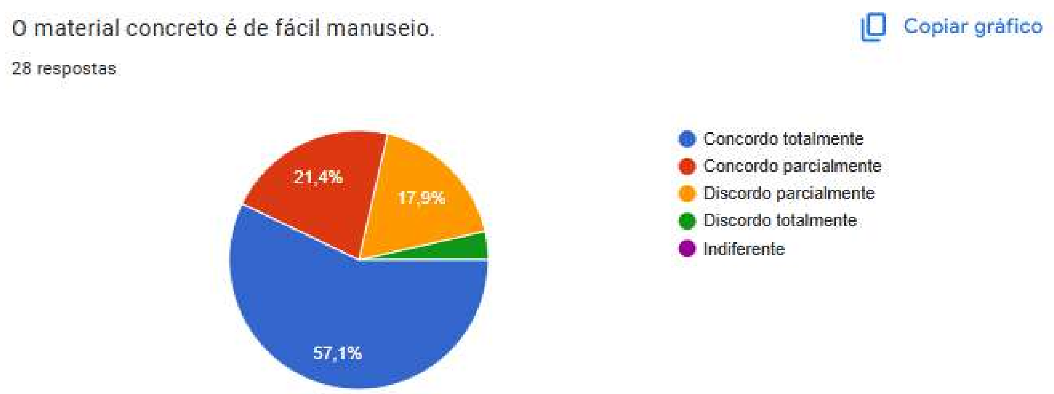
Figura 54 – Questão 2 do formulário

Fonte: Autor

Pode-se inferir que uma grande maioria da turma (22 alunos) mostrou-se interessada no material concreto, afirmando ter colaborado para a construção da aprendizagem.

Na Questão 3 do formulário, queríamos saber se o material concreto era de fácil manuseio. De acordo com os dados presentes na Figura 55, a qual apresenta a Questão 3 do formulário aplicado aos discentes, 57,1% (16 alunos) afirmaram concordar totalmente, enquanto 21,4% (que representa 6 estudantes) concordaram parcialmente, 17,9% (5 pessoas) discordaram parcialmente e, por fim, 3,6% (1 pessoa) alega discordar totalmente.

Figura 55 – Questão 3 do formulário



Fonte: Autor

Diante dos resultados obtidos na Questão 3 do formulário, nota-se que mais de 78% dos discentes informaram que o material concreto é de fácil manuseio. Isto indica que uma grande maioria dos estudantes da turma (mais da metade) compreenderam bem como jogar e manipular as peças do jogo.

Já na Questão 4 do formulário, foi interpelado se o nível de dificuldade do jogo estava apropriado para os discentes. A Figura 56 apresenta as estatísticas obtidas pelas respostas dos alunos. Nela, notamos que 39,3% (11 alunos) concordam totalmente, 50% (14 estudantes) concordam parcialmente e 10,7% (3 discentes) dizem discordar parcialmente.

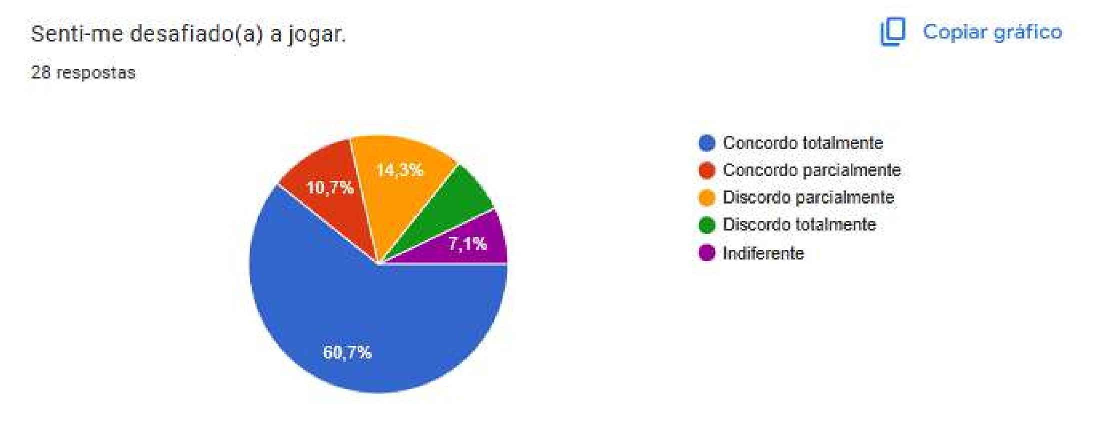
Figura 56 – Questão 4 do formulário

Fonte: Autor

Assim, os dados estatísticos presentes na Figura 56 mostram que quase 90% dos discentes da turma, a qual foi aplicada o jogo, conseguiram acompanhar o nível de dificuldade presente no cálculo das áreas das figuras mães que foram sugeridas para eles calcularem as áreas a partir do material concreto.

A Figura 57 nos apresenta a Questão 5 do formulário. Esta questionava se os discentes sentiram-se desafiados a jogar. Dos 28 alunos que responderam, 60,7% (o que compreende 17 alunos) disseram concordar totalmente, enquanto 10,7% (equivalente a 3 estudantes) concordaram parcialmente, 14,3% (4 alunos) discordaram parcialmente, 7,1% (2 alunos) discordaram totalmente e 7,1% (2 pessoas) consideraram indiferente.

Figura 57 – Questão 5 do formulário

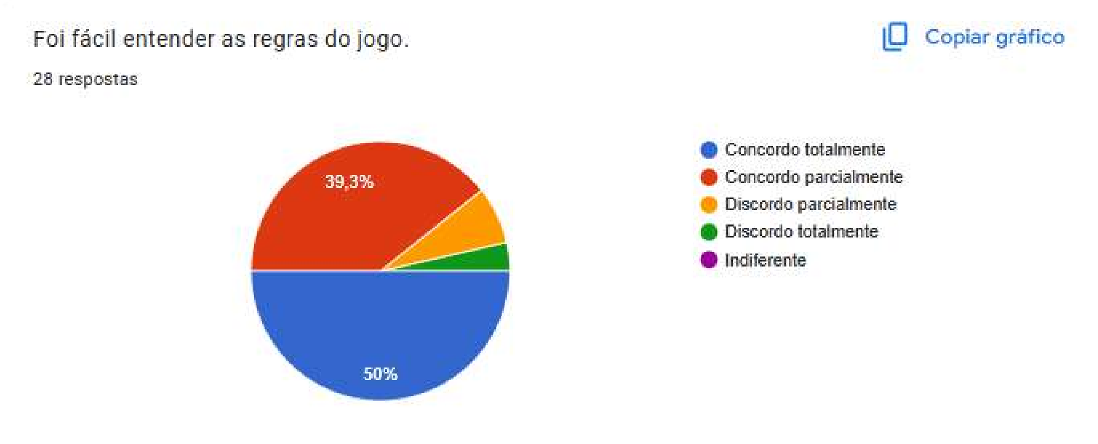


Fonte: Autor

Confira que de 28 alunos, a maior parte deles (20 alunos) se mostraram motivados e desafiados a jogar, enquanto, apenas 8 não tiveram tanto ou nenhum interesse. Isto mostra que o material concreto, juntamente com a proposta lúdica do jogo foi algo atrativo e, provavelmente, prazeroso na construção do conhecimento destes estudantes.

A Questão 6 indagava se foi fácil entender as regras do jogo. Como podemos ver na Figura 58, 50% (14 alunos) responderam que concordam totalmente, 39,3% (11 pessoas) concordaram parcialmente, 7,1% (2 estudantes) discordaram parcialmente e 3,6% (1 discente) discordou totalmente.

Figura 58 – Questão 6 do formulário

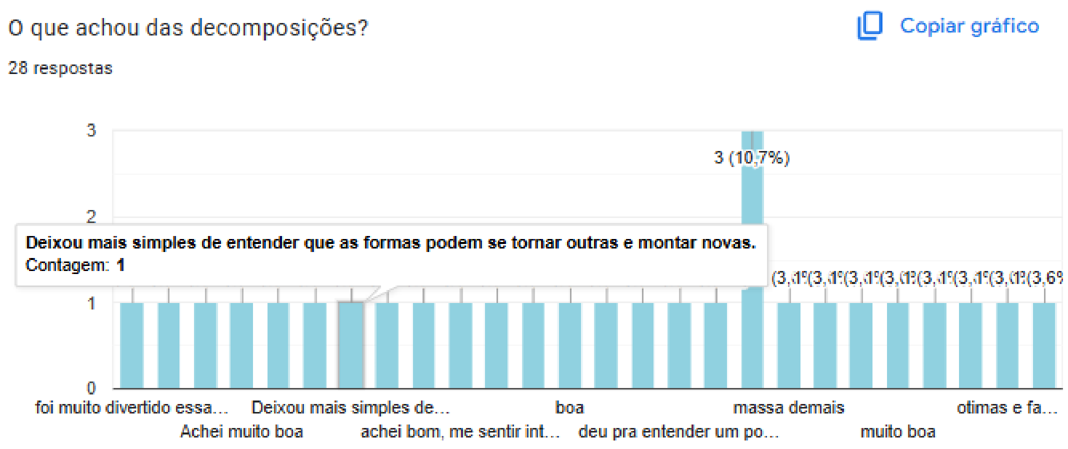


Fonte: Autor

Vejamos que apenas 3 estudantes afirmaram não ser fácil entender as regras do jogo. Destes, há a possibilidade de que alguns não tenham tanta afinidade com a disciplina. Por outro lado, 25 estudantes garantiram que as regras do jogo são de fácil compreensão. Isto confirma o empenho e dedicação por grande parte deles durante as rodadas do jogo.

Na Questão 7 do formulário, perguntamos o que eles acharam das decomposições e deixamos os alunos livres para mostrarem seus pontos de vista. Destacamos uma das respostas, que achamos bem interessante por parte de um dos estudantes. Confira na Figura 59.

Figura 59 – Questão 7 do formulário



Fonte: Autor

A resposta em destaque, ilustrada na Figura 59, na qual o(a) aluno(a) afirma que "o jogo deixou mais simples de entender que as formas podem se tornar outras e montar novas" reforça as estatísticas obtidas na Questão 1, quando 100% dos discentes confirmaram despertar a visão geométrica a partir do jogo. Além disso, essa resposta me fez refletir toda a trajetória deste TCC, pois nos momentos dos planejamentos pensávamos em construir um material que pudesse auxiliar e melhorar a visualização das decomposições em figuras planas e no ponto de vista desse(a) aluno(a), isto foi possível.

A Tabela 2 expõe um resumo das respostas obtidas nas seis primeiras questões do formulário respondido pelos alunos.

Tabela 2 – Respostas obtidas no formulário

	Concordo totalmente	Concordo parcialmente	Discordo parcialmente	Discordo totalmente	Indiferente
Questão 1	18	10	0	0	0
Questão 2	15	7	2	4	0
Questão 3	16	6	5	1	0
Questão 4	11	14	3	0	0
Questão 5	17	3	4	2	2
Questão 6	14	11	2	1	0

Fonte: Autor

Conforme a Tabela 2, nota-se que a opção "Concordo totalmente" foi escolhida por maioria dos alunos em quase todas as questões respondidas, exceto na Questão 4. Logo, inferimos que os discentes se mostraram satisfeitos com a metodologia usada em sala de aula e que o jogo teve uma aceitação por maior parte da turma.

6.2.3 Aplicação na escola 2

Os procedimentos adotados na aplicação do jogo na escola 2 foram parecidos com os procedimentos adotados na escola 1.

Inicialmente, direcionamos os estudantes a praticarem os exercícios da lista disponibilizada no Apêndice C desta dissertação e fizemos a correção no quadro. Para isso, foram usadas duas aulas de 45 minutos cada. Para facilitar os cálculos, sugerimos que os estudantes usassem $\pi = 3,1$, quando necessário.

Em seguida, durante três aulas de 45 minutos cada, fizemos a aplicação do jogo. Contudo, antes de iniciar os exercícios usando o material concreto, dividimos a turma em 3 grupos, denominados: Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3. Como compareceram, no dia da aplicação do jogo, 13 estudantes, então o Grupo 1 ficou com 5 pessoas e os Grupos 2 e 3 ficaram com 4 pessoas, cada. Os grupos foram sorteados através de papéis enumerados com os números 1, 2 e 3, que foram inseridos em um envelope e cada aluno(a) puxava um destes papéis.

Logo após a divisão dos grupos, fizemos a exposição das regras do jogo e distribuímos o material concreto para cada grupo. Além disso, ensinamos a manusear o material concreto.

A sequência de figuras-mãe usadas na escola 2 foi a sugerida na Seção 6.1 deste TCC.

Na primeira rodada do jogo, usamos a Figura 37. Em menos de 3 minutos, o Grupo 1 conseguiu perceber as decomposições e calcular a área da figura-mãe sugerida. Os integrantes do grupo perceberam que a figura-mãe podia ser decomposta em um quadrado unitário e dois triângulos retângulos congruentes, que juntos formavam outro quadrado unitário. E ainda, os dois quadrados unitários formaram um retângulo de dimensões $2u$ e $1u$. Logo, concluíram que a área da figura-mãe 1 era igual a $2u^2$.

A Figura 60 expõe o cálculo feito pelos alunos do Grupo 1.

Figura 60 – Grupo 1 expondo para a turma como fazer a decomposição da figura-mãe, além de explicar como calcula a área dela.

Fonte: Autor

Com a apresentação e a resposta correta, o Grupo 1 obteve 10 pontos na primeira rodada. Ainda, na rodada 1, o Grupo 3 percebeu também que a figura podia ser decomposta em um quadrado unitário e dois triângulos retângulos, cujas áreas eram iguais a $0,5u^2$ cada e que bastava efetuar a adição dessas áreas. Portanto, concluíram que a área da figura-mãe 1 era igual a $2u^2$. Podemos ver esta solução dada pelo grupo na Figura 61.

Figura 61 – Grupo 3 apresentando a decomposição da figura-mãe em dois triângulos e um quadrado, os quais eles já haviam calculado as áreas anteriormente na lista de exercícios.

Fonte: Autor

Logo, o Grupo 3 conseguiu 5 pontos na primeira rodada por apresentar um cálculo alternativo para a área da figura-mãe 1.

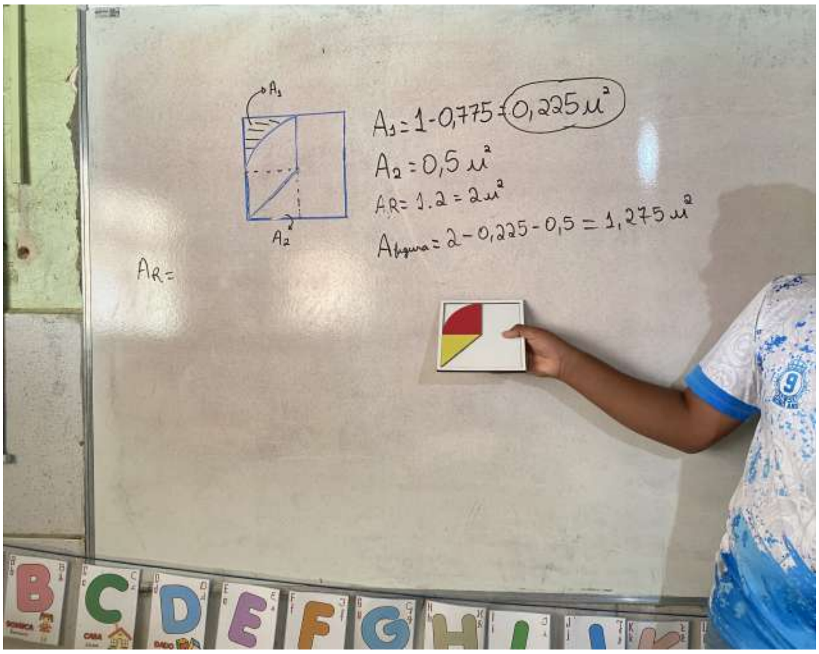
Já na rodada 2, na qual apresentamos a Figura 38, os integrantes do Grupo 3 precisaram de cerca de 5 minutos para visualizar a decomposição e efetuar os cálculos da área desejada. Os estudantes perceberam que a figura-mãe podia ser decomposta em um triângulo retângulo de área igual a $0,5u^2$ e em um setor circular, cuja área havia sido calculada na aula de exercícios e era igual a $\frac{3,1}{4}$. Daí, somando-as, obtiveram o resultado $\frac{5,1}{4}u^2$, o qual se tratava da área da figura-mãe 2. A imagem a seguir ilustra o cálculo feito pelos discentes.

Figura 62 – Grupo 3 explicando, com detalhes, como foi feita a decomposição da figura-mãe e o cálculo da área da mesma na rodada 2

Fonte: Autor

Feito isto, o Grupo 3 conseguiu mais 10 pontos na segunda rodada. Após a apresentação do referido grupo, o Grupo 2 apresentou o cálculo alternativo para a área da figura-mãe 2. Os discentes observaram que podiam completar o retângulo, que é metade da caixinha, e dele subtrairia a área do triângulo retângulo e da figura obtida a partir da subtração da área do quadrado unitário pela área do setor circular. Vejamos o cálculo apresentado pelos estudantes na Figura 63.

Figura 63 – Grupo 2 apresentando de forma organizada e detalhada as decomposições feitas na figura-mãe apresentada na 2ª rodada do jogo, assim como os cálculos feitos para obter a área da forma geométrica plana mencionada.



Fonte: Autor

Achei fascinante a resposta dada pelo Grupo 2, pois a equipe conseguiu visualizar e efetuar de forma correta, com detalhes, todas as áreas das figuras usadas. Além de manter uma certa organização nos cálculos para que os colegas pudessem entender o que foi feito.

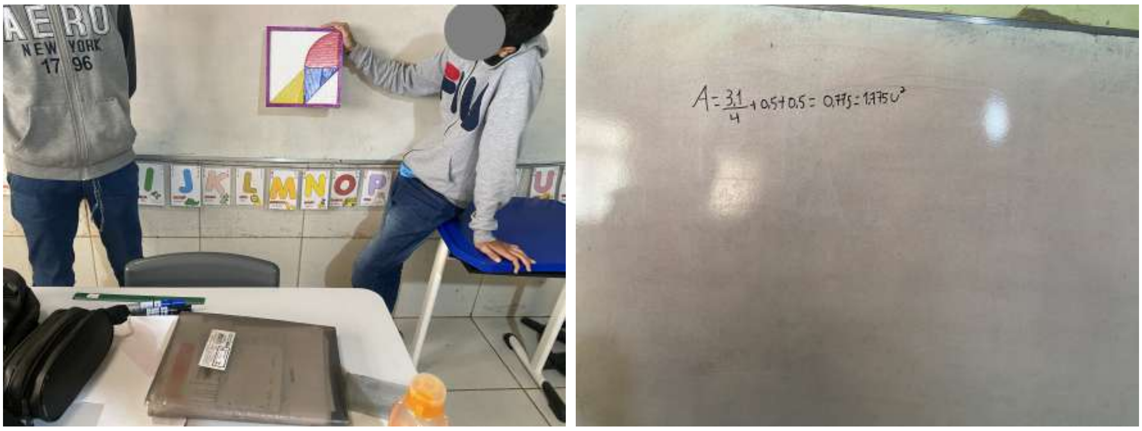
Os alunos da escola 2 estavam atentos aos detalhes e buscavam formas de apresentar a resolução feita de uma forma clara. Um dos detalhes usados era o desenho da figura mãe no quadro e as indicações das áreas que iam calcular. O desenho servia para reforçar as decomposições feitas no material concreto. Isto me fez perceber o quão criativos e didáticos eles eram.

Notemos que esta solução também foi diferente das apresentadas pelos estudantes da escola 1. Isto mostra o quanto o material concreto pode aguçar as várias formas dos alunos visualizarem as decomposições.

Diferente do Grupo 3, o Grupo 2 preferiu transformar a fração em um número na forma decimal para efetuar os cálculos. Eles notaram que $\frac{3,1}{4} = 0,775$ e, efetuando todos os cálculos, concluíram que a área da figura-mãe 2 era igual a $1,275u^2$. Assim, ganharam 5 pontos na rodada.

Os três grupos conseguiram pontuar na rodada 3, na qual sugerimos que calculassem a área da Figura 39. A primeira equipe a apresentar o cálculo foi o Grupo 1. Eles observaram que podiam decompor a figura mãe 3 em dois triângulos retângulos e um setor circular, cujas áreas eles já haviam calculado nos exercícios. Assim, efetuando a adição das áreas dos triângulos e do setor circular, obtiveram como resultado $1,775u^2$, a qual correspondia à área desejada. O grupo precisou de cerca de 7 minutos para visualizar e apresentar os cálculos para a turma. Vejamos na imagem a seguir.

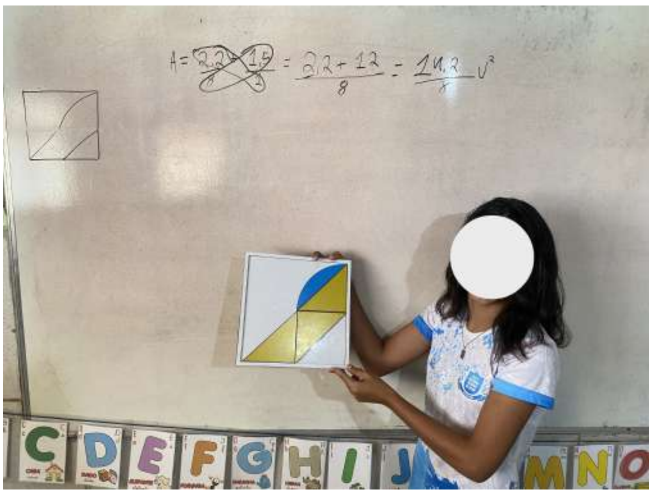
Figura 64 – Grupo 1 explicitando a decomposição da figura-mãe em dois triângulos e um setor circular na rodada 3.



Fonte: Autor

Dessa forma, o Grupo 1 garantiu 10 pontos na rodada. Em seguida, o Grupo 3 verificou que a área da figura-mãe 3 podia ser calculada através da soma das áreas de três triângulos retângulos e outra figura a qual já haviam calculado a área nos exercícios, conforme podemos ver na Figura 65. Com isso, o grupo ganhou 5 pontos.

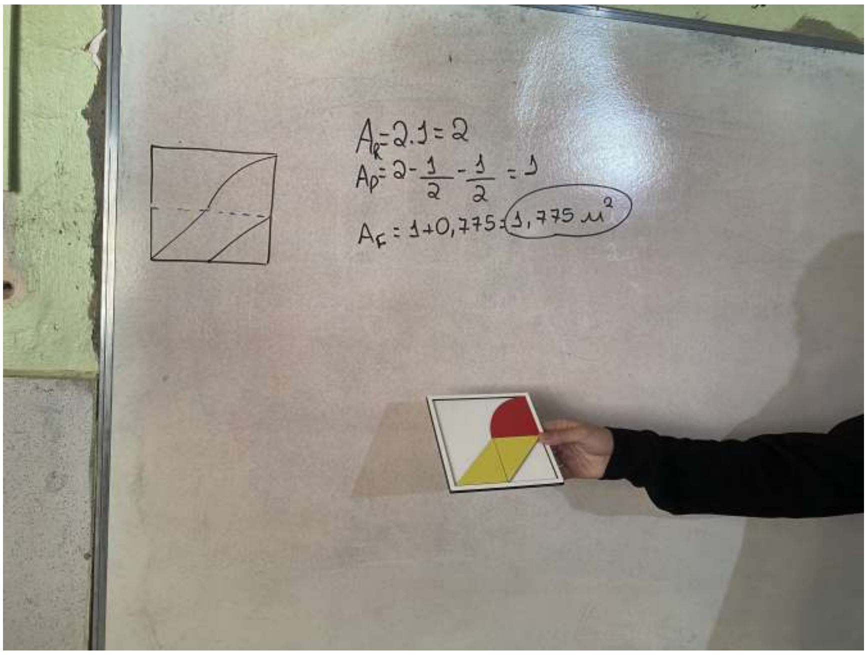
Figura 65 – Grupo 3 apresentando uma decomposição alternativa para a figura-mãe, usando as formas geométricas que já haviam calculado as áreas nos exercícios



Fonte: Autor

Já o Grupo 2 notou que traçando um segmento, dividindo a caixinha ao meio, formaria um retângulo e, desse retângulo, bastaria subtrair as áreas de dois triângulos retângulos para obter a área do paralelogramo. Em seguida, deveria somar as áreas do paralelogramo e do setor circular para calcular a área da figura-mãe 3. Sendo assim, o grupo obteve 5 pontos na rodada. A Figura 66 ilustra o cálculo feito.

Figura 66 – Grupo 2 apresentando uma decomposição da figura-mãe 3, expondo as decomposições realizadas no desenho do quadro e as observações feitas no material concreto.

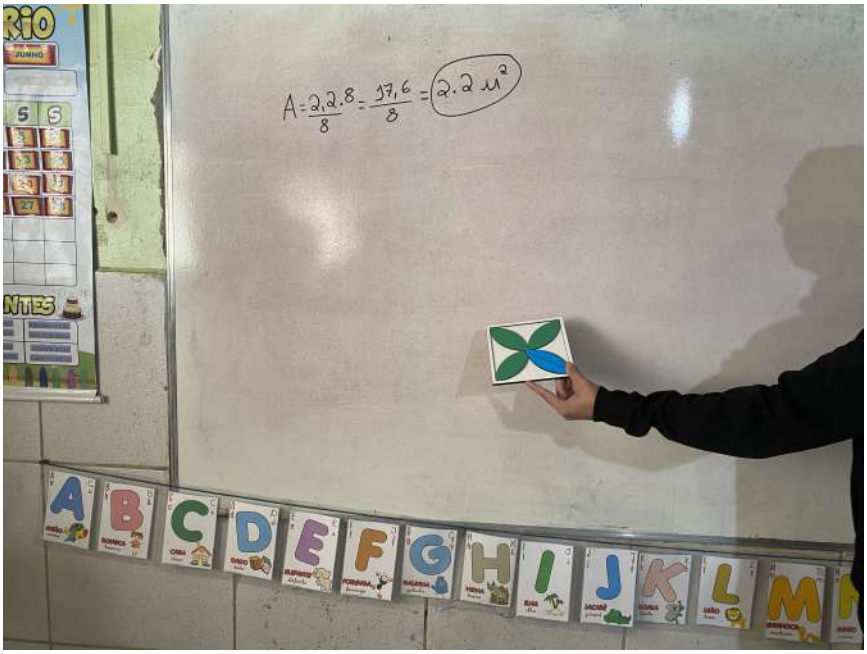


Fonte: Autor

A partir da resolução alternativa apresentada pelo Grupo 2 para a figura-mãe 3, pude observar o quanto o material concreto foi capaz de despertar a percepção geométrica dos discentes. Particularmente, foi uma decomposição que eu não havia visualizado anteriormente e que foi muito bem explicada pelo Grupo. Além do mais, foi uma solução diferente das apresentadas na escola 1.

Na penúltima rodada do jogo (rodada 4), os alunos deveriam calcular a área da Figura 40. Após cerca de 9 minutos, os integrantes do grupo 2 verificaram que decompondo a figura-mãe 4 em 8 figuras congruentes a que eles haviam calculado a área nos exercícios (Figura 35), resultaria na área desejada. Ou seja, a área da figura-mãe 4 seria igual a $8 \cdot \dfrac{2,2}{8} = 2,2u^2$. A Figura 67 expõe o cálculo feito pelo Grupo 2.

Figura 67 – Cálculo e decomposição da figura-mãe 4 apresentado pelo Grupo 2 na rodada 4 do jogo.



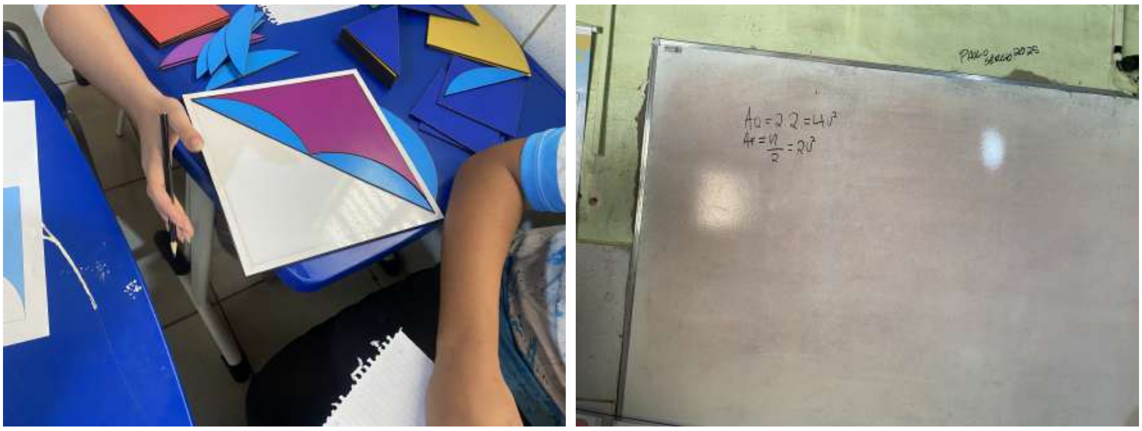
Fonte: Autor

Os demais grupos não apresentaram soluções alternativas, assim o Grupo 2 foi o único a pontuar na rodada 4, ganhando 10 pontos.

A quinta e última rodada do jogo foi empolgante e emocionante, visto que as equipes estavam empatadas e quem acertasse primeiro o cálculo da área da Figura 41 iria se tornar vencedora.

Após cerca de 6 minutos analisando a figura-mãe 5, os discentes do Grupo 3 notaram que traçando a diagonal da caixinha, uma parte da figura ficaria dividida em duas figuras congruentes a Figura 35 e ao encaixá-las na outra parte da figura-mãe 5, transformariam em um triângulo, cuja área é igual a metade da área da caixinha. Vejamos na imagem a seguir.

Figura 68 – Grupo 3 expondo a composição que fizeram com as peças geométricas, percebendo que a área da figura-mãe 5 era igual a área do triângulo retângulo que representa metade da caixinha.



Fonte: Autor

Logo, O Grupo 3 obteve mais 10 pontos. As demais equipes não apresentaram solução alternativa na última rodada.

Na Tabela 3, pode-se ver as pontuações das equipes de uma forma geral.

Tabela 3 – Pontuação dos grupos durante o jogo

GRUPOS	**RODADA 1**	**RODADA 2**	**RODADA 3**	**RODADA 4**	**RODADA 5**	**TOTAL**
GRUPO 1	10	0	10	0	0	20
GRUPO 2	0	5	5	10	0	20
GRUPO 3	5	10	5	0	10	30

Fonte: Autor

Conforme podemos analisar na Tabela 3 o jogo foi bem equilibrado, tanto é que só foi decidido na última rodada. As equipes ficaram empatadas na penúltima rodada, mostrando a dedicação dos grupos durante o jogo.

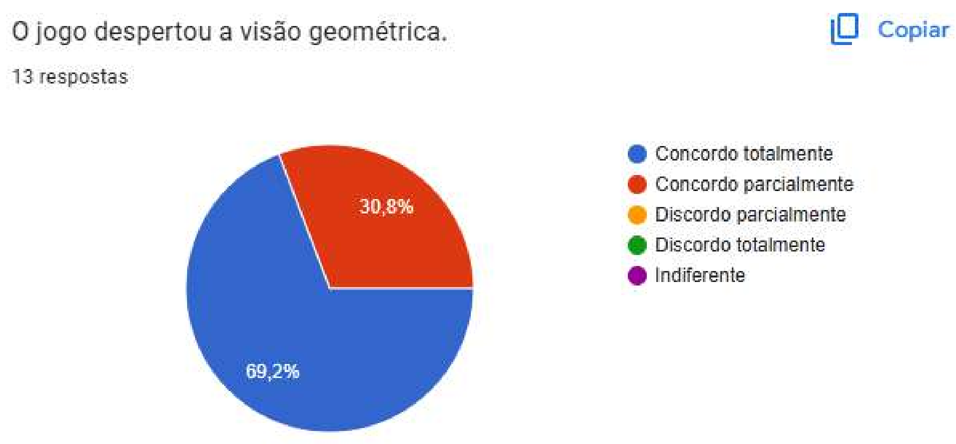
6.2.4 Avaliação da intervenção pedagógica na escola 2

Após concluir a última rodada do jogo, direcionamos os estudantes a preencher um formulário, assim como fizemos na escola 1, para receber a avaliação e o feedback da proposta de ensino trabalhada em sala.

Vale ressaltar que o formulário era semelhante ao aplicado na escola 1, continha as mesmas perguntas. O questionário foi respondido pelos 13 alunos que estavam presentes no dia da intervenção pedagógica.

Na primeira questão do questionário, a qual questionava se o jogo despertou a visão geométrica dos alunos, 69,2% (9 estudantes) concordaram totalmente e 30,8% (4 alunos) concordaram parcialmente. Vejamos esses dados estatísticos, ilustrados na Figura 69.

Figura 69 – Questão 1 do questionário



Fonte: Autor

De acordo com as respostas dadas pelos discentes, todos concordaram que o jogo concreto despertou a visão geométrica deles. Isto é, eles afirmaram ter assimilado mais algumas propriedades concretas estudadas em anos anteriores, manuseando o material concreto.

A segunda questão do questionário, que indagava se o material concreto tinha contribuído para a aprendizagem do aluno, obteve os mesmos percentuais da questão 1. Ou seja, 69,2% (9 pessoas) responderam que concordam totalmente, enquanto 30,8% disseram concordar parcialmente. Observe na Figura 70.

Figura 70 – Questão 2 do questionário

Fonte: Autor

Durante a aplicação do jogo ouvimos alguns comentários como "traz mais jogos como esse, pois facilita visualizar a resposta". Assim, esse comentário juntamente com a resposta dada por eles no questionário nos leva a inferir que houve um grande interesse no material didático usado em sala.

A terceira questão do questionário pretendia saber se o material concreto era de fácil manuseio. Os dados apresentados na Figura 71 mostram que 84,6% (11 discentes) afirmaram concordar totalmente, enquanto 15,4% (2 alunos) concordaram parcialmente.

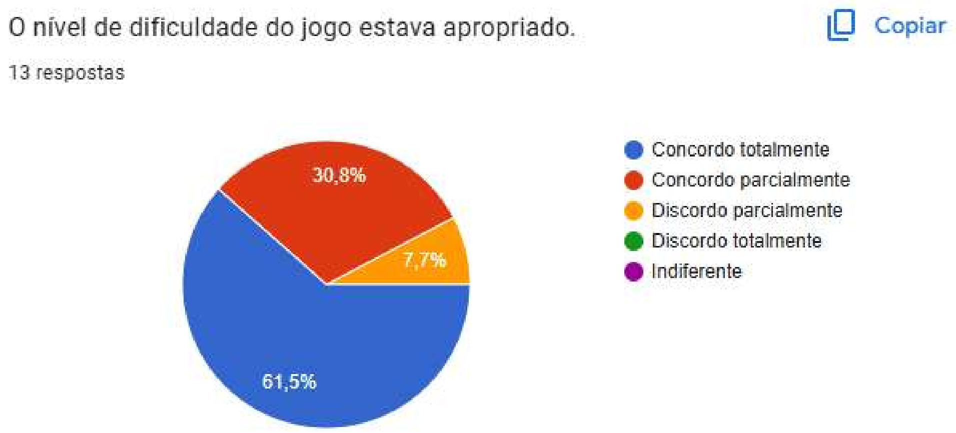
Figura 71 – Questão 3 do questionário

Fonte: Autor

Por ser uma turma pequena, ficou mais fácil ganhar a atenção dos estudantes e explicar detalhadamente os procedimentos metodológicos do jogo. Assim, isto pode ter contribuído para a compreensão no manuseio do material concreto e influenciado na resposta obtida no formulário para a questão 3.

Na quarta questão do formulário, questionávamos se o nível de dificuldade do jogo estava apropriado. Daí, 61,5% (8 pessoas) disseram concordar totalmente, 30,8% (4 pessoas) afirmaram concordar parcialmente e 7,7% (1 pessoa) discordou parcialmente. Conforme ilustra a Figura 72.

Figura 72 – Questão 4 do questionário

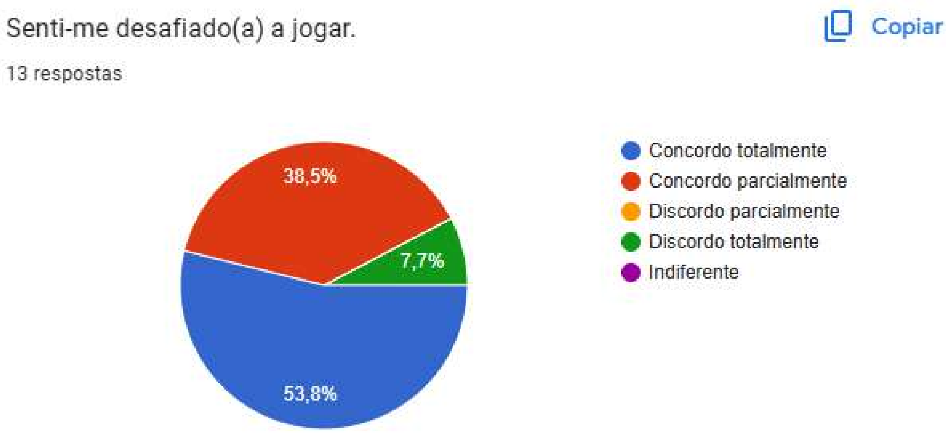


Fonte: Autor

Dessa forma, os dados estatísticos apurados para a questão 4 mostra que mais de 91% dos estudantes aprovaram o nível de dificuldade abordado no jogo.

Na Figura 73 podemos observar a questão 5 do questionário. Nela, indagávamos se os alunos sentiram-se desafiados a jogar. Dos 13 estudantes que responderam a pesquisa, 53,8% (7 alunos) concordaram totalmente, 38,5% (5 estudantes) concordaram parcialmente e 7,7% (1 discente) discordou totalmente.

Figura 73 – Questão 5 do questionário



Fonte: Autor

Vejamos que de um total de 13 alunos, apenas 1 não se atraiu pelo jogo.

A sexta questão buscava saber se havia sido fácil entender as regras do jogo. Conforme exposto na Figura 74, 46,2% (6 pessoas) concordaram totalmente, 46,2% (6 alunos) concordaram parcialmente e 7,7% (1 estudante) discordou parcialmente.

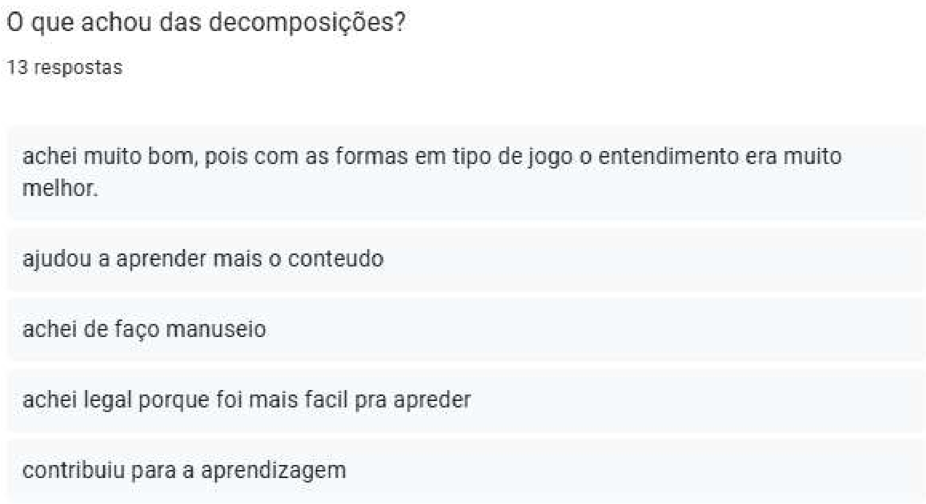
Figura 74 – Questão 6 do questionário

Fonte: Autor

Note que apenas 1 estudante afirmou não ser fácil entender as regras do jogo. Este pode ter sido o mesmo que respondeu não ter se sentido desafiado a jogar. Logo, consideramos que a aplicação foi satisfatória em meio ao envolvimento dos estudantes e o feedback obtido até a sexta questão do formulário respondido pelos discentes.

A sétima questão do questionário, a qual interrogava sobre o que acharam das decomposições, deixamo-a aberta para os alunos responderem com sinceridade o que haviam presenciado na prática. A Figura 75 expõe algumas das respostas dadas pelos estudantes.

Figura 75 – Questão 7 do questionário


O que achou das decomposições?

13 respostas

achei muito bom, pois com as formas em tipo de jogo o entendimento era muito melhor.

ajudou a aprender mais o conteudo

achei de faço manuseio

achei legal porque foi mais facil pra apreder

contribuiu para a aprendizagem

Fonte: Autor

Resumindo algumas das respostas destacadas na Figura 75, pode-se depreender que os alunos conseguiram assimilar bem o conteúdo trabalhado com eles em sala por meio do material concreto usado.

A Tabela 4 faz um apanhado geral das respostas dadas pelos alunos no questionário de avaliação do jogo.

Tabela 4 – Respostas obtidas no questionário

	Concordo totalmente	**Concordo parcialmente**	**Discordo parcialmente**	**Discordo totalmente**	**Indiferente**
Questão 1	9	4	0	0	0
Questão 2	9	4	0	0	0
Questão 3	11	2	0	0	0
Questão 4	8	4	1	0	0
Questão 5	7	5	0	1	0
Questão 6	6	6	1	0	0

Fonte: Autor

De acordo com as respostas expostas na Tabela 4, nas quais em sua grande maioria os alunos concordaram (totalmente ou parcialmente), entendemos que assim como na escola 1, os alunos da escola 2 tiveram uma boa aceitação do jogo.

7 Conclusões

Estimular os discentes a estudar não tem sido tarefa fácil. Quem leciona no ensino básico pode notar o desinteresse e falta de vontade pela aprendizagem por uma boa parte dos alunos.

Adotar práticas que fogem do ensino mecânico, no qual envolve apenas a repetição de exemplos e aplicação de fórmulas pode ser um bom auxiliar para lecionar o conteúdo.

No entanto, a turma deve colaborar para a dinâmica adotada, pois, caso contrário dificilmente o objetivo da aula será alcançado sem a contribuição dos alunos. Pensando neste ambiente de estímulo e com uma proposta lúdica de jogo concreto, este TCC visa contribuir para complementar e aprofundar o estudo de áreas de figuras planas.

Diante das aplicações que fizemos em sala de aula, constatamos que os alunos foram bem participativos e contribuíram bastante para que os objetivos fossem alcançados. Além do mais, também pudemos observar que além de despertar a visão geométrica, os estudantes fortaleceram o vínculo de companheirismo, uma vez que a pontuação era para toda a equipe e não individualmente.

As equipes estiveram comprometidas do começo ao fim das aplicações. Em ambas as escolas, os placares foram bem próximos. Isto mostra a vontade das equipes em pontuar durante as rodadas, seja como a primeira a apresentar o cálculo da área da figura mãe apresentada na rodada e garantir 10 pontos ou apresentar, posteriormente, uma solução alternativa para ganhar 5 pontos.

Achamos interessante a apresentação das soluções alternativas, pois os estudantes conseguiram visualizar diferentes formas de calcular a área da figura mãe apresentada a eles. Isto fez com que eles despertassem a visão geométrica e aguçassem o espírito competitivo ao longo do jogo.

Na escola 1, os alunos conseguiram um bom repertório de soluções alternativas para as figuras mães. Porém, notamos uma grande dificuldade da turma em lidar com frações. Já na escola 2, os estudantes também conseguiram apresentar diferentes soluções alternativas, inclusive, algumas distintas das apresentadas na escola 1. Além disso, notamos um certo domínio dos estudantes em trabalhar com frações e até mesmo números na forma decimal. Isto facilitou para que pudessem chegar ao cálculo da área da figura mãe sugerida a eles.

Durante a realização das aplicações do jogo em sala de aula, tivemos alguns entraves. Primeiramente, por ser no período em que estava havendo várias avaliações externas nas turmas. Além disso, a escola 2 não dispõe de muitos recursos tecnológicos e para responder o formulário de avaliação do jogo, foi usado apenas um notebook, no qual os estudantes iam um a um para completar as respostas.

O jogo sugerido nesta pesquisa pode ser explorado com diferentes figuras geométricas planas. A criatividade do(a) professor(a) juntamente com os alunos poderá desenvolver novas figuras, cujas áreas poderão ser calculadas através do material concreto que sugerimos.

Vale reforçar que além de estimular o raciocínio lógico e a criatividade dos estudantes, o jogo pode proporcionar um ambiente de aprendizagem mais lúdico e dinâmico. Com isso, nossa proposta exposta ao longo deste TCC poderá ser uma excelente ferramenta para complementação das aulas de geometria plana.

Referências

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana. 11. ed.* [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 29.

BRASIL. *Lei N. 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, 23 dez. 1996.* 1996. Citado na página 17.

BRASIL. *Lei N. 13.005, de 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. Diário Oficial da União, 26 jun. 2014.* 2014. Citado na página 17.

BRASIL. *Ministério da educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília.* 2018. Citado 7 vezes nas páginas 14, 16, 17, 19, 24, 26 e 27.

DE OLIVEIRA, R. R. *Área de figuras planas.* 1999. Acesso em: 23 de outubro de 2024. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/area-de-figuras-planas.htm>. Citado na página 54.

GAY, M. R. G. *Araribá conecta matemática: 8º ano. 1. ed.* [S.l.]: São Paulo: Moderna, 2022. Citado na página 50.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e Realidade: 8º ano. 10. ed.* [S.l.]: São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2022. Citado na página 45.

JÚNIOR, J. R. G. *A conquista da Matemática: 8º ano: ensino fundamental: anos finais. 1 ed.* [S.l.]: São Paulo: FTD, 2022. Citado na página 48.

KHANACADEMY. *Geometria básica e medidas.* 2014. Acesso em: 24 de outubro de 2024. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo>. Citado na página 61.

LIMA, E. L. *Análise real: Funções de Uma Variável. 8 ed.* [S.l.]: IMPA, 2006. (Análise real, v. 1). Citado na página 34.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança. 4. ed.* [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 29, 39 e 43.

LORENZATO, S. *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.* 3. ed. [S.l.]: Autores Associados, 2021. (Coleção Formação de Professores). ISBN 9786588717523. Citado na página 64.

MACIEL, A. B.; LIMA, O. A. L. *Introdução à Análise Real. 1 ed.* [S.l.]: Campina Grande: EDUEPB, 2005. Citado na página 33.

MORAIS FILHO, D. C. d. *Um Convite à Matemática: com técnicas de demonstração e notas históricas. 4 ed.* [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2024. Citado na página 29.

MORAIS FILHO, D. C. d. *Manual de Redação Matemática: com um dicionário etimológico de palavras usadas na matemática. 3 ed.* [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2025. Citado na página 30.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria (coleção PROFMAT). 2. ed.* [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2022. Citado na página 29.

PORTALDAOBMEP. *Áreas de Figuras Planas*. 2005. Acesso em: 27 abril de 2025. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=20&tipo=1>. Citado na página 57.

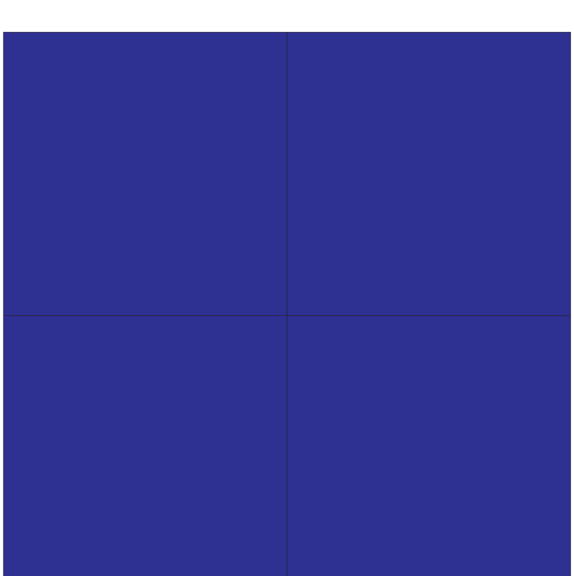
PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo método matemático. 2. ed.* [S.l.]: Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Citado 7 vezes nas páginas 15, 21, 23, 24, 25, 26 e 27.

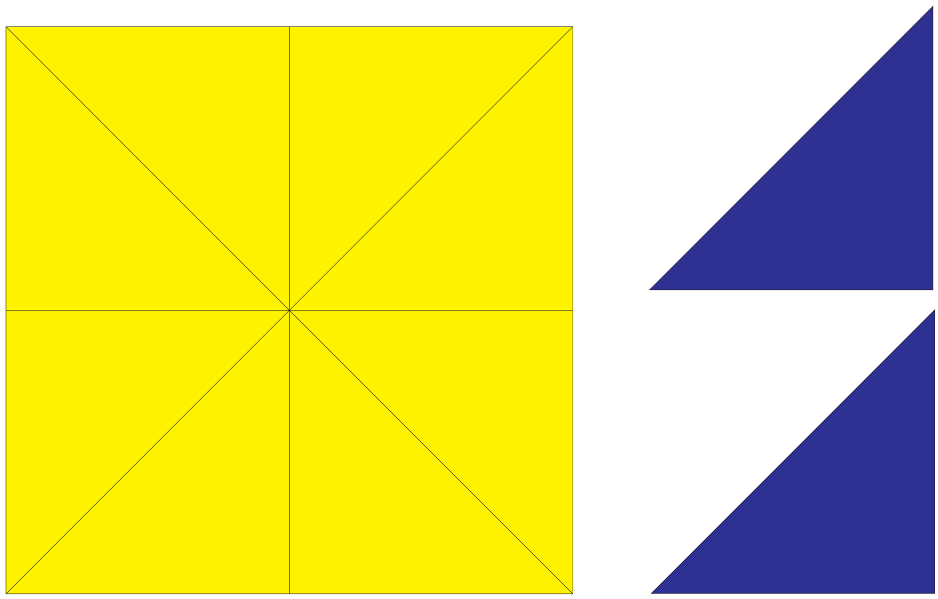
RÊGO, R. G. d.; RÊGO, R. M. d. *Matematicativa: formação de professores. 4 ed.* Campinas, SP: Autores Associados, 2022. (Coleção formação de professores). Livro eletrônico. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 64.

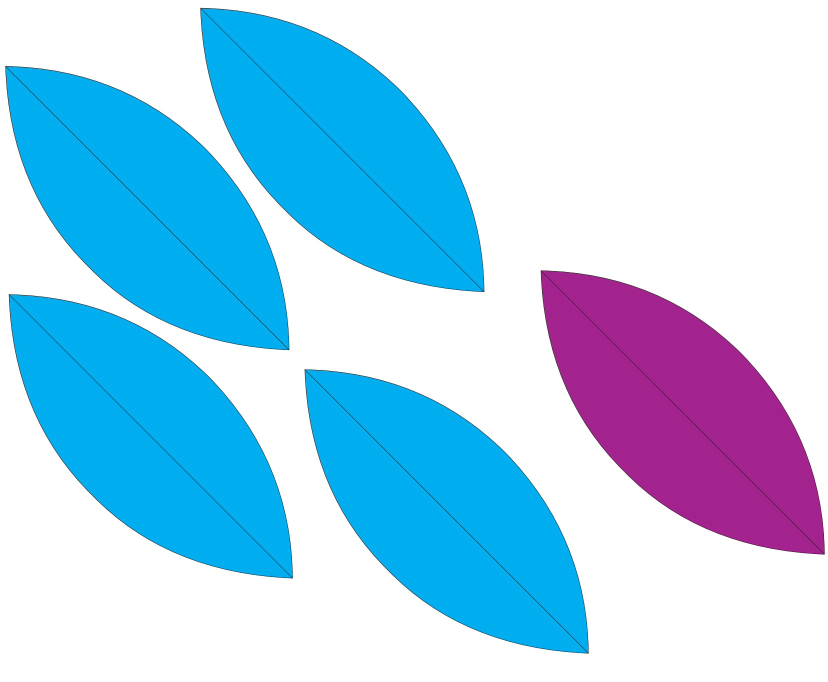
Apêndices

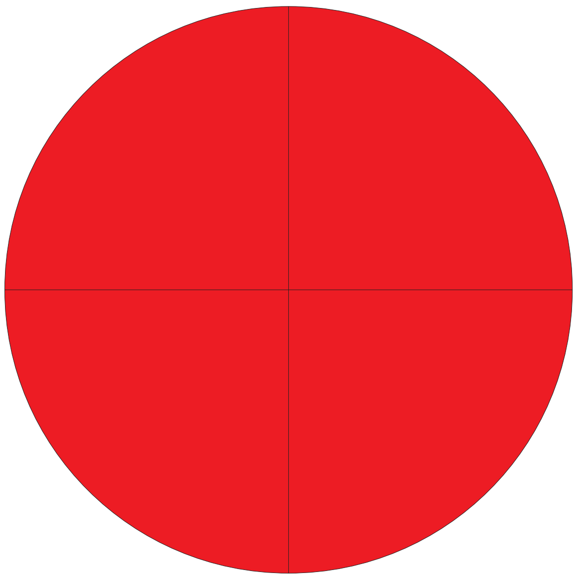
APÊNDICE A – Peças do jogo para imprimir

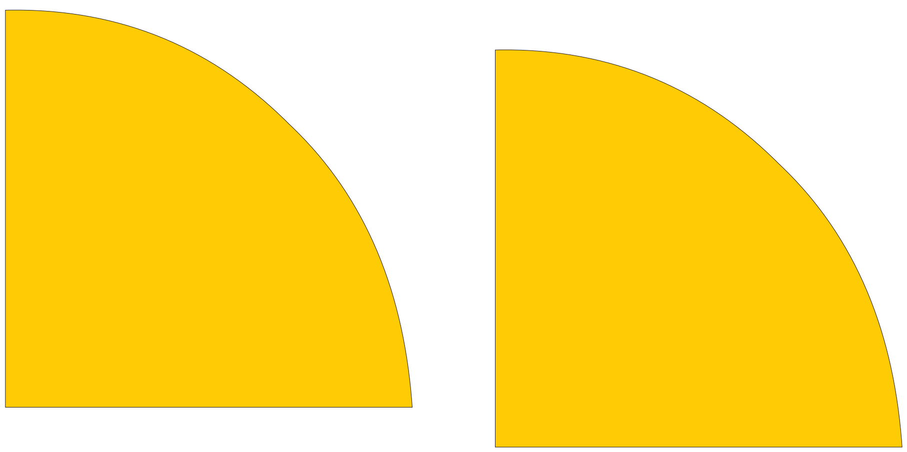
As dimensões usadas para imprimir as figuras, anexadas a seguir, fica a critério do(a) professor(a). No material que confeccionamos, a caixinha tinha dimensões internas 25,2 cm x 25,2 cm, enquanto o quadrado maior da próxima figura teve lados medindo 25 cm. E as demais figuras foram desenhadas conforme a proporção do quadrado de lado 25 cm.



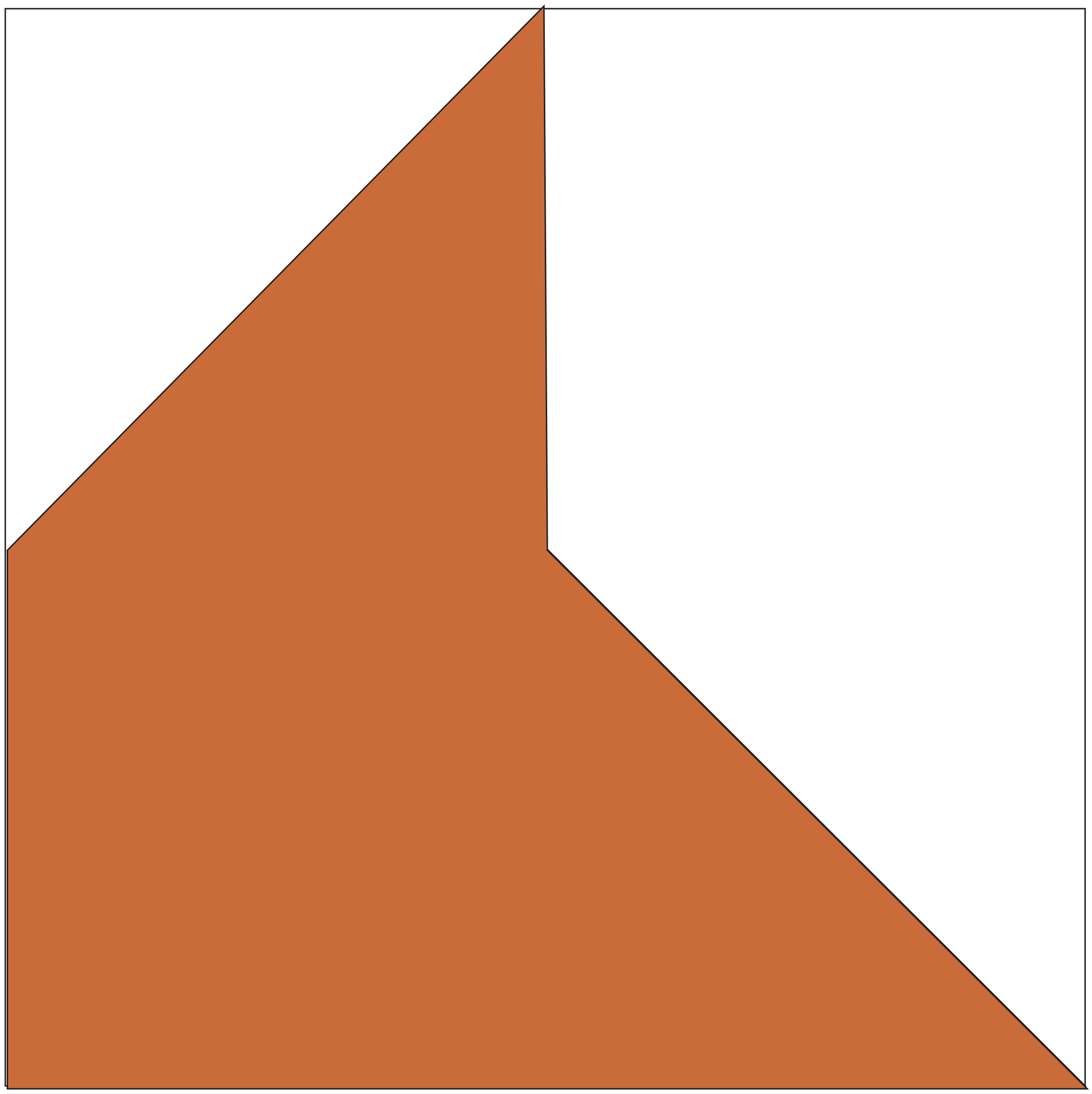


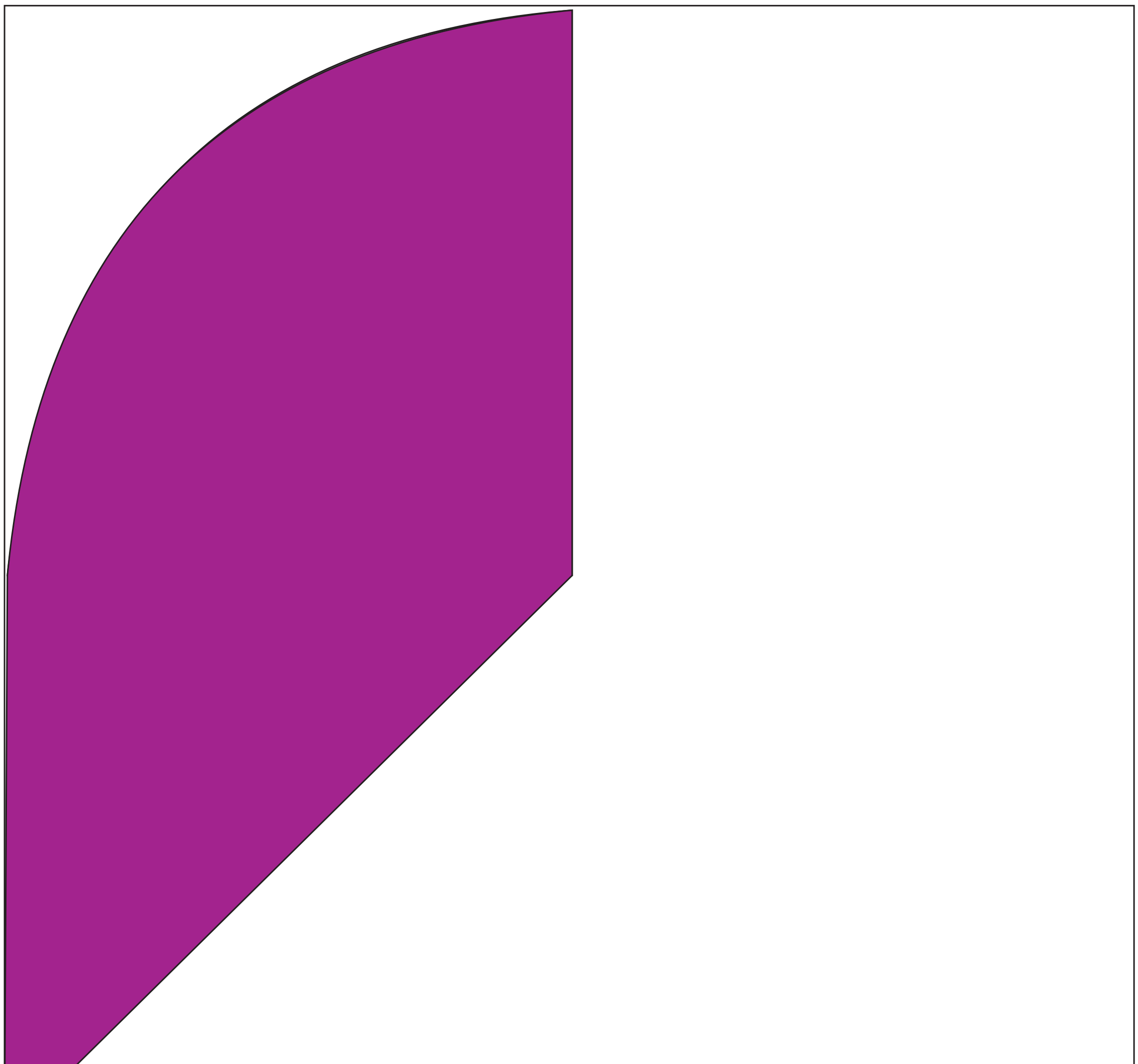


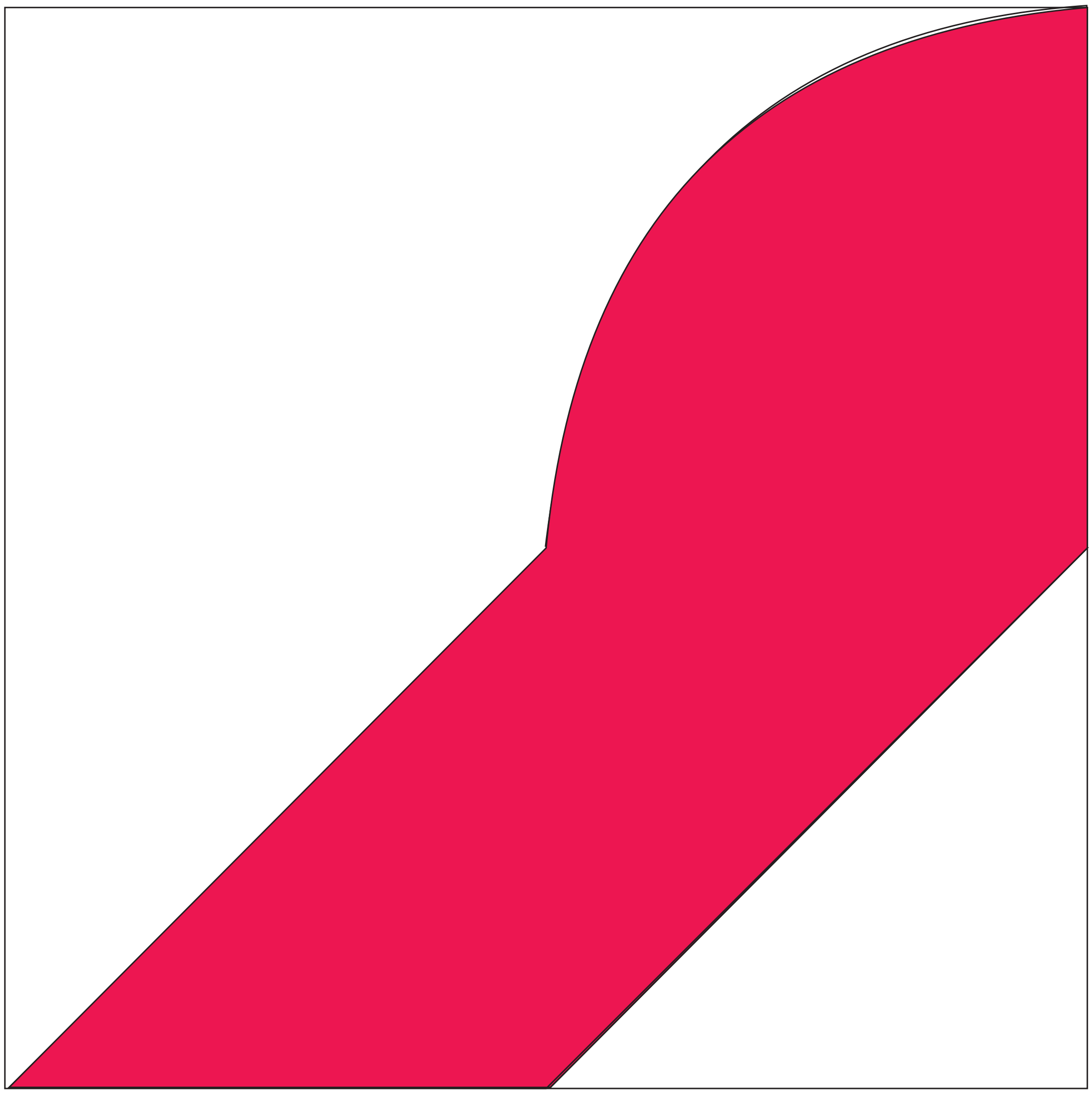


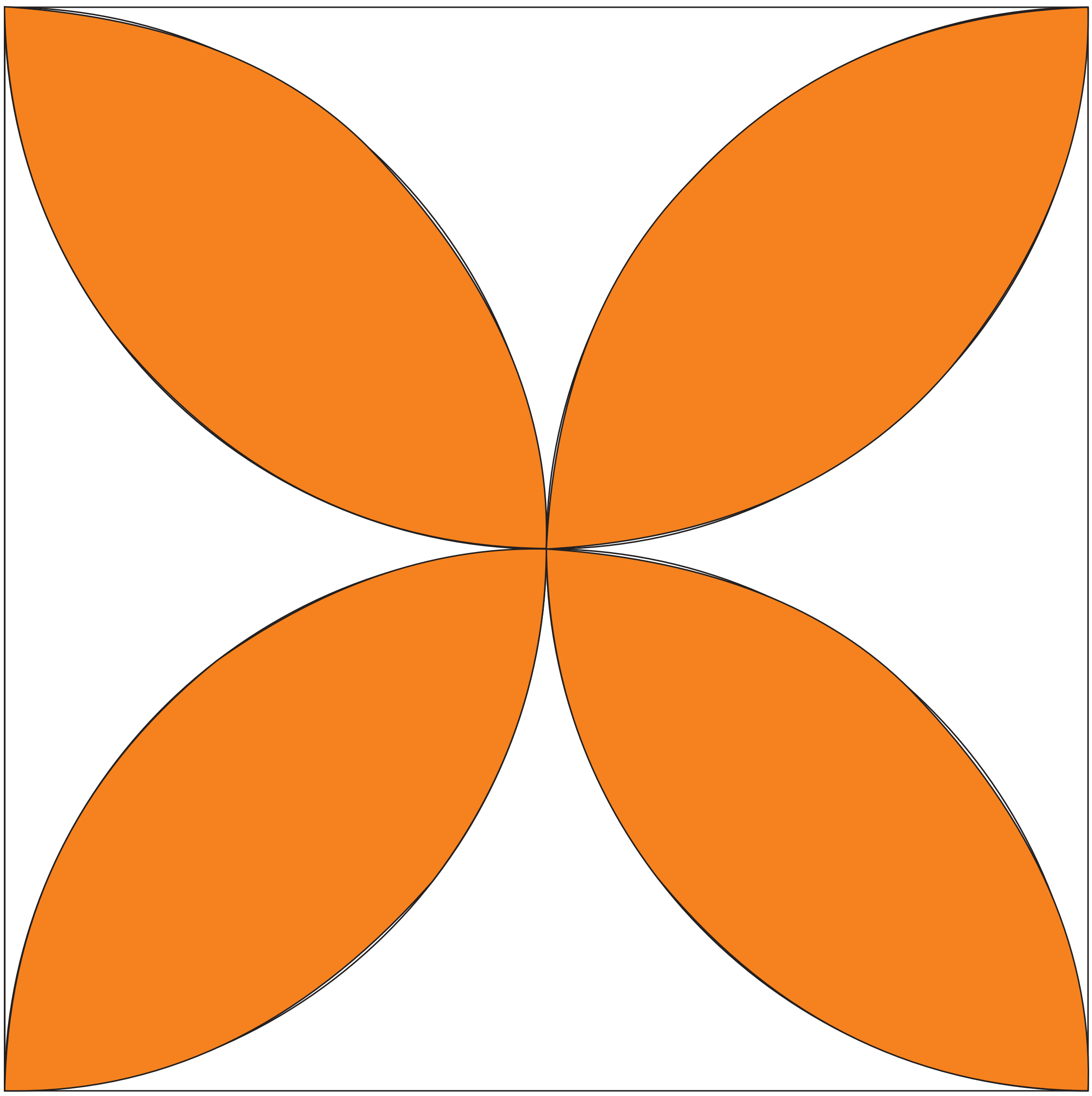


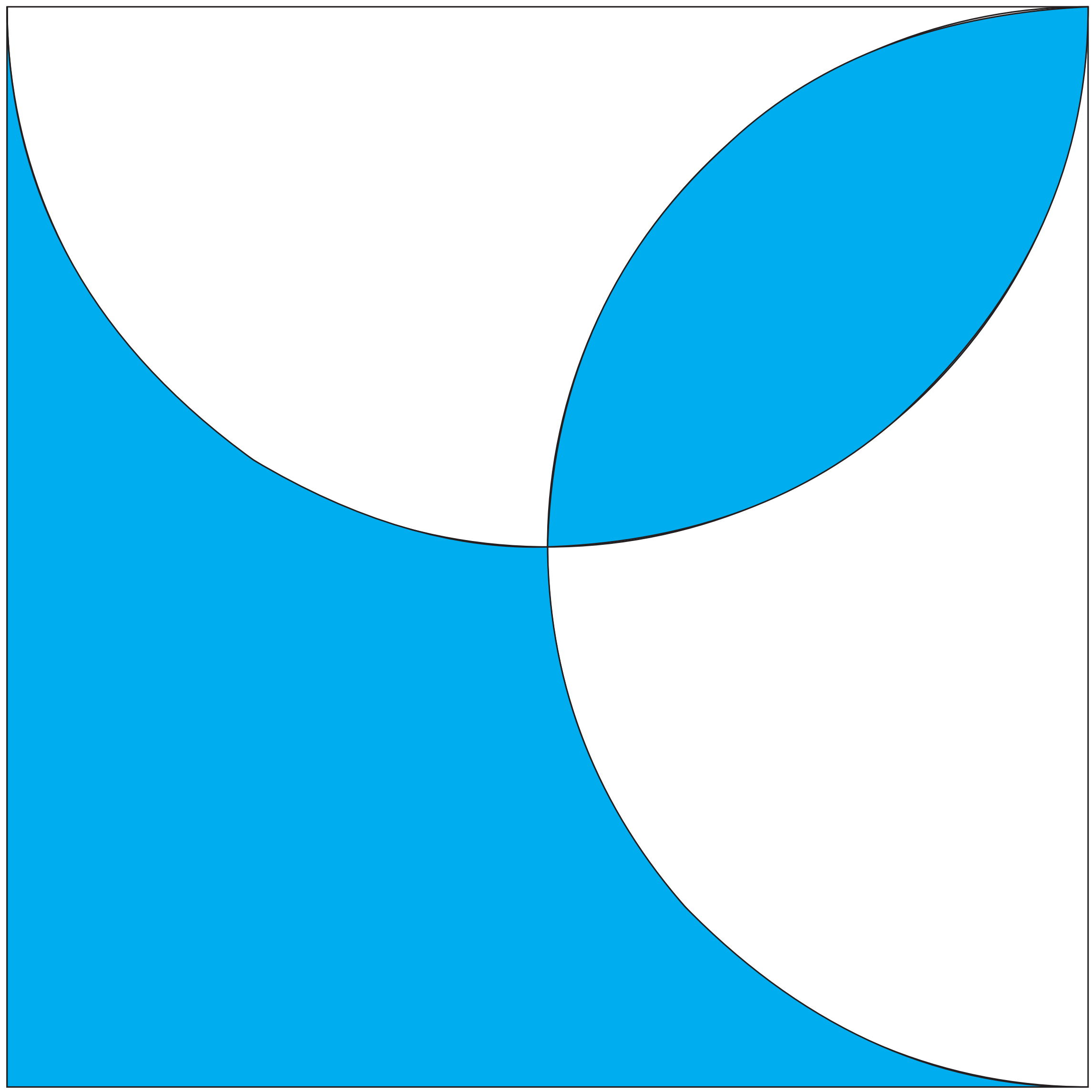
APÊNDICE B – Figuras-mãe para imprimir

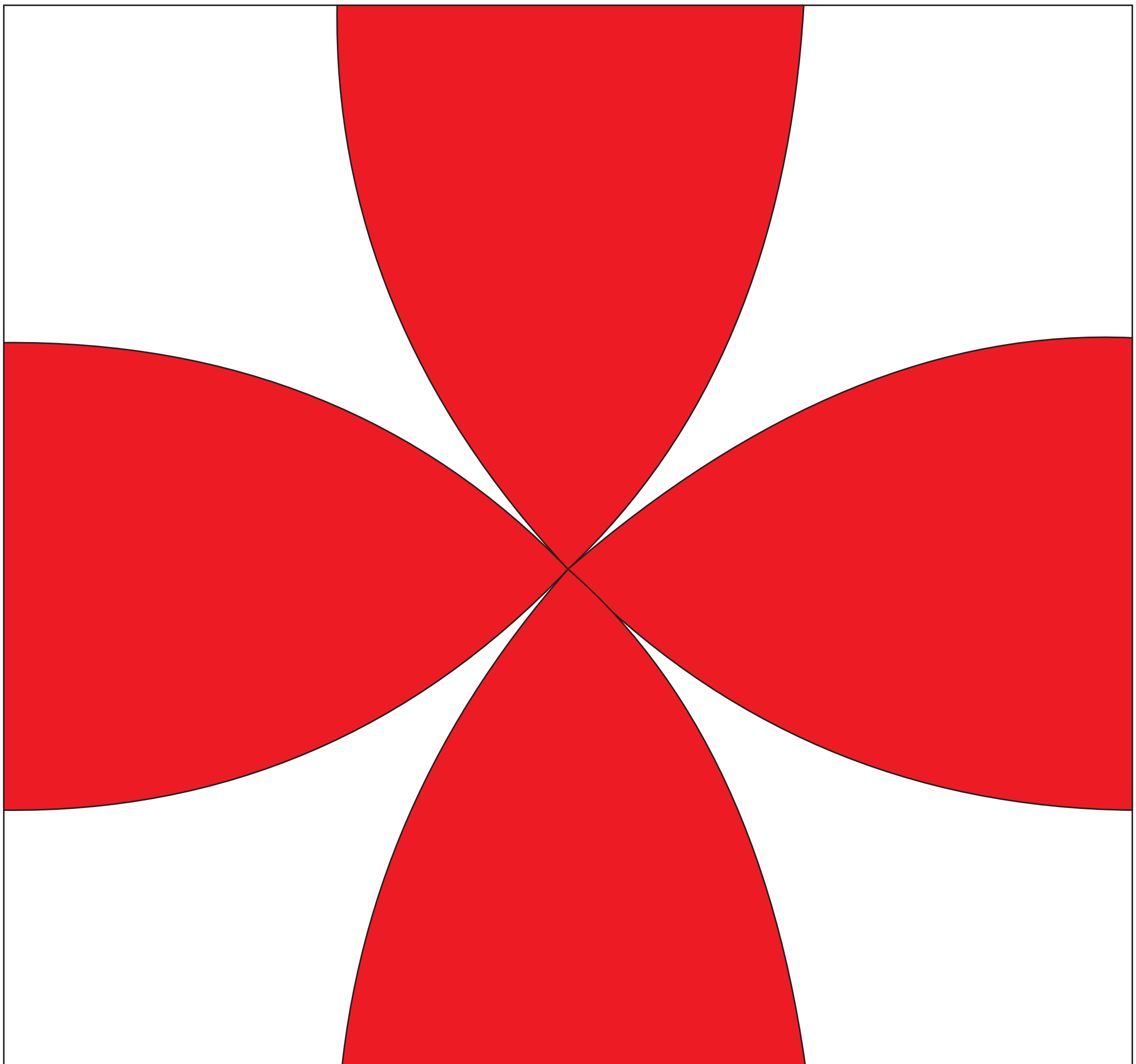












APÊNDICE C – Sugestão de exercícios antes da aplicação do jogo

ESCOLA:

DISCIPLINA: MATEMÁTICA ANO/TURMA: ____

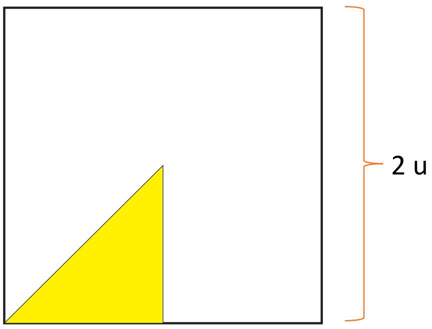
PROFESSOR(A):

ESTUDANTE:____

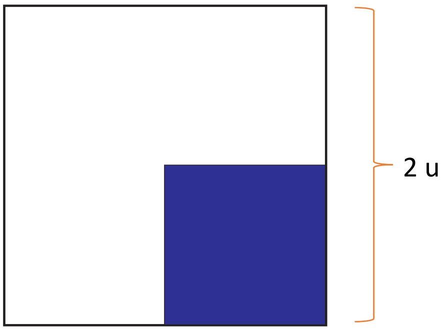
LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Calcule a área de cada figura colorida a seguir, considerando que o quadrado maior possui lados medindo 2 u:

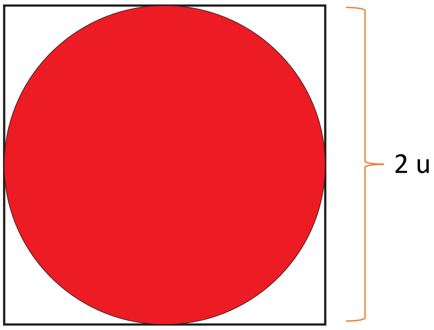
a)



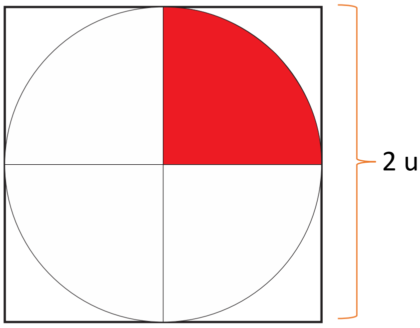
b)



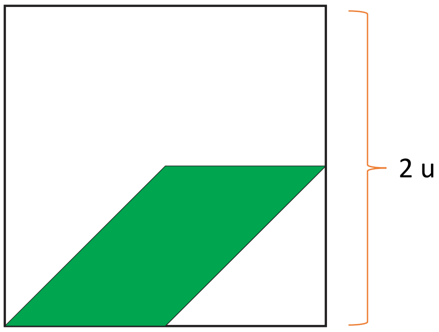
c)



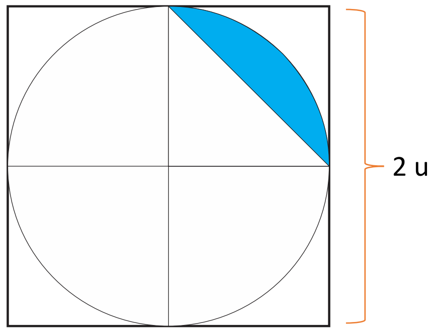
d)



e)



f)



Anexos

ANEXO A – Termos de Anuência

TERMO DE ANUÊNCIA INSTITUCIONAL

Eu, **Janaina de Moura Dantas, Gestora do INSTITUTO MUNICIPAL JOÃO CÂNDIDO FILHO,** autorizo o desenvolvimento da pesquisa intitulada: **Cálculo de Áreas de Figuras Planas Não Comuns: uma sugestão de jogos e materiais concretos,** nesta instituição que será realizada no período de 07/05/2025 a 09/05/2025 tendo como pesquisadores responsáveis o Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, professor da Universidade Federal de Campina Grande/PB e Francicarlos de Medeiros Santos, mestrando do curso de Mestrado Profissional de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande/PB.

Carnaúba dos Dantas/RN, 05 de Maio de 2025.

Janaina de Moura Dantas

Janaina de Moura Dantas

Assinatura

E.M.E.F MACÁRIO ZULMIRO DA SILVA

E.M.E.F MACÁRIO ZULMIRO DA S...
Dist. Santa Luzia do Seridó

TERMO DE ANUÊNCIA INSTITUCIONAL

Eu, **Ana Maria Oliveira de Melo, Gestora da E.M.E.F. MACÁRIO ZULMIRO DA SILVA,** autorizo o desenvolvimento da pesquisa intitulada: **Cálculo de Áreas de Figuras Planas Não Comuns: uma sugestão de jogos e materiais concretos,** nesta instituição que será realizada no período de 02/06/2025 a 06/06/2025 tendo como pesquisadores responsáveis o Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, professor da Universidade Federal de Campina Grande/PB e Francicarlos de Medeiros Santos, mestrando do curso de Mestrado Profissional de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande/PB.

Picuí/PB, 29 de Maio de 2025.

Ana Maria Oliveira de Melo
Administradora Escolar
Mat.: 0068205

Ana Maria Oliveira de Melo

Ana Maria Oliveira de Melo

Assinatura