UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Marcicleide Alves de Santana

Funções Afim e Quadrática: contribuições do PROFMAT e materiais complementares

Campina Grande - PB
Julho/2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Marcicleide Alves de Santana

Funções Afim e Quadrática: contribuições do PROFMAT e materiais complementares

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer
Coorientador: Drª. Deise Mara Barbosa de Almeida

Campina Grande - PB
Julho/2025

S232f Santana, Marcicleide Alves de.

Funções afim e quadrática: contribuições do PROFMAT e materiais complementares / Marcicleide Alves de Santana. – Campina Grande, 2025.

105 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025.

"Orientação: Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer, Profa. Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida".

Referências.

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Função Afim – Ensino. 3. Função Quadrática – Ensino. I. Nemer, Rodrigo Cohen Mota. II. Almeida, Deise Mara Barbosa de. III. Título.

UFCG/BC CDU 51(07)(043.3)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Marcicleide Alves de Santana

Funções Afim e Quadrática: contribuições do PROFMAT e materiais complementares

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 31 de julho de 2025:

Documento assinado digitalmente
gov.br RODRIGO COHEN MOTA NEMER
Data: 19/08/2025 10:38:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br JOSE EDIVAM BRAZ SANTANA
Data: 18/08/2025 09:52:38-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. José Edivam Braz Santana
Titular/IFPE

Documento assinado digitalmente
gov.br LEOMAQUES FRANCISCO SILVA BERNARDO
Data: 19/08/2025 09:30:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo
Titular/UFCG

Campina Grande - PB
Julho/2025

Dedico a minha amada Avó Francisca e meu amado Avô Bernardino (in memorian), porque sem seu amor, carinho e orações essa conquista não seria possível.

Agradecimentos

Agradeço ao Meu Divino Pai Eterno por me fazer sonhar e por dar as condições de realizar. Pois para Deus nada é impossível!

Agradeço a Minha Avó Francisca porque suas orações me protegeram e me fizeram ter êxito nessa jornada. Por ser minha inspiração, meu porto seguro e meu exemplo de vida.

Agradeço ao meu Avô Bernardino (in memorian), porque lá do céu torce por mim. Eu consigo imaginar como teria orgulho, mas não seria metade do orgulho que eu tenho de ser sua neta e também do homem íntegro e honesto que o senhor foi.

Agradeço a minha família pelas palavras de incentivo e confiança, quando estas se faziam extremamente necessárias. Serviram de combustível.

Agradeço ao meu amado esposo, por seu companheirismo, ombro amigo e apoio incondicional. Você me faz ser ainda mais forte. Te Amo.

Agradeço ao meu orientador Rodrigo Cohen, por me dar liberdade pra pensar e escrever, sendo extremamente atencioso e se fazendo presente durante todo o processo de orientação. Te admiro!

Agradeço a minha orientadora Deise Mara, por sua contribuição e orientações tão necessárias, por sua paciência e disposição em me ajudar. Admiração pela profissional que você é.

Agradeço aos meu amigos, em especial Ruth, Carolina, João e Anderson, por me aturarem, não se cansarem de minhas reclamações, me apoiarem e me incentivarem a continuar, certos da minha vitória.

Agradeço a Geovana e Ediclelton, ex-alunos que se tornaram amigos e que me inspiram até hoje a buscar o meu melhor na área profissional.

Agradeço a Tiago, Filipe, Adalberto e Fagner, por compartilhar comigo as alegrias e tristezas do PROFMAT durante nossas viagens.

Agradeço ao meu primo-irmão Ricardo por viajar por 8 horas comigo, só pra me ajudar a seguir em busca da realização do meu sonho.

Agradeço à Gestora da Escola de Referência em Ensino Médio Normal Estadual Professora Ione de Góes Barros, Edjane Gomes, por me apoiar e buscar sempre a melhor forma de me ajudar, para conseguir conciliar a carga horária de trabalho com o curso.

Agradeço a turma do 1º ano "B", de 2025, da EREM Normal Estadual Professora Ione de Góes Barros, por participarem de forma tão satisfatória das aplicações que se encontram analisadas nesta dissertação.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro, pois sem tal fomento, a jornada teria sido ainda mais difícil.

Agradeço ao corpo docente da UAMAT - UFCG, em especial aos professores do PROFMAT por compartilhar tanto conhecimento, grata por ter tido a oportunidade de conhecê-los.

Agradeço ao amigo e professor Leomaques por toda ajuda durante o Curso, por estar comigo nos piores e melhores momentos que o PROFMAT me proporcionou. Um ser humano sem comparação que entende de humanidade e empatia como nenhuma outra pessoa que eu já tenha conhecido.

"O Senhor cumprirá o seu propósito para comigo!
Teu amor, Senhor, permanece para sempre;
não abandones as obras das tuas mãos!"
(Bíblia Sagrada, Salmo 138, 8)

Resumo

Neste trabalho exploramos as funções afins e quadráticas, elementos fundamentais da matemática com vasta aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento. Apesar de ser vasto o número de trabalhos que abordam esses tipos de funções é possível observar a dificuldade de aprendizado e os desafios enfrentados pelos professores no ensino desses conceitos, fato justificado com base em dados de avaliações educacionais como ENEM e SAEB. Deste modo, surgiu como problema norteador: De que modo o resgate das contribuições do PROFMAT, a partir das suas dissertações e recursos educacionais sugeridos, pode potencializar o ensino de funções afins e quadráticas? Delimitamos então como objetivo principal potencializar o ensino de funções afins e quadráticas, a partir do resgate das contribuições do PROFMAT e da sugestão de materiais diversos. A proposta foi implementada na disciplina de Matemática em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio e promoveu um ambiente de aprendizagem efetiva. Esperamos que essa proposta possa consolidar o conhecimento teórico e prático sobre as funções afins e quadráticas, ressaltando sua importância no currículo da educação básica e suas conexões com o cotidiano.

Palavras-chave: Função Polinomial do Primeiro Grau. Função Polinomial do Segundo Grau. PROFMAT.

Abstract

This study aimed to explore first and second-degree polynomial functions, fundamental elements of mathematics with broad applicability across various fields of knowledge. Despite the extensive number of works addressing these types of functions, learning difficulties and challenges faced by teachers in teaching these concepts are observable, justified based on data from educational assessments such as ENEM and SAEB. Thus, the guiding research problem emerged: How can the retrieval of contributions from PROFMAT (Professional Master's Program in Mathematics Teaching), based on its dissertations and suggested educational products, enhance the teaching of first and second-degree functions? The main objective was defined as to potentiate the teaching of first and second-degree polynomial functions by retrieving PROFMAT's contributions and suggesting diverse materials. The proposed approach was implemented in a Mathematics class of the first year of high school and fostered an effective learning environment. It is expected that this proposal can consolidate the theoretical and practical knowledge about first and second-degree polynomial functions, emphasizing their importance in the basic education curriculum and their connections with daily life.

Keywords:First-Degree Polynomial Function. Second-Degree Polynomial Function. PROFMAT.

Lista de ilustrações

Sumário

Lista de quadros

1 Introdução

As funções polinomiais, elementos fundamentais da matemática, permeiam diversas áreas do conhecimento, desde a física e a engenharia até a economia e a ciência da computação. Dentre a vasta gama dessas funções, as afins e quadráticas, destacam-se por serem elementares e pela aplicabilidade em modelar fenômenos do mundo real. Como ressalta Stewart (2017, p.15), "as funções são os blocos de construção da matemática, essenciais para descrever e entender as relações entre quantidades variáveis".

A função afim, expressa genericamente por $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes reais e $a \neq 0$, representa uma relação linear entre duas variáveis, cujo gráfico é uma reta. Suas interpretações geométrica e algébrica a torna uma ferramenta poderosa para analisar situações que envolvem taxas de variação constantes, como o deslocamento uniforme ou o custo linear de produção.

Por sua vez, a função quadrática, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c constantes reais e $a \neq 0$, descreve relações não lineares, cujo gráfico é uma parábola. Essa função encontra aplicações em problemas que envolvem trajetórias de projéteis, otimização de áreas e modelagem de fenômenos com aceleração constante.

Apesar da aplicabilidade e relação com o cotidiano, a aprendizagem de funções polinomiais do 1º e 2º graus frequentemente apresenta desafios para os estudantes. Tais desafios podem surgir da abstração inerente ao conceito de função, da dificuldade em conectar a representação algébrica com a geométrica, e da memorização e aplicação correta das fórmulas para encontrar zeros da função, vértice e outros pontos relevantes. Considerando as funções afins, de acordo com a tese de Santana (2022, p.209), os estudantes manifestaram grandes dificuldades em lidar com o objeto matemático estudado, a função afim, sobretudo no que se refere aos tratamentos do registro algébrico, necessários para as conversões entre esse registro e o registro gráfico ou vice-versa. Isso evidencia que a transição da álgebra elementar para a linguagem funcional, com sua notação específica e a ideia de variáveis dependentes e independentes, pode gerar confusão, impactando a compreensão das propriedades e das aplicações dessa função em diferentes contextos, o que estende-se também à função quadrática.

Para os professores, o ensino de funções polinomiais do 1º e 2º graus frequentemente esbarra na dificuldade de superar a visão puramente mecânica da aplicação de fórmulas por parte dos alunos, buscando promover uma compreensão conceitual mais profunda. Os desafios enfrentados pelos professores, incluem engajar os estudantes na visualização da relação entre a expressão algébrica e o comportamento gráfico, transpor a barreira da memorização para a interpretação e aplicação em diferentes contextos, e muitas vezes, lidar com a defasagem em conhecimentos prévios de álgebra que são fundamentais para a assimilação dos novos conceitos. Encontrar metodologias que tornem o aprendizado significativo e que demonstrem a relevância prática dessas funções no cotidiano e em outras áreas do conhecimento também se configura como um obstáculo constante na prática docente. E, além disso, o pouco tempo disponível para estudo e planejamento, frente a uma carga horária de aulas excessiva e extenuante.

As funções polinomiais do 1° e 2° graus são temas recorrentes e fundamentais na prova de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e em alguns vestibulares. Essas avaliações priorizam a aplicação prática dos conceitos matemáticos, inserindo as funções em contextos do cotidiano. As questões frequentemente envolvem situações que requerem a interpretação de gráficos, análise de tabelas e resolução de problemas práticos. Embora não existam dados específicos sobre o desempenho dos alunos em questões de funções polinomiais, é possível inferir que muitos estudantes enfrentam dificuldades nesses tópicos. Isso se deve à necessidade de compreender conceitos algébricos e aplicar fórmulas corretamente, habilidades que nem todos dominam plenamente.

Em suma, a abordagem das funções polinomiais do 1° e 2° graus em dissertações é de extrema importância e relevância. Embora, deva se considerar que há um grande número de trabalhos voltados para tais conteúdos. Considerando o banco de dissertações do Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e colocando um filtro para a palavra “funções”, encontramos 479 trabalhos. Fazendo uma busca um pouco mais específica e procurando “função afim” e, posteriormente, “função quadrática”, encontramos respectivamente 38 e 33 registros. Das quais, uma ou outra, aborda de forma específica habilidades elencadas no currículo de Matemática.

Portanto, essa dissertação visa oferecer apoio ao planejamento do professor, através de sequências didáticas voltadas para o ensino de funções polinomiais do 1° e 2° graus. Contempladas em tais sequências as seis habilidades propostas pelo organizador curricular de Matemática de Pernambuco para o 2° trimestre do 1° do Ensino Médio. Algumas dessas habilidades são abordadas em dissertações diversas (considerando o universo PROFMAT) enquanto outras não foram encontradas abordagens relacionadas, havendo a necessidade da sugestão de materiais confeccionados e/ou adaptados que complementam as contribuições oferecidas pelo PROFMAT. Ao longo das sequências, são utilizadas metodologias diversas que visam contribuir para o desenvolvimento de habilidades matemáticas dos alunos que estão em preparação para o SAEB, ENEM e vestibulares diversos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Potencializar o ensino de funções polinomiais do 1° e 2° graus, a partir do resgate das contribuições do PROFMAT e da sugestão de materiais diversos.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Realizar um levantamento das dissertações do PROFMAT que abordam o ensino de funções polinomiais do 1° e 2° graus;

- Resgatar as contribuições do PROFMAT para o ensino de funções polinomiais do 1° e 2° graus para o primeiro ano do ensino médio, através das dissertações e recursos educacionais escolhidos;

- Oferecer materiais diversos como jogos, oficinas, aplicativos e softwares, alinhados com as propostas da BNCC e do Currículo de Pernambuco;

- Disponibilizar um acervo de sequências didáticas que contemplam as habilidades propostas pelo Organizador Curricular de Pernambuco para o 2° trimestre do primeiro ano do Ensino Médio;

- Aplicar as sequências didáticas em uma turma do 1° ano do Ensino Médio, durante as aulas de Matemática.

- Avaliar os resultados obtidos em termos de interesse e desempenho dos estudantes.

1.2 Organização

Com o intuito de alcançar os objetivos delineados na Seção 1.1, o presente trabalho estrutura-se em 7 capítulos. No Capítulo 1 exploramos a importância do ensino de funções polinomiais do 1° e 2° graus, de modo específico no 1° ano do Ensino Médio, enfatizando a necessidade do uso de diversas estratégias pedagógicas. Salientamos ainda, o quanto tais conteúdos são cobrados em vestibulares, ENEM, SAEB e outros tipos de avaliações externas o que justifica sua abordagem como tema deste trabalho. Pensando ainda na carga horária excessiva do professor, é de nosso interesse oferecer um material pautado na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) e que atende a habilidades propostas para o ano de ensino em questão. Isso permite que o professor encontre uma proposta de sequências didáticas que contempla um trimestre de aulas e que pode ser adaptado conforme a sua necessidade.

O segundo Capítulo contém uma breve abordagem conceitual e histórica sobre o currículo escolar no Brasil, desde o significado literal da palavra *currículo* até o modo como é entendido pelas instituições de ensino que é o campo de nosso estudo. Fazemos também um retrospecto desde sua inserção até os dias atuais, mostrando inclusive os períodos em que sofreu modificações afim de que atendesse às necessidades da época, acompanhando as transformações sofridas pela sociedade ao longo do tempo. Tratamos ainda, neste capítulo, do currículo de Matemática, documento que justifica a escolha dos temas tratados nesta dissertação e que é estruturado em consonância com a BNCC.

No Capítulo 3, apresentamos duas das seis habilidades propostas pelo currículo de matemática de Pernambuco para o 2° trimestre do 1° ano do Ensino Médio. Tais habilidades tratam das relações e representações das funções polinomiais do 1° e 2° graus. Abordamos então as suas relações com diversas situações do cotidiano e com outras áreas de ensino como Física e Engenharia. Contemplando ainda ao que é proposto nas habilidades, são apresentadas definições formais e são exploradas as diversas formas de representação, como algébrica, gráfica, tabelas, diagramas, entre outros. A última seção traz algumas dissertações que abordam de alguma maneira as habilidades tratadas neste capítulo, bem como recursos educacionais que podem ser explorados e a sugestão de materiais diversos encontrados em artigos e/ou ainda apresentados em formações oferecidas aos professores de Matemática do estado de Pernambuco.

No Capítulo 4, exploramos a proporcionalidade relacionada às funções polinomiais do 1° e 2° graus. Resgatamos a proporcionalidade que pode ser empregada usando modelos matemáticos das funções citadas. Esclarecemos a diferença entre função linear e proporcionalidade, tratando-as como assuntos distintos, mas com a mesma ideia matemática. Trazemos ainda as demonstrações e definições minimamente necessárias e inerentes ao tema. Em seguida temos o Capítulo 5, onde tratamos sobre sequências numéricas, domínio de validade, imagem, crescimento e decrescimento. Apresentamos definições precisas e com linguagem adequada para o Ensino Médio. Oferecemos exemplos que caracterizam cada tópico abordado.

Já o Capítulo 6 é composto pelo relato de aplicação da sequência didática elaborada de modo a contemplar as habilidades que são tratadas no Capítulo 3. Também analisamos o desempenho dos alunos e o impacto da sequência didática no processo de ensino-aprendizagem das funções polinomiais do primeiro e segundo graus. Discutimos os desafios encontrados e as potencialidades dos materiais utilizados, com base nos resultados obtidos e na observação feita durante as aplicações.

Por fim, no Capítulo 7, consolidamos os principais resultados e conclusões desse trabalho, refletindo sobre os desafios encontrados ao longo da pesquisa e as diversas contribuições que o recurso educacional poderá oferecer para estudantes e professores. A partir disso, delineamos direções para futuras investigações sem deixar de reconhecer também as limitações inerentes ao nosso estudo.

2 Uma Abordagem Conceitual e Histórica Sobre o Currículo Escolar no Brasil

A organização curricular é de suma importância para o bom desenvolvimento de uma educação de qualidade, permitindo às escolas públicas, em particular, um alinhamento que influencia de forma direta nos processos de ensino-aprendizagem. Desse modo, faz-se pertinente universalizar a linguagem de construção do currículo em nível de país, mas permitindo a flexibilização para que estados e municípios possam adequá-lo de acordo com suas necessidades, como propõe a BNCC. Inicialmente, no entanto, é oportuno difundir um pouco mais o entendimento sobre o conceito de currículo e a real importância que tem. Nesse sentido, é interessante que nos inteiremos um pouco sobre o seu processo de inserção ao longo dos anos.

2.1 Currículo – Conceitos e Ideologias

A palavra *currículo* pode ser conceituada de várias maneiras, dando margem a diferentes interpretações. No entanto, seus diversos significados estão comumente ligados à ideia de conteúdos e metodologias aplicados nas instituições de ensino. Segundo o Dicionário *Oxford Languages*, *currículo* é definido como programação total ou parcial de um curso ou matéria a ser examinada ou, ainda, o ato de correr, corrida, curso. Isso, por si só, nos traz a ideia de continuidade, sequência e também um percurso a ser realizado. No contexto educacional, essa ideia tem sofrido variações ao longo do tempo, na tentativa de atender as necessidades do momento social e cultural ao qual está inserido. Desse modo, faz-se necessário compreendermos a evolução do pensamento pedagógico e a influência exercida pelo *currículo* na ação docente. Sendo assim, para Silva (1999, p.60):

> O currículo é um dos locais privilegiados onde se entrecruzam saber e poder, representação e domínio, discurso e regulação. É também no currículo que se condensam relações de poder que são cruciais para o processo de formação de subjetividades sociais. Em suma, currículo, poder e identidades sociais estão mutuamente implicados. O currículo corporifica relações sociais.

Podemos, então, inferir que o currículo é um campo permeado de ideologia, cultura e relações de poder. Por ideologia, segundo Moreira e Silva (1997, p.23) pode-se afirmar que “é a veiculação de ideias que transmitem uma visão do mundo social vinculada aos interesses dos grupos situados em uma posição de vantagem na organização social.”. Ou seja, é uma das maneiras pelas quais a linguagem é capaz de construir o mundo social, devendo, então, o aspecto ideológico ser considerado nas discussões sobre currículo. Sobretudo, é necessário entender a escola como instituição concebida em sociedade e, sendo assim, sua organização está intrinsecamente relacionada com aspectos culturais, políticos e econômicos. É importante considerarmos que o currículo é um disseminador de significados sociais e culturais, tornando-se um instrumento de grande alcance e poder. E, ainda mais, quando grupos dominantes são responsáveis pela sua estruturação e inserção no campo educacional, o que caracteriza e justifica uma relação de poder.

O papel dos professores, por sua vez, além de colaborar na elaboração dos currículos, é de garantir que estes se "materializem" nas salas de aula, com vistas à garantia do desenvolvimento das competências e habilidades previstas para cada ano escolar. Assim, entende-se que o currículo é um processo de construção conjunta, a partir da identidade dos sujeitos inseridos no sistema educacional, cada um com seus conhecimentos e saberes. Silva (2005, p.5-14) alerta para o cuidado que é necessário ter com as teorias que são consideradas para construção do currículo, sobretudo pelas autoridades envolvidas no processo. O autor ainda chama a atenção para o fato de que, para um currículo carregar a identidade do grupo de sujeitos, sua construção deve ser pautada nas seguintes perguntas: "O que eles ou elas devem saber? Qual conhecimento ou saber é considerado importante, válido, essencial para ser inserido no currículo?." Nesse sentido, tomando consciência da grandeza do currículo e entendendo que o espaço escolar é capaz de produzir conhecimentos, entende-se também o papel da escola e dos educadores na construção e mediação do currículo. É de fundamental importância fazer com que esse currículo, dialogue com os diversos tipos de cidadãos e conhecimentos envolvidos. Dessa maneira, há a possibilidade de ultrapassar as fronteiras impostas pelos grupos dominantes, romper o ciclo de subjugação e ser instrumento de autonomia.

2.2 Trajeto Histórico da Implantação Curricular

Para compreender um pouco mais o significado de currículo no processo histórico e educacional, é necessário conhecer as transformações que aconteceram ao longo do tempo, desde sua implantação. Neste viés, é acertado buscar sua história no intuito de levantar reflexões que nos permitam entender a realidade escolar atual.

Como dito anteriormente, o currículo está intimamente ligado com a cultura e relações de poder. Para caracterizar tal fato, analisemos inicialmente o período entre os séculos XVI e XVII, no qual a escolarização passa a ser uma forma de controle social, de tal modo que permitisse administrar o mercado não qualificado que havia se desenvolvido fora dos feudos medievais. Vale ressaltar que não se tinha então a forma de currículo que é possível observar no momento atual, mas tal instrumento já apresentava uma forma de organizar os estudos escolares, de modo a atender às necessidades da época. O capitalismo atrelado aos "programas de estudo", se pudermos assim chamar, se disseminou de tal forma que influenciou no surgimento de teóricos de educações nacionais, que para atender a essa nova demanda que surgia, trazida pelo capitalismo em ascensão, começaram a fazer questionamentos tais como: O que ensinar? Como ensinar?

Hamilton (1989, p.19) cita um discípulo de Comênio – John Dury - que fez uma conexão direta entre escolarização, regulação social e o mercado de trabalho em *A supplement to the reformed-school (1650):*

> Numa comunidade, bem reformada(...), todos os sujeitos deveriam daqui por diante, em sua juventude, ser treinados em escolas adequadas para sua capacidade, e para essas escolas, alguns supervisores deveriam ser nomeados para vigiar o curso de sua educação, para assegurar-se que ninguém fosse privado do beneficio de uma educação virtuosa, de acordo com os diversos tipos de emprego, para os quais eles se mostraram mais adequados e inclinados. (VICENT, 1950, p.33).

Nesse contexto é possível observar que a preocupação dos teóricos girava em torno de oferecer uma educação que preparasse sujeitos para o mercado de trabalho, recebendo na escola uma espécie de "treinamento" que estivesse de acordo com suas capacidades. A partir daí, ocorre o surgimento das chamadas "escolas de caridade", ainda no século XVII, direcionadas a filhos de pobres e financiadas pelos ricos. Tais escolas se disseminaram e no século XVIII poderiam ser encontradas em muitos países europeus como França, Holanda e Inglaterra. Pautadas em um referencial capitalista, segundo Hamilton (1989, p.19),

> esses sistemas tinham a importante função social de regular o acesso aos mercados de trabalho adulto", e ao mesmo tempo "dentro de processos de regulação pedagógica e estrutural, esses sistemas ajudavam a manter, e mesmo criar, configurações específicas do mercado de trabalho.

No século XIX, os olhares se voltaram para os Estados Unidos da América e seu desenvolvimento industrial, e então levantou-se o seguinte questionamento: O que as escolas estão ensinando de modo que possam ajudar na resolução de problemas cotidianos, tais como a preparação do indivíduo para essa nova demanda? Agora, deixa-se de pensar no coletivo e pensa-se na formação individual. Além disso, em 1920, o movimento Escola Nova do Brasil vem corroborar com a ideia de currículo enquanto instrumento que apresenta o que ensinar, e essa concepção ganha força de maneira que alguns autores afirmam que a partir daí começam os estudos sobre currículo de modo formal.

Ainda nesse contexto, ocorreram dois movimentos nos EUA, o eficientismo social e o progressivismo, sendo o último trazido também para o Brasil pela Escola Nova. Surge então a dúvida sobre a eficiência da escola, e a escola e o currículo passam a serem vistos como instrumentos de controle social. No progressivismo, "a educação se caracteriza como um meio de diminuir as desigualdades sociais geradas pela sociedade urbana industrial e tem por objetivo a construção de uma sociedade harmônica e democrática." (LOPES; MACEDO, 2011, p.23). Nesse ponto de vista, a educação tinha por objetivo levar o jovem a buscar mudança, sair do conformismo e lutar por igualdade social.

Nas últimas décadas do século XX, essa visão de escola e currículo mostrou-se bastante ineficiente, e algumas inovações passaram a ser implantadas. A efetivação da escola obrigatória, o estabelecimento da escola secundária integrada e a criação de formas pedagógicas diferenciadas que priorizavam as diferenças individuais, foram algumas das ações inseridas. Dessa forma, muda-se o que deveria ser ensinado nas escolas (currículo), dando enfoque não mais à transmissão de habilidades ocupacionais, mas ganhando um papel intervencionista, na tentativa de moldar o mercado de trabalho.

Tomas Tadeu da Silva na apresentação da obra de Goodson (2008, p.7), esclarece que "é natural que uma história do currículo nos ajude a ver o conhecimento corporificado no currículo não como algo fixo, mas como um artefato social e histórico, sujeito a mudanças e flutuações", mas não necessariamente considerando-o volúvel. Nesse sentido, é interessante

> (...) não ver o currículo como o resultado de um processo social necessário de transmissão de valores, conhecimentos e habilidades, em torno dos quais haja um acordo geral, mas como um processo constituído de conflitos e lutas entre diferentes tradições e diferentes concepções sociais. Esse processo é tão importante quanto o resultado. (ibid, p.8).

Sendo assim, analisar o trajeto histórico do currículo nos permite entender melhor de que forma foi moldado até chegar ao que temos hoje. Na atualidade, pode-se falar que há uma tradição crítica do currículo que é embasada por questões políticas, sociais e epistemológicas, o que reafirma o currículo como construção cultural social. Dessa forma,

> Atualmente, se concebe currículo como construtor de identidades na medida em que junto com o conteúdo das disciplinas escolares, com o conhecimento e os saberes que a ele se vincula, se adquire valores, crenças, percepções que orientam o comportamento e estruturam personalidades. (ibid, p. 16).

Com isso, vale ressaltar a importância do papel do professor e o protagonismo da escola no processo de construção do currículo, caracterizando a sua dimensão multicultural e colocando-o como centro do processo educacional. Há de se considerar que o espaço escolar é onde o currículo acontece, lugar no qual teoria e prática se cruzam através de um trabalho coletivo.

2.3 BNCC e a Área de Matemática e Suas Tecnologias

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que regulamenta as competências a serem desenvolvidas na Educação Básica. Por essa razão, tem caráter normativo e define as aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver durante seu trajeto escolar, levando em consideração todas as etapas de ensino e modalidades da Educação Básica.

Considerando a área de Matemática e suas Tecnologias, especificamente para a etapa do Ensino Médio, a BNCC, propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, sugere que os conteúdos de matemática sejam trabalhados de forma ainda mais inter-relacionada com o cotidiano dos alunos, na tentativa de ampliar a aplicação da Matemática à sua realidade.

No Ensino Fundamental, a BNCC organiza os objetos de conhecimento e as habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes dessa etapa de ensino em cinco Unidades Temáticas, que são: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Como no Ensino Médio o foco é aproximar a Matemática da realidade do aluno, espera-se que desde o Ensino Fundamental sejam apresentadas as tecnologias digitais e que no Ensino Médio haja desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior.

Sobre as tecnologias no ensino da Matemática, para Campos et al. (2013, p.163), "a tecnologia é essencial no processo de visualização, e ela, por sua vez, ocupa um papel pedagógico fundamental na compreensão de conteúdos matemáticos.". Ou seja, o uso de softwares, aplicativos e jogos educativos, permite ao aluno visualizar conceitos matemáticos que não são facilmente aprendidos apenas com exposição dialógica ou alguns tipos de materiais concretos. Caracterizando-se assim, uma ferramenta útil na associação do conteúdo ao cotidiano do aluno e uma grande aliada do professor de Matemática.

Diante das considerações levantadas, a área de Matemática e suas tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo potencial e conhecimento adquirido no Ensino Fundamental. A partir deles, é possível levar o aluno a aprofundar seus conhecimentos, inclusive, desenvolvendo a capacidade de raciocinar, ampliando o *letramento matemático*[1] iniciado anteriormente.

[1] Letramento matemático é a capacidade de um indivíduo entender e usar a matemática em diversas situações da vida, indo além do simples conhecimento de fórmulas e cálculos. Envolve raciocinar matematicamente, aplicar conceitos e procedimentos matemáticos para resolver problemas do cotidiano e interpretar o mundo ao seu redor.

2.4 Um Olhar Sobre o Currículo de Matemática

Através do currículo de Matemática justifica-se a escolha dos conteúdos que serão tratados neste trabalho para que consigamos, com um olhar mais crítico, direcionar nosso estudo para essa área específica. O currículo de Matemática é estruturado em consonância com a BNCC, documento que normatiza a construção dos currículos brasileiros. Pensar no Currículo de Matemática do Ensino Médio, caracterizado como etapa final da educação básica, é no mínimo complexo. Isso porque essa etapa de ensino não tem uma identidade definida. Ao longo dos anos, as discussões sobre o Ensino Médio, giram em torno de duas vertentes acerca da finalidade de sua formação. Uma das vertentes tem caráter propedêutico, ou seja, visa desenvolver as habilidades necessárias para que o aluno ingresse em um curso superior e continue os estudos; e a outra tem caráter profissionalizante, com o intuito de formar o aluno para o mercado de trabalho. Atualmente, a legislação vigente enquadra o Ensino Médio como etapa final da educação básica, e deixa explícito que todos os cidadãos devem concluí-lo independentemente de continuarem os estudos, ingressando em um Ensino Superior ou partindo para a carreira trabalhista. Sobre isso a Constituição Federal brasileira Brasil (1988) em seu artigo 205, estabelece que:

> [...] a educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

A Constituição não vê a educação apenas como um serviço, mas como um projeto nacional e coletivo, com o propósito de formar indivíduos completos, engajados socialmente e capazes de prover seu sustento. Assim, o currículo é a ferramenta concreta que o Estado e a sociedade utilizam para garantir que a educação cumpra sua função democrática e humanista de formar cidadãos plenos, críticos e preparados para a vida.

O currículo sofre mudanças ao longo do tempo na tentativa de responder questionamentos e atender às novas demandas que surgem com o desenvolvimento da sociedade. Com o currículo de Matemática não é diferente. Desde a década de 1950 o currículo de Matemática é pauta das discussões dos pesquisadores; foi nessa época também que surgiu o Movimento da Matemática Moderna, que tinha como objetivo aproximar a Matemática vista em sala de aula à matemática necessária para lidar com o desenvolvimento econômico que estava em alta nesse período. Para Pires (2008) o Movimento surgiu para substituir a "antiga Matemática", fazendo uso principalmente de livros didáticos. A autora destaca ainda que não houve uma preparação prévia dos educadores para essa mudança e que a organização curricular linear oferecida pelo Movimento passou a incomodar pesquisadores que buscavam um currículo mais amplo socialmente e culturalmente.

Na década de 80, após anos de desconforto com a então organização curricular de Matemática, o Movimento da Matemática Moderna entra em declínio e as Secretarias Municipais e Estaduais de Educação começam a oferecer momentos de discussões. É iniciado, um novo período democrático no Brasil que acabou influenciando uma nova reforma curricular com implementação de propostas para o 1º e 2º graus de ensino.

> Nessa proposta foi conferida à Matemática uma dupla função no currículo, defendendo-se que “ela é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade, como as que lidam com grandezas, contagens, medidas, técnicas de cálculo” e que “ela desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, transcender o que é imediatamente sensível”. Uma das preocupações explicitadas era a de apresentar o conteúdo, em diferentes níveis de abordagem, em que se procura respeitar a integração dos temas a serem trabalhados, bem como seu desenvolvimento “em espiral”, conforme preconiza Jerome Bruner. (PIRES, 2000, p. 50-51)

Portanto, a então proposta de currículo para o Ensino de Matemática enfatizava a relação entre a Matemática e o meio no qual o aluno estava inserido, tendo como foco a interdisciplinaridade e a superação da fragmentação de conhecimento. A reflexão contínua sobre o currículo levou à criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental no ano de 1995, pelo Ministério da Educação. Um dos marcos da criação desse documento foi a participação de educadores de diferentes etapas de Ensino, que a partir de discussões indicaram Diretrizes Curriculares para o Ensino Fundamental de todo Brasil. Pires (2008, p.26) enfatiza que os PCN

> [...] explicitaram o papel da Matemática pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

Os PCN indicaram a metodologia da resolução de problemas e ressaltaram a importância do trabalho entre os blocos de conteúdos e as demais áreas de conhecimento, trabalhando não apenas os aspectos conceituais, mas também atitudinais e procedimentais.

Um pouco depois, em 2015, a BNCC começa a ser elaborada e diferentemente dos PCN que propõem blocos de conteúdos considerando ciclos, sugere que a organização seja feita considerando cada ano da etapa escolar. Isso faz com que haja uma enumeração de conteúdos a serem abordados e, consequentemente, apreendidos pelos alunos.

2.4.1 O Currículo de Matemática em Espiral

O currículo em espiral é uma abordagem teórica que propõe a retomada de um mesmo conteúdo ao longo dos anos de ensino, sempre considerando o conhecimento prévio do aluno acerca do tópico e aumentando o nível de complexidade e aprofundamento a cada vez que é visto. Tal abordagem tem característica construtivista. Para Fossile (2010, p.105), a teoria do Construtivismo prega que o conhecimento é resultado da construção pessoal do aluno; o professor é um importante mediador do processo ensino-aprendizagem, mas a aprendizagem não pode ser entendida como resultado do desenvolvimento do aluno, e sim como o próprio desenvolvimento do aluno.

Partindo desse pressuposto, a aprendizagem em espiral considera o aluno como centro do processo de ensino-aprendizagem, acreditando que deixar o aluno ter contato com o objeto de conhecimento, respeitando o seu nível de maturidade cognitiva, permitirá uma maior apreensão do conteúdo trabalhado. Mais do que fazer uma "revisão", a ideia é trabalhar com o que o aluno já sabe, considerar os seus conhecimentos prévios para produzir conhecimentos novos.

O currículo em espiral é baseado na Teoria Cognitiva Avançada de Jerome Bruner que escreveu: "Começamos com a hipótese de que qualquer assunto pode ser ensinado de alguma forma intelectualmente honesta para qualquer criança em qualquer estágio de desenvolvimento." (BRUNER, 1976, p.33). Ou seja, não há um assunto com um grau de complexidade tão elevado, que sendo feito uso de um material adequado e considerando a sua maturidade cognitiva, o aluno não possa aprender.

Bruner (1976, p.64) defendia uma aprendizagem através da investigação e, que o processo de ensino de qualquer assunto deveria ter como objetivo a compreensão intuitiva do aluno atrelado com as suas ideias básicas. Pregava ainda que o currículo deveria revisitar os conceitos aprendidos anteriormente, expandindo-os, de modo que o aluno pudesse formular uma ideia mais completa do objeto de conhecimento e pudesse relacioná-la com conhecimentos pré-existentes. Temos então a caracterização do que foi chamado de currículo em espiral ou aprendizagem espiralada.

2.4.2 O Currículo de Matemática de Pernambuco

Em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), que sugere que as atividades de matemática sejam organizadas considerando a interação entre o homem e o mundo físico, social e cultural de modo a oportunizar a compreensão das evoluções científicas e tecnológicas, o currículo de Matemática de Pernambuco vem com objetivos traçados para atender tais exigências.

Especificamente para o Ensino Médio, no que diz respeito à estruturação da apresentação da Matemática no currículo escolar e sob a ótica da BNCC, o estado de Pernambuco traz algumas mudanças tais como: Os Eixos Temáticos passam a ser chamados de Unidades Temáticas, os Conteúdos de Objetos de Conhecimento e os Objetivos passam a ser denominados Habilidades.

Algumas metodologias de Ensino de Matemática que são enfatizadas para desenvolver as habilidades propostas, e consequentemente, as competências necessárias são: Resolução de Problemas, Investigação, Modelagem Matemática e o Desenvolvimento de Projetos. Esse último é colocado em foco pelo Novo Ensino Médio, modelo de ensino implantado em 2020 e reformulado em 2025, não apenas para a disciplina de Matemática, mas para as disciplinas obrigatórias como um todo. Neste contexto, Mendes (2005, p.18) sintetiza que:

> [...] a etnomatemática, a modelagem e a história da Matemática, aliada ao caráter investigatório presente nos projetos, poderão se manifestar como estratégias produtivas de se fazer Matemática, sob uma perspectiva sociocultural e construtiva, na qual o processo de criação matemática evidencia a elaboração de modelos matemáticos em ação, que conduzem professor e alunos à formação de novas concepções acerca do que seja a Matemática.

Entretanto, as metodologias citadas não esgotam todas as possibilidades do fazer matemático, tendo o professor de Matemática a autonomia de escolher aquela que melhor lhe provir, considerando as necessidades da sua realidade.

Considerando o Novo Ensino Médio para a construção do currículo de Matemática de Pernambuco, houve a contribuição de todos os professores do estado, que julgaram as habilidades gerais elencadas pela BNCC como necessárias para o desenvolvimento das competências matemáticas. As Unidades Curriculares continuaram organizadas de modo a retomar, ampliar e aprofundar os conteúdos vistos no Ensino Fundamental, mantendo de certa forma o modelo de currículo espiralado. Porém, os conteúdos do Ensino Médio sofreram uma mudança no que diz respeito à distribuição de conteúdos. No organizador curricular proposto para os anos de 2023 e 2024, por exemplo, era possível observar que funções (afim e quadrática) eram distribuídas ao longo dos três bimestres do primeiro ano. Com o novo organizador curricular proposto para o ano de 2025, agora organizado em trimestres, os conteúdos relacionados às funções (afim e quadrática) são propostos apenas no primeiro ano e mais especificamente no segundo trimestre do ano letivo.

Abaixo, seguem as Figuras 1, 2 e 3, que tratam do organizador curricular proposto para os anos de 2023 e 2024, no qual é possível observar sua proposta de conteúdos em espiral e organizado em bimestres,

Figura 1 – 1º Bimestre do 1º ano - Organizador Curricular de Pernambuco (2023-2024)

MATEMÁTICA		
1º ANO		
1º BIMESTRE		
HABILIDADES DE ÁREA DA BNCC	HABILIDADES ESPECÍFICAS DOS COMPONENTES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumento	(EM13MAT104PE07) Compreender e aplicar o conceito de taxa e de índice, investigando, analisando criticamente e produzindo argumentos no contexto socioeconômico.	Conceitos de Taxa e Índice: compreensão e aplicação.
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(EM13MAT301PE17) Resolver e elaborar situações-problema do cotidiano, envolvendo a matemática e/ou outros domínios do conhecimento em torno das equações lineares simultâneas, por exemplo, sistemas de equações do 1º grau, utilizando técnicas algébricas (substituição, escalonamento etc.) e gráficas, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Equações lineares e Sistemas de equações do 1º grau
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação é utilizar uma reta para descrever a relação observada.	(EM13MAT510PE49) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas de acordo com a lei de formação que determina o comportamento das variáveis, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levando em conta a variação e utilização de uma reta para descrever a relação observada.	Variáveis numéricas e conjunto de dados numéricos.

Fonte: Currículo de Matemática para o Ensino Médio - Pernambuco (2023-2024)

Figura 2 – 2º Bimestre do 1º ano - Organizador Curricular de Pernambuco (2023 - 2024)

MATEMÁTICA		
1º ANO		
2º BIMESTRE		
HABILIDADES DE ÁREA DA BNCC	HABILIDADES ESPECÍFICAS DOS COMPONENTES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(EM13MAT302PE18) Construir modelos matemáticos para resolver situações-problema em vários contextos, envolvendo funções polinomiais do 1º e 2º graus, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Funções Polinomiais do 1º e 2º Graus
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.	(EM13MAT401PE33) Converter representações algébricas de funções polinomiais do 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos em que as funções tenham um comportamento proporcional, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Funções Polinomiais do 1º grau: proporcionalidade
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.	(EM13MAT402PE34) Converter e analisar representações algébricas de funções polinomiais do 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, reconhecendo o papel dos coeficientes a, b e c no gráfico, como também distinguir os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado de outra variável, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais	Funções Polinomiais do 2º grau: proporcionalidade
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(EM13MAT404PE36) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças como, por exemplo, uma tabela de imposto de renda, em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento ou decrescimento, entre outras, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Funções: representações algébrica e gráfica. Domínios de validade. Imagem. Crescimento e Decrescimento.
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	(EM13MAT501PE40) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	Função Polinomial do 1º grau: relações e representações
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax2.	(EM13MAT502PE41) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax^2, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Função Polinomial do 2º grau: relações e representações

Fonte: Currículo de Matemática para o Ensino Médio - Pernambuco (2023 - 2024)

Figura 3 – 3º Bimestre do 1º ano - Organizador Curricular de Pernambuco (2023 - 2023)

MATEMÁTICA		
1º ANO		
3º BIMESTRE		
HABILIDADES DE ÁREA DA BNCC	HABILIDADES ESPECÍFICAS DOS COMPONENTES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.	(EM13MAT503PE42) Investigar e reconhecer pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos, envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Pontos de máximo e de mínimo de funções quadráticas
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	(EM13MAT507PE46) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de situações-problema em diversos contextos.	Função afim de domínio discreto. Progressão Aritmética

Fonte: Currículo de Matemática para o Ensino Médio - Pernambuco (2023 - 2024)

Na Figura 4, segue o organizador curricular atual estruturado em trimestres, e mostra a abordagem das funções polinomiais do primeiro e segundo graus, apenas no segundo trimestre do primeiro ano.

Figura 4 – 2º Trimestre do 1º ano - Organizador Curricular de Pernambuco 2025)

2º TRIMESTRE		
HABILIDADES DE ÁREA DA BNCC	HABILIDADES ESPECÍFICAS DOS COMPONENTES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(EM13MAT302PE18) Construir modelos matemáticos, a partir das leis de formação, para resolver situações-problema em vários contextos, envolvendo funções polinomiais do 1º e 2º graus, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Sequências Numéricas. Funções Polinomiais do 1º e 2º Graus
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.	(EM13MAT401PE33) Converter representações algébricas de funções polinomiais do 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos em que as funções tenham um comportamento proporcional, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Funções Polinomiais do 1º grau: proporcionalidade
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.	(EM13MAT402PE34) Converter e analisar representações algébricas de funções polinomiais do 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, reconhecendo o papel dos coeficientes a, b e c no gráfico, como também distinguir os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado de outra variável, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais	Funções Polinomiais do 2º grau: proporcionalidade
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(EM13MAT404PE36) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças como, por exemplo, uma tabela de imposto de renda, em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento ou decrescimento, entre outras, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Funções: representações algébricas e gráficas. Domínios de validade. Imagem. Crescimento e Decrescimento.
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	(EM13MAT501PE40) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	Função Polinomial do 1º grau: relações e representações
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax².	(EM13MAT502PE41) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Função Polinomial do 2º grau: relações e representações

Fonte: Organizador Curricular de Matemática - Pernambuco (2025)

Contudo, há uma sobrecarga para os estudantes. Esses, necessitam desenvolver habilidades que antes eram distribuídas em mais de um ano de ensino em um único trimestre de aulas. Para o professor também é desafiador, visto que há a necessidade de alinhar o planejamento didático às realidades das escolas públicas estaduais, considerando a defasagem de aprendizagem, diversidade de alunos e infraestrutura disponível. Para a diversidade de alunos e defasagem de aprendizagem, uma solução plausível seria um planejamento de aulas que oferecesse diversidade de recursos pedagógicos e abordagens variadas para oportunizar o máximo de aprendizagem possível. Mas, a falta de formação continuada, pouco tempo disponível para estudo e planejamento de aulas e a falta de apoio pedagógico por parte da escola, são fatores de impedimento para que isso aconteça.

2.5 O Estudo de Funções – Proposta do Organizador Curricular Para o 2º Trimestre do 1º ano do Ensino Médio

Com um olhar voltado para o Currículo de Matemática de Pernambuco, de modo particular para o segundo trimestre do organizador curricular da formação geral básica do primeiro ano do Ensino médio, apresentaremos nesta seção os conteúdos e habilidades propostas para o trimestre e ano de ensino em questão, que serão objetos do nosso estudo, como podemos observar no Quadro 1 que segue.

Quadro 1 – Organizador Curricular de Pernambuco

Código	Habilidade	Objeto de Conhecimento
EM13MAT501PE40	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	Função Polinomial do 1º grau: Relações e Representações
EM13MAT502PE41	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Função Polinomial do 2º grau: Relações e Representações.
EM13MAT401PE33	Converter representações algébricas de funções polinomiais do 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos em que as funções tenham um comportamento proporcional, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Função Polinomial do 1º grau: Proporcionalidade.
EM13MAT402PE34	Converter e analisar representações algébricas de funções polinomiais do 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, reconhecendo o papel dos coeficientes a, b e c no gráfico, como também distinguir os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado de outra variável, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Função Polinomial do 2º grau: Proporcionalidade.
EM13MAT302PE18	Construir modelos matemáticos para resolver situações-problema em vários contextos, envolvendo funções polinomiais do 1º e 2º graus, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Funções Polinomiais do 1º e 2º grau.
EM13MAT404PE36	Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças como, por exemplo, uma tabela de imposto de renda, em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento ou decrescimento, entre outras, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Funções: Representações algébrica e gráfica, domínio de validade, imagem, crescimento e decrescimento.

O ensino de funções polinomiais de primeiro e segundo graus no currículo de Pernambuco, está alinhado à (BNCC) e busca desenvolver competências matemáticas que integrem conceitos algébricos, geométricos e contextos do cotidiano. Para o Ensino

Médio a proposta é que as funções polinomiais do primeiro grau sejam apresentadas como ferramentas para modelar problemas que envolvam taxas de variação constante, como velocidade constante ou relações lineares em contextos econômicos e sociais. Para as funções polinomiais do segundo grau propõe-se uma abordagem com foco na sua representação gráfica e nas suas propriedades como vértice, concavidade, zeros da função, máximos e mínimos.

O Currículo de Pernambuco do Ensino Médio enfatiza a formação integral, conectando os conteúdos matemáticos a situações práticas. As funções polinomiais são trabalhadas, com foco em desenvolver habilidades como resolução de problemas, pensamento crítico e uso de tecnologias digitais. Valoriza ainda, a aplicação dos conceitos em contextos reais, como aspectos físicos, biológicos, sociais e econômicos, para tornar o aprendizado mais significativo. Por exemplo, as funções de 1º grau podem ser usadas para modelar custos fixos e variáveis, enquanto as funções de 2º grau podem representar lucros em função da quantidade produzida.

Portanto, o ensino de funções polinomiais de primeiro e segundo graus no currículo de Pernambuco é estruturado para promover a compreensão conceitual e a aplicação prática, utilizando metodologias ativas, tecnologias digitais e materiais diversos. A sugestão de abordagem é que seja contextualizada, buscando conectar a matemática ao cotidiano dos alunos, e está alinhada às diretrizes da BNCC. Ferramentas como o GeoGebra e outros softwares são amplamente valorizadas para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

3 Funções Polinomiais do 1º e 2º graus - Relações e Representações

Neste capítulo, abordaremos as funções polinomiais do 1º e 2º graus, usando como referência para as definições e demonstrações apresentadas os livros "Números e Funções Reais" (LIMA, 2013), "A Matemática do Ensino Médio, Volume 01" (LIMA et al., 2002), e "Um Curso de Cálculo" (GUIDORIZZI, 2007).

3.1 Funções Polinomiais do Primeiro Grau - Relações e Representações

A função polinomial do primeiro grau ou função afim, é uma das mais comuns e utilizadas no nosso dia a dia, mas para compreendê-la é necessário explorar suas variadas formas de representações, tais como a algébrica, gráfica e por meio de tabelas. Uma das principais características da função afim é descrever relações lineares entre duas variáveis, que nos permite utilizá-la na modelagem e análise de fenômenos da vida real e nos dá a vantagem de poder mostrar ao aluno a sua importância na resolução de situações-problemas reais, como:

- Cálculo de custo de produção: alguns custos de produção podem ser modelados por meio da função afim, a exemplo, fábricas que possuem um custo fixo por produção e um custo por unidade produzida;
- Cálculo do abastecimento de gasolina: Neste caso, o preço a pagar depende da quantidade de gasolina a ser colocada no tanque;
- Cálculo de juros simples: Nas compras que possuem uma taxa de juros fixa na compra parcelada, considerando a quantidade de meses que será dividida;
- Determinação do valor de uma corrida de táxi: Considerando os tipos de táxi, que cobram bandeirada (taxa fixa), mais um valor por quilômetro rodado.

As funções afins podem ser utilizadas ainda, para modelar situações em outras áreas de conhecimento, como:

- Física: movimento de um objeto sob aceleração constante e relação entre a temperatura e a pressão de um gás ideal;

- Engenharia: as relações entre variáveis como força e deformação em materiais elásticos ou corrente elétrica e tensão em circuitos lineares.

Para o ensino de Função Polinomial do 1º grau: relações e representações, PERNAMBUCO (2025, p.5) propõe a seguinte habilidade: **(EM13MAT501PE40)** "Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.". Para desenvolver a habilidade proposta, é importante que alguns pontos relativos às funções afins sejam revisados e/ou apresentados, são eles: definição, lei de formação e representação gráfica. Sendo assim, seguem as subseções que tratarão dos pontos elencados, abordando os conceitos formais aos quais estão relacionados.

3.1.1 Definição e Lei de Formação da Função Afim

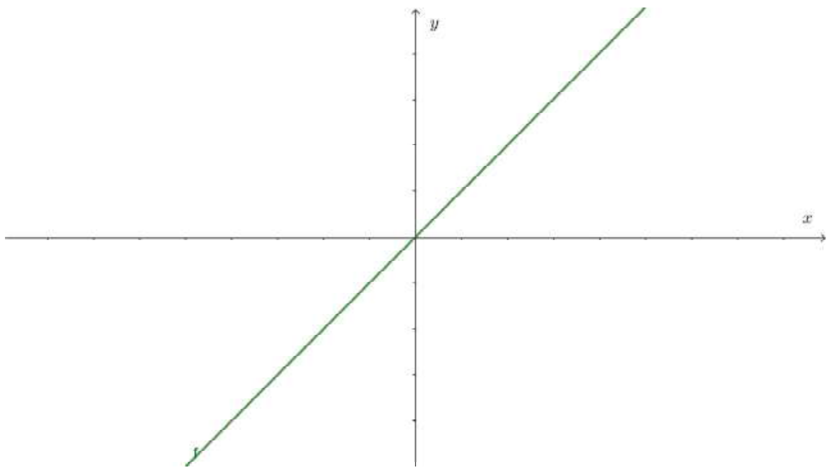
A função afim é um tipo específico de função, conhecida também como função polinomial do 1º grau.

Definição 3.1: *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Pela definição apresentada, uma função afim é representada pela expressão $f(x) = ax + b$, na qual x é a variável independente e a e b são números reais com $a \neq 0$. Nos exemplos a seguir apresentaremos casos particulares de funções afins:

Exemplo 3.1: A *Função Identidade* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Veja na Figura 5 uma representação gráfica desse tipo de função.

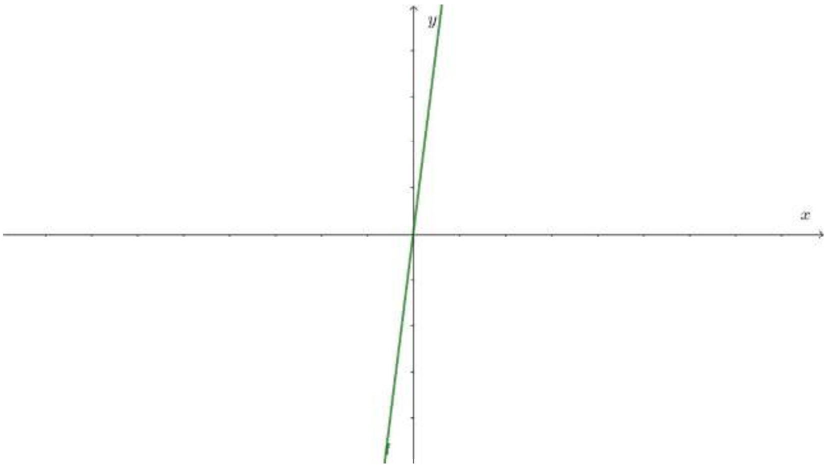
Figura 5 – Gráfico de uma função identidade



Fonte: A autora via software GeoGebra

Exemplo 3.2: A *Função Linear* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Na Figura 6 é possível observar um exemplo de representação gráfica de uma função linear.

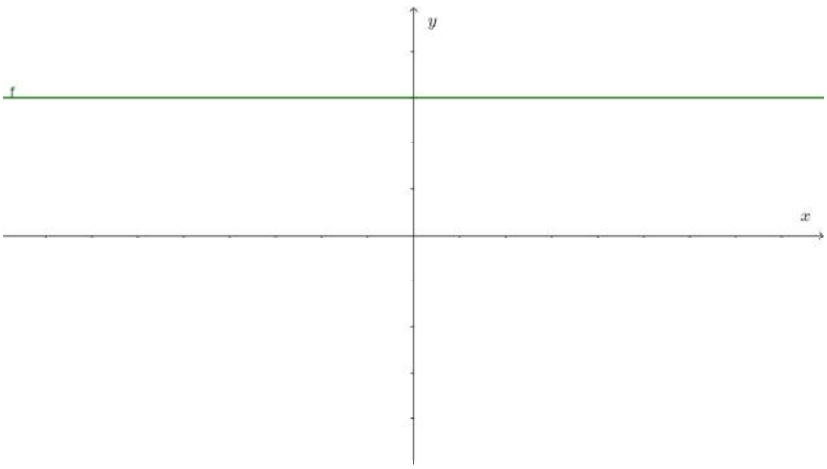
Figura 6 – Gráfico de uma função linear



Fonte: A autora via software GeoGebra

Exemplo 3.3: A *Função constante* é definida por $f(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$. A função constante associa todos os elementos do domínio a um único elemento do contradomínio, como é possível ver no exemplo de representação gráfica da Figura 7.

Figura 7 – Gráfico de uma função constante



Fonte: A autora via software GeoGebra

É possível, no entanto, saber que uma certa função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente. Para tanto, obtém-se b como o valor que a função dada assume quando $x = 0$. Por vezes, o número $b = f(0)$ é chamado de *valor inicial* da função f. Com relação ao coeficiente a, ele pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos e arbitrários x_1 e x_2. Efetivamente, conhecidos

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad \text{e} \quad f(x_2) = ax_2 + b,$$

subtraindo as equações anteriores, obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1).$$

Portanto,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

3.1.2 Representação Gráfica da Função Afim

Nesta subseção serão abordadas as definições de coeficiente angular do gráfico de uma função afim, suas propriedades e exemplos de gráficos de uma função afim f com coeficiente angular positivo e coeficiente angular negativo. De acordo com a definição de função afim apresentada na seção anterior, temos, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O *Coeficiente Angular* de uma função afim é o número que acompanha o "x" na sua lei de formação e indica a inclinação da reta que representa o gráfico da função.

O gráfico **G** de uma função f pode ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f. Ou seja, é o conjunto formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde a primeira coordenada x é um elemento do domínio da função e a segunda coordenada $f(x)$ é o valor da função nesse elemento. O gráfico **G** de uma função afim $f : x \mapsto ax + b$ é uma linha reta. Para ver isto basta tomarmos três pontos quaisquer: $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ do gráfico **G** e mostrar que tais pontos são colineares. Desse modo, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_2), d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$, seja igual à soma dos outros dois. Logo, podemos supor que as abscissas x_1, x_2 e x_3 foram dadas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. Pela fórmula da distância entre dois pontos temos

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

e, analogamente,

$$(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\ \sqrt{1 + a^2}$$

e

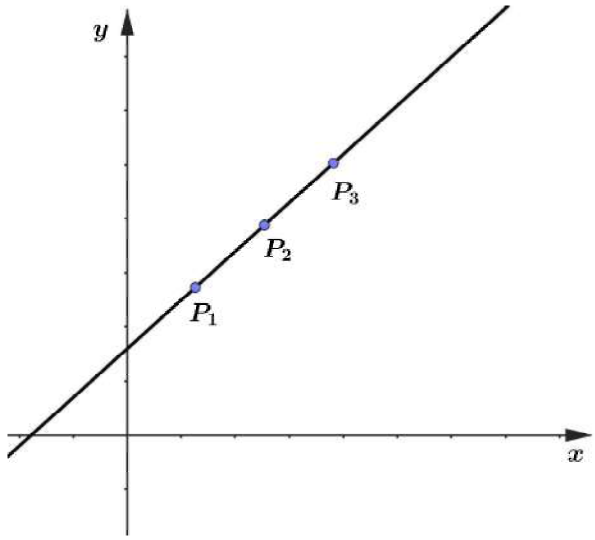
$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\ \sqrt{1 + a^2}.$$

Daí, segue imediatamente que

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

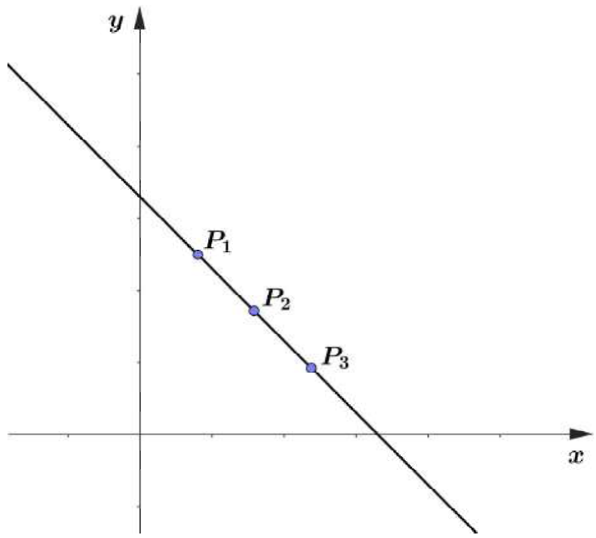
Como dito anteriormente, o gráfico de uma função afim f é uma reta. Nas Figuras 8 e 9, podemos observar o comportamento do gráfico a partir do coeficiente angular quando positivo e negativo, respectivamente:

Figura 8 – Gráfico de uma função afim f com coeficiente angular positivo



Fonte: A autora via software Geogebra

Figura 9 – Gráfico de uma função afim f com coeficiente angular negativo



Fonte: A autora via software Geogebra

Analisando geometricamente, a reta que é o gráfico da função $f : x \mapsto ax + b$ intersecta o eixo OY no valor do coeficiente b. O número a, como já vimos, chama-se *inclinação* ou *coeficiente angular* dessa reta. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta crescente e quando $a < 0$, a reta é decrescente.

Sendo uma reta o gráfico de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sabendo que uma reta fica determinada conhecendo-se dois de seus pontos, então basta conhecer os valores $f(x_1)$

e $f(x_2)$ que a função f assume em dois números $x_1 \neq x_2$ para que fique inteiramente determinado o gráfico de f. Com efeito, se f é afim e $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$, com $x_1 \neq x_2$, então os coeficientes a e b que definem a lei de formação de f são soluções do sistema. Isto é equivalente a resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} ax_1 + b & = y_1 \\ ax_2 + b & = y_2, \end{cases}$$

A solução é

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Com isso, provamos que dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Após serem trabalhados os conceitos apresentados anteriormente, espera-se que o aluno consiga investigar números expressos em tabelas de modo a reconhecer se representam uma função afim ou não. Mais ainda, que consiga fazer conjecturas e generalizações, expressando-as algebricamente e graficamente, mobilizando conceitos para solucionar o problemas.

3.2 Funções Polinomiais do Segundo Grau - Relações e Representações

Abordaremos a função polinomial do segundo grau tratando dos seguintes tópicos: definição e lei de formação, forma canônica e representação gráfica. A forma canônica de uma função quadrática, oferece várias vantagens sobre a forma geral $f(x) = ax^2+bx+c$, principalmente para a análise gráfica e para o estudo de seus pontos de máximo ou mínimo. Ela facilita a identificação imediata do vértice da parábola, o que permite um estudo mais fácil da concavidade, dos valores de máximo ou mínimo e da translação da função.

A função polinomial do 2° grau ou função quadrática possui diversas aplicações no cotidiano e em outras áreas de conhecimento. Seguem alguns destaques:

- Cálculo do movimento de projéteis, a exemplo foguetes e canhões;
- Estimativa do ângulo de reflexão de faróis de carros;
- Estimativa do ângulo de uma antena parabólica;
- Cálculo de áreas, lucros e velocidade;
- Análise de Movimentos Uniformemente Variados (MUV)

Para o Ensino de funções polinomiais do segundo grau, o PERNAMBUCO (2025, p.6) propõe a seguinte habilidade: **(EM13MAT502PE41)** "Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.".

3.2.1 Definição e Lei de Formação da Função Quadrática

Embora as funções lineares, com as características: taxa de variação constante e representação gráfica retilínea, sejam eficazes na modelagem de fenômenos de crescimento ou decrescimento uniformes, diversas situações no mundo real apresentam um comportamento mais dinâmico e complexo. Algumas situações, que envolvem grandezas relacionadas por uma dependência de segunda ordem, demandam um modelo matemático distinto, a função quadrática. Podemos defini-la da seguinte maneira:

Definição 3.2: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando são dados números reais a,b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Os coeficientes a,b,c da função quadrática ficam inteiramente determinados pelos valores que a função assume. Isso nos permite identificar uma função quadrática como um trinômio do segundo grau. A cada trinômio corresponde a função quadrática definida por $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Desse modo, considerando o fato dos coeficientes ficarem determinados quando a função assume um valor, a correspondência (trinômio) $\mapsto$ (função quadrática) é biunívoca. A seguir, vejamos um exemplo que apresenta algumas funções quadráticas e seus respectivos coeficientes:

Exemplo 3.4:

(a) Uma criança, em um campo aberto, lança um foguete de brinquedo a partir do topo de uma pequena colina. A altura da colina em relação ao nível do solo é de 5 metros. O foguete sobe e depois cai, seguindo uma trajetória parabólica. A altura do foguete em relação ao solo, $h(t)$ (em metros), em função do tempo t (em segundos) após o lançamento, é modelada pela função: $h(t) = -t^2 + 6t + 5$. Nesta função podemos identificar todos os coeficientes: $a = -1, b = 6$ e $c = 5$;

(b) Um jogador de futebol chuta uma bola a partir do solo, e sua trajetória forma uma parábola. A altura da bola em relação ao solo, $h(t)$ (em metros), em função do tempo t (em segundos) após o chute, pode ser modelada pela função: $h(t) = -t^2 + 8t$. Nesta função, podemos identificar os coeficientes $a = -1, b = 8$ e $c = 0$

(c) Uma ponte pênsil tem seus cabos principais em formato parabólico. Para fins de engenharia, a curvatura de um desses cabos é modelada em um plano cartesiano, onde a origem $(0, 0)$ coincide com o ponto mais baixo do cabo. A altura y (em metros) do cabo em relação à sua altura mínima, em função da distância horizontal x (em metros) a partir da origem, é dada pela função: $y = 0,05x^2$. Nesta função, podemos identificar os coeficientes $a = 0,05; b = 0$ e $c = 0$;

(d) Uma operadora de telefonia oferece um plano de internet móvel que cobra uma taxa fixa mensal de $40,00$ reais, mais $2,00$ reais por gigabyte (GB) de dados consumido. O custo total $C(x)$ em reais, em função do número de gigabytes x consumidos, pode ser modelado pela função: $C(x) = 2x + 40$. Esta função não é quadrática, pois $a = 0$.

Uma função quadrática será considerada *completa* quando seus coeficientes a, b e c, são diferentes de zero (3.4 a) e é considerada *incompleta* quando os coeficientes b e/ou c, são iguais a zero (3.4 b e 3.4 c).

3.2.2 Forma Canônica

A forma canônica, também chamada de forma do vértice, de uma função quadrática é aquela que expressa a função em termos das coordenadas do vértice da parábola e de um ponto qualquer da parábola. Consideremos o trinômio

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

É possível observar que as duas primeiras parcelas dentro do colchetes, correspondem a parte do desenvolvimento de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Completando o quadrado, temos:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

Assim,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Logo, podemos reescrever a lei de formação da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ da seguinte forma:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Ou ainda,

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad (1)$$

o que equivale a

$$f(x) = (x - x_0)^2 + y_0,$$

para, $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ e $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}$. Assim temos a forma canônica da função quadrática.

3.2.3 Valor Máximo e Valor Mínimo da Função Quadrática

O valor máximo ou valor mínimo da função quadrática é o número associado ao extremo da função, ou seja, o valor mais alto (máximo) ou mais baixo (mínimo) que a função assume. Compreender estes valores nos permite analisar a função de forma mais completa e aplicá-la em diversos contextos, como modelagem de situações reais ou resolução de problemas. A seguir vamos formalizar esses conceitos.

Definição 3.3: Dado $m \in \mathbb{R}$, dizemos que $f(m)$ é o valor máximo da função f se $f(x) \leq f(m)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e dizemos que $f(m)$ é o valor mínimo se $f(x) \geq f(m)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Retomando a forma canônica da função polinomial do segundo grau dada na equação (1), é possível perceber que é formada por duas parcelas, a parcela: $a(x - x_0)^2$ que varia de acordo com o valor de x e a parcela: $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ composta apenas por valores constantes. Se o valor a é positivo então

$$a(x - x_0)^2 \geq 0$$

Adicionando y_0 aos dois membros da desigualdade, temos

$$a(x - x_0)^2 + y_0 \geq 0 + y_0.$$

Como

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0,$$

segue

$$a(x - x_0)^2 + y_0 \geq 0 + y_0 \Rightarrow f(x) \geq y_0.$$

Então, f assume seu valor mínimo em $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ quando $x - x_0 = 0$, ou ainda, $x = x_0$. Se a, é negativo então

$$a(x - x_0)^2 \leq 0,$$

adicionando y_0 em ambos os lados da desigualdade, temos

$$a(x - x_0)^2 + y_0 \leq 0 + y_0$$

isso implica em

$$f(x) \leq y_0$$

Logo, f assume seu valor máximo em $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ quando $x - x_0 = 0$, ou ainda, $x = x_0$.

Olhando para o ponto do domínio $x_0 = \frac{-b}{2a}$, podemos concluir que é o ponto que maximiza ou minimiza a função quadrática, dependendo exclusivamente do sinal de a. De maneira resumida: se $a > 0$, a função admite um valor mínimo, e se $a < 0$, a função admite um valor máximo.

3.2.4 Zeros da Função Quadrática

Os zeros de uma função quadrática são os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Partindo, novamente, de sua forma canônica, para determinar os zeros da função quadrática basta considerarmos $f(x) = 0$, obtendo a equação

$$0 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}, \tag{2}$$

cuja solução é

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3}$$

Como é frequentemente apresentado no Ensino Médio, o termo $b^2 - 4ac$, pode ser representado pela letra grega Δ (delta), ou seja,

$$\Delta = b^2 - 4ac. \tag{4}$$

Essa nova notação facilita o estudo das raízes da equação do segundo grau e a equação (3) pode ser reescrita como

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{5}$$

Aqui, vale ressaltar que não é oportuno apresentar a fórmula acima como a única utilizada para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau, tendo em vista que o método de completar quadrados supre bem essa necessidade. Devemos considerar que o método de completar quadrados tem o benefício de não ser mecânico, exigindo assim um maior raciocínio por parte dos alunos, além de ser uma boa oportunidade para que eles pratiquem e ganhem agilidade com cálculos.

A partir da equação (5), podemos fazer algumas análises interessantes acerca das raízes da equação do segundo grau. Igualando as equações (2) e (5), obtemos

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}.$$

Para que a equação acima tenha solução real, o valor de Δ precisa ser necessariamente maior ou igual a zero, visto que a primeira parcela é positiva e está elevada ao quadrado.

Dizemos então que para $\Delta \geq 0$ a função possui zeros reais e para $\Delta < 0$ a função não possui zeros reais.

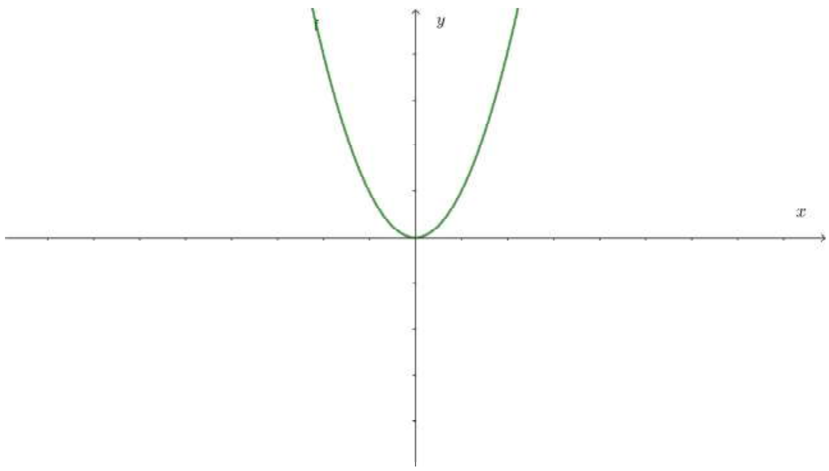
3.2.5 Gráfico da Função Quadrática

O gráfico de uma função quadrática é representado por uma *parábola* que pode ter sua concavidade voltada para baixo ou para cima. Isso dependerá do coeficiente a, ou seja: caso $a > 0$ o gráfico terá a sua concavidade voltada para cima e se $a < 0$ o gráfico terá a sua concavidade voltada para baixo. Para parábola, temos a seguinte definição.

Definição 3.4: Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d.

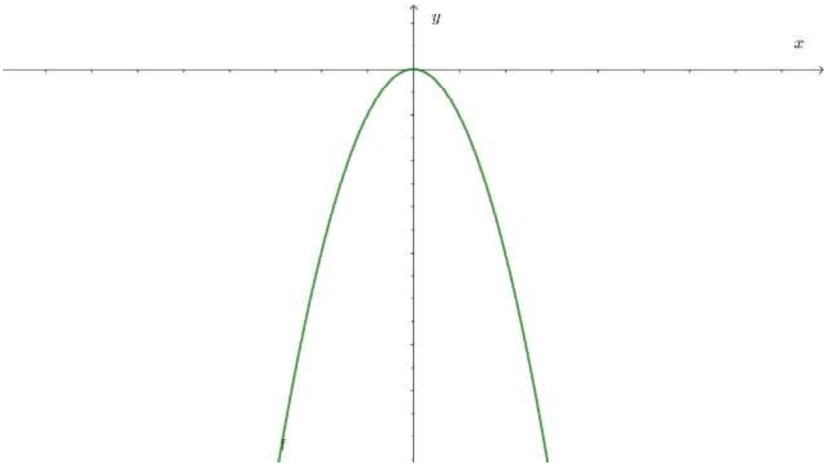
Abaixo estão apresentados dois exemplos de gráficos de funções quadráticas. A Figura 10 mostra um gráfico no qual $a > 0$ enquanto que a Figura 11 mostra um gráfico com $a < 0$.

Figura 10 – Gráfico de uma função quadrática f com coeficiente $a > 0$



Fonte: A autora via software Geogebra

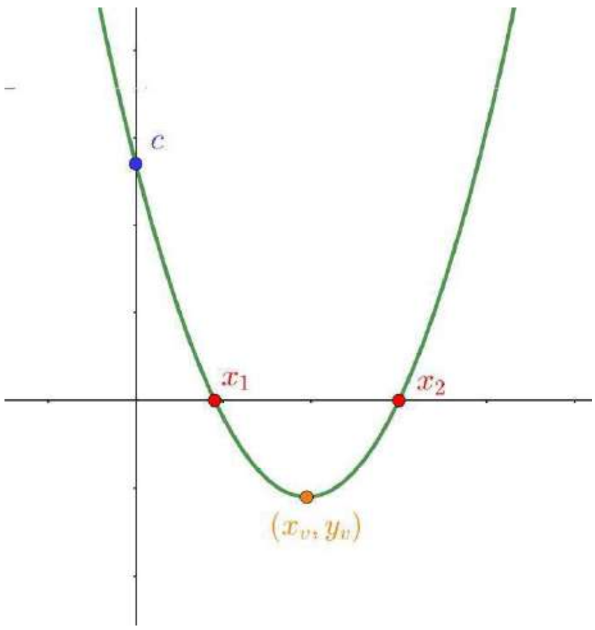
Figura 11 – Gráfico de uma função quadrática f com coeficiente $a < 0$



Fonte: A autora via software Geogebra

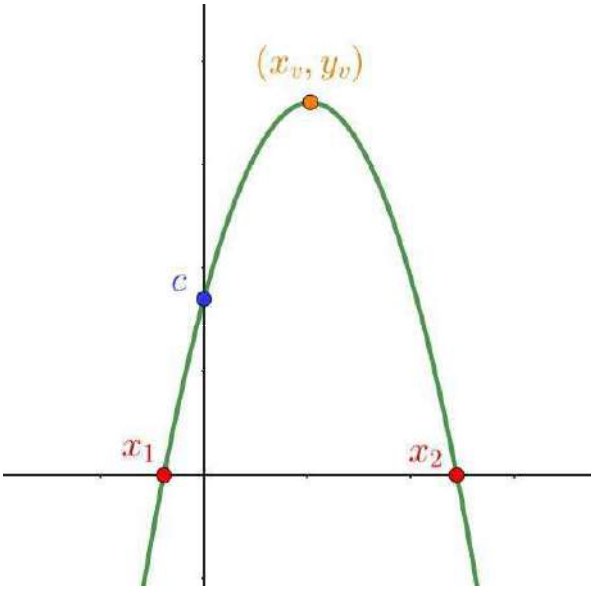
A parábola tem algumas características importantes que já foram destacadas anteriormente: a sua concavidade é determinada pelo sinal do coeficiente a da função f, o seu vértice é ponto de máximo ou mínimo da curva, as raízes são os pontos onde a parábola intercepta o eixo x e o ponto onde a parábola intercepta o eixo y é o valor do coeficiente c, como podemos observar nas figuras 12 e 13:

Figura 12 – Gráfico de uma função quadrática f com destaque para suas características importantes e com coeficiente $a > 0$



Fonte: A autora via software Geogebra

Figura 13 – Gráfico de uma função quadrática f com destaque para suas características importantes e com coeficiente $a < 0$



Fonte: A autora via software Geogebra

3.3 Dissertações, Produtos Educacionais Escolhidos e Materiais Sugeridos

Como exposto nos objetivos geral e específicos, o intuito do nosso trabalho é resgatar as contribuições que os trabalhos vinculados ao PROFMAT têm apresentado para o ensino de funções polinomiais do primeiro e segundo graus. A partir desse resgate será sugerida uma coletânea de sequências didáticas que reunirá as propostas apresentadas em dissertações e recursos educacionais, além de sugerir outros materiais que visam complementar e potencializar o ensino dos conteúdos em questão, tais como jogos, softwares, oficinas, aplicativos, cartilhas interativas entre outros.

À luz do organizador curricular (PERNAMBUCO, 2025), consideraremos inicialmente as habilidades **EM13MAT501PE40** e **EM13MAT502PE41**, citadas nas Seções 3.1 e 3.2 deste capítulo, respectivamente. Com intuito de contemplá-las, foram escolhidas as seguintes dissertações juntamente com seus recursos educacionais propostos:

- **Conceito de Função Aplicado ao Estudo de Sequências Através de uma Cartilha Interativa Elaborada com o Canva.** Da autoria de Thiago da Silva Santos, aluno egresso do PROFMAT na UFCG (Universidade Federal de Campina Grande), sob a orientação da Professora Doutora Deise Mara Barbosa de Almeida. A dissertação foi defendida no ano de 2024;

- **Sequência Didática para o Ensino de Funções, Funcões Polinomiais do 1º e 2º graus em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental II.** Escrita por Luisa Mara Silva de Oliveira sob a orientação de Simon George Chiossi e defendida no ano de 2023. A dissertação foi apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense.

3.3.1 Dissertação: Conceito de Função Aplicado ao Estudo de Sequências Através de Uma Cartilha Interativa Elaborada no Canva

O trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do programa de pós-graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade mestrado profissional, traz como objetivo principal, segundo Silva (2024a, p.20): analisar o processo de ensino-aprendizagem de função e sequências numéricas através de uma ferramenta tecnológica e acessível, que promova um ambiente educacional de discussões e interações durante o estudo desses temas e suas inter-relações. Para tanto, o autor sugere como recurso educacional, uma cartilha interativa, que se distingue por promover uma abordagem participativa, que foge de ideias mais convencionais acerca de tecnologias educacionais, que tendem a levar a pensar instantaneamente em computadores e outras máquinas. Silva (2024b).

Nota-se que de fato a cartilha interativa pode despertar o interesse dos estudantes e até contribuir para o desenvolvimento do protagonismo, pois eles serão estimulados a participarem de forma ativa no processo de ensino. Um ponto importante que merece ser citado é o fato da cartilha interativa estar disponível na plataforma *Canva*[1], podendo ser editada pelos professores de modo a adequá-la à sua necessidade.

Sendo assim, ao elaborar as sequências didáticas fundamentadas pelas habilidades propostas pelo organizador curricular trimestral de Pernambuco, foram usadas algumas páginas da cartilha interativa que atendiam aos conteúdos abordados. Uma das páginas usadas é a ilustrada na Figura 14

[1] Canva é uma plataforma de edição online gratuita que oferece diversas ferramentas de design para criar, editar e aprimorar modelos gráficos.

Figura 14 – 1ª página da Cartilha Interativa

Fonte: Recurso Educacional - Cartilha Interativa (SILVA, 2024b)

A cartilha traz simulações que podem ser acessadas pelo QR Code que se encontra na parte inferior da página, através de ferramentas digitais como celular ou tablet. Vale ressaltar que tanto a cartilha quanto as suas orientações de uso estão na plataforma *eduCAPES*. Antes de formalizar a definição de função, é dada ao estudante a oportunidade de fazer simulações com o uso do conceito de função que está modelado através de uma situação problema que usa uma "máquina" para executar certos comandos. Isso permite uma investigação intuitiva de ideias que estão associadas ao conceito de função, como a "transformação" que a máquina fará com o objeto inserido. Outro ponto que é bastante interessante é o fato de esse primeiro contato não trazer números e/ou operações que precisem ser realizadas. A simulação apresentada exige do aluno apenas noções relativas a rotações de objetos mais precisamente, giros de 90º no sentido horário para as figuras apresentadas nas situações 1, 2 e 3. O professor pode questioná-los quanto às suas respostas e o motivo de tê-las escolhido. Ao final, pode-se solicitar aos estudantes que confiram suas respostas, acessando o QR code e fazendo as interações necessárias para a verificação.

A segunda página utilizada na sequência didática continua fazendo uma abordagem intuitiva, com o uso da "máquina" e das "transformações". Porém, ao invés de figuras, são usados números. Observe na Figura 15 que a cartilha fornece espaço para que os estudantes façam o rascunho dos cálculos e, ao fim da página, o QR code para que possam conferir, de modo dinâmico, suas respostas.

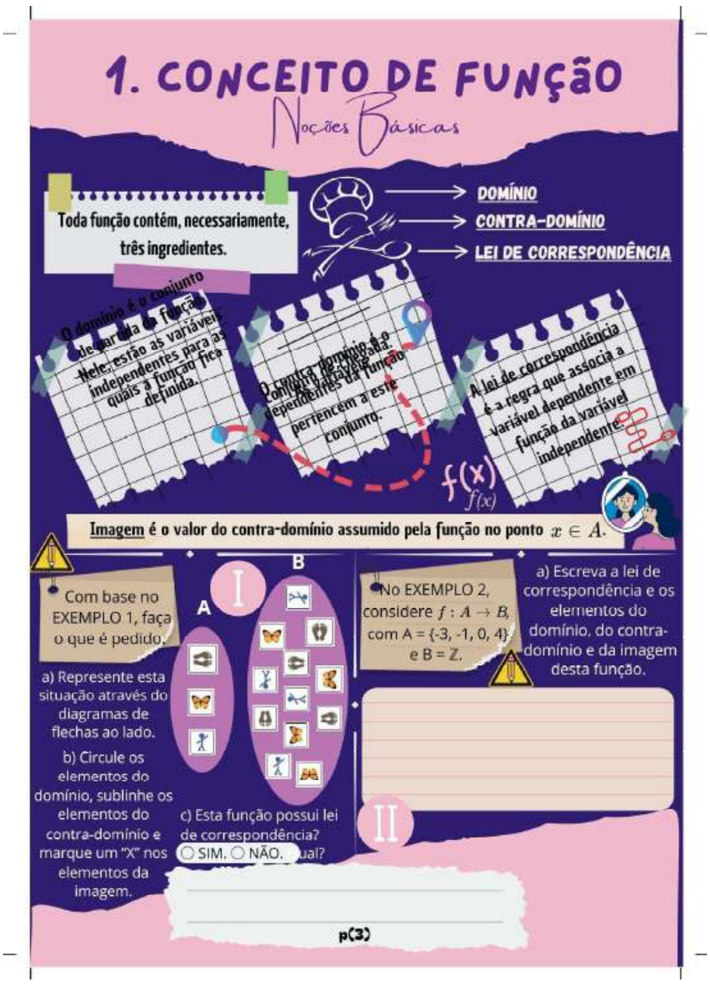
Figura 15 – 2ª página da Cartilha Interativa

Fonte: Recurso Educacional - Cartilha Interativa (SILVA, 2024b)

No Exemplo 2, apresentado nessa página, são fornecidos alguns números que devem ser inseridos na máquina, que dessa vez fará algumas operações com eles, antes de entregá-los "transformados". A própria página oferece um espaço para rascunho que pode ser aproveitado pelo professor, solicitando aos alunos que façam os cálculos para descobrirem em qual resultado os números serão "transformados". Após isso, as respostas podem ser expostas para que possam discutir os resultados obtidos. Há também, ao final dessa página, um QR code que ao ser acessado leva o aluno a um ambiente interativo, no qual ele pode arrastar um número por vez para dentro da máquina e conferir o resultado, comparando-o com o seu. Nesse ambiente o aluno ainda pode mudar as operações a serem realizadas pela máquina e/ou os números de entrada, explorando ainda mais essa ideia intuitiva de função. E, por fim, apresenta-se a definição formal de função.

A terceira página escolhida da cartilha interativa trata da definição de domínio, contradomínio e imagem. Cabe aqui ressaltar que na sequência didática sugerida no recurso educacional vinculado a este trabalho, as páginas não se encontram necessariamente na ordem que estão sendo apresentadas aqui, seguindo uma ordem que atende ao objetivo que se deseja alcançar com a sequência e obedecendo a ordem de conteúdos e conceitos que foram previamente definidos. A Figura 16 mostra a terceira página da cartilha.

Figura 16 – Terceira página da Cartilha Interativa

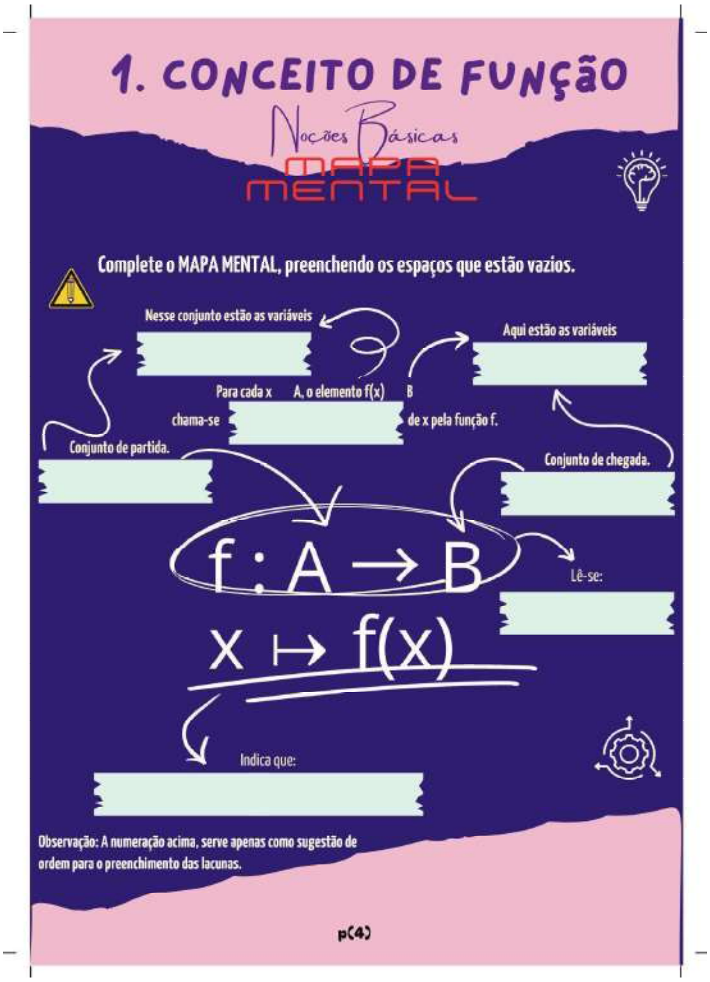


Fonte: Recurso Educacional - Cartilha Interativa (SILVA, 2024b)

Como mencionado, essa página traz os conceitos de domínio, contradomínio e imagem e resgata os exemplos propostos na página um. Dessa vez, oferecendo uma outra forma de representação para os elementos e os resultados correspondentes, levando o aluno a interagir com diferentes representações de funções. Além disso, após apresentar as definições, os exemplos instigam os alunos a aplicá-los para que haja uma melhor compreensão.

Veja a seguir a Figura 17, com a quarta página escolhida da cartilha interativa, que por sua vez, traz um modelo de mapa mental para que os estudantes possam preencher de acordo com todos os conceitos vistos até o momento. A atividade é muito interessante, pois permite que os estudantes organizem suas ideias de modo visual e hierárquico.

Figura 17 – 4ª página da Cartilha Interativa



Fonte: Recurso Educacional - Cartilha Interativa (SILVA, 2024b)

Uma outra forma de utilização que foi proposta na sequência didática que compõe o recurso educacional deste trabalho, é o professor responder junto com os estudantes esse modelo de mapa mental. Pode-se, também, propor aos os estudantes que elaborem o seu próprio mapa, inclusive utilizando o *Canva* ou outra plataforma digital disponível.

3.3.2 Dissertação: Estratégias Para Consolidar O Ensino e a Aprendizagem de Funções Polinomiais do 1º e 2º grau em Turmas de 9º ano do Ensino Fundamental II

A dissertação "Estratégias Para Consolidar O Ensino e a Aprendizagem de Funções Polinomiais do 1º e 2º grau em Turmas de 9º ano do Ensino Fundamental II" foi apresentada pela professora mestranda Luisa Mara Silva de Oliveira, como trabalho de conclusão de curso ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT pela Universidade Federal Fluminense (UFF). Praticamente todo o recurso educacional apresentado na forma de uma sequência didática foi utilizado. O material proposto por (OLIVEIRA, 2023a) vem junto com a cartilha interativa de (SILVA, 2024b) e aos jogos e oficinas propostos neste trabalho, enriquecer uma nova sequência didática que se propõe a potencializar o ensino-aprendizagem de funções polinomiais do 1º e 2º graus. Apesar do título da dissertação deixar claro o ano de ensino ao qual é destinada, ao fazer uma análise das habilidades contempladas pelo material, comparando-as com as propostas pelo organizador curricular de matemática do 1º ano do ensino médio de Pernambuco (2025), é possível perceber que o recurso educacional vinculado, atende perfeitamente bem a proposta do organizador curricular, sendo necessário apenas aprofundar alguns tópicos.

A sequência didática que é parte integrante da dissertação em estudo traz uma abordagem bem tradicional e necessária dos conceitos e definições relacionados às funções polinomiais do 1º e 2º graus. Ademais, as listas de atividades propostas levam o aluno a exercitar o que foi trabalhado na aula expositiva dialógica de uma maneira bem mecânica.

Figura 18 – Recorte da Sequência Didática Proposta por Luisa Mara Silva de Oliveira (2023)

2.2. LEI DE FORMAÇÃO

Objetivo:

- Compreender o conceito de lei de formação.
- Identificar os pares ordenados (x, y) que geram uma função.
- Levar o aluno a compreender de forma intuitiva a generalização de fórmulas matemáticas.

Material necessário: Lousa e pilotos coloridos.

Tipo de atividade: Individual.

Duração: 3 aulas de 50 minutos.

Aula expositiva, com registros de conceitos e definições. Para isso, pode-se utilizar o próprio quadro da sala de aula com o auxílio de pilotos coloridos.

Registros para serem realizados na lousa:

Lei de Formação

Toda função é gerada através de uma expressão algébrica que nos permite encontrar os pares ordenados (x, y), por meio de uma fórmula denominada **lei de formação.** É através desta fórmula que se relaciona os elementos do domínio com os elementos do contradomínio.

A lei de formação da função é uma espécie de "*identidade*" única e é através dela que se gera um gráfico único da mesma.

Exemplos:

$$y = x + 1 \qquad f(x) = x^2 + 2x + 5 \qquad y = 2^x$$

$$y = \log x \qquad f(x) = sen\, 2x \qquad f(x) = |x - 3|$$

Para determinar um par ordenado (x, y), basta conhecer o valor da variável, *"x"*, para determinar o valor da outro *"y"*.

Nota-se que $f(x) = y$.

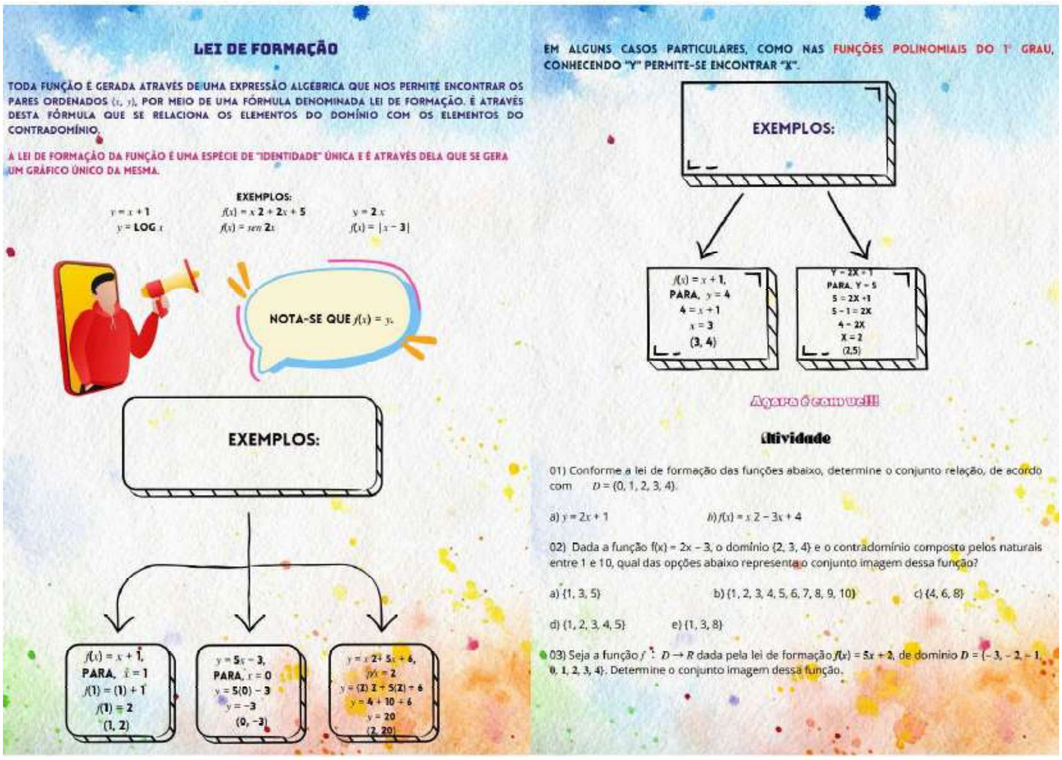
Exemplos:

Dica→ Neste momento, é recomendável exercitar esses procedimentos com funções polinomiais do 1° e 2° grau uma familiaridade com as funções que serão aprofundadas posteriormente.

Fonte: Recurso Educacional - Sequência Didática (OLIVEIRA, 2023b)

Como é observado na Figura 18, que nos traz um recorte da sequência didática proposta por (OLIVEIRA, 2023a), a ideia é que o professor utilize a lousa e pincéis para apresentar os conceitos e definições. Com o intuito, visualmente falando, de torná-lo mais atrativo para os alunos, o material foi readequado (ver Figura 19).

Figura 19 – Material readequado



Fonte: Produzido pela autora na plataforma Canva

A intenção é manter a abordagem dada pela autora aos conceitos e definições, inclusive mantendo a atividade que é sugerida. Houve apenas a adequação de sua forma visual e a mudança para um formato que possa ser impresso, considerando também a realidade do professor que dispõe de meios para imprimir ou projetar o material.

Ainda com relação às sugestões de (OLIVEIRA, 2023a) para trabalhar pontos importantes relativos às funções polinomiais do 1º grau, foram todos utilizados para a criação de uma apresentação de slides na plataforma *Canva*, que pode ser baixada ou editada através do link: Apresentação Canva

3.3.3 Oficinas - Função Polinomial do 1º Grau

Para introduzir o tópico lei de formação, são sugeridas três oficinas na sequência didática proposta no recurso educacional vinculado a este trabalho: **bolas de gude no copo d'água, atividade prática com copo descartável** e **os números dos sapatos - adaptada**. O objetivo é oportunizar aos alunos o raciocínio, a conjectura e a associação entre teoria e prática. Para a aplicação das oficinas, propõe-se que a turma seja dividida em seis grupos e que os materiais das oficinas sejam reproduzidos de forma duplicada. Após realizarem o que se pede, os grupos que estão com a mesma oficina se reúnem para discutir os resultados encontrados e, em um segundo momento, expõem ao grande grupo suas conclusões.

A primeira oficina sugerida é ***bolas de gude no copo d'água***. Para a sua realização são necessários materiais bem simples, como um copo (descartável, por exemplo), bolas de gude, régua e malha quadriculada. O intuito é observar a relação entre o nível de água do copo em função do número de bolas de gude que são colocadas dentro dele. A partir disso, é solicitado aos estudantes que façam anotações do volume inicial de água (antes de serem inseridas as bolas de gude) e o volume de água a cada quatro bolas acrescentadas. Em seguida, devem construir uma tabela com os resultados obtidos e, por fim, localizar no plano cartesiano os pares ordenados obtidos, considerando a quantidade de bolas de gude como os valores de x e o nível de água no copo os valores de y.

A segunda oficina sugerida chama-se ***atividade prática com copo descartável***. Também é uma atividade que usa materiais bem simples, como copo descartável, alfinete e relógio. Nessa atividade, os alunos graduam o copo descartável em ml (mililitros) e enchem com água até a marca preestabelecida. Após isso, fazem um furo no fundo do copo para que a água goteje e anotam o volume inicial de água. Em seguida, registram o volume de água após 4, 8, 12 e 16 minutos, construindo uma tabela com os resultados obtidos. Por fim, localizam em um plano cartesiano os resultados obtidos e fazem algumas considerações acerca da precisão das medidas e conjecturam se há uma sentença matemática que descreve a relação entre o tempo e o volume de água, produzindo um relatório com as conclusões do grupo.

A terceira oficina, ***os números dos sapatos - adaptada***, é introduzida com um texto informativo sobre a maneira como são calculados os números do sapato, de modo particular no Brasil, apresentando a sentença matemática que relaciona a medida do pé e o número do calçado. A atividade consiste em realizar a medição dos pés dos integrantes do grupo com uma fita métrica e aplicar na fórmula fornecida, além de substituir os valores de 20 a 30, desconsiderando aqueles que coincidirem com as medições encontradas. Após isso, constroi-se uma tabela com os resultados obtidos e em seguida localiza-os no plano cartesiano.

3.3.4 Jogo da Velha da Função Polinomial do 1º grau - Adaptado

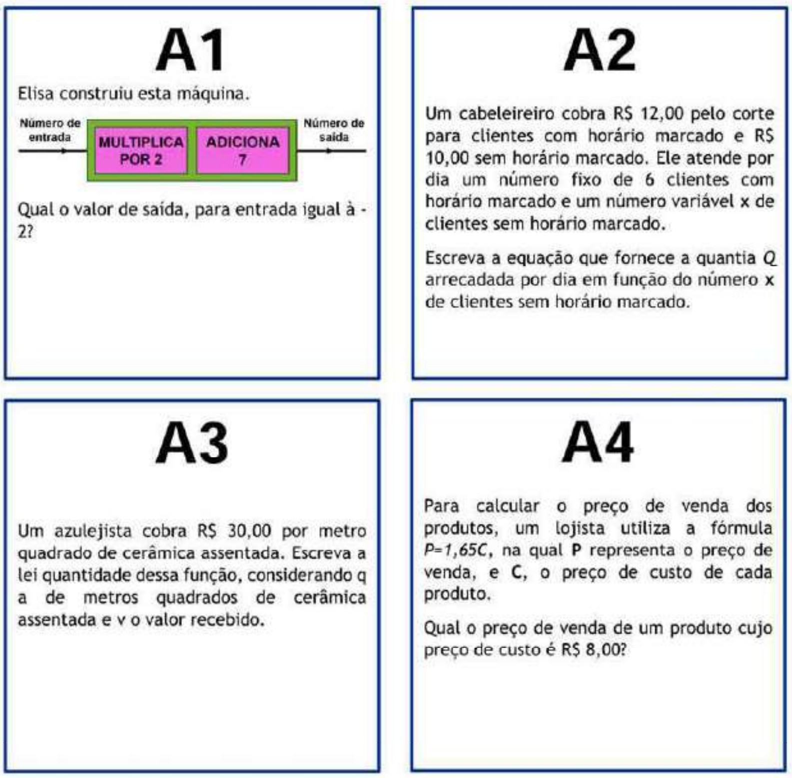
Os jogos continuam sendo muito importantes para o ensino-aprendizagem de Matemática. Segundo Ponte (2004, p.12),“ a aprendizagem não decorre de ouvir diretamente o professor ou de fazer esta ou aquela atividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou.”. Por essa razão, pensar na inserção de jogos na aula de Matemática pode ser uma ferramenta poderosa para tornar o aprendizado mais interessante e eficaz, incentivando a compreensão de conceitos e habilidades matemáticas de forma lúdica e interativa. O jogo pode abrir caminho para aprendizagem, aprimorar conhecimentos já adquiridos, além de promover o desenvolvimento de outras habilidades, tais como observação, análise, reflexão e tomada de decisão. O jogo da velha da função polinomial foi apresentado em uma formação continuada oferecida pela Gerência Regional de Educação do Sertão do Alto Pajeú (GRE - SAP) aos professores da rede estadual de Pernambuco, que abordava como tema as funções polinomiais do 1° grau. A fim de diversificar os meios pedagógicos, bem como dinamizar a rotina de aulas, essa atividade foi inserida na sequência didática em formato adaptado.

Ao pesquisar sobre esse jogo na plataforma *Google*, encontramos alguns jogos com o mesmo nome, mas que possuem algumas diferenças em relação ao proposto no recurso educacional desta dissertação. Há versões que abordam só função polinomial do 1º grau, outras abordam funções polinomiais do 1º e 2º graus e o formato do jogo permite que seja aplicado com uma gama de conteúdos distintos.

O material necessário para a realização da atividade é composto por um tabuleiro e um baralho de perguntas. No que diz respeito à aplicação, muitas versões encontradas sugerem que o exercício seja aplicado a duplas; aqui, por outro lado, sugere-se que seja aplicado dividindo-se a sala de aula em dois grupos de estudantes, assim o professor ao invés de fazer a impressão do tabuleiro e das questões para cada dupla, precisará apenas imprimir um tabuleiro em um formato maior.

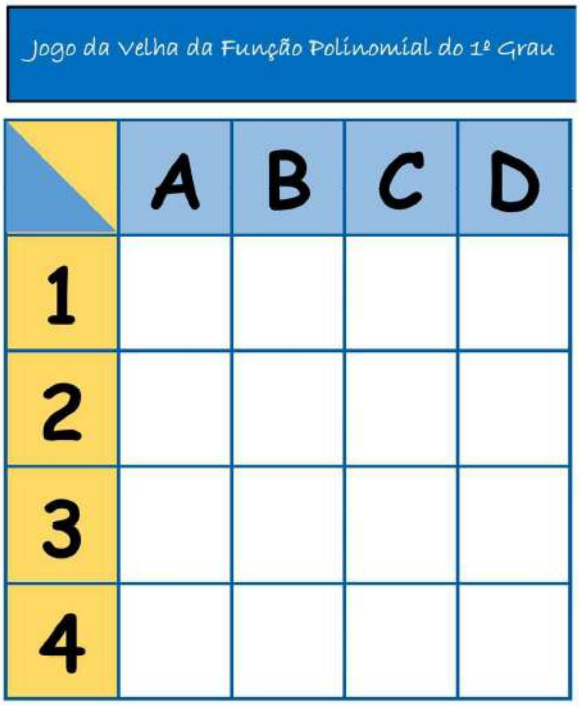
A preparação do tabuleiro pode ser feita do seguinte modo: primeiramente, escolhe-se o tamanho, variando entre $2 \times 2, 3 \times 3$ ou 4×4; cada célula do tabuleiro deve ser impressa em uma folha de papel no tamanho A4; a montagem do tabuleiro, sob responsabilidade do professor, é feita depois dessa etapa. Por fim, deve-se imprimir um baralho de perguntas. A Figura 20 mostra modelos de baralho e tabuleiro.

Figura 20 – Exemplo de cartas do Jogo da Velha da Função Polinomial do 1º grau



Fonte: Produzido pela autora no aplicativo microsoft word

Figura 21 – Exemplo de tabuleiro do Jogo da Velha da Função Polinomial do 1º grau



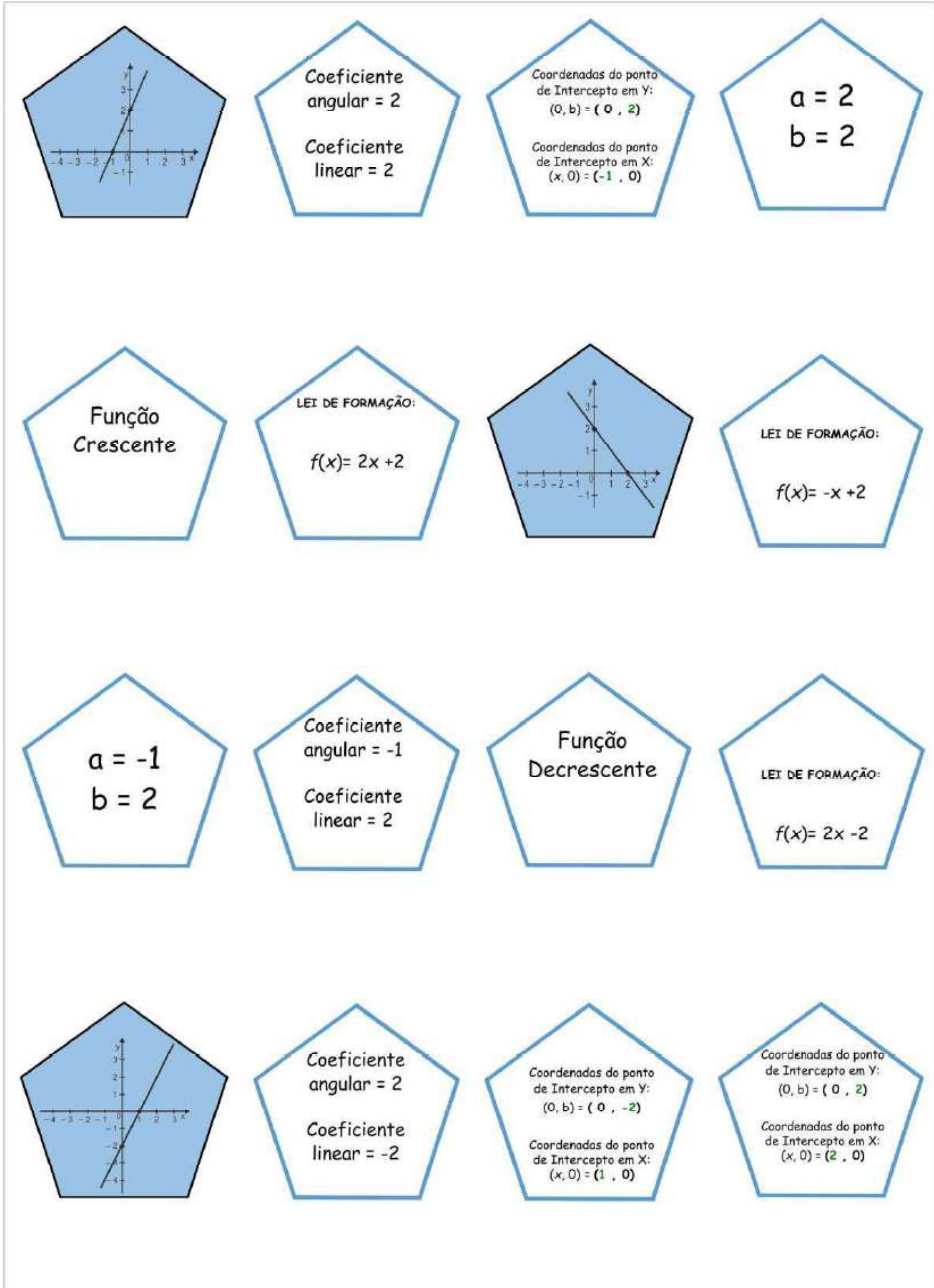
Fonte: Produzido pela autora no aplicativo microsoft word

3.3.5 Flores da Função Polinomial do 1º grau - Adaptado

O jogo ***Flores da Função Polinomial do 1º Grau - Adaptado*** foi pensado para ser aplicado ao final da apresentação do conteúdo, com o objetivo de revisar e/ou aprimorar os conceitos trabalhados. A versão proposta é uma adaptação do jogo que foi apresentado em uma formação continuada oferecida pela GRE-SAP aos professores da rede estadual de Pernambuco. Ao pesquisar sobre esse jogo na plataforma *Google*, encontram-se algumas variações inclusive com outros nomes. Uma versão que vale a pena ser mencionada pelo seu relato de experiência exitosa é o jogo Função Floral, que pode ser encontrado no relato de experiências intitulado **Mobilizar e/ou Construir Conceitos de Função de Forma Lúdica: Potencialidades do Jogo Função Floral**, de autoria de Daniela Batista Santos, Rafael Florencio de Oliveira e Jamilly da Silva Santos. O jogo, que aborda funções polinomiais do primeiro e segundo graus, foi confeccionado por alunos de licenciatura em Matemática em uma disciplina que propunha a análise e reflexão sobre jogos e de um modo particular os jogos de “treinamento”. Segundo Lara (2003), esses jogos têm como objetivo revisar e/ou aprimorar conceitos já desenvolvidos pelo professor.

Voltando a nos deter ao jogo ***Flores da Função Polinomial do 1º Grau - Adaptado***, os materiais necessários para sua aplicação são trinta cartas, das quais 5 são “miolos” e 25 são “pétalas”. Os “miolos” possuem gráficos de funções polinomiais do 1º grau e as “pétalas” possuem características dos gráficos, como a lei de formação, coeficientes angular e linear, interseção com o eixo x e com o eixo y, e tipo de monotonicidade. O “miolo” tem o formato de um pentágono e, portanto, são cinco as “pétalas” que se encaixam, formando assim uma flor. Para a execução da atividade, deve-se dividir os estudantes em dois grupos, cada um recebendo 30 cartas embaralhadas; o objetivo é montar cinco flores com seus “miolos” e “pétalas” correspondentes. No primeiro momento do jogo, a intenção é que os integrantes do grupo interajam entre si e cheguem às suas próprias conclusões. Após montarem todas as flores, o professor confere o que foi feito e pontua a equipe que acertar o maior número de flores. Havendo flores com “pétalas” que não se encaixam no “miolo” em questão, o professor orienta que façam as correções necessárias e, dessa vez, participa dando dicas e tirando dúvidas que possam estar induzindo ao erro. Abaixo, na Figura 22, pode-se observar um exemplo de cartas do jogo que estão disponibilizadas no recurso educacional vinculado a este trabalho.

Figura 22 – Exemplo de cartas do Jogo Flores da Função Polinomial do 1º Grau - Adaptado



Fonte: Formação de Professores de Matemática - Rede Estadual de Pernambuco

3.3.6 Oficina com Malha Quadriculada - Função Polinomial do 2º Grau

Para a introdução de funções polinomiais do 2º grau, a segunda sequência didática sugere uma contextualização, relacionando a partir de situações como: o lançamento de um projétil, antena parabólica e obras arquitetônicas com arcos parabólicos. Em seguida, traz uma atividade de investigação de dados em tabelas, na qual o aluno é levado a relacionar os dados fornecidos com as funções em estudo. Após esse primeiro contato o professor apresenta a definição de função polinomial do 2º grau e explora seus principais pontos, como zeros da função, vértice e representação gráfica. Até esse ponto, o material é apresentado de modo que pode ser impresso ou que o professor anote na lousa, devendo ele mesmo considerar as informações mais importantes, enquanto o aluno também faz suas próprias anotações.

Uma vez que os conceitos e definições relativos à função polinomial do 2º grau já foram trabalhados, é apresentada a ***Oficina com malha quadriculada - função polinomial do 2º grau***. Para a realização desta, faz-se necessário os seguintes materiais: tabelas previamente impressas, malha quadriculada e lápis de cor. O seu desenvolvimento consiste na divisão dos estudantes em cinco grupos; cada grupo recebe suas tabelas específicas e devem preenchê-las para, em seguida, construir os gráficos das funções contidas nas tabelas, usando o mesmo plano cartesiano disposto na malha quadriculada, e utilizando um único lápis de cor para cada gráfico construído. Por fim, o grupo deve analisar os gráficos desenhados e apresentar as suas conclusões para toda a turma, expondo a sua construção. Na Figura 23 pode-se observar um exemplo de tabelas utilizadas na execução da oficina.

Figura 23 – Exemplo de tabelas - Oficina com Malha Quadriculada

OFICINA COM MALHA QUADRICULADA – FUNÇÃO QUADRÁTICA

x	$y = f(x) = 3x^2$

Rascunho

OFICINA COM MALHA QUADRICULADA – FUNÇÃO QUADRÁTICA

x	$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Rascunho

Fonte: Formação de Professores de Matemática - Rede Estadual de Pernambuco

3.3.7 Jogo Enigma de Funções - Adaptado

O jogo ***Enigma das Funções*** tem como objetivo fazer com que os alunos relacionem as funções quadráticas apresentadas na forma gráfica e algébrica com as suas respectivas características, e desenvolvam a linguagem matemática própria a funções e gráficos, e aprimorem o raciocínio lógico-dedutivo. Os materiais necessários para a sua aplicação são dois baralhos de 24 cartas cada, confeccionados em duas cores distintas, e um baralho de 20 cartas de perguntas, confeccionado em uma cor diferente das cores dos baralhos. A metodologia de aplicação consiste em dividir os estudantes em dois grupos, jogando um grupo contra o outro, seguindo as seguintes regras:

- Cada grupo recebe um conjunto de cartas de funções que devem estar visíveis e organizadas para que todos possam ver.

- As cartas de perguntas são embaralhadas e colocadas no centro da mesa, voltadas para baixo.

- Cada grupo escolhe uma função do seu baralho, sem que seu oponente saiba qual é, e registram a forma algébrica da função escolhida. (O professor fica ciente das funções escolhidas para que possa monitorar o restante dos jogos).

- O objetivo de cada grupo é descobrir a função de seu oponente.

- Decide-se quem começa e, a partir daí, os grupos jogam alternadamente.

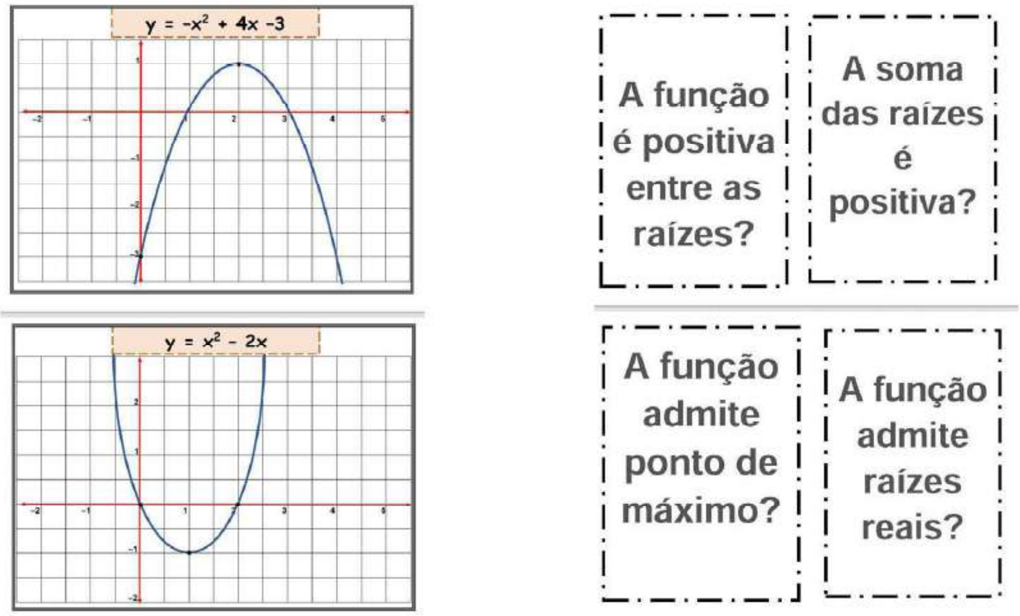
- Na sua vez, um jogador do grupo retira uma carta do baralho e pergunta ao seu oponente se a função escolhida por ele tem aquela característica. O oponente deve responder sim ou não. O jogador deve excluir as funções que não lhe interessam.

  Por exemplo, se a carta retirada contiver "O vértice está no terceiro quadrante?" e a resposta for "sim", ficam excluídas as funções que não contêm vértice no 3º quadrante; se a resposta for "não", isso significa que a função escolhida não têm vértice no 3º quadrante. Sucessivamente, as perguntas auxiliam cada jogador a excluir as funções até que seja possível concluir qual é a função escolhida por seu oponente. As perguntas não voltam ao baralho. Se o baralho de perguntas terminar, as cartas são embaralhadas para formar novamente o baralho das cartas de perguntas.

- Ganha o jogo o primeiro grupo que identificar a função escolhida por seu oponente.

Observe na Figura 24 os gráficos e modelo de baralho que são sugeridos para a aplicação do jogo.

Figura 24 – Exemplo de gráficos e cartas do Jogo Enigma das Funções - Adaptado



Fonte: Formação de Professores de Matemática - Rede Estadual de Pernambuco

A exploração das oficinas e jogos matemáticos tem o objetivo de transcender o mero entretenimento, posicionando-os como ferramentas pedagógicas de grande potencial para transformar o ensino da Matemática. Ao integrar desafios lúdicos, eles estimulam a curiosidade, promovem a resolução de problemas de forma colaborativa e, acima de tudo, criam um ambiente no qual o erro é encarado como parte natural do processo de aprendizagem, e não como um fracasso.

4 Funções Polinomiais do Primeiro e Segundo Graus – Proporcionalidade

É possível que alguns alunos e professores entendam função linear e proporcionalidade como dois assuntos distintos. No entanto, os dois assuntos em questão possuem a mesma ideia matemática. É acertado dizer inclusive que a função linear dada pela fórmula $f(x) = ax$ é a modelagem de função polinomial do primeiro grau utilizada para resolver problemas de proporcionalidade.

A ideia de proporcionalidade surgiu da necessidade prática de comparar tamanhos, pesos, quantidades e distâncias. As primeiras evidências de seu uso remontam às civilizações antigas. Como afirma Boyer e Merzbach (2019, p.20), os Egípcios utilizavam a proporcionalidade na construção de pirâmides e templos, onde a relação entre as dimensões precisava ser mantida para a estabilidade e a estética. Os autores ainda afirmam que "na era babilônica, em seus tabletes de argila, são encontrados problemas que implicam o uso de proporcionalidade para cálculos de áreas, volumes e até mesmo juros, mostrando uma abordagem aritmética para as relações.". Desse modo, trataremos neste capítulo da proporcionalidade que pode ser explorada usando modelos matemáticos de funções do primeiro e segundo graus. A fundamentação teórica e conceitual abordadas estão à luz da dissertação: *Funções Afins e a Relação entre Função Linear, Proporcionalidade e Regra de Três* (FIGUEIREDO, 2017), orientada pelo Professor Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho e do livro *Números e Funções Reais* (LIMA, 2013).

4.1 Funções Polinomiais do Primeiro Grau – Proporcionalidade

O Organizador Curricular de Matemática (PERNAMBUCO, 2025) para a formação geral básica propõe a seguinte habilidade para o ensino de funções polinomiais do primeiro grau-proporcionalidade: **(EM13MAT401PE33)** "converter representações algébricas de funções polinomiais do 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos em que as funções tenham um comportamento proporcional, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais." (PERNAMBUCO, 2025). Com intuito de atingir a habilidade pretendida, faz-se necessário trabalhar os seguintes pontos:

- Identificar se a função polinomial do primeiro grau é linear ou não;
- Entender a definição de proporcionalidade;

- Identificar quando duas grandezas são diretamente proporcionais.

Dessa forma, as subseções que seguem tratam dos pontos elencados.

4.1.1 Função Linear e Proporcionalidade

A função linear tem o comportamento de crescimento ou decrescimento constantes. Assim, uma função é linear se qualquer mudança na variável independente causa uma mudança proporcional na variável dependente.

Definição 4.1: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$, onde a é um número real não nulo, é chamada de função linear.
Observações:

1. O gráfico da função linear é a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, a)$.
2. A imagem da função linear é $Im(f) = \mathbb{R}$, pois dado $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \dfrac{y}{a}$ tal que $f(x) = ax = a\dfrac{y}{a} = y$.
3. A função linear $f(x) = x$ é chamada de função identidade.

4.1.2 Proporcionalidade

A proporcionalidade é um conceito matemático fundamental que descreve a relação entre duas ou mais grandezas, onde a variação de uma delas implica uma variação correspondente na outra, mantendo uma razão constante.

Definição 4.2: Uma *proporcionalidade* é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais a, b tem-se $f(ab) = a \cdot f(b)$ (proporcionalidade direta) ou $f(ab) = \dfrac{f(b)}{a}$, se $a \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Claro que se nos termos da definição, se f é uma proporcionalidade direta, então, fazendo $x = f(1)$, tem-se:

$$f(a) = f(1 \cdot a) = f(1) \cdot a = xa, \forall a \in \mathbb{R}$$

Utilizando uma linguagem que nos favorece, temos $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, uma proporcionalidade direta é uma função linear. Em suma, isto equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando o número a (chamado a *constante de proporcionalidade*) é tal que $y = ax$ para todo valor de $x \in \mathbb{R}$

A proporcionalidade inversa é representada por uma função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, no qual $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, tal que $f(ax) = \frac{f(x)}{a}$ para $a, x \in \mathbb{R}^*$ quaisquer. De modo análogo ao raciocínio anterior, podemos dizer que, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, temos $f(x) = \frac{a}{x}$ onde a constante a é $f(1)$.

4.1.3 Grandezas Diretamente Proporcionais

Na subseção anterior, falamos em grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais. Agora, nesta subseção, trataremos apenas da proporcionalidade direta e, sem risco de confusão nos referiremos apenas como proporcionalidade.

Como exemplos de grandezas diretamente proporcionais temos:

- Preço pago e quantidade de produto adquirido;
- Velocidade e distância, admitindo o tempo constante;
- Quantidade de peças produzidas e número de funcionários, considerando o ritmo de trabalho constante.

A relação entre o preço pago e a quantidade de produto adquirido é um dos exemplos mais clássicos e intuitivos de proporcionalidade direta na matemática e no cotidiano. Quando compramos um produto, o preço total que pagamos geralmente aumenta na mesma proporção em que a quantidade do produto aumenta, e diminui na mesma proporção em que a quantidade diminui. Isso significa que a razão entre o preço pago e a quantidade adquirida é constante.

A *constante* é o valor numérico que define a relação entre grandezas proporcionais. Ela expressa a taxa na qual uma grandeza varia em relação à outra e será chamada de *constante de proporcionalidade*.

Definição 4.3: Dizemos que duas grandezas são *diretamente proporcionais*, quando se uma delas aumenta a outra também aumenta na mesma proporção. Do mesmo modo, se uma das grandezas diminui, a outra também diminui na mesma proporção.

4.2 Funções Polinomiais do Segundo Grau – Proporcionalidade

Para o ensino de funções polinomiais do segundo grau – proporcionalidade, o Organizador Curricular de Matemática (PERNAMBUCO, 2025), da formação geral básica, propõe a seguinte habilidade: **(EM13MAT402PE34)** "converter e analisar representações algébricas de funções polinomiais do $2^{\underline{o}}$ grau em representações geométricas no plano cartesiano, reconhecendo o papel dos coeficientes a, b e c no gráfico, como também distinguir os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado de outra variável, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.". (PERNAMBUCO, 2025)

A primeira parte da habilidade menciona a conversão da representação algébrica da função polinomial do segundo grau em sua representação gráfica. Esse ponto já foi contemplado em habilidades propostas anteriormente. Por essa razão, a ênfase se dará na segunda parte da habilidade, isto é, na capacidade de o aluno reconhecer o papel dos coeficientes no gráfico, distinguindo os casos nos quais uma variável seja diretamente proporcional ao quadrado de outra variável.

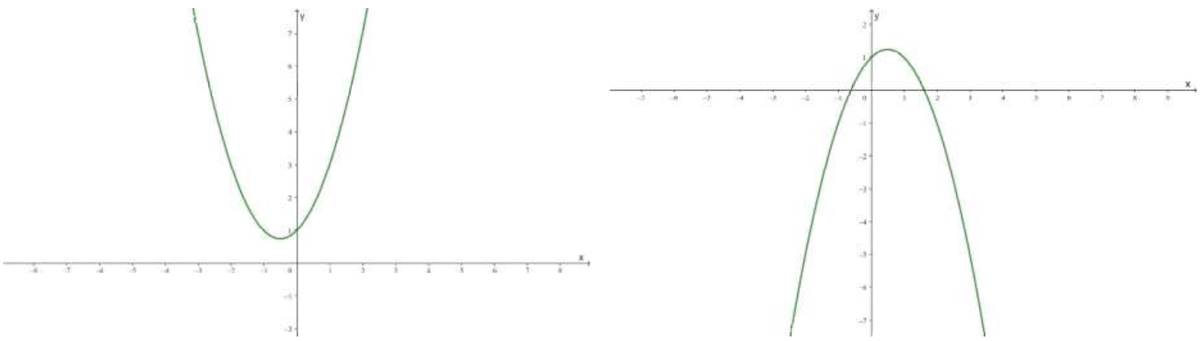
Desse modo, as subseções que seguem tratam das variações dos coeficientes a, b e c, os quais passaremos a tratar como parâmetros que definem a função polinomial do segundo grau.

4.2.1 Variação do Parâmetro a

O parâmetro a é responsável pela concavidade e abertura da parábola. Desse modo, a concavidade é voltada para cima ou para baixo se $a > 0$ ou $a < 0$, respectivamente.

Como exemplo, temos as funções $f(x) = x^2 + x + 1$ e $g(x) = -x^2 + x + 1$, para as quais $a > 0$ e $a < 0$, respectivamente, possuem os gráficos mostrados na Figura 25.

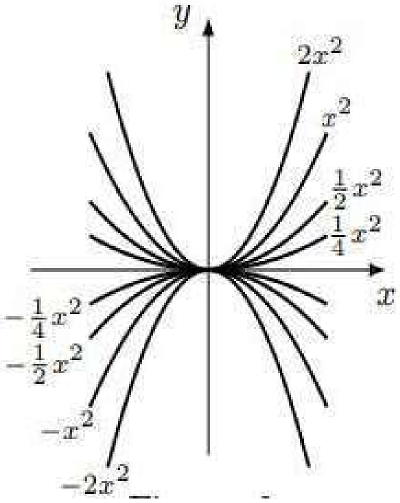
Figura 25 – Gráficos com o parâmetro $a > 0$ e $a < 0$, respectivamente



Fonte: A autora via software Geogebra

Ademais, quanto maior for o valor de $|a|$, menor será a abertura da parábola, ou seja, tem-se uma parábola mais “fechada” independentemente da sua concavidade, como podemos ver na Figura 26.

Figura 26 – Gráfico com a variação do parâmetro a



Fonte: (ALMEIDA, 2020)

4.2.2 Variação do parâmetro b

O parâmetro b indica se a parábola cruza o eixo y no ramo crescente ou decrescente.

- Se $b > 0$, a parábola cruza o eixo y no ramo crescente, independentemente do valor de a ser positivo ou negativo;

Na Figura 27, observe exemplos de gráficos com o parâmetro b positivo.

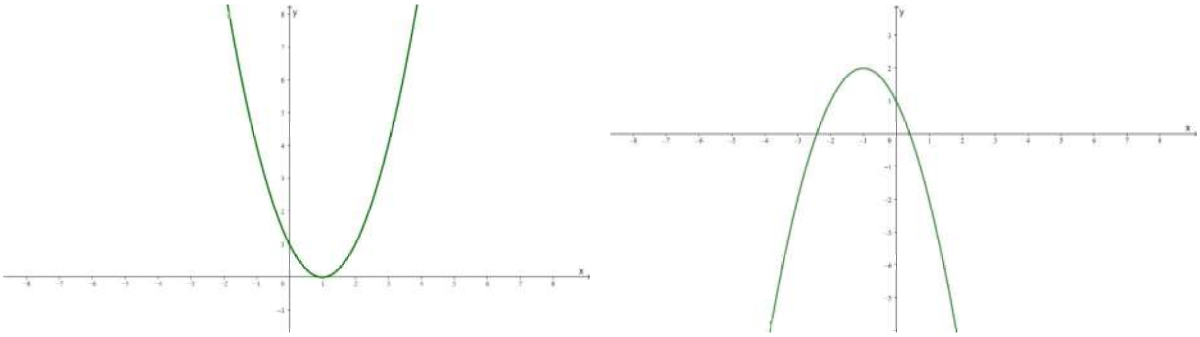
Figura 27 – Gráficos com o parâmetro $b > 0$

Fonte: A autora via software Geogebra

- Se $b < 0$, a parábola cruza o eixo y no ramo decrescente;

Na Figura 28 apresentamos exemplos de gráficos com o parâmetro b negativo.

Figura 28 – Gráficos com o parâmetro $b < 0$

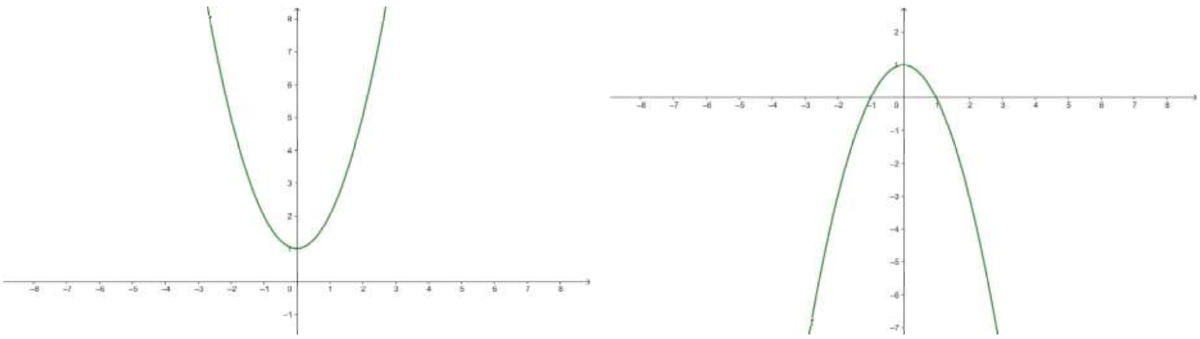


Fonte: A autora via software GeoGebra

- Se $b = 0$, o eixo y contém o vértice da parábola.

Na Figura 29 vejamos exemplos de gráficos com o parâmetro b igual a zero.

Figura 29 – Gráficos com o parâmetro $b = 0$



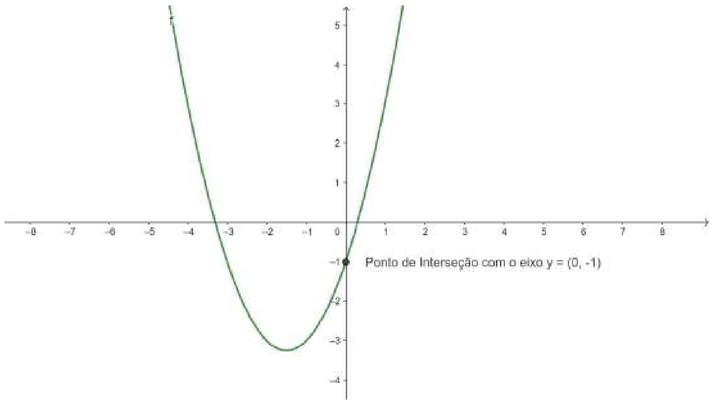
Fonte: A autora via software Geogebra

4.2.3 Variação do Parâmetro c

O coeficiente c indica a interseção da parábola com o eixo y, fato que independe dos valores dos outros coeficientes. Sendo assim, o gráfico intersecta o eixo y no valor $y = c$ quando $x = 0$, ou seja, o ponto de interseção é $(0, c)$.

Vejamos na Figura 30 a representação gráfica de uma função polinomial do 2º grau, evidenciando o seu ponto de interseção com o eixo y.

Figura 30 – Gráfico evidenciando o coeficiente c



Fonte: A autora via software Geogebra

4.3 Dissertações, Produtos Educacionais Escolhidos e Materiais Sugeridos

Para contemplar as habilidades propostas no Organizador Curricular de Matemática (PERNAMBUCO, 2025) para a formação geral básica, que foram mencionadas na Seção 4.1, foram selecionados a seguinte dissertação juntamente com seu recurso educacional:

- **Gráficos de Funções do 2º grau: Proposta de Abordagem com o Auxílio do Simulador PhET**, apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, por Matheus Fenti Soares no ano de 2024.

Com o intuito de complementar o ensino das relações entre os coeficientes de uma função polinomial do 2º grau e o seu gráfico, foi utilizado também o seguinte artigo:

- **Relações entre Coeficientes e Gráficos da Função Quadrática** de Marciane Linhares Carlos, apresentado no VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática em ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul em 2017.

4.3.1 Dissertação: Gráficos de Funções do 2º grau: Proposta de Abordagem com o Auxílio do Simulador PhET

A dissertação *Gráficos de Funções do 2º grau: Proposta de Abordagem com o Auxílio do Simulador PhET* (SOARES, 2024), traz uma abordagem histórica sobre as cônicas bem como a sua definição formal. Em seguida, o trabalho é desenvolvido com foco em uma cônica em especial: a parábola. Daí, é apresentada a sua definição e alguns conceitos relativos às suas características para, então, ser apresentada uma sugestão de abordagem no ensino médio.

O recurso educacional que o autor sugere é uma proposta didática que visa trabalhar a relação entre a variação dos coeficientes de uma função polinomial do 2º grau e as mudanças sofridas pelo seu gráfico. Para tanto, ele sugere usar a tecnologia como parte integrante da metodologia de ensino, de modo particular, usando o *Simulador PhET*.

A escolha desta ferramenta, segundo o autor, se deve ao fato de se tratar de um software de fácil manipulação de parâmetros em tempo real e, ainda, por ser intuitivo, facilita sua utilização tanto por professores quanto por alunos que provavelmente não apresentarão dificuldades técnicas.

O projeto PhET *Interactive Simulations* (*Physics Education Technology*) é um laboratório virtual e foi desenvolvido na *University of Colorado Boulder* com o objetivo de criar uma maneira divertida e atraente de aprender Ciências e Matemática. As simulações do PhET envolvem as áreas de Ciências Exatas e da Terra, Biologia, Matemática, Física e Química e podem ser acessadas gratuitamente através do link <phet.colorado.edu/pt_BR>. Elas permitem que os alunos manipulem variáveis e observem os efeitos em tempo real, auxiliando na compreensão dos conteúdos de forma prática, possibilitando aos alunos uma visão mais profunda do conteúdo ou fenômeno estudado. Além disso, este simulador destaca-se frente a outros simuladores considerando que:

- Possui interatividade intuitiva;
- Interfaces simples e fáceis de usar (mesmo para aqueles com pouca familiaridade com tecnologia)
- Permite visualização instantânea das mudanças no gráfico.

Para o uso do *Simulador PhET*, o autor sugere inicialmente as seguintes orientações:

- Acessar a página do PhET (através do link apresentado anteriormente);
- Clicar na opção "Simulações" e escolher o ícone "Matemática" (Esta opção irá abrir diversas opções de simuladores da matemática, mas o objeto de estudo é o simulador "Gráfico de Quadráticas");
- Clicar sobre o simulador "Gráfico de Quadráticas" (Na parte inferior aparecerão algumas opções que também podem direcionar o professor, como: tópicos que serão trabalhados neste simulador, os objetivos de aprendizagem, algumas opções de plano de aula, atividades básicas propostas para utilização do simulador, além de um descritivo específico deste simulador (em inglês)).

- Clicar sobre a imagem com o símbolo “play” (A partir deste momento, o usuário estará logado no simulador interativo que apresentará quatro opções: “Explorar”, “Forma Padrão”, “Forma Vértice e Foco” e “Diretriz”).
- Clicar em Forma Padrão.

Após as instruções iniciais que servem tanto para os professores quanto para os estudantes, são sugeridas pelo autor duas atividades que têm como objetivo explorar o traçado do gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, observando seus coeficientes, zeros da função e vértices. As atividades devem ser entregues aos alunos para que sigam o roteiro proposto, fazendo uso do simulador.

A *Atividade* 01, propõe que seja fixada uma função pelo professor para que o aluno possa fazer algumas experimentações no simulador. Após as experimentações feitas pelos estudantes, o professor faz alguns questionamentos acerca da concavidade da parábola, por exemplo, pergunta os valores para os quais a concavidade foi alterada e, caso algum estudante não tenha feito experimentações suficientes, o professor pode solicitar que continuem fazendo experimentações, de modo a tentar responder as indagações. Vale ressaltar que esse tipo de conceito já foi trabalhado anteriormente o que facilitará a identificação por parte dos estudantes. Um outro questionamento que pode ser feito durante essa primeira atividade é acerca do coeficiente c, instigando os alunos a identificarem o que acontece com o gráfico após a sua variação. Percebe-se que, além de levar o aluno a fazer descobertas, é possível também revisar conceitos, inclusive como zeros da função e o vértice da parábola.

A *Atividade 02*, por sua vez, é um pouco mais específica, visando trabalhar a relação entre os coeficientes da função polinomial do 2º grau e as alterações sofridas pelo gráfico. Por essa razão, a atividade é dividida em três partes. Cada parte fornece direcionamentos para a análise de cada coeficiente, e de início é o próprio estudante que escolhe os valores iniciais dos coeficientes, devendo alterá-los, caso seja solicitado no decorrer da atividade. São exemplos de direcionamentos da atividade: *“Qual a concavidade da parábola da função escolhida?”*, *“Se definirmos o coeficiente $a = 0$, qual será a concavidade da parábola? Explique”*, *“Sendo $b > 0$, quando a função intercepta o eixo y, o ramo da parábola é crescente ou decrescente?”*, *“Sendo $b < 0$, quando a função intercepta o eixo y, o ramo da parábola é crescente ou decrescente?”*, *“Qual a coordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo y?”*. Com esses comandos específicos, pretende-se levar os alunos a perceber de que modo as variações dos coeficiente impactam no gráfico.

4.4 Artigo: Relações entre Coeficientes e Gráficos da Função Quadrática

A proposta que vem complementar a sequência didática sugerida para contemplação da habilidade **EM13MAT402PE34**, foi adaptada do artigo *Relações entre Coeficientes e Gráficos da Função Quadrática* da autoria de Marciane Linhares Carlos. O artigo em questão tem o objetivo de trabalhar com as representações algébrica e gráfica de uma função polinomial do 2º grau através de atividades cujo foco é analisar a percepção dos estudantes acerca das relações entre os coeficientes e o gráfico da função em questão. Para isso, foi escolhido o software dinâmico GeoGebra.

Apesar de existirem muitos objetos e softwares matemáticos, o GeoGebra destaca-se por sua interatividade, podendo-se acessar funções tanto via botões na barra de ferramenta quanto no campo de entrada, tornando-se acessível para alunos e professores.

4.4.1 Proposta Didática usando o GeoGebra

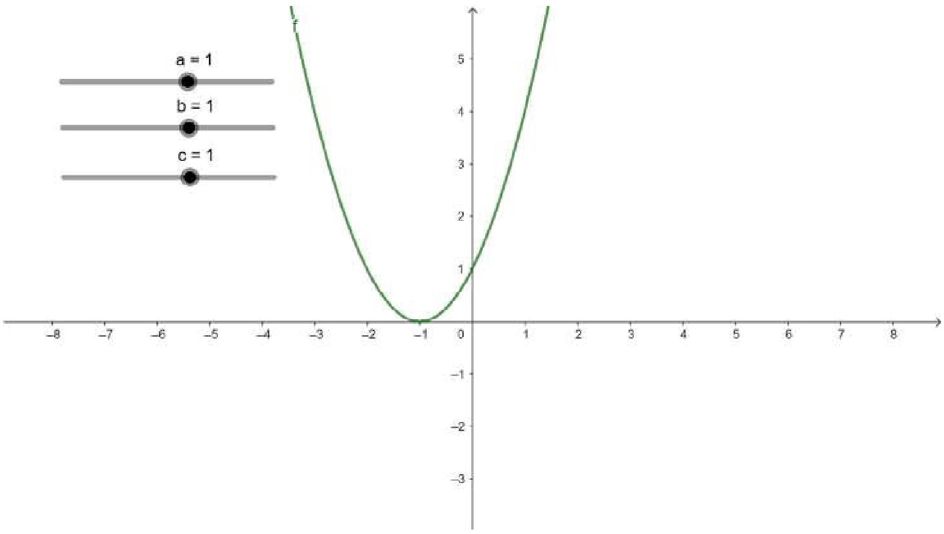
O GeoGebra é um software gratuito que combina álgebra, geometria, cálculo, estatística, tabelas e gráficos. Pode ser usado para aprender ou ensinar Matemática em todas as etapas da educação básica. Foi criado pelo professor de educação matemática Markus Hohenwarter em 2001, como parte de sua tese de doutorado.

Nessa proposta didática, em que utilizamos o GeoGebra, as tarefas foram divididas em dois momentos, sendo necessário para cada momento duas aulas de 50 minutos. É necessário enfatizar que nesta etapa de ensino os estudantes já trabalharam as representações algébrica e gráfica de uma função polinomial do 2º grau.

A *Atividade 01* consiste em digitar as funções no software e analisar as relações entre os coeficientes e o gráfico seguindo um roteiro prévio de atividades preparado pelo professor, que é disponibilizado no recurso educacional desta dissertação, podendo ser adaptado para se adequar à necessidade da turma em que será aplicado. No roteiro são sugeridas algumas funções, e os estudantes deverão construir os seus gráficos e preencher uma tabela com questionamentos a partir do gráfico, tais como: *"Valor do coeficiente a"*, *"Valor da abscissa no ponto de interseção com o eixo y"*, entre outros. Em seguida, após a construção dos gráficos solicitados, espera-se que os alunos consigam concluir qual a relação dos coeficientes com alguns comportamentos da parábola, o que é cobrado nas questões seguintes do roteiro.

A *Atividade 02* fornece aos alunos um gráfico pronto no GeoGebra, que deve conter a ferramenta "seletores" habilitada, pois, assim, os estudantes conseguem movimentar a parábola com o uso dos "seletores", que representam os coeficientes da função quadrática. Um exemplo é mostrado na Figura 31:

Figura 31 – Gráfico com Seletores



Fonte: A autora via software GeoGebra

Em seguida, é solicitado aos estudantes que movimentem os seletores para que possam responder a questionamentos bem diretos, do tipo: *"O que acontece com o gráfico ao movimentar o coeficiente a, e ao movimentar o coeficiente b? E quando se movimenta o coeficiente c?"*. É interessante que o professor solicite aos estudantes que registrem suas respostas no caderno.

5 Funções Polinomiais do 1º e 2º graus: Sequências numéricas, Domínio de validade, Imagem, Crescimento e Decrescimento

Para finalizar a proposta de conteúdos que sugere o organizador curricular de Matemática da formação geral básica (PERNAMBUCO, 2025), para o 2º trimestre do 1º ano do ensino médio, temos as seguintes habilidades:

- **EM13MAT302PE18:** "Construir modelos matemáticos, a partir das leis de formação, para resolver situações-problema em vários contextos, envolvendo funções polinomiais do 1º e 2º graus, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais."(PERNAMBUCO, 2025)
- **EM13MAT404PE36:** "Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças como, por exemplo,uma tabela de imposto de renda, em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento ou decrescimento, entre outras, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais."(PERNAMBUCO, 2025)

Analisaremos as habilidades vistas nas subseções que seguem, com o intuito de identificar os conceitos a serem abordados bem como as melhores estratégias de ensino que podem ser utilizadas, para que possam ser integralmente contempladas. Para as definições formais que serão apresentadas usaremos como referência o livro "Introdução à Análise Matemática" (ÁVILA, 1999).

5.1 Sequências Numéricas - Funções Polinomiais do 1º e 2º Graus

A habilidade **EM13MAT302PE18** sugere a construção de modelos matemáticos, a partir das leis de formação, para resolver situações-problema. Em outras palavras, sugere que seja trabalhado com *Modelagem Matemática.*[1] Sobre modelo matemático,

[1] Modelagem Matemática é uma metodologia que consiste em criar modelos matemáticos para transformar problemas da vida real em problemas matemáticos.

Bertone, Bassanezi e Jafelice (2019) definem Modelagem Matemática como: "Um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.". Em sala de aula, a modelagem acontece quando o professor leva um problema que envolve uma situação cotidiana, de preferência que tenha relação com a realidade do aluno, e, para resolvê-la, o aluno necessita buscar soluções a partir de seus conhecimentos prévios. Depois disso, o estudante é levado a avaliar, refletir, testar hipóteses, até chegar à resolução do problema. Assim, assume a posição de sujeito ativo no processo de ensino-aprendizagem e atribui significado ao conteúdo estudado em sala.

Considerando que os estudantes até o momento já viram os conceitos necessários para que consigam modelar situações que envolvem funções polinomiais do primeiro grau e solucioná-las, cabe ao professor escolher as situações-problema que aplicará, priorizando aquelas que estão em sintonia com a realidade em que o estudante está inserido. Isso torna o problema mais atrativo e o conteúdo ganha significado, atingido, então, o objetivo da habilidade.

5.1.1 Sequências Numéricas

As sequências aparecem de forma espontânea em nosso cotidiano. Constantemente precisamos lidar com a sequência dos dias da semana (Domingo, segunda, terça...), sequência dos meses do ano (Janeiro, fevereiro, março...), sequência dos nomes de alunos no diário de classe (Alberto, Amanda, Beatriz...).

Definição 5.1: Uma sequência numérica $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ é uma função f, definida no conjunto dos números naturais, ou inteiros positivos, $a : X \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ em que $a_n = a(n)$. O número n que aí aparece é chamado de *índice* e a_n, o $n-$ ésimo elemento da sequência ou termo geral.

As sequências numéricas podem ser classificadas em relação à sua quantidade de termos e/ou pela função que a descreve. Pela sua quantidade de termos, temos:

- **Sequências Finitas:** Possuem um número finito de termos e podem ser representadas como no exemplo $\{1, 2, \dots, n\}$,

- **Sequências Infinitas:** Possuem um número ilimitado de termos e podem ser representadas como $X = \mathbb{N}$.

Já com relação à função que a define, segue:

- **Sequências Lineares:** Quando a função a que define a sequência é uma função linear.

- **Sequências Não Lineares:** Quando a função a que define a sequência é uma função não linear.

Sendo as sequências numéricas funções por definição, há de se esperar que possam ser definidas por uma lei de formação, mas nem sempre é o caso. Para Paiva (1995, p.4), "A lei de formação de uma sequência é um conjunto de informações capazes de determinar os termos de uma sequência e a ordem em que se apresentam.".

Nos casos em que tal regra exista, ela poderá ser apresentada em função de sua posição (fórmula fechada), ou seja, a sequência fica determinada se cada termo a_n for expresso em função de sua posição n, ou de modo recursivo (fórmula de recorrência), quando a sequência fica determinada se conhecermos um de seus termos e uma sentença que expresse cada termo em função de seu antecessor (ou sucessor).

5.2 Funções: representações algébricas e gráficas, domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento.

Nesta sessão trataremos de algumas definições relativas às funções, a saber, o domínio de validade, imagem, crescimento e decrescimento. Uma vez introduzidos tais conceitos, a habilidade **EM13MAT404PE36** sugere que sejam apresentadas funções definidas por uma ou mais sentenças em suas formas algébrica e gráfica, de modo que o estudante seja levado a identificar esses conceitos, fazendo uso de recursos tecnológicos ou não. Seguem, então, as suas definições de forma que possam ser apresentados em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio.

5.2.1 Domínio de Validade

O domínio de validade de uma função é o conjunto de valores que a função pode assumir, ou seja, os valores para os quais a função é definida. De forma bem didática, podemos definir o domínio como o conjunto de todos os objetos possíveis para a função, ou, o conjunto de entrada, composto pelos elementos que aplicamos na função e que chamamos geralmente de x. Denotaremos o domínio de uma função f por $D(f)$.

Considerando a representação gráfica de uma função, os elementos do domínio estão representados no eixo das abscissas que, de modo simplório, chamamos apenas de eixo x. Para encontrar o domínio de uma função, devemos determinar quais números a função pode assumir de maneira que a sua condição de existência seja preservada. Seguem alguns exemplos de funções e o cálculo de seus respectivos domínios.

Exemplo 5.1: Considere $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ e encontre o seu domínio de validade.

Nesse caso, o denominador não pode ser nulo, pois não existe divisão por zero. Logo, devemos ter

$$x - 1 \neq 0, \text{ isto é, } x \neq 1.$$

Portanto $D(f) = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 1\}$ ou $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Exemplo 5.2: Seja a função $f(x) = \sqrt{4x - 6}$. Qual o seu domínio de validade?

Nos números reais o radicando de uma raiz de índice par não pode ser negativo. Assim,

$$4x - 6 \geq 0, \text{ onde } x \geq \frac{3}{2}$$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq \frac{3}{2}\}$.

Exemplo 5.3: Dada a função $f(x) = \sqrt[3]{3x - 9}$, encontre o seu domínio de validade.

O radicando de uma raiz de índice ímpar pode ser negativo, nulo ou positivo, isto é, $3x - 9$ pode assumir qualquer valor real, consequentemente, x pode representar qualquer valor real. Portanto, $D(f) = \mathbb{R}$.

5.2.2 Imagem

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores de saída que a função pode produzir. É calculada a partir dos valores de entrada, ou seja, dos valores do domínio. Comumente, usamos a letra y para denotar os elementos do conjunto imagem de uma função. Denotaremos a imagem de uma função f por $Im(f)$. A seguir mostraremos alguns exemplos.

Exemplo 5.4 : Encontre o conjunto imagem da função $f(x) = x^2$.

$$f(1) = 1^2 = 1,$$
$$f(2) = 2^2 = 4.$$

De modo geral, para encontrarmos o conjunto imagem dessa função, sabemos que x^2, para $x \in \mathbb{R}$, será sempre um número positivo. Logo, o conjunto imagem será $Im(f) = \mathbb{R}^+$.

Exemplo 5.5: Seja $f(x) = 2x - 1$, $f : A \to B$ em que $A = 0, 1, 2, 3$ e $B = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ qual o conjunto imagem da função?

Solução: Temos

$$f(0) = 2.0 - 1 = 0 - 1 = -1,$$
$$f(1) = 2.1 - 1 = 2 - 1 = 1,$$
$$f(2) = 2.2 - 1 = 4 - 1 = 3,$$
$$f(3) = 2.3 - 1 = 6 - 1 = 5.$$

Logo, o conjunto imagem é $Im(f) = \{-1, 1, 3, 5\}$.

5.2.3 Crescimento e Decrescimento

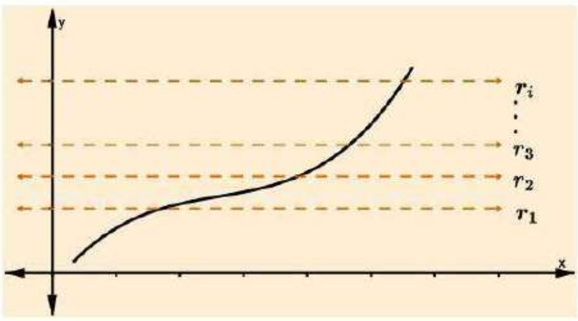
O comportamento de uma função refere-se à maneira como seus valores de saída y ou $f(x)$ se modificam em resposta a mudanças em seus valores de entrada x. Analisar o comportamento de uma função é fundamental para entender o fenômeno que ela modela e para esboçar seu gráfico.

As funções podem ser monotônicas ou não, ou ainda, ser monotônica em apenas parte do seu domínio. A monotonicidade refere-se ao comportamento de uma função em relação ao seu crescimento ou decrescimento em um determinado intervalo. Existem cinco tipos principais de monotonicidade:

- **Função estritamente crescente:** Se para quaisquer x_1 e x_2 no domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Função não decrescente:** Se para quaisquer x_1 e x_2 no domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **Função estritamente decrescente:** Se para quaisquer x_1 e x_2 no domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) > f(x_2)$.
- **Função não crescente:** Se para quaisquer x_1 e x_2 no domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **Função constante:** Se para quaisquer x_1 e x_2 no domínio, $f(x_1) = f(x_2)$.

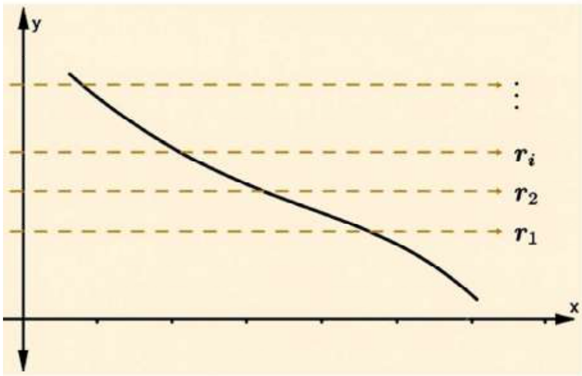
Nas Figuras 32, 33, 34 e 35 temos imagens que ilustram alguns dos comportamentos assumidos por uma função.

Figura 32 – Exemplo de uma função com comportamento crescente



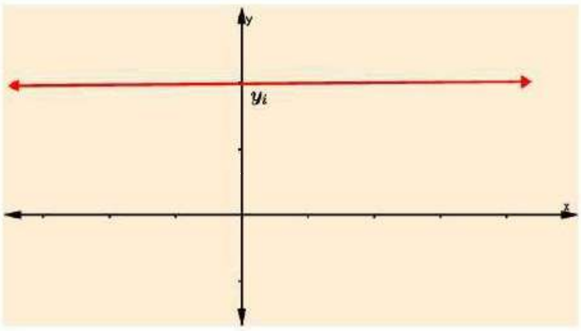
Fonte: (SILVA, 2017)

Figura 33 – Exemplo de uma função com comportamento decrescente



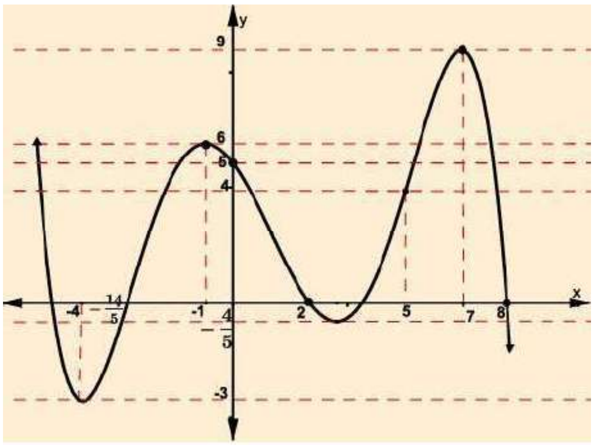
Fonte: (SILVA, 2017)

Figura 34 – Exemplo de uma função com comportamento constante



Fonte: (SILVA, 2017)

Figura 35 – Função com comportamento crescente e decrescente



Fonte: (SILVA, 2017)

De maneira informal, e um tanto intuitiva, podemos dizer que a função é crescente quando seu gráfico, observado da esquerda pra direita, sempre "sobe", e que uma função é decrescente quando seu gráfico, observado da esquerda pra direita, sempre "desce".

5.2.4 Intervalos de Crescimento e Decrescimento de Uma Função

Os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função referem-se às seções do seu domínio onde a função está se comportando de uma maneira previsível: ou seus valores estão aumentando, ou estão diminuindo, ou permanecendo constantes. Analisar esses intervalos é fundamental para entender o "formato" do gráfico de uma função. A partir de um determinado intervalo podemos ter uma das três classificações a seguir:

- **Função crescente em um intervalo:** Dizemos que uma função $f(x)$ é crescente em um intervalo (a, b) se, para quaisquer dois pontos x_1 e x_2, nesse intervalo, com $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Função decrescente em um intervalo:** Dizemos que uma função $f(x)$ é decrescente em um intervalo (a, b) se, para quaisquer dois pontos x_1 e x_2, nesse intervalo, com $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) > f(x_2)$.
- **Função constante em um intervalo:** Dizemos que uma função $f(x)$ é constante em um intervalo (a, b) se, para quaisquer dois pontos x_1 e x_2, nesse intervalo,temos que $f(x_1) = f(x_2)$.

5.3 Dissertações, Produtos Educacionais Escolhidos e Materiais Sugeridos

Como nos capítulos anteriores, essa seção é dedicada ao apanhado de abordagens trazidas ou por dissertações do PROFMAT ou por recursos educacionais provenientes de trabalhos dessa natureza. Aqui, o intuito é selecionar materiais que tratem das habilidades **EM13MAT302PE18** e **EM13MAT404PE36**. Tendo em vista a falta de materiais que atendam as necessidades do ano de ensino com os quais tais materiais serão trabalhados, optou-se por criar ou adaptar materiais que complementam o recurso educacional dessa dissertação.

5.3.1 Oficina: Para Qual Questão Você Tira o Chapéu?

A oficina *Para Qual Questão Você Tira o Chapéu*, foi pensada de modo a atender a habilidade **EM13MAT302PE18**, que propõe a resolução de situações-problema que contemplem contextos variados, de forma que o estudante possa, a partir das leis de formação de funções polinomiais do 1º e 2º , construir modelos matemáticos para solucioná-las.

Uma revisão sobre as leis de formação das funções polinomiais do 1º e 2º graus e uma lista de exercícios bem elaborada, com questões diversificadas e contextualizadas seriam oportunas para contemplar a habilidade em questão. Mas pensando em dinamizar um pouco a aula de Matemática, que por muitas vezes é considerada monótona e mecânica, neste trabalho sugerimos a mesma lista de exercícios, mas na forma de uma oficina. É importante destacar a necessidade de alguns recursos para o desenvolvimento da oficina como, Smart TV ou Data Show.

Propomos, para a aplicação da oficina, que a turma seja dividida em grupos, de no máximo cinco alunos, para que em um número reduzido de estudantes, eles consigam concentrar-se e participar de forma efetiva da resolução das questões. Em seguida, os chapéus são dispostos na lousa ou em uma parede, de modo que fiquem visíveis para toda a turma. A oficina tem início, indo um aluno por grupo e, por vez, escolher um chapéu da sua preferência. Ao escolher o chapéu e verificar a questão contida nele, o aluno diz se tira o chapéu para aquela questão ou não. Se sim, o aluno encaminha-se para o seu grupo e juntos tentarão identificar se trata-se de uma situação que pode ser modelada por uma função polinomial do 1º ou 2º graus com o intuito de solucionar o problema. Se não, o estudante pode devolver o chapéu e retirar um outro chapéu, havendo só mais uma oportunidade de troca. Caso também não queira o segundo chapéu, deve então ficar com o terceiro chapéu retirado. Dando continuidade à oficina, após todos os grupos participarem, há uma segunda e terceira rodadas. Neste caso, é importante que o professor confeccione o triplo de questões, de acordo com a quantidade de grupos que serão formados. Por exemplo, em uma turma com 45 estudantes, podem-se formar 9 grupos com 5 estudantes e 27 questões para a aplicação da oficina.

Em um segundo momento, o professor pode projetar as questões, verificar qual grupo respondeu e conferir a resposta, pontuando caso acerte. Caso o grupo erre, o professor pode solicitar que o aluno que se sentir à vontade vá ao quadro respondê-la e, se acertar, o seu grupo pontua. Como bonificação, o professor pode oferecer notas para os grupos de acordo com o número de acertos. Vale ressaltar que é um momento rico de aprendizagem e interação, entre aluno-aluno e aluno-professor, de revisão e fixação do conteúdo, além de ser possível verificar o nível de aprendizagem dos alunos acerca dos conceitos trabalhados até o momento.

Segue abaixo a figura 36 do modelo de chapéu que pode ser utilizado na oficina, e a Figura 37 com sugestões de tipos de questões que poderão ser impressas e coladas no chapéu:

Figura 36 – Modelo de chapéu para a realização da oficina

Fonte: Produzido pela autora no aplicativo Microsoft Word

Figura 37 – Exemplo de questões para a realização da oficina - Parte 1

Questão 01 - Alice esqueceu a torneira aberta e quando a água chegou ainda ficou derramando por 6 minutos com a vazão constante de 25 litros de água por minuto. Que volume de água terá despejado essa torneira nesses 6 minutos? Há uma função representa essa situação? Se sim, qual?

Questão 02 - Um fabricante de camisetas vende seus produtos a um preço fixo de R$ 20 por camiseta mais uma taxa de entrega de R$ 5 por pedido. O custo total para produzir x camisetas é de R$ 10 por camiseta mais uma taxa fixa de R$ 50. Quantas camisetas o fabricante precisa vender para começar a ter lucro?

Questão 03 - Uma loja que aluga ferramentas costuma cobrar o aluguel de suas mercadorias de acordo com a tabela abaixo.

SHOP FERRAMENTAS			
Dias (D)	Taxa fixa (R$)	Diária (R$)	Total (R$) - P
1	12	6,50	18,50
2	12	13,00	25,00
3	12	19,50	31,50
4	12	26,00	38,00
5	12	32,50	44,50

Após 20 dias, qual será o preço total a pagar?

Questão 04 - O preço de venda de um livro é de R$ 25,00 a unidade. Sabendo que o custo de cada livro corresponde a um valor fixo de R$ 4,00 mais R$ 6,00 por unidade, construa uma função capaz de determinar o lucro líquido (valor descontado das despesas) na venda de x livros, e o lucro obtido na venda de 500 livros.

Questão 05 - Um operador de máquinas recebe mensalmente um salário fixo de R$ 3.000,00, mais R$ 50,00 por hora extra trabalhada. Qual foi o salário deste operador no mês em que fez 12 horas extras?

Questão 06 - (Saeb - Adaptada) O custo de produção de uma pequena empresa é composto por um valor fixo de R$ 1.500,00 mais R$ 10,00 por peça fabricada. Qual é número x de peças fabricadas quando o custo é de R$ 3.200,00?

Questão 07 - (BPW) Sabe-se que a quantia paga pelo consumidor de energia elétrica é dada por: y = ax + b, onde:

- y: montante em reais;
- x: número de quilowatts-hora consumidos;
- a: preço do quilowatts-hora
- b: parcela fixa.

Considerando-se o caso em que $a = \frac{2}{3}$, b = 2 e que a conta apresentada foi de R$ 142,00, qual foi a quantidade de quilowatts-hora consumidos?

Questão 08 - (Saeb - Adaptada). Um padeiro fabrica 250 pães por hora. Escreva a lei de formação da função que representa a quantidade de pães fabricados p em função do tempo t em horas.

Questão 09 - (BPW) Sabe-se que o preço P a pagar por uma viagem tem um custo fixo de R$ 30,00 mais R$ 0,40 por quilômetro rodado. Se as amigas andarem 250 km, deverão pagar:

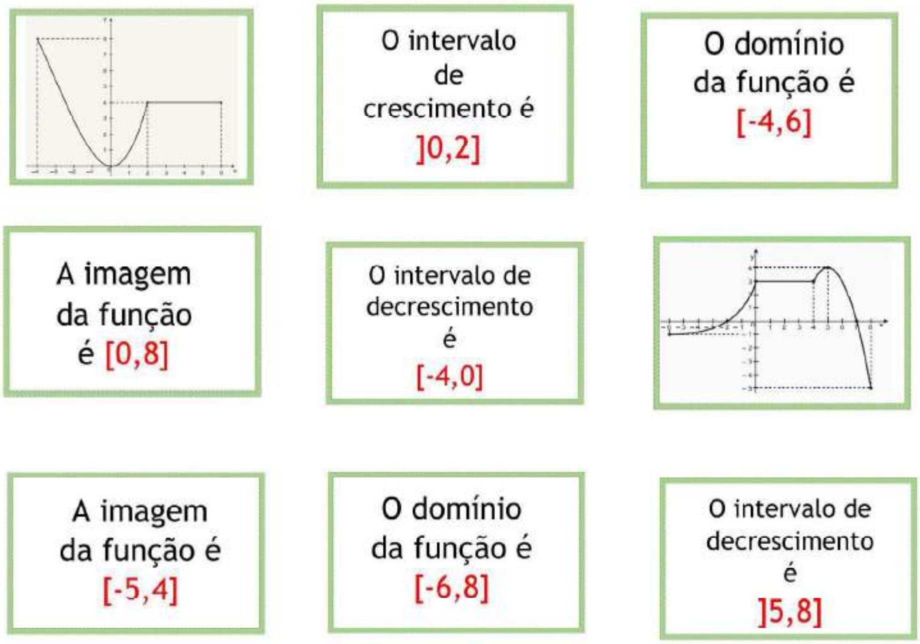
A) R$ 550,00.
B) R$ 250,00.
C) R$ 130,00.
D) R$ 1030,00.
E) R$ 40,00.

Fonte: Produzido pela autora no aplicativo Microsoft Word

5.3.2 Jogo de Correspondência - Domínio, Imagem, Crescimento e Decrescimento

Para finalizar a proposta de materiais e, consequentemente, os conteúdos propostos pelo organizador curricular de matemática (PERNAMBUCO, 2025), para o 2º trimestre do 1º ano do ensino médio, propomos uma aula na qual sejam trabalhados alguns conceitos que são sugeridos na habilidade **EM13MAT404PE36**, como domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, inclusive apresentando exemplos. Em seguida, este trabalho sugere a aplicação do *Jogo de Correspondência - Domínio, Imagem, Crescimento e Decrescimento*, que foi planejado de modo a atender a habilidade mencionada. O jogo pode ser aplicado em grupos, que podem ser divididos de acordo com a realidade da turma. No primeiro momento do jogo, os grupos receberão um envelope contendo 35 cartas, destas, 7 são gráficos e as outras 28 cartas são características do gráfico, a saber: imagem, domínio, intervalos de crescimento e intervalos de decrescimento. Há exatamente 4 cartas que se correspondem com um único gráfico. O objetivo da atividade é que os estudantes façam as correspondências corretas entre os gráficos e as cartas que contém as suas características. Sendo realizado em grupo, há a possibilidade de interação e ajuda entre os integrantes do grupo e, consequentemente, a possibilidade de que seja produzida aprendizagem significativa acerca dos conteúdos abordados. Para a correção, o professor pode imprimir as 35 cartas em tamanhos maiores e ir montando as correspondências corretas, na lousa ou em uma parede, com a ajuda dos próprios estudantes, que simultaneamente devem fazer a comparação com as correspondências feitas pelo grupo, corrigindo se necessário. É possível observar nas Figura 38, exemplo de cartas do jogo da correspondência. O jogo completo encontra-se disponível no recurso educacional vinculado a esta dissertação.

Figura 38 – Exemplo de cartas do Jogo da Correspondência



Fonte: Produzido pela autora no aplicativo Microsoft Word

6 Aplicações e Resultados Obtidos

Este capítulo trata da aplicação dos materiais sugeridos na sequência didática que é o recurso educacional vinculado a esta dissertação e da análise dos resultados obtidos. Para a aplicação foi escolhida a turma do 1º ano B do Ensino Médio Integral da Escola de Referência Professora Ione de Góes Barros.

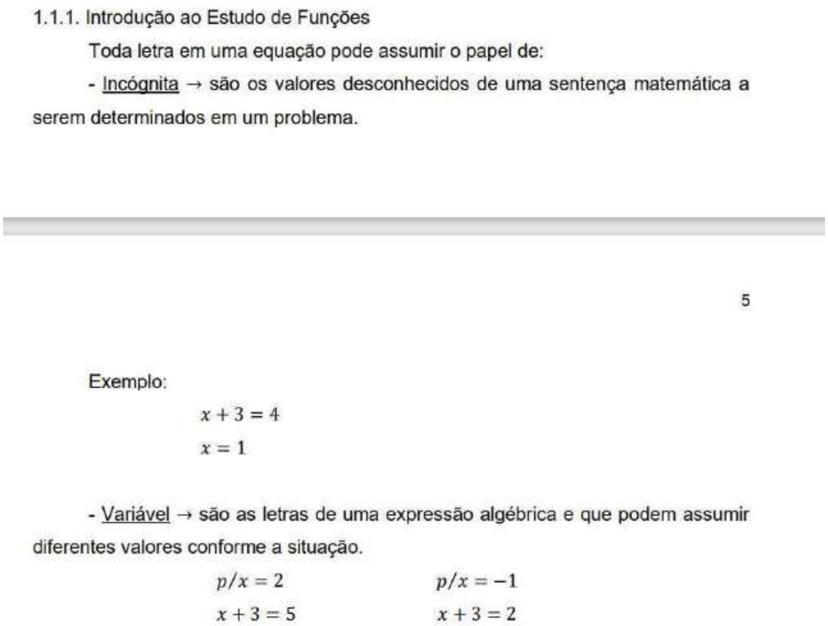
6.1 Aplicações

Apesar de as seis sequências didáticas sugeridas contemplarem todo um trimestre, foi aplicada apenas uma sequência que abrange uma das seis habilidades propostas para o 2º trimestre do 1º ano do Ensino Médio, a saber: **(EM13MAT501PE40)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

6.1.1 Introdução ao Estudo de Funções

Para introduzir o estudo de funções, como já foi citado no Capítulo 3, foi utilizada a proposta sugerida na sequência didática da dissertação: *Sequência Didática para o Ensino de Funções, Funcões Polinomiais do 1º e 2º graus em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental II,* escrita por Luisa Mara Silva de Oliveira e orientada por Simon George Chiossi. Porém, foi dada uma outra roupagem estética ao material que seria trabalhado com o aluno, com o intuito de oferecer um visual mais atraente, como é possível observar nas Figuras 39 e 40.

Figura 39 – Proposta de Material da Dissertação



1.1.1. Introdução ao Estudo de Funções

Toda letra em uma equação pode assumir o papel de:

- Incógnita → são os valores desconhecidos de uma sentença matemática a serem determinados em um problema.

5

Exemplo:

$x + 3 = 4$

$x = 1$

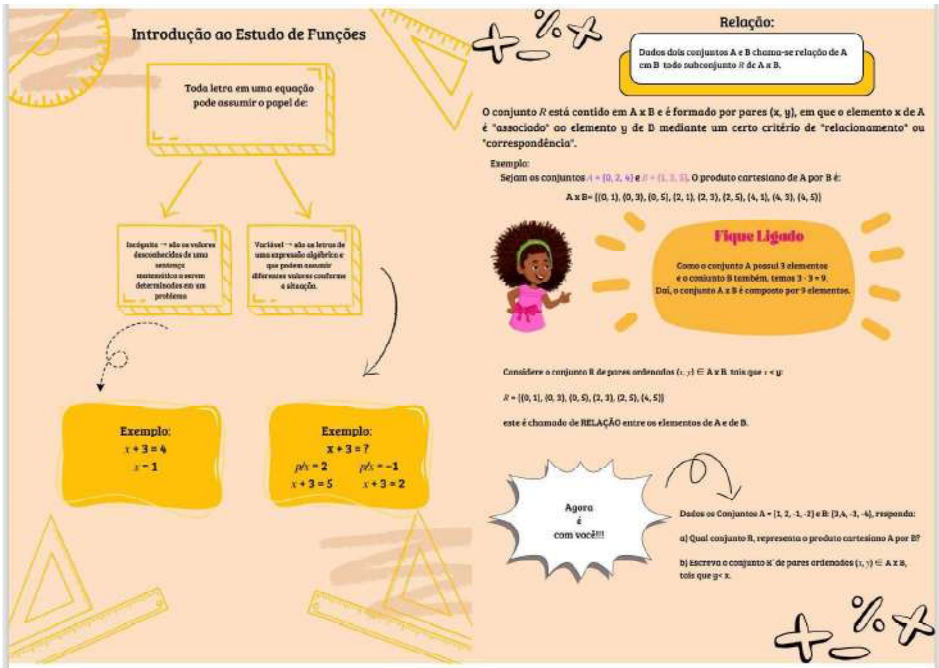
- Variável → são as letras de uma expressão algébrica e que podem assumir diferentes valores conforme a situação.

$p/x = 2$ $\quad$ $p/x = -1$

$x + 3 = 5$ $\quad$ $x + 3 = 2$

Fonte: A autora via plataforma Canva

Figura 40 – Proposta de Material com Nova Roupagem



Fonte: A autora via plataforma Canva

Nesse material, a introdução ao estudo de função é iniciada com a diferenciação dos termos *incógnita* e *variável*. Em seguida, é feita a definição de produto cartesiano e de relação e são apresentados alguns exemplos. O material é finalizado com uma questão para que os alunos possam testar os conhecimentos adquiridos até o momento.

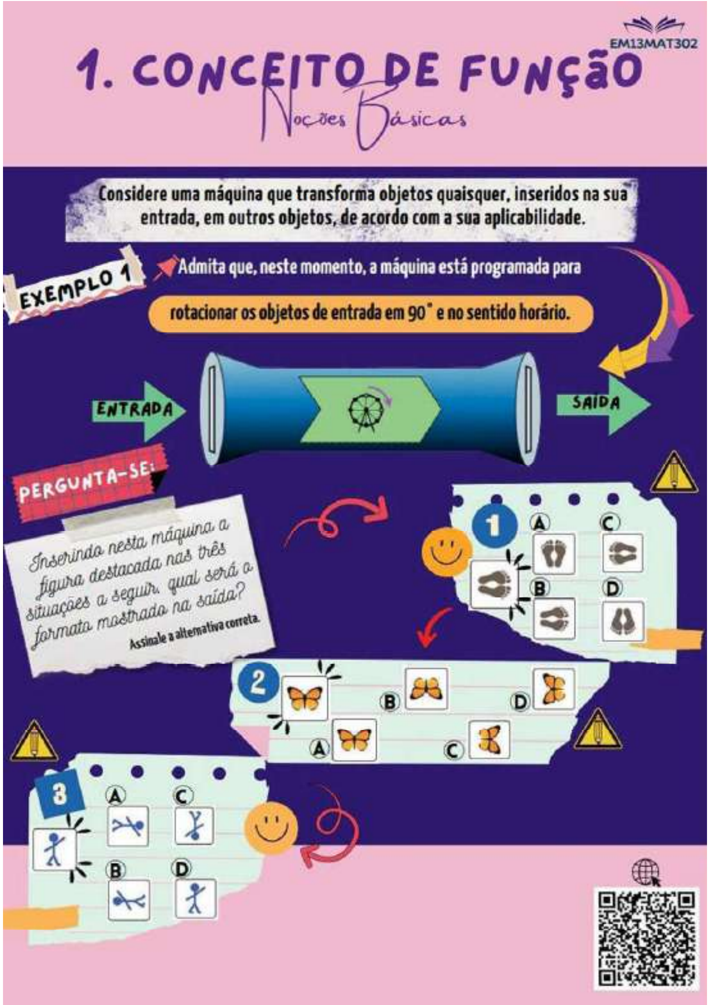
Para inciar a aula o material foi projetado na televisão enquanto que os alunos receberam o material impresso de modo individual para que pudessem acompanhar a explicação. Eles receberam essa primeira abordagem de forma satisfatória, participando ativamente da aula e fazendo questionamentos quando necessário. Após a explicação foi solicitado aos estudantes que respondessem a questão proposta e em seguida o material foi recolhido para posterior análise. Ao analisar a questão proposta, foi constatado através do bom aproveitamento que houve uma real compreensão dos conceitos e definições apresentadas.

6.1.2 Cartilha Interativa

Após a introdução ao estudo de função, o material utilizado foi um recorte da cartilha interativa proposta como produto educacional da dissertação *Conceito de Função Aplicado ao Estudo de Sequências Através de uma Cartilha Interativa Elaborada com o Canva*, de Thiago dos Santos Silva e orientada pela professora doutora Deise Mara Barbosa de Almeida.

Foram utilizadas quatro páginas da cartilha interativa para dar continuidade à sequência didática. A primeira página mostra um exemplo que explora a intuição do aluno e a ideia de função como uma máquina que recebe algum objeto e entrega outro. Mais especificamente, o autor usa uma função que rotaciona figuras em 90° no sentido horário e é solicitado aos alunos que respondam o que acontece caso sejam inseridos três objetos na máquina, a saber, um par de pegadas, uma borboleta e um boneco. De modo a deixar mais clara a proposta da cartilha, segue a imagem da 1ª página da cartilha, na Figura 41 :

Figura 41 – Cartilha Interativa Pág 1



Fonte: (SILVA, 2024b)

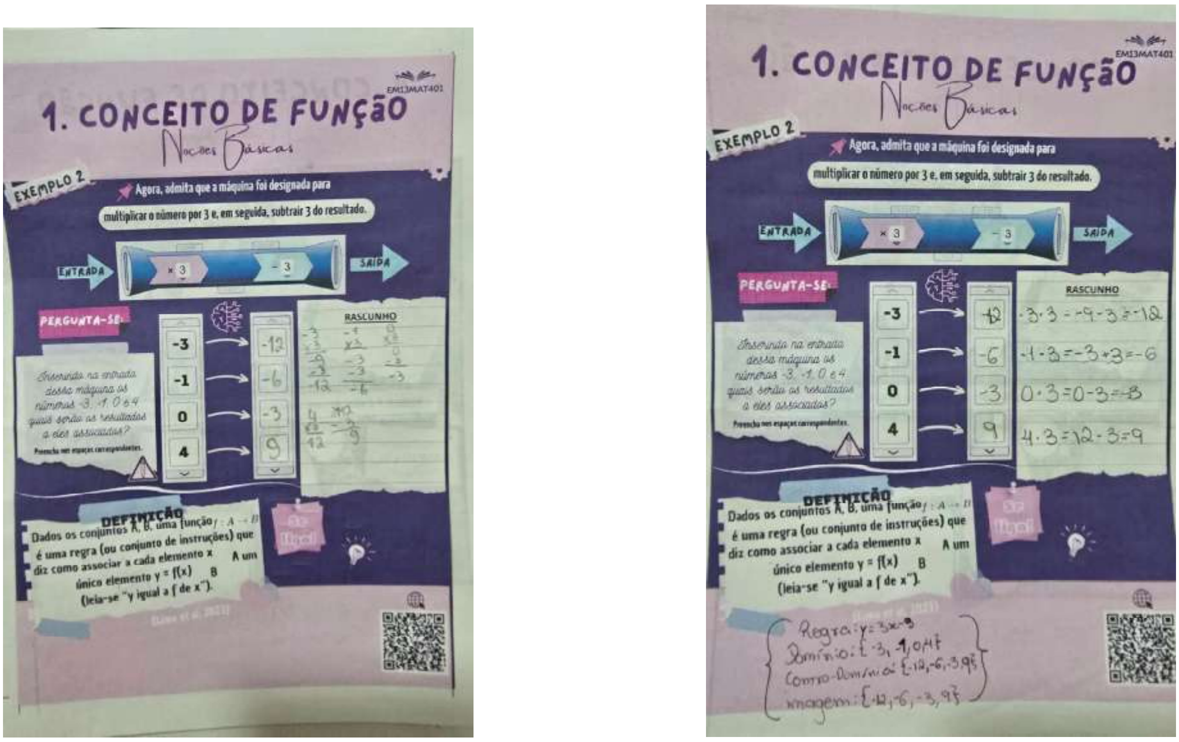
A aplicação desse material iniciou-se com sua projeção na televisão e posterior leitura. Após isso, foi solicitado aos estudantes que tentassem imaginar como as figuras ficariam após um giro de 90° no sentido horário, em seguida, foram questionados acerca de suas respostas e o motivo de tê-las escolhido. A ideia era explorar a imaginação e a criatividade, além da capacidade de fazer conjecturas. Utilizando-se do QR code presente no fim da página, foi possível que eles verificassem se as respostas estavam corretas. Esse momento foi bem produtivo, pois os alunos gostaram bastante do fato do QR code levá-los a um jogo, no qual de fato há a máquina proposta e eles interagem colocando os objetos das alternativas e, consequentemente, sai o produto final, que é o objeto rotacionado a 90° no sentido horário. Há ainda a sugestão de objetos extras para que os estudantes possam continuar praticando e interagindo. Pode-se dizer que foi um momento rico em engajamento e aprendizagem. Na Figura 42 é possível observar a participação dos alunos durante a atividade.

Figura 42 – Participação dos Estudantes Durante a Atividade

Fonte: A autora

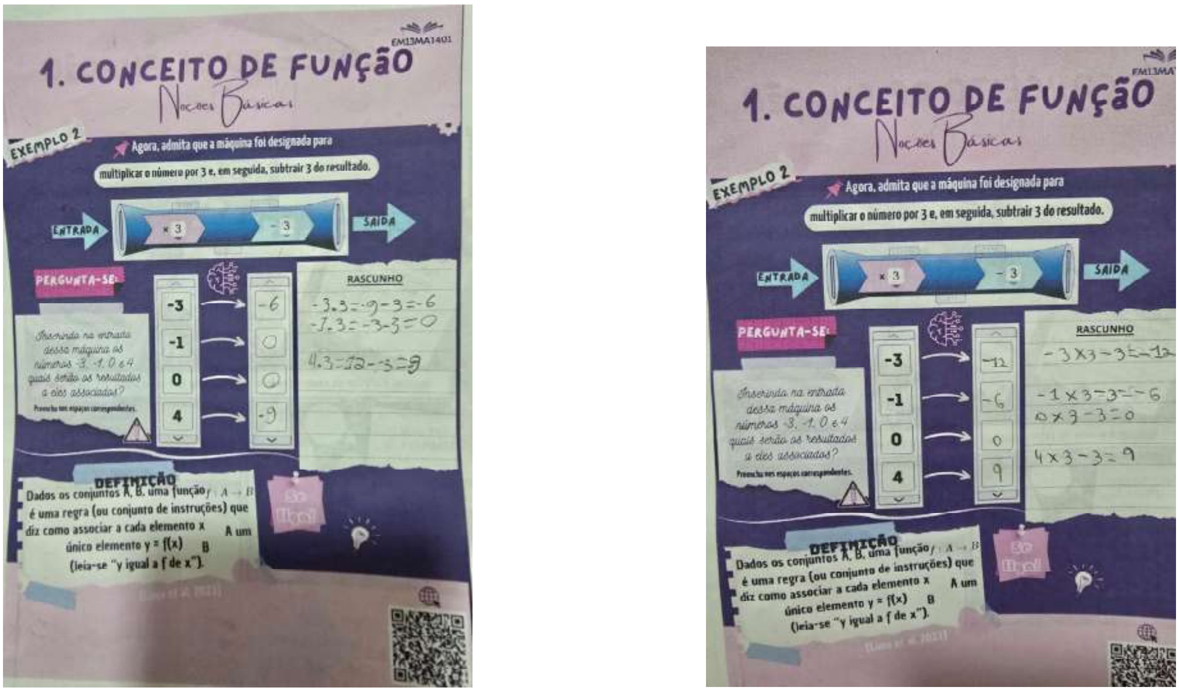
A segunda página traz outra proposta de máquina, agora com a seguinte instrução: *multiplicar por* 3 *e subtrair* 3. São fornecidos os números $-3, -1, 0$ e 4, que devem ser inseridos na máquina e o aluno deve fazer o cálculo para encontrar o resultado que sairá. Para isso, é disponibilizado na própria cartilha espaço para o rascunho necessário. Por essa razão, foi entregue a cada aluno as páginas das cartilhas impressas, para que além de acompanhar pudessem registrar suas respostas para que fossem analisadas depois. Durante essa aplicação estavam presentes 27 estudantes e destes 17 conseguiram acertar os quatro resultados esperados enquanto 10 estudantes erraram pelo menos um dos resultados. Nas Figuras 43 e 44 podemos observar algumas das respostas dos estudantes.

Figura 43 – Estudantes que Acertaram os Quatro Resultados Esperados



Fonte: A autora

Figura 44 – Estudantes que Erraram Pelo Menos um dos Quatro Resultados Esperados



Fonte: A autora

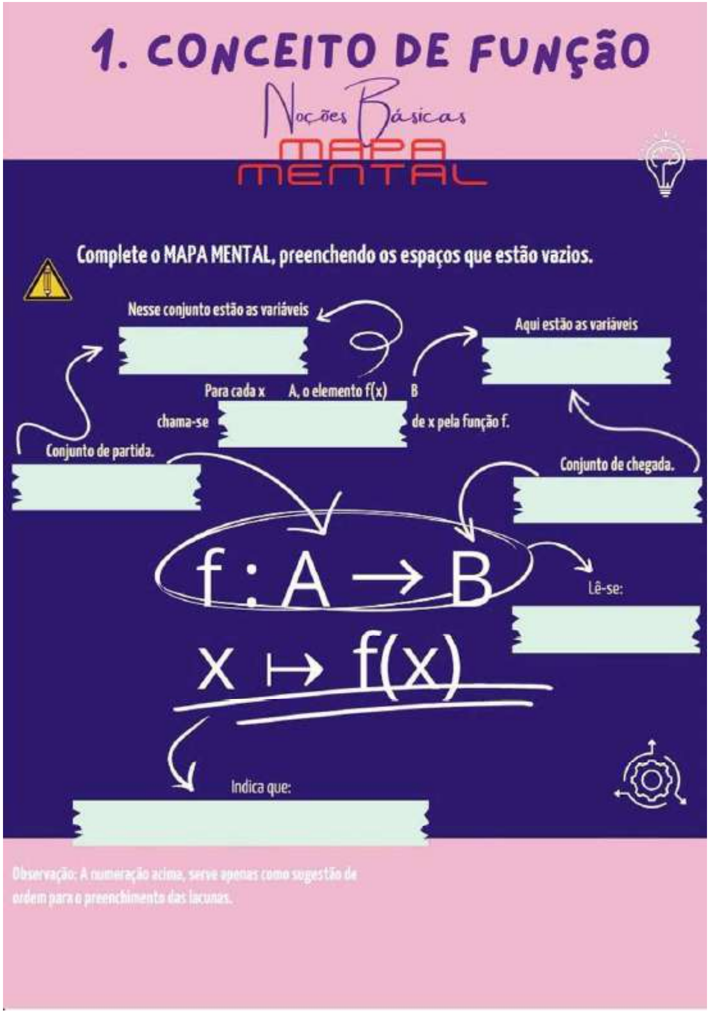
Nesta atividade percebe-se que a dificuldade dos alunos encontra-se nas operações com números inteiros. Eles entenderam o que a questão pedia, entenderam que o objetivo era colocar um número dentro da máquina e a partir das instruções, obter um resultado. Mas, o "jogo de sinais" é um ponto de dificuldade para os alunos do Ensino Médio, mesmo se tratando de habilidades que deveriam ter sido desenvolvidas no Ensino Fundamental. Vale ressaltar que, antes de iniciar as aplicações, foram feitas revisões acerca das operações com números inteiros, localização de pontos no plano cartesiano e equação do primeiro grau, por entender que eram conteúdos pré-requisitos para o estudo de função polinomial do 1º grau.

Ainda na segunda página é apresentada a definição de função. Considerando a necessidade de recolher as folhas com a produção dos alunos para análise docente, foi feita anotação no quadro para que os estudantes escrevessem no caderno e se apropriassem um pouco mais da definição, podendo recorrer a ela sempre que necessário.

A terceira página da cartilha aborda os três "ingredientes" principais que toda função contém: *domínio, contradomínio e lei de correspondência* e mostra a definição de imagem. Esses conceitos são exemplificados ao revisitar-se os exemplos da primeira página. Nesta parte, os estudantes tiveram um pouco de dificuldade, principalmente no que diz respeito à lei de correspondência do Exemplo 2. No Exemplo 1, a lei de correspondência não precisa ser expressa através de uma sentença matemática, diferentemente da lei de correspondência que aparece no segundo exemplo. Assim como a definição de função, os conceitos de domínio, contra-domínio, lei de correspondência e imagem foram anotados na lousa para que os alunos transcrevessem no caderno.

A quarta página da cartilha traz um mapa mental incompleto, para que os estudantes completem com as informações relacionadas às funções que foram trabalhadas até então. Podemos considerar o mapa mental complexo para a realidade da turma em que foi aplicado. Como citado anteriormente, é uma turma que carece de alguns conceitos básicos que apesar de revisitados, não houve nivelamento suficiente para que pudessem acompanhar, como desejado, o conteúdo abordado. Apenas 4 estudantes conseguiram completar o mapa mental (não necessariamente de forma correta), 11 estudantes responderam de forma incompleta e 13 estudantes não conseguiram responder. Há de se considerar, no entanto, o grau de familiaridade dos estudantes com mapas mentais de modo geral e relacionados a Matemática, o que pode também ter influenciado neste resultado. Na Figura 45 é possível observar o mapa mental proposto.

Figura 45 – Mapa Mental



Fonte: (SILVA, 2024b)

6.1.3 Definindo Função Com Outras Palavras

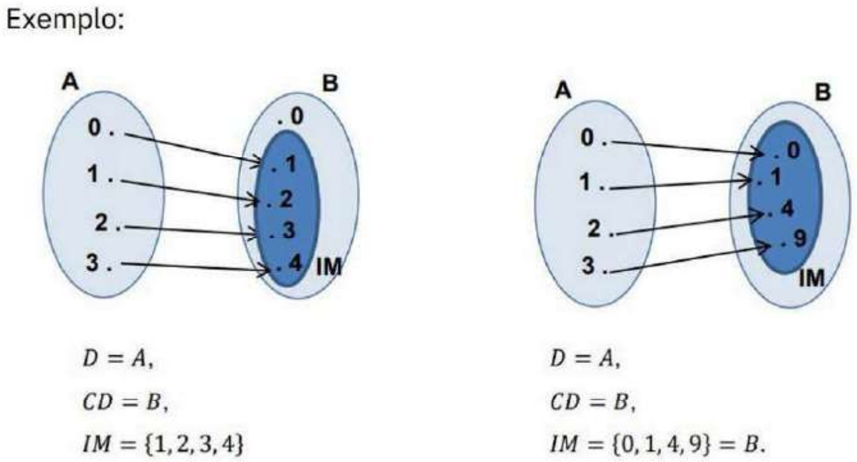
Para dar continuidade à sequência didática, foi utilizado o material proposto por Luisa Mara Silva de Oliveira no produto educacional da sua dissertação, citada na Subseção 6.1.1 deste capítulo.

Foi exposta na lousa uma definição menos formal de função, focada no fato de que uma relação em que cada elemento do conjunto domínio se relaciona com um único elemento do conjunto imagem denomina-se função. Ou seja, uma função é um caso particular de relação. Essa definição foi melhor aceita por parte dos estudantes que conseguiram ter uma maior compreensão. Após isso, foi explorada a forma de representação de uma função através de diagramas de flechas. A aula foi encerrada com uma questão na qual são apresentadas várias relações representadas por diagramas de flechas, para que os alunos identificassem quais dessas eram funções. Os alunos participaram de forma efetiva e durante a correção foi possível perceber que a maioria dos estudantes construíram aprendizagem significativa. Em duas aulas de 50 minutos cada, foi possível fazer a abordagem do tópico com explicação, a realização da atividade e correção, concluindo que foi um bom uso de tempo pedagógico.

6.1.4 Domínio, Contra-Domínio e Imagem

Para este tópico foi considerada a representação de função através do diagrama de flechas. Os estudantes receberam material impresso com explicação, exemplos e atividades. Ressalta-se aqui que o trabalho com material impresso impacta positivamente no tempo pedagógico. Leva-se mais tempo ao usar a lousa para anotações e depois esperar que os estudantes reproduzam no caderno. Ainda sobre o tópico abordado, como as definições de domínio, contra-domínio e imagem já foram trabalhadas anteriormente, agora faz-se apenas sua relação com as funções representadas através de diagramas de flechas, para que os estudantes consigam fazer a associação correta. Na Figura 46 é possível verificar os exemplos apresentados aos alunos.

Figura 46 – Domínio, contra-domínio e imagem a partir da representação de funções através de diagrama de flechas



Fonte: (OLIVEIRA, 2023b)

Com relação à atividade proposta, constituída de 5 questões, no dia de sua aplicação, 36 estudantes estavam presentes; destes, 35 acertaram integralmente a primeira questão, que pedia para determinar o domínio, o contra-domínio e a imagem das funções a partir dos diagramas de flechas. O resultado foi considerado positivo. No entanto, devemos levar em consideração a interação que acontece entre os estudantes no decorrer da resolução da atividade, bem como a revisão que a antecedeu. A Questão 2 cobrava a representação das funções da Questão 1, através de pares ordenados, e a Questão 3 fornecia o domínio e o contradomínio de uma função para que os estudantes marcassem um, entre os quatro diagramas de flechas fornecidos, que poderia representar aquela função. Nessas duas questões houve um aproveitamento de aproximadamente 94% e 70%, respectivamente.

Inicialmente não estava previsto no recurso educacional um teste de sondagem para checar a aprendizagem dos estudantes até o momento. Mas, no decorrer das aplicações, surgiu tal necessidade e, então foi elaborado e aplicado um teste. O objetivo era verificar o nível dos estudantes acerca dos conteúdos trabalhados, tais como reconhecimento da representação de uma função, definição de domínio, contra-domínio e imagem de uma função, todos esses itens por meio do diagrama de flechas. Além disso, representação de uma função e produto cartesiano através de um diagrama de flechas dados o domínio, o contra-domínio e a expressão algébrica que determina a função. O trabalho avaliativo teve a participação de 37 estudantes, 22 dos quais alcançaram nota considerada adequada dentro da média estabelecida pela legislação educacional de Pernambuco ($6,0$ pontos).

A questão que teve um maior número de erros foi a questão que fornecia o domínio, o contra-domínio e a lei de formação da função, e pedia a representação da função através do diagrama de flechas. Para atender ao que a questão pedia, os estudantes precisavam substituir os valores fornecidos para o domínio e encontrar o conjunto imagem. No entanto, houve bastante erro nas operações com números inteiros após a substituição dos valores, mostrando que a maioria dos estudantes entendia que o domínio se referia ao valor da variável x, mas tinha defasagem nas operações com números inteiros, errando o famoso "jogo de sinais".

O resultado do teste levanta alguns possíveis questionamentos do professor: "O que fazer a seguir? Retomar ou seguir com os conteúdos?". Alguns fatores influenciam de forma significativa na decisão do professor. Por exemplo, há uma proposta de conteúdos para o trimestre que está sendo vivenciado, dependendo de sua escolha, pode não dar tempo de abordar todos os conteúdos que deveriam ser trabalhados. Por outro lado, não faz sentido avaliar se não há intenção de intervir de acordo com o resultado obtido. Desse modo, encontrando um meio termo, decidiu-se por fazer a correção do teste de sondagem, oferecendo aos estudantes mais um momento de explicação, retomada de conceitos trabalhados e retirada de dúvidas.

6.1.5 Lei de Formação

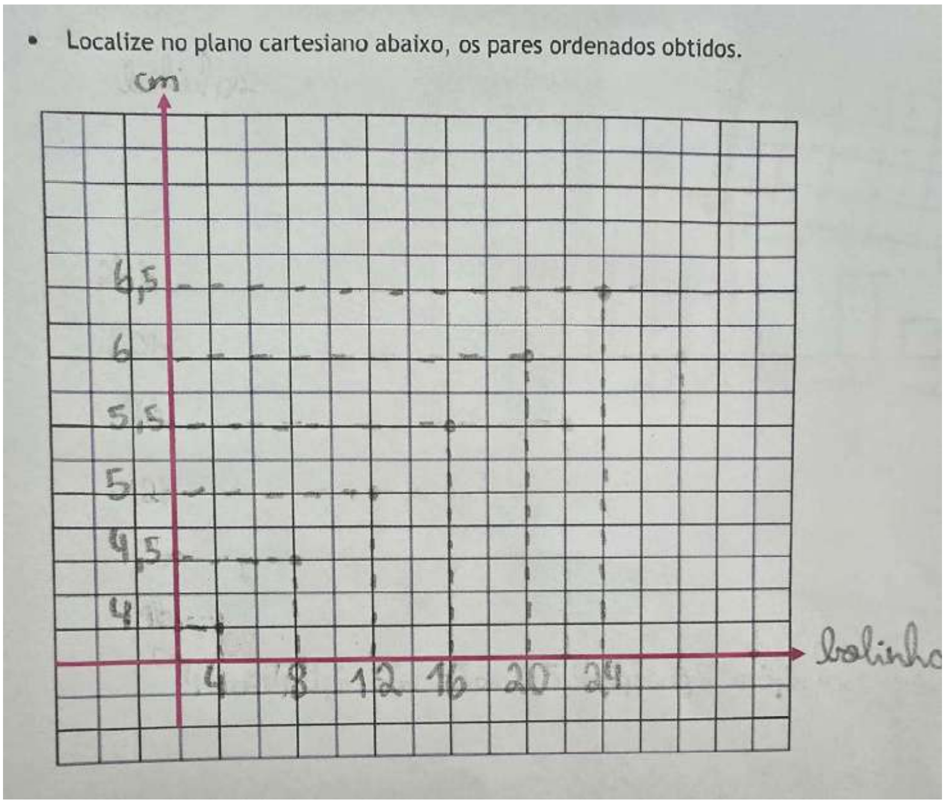
Com os objetivos de compreender o conceito da lei de formação, identificar os pares ordenados (x, y) que satisfazem a lei de formação de uma função e compreender de forma intuitiva a generalização de modelos matemáticos, foram aplicadas três oficinas. As oficinas foram pensadas de modo a introduzir o tópico que é tema dessa subseção oferecendo ao aluno a oportunidade de raciocinar, conjecturar e associar teoria e prática. Para a aplicação das oficinas a turma foi dividida em três grupos, um para cada oficina. Cada um desses grupos foi dividido em dois subgrupos, com o objetivo de, ao final da atividade, os subgrupos compararem os resultados alcançados. Posteriormente, os grupos apresentaram a sua oficina e os seus resultados para o grande grupo.

Foi um momento bem dinâmico. O Laboratório de Matemática foi utilizado para a realização das oficinas, com o intuito de mudar de ambiente e também pela facilidade ao acesso dos materiais que seriam utilizados durante as oficinas. A maioria dos estudantes participaram de forma bem considerável, executando o que era solicitado, tirando dúvidas e porque não dizer se divertindo? Mas, como nem tudo são flores, os dois subgrupos que ficaram com a oficina *Atividade Prática com Copo Descartável*, não conseguiram concluir: um grupo executou parcialmente o que foi solicitado, enquanto o outro teve produção nula. Os grupos receberam os materiais que deveriam usar durante a oficina, como copo descartável, alfinete e cronômetro. A primeira etapa da atividade dessa oficina consistia em graduar um copo descartável em mililitros, tarefa que teve explicação prévia. Ainda assim, houve grande dificuldade na execução dessa parte. Um dos motivos dessa dificuldade pode ser o fato de os alunos não terem destreza suficiente com o manuseio de unidades de medida. Após isso, a atividade pedia para fazerem um furo no fundo do copo para que a água gotejasse e anotassem o volume inicial de água. Em seguida, eles deveriam fazer anotações do volume de água após 4, 8, 12 e 16 minutos, construindo uma tabela com os resultados obtidos. Para concluir deveriam localizar em um plano cartesiano os resultados obtidos. Um dos grupos chegou a fazer algumas das tarefas que eram solicitadas, mas como o ponto de partida era o copo descartável estar graduado corretamente, não pôde ser considerado correto. Contudo, percebeu-se que o grupo dominava a representação de valores em tabela e a localização de pontos no plano cartesiano. De todo modo, a oficina se mostrou um pouco além das capacidades dos alunos, e teve que ser replanejada.

Já para a oficina *Bolas de Gude no Copo D'água* os grupos receberam um copo, bolas de gude, régua e malha quadriculada. O objetivo era observar a relação entre o nível de água do copo em função do número de bolas de gude que são colocadas dentro do copo. Considerando isso, era solicitado aos estudantes que fizessem anotações do volume inicial de água (antes de serem colocadas bolas de gude dentro do copo) e o volume de água a cada quatro bolas de gude acrescentadas. Os dois grupos se saíram muito bem, não tendo problemas em realizar o que era proposto. A segunda etapa da oficina consistia em representar os dados encontrados em uma tabela e posteriormente no plano cartesiano. Nesta parte também não houve maiores dificuldades. Foi observado que um dos grupos havia encontrado um valor errado que não correspondia a constante de proporcionalidade observada nos outros resultados obtidos. Dessa forma, foram orientados a fazer a medição do volume de água novamente a fim de verificar se era realmente aquele valor. Após a verificação, corrigiram e concluíram a oficina.

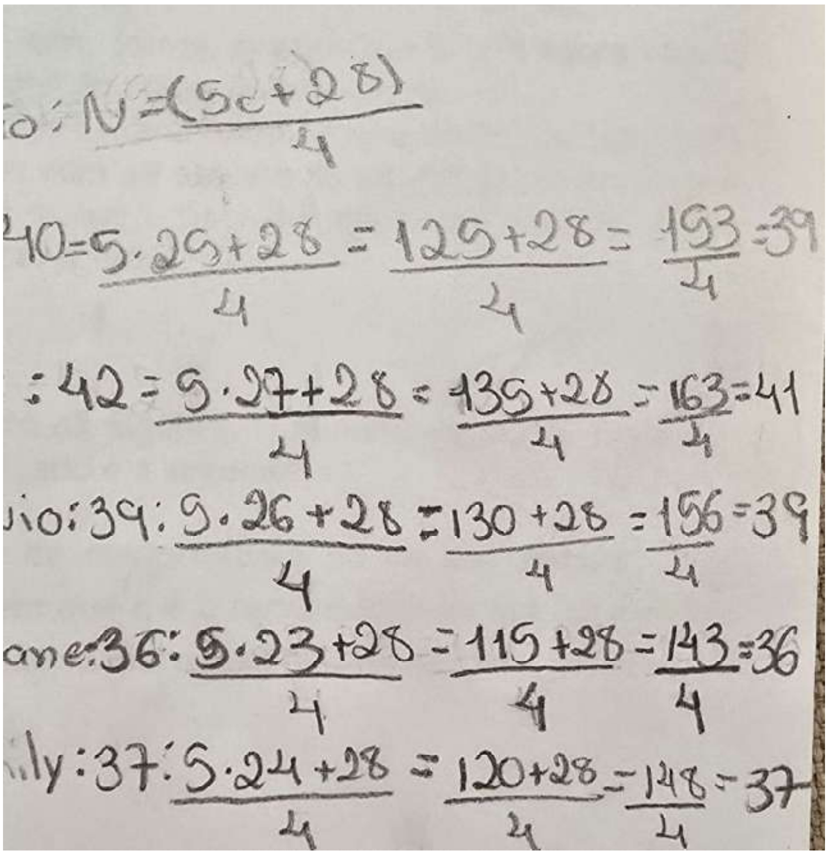
Para vivenciar a oficina *Os Números dos Sapatos*, os grupos receberam uma fita métrica, além das folhas de anotação e que apresentava uma contextualização do tema abordado. O intuito era que os estudantes realizassem a medição dos pés dos integrantes e substituíssem essas informações na fórmula fornecida no material. A medição dos pés aconteceu de forma tranquila, se mostrando uma tarefa fácil de ser executada. Porém, ao substituir o valor encontrado na fórmula, alguns integrantes dos grupos sentiram dificuldades nas operações que eram propostas e houve um momento de intervenção e explicação. Por fim, as duas últimas oficinas citadas foram muito bem executadas pelos quatro grupos, que conseguiram entender bem o que era solicitado e fizeram de forma correta o que era proposto. A interação entre os próprios estudantes, a mudança de ambiente e a oferta de atividades práticas, oportunizou uma mudança de rotina, descontração e aprendizagem efetiva. Alguns registros das atividades são apresentados nas Figuras 47 e 48:

Figura 47 – Grupo 01



Fonte: A autora

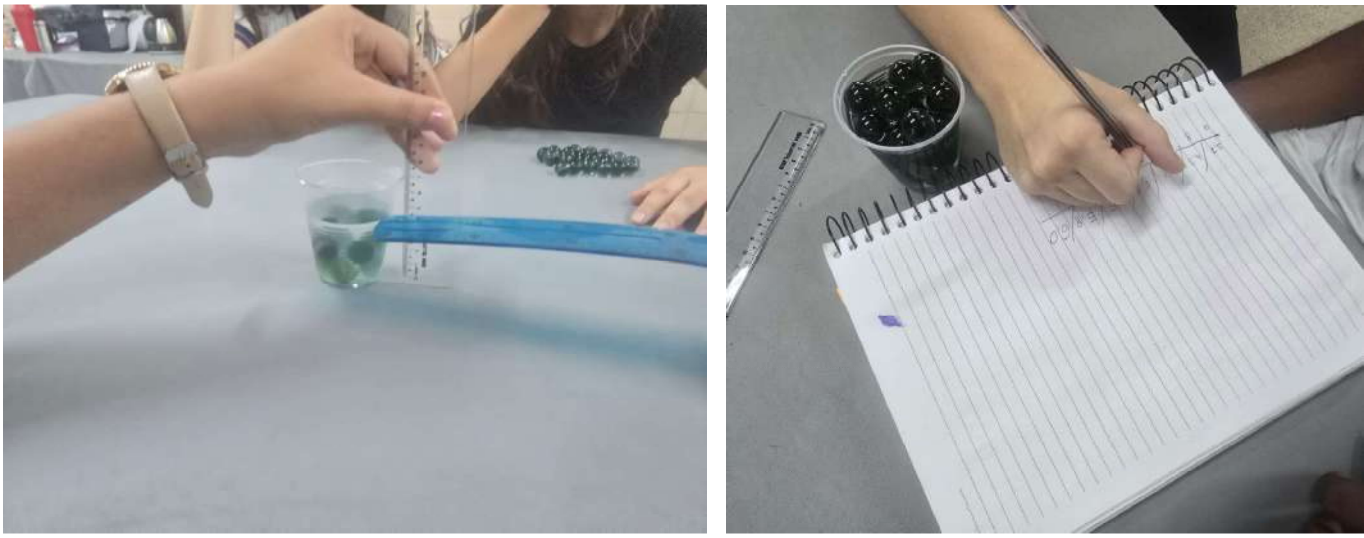
Figura 48 – Grupo 02



Fonte: A autora

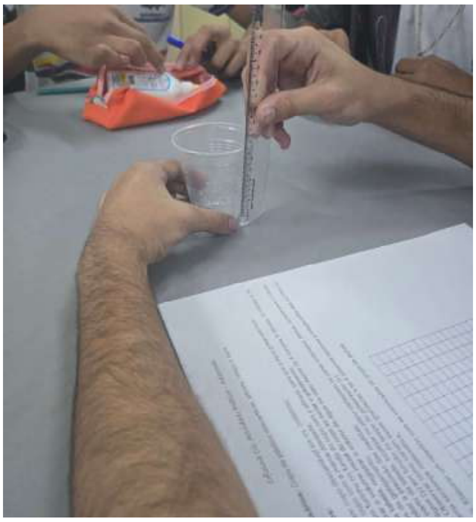
Nas Figuras 49, 50 e 51 é possível observar o desenvolvimento e execução

Figura 49 – Oficina: Bolas de Gude no Copo D'água



Fonte: A autora

Figura 50 – Oficina: Atividade Prática com Copo Descartável




Fonte: A autora

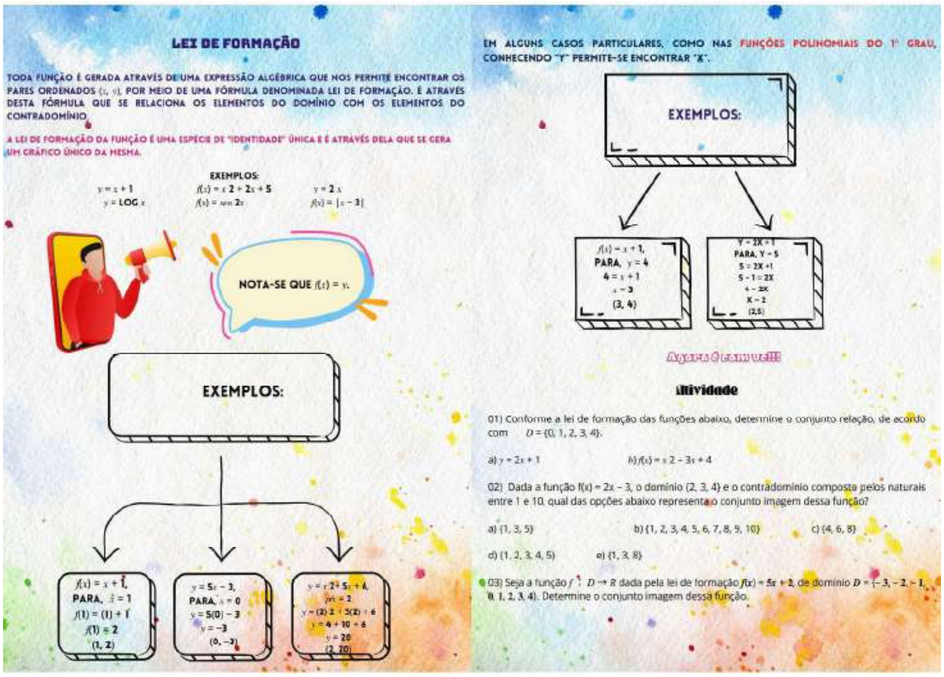
Figura 51 – Oficina: Os Números dos Sapatos


Fonte: A autora

6.1.6 Exposição Dialogada: Lei de Formação

Após a introdução à lei de formação através das oficinas, houve uma exposição dialogada. Nesta etapa, os estudantes receberam material impresso com informações sobre a lei de formação de uma função, além de alguns exemplos e uma atividade para testar os conhecimentos adquiridos. Ressalta-se aqui o design utilizado para o material, editado na plataforma Canva, de modo a oferecer algo atraente e chamativo aos alunos. A nova proposta pode ser observada na figura 52.

Figura 52 – Lei de formação: exemplos e atividade



Fonte: A autora via plataforma Canva

Para este tópico é de suma importância o domínio de equação do primeiro grau. Apesar desse conteúdo ter sido revisado, para grande parte dos estudantes foi como se estivessem vendo pela primeira vez. Apesar de previamente terem sido abordados termos como variáveis, coeficientes e termo independente, o fato dos estudantes não terem uma base tão sólida gerou confusão e dúvida. A atividade sugerida no material cobrava a aplicação mecânica da fórmula, com a substituição de valores sem necessariamente uma compreensão mais profunda do assunto. Mas a dificuldade de manipulação algébrica impactou grandemente no desenvolvimento da aprendizagem acerca da lei de formação da função polinomial do primeiro grau. No mais, a atividade bem como todo o material em si, não cobra nada que esteja além dos limites de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio. Tanto é que uma pequena parcela de estudantes conseguiram compreender perfeitamente bem o que foi apresentado. Após a vivência desse material, ficou a conclusão que o tópico lei de formação necessita continuar sendo abordado em atividades vindouras, inclusive, contando com a ajuda dos estudantes que conseguiram construir algum grau de aprendizagem. O intuito é que essa parte não seja atropelada e influencie de forma negativa em conteúdos futuros que exijam seu conhecimento prévio.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Ensino de Matemática vem sofrendo mudanças ao longo do tempo. Mudanças que vão desde a implementação de novos temas até a reorganização curricular. Também tem se destacado a integração de novas tecnologias e a busca por metodologias mais dinâmicas e interessantes para os alunos. Considerando o ensino das funções polinomiais do primeiro e segundo graus que foi tema do nosso estudo, as dificuldades são amplas e multifacetadas, com raízes tanto no processo de ensino como na compreensão dos alunos. A dificuldade em compreender o conceito abstrato de função, a falha na percepção da conexão com o mundo real e, principalmente, os erros na manipulação algébrica são alguns dos principais desafios. Além disso, a falta de tempo ou estímulo para procurar recursos pedagógicos adequados, a pouca divulgação da existência de tais recursos e a falta de formação continuada também contribuem para a dificuldade. Há outros pontos que merecem ser considerados como a combinação de múltiplas atribuições e carga horária excessiva do professor que impactam significativamente no processo de ensino-aprendizagem. A sobrecarga pode levar a um desempenho pedagógico inferior, menor motivação e engajamento, dificuldades de concentração e uma relação professor-aluno prejudicada. Ademais, a exaustão reflete em pouco tempo para planejamento, preparação de aulas e avaliação.

Neste trabalho, oferecemos como recurso educacional seis sequências didáticas que contemplam as habilidades propostas para o ensino de funções polinomiais do primeiro e segundo graus, sugeridas pelo organizador curricular de Pernambuco. De modo a acompanhar as mudanças sofridas pelo ensino da Matemática, procurou-se sugerir em tais sequências materiais que contemplam metodologias diversas e interessantes para estimular a participação dos estudantes. Todas as sequências apresentam a utilização de softwares, jogos e/ou aplicativos, permitindo a implementação de tecnologias digitais como auxílio no processo de ensino das funções polinomiais do primeiro e segundo graus. O uso das tecnologias possibilitou um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e interativo, no qual foi visível o entusiasmo, motivação e engajamento dos estudantes durante as aulas.

No entanto, é importante destacar que, possivelmente, a aplicação dessas sequências não está isenta de desafios, como identificamos em nossa experiência ao implementar uma dessas sequências. Entre eles, a defasagem de aprendizagem que é um fator dominante entre os estudantes que chegam do Ensino Fundamental II. Considerando, por exemplo, o estudo de funções polinomiais do primeiro e segundo graus, é imperativo que o estudante tenha domínio das equações do primeiro e segundo graus, respectivamente.

Tendo em vista o público de aplicação das sequências didáticas, foi necessário de antemão fazer uma recomposição de aprendizagens dos assuntos que eram pré-requisitos para o estudo das funções afim e quadrática. Isso implica em investir parte do tempo pedagógico que deveria estar sendo usado para trabalhar os conteúdos do ano de ensino atual, em recuperar conhecimentos básicos que deveriam ter sido desenvolvidos na etapa de ensino anterior. Com isso, o professor precisa ter "jogo de cintura" para conciliar a proposta do currículo com o número de aulas que restará para vivenciá-lo após dedicar tempo à recomposição. É bem verdade que, sem fazê-la, tão pouco haverá a vivência que se espera do currículo, visto que o estudante não conseguirá progredir nos conteúdos e, consequentemente, não haverá a aprendizagem desejada.

Outro desafio que deve ser considerado é a dificuldade que muitas vezes o professor encontra na inserção do uso de tecnologias durante suas aulas. Seja por falta de domínio desses recursos ou ainda pela própria estrutura da escola, que muitas vezes não possui sequer um laboratório de informática. Durante a utilização de alguns aplicativos propostos nas sequências, em particular naquela em que foi implementada, foram encontrados problemas com a conexão de internet, o que resultou em uma adaptação no que estava previsto para a aula.

Apesar das limitações e dos desafios, o resultado da aplicação da sequência aponta para o potencial que tais materiais sugeridos, possuem para o ensino de funções polinomiais do primeiro e segundo graus no primeiro ano do Ensino Médio. A sequência didática elaborada e aplicada na disciplina de Matemática possibilitou uma maior organização das aulas e contribuiu para o desenvolvimento de um aprendizado mais estruturado e robusto. Além disso, ter um acervo de sequências didáticas que contemplam um trimestre inteiro de aulas permite ao professor um aproveitamento maior de seu tempo de planejamento. A otimização desse tempo oferece espaço para que o professor possa se dedicar à confecção dos jogos e oficinas, ao estudo de softwares e aplicativos que são sugeridos e ainda à adaptação de alguma sequência para que se adeque à sua realidade de ensino.

Vale ainda ressaltar que as sequências didáticas reúnem materiais que foram sugeridos em dissertações do PROFMAT, promovendo um resgate das contribuições que esse programa oferece aos professores de Matemática da educação básica. Isso pode fazer com que mais professores de Matemática procurem se aperfeiçoar e busquem a continuação dos seus estudos.

Sugerimos que trabalhos futuros ampliem o que foi iniciado com este, explorando outros trimestres e anos de ensino, na perspectiva do resgate das contribuições do PROFMAT e da implementação de materiais diversos que unam o uso de tecnologias, jogos e oficinas no intuito de enriquecer o ensino-aprendizagem da Matemática.

Em síntese, este trabalho evidencia que o uso de metodologias diversas, organizadas em sequências didáticas é uma excelente estratégia para o desenvolvimento de um aprendizado significativo e engajador. Portanto, almejamos que esta proposta contribua para a otimização do tempo de planejamento do professor, servindo como guia prático para o trabalho docente que tenha como tema funções polinomiais do primeiro e segundo graus. Além disso, desejamos que este trabalho inspire e oriente futuras pesquisas na área. Acreditamos que a disseminação e o aprimoramento dessas práticas pedagógicas inovadoras podem impulsionar a qualidade do ensino de matemática, tornando-o mais atrativo, eficaz e relevante para os estudantes.

Referências

ALMEIDA, E. A. d. Funções quadráticas: ensino e aplicações. 2020. Citado na página 67.

ÁVILA, H. B. Redefinição do dever de proporcionalidade. *Revista de direito administrativo*, v. 215, p. 16, 1999. Citado na página 74.

BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. d. M. Modelagem matemática. UFU, 2019. Citado na página 75.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Citado na página 63.

BRASIL, C. República federativa do. *Brasília, Senado Federal, Centro Gráfico*, 1988. Citado na página 25.

BRASIL, M. d. E. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 27.

BRUNER, J. S. *Uma nova teoria da aprendizagem*. [S.l.: s.n.], 1976. 33-64 p. Citado na página 27.

CAMPOS, C. R. et al. Educação estatística no contexto da educação crítica. 2013. Citado na página 24.

FIGUEIREDO, J. R. C. d. Funções afins e a relação entre função linear, proporcionalidade e regra de três. 2017. Citado na página 63.

FOSSILE, D. K. Construtivismo versus sócio-interacionismo: uma introdução às teorias cognitivas. *Revista Alpha*, n. 11, p. 105–117, 2010. Citado na página 26.

GOODSON, I. Currículo: Teoria e história. *(Sem nome)*, 2008. Citado na página 23.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. [S.l.: s.n.], 2007. v. 1. Citado na página 34.

HAMILTON, D. Towards a theory of schooling. deakin studies in education series, volume 4. ERIC, 1989. Citado na página 22.

LARA, I. C. M. Jogando com a matemática na educação infantil e séries iniciais. *São Paulo: Rêspel*, 2003. Citado na página 58.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 63.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 1. Citado na página 34.

LOPES, A. C.; MACEDO, E. Teoria do currículo. *Teorias de Currículo. São Paulo: Cortez*, 2011. Citado na página 23.

MENDES, I. A. A formação do professor pesquisador para o ensino da matemática: Uma necessidade na reforma universitária. Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, 2005. Citado na página 28.

MOREIRA, A. F. B.; SILVA, T. T. *Currículo, cultura e sociedade.* [S.l.]: Cortez Editora, 1997. Citado na página 20.

OLIVEIRA, L. M. S. d. Estratégias para ensino e aprendizagem de funções polinomiais do 1º e 2º graus em turmas do 9º ano do ensino fundamental ii. 2023. Citado 3 vezes nas páginas 52, 53 e 54.

OLIVEIRA, L. M. S. d. SequÊncia didÁtica para o ensino de funÇÕes, funÇÕes polinomiais do 1o e 2o grau em turmas de 9o ano do ensino fundamental ii. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 92.

PAIVA, M. *Matemática.* [S.l.]: São Paulo - Moderna, 1995. v. 1. Citado na página 76.

PERNAMBUCO, S. d. E. e. E. Organizador curricular trimestral de matemática. 2025. Citado 8 vezes nas páginas 35, 40, 46, 63, 65, 69, 74 e 82.

PIRES, C. M. C. *Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede.* [S.l.]: FTD, 2000. Citado na página 26.

PIRES, C. M. C. Educação matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no brasil. *Boletim de Educação Matemática*, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 21, n. 29, p. 13–42, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

PONTE, J. P. d. Investigar, ensinar e aprender. *Quadrante*, v. 13, n. 2, p. 5–38, 2004. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm_media/quadrante/quadrante_13_2/Quadrante-13-2-Ponte.pdf>. Citado na página 55.

SANTANA, J. E. B. Contrato didático e registros de representação semiótica: inter-relações no ensino da função afim no 1° ano do ensino médio. 2022. Citado na página 15.

SILVA, B. S. d. A abordagem geométrica no tratamento das funções. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 79.

SILVA, T. d. S. Conceito de função aplicado ao estudo de sequências através de uma cartilha interativa elaborada com o canva. 2024. Citado na página 47.

SILVA, T. d. S. Matemática integrada: Explorando a conexão entre função e sequências numéricas. 2024. Citado 8 vezes nas páginas 47, 48, 49, 50, 51, 52, 87 e 91.

SILVA, T. T. *Uma introdução as Teorias do currículo.* [S.l.]: Autêntica Editora, 2005. Citado na página 21.

SILVA, T. T. d. Documentos de identidade. *Uma introdução às teorias do currículo*, v. 2, p. 23, 1999. Citado na página 20.

SOARES, M. F. Gráficos de funções do 2º grau: proposta de abordagem com o auxílio do simulador phet. 2024. Citado na página 69.

STEWART, J. *Cálculo*. [S.l.]: Cengage Learning, 2017. Citado na página 15.

VICENT, W. A. L. O estado e a educação escolar 1640-1660 na inglaterra e no país de gales: uma pesquisa baseada em fontes impressas. *(Sem título)*, p. 33, 1950. Citado na página 22.