

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**ADRIÉLI MUCHAU KOSINSKI**

**REDESCOBRINDO A ARITMÉTICA ATRAVÉS DE PERSPECTIVAS DIFERENTES**

**CURITIBA**

**2025**

**ADRIÉLI MUCHAU KOSINSKI**

**REDESCOBRINDO A ARITMÉTICA ATRAVÉS DE PERSPECTIVAS DIFERENTES**

**Rediscovering arithmetic from different perspectives**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestra em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação Básica, no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR.

Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Orientadora: Profa. Dra. Mari Sano.

Coorientadora: Profa. Dra. Patrícia Massae Kitani.

**CURITIBA**

**2025**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Curitiba



ADRIELI MUCHAU KOSINSKI

**REDESCOBRINDO A ARITMÉTICA ATRAVÉS DE PERSPECTIVAS DIFERENTES**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática Na Educação Básica.

Data de aprovação: 29 de Setembro de 2025

Dra. Mari Sano, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Marcelo Muniz Silva Alves, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Dra. Olga Harumi Saito, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 29/09/2025.

*Dedico este trabalho a Deus que me deu forças e discernimento para concluir este objetivo e em memória de meu pai Amauri J. Kosinski.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me capacitar com as oportunidades, a sabedoria e o discernimento para que pudesse concluir esta etapa.

À minha família, em especial ao meu pai Amauri e à minha mãe Marli, que sempre me apoiaram na vida acadêmica.

Ao meu esposo Lucas, gratidão pelo apoio, paciência, atenção e suporte em todos os momentos.

Às minhas colegas e amigas, Caroline Witt Guerber e Denise Jankoski, pelo companheirismo ao longo desses dois anos.

À minha orientadora, Profa. Dra. Mari Sano, pela gentileza, disponibilidade, atenção e paciência ao me orientar, tornando possível a conclusão deste trabalho.

À minha coorientadora, Profa. Dra. Patrícia Massae Kitani, pelos ensinamentos, dicas com o GeoGebra, por toda ajuda e apoio oferecido.

Aos professores da UTFPR, pela competência, dedicação, inspiração e pela disposição em contribuir para a formação dos discentes.

Aos colegas de curso do PROFMAT por compartilhar seus conhecimentos e experiências.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

*A alegria de descobrir é certamente o sentimento mais vivo que a mente humana pode experimentar.* Claude Bernard (1813 – 1878): médico e fisiologista francês.

## RESUMO

KOSINSKI, Adriéli Muchau. **Redescobrimo a aritmética através de perspectivas diferentes**. 135 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2025.

O presente trabalho tem por objetivo apresentar aplicações na aritmética de conteúdos estudados durante as etapas escolares da Educação Básica. A exploração de polígonos e padrões revela aspectos curiosos aptos de utilização didática para estimular o conhecimento em sala de aula. O crivo de Eratóstenes com seis colunas apresenta uma outra abordagem para a identificação dos números primos. Os modelos visuais para o ensino do máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum são alternativas para a compreensão do conteúdo, facilitando a assimilação dos conceitos abstratos. Exploramos também, os recursos visuais para os números triangulares, triplas Pitagóricas e números perfeitos utilizando o software GeoGebra, que facilitam a apropriação dos conceitos por meio da intuição. As atividades propostas trazem ideias que despertam a curiosidade e atenção dos discentes sobre os temas abordados.

**Palavras-chave:** Polígonos; crivo de Eratóstenes; números triangulares; GeoGebra.

## ABSTRACT

KOSINSKI, Adriéli Muchau. **Rediscovering arithmetic from different perspectives.** 135 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2025.

The aim of this paper is to present applications in arithmetic of content studied during the school stages of Basic Education. Exploring polygons and patterns reveals curious aspects that can be used to stimulate knowledge in the classroom. The Eratosthenes sieve with six columns presents another approach to identifying prime numbers. Visual models for teaching the maximum common divisor and the minimum common multiple are alternatives for understanding the content, facilitating the assimilation of abstract concepts. We also explored the visual resources for triangular numbers, Pythagorean triples and perfect numbers using GeoGebra software, which facilitates the appropriation of concepts through intuition. The proposed activities provide ideas that arouse the students' curiosity and attention to the topics covered.

**Keywords:** Polygons; sieve of Eratosthenes; triangular numbers; GeoGebra.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Primos até 120 . . . . .	15
Figura 1.2 – Número triangular - $t_{10}$ . . . . .	15
Figura 2.1 – Estrutura dos números no hexágono . . . . .	20
Figura 2.2 – Configuração dos números no hexágono . . . . .	21
Figura 2.3 – Exemplos de configurações de números no hexágono . . . . .	21
Figura 2.4 – Caso especial de configuração de números no hexágono . . . . .	22
Figura 2.5 – Exemplos de vértices opostos no hexágono . . . . .	22
Figura 2.6 – Exemplos de múltiplos no hexágono . . . . .	23
Figura 2.7 – Caso especial de múltiplos no hexágono . . . . .	23
Figura 2.8 – Outro exemplo de configuração de números no hexágono . . . . .	24
Figura 2.9 – Mais exemplos de configurações de números no hexágono . . . . .	24
Figura 2.10–Caso geral de configuração de números no hexágono . . . . .	25
Figura 2.11–Exemplos de soma dos vértices opostos no hexágono . . . . .	25
Figura 2.12–Configuração dos números no octógono . . . . .	26
Figura 2.13–Caso especial de configuração de números no octógono . . . . .	26
Figura 2.14–Exemplos de configurações de números no octógono . . . . .	27
Figura 2.15–Exemplo de soma dos vértices opostos no octógono . . . . .	28
Figura 2.16–Exemplo de soma dos vértices opostos internos do octógono . . . . .	28
Figura 2.17–Caso especial de múltiplos no octógono . . . . .	28
Figura 2.18–Exemplo de múltiplos no octógono . . . . .	29
Figura 2.19–Caso geral de configuração de números no octógono . . . . .	29
Figura 2.20–Mais exemplos de configurações de números no octógono . . . . .	30
Figura 2.21–Configuração de números no losango . . . . .	31
Figura 2.22–Caso especial de configuração de números no losango . . . . .	31
Figura 2.23–Configuração da soma dos vértices opostos no losango . . . . .	31
Figura 2.24–Caso especial de múltiplos no losango . . . . .	32
Figura 2.25–Exemplos de múltiplos no losango . . . . .	32
Figura 2.26–Exemplo de configuração de números no losango . . . . .	33
Figura 2.27–Caso geral de configuração de números no losango . . . . .	33
Figura 2.28–Caso geral de configuração de números no quadrado . . . . .	33
Figura 2.29–Exemplo de soma dos vértices opostos no quadrado . . . . .	34
Figura 3.1 – Modelos tradicionais: (a) árvore de fatores; (b) fatoraçoão . . . . .	42
Figura 3.2 – Modelo de diagrama de Venn: conjuntos com fatores primos de 36 e 45 . . . . .	43
Figura 3.3 – Modelo de diagramas de Venn: interseção dos conjuntos com os fatores de 36 e 45 . . . . .	43

Figura 3.4 – Modelo de diagrama de Venn: conjuntos com os fatores de 15 e 39 . . . . .	44
Figura 3.5 – Modelo de diagrama de Venn: interseção dos conjuntos de fatores de 15 e 39.	44
Figura 3.6 – Modelo retangular para (36, 45): primeiro passo . . . . .	45
Figura 3.7 – Modelo retangular para (36, 45): segundo passo . . . . .	45
Figura 3.8 – Modelo retangular para (36, 45): retângulo revestido . . . . .	46
Figura 3.9 – Modelo retangular para [36, 45]: primeiros passos . . . . .	46
Figura 3.10–Modelo retangular para [36, 45]: próximos passos . . . . .	47
Figura 3.11–Modelo retangular: mínimo múltiplo comum de 36 e 45 . . . . .	47
Figura 3.12–Modelo retangular: [36, 45] . . . . .	48
Figura 3.13–Modelo retangular para (15, 39): primeiro passo . . . . .	48
Figura 3.14–Modelo retangular para (15, 39): segundo passo . . . . .	49
Figura 3.15–Modelo retangular para (15, 39): últimos passos . . . . .	49
Figura 3.16–Modelo retangular para (15, 39): retângulo revestido . . . . .	50
Figura 3.17–Modelo retangular para [15, 39]: primeiros passos . . . . .	50
Figura 3.18–Modelo retangular para [15, 39]: construção . . . . .	51
Figura 3.19–Modelo retangular: mínimo múltiplo comum de 15 e 39 . . . . .	51
Figura 3.20–Modelo retangular: [15, 39] . . . . .	52
Figura 3.21–Modelo segmento de reta para (36, 45): primeiro passo . . . . .	52
Figura 3.22–Modelo segmento de reta para (36, 45): segundo passo . . . . .	53
Figura 3.23–Modelo segmento de reta para (36, 45) . . . . .	53
Figura 3.24–Modelo segmento de reta para [36, 45]: primeiros passos . . . . .	53
Figura 3.25–Modelo segmento de reta para [36, 45]: próximos passos . . . . .	54
Figura 3.26–Modelo segmento de reta para [36, 45] . . . . .	54
Figura 3.27–Modelo segmento de reta para (15, 39): primeiro passo . . . . .	55
Figura 3.28–Modelo segmento de reta para (15, 39): segundo passo . . . . .	55
Figura 3.29–Modelo segmento de reta para (15, 39): terceiro passo . . . . .	55
Figura 3.30–Modelo segmento de reta para (15, 39) . . . . .	56
Figura 3.31–Modelo segmento de reta para [15, 39]: primeiros passos . . . . .	56
Figura 3.32–Modelo segmento de reta para [15, 39] . . . . .	56
Figura 4.1 – Representação geométrica de alguns números triangulares e quadrados . . .	65
Figura 4.2 – Correspondência: casos $t_5$ e $t_8$ . . . . .	66
Figura 4.3 – (a) $9^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ; (b) $11^2 \equiv 1 \pmod{8}$ . . . . .	67
Figura 4.4 – Representação $t_{11} = t_{3 \cdot 4 - 1} \equiv 0 \pmod{3}$ . . . . .	68
Figura 4.5 – Representação $t_{12} = t_{3 \cdot 4} \equiv 0 \pmod{3}$ . . . . .	69
Figura 4.6 – Representação $t_{13} = t_{3 \cdot 4 + 1} \equiv 1 \pmod{3}$ . . . . .	70
Figura 4.7 – Representação de $3t_6 + t_5 = t_{2 \cdot 6}$ . . . . .	71
Figura 4.8 – Representação de $3t_6 + t_7 = t_{13}$ . . . . .	72
Figura 4.9 – Triplas pitágoricas: (a) (3, 4, 5); (b) (5, 12, 13) . . . . .	73
Figura 4.10–Representação de $3^2 + 4^2 = (4 + 1)^2$ . . . . .	74

Figura 4.11–Decomposição de $24^2$ como soma . . . . .	75
Figura 4.12–Representação da distribuição de $24^2$ para $23^2$ , $22^2$ e $21^2$ . . . . .	76
Figura 4.13–Representação visual utilizando área de um retângulo para números perfeitos	80
Figura 4.14–Número perfeito $p = 5$ . . . . .	81
Figura 4.15–Números perfeitos e triangulares . . . . .	81
Figura 5.1 – Exemplo de polígonos e padrões: hexágono . . . . .	85
Figura 5.2 – Exemplo de polígonos e padrões: octógono . . . . .	86
Figura 5.3 – Exemplo de polígonos e padrões: losango . . . . .	86
Figura 5.4 – Ficha de atividade: 1 . . . . .	88
Figura 5.5 – Ficha de atividade: 2 . . . . .	88
Figura 5.6 – Ficha de atividade: 3 . . . . .	89
Figura 5.7 – Atividade no GeoGebra . . . . .	89
Figura 5.8 – Atividade proposta no GeoGebra . . . . .	90
Figura 5.9 – Caça-octógonos . . . . .	90
Figura 5.10–Gabarito: caça-octógonos . . . . .	91
Figura 5.11–Mínimo múltiplo comum entre 16 e 24 . . . . .	92
Figura 5.12–Retângulo de 22 por 5 centímetros . . . . .	94
Figura 5.13–Quadrados necessários para preencher o retângulo de lados com medidas 22 e 5	95
Figura 5.14–Quadrados de medidas 5 centímetros . . . . .	95
Figura 5.15–Quadrados de medidas 2 centímetros . . . . .	95
Figura 5.16–Retângulo de lados 22 e 5 centímetros ladrilhado . . . . .	96
Figura 5.17–Quadrados sobre o lado medindo 5 centímetros . . . . .	96
Figura 5.18–Quadrados sobre o lado medindo 22 centímetros . . . . .	97
Figura 5.19–Retângulo com medidas 16 e 38 centímetros . . . . .	97
Figura 5.20–Quadrados para preencher o retângulo de lados com medidas 16 e 38 . . . . .	98
Figura 5.21–Quadrados de 16 centímetros . . . . .	98
Figura 5.22–Quadrados de 6 centímetros . . . . .	99
Figura 5.23–Quadrados de 4 centímetros . . . . .	99
Figura 5.24–Retângulo de lados 16 e 38 ladrilhado . . . . .	100
Figura 5.25–Quadrados sobre aresta medindo 16 centímetros . . . . .	100
Figura 5.26–Quadrados sobre aresta medindo 38 centímetros . . . . .	101
Figura 5.27–Quebra-cabeça . . . . .	101
Figura 5.28–Quebra-cabeça início da montagem . . . . .	102
Figura 5.29–Quebra-cabeça pronto . . . . .	103
Figura 5.30–Modelo da trilha . . . . .	108
Figura 5.31–Modelo de cartelas de bingo . . . . .	108
Figura 5.32–Diferença entre dois números triangulares consecutivos . . . . .	109
Figura 5.33–Soma de números triangulares consecutivos . . . . .	109
Figura 5.34–Apertos de mão: 4 . . . . .	111

Figura 5.35–Apertos de mão: 4+3 . . . . .	111
Figura 5.36–Apertos de mão: 4+3+2 . . . . .	111
Figura 5.37–Apertos de mão no total entre 5 pessoas . . . . .	112
Figura 5.38–Primeiros apertos de mão . . . . .	112
Figura 5.39–Apertos de mão: 9+8 . . . . .	112
Figura 5.40–Apertos de mão no total entre 10 pessoas . . . . .	113
Figura 5.41–Apertos de mão por $n$ pessoas . . . . .	114
Figura 5.42–Posição das cidades $C1, C2, C3, C4$ e $C5$ . . . . .	115
Figura 5.43–Estradas partindo da cidade $C1$ . . . . .	115
Figura 5.44–Estradas partindo das cidades $C1$ e $C2$ . . . . .	116
Figura 5.45–Total de estradas da malha . . . . .	116
Figura 5.46–Posição das cidades $C1, C2, C3, C4, C5, C6$ e $C7$ . . . . .	117
Figura 5.47–Caminhos possíveis para 7 cidades . . . . .	117
Figura 5.48–Caminhos possíveis para $n$ cidades . . . . .	118
Figura 5.49–Tira numérica . . . . .	118
Figura 5.50–Recortes de um dígito . . . . .	118
Figura 5.51–Recortes de dois dígitos . . . . .	119
Figura 5.52–Recortes de três dígitos . . . . .	119
Figura 5.53–Recortes de quatro dígitos . . . . .	119
Figura 5.54–Recortes de cinco dígitos . . . . .	119
Figura 5.55–Recortes na tira numérica . . . . .	120
Figura A.1–Ficha de atividade – 1 . . . . .	125
Figura A.2–Ficha de atividade – 2 . . . . .	126
Figura A.3–Ficha de atividade – 3 . . . . .	126
Figura A.4–Caça-octógonos . . . . .	127
Figura B.1 – Quebra-cabeça: mínimo múltiplo comum entre 22 e 5 . . . . .	128
Figura B.2 – Jogo: corrida dos primos . . . . .	130
Figura B.3 – Bingo dos primos: cartelas – 1 . . . . .	131
Figura B.4 – Bingo dos primos: cartelas – 2 . . . . .	132
Figura C.1 – Exemplo de 5 cidades . . . . .	133
Figura C.2 – Tira numérica . . . . .	134

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>14</b>
1.1	Justificativa para a escolha do tema . . . . .	16
1.2	Revisão da bibliografia . . . . .	17
1.3	Objetivos . . . . .	18
1.3.1	Objetivo geral . . . . .	18
1.3.2	Objetivos específicos . . . . .	18
1.4	Procedimentos metodológicos . . . . .	18
1.5	Estrutura do trabalho . . . . .	18
<b>2</b>	<b>POLÍGONOS E PADRÕES COM NÚMEROS: SOMAS E PRODUTOS</b>	<b>20</b>
2.1	Polígono e padrões com números: hexágono . . . . .	20
2.2	Polígono e padrões com números: octógono . . . . .	25
2.3	Polígono e padrões com números: losango e quadrado . . . . .	30
<b>3</b>	<b>ALGORITMO DE EUCLIDES, MÁXIMO DIVISOR COMUM, MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM E CRIVO DE ERATÓSTENES . . . . .</b>	<b>35</b>
3.1	Algoritmo de Euclides via matrizes $2 \times 2$ . . . . .	35
3.2	Modelos visuais para o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum	41
3.2.1	Modelo de diagramas de Venn . . . . .	42
3.2.2	Modelo de área retangular . . . . .	44
3.2.3	Modelo de segmento de reta . . . . .	52
3.3	Uma abordagem diferente do crivo de Eratóstenes . . . . .	57
<b>4</b>	<b>NÚMEROS TRIANGULARES, TRIPLAS PITÁGORICAS E NÚMEROS PERFEITOS . . . . .</b>	<b>65</b>
4.1	Números triangulares . . . . .	65
4.2	Triplas Pitagóricas . . . . .	73
4.3	Números perfeitos, deficientes e abundantes . . . . .	76
<b>5</b>	<b>ATIVIDADES PROPOSTAS . . . . .</b>	<b>85</b>
5.1	Proposta de atividade: polígonos e padrões . . . . .	85
5.1.1	1ª estação: hexágonos . . . . .	87
5.1.2	2ª estação: atividades utilizando o GeoGebra . . . . .	89
5.1.3	3ª estação: octógonos . . . . .	90
5.1.4	4ª estação: jogos na plataforma wordwall . . . . .	91
5.2	Proposta de atividade: modelos visuais do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum . . . . .	92

5.2.1	Atividade: modelo de área retangular . . . . .	94
5.2.2	Desafio . . . . .	101
5.3	Proposta de atividade: crivo de Eratóstenes com seis colunas e números primos	104
5.3.1	Primeira atividade: crivo de Eratóstenes com seis colunas . . . . .	105
5.3.2	Segunda atividade: corrida dos primos . . . . .	107
5.3.3	Terceira atividade: bingo dos primos . . . . .	108
5.4	Proposta de atividade: números triangulares . . . . .	109
5.4.1	Desafio: aperto de mão . . . . .	110
5.4.2	Desafio: rede de malha de estradas . . . . .	114
5.4.3	Desafio: tiras numéricas . . . . .	118
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>121</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>122</b>
	<b>APÊNDICE A – ATIVIDADE: POLÍGONOS E PADRÕES . . . . .</b>	<b>125</b>
	<b>APÊNDICE B – ATIVIDADE: MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM, CRIVO DE ERATÓSTENES E NÚMEROS PRIMOS . . . . .</b>	<b>128</b>
	<b>APÊNDICE C – ATIVIDADE: NÚMEROS TRIANGULARES . . . . .</b>	<b>133</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018a), norteia o ensino de matemática na Educação Básica para que além de axiomas e postulados o estudante descubra outras experimentações que facilitem e contribuam para sua aprendizagem.

No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas (BNCC, 2018a, p. 265).

Este trabalho propõe a investigação de abordagens diferentes para o ensino da aritmética na Educação Básica, buscando tornar o aprendizado mais atrativo e eficaz. A utilização de recursos visuais para algumas demonstrações, permite a exploração de conceitos matemáticos de forma lúdica e intuitiva, favorecendo a compreensão dos estudantes e contribuindo para a prática em sala de aula. Os tópicos estudados nesta dissertação são: polígonos e padrões, modelos visuais para o máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, crivo de Eratóstenes com seis colunas, números triangulares, triplas pitagóricas e números perfeitos.

Ao abordar o tema polígonos e padrões, encontramos características interessantes onde utilizaremos somas e produtos para mostrar regularidades em alguns polígonos. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) “O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.”(Brasil, 2018b, p. 51).

Trabalhamos os conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum (conteúdo abordado na 7º ano do Ensino Básico), através de modelos visuais: modelo retangular, modelo de segmento de reta e modelo de diagrama de Venn. Uma das habilidades propostas pela BNCC é “(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos” (Brasil, 2018a, p. 307). O algoritmo de Euclides, também a ser abordado no trabalho, é um método de divisões sucessivas que permite encontrar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros. Logo o objetivo desse tema é apresentar estratégias diferentes da usual, por meio de matrizes, para identificar o máximo divisor comum.

Sobre o crivo de Eratóstenes como método para identificar números primos, que neste trabalho abordamos com o uso de 6 colunas ao invés de 10, como no método tradicional, o professor poderá mostrar regularidades presentes na tabela, assim como trabalhar outros conceitos como números compostos. Para alunos da 6º ano podemos encontrar na BNCC a habilidade “(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer

Figura 1.1 – Primos até 120

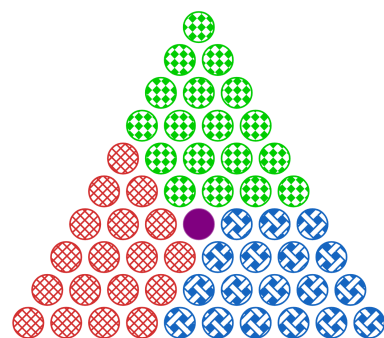
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Em relação aos números triangulares,  $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$  com  $n \in \mathbb{N}$ , trabalhamos modelos visuais com uso do GeoGebra (2025), o que mostra resultados de forma interativa e geométrica. Os alunos poderão verificar os resultados de proposições através de figuras para fixar os conhecimentos. Segundo os PCN “As atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas” (Brasil, 2018b, p. 126). A Figura 1.2, para o caso de  $n = 3$ , mostra que os números triangulares da forma  $t_{3n+1}$  deixam resto 1 na divisão por 3, ou seja  $t_{3n+1} \equiv 1 \pmod{3}$ . Note que o professor além de abordar a parte algébrica, pode também mostrar visualmente esse resultado.

Utilizamos também recursos visuais para mostrar alguns fatos sobre triplas pitagóricas, conteúdo que pode ser abordado no 9º ano da Educação Básica, ao abordar o Teorema de Pitágoras que pelo Referencial Curricular do Paraná (RCP) (Ensino Fundamental II) descreve como objetivos “Demonstrar o Teorema de Pitágoras. Reconhecer e aplicar o Teorema de Pitágoras (Paraná, 2018, p. 897).” Logo, o professor ao abordar o Teorema de Pitágoras pode também apresentar as triplas pitagóricas

relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000” (Brasil, 2018a, p. 301). No decorrer da atividade o professor mostrará aos alunos que os múltiplos de determinados números pelo método de seis colunas se encontram em retas paralelas entre si. O que poderá também abordar o conceito de retas paralelas que também é uma habilidade presente nos conteúdos do 6º ano: “(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros (Brasil, 2018a, p. 303).” A Figura 1.1, mostra como fica essa representação dos números primos e em destaque estão marcados em diagonais os múltiplos de 5 e 7.

Figura 1.2 – Número triangular -  $t_{10}$ 

Fonte: Autora.

primitivas que são ternas (a, b, c) de inteiros positivos sem fatores comuns que satisfaçam  $a^2 + b^2 = c^2$ , como por exemplo (3, 4, 5). A temática dos números perfeitos, abundantes e deficientes pode ser explorada em sala de aula sob uma perspectiva diferente, capaz de despertar o interesse dos estudantes. O trabalho busca apresentar atividades e abordagens que professores podem adotar em suas aulas para torná-las mais atrativas, buscando facilitar a compreensão dos seus estudantes.

## 1.1 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018a) enfatiza a importância de desenvolver no estudante a capacidade de resolver problemas, fazer induções e conjecturas, testar métodos e hipóteses e utilizar diferentes recursos para representar e interpretar situações matemáticas, assim como usar ferramentas tecnológicas para investigar e produzir.

A aritmética como base da matemática, desempenha um papel fundamental na formação do estudante. No entanto, seu ensino é mais voltado aos procedimentos abstratos, muitas vezes desvinculados de situações reais e da construção do significado. Portanto, este trabalho busca apresentar abordagens diferentes para o ensino de conteúdos relacionados à aritmética recorrendo a diversas estratégias para que o estudante compreenda assuntos essenciais para a sua formação. Segundo a BNCC:

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (Brasil, 2018a, p. 266)

A visualização é um elemento fundamental na aprendizagem da matemática. Neste trabalho, utilizamos o GeoGebra para criar representações visuais que auxiliem os alunos a construir conexões entre os conceitos matemáticos. Encontramos no Referencial Curricular do Paraná (Ensino Médio), que:

Na área de Matemática, é evidente a necessidade do uso das tecnologias, incluindo as digitais, para introdução, compreensão, visualização, construção, comparação e operação de muitos conhecimentos matemáticos. As tecnologias colaboram, inclusive, com o desenvolvimento do pensamento computacional, que também pode ser desenvolvido, por exemplo, a partir da aprendizagem de alguns conceitos relacionados aos números, à álgebra, à geometria e à probabilidade (Paraná, 2021a, p. 484).

Ao proporcionar representações visuais interativas através do GeoGebra o estudante pode explorar relações matemáticas e fazer conjecturas e verificar suas hipóteses, segundo Paraná (2021b, p. 6) “essas metodologias se articulam, direcionando o trabalho para a formação do pensamento matemático do estudante, trazendo a matemática ao seu dia a dia de forma contextualizada e significativa”. Portanto, seu uso é um recurso valioso para a construção de aprendizagens significativas.

## 1.2 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

Ao fazer uma pesquisa pela literatura sobre diferentes abordagens para conteúdos da aritmética apresentados no trabalho recorreremos a Hefez (2022) para as demonstrações de proposições de temas como algoritmo de Euclides, números primos e números perfeitos.

Ao abordar sobre polígonos e padrões, podemos encontrar em Duncan e Itwuller, (1990), relacionando a ideia de somas e produto com um polígono correspondente. Lidan e Pjanić (2020) que apresentam modelos visuais usando diagramas de Venn, áreas retangulares e segmento de reta para o estudo do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Em uma busca pelo tema no repositório de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) sobre máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, foram encontrados trabalhos, no qual o de Mariano (2024) apresenta uma proposta didática para o ensino do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum no Ensino Médio e Fiorelli (2017) apresenta de forma generalizada os conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum aplicados ao Ensino Básico. Santos (2017) apresenta a relação entre o máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e o diagrama de Venn, Araújo (2016) mostra uma extensão do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum dos inteiros aos comesuráveis.

O algoritmo de Euclides via matrizes de ordem 2, parte do estudo, é analisado em Koshy (1996). Pelo repositório de dissertações, procurando por “algoritmo de Euclides” foram encontrados trabalhos como o de Silva (2014) que apresenta um estudo sobre a aplicação do algoritmo de Euclides e o de Matos (2018) que mostra a relação entre o algoritmo de Euclides e números de Fibonacci.

O crivo de Eratóstenes através de uma abordagem diferente da convencional com tabelas de 6 colunas é baseado em Omejc (1972).

Os principais referenciais sobre uso de figuras para mostrar propriedades interessantes sobre números triangulares foram Nelsen (2008) e Miller (2012). Procurando por trabalhos com números triangulares no repositório de dissertações do PROFMAT foram encontrados dois trabalhos, no qual Chiconello (2013), apresenta números figurados e as sequências recursivas: uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados que relaciona figuras e atividades sobre o tema. Porém o trabalho proposto não apresenta semelhanças nas abordagens. Enquanto, Ibrahim (2022) apresenta as interpretações algébricas e combinatória dos números triangulares.

Nelsen também investiga sobre as representações visuais de triplas pitagóricas e números perfeitos. Prielipp (1970) disserta sobre números perfeitos, abundantes e deficientes. Uma busca no repositório de dissertações sobre “números perfeitos”, foram encontrados quatro trabalhos, Brandão (2021), Cruz (2013), Júnior (2020) e Melo (2021) no qual todos apresentam a definição de números perfeitos e o teorema para determinar outros números com a mesma propriedade.

As atividades elaboradas foram norteadas pelos documentos orientadores do currículo

escolar como a BNCC (2018a), PCN (2018b) e os referenciais curriculares do Paraná (2021a).

### 1.3 OBJETIVOS

#### 1.3.1 OBJETIVO GERAL

Compreender abordagens diferentes de conteúdos voltados à Aritmética, assim como suas aplicações na Educação Básica.

#### 1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Explorar aplicações diferenciadas da Aritmética.
- Mostrar formas alternativas de apresentar conteúdos voltados à Aritmética para a Educação Básica.
- Empregar o uso do GeoGebra para mostrar visualmente os resultados apresentados.
- Elaborar atividades que contribuam para o ensino e aplicações de temas voltados à Aritmética.

### 1.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia utilizada neste trabalho é quantitativa que segundo Gerhardt (2009, p. 33) “A pesquisa quantitativa, que tem suas raízes no pensamento positivista lógico, tende a enfatizar o raciocínio dedutivo, as regras da lógica e os atributos mensuráveis da experiência humana”. É também bibliográfica e explicativa pois “este tipo de pesquisa explica o porquê das coisas através dos resultados oferecidos” (Gerhardt, 2009, p. 35). Foram adotados os seguintes procedimentos:

- Seleção da bibliografia sobre aplicações na aritmética.
- Uso do software GeoGebra para representações visuais.
- Elaboração de atividades sobre os temas apresentados, norteados por documentos curriculares como BNCC, PCN e RCP.

### 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos. No Capítulo 1 expomos a ideia a ser estudada, assim como a justificativa do tema, objetivos a serem atingidos e procedimentos metodológicos. No Capítulo 2, mostraremos fatos curiosos presentes em polígonos através de somas e produtos. Apresentaremos no Capítulo 3, modelos visuais para o máximo divisor comum

e o mínimo múltiplo comum. Além disso faremos uma abordagem diferente para o crivo de Eratóstenes, que na maneira usual é apresentada na escola para os estudantes com 10 colunas e aqui mostraremos sua aplicação com 6 colunas, e apresentaremos as facilidades e curiosidades de usar esse método. Outro tema a ser apresentado é o uso do Algoritmo de Euclides via matrizes  $2 \times 2$ .

No Capítulo 4, mostraremos algumas características interessantes sobre os números triangulares, recorrendo ao software GeoGebra para visualizar esses resultados. As triplas pitagóricas, números perfeitos, números abundantes e números deficientes também são abordados neste capítulo. As atividades a serem desenvolvidas sobre os temas apresentados no trabalho pertencerá ao Capítulo 5. As conclusões do trabalho estarão no Capítulo 6.

## 2 POLÍGONOS E PADRÕES COM NÚMEROS: SOMAS E PRODUTOS

O ensino tradicional de matemática, muitas vezes centrado em conceitos e demonstrações formais, pode limitar a participação e o interesse dos estudantes. De acordo com a BNCC (2018a), uma abordagem mais eficaz consiste em proporcionar um ambiente de aprendizagem atrativo, que estimule a curiosidade e a investigação. Ao promover atividades que incentivem os alunos a buscar relações e conexões entre os diferentes conceitos matemáticos, é possível proporcionar um aprendizado mais significativo e duradouro.

Neste capítulo, apresentamos uma abordagem envolvendo geometria e operações aritméticas. Essa conexão permite que os alunos atribuam significados aos cálculos numéricos ao visualizá-los em contextos geométricos, favorecendo a compreensão de conceitos matemáticos. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

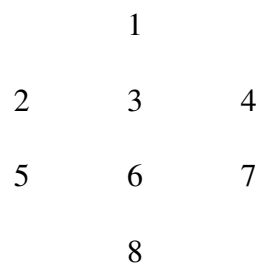
Quando os alunos têm de representar um objeto geométrico por meio de um desenho, buscam uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades e organizam o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem mental global que têm do objeto (Brasil, 2018b, p.125).

Ao conectar a geometria com as operações aritméticas, podemos criar um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e significativo. Duncan e Litwiller (1990) apresentam atividades sobre essa abordagem interdisciplinar as quais trataremos neste trabalho com somas e multiplicações com números inteiros através de polígonos.

### 2.1 POLÍGONO E PADRÕES COM NÚMEROS: HEXÁGONO

O primeiro polígono que discutiremos é o hexágono. Inicialmente escolhemos 8 números inteiros e consecutivos em ordem crescente ou decrescente como, por exemplo, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Em seguida, posicionamos esses números como mostra a Figura 2.1.

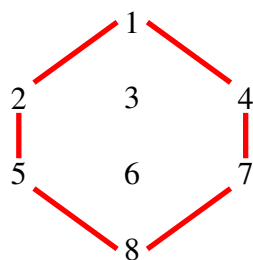
Figura 2.1 – Estrutura dos números no hexágono



Fonte: Autora.

Ao conectarmos os números externos com segmentos obtemos um hexágono conforme mostra a Figura 2.2.

Figura 2.2 – Configuração dos números no hexágono

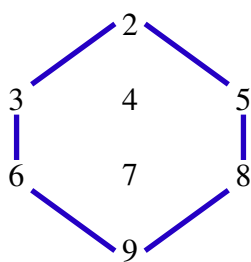


Fonte: Autora.

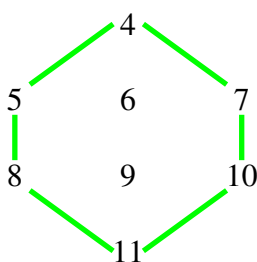
Denotemos a soma dos números que se encontram nos vértices do polígono de  $P$  e a soma dos números que estão no interior do polígono de  $I$ . Ao somarmos os números que estão nos vértices do hexágono da Figura 2.2 encontramos  $P = 1 + 2 + 5 + 8 + 7 + 4 = 27$ . A soma dos números que estão no interior do hexágono é  $I = 3 + 6 = 9$ .

Observe exemplos com outros números consecutivos.

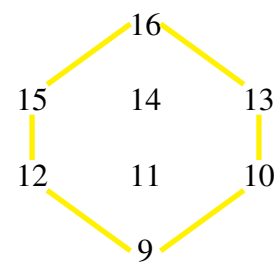
Figura 2.3 – Exemplos de configurações de números no hexágono



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autora.

Analisando as Figuras 2.3(a), (b) e (c), observamos que a soma  $P$  dos números que se encontram nos vértices e a soma  $I$  dos números internos seguem um padrão. Na Figura 2.3(a) temos  $P = 33$  e  $I = 11$ ; na Figura 2.3(b),  $P = 45$  e  $I = 15$  e na Figura 2.3(c) mostramos números em ordem decrescente e obtemos  $P = 75$  e  $I = 25$ . Observe que existe uma relação entre os valores de  $P$  e  $I$ . O Quadro 2.1 mostra essas relações para a Figura 2.3.

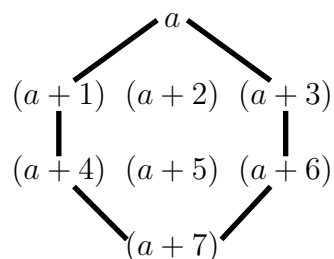
Quadro 2.1 – Valores de  $P$ ,  $I$  e sua relação nas Figuras 2.3(a), (b) e (c)

Figura 2.3	$P$	$I$	$P = 3I$
(a)	33	11	$33 = 3 \cdot 11$
(b)	45	15	$45 = 3 \cdot 15$
(c)	75	25	$75 = 3 \cdot 25$

Fonte: Autora.

Segundo Duncan e Litwiller (1990) podemos mostrar que esse fato é válido para quaisquer 8 números inteiros consecutivos. Seja  $a \in \mathbb{Z}$  o primeiro número, então podemos representar esse padrão como na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Caso especial de configuração de números no hexágono



Fonte: Autora.

Logo, ao determinar os valores de  $P$  e  $I$ , encontramos:

$$P = a + (a + 1) + (a + 3) + (a + 4) + (a + 6) + (a + 7) = 6a + 21.$$

$$I = (a + 2) + (a + 5) = 2a + 7.$$

Ou seja,  $P = 6a + 21 = 3(2a + 7) = 3I$ , mostrando assim a relação encontrada no Quadro 2.1, para qualquer  $a \in \mathbb{Z}$ .

Observe que a soma dos números em vértices opostos é constante e igual a  $I$ , isto é,

$$a + (a + 7) = (a + 1) + (a + 6) = (a + 4) + (a + 3) = 2a + 7 = I.$$

No exemplo da Figura 2.5(a) com os números 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 temos que a soma dos números em vértices opostos  $3 + 10 = 4 + 9 = 7 + 6 = 5 + 8 = 13 = I$ , Figura 2.5(b).

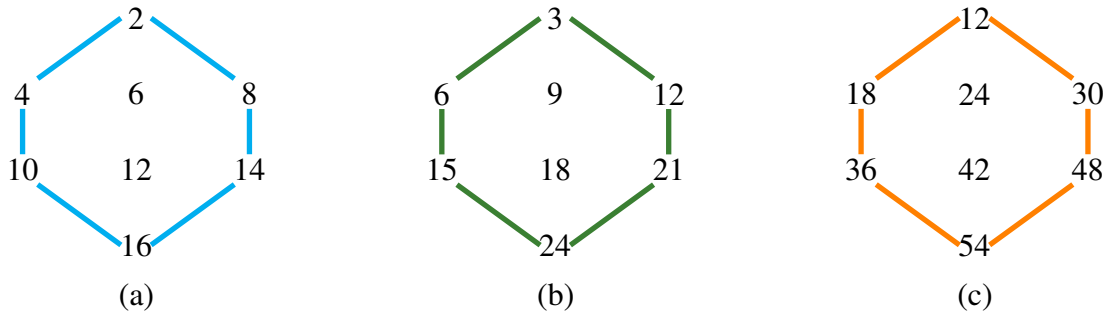
Figura 2.5 – Exemplos de vértices opostos no hexágono



Fonte: Autora.

Essa relação é válida também para outros formatos. Escolhemos agora 8 múltiplos consecutivos de um determinado número inteiro e analisamos os valores de  $P$  e  $I$ . Na Figura 2.6 representamos múltiplos de 2 iniciando em 2 até 16, múltiplos de 3 começando em 3 até 24 e múltiplos de 6 iniciados em 12 até 54.

Figura 2.6 – Exemplos de múltiplos no hexágono



Fonte: Autora.

Observe o Quadro 2.2 que mostra os valores de  $P$  e  $I$ , e como a relação ainda é válida, nos hexágonos da Figura 2.6, ou seja,  $P = 3I$ .

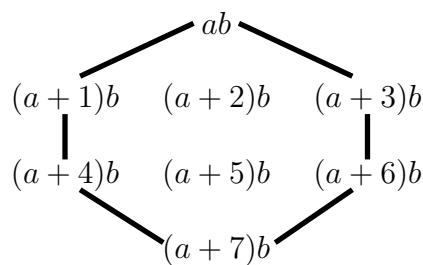
Quadro 2.2 – Valores de  $P$ ,  $I$  e sua relação nas Figuras 2.6(a), (b) e (c)

Figura 2.6	$P$	$I$	$P = 3I$
(a)	54	18	$54 = 3 \cdot 18$
(b)	81	27	$81 = 3 \cdot 27$
(c)	198	66	$198 = 3 \cdot 66$

Fonte: Autora.

Podemos mostrar que esse fato é válido para quaisquer 8 números inteiros. Sejam  $a$  um número inteiro e  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  o fator usado para determinar os outros números da Figura 2.7. Para  $b = 1$  temos o caso analisado anteriormente.

Figura 2.7 – Caso especial de múltiplos no hexágono



Fonte: Autora.

Os valores de  $P$  e  $I$  são dados por

$$P = ab + (a + 1)b + (a + 4)b + (a + 7)b + (a + 6)b + (a + 3)b = 6ab + 21b.$$

$$I = (a + 2)b + (a + 5)b = 2ab + 7b.$$

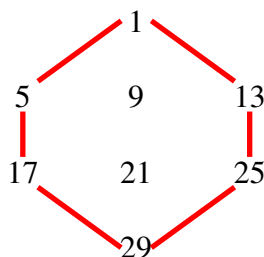
Portanto,  $P = 6ab + 21b = 3(2ab + 7b) = 3I$ .

Note que aqui também temos que a soma dos números em vértices opostos é igual a  $I$ , ou seja,

$$ab + (a + 7)b = (a + 1)b + (a + 6)b = (a + 4)b + (a + 3)b = 2ab + 7b = I.$$

Um outro caso em que a relação é preservada acontece quando dado um número inteiro  $a$ , os outros 7 números são obtidos somando uma razão  $r$  ao anterior. Por exemplo, para  $a = 1$  e  $r = 4$  obtemos 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 e 29. A Figura 2.8 representa esse caso.

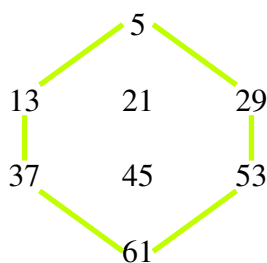
Figura 2.8 – Outro exemplo de configuração de números no hexágono



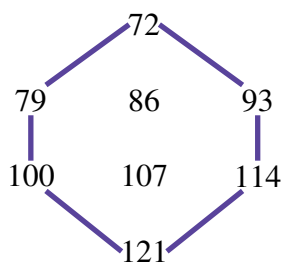
Fonte: Autora.

Temos que  $P = 1 + 5 + 17 + 29 + 25 + 13 = 90$  e  $I = 9 + 21 = 30$ , obtendo novamente a relação  $P = 90 = 3 \cdot 30 = 3I$ . Representamos outros exemplos com essa relação na Figura 2.9.

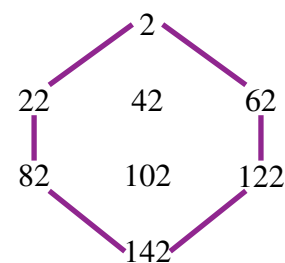
Figura 2.9 – Mais exemplos de configurações de números no hexágono



(a)  $a = 5$  e  $r = 8$



(b)  $a = 72$  e  $r = 7$



(c)  $a = 2$  e  $r = 20$

Fonte: Autora.

Nestes casos também conseguimos a relação  $P = 3I$ . Observe o Quadro 2.3 que mostra os resultados da Figura 2.9(a), (b) e (c).

Quadro 2.3 – Valores de  $P$ ,  $I$  e sua relação nas Figuras 2.9(a), (b) e (c)

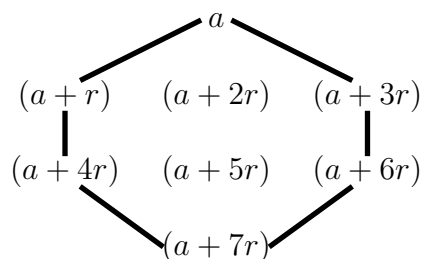
Figura 2.9	$P$	$I$	$P = 3I$
(a)	198	66	$198 = 3 \cdot 66$
(b)	579	193	$579 = 3 \cdot 193$
(c)	432	144	$432 = 3 \cdot 144$

Fonte: Autora.

Mais uma vez podemos generalizar considerando  $a \in \mathbb{Z}$  o primeiro número e  $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  a razão que somamos a cada termo, isto é, os primeiros 8 termos de uma progressão aritmética

cujo primeiro termo é  $a$  e razão  $r$ . Podemos representar esse caso conforme mostra a Figura 2.10. Todos os casos anteriores são casos particulares deste.

Figura 2.10 – Caso geral de configuração de números no hexágono



Fonte: Autora.

Os valores de  $P$  e  $I$  são dados por:

$$P = a + (a + r) + (a + 4r) + (a + 7r) + (a + 6r) + (a + 3r) = 6a + 21r.$$

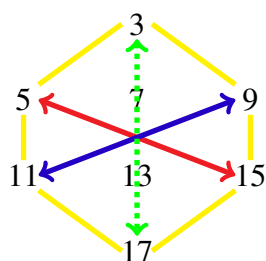
$$I = (a + 2r) + (a + 5r) = 2a + 7r.$$

Logo, tem-se que  $P = 6a + 21r = 3(2a + 7r) = 3I$ . A soma dos números em vértices opostos é igual a  $I$ , isto é,

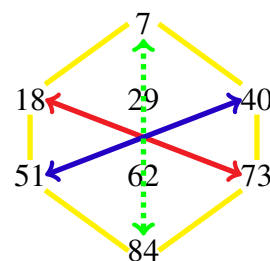
$$a + (a + 7r) = (a + r) + (a + 6r) = (a + 4r) + (a + 3r) = 2a + 7r = I.$$

Observe os exemplos da Figura 2.11 com essa relação.

Figura 2.11 – Exemplos de soma dos vértices opostos no hexágono



(a)  $a = 3$  e  $r = 2$



(b)  $a = 7$  e  $r = 11$

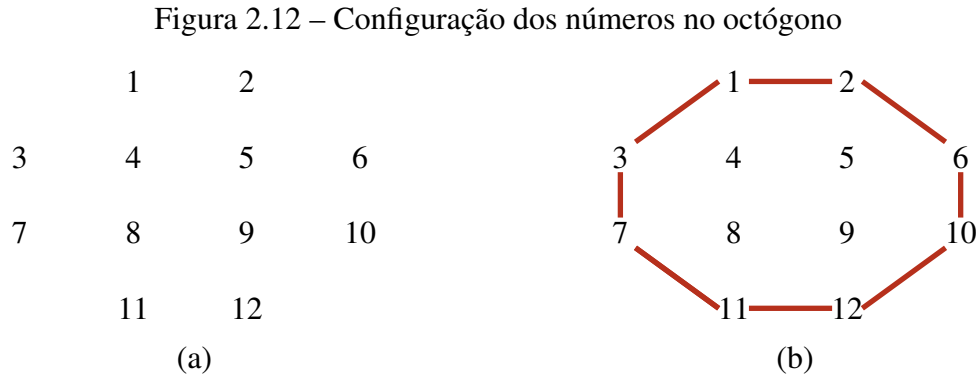
Fonte: Autora.

Conforme ilustrado na Figura 2.11(a), a soma dos números em vértices opostos é  $3 + 17 = 5 + 15 = 11 + 9 = 20 = I$ . Já na Figura 2.11(b) a soma de cada par de vértices opostos resulta em 91, como se observa em  $18 + 73$ ,  $51 + 40$  e  $7 + 84$ .

## 2.2 POLÍGONO E PADRÕES COM NÚMEROS: OCTÓGONO

Outro polígono que apresenta relações semelhantes às mostradas anteriormente é o octógono. Começamos escolhendo 12 números inteiros e consecutivos e em seguida representamos

esses números em uma estrutura que possa fornecer um octógono. Por exemplo, organizamos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 como na Figura 2.12(a) e conectamos os números externos como mostra a Figura 2.12(b).



Fonte: Autora.

Ao determinar o valor de  $P$  e  $I$  para a Figura 2.12(b), obtemos:

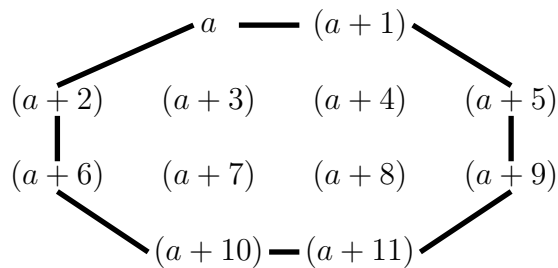
$$P = 1 + 3 + 7 + 11 + 12 + 10 + 6 + 2 = 52.$$

$$I = 4 + 5 + 8 + 9 = 26.$$

Assim,  $P = 2I$ .

Agora consideremos 12 inteiros consecutivos começando em  $a \in \mathbb{Z}$ . A Figura 2.13 mostra o posicionamento desses números.

Figura 2.13 – Caso especial de configuração de números no octógono



Fonte: Autora.

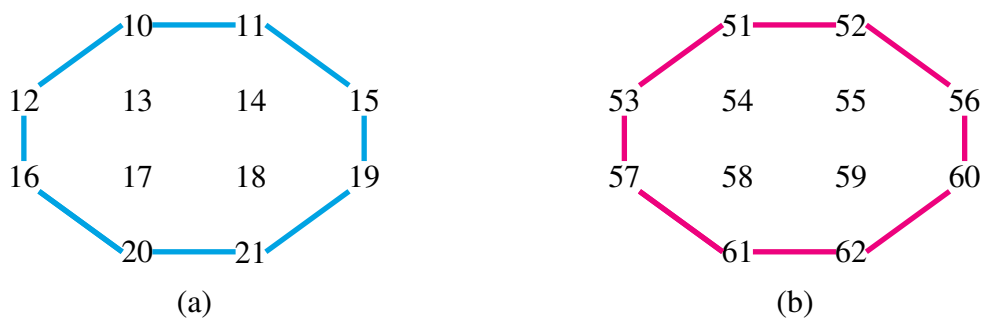
Ao somar os valores que se encontram nos vértices do octógono da Figura 2.13 e no seu interior, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} P &= a + (a + 2) + (a + 6) + (a + 10) + (a + 11) + (a + 9) + (a + 5) + (a + 1) \\ &= 8a + 44. \end{aligned}$$

$$I = (a + 3) + (a + 4) + (a + 7) + (a + 8) = 4a + 22.$$

Logo  $P = 8a + 44 = 2(4a + 22) = 2I$ . O que mostra que essa relação é válida para 12 números inteiros consecutivos quaisquer. Vejamos outros exemplos de números com essa relação.

Figura 2.14 – Exemplos de configurações de números no octógono



Fonte: Autora.

Analizando a Figura 2.14(a), temos que:

$$P = 10 + 12 + 16 + 20 + 21 + 19 + 15 + 11 = 124.$$

$$I = 13 + 14 + 17 + 18 = 62.$$

Portanto  $P = 124 = 2 \cdot 62 = 2I$ .

Na Figura 2.14(b) encontramos os seguintes valores para  $P$  e  $I$ :

$$P = 51 + 53 + 57 + 61 + 62 + 60 + 56 + 52 = 452.$$

$$I = 54 + 55 + 58 + 59 = 226.$$

Logo,  $P = 452 = 2 \cdot 226 = 2I$ .

Ao analisar a Figura 2.13, observa-se que a soma dos números em vértices opostos é igual a  $\frac{I}{2}$ , isto é,

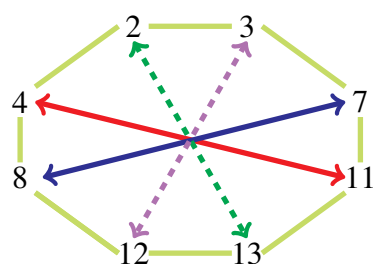
$$a + (a + 11) = (a + 2) + (a + 9) = (a + 6) + (a + 5) = (a + 10) + (a + 1) = 2a + 11 = \frac{I}{2}.$$

Esse fato acontece também na soma dos números internos posicionados diagonalmente, ou seja,

$$(a + 3) + (a + 8) = (a + 7) + (a + 4) = 2a + 11 = \frac{I}{2}.$$

Ao examinar a Figura 2.15, observa-se essa relação. A soma dos valores em vértices opostos é constante e igual a 15. Essa soma representa exatamente metade da soma total dos números presentes no interior do polígono. Essa regularidade pode ser verificada em todas as combinações de vértices opostos, como  $4 + 11$ ,  $8 + 7$ ,  $12 + 3$  e  $2 + 13$ .

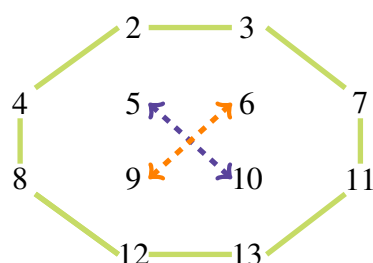
Figura 2.15 – Exemplo de soma dos vértices opostos no octógono



Fonte: Autora.

Além disso, os valores centrais também contribuem para essa constância, com  $9 + 6$  e  $10 + 5$  resultando em 15, vide Figura 2.16.

Figura 2.16 – Exemplo de soma dos vértices opostos internos do octógono

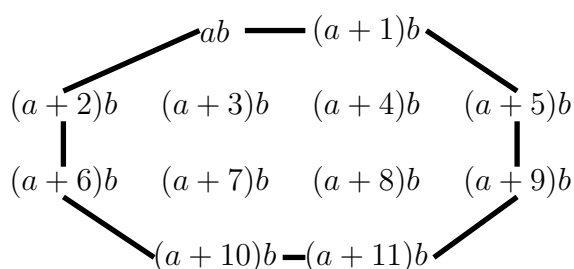


Fonte: Autora.

Para o caso da escolha de múltiplos consecutivos de um número, também encontramos a relação, isto é,  $P = 2I$ .

Sejam  $a$  um número inteiro e  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  o fator pelo qual multiplicamos, para obter o resto dos números. Vide a Figura 2.17. Para  $b = 1$  temos o caso anterior.

Figura 2.17 – Caso especial de múltiplos no octógono



Fonte: Autora.

Os valores de  $P$  e  $I$  são dados por:

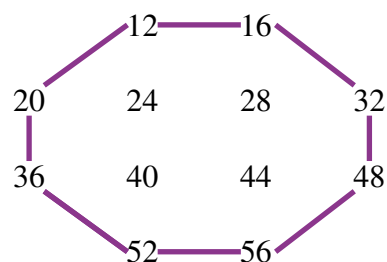
$$\begin{aligned} P &= ab + (a + 2)b + (a + 6)b + (a + 10)b + (a + 11)b + (a + 9)b + (a + 5)b + (a + 1)b \\ &= 8ab + 44b. \end{aligned}$$

$$I = (a + 3)b + (a + 4)b + (a + 7)b + (a + 8)b = 4ab + 22b.$$

Podemos observar que  $P = 8ab + 44b = 2(4ab + 22) = 2I$ , o que mostra que a relação também é válida para esse caso.

Vejam os um exemplo, escolhendo  $a = 3$  e  $b = 4$ . Podemos representar esses valores como mostra a Figura 2.18.

Figura 2.18 – Exemplo de múltiplos no octógono



Fonte: Autora.

Temos que  $P = 12 + 20 + 36 + 52 + 56 + 48 + 32 + 16 = 272$  e  $I = 24 + 28 + 40 + 44 = 136$ . E podemos escrever  $P = 272 = 2 \cdot 136 = 2I$ .

Note que a soma dos números em vértices opostos é igual a  $\frac{I}{2}$ , ou seja,

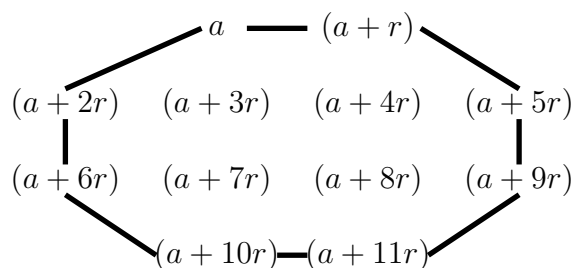
$$\begin{aligned} ab + (a + 11)b &= (a + 2)b + (a + 9)b = (a + 6)b + (a + 5)b = (a + 10)b + (a + 1)b = \\ &= 2ab + 11b = \frac{I}{2}. \end{aligned}$$

Assim, como também a soma das diagonais dos números internos, ou seja,

$$(a + 3)b + (a + 8)b = (a + 7)b + (a + 4)b = 2ab + 11b = \frac{I}{2}.$$

Quando escolhemos um valor inicial  $a \in \mathbb{Z}$  e uma razão  $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  que é somada a cada novo número obtido, isto é, os primeiros 12 termos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é  $a$  e razão  $r$ , encontrando mais uma vez a relação  $P = 2I$ . Observe a Figura 2.19 com o posicionamento desses números.

Figura 2.19 – Caso geral de configuração de números no octógono



Fonte: Autora.

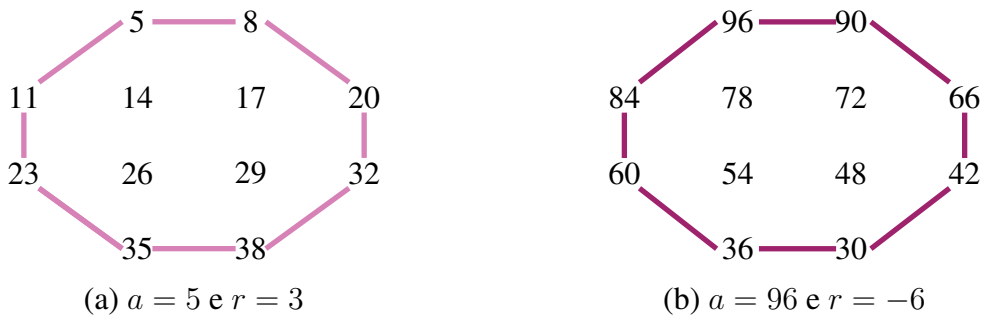
Logo,

$$P = a + (a + 2r) + (a + 6r) + (a + 10r) + (a + 11r) + (a + 9r) + (a + 5r) + (a + r) \\ = 8a + 44r.$$

$$I = (a + 3r) + (a + 4r) + (a + 7r) + (a + 8r) = 4a + 22r.$$

E, portanto,  $P = 8a + 44r = 2(4a + 22r) = 2I$ . Veja na Figura 2.20 dois exemplos, que mostram esse caso.

Figura 2.20 – Mais exemplos de configurações de números no octógono



Fonte: Autora.

Na Figura 2.20(a) encontramos  $P = 5 + 11 + 23 + 35 + 38 + 32 + 20 + 8 = 172$  e  $I = 14 + 17 + 26 + 29 = 86$ , ou seja,  $P = 172 = 2 \cdot 86 = 2I$ . Enquanto na Figura 2.20(b) temos que  $P = 96 + 84 + 60 + 36 + 30 + 42 + 66 + 90 = 504$  e  $I = 78 + 72 + 54 + 48 = 252$ , logo  $P = 504 = 2 \cdot 252 = 2I$ .

Neste caso, também pode ser abordado com os estudantes o fato de que a soma dos números em vértices opostos resultam em  $\frac{I}{2}$ , ou seja,

$$a + (a + 11r) = (a + 2r) + (a + 9r) = (a + 6r) + (a + 5r) = (a + 10r) + (a + r) = \\ = 2a + 11r = \frac{I}{2}.$$

Além disso, a soma das diagonais dos números internos da Figura 2.19 possui essa relação, isto é,

$$(a + 3r) + (a + 8r) = (a + 4r) + (a + 7r) = 2a + 11r = \frac{I}{2}.$$

### 2.3 POLÍGONO E PADRÕES COM NÚMEROS: LOSANGO E QUADRADO

Uma relação interessante é encontrada em alguns quadriláteros. Mostraremos inicialmente o que acontece com o losango. Escolhemos 5 números consecutivos, por exemplo, 1, 2, 3, 4 e 5. Em seguida posicionamos estes números na estrutura mostrada na Figura 2.21.

Figura 2.21 – Configuração de números no losango

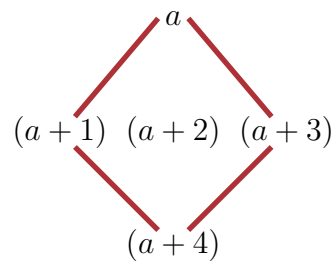


Fonte: Autora.

Considerando  $P$  a soma dos números que estão nos vértices do losango da Figura 2.21(b) e  $I$  o número que se encontra no interior, temos que  $P = 1 + 2 + 5 + 4 = 12$  e  $I = 3$ .

De modo geral, seja  $a \in \mathbb{Z}$  o primeiro número escolhido, e posicione os números como mostra a Figura 2.22.

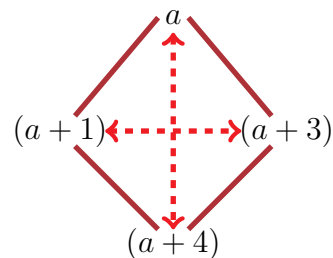
Figura 2.22 – Caso especial de configuração de números no losango



Fonte: Autora.

Assim,  $P = a + (a + 1) + (a + 4) + (a + 3) = 4a + 8$  e  $I = (a + 2)$  e, portanto,  $P = 4a + 8 = 4(a + 2) = 4I$ . Também pode ser abordado o fato que a soma dos números em vértices opostos é o dobro do valor do número interior. Vide a Figura 2.23.

Figura 2.23 – Configuração da soma dos vértices opostos no losango

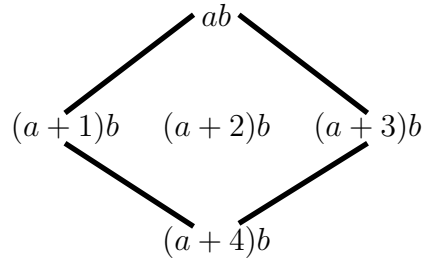


Fonte: Autora.

Note que  $(a + 1) + (a + 3) = a + (a + 4) = 2a + 4 = 2(a + 2)$ .

A mesma relação ocorre para números que são múltiplos consecutivos. Sejam  $a$  um número inteiro e  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  o fator pelo qual multiplicamos cada um dos números como ilustra a Figura 2.24.

Figura 2.24 – Caso especial de múltiplos no losango



Fonte: Autora.

Logo, os valores de  $P$  e  $I$ , são:

$$P = ab + (a+1)b + (a+4)b + (a+3)b = 4ab + 8b.$$

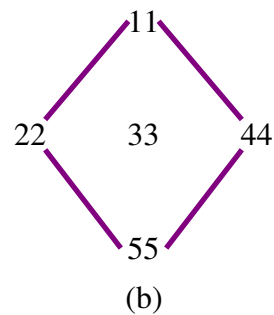
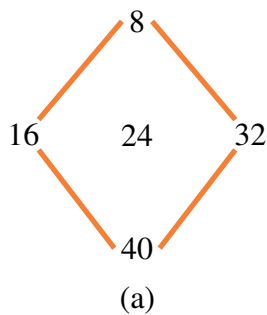
$$I = (a+2)b = ab + 2b.$$

Portanto,  $P = 4ab + 8b = 4(ab + 2b) = 4I$ .

Observe que a soma dos números em vértices opostos é constante e igual a  $2I$ , ou seja,  $(a+1)b + (a+3)b = ab + (a+4)b = 2[(a+2)b] = 2I$ .

Veja os exemplos na Figura 2.25(a) e (b) para múltiplos de 8 e 11, respectivamente.

Figura 2.25 – Exemplos de múltiplos no losango

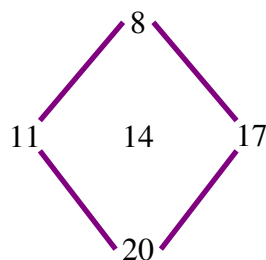


Fonte: Autora.

Na Figura 2.25(a) tem-se que  $P = 96$  e  $I = 24$ , e então podemos escrever  $P = 96 = 4 \cdot 24 = 4I$ . Novamente na Figura 2.25(b) temos que  $P = 132$  e  $I = 33$  logo  $P = 132 = 4 \cdot 33 = 4I$ .

Os primeiros 5 termos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é  $a \in \mathbb{Z}$  e razão  $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , como, por exemplo 8, 11, 14, 17 e 20, com primeiro termo 8 e razão 3 também possui essa relação, Figura 2.26.

Figura 2.26 – Exemplo de configuração de números no losango

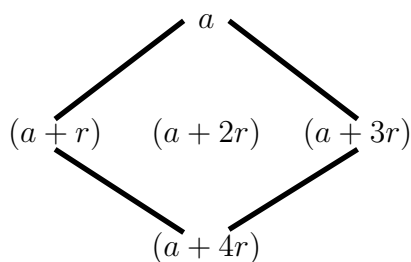


Fonte: Autora.

Note que  $P = 56$  e  $I = 14$ , portanto  $P = 56 = 4 \cdot 14 = 4I$ .

Seja  $a$  um número inteiro e  $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  a razão que é somada a cada novo número, isto é, os primeiros 5 termos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é  $a$  e razão  $r$ . Então podemos representar essa situação como mostra a Figura 2.27.

Figura 2.27 – Caso geral de configuração de números no losango



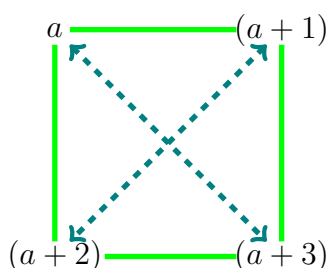
Fonte: Autora.

Portanto,  $P = a + (a + r) + (a + 4r) + (a + 3r) = 4a + 8r$  e  $I = a + 2r$ , logo  $P = 4a + 8r = 4(a + 2r) = 4I$ .

Assim, como nos casos anteriores, a soma dos números dos vértices opostos é igual a  $2I$ , isto é,  $a + (a + 4r) = (a + r) + (a + 3r) = 2a + 4r = 2(a + 2r) = 2I$ .

Outro polígono que apresenta relações semelhantes e que pode ser explorado com os estudantes em sala de aula é o quadrado. Considere quatro termos consecutivos:  $a$ ,  $(a + 1)$ ,  $(a + 2)$  e  $(a + 3)$ , com  $a$  inteiro, posicionados como mostra a Figura 2.28.

Figura 2.28 – Caso geral de configuração de números no quadrado



Fonte: Autora.

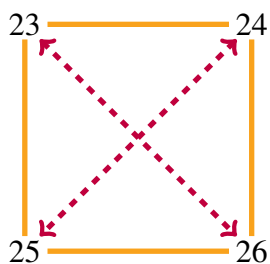
Podemos observar que a soma dos vértices opostos do quadrado são iguais pois

$$a + (a + 3) = 2a + 3 = (a + 2) + (a + 1)$$

e esse valor é a metade da soma  $P = 4a + 6$ .

Veja o exemplo da Figura 2.29 com os números 23, 24, 25 e 26.

Figura 2.29 – Exemplo de soma dos vértices opostos no quadrado



Fonte: Autora.

Tem-se que  $23 + 26 = 49 = 24 + 25$ .

### 3 ALGORITMO DE EUCLIDES, MÁXIMO DIVISOR COMUM, MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM E CRIVO DE ERATÓSTENES

Neste capítulo, apresentaremos o algoritmo de Euclides via matrizes  $2 \times 2$  e os conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, explorando suas propriedades e visualizações e também uma abordagem diferente para o crivo de Eratóstenes.

#### 3.1 ALGORITMO DE EUCLIDES VIA MATRIZES $2 \times 2$

Os resultados desta seção são baseados em Hefez (2022). Sejam  $a$  e  $b$  dois números inteiros, diremos que  $a$  divide  $b$ , escrevendo  $a|b$ , quando existir  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = ca$ . Mesmo quando um número inteiro  $b \neq 0$  não divide o número inteiro  $a$ , denotado por  $b \nmid a$ , é possível efetuar a divisão de  $a$  por  $b$ , com resto. Este fato é dado pelo teorema a seguir:

**Teorema 3.1.** *Sejam  $a$  e  $b$  dois números inteiros com  $b \neq 0$ . Existem dois únicos números inteiros  $q$  e  $r$  tais que*

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

*Demonstração.* Considere o conjunto

$$S = \{x = a - by; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Verificando a condição de existência: Pela Propriedade Arquimediana, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n(-b) > -a$ ; logo,  $a - nb > 0$ , isto demonstra que  $S$  é não vazio. Como o conjunto  $S$  é limitado inferiormente por 0, temos, pelo Princípio da Boa Ordenação, que  $S$  tem um menor elemento  $r$ . Logo, existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $r = a - bq$ . Sabemos que  $r \geq 0$ . Vamos mostrar que  $r < |b|$ . Suponhamos por absurdo que  $r \geq |b|$ . Portanto, existe  $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que  $r = |b| + s$ ; assim,  $0 \leq s < r$ . O que contradiz o fato de  $r$  ser o menor elemento de  $S$ , pois  $s = a - (q \pm 1)b \in S$ , com  $s < r$ .

Condição de unicidade: Suponha que  $a = bq + r = bq' + r'$ , onde  $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < |b|$  e  $0 \leq r' < |b|$ . Então temos que  $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$ . Logo,  $|r' - r| < |b|$ . Entretanto,  $b(q - q') = r' - r$ , o que implica que

$$|b||q - q'| = |r' - r| < |b|,$$

o que só é possível se  $q = q'$  e consequentemente,  $r = r'$ . □

Os números  $q$  e  $r$  são chamados de quociente e resto da divisão de  $a$  por  $b$ , respectivamente. Tem-se que o resto da divisão de  $a$  por  $b$  é zero se, e somente se,  $b$  divide  $a$ .

Dados dois inteiros  $a$  e  $b$ , distintos ou não, um número inteiro  $d$  será dito um divisor comum de  $a$  e  $b$  se  $d|a$  e  $d|b$ . Como por exemplo,  $\pm 1$  e  $\pm 3$  são os divisores comuns de 9 e 12.

Um número inteiro  $d > 0$  é um máximo divisor comum de  $a$  e  $b$  ( $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ ), se possuir as seguintes propriedades:

1.  $d$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ , e
2.  $d$  é divisível por todo divisor comum de  $a$  e  $b$ .

**Exemplo 3.1.** O máximo divisor comum de 12 e 32 é 4.

O máximo divisor comum de  $a$  e  $b$ , será denotado por  $(a, b)$ . O lema a seguir será fundamental para calcular com muita eficácia e facilidade o máximo divisor comum de dois números naturais quaisquer.

**Lema 3.1.** *Sejam  $a, b, n \in \mathbb{Z}$ . Se existe  $(a, b - na)$ , então,  $(a, b)$  existe e*

$$(a, b) = (a, b - na).$$

*Demonstração.* Seja  $d = (a, b - na)$ . Dado que  $d|a$  e  $d|(b - na)$ , conseqüentemente  $d$  divide  $b = b - na + na$ . Portanto,  $d$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ . Suponha que  $c$  seja um divisor comum de  $a$  e  $b$ . Logo,  $c$  é um divisor comum de  $a$  e  $b - na$ , ou seja,  $c|d$ . Isso prova que  $d$  é o máximo divisor comum entre  $a$  e  $b$ .  $\square$

O Algoritmo de Euclides que apresentaremos a seguir, é um método de divisões sucessivas que permite encontrar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros. Segundo (Hefez, 2022, p. 75) “o método, chamado *Algoritmo de Euclides*, é um primor do ponto de vista computacional e pouco conseguiu-se aperfeiçoá-lo em mais de dois milênios.” Esse resultado é demonstrado a seguir, mas também pode ser encontrado em Hefez (2022).

Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ , e suponha que  $b \leq a$ . Se  $b = 1$  ou  $b = a$ , ou ainda  $b|a$  então  $(a, b) = b$ . Suponhamos então que  $1 < b < a$  e que  $b \nmid a$ . Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever

$$a = bq_1 + r_1, \text{ com } 0 < r_1 < b.$$

Temos duas possibilidades:

1. Se  $r_1|b$ , então  $r_1 = (b, r_1)$  e pelo Lema 3.1, temos que

$$r_1 = (b, r_1) = (b, a - q_1b) = (b, a) = (a, b)$$

e o algoritmo termina.

2. Se  $r_1 \nmid b$ , então tem-se pela divisão euclidiana que

$$b = r_1 q_2 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente, tem-se duas possibilidades:

a) Se  $r_2 \mid r_1$ . Nesse caso  $r_2 = (r_1, r_2)$ . Pelo Lema 3.1, o algoritmo termina pois

$$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, b - q_2 r_1) = (r_1, b) = (a - q_1 b, b) = (a, b).$$

b)  $r_2 \nmid r_1$ . Então, efetuamos a divisão de  $r_1$  por  $r_2$ , obtendo

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

Esse processo é finito, pois caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais  $b > r_1 > r_2 > \dots$  que não possui um menor elemento, o que contradiz o Princípio da Boa Ordenação. Portanto, para algum  $n$ , temos que  $r_n \mid r_{n-1}$ , o que implica que  $(a, b) = r_n$ .

**Exemplo 3.2.** *Calcular o máximo divisor comum de 45 e 36 utilizando o Algoritmo de Euclides.*

Começamos dividindo 45 por 36 e, em seguida, cada divisor sucessivo pelo resto correspondente até encontramos o resto zero.

$$45 = 36 \cdot 1 + 9$$

$$36 = 9 \cdot 4 + 0.$$

Portanto,  $(45, 36) = 9$ .

**Exemplo 3.3.** *Encontrar o máximo divisor comum de 15 e 39 através do Algoritmo de Euclides.*

Damos início fazendo a divisão de 39 por 15, e repetimos o processo de divisões sucessivas até obtermos o resto zero.

$$39 = 15 \cdot 2 + 9$$

$$15 = 9 \cdot 1 + 6$$

$$9 = 6 \cdot 1 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0.$$

Logo,  $(39, 15) = 3$ .

**Exemplo 3.4.** *Determinar o máximo divisor comum de 372 e 162 utilizando o Algoritmo de Euclides.*

Inicia-se dividindo 372 por 162 e, em seguida, cada divisor sucessivo pelo resto correspondente até que resulte um resto zero.

$$372 = 162 \cdot 2 + 48$$

$$162 = 48 \cdot 3 + 18$$

$$48 = 18 \cdot 2 + 12$$

$$18 = 12 \cdot 1 + 6$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0.$$

Assim,  $(372, 162) = 6$ .

O máximo divisor comum  $d$  de  $a$  e  $b$  pode ser expresso como a combinação linear  $m \cdot a + n \cdot b = d$ , com  $m$  e  $n$  inteiros. Os coeficientes  $m$  e  $n$  podem ser encontrados usando as equações do algoritmo na ordem inversa.

$$\begin{aligned} 6 &= 18 - 1 \cdot 12 \\ &= 18 - 1 \cdot (48 - 2 \cdot 18) \\ &= 3 \cdot 18 - 1 \cdot 48 \\ &= 3 \cdot (162 - 3 \cdot 48) - 1 \cdot 48 \\ &= 3 \cdot 162 - 10 \cdot 48 \\ &= 3 \cdot 162 - 10 \cdot (372 - 2 \cdot 162) \\ &= -10 \cdot 372 + 23 \cdot 162. \end{aligned}$$

Deste modo, obtém-se  $m = -10$  e  $n = 23$ .

Agora serão determinados  $m$  e  $n$  utilizando um outro método via matrizes de ordem  $2 \times 2$  baseado em (Koshy, 1996). O Teorema 3.2 mostra esse resultado.

**Teorema 3.2.** *Seja  $r_n$  o último divisor no algoritmo euclidiano que fornece o máximo divisor comum de dois inteiros positivos  $a$  e  $b$ , onde  $a \geq b$ . Seja  $Q_i = \begin{pmatrix} q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $Q = \prod_{i=0}^n Q_i$  onde  $q_i$  é o  $(i+1)$ -ésimo quociente no algoritmo e  $0 \leq i \leq n$ . Então*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} r_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Demonstração.* Será provado por indução em  $n$ . Note que o algoritmo contém  $n + 1$  equações:

$$\begin{aligned}
a &= q_0 r_0 + r_1, & 0 \leq r_1 < r_0 \\
r_0 &= q_1 r_1 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n, & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_n r_n + 0,
\end{aligned}$$

onde  $r_0 = b$ .

Para  $n = 0$ , o algoritmo contém uma equação  $a = q_0 r_0 + 0$ . Como:

$$Q \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \end{pmatrix} = Q_0 \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 r_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Logo, o resultado é válido para  $n = 0$ .

Suponhamos que o resultado seja válido para um número inteiro arbitrário  $k \geq 0$ . Neste caso, o algoritmo contém  $k + 1$  equações. Mostremos que o resultado é válido para  $n = k + 1$ . O algoritmo de Euclides produz o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$  contendo  $k + 2$  equações. Quando a primeira equação  $a = q_0 r_0 + r_1$  é excluída, ficamos com o algoritmo para  $(r_0, r_1)$  contendo  $k + 1$  equações.

Escrevendo

$$Q'_i = Q_{i+1}, \text{ com } 0 \leq i \leq k \text{ e } Q' = \prod_{i=0}^k Q'_i,$$

temos pela hipótese de indução que:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} &= Q' \begin{pmatrix} r_{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=0}^k Q'_i \begin{pmatrix} r_{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^k Q_{i+1} \begin{pmatrix} r_{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{k+1} Q_i \begin{pmatrix} r_{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} &= Q_0 \left[ \prod_{i=1}^{k+1} Q_i \begin{pmatrix} r_{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = Q_0 \left[ \prod_{i=0}^k Q_{i+1} \begin{pmatrix} r_{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= Q_0 \left[ \prod_{i=0}^k Q'_i \begin{pmatrix} r_{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = Q_0 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 r_0 + r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução o resultado é válido para todo  $n \geq 0$ .  $\square$

**Corolário 3.1.** *Seja  $r_n$  o último divisor do algoritmo euclidiano que fornece o máximo divisor comum de dois inteiros positivos  $a$  e  $b$ , então  $(a, b) = r_n$  pode ser expresso como uma combinação inteira de  $a$  e  $b$ .*

*Demonstração.* Como os elementos da matriz  $Q_i^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix}$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , são números inteiros, então os elementos da matriz  $Q^{-1} = Q_n^{-1}Q_{n-1}^{-1} \dots Q_0^{-1}$  também são números inteiros. Logo,  $Q^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Seja  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} m & n \\ x & y \end{pmatrix}$ . Tem-se que  $\begin{pmatrix} m & n \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ 0 \end{pmatrix}$ . Portanto  $r_n = ma + nb$ , ou seja,  $r_n$  é uma combinação linear  $a$  e  $b$ .  $\square$

**Observação 3.1.** *A demonstração do Corolário 3.1 também mostra que  $xa + yb = 0$ .*

Este fato não só mostra como encontrar os coeficientes  $m$  e  $n$ , como também justifica o algoritmo matricial.

**Exemplo 3.5.** *Voltando ao Exemplo 3.4 e calculando  $(372, 162)$  via matrizes  $2 \times 2$ .*

As matrizes  $Q_4^{-1}$ ,  $Q_3^{-1}$ ,  $Q_2^{-1}$ ,  $Q_1^{-1}$  e  $Q_0^{-1}$ , são respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Seja  $Q^{-1}$  o produto dessas matrizes, logo

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 & 23 \\ 27 & -62 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então, tem-se que  $Q^{-1} \begin{pmatrix} 372 \\ 162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Como  $(-10) \cdot 372 + 23 \cdot 168 = 6$ , temos que os elementos da linha superior da matriz indicam os valores de  $m$  e  $n$ , com  $m = -10$  e  $n = 23$ .

O produto pelos termos da linha inferior da matriz resulta em  $27 \cdot 372 + (-62) \cdot 162 = 0$ .

**Exemplo 3.6.** Determinar números inteiros  $m$  e  $n$  tais que  $(3887, 637) = m \cdot 3887 + n \cdot 637$  via matrizes  $2 \times 2$ .

Primeiro utilizamos o Algoritmo de Euclides para determinar o máximo divisor comum dos valores:

$$3887 = 637 \cdot 6 + 65$$

$$637 = 65 \cdot 9 + 52$$

$$65 = 52 \cdot 1 + 13$$

$$52 = 13 \cdot 4 + 0.$$

O último divisor do algoritmo, neste caso 13, é o máximo divisor comum de 637 e 3887. Logo, existem  $m$  e  $n$  tais que  $m \cdot 637 + n \cdot 3887 = 13$ . Para determinar  $m$  e  $n$ , utilizamos o método via matrizes  $2 \times 2$ . O produto das matrizes  $Q_3^{-1}$ ,  $Q_2^{-1}$ ,  $Q_1^{-1}$  e  $Q_0^{-1}$  é

$$Q^{-1} = Q_3^{-1}Q_2^{-1}Q_1^{-1}Q_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -61 \\ -49 & 299 \end{pmatrix}.$$

Logo  $m = 10$  e  $n = -61$  e, portanto,  $10 \cdot 3887 + (-61) \cdot 637 = 13$ . Outro fato, realizando o produto dos valores da linha inferior da matriz, obtemos que  $(-49) \cdot 3887 + 299 \cdot 637 = 0$ .

### 3.2 MODELOS VISUAIS PARA O MÁXIMO DIVISOR COMUM E O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Nesta seção apresentaremos modelos visuais para o máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, conteúdo apresentado na Educação Básica. O máximo divisor comum, já mencionado na Seção 3.1, é um número inteiro  $d > 0$  que é divisor comum de  $a$  e  $b$  e divisível por todo divisor comum de  $a$  e  $b$ .

Um número inteiro  $m > 0$  é um mínimo múltiplo comum de  $a$  e  $b$  ( $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ ), se satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $m$  é múltiplo comum  $a$  e  $b$ , e
2. se  $c$  é um múltiplo comum de  $a$  e  $b$ , então  $m \mid c$ .

Por exemplo, 20 é múltiplo comum de 2 e 5, mas não é o mínimo múltiplo comum desses números que é 10.

O mínimo múltiplo comum de  $a$  e  $b$ , será denotado como  $[a, b]$ . A Proposição 3.1 é fundamental para encontrar o mínimo múltiplo comum de dois números com mais eficácia e facilidade.

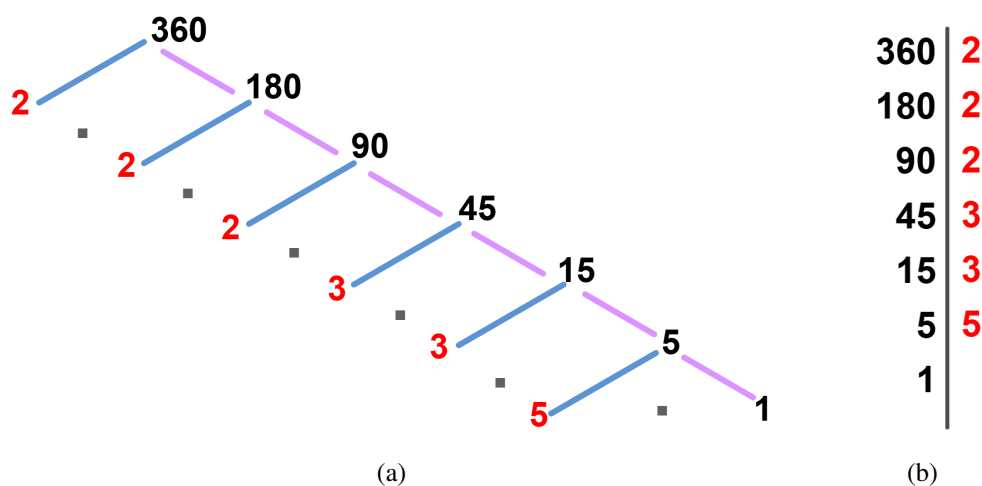
**Proposição 3.1.** *Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$ , temos que o mínimo múltiplo comum de  $a$  e  $b$ , denotado por  $[a, b]$  existe e*

$$[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}.$$

O leitor pode encontrar a demonstração da Proposição 3.1 no livro de Hefez (2022, p. 87).

Um modelo tradicional para o ensino do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum é através do esquema de fatores. O aluno faz as divisões sucessivas até chegar em 1. Na Figura 3.1 (a) temos o modelo da árvore de fatores enquanto da Figura 3.1 (b) o método de fatoração.

Figura 3.1 – Modelos tradicionais: (a) árvore de fatores; (b) fatoração



Fonte: Autora.

Apresentaremos três modelos visuais para o ensino do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum, pois segundo Lidan e Pjanić (2020) o conhecimento dos estudantes é processual e o professor pode desenvolver estratégias que permitam ao aluno representar os conceitos e formar o conhecimento matemático sólido. As representações visuais podem ser facilitadoras já que permitem o discente a fazer a ligação entre o real e o abstrato.

### 3.2.1 MODELO DE DIAGRAMAS DE VENN

O modelo visual de diagrama de Venn tem como recurso apresentar os fatores primos de dois inteiros positivos  $a$  e  $b$  como elementos de dois conjuntos  $A$  e  $B$ . Salientamos que cada fator do número será considerado como um elemento do conjunto. Os elementos que pertencem a interseção indicam fatores primos comuns. O produto dos elementos na interseção resulta no máximo divisor comum, enquanto o mínimo múltiplo comum é igual à multiplicação dos elementos do conjunto  $A \cup B$ .

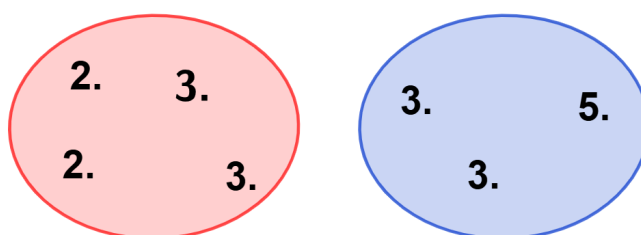
Observe a aplicação do modelo de diagrama de Venn para determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum dos números 36 e 45. Inicialmente escrevemos cada número como produto de fatores primos:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Na Figura 3.2 temos a representação dos fatores em cada conjunto.

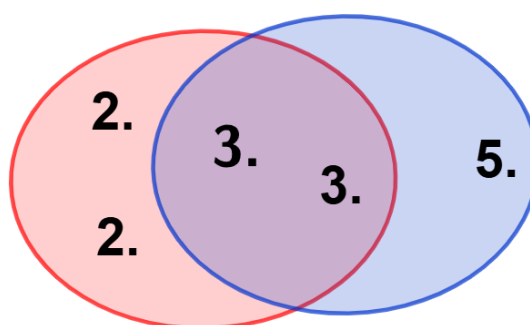
Figura 3.2 – Modelo de diagrama de Venn: conjuntos com fatores primos de 36 e 45



Fonte: Autora.

Os fatores comuns são representados em ambos os conjuntos pelos elementos 3 e 3. A Figura 3.3 mostra como ocorre a interseção desses conjuntos.

Figura 3.3 – Modelo de diagramas de Venn: interseção dos conjuntos com os fatores de 36 e 45



Fonte: Autora.

Portanto, o máximo divisor comum de 36 e 45 é dado pelo produto  $3 \cdot 3 = 9$ , pois são os fatores comuns a ambos os números. Já o mínimo múltiplo comum é a multiplicação  $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$ .

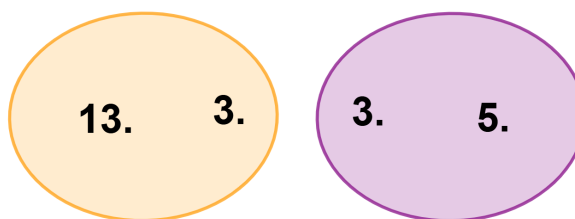
No seguinte exemplo mostraremos como determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de 15 e 39 utilizando o modelo diagrama de Venn. Decompondo em fatores primos, obtemos:

$$39 = 3 \cdot 13$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

Representamos os fatores em conjuntos como na Figura 3.4.

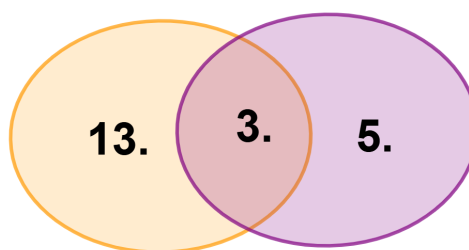
Figura 3.4 – Modelo de diagrama de Venn: conjuntos com os fatores de 15 e 39



Fonte: Autora.

O elemento comum a ambos os conjuntos é o 3. Logo, a interseção dos conjuntos, mostrado na Figura 3.5, representa o máximo divisor comum dos valores 15 e 39.

Figura 3.5 – Modelo de diagrama de Venn: interseção dos conjuntos de fatores de 15 e 39.



Fonte: Autora.

Logo, o máximo divisor comum de 15 e 39 é 3, que se encontra destacado na interseção dos conjuntos na Figura 3.5. O mínimo múltiplo comum é encontrado pela multiplicação dos valores  $13 \cdot 3 \cdot 5 = 195$ .

### 3.2.2 MODELO DE ÁREA RETANGULAR

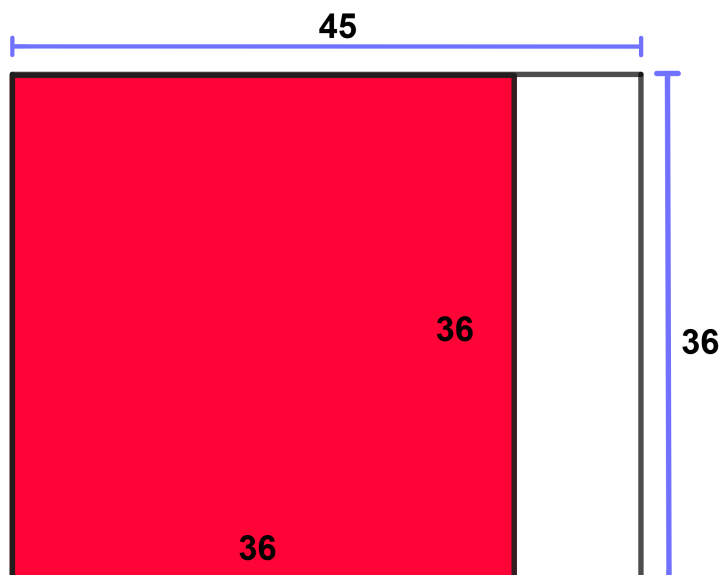
O segundo modelo visual se baseia nas propriedades das áreas do retângulo e do quadrado. Consideremos um retângulo de lados com medidas  $a$  e  $b$ . Para determinar o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$ ,  $(a, b) = d$ , é necessário encontrar a medida do lado do maior quadrado que possa revestir todo o retângulo sem lacunas ou sobreposição. A medida desse lado  $d$ , será o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$ . Isso pode ser alcançado por meio do Algoritmo de Euclides, apresentado no Lema 3.1.

A abordagem consiste em realizar divisões sucessivas até encontrar a medida do lado do maior quadrado que possa preencher todo o retângulo, o qual fornece uma representação visual clara do processo de determinação do máximo divisor comum, facilitando a compreensão do conceito.

A seguir utilizaremos esse método para calcular o máximo divisor comum dos números 36 e 45. Iniciamos construindo um retângulo cujas medidas dos lados são 36 e 45 unidades. Em

seguida construímos o maior quadrado possível no retângulo visando preencher a maior área, como  $45 = 36 \cdot 1 + 9$ , logo é possível construir um quadrado de lado 36 unidades restando ainda um retângulo, agora de medidas dos lados 9 e 36 unidades, como ilustrado na Figura 3.6.

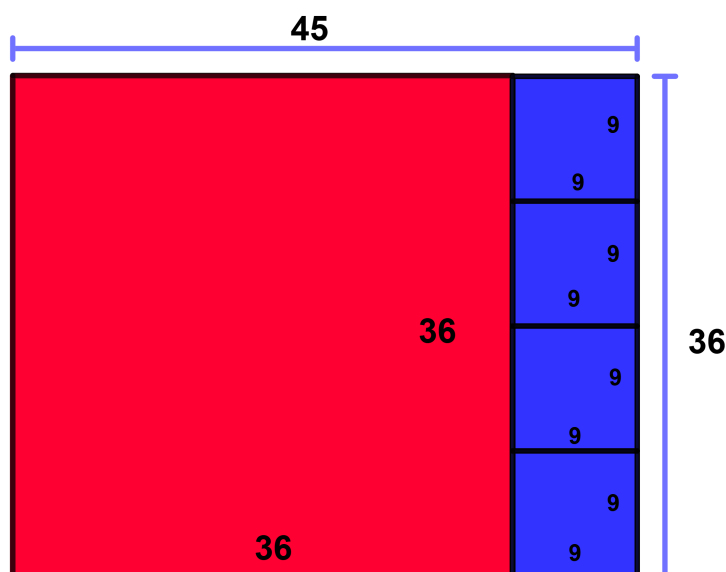
Figura 3.6 – Modelo retangular para (36, 45): primeiro passo



Fonte: Autora.

Repetimos o processo para o retângulo restante até cobrirmos toda sua área, isto é, pelo algoritmo de Euclides  $36 = 4 \cdot 9 + 0$ . Logo, são necessários 4 quadrados de lado medindo 9 unidades para cobrir toda a superfície do retângulo. Observe a Figura 3.7 com essa representação.

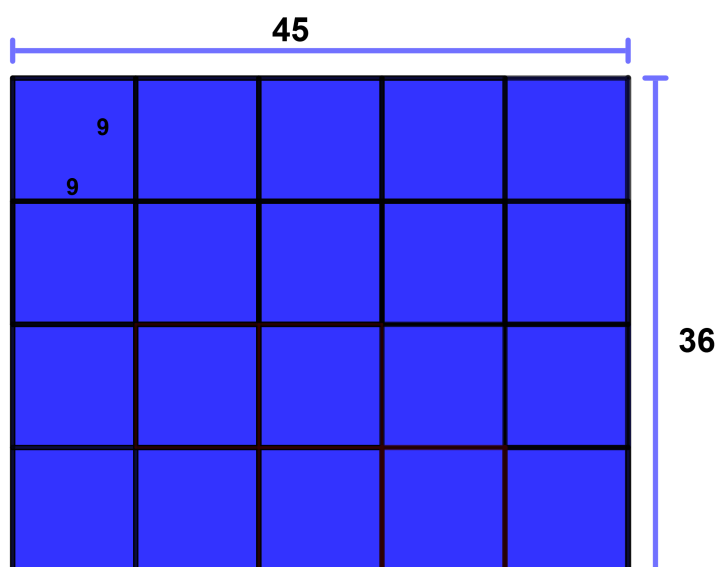
Figura 3.7 – Modelo retangular para (36, 45): segundo passo



Fonte: Autora.

Portanto, é possível revestir todo o retângulo com quadrados cujas medidas do lado são 9 unidades. Logo o máximo divisor comum de 36 e 45 é 9. A Figura 3.8 mostra essa representação.

Figura 3.8 – Modelo retangular para (36, 45): retângulo revestido



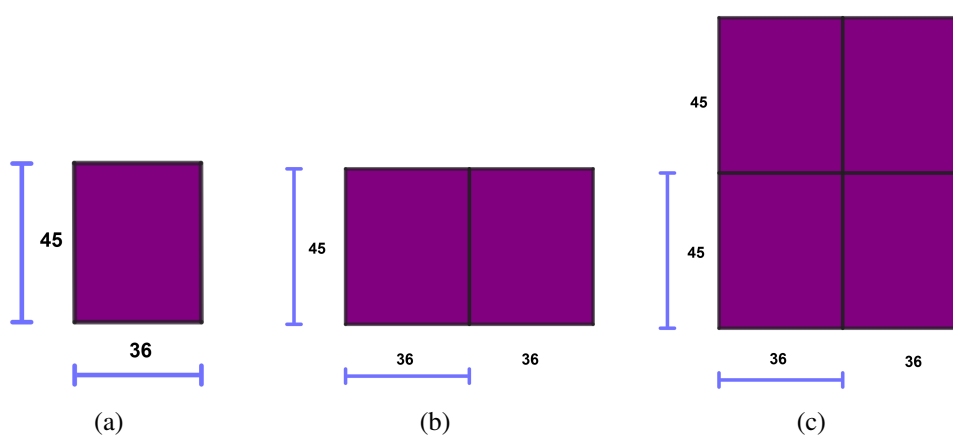
Fonte: Autora.

O modelo retangular apresenta uma interpretação geométrica para o Algoritmo de Euclides apresentado no Exemplo 3.2. A divisão sucessiva dos lados do retângulo, representada pela decomposição em quadrados, corresponde aos passos da divisão euclidiana.

Para determinar o mínimo múltiplo comum utilizando o modelo de área retangular segundo Lidan e Pjanić (2020) começamos com um retângulo cujos lados tem medidas  $a$  e  $b$ , em seguida precisamos encontrar a medida do lado do menor quadrado que pode ser ladrilhado por um retângulo de lados com medida  $a$  e  $b$ . Observe a representação para determinar o mínimo múltiplo comum de 36 e 45.

Inicialmente construímos um retângulo com lados medindo 36 e 45 unidades. Em seguida, replicamos esse retângulo, adjacente ao primeiro, de modo a formar uma figura composta por retângulos congruentes ao retângulo original. A Figura 3.9(a), (b) e (c) ilustra os primeiros passos dessa construção com até quatro retângulos congruentes.

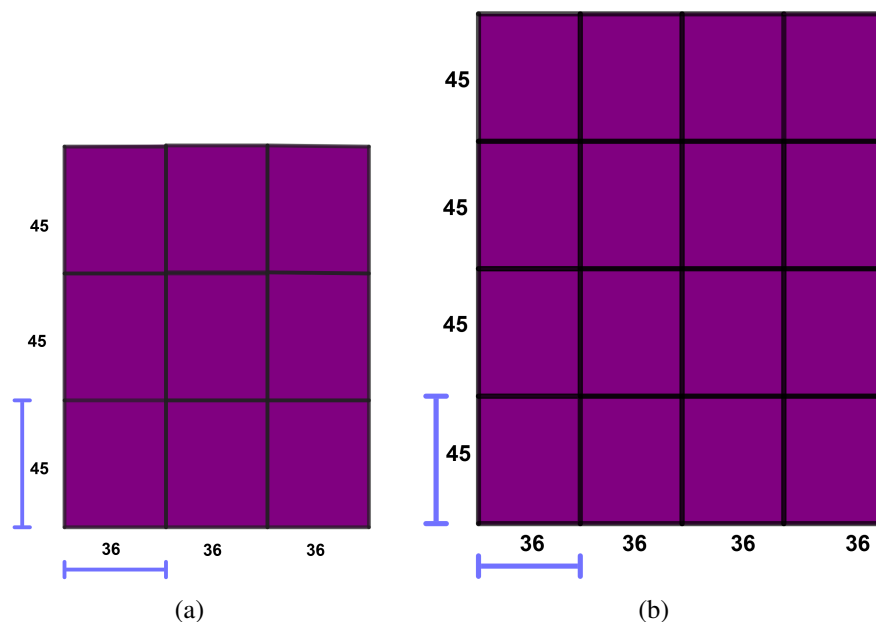
Figura 3.9 – Modelo retangular para [36, 45]: primeiros passos



Fonte: Autora.

Com o intuito de construir o menor quadrado utilizando os retângulos definidos, continuamos o processo de adicionar retângulos conforme ilustrado na Figura 3.10(a) e (b).

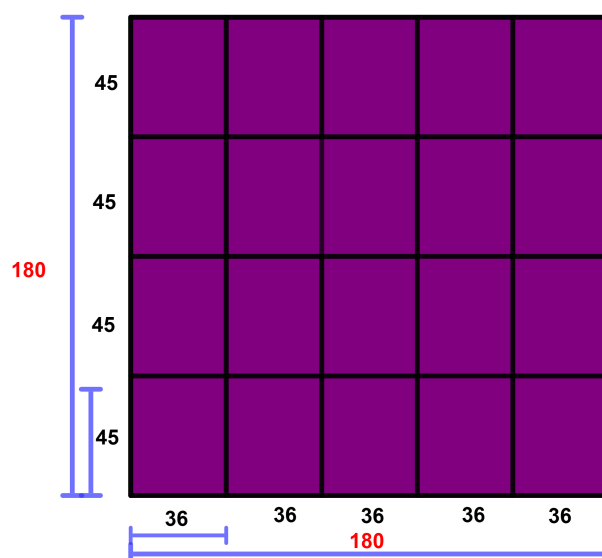
Figura 3.10 – Modelo retangular para  $[36, 45]$ : próximos passos



Fonte: Autora.

Assim, ao construirmos o menor quadrado possível que contenha os retângulos com lados medindo 36 por 45 (Figura 3.11), verificamos que seu lado mede 180 unidades. Essa medida representa o mínimo múltiplo comum das medidas dos lados do retângulo, 36 e 45, o qual está fundamentada na Proposição 3.1 já que  $[36, 45] = 45 \cdot 4 = 36 \cdot 5$ . Portanto, o mínimo múltiplo comum de 36 e 45 é 180.

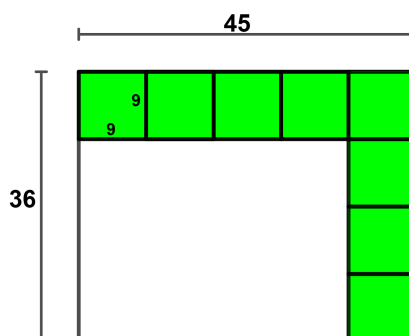
Figura 3.11 – Modelo retangular: mínimo múltiplo comum de 36 e 45



Fonte: Autora.

Uma outra forma, também justificada pela Proposição 3.1, para determinar o mínimo múltiplo comum de 36 e 45 seria através do modelo de área retangular e o máximo divisor comum. Para essa forma procedemos da seguinte maneira: iniciamos fazendo a representação como mostra a Figura 3.12. Note que na aresta com medida 45 unidades é possível representar 5 quadrados de lado 9 unidades, pois  $(36, 45) = 9$ . Já na aresta de medida 36 unidades cabem 4 quadrados de lado 9 unidades.

Figura 3.12 – Modelo retangular:  $[36, 45]$



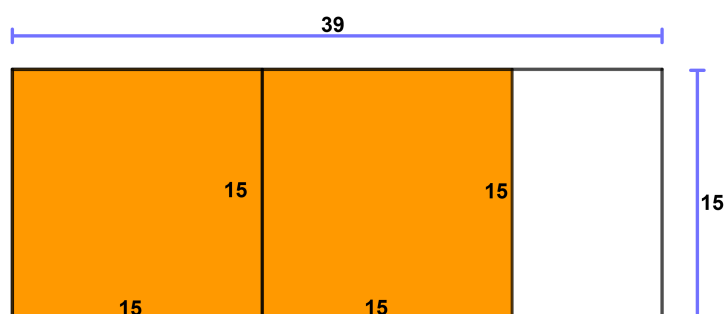
Fonte: Autora.

Observe que o tamanho de cada aresta do retângulo é igual ao produto do máximo divisor comum dos números pelo número de quadrados de lado igual ao máximo divisor comum desses números. Assim, quando multiplicamos o número de quadrados dispostos em uma aresta pelo comprimento da outra aresta estaremos excluindo o máximo divisor comum da multiplicação dando como resultado o mínimo múltiplo comum dos números dados. Isto é baseado pelo fato de  $[a, b] = \frac{|ab|}{(a,b)}$ , com  $a$  e  $b$  inteiros.

$$\text{Logo, } [36, 45] = \frac{36 \cdot 45}{9} = 36 \cdot 5 = 45 \cdot 4 = 180.$$

Agora vamos determinar o máximo divisor comum dos números 15 e 39 utilizando o modelo de área retangular. Iniciamos construindo um retângulo com lados medindo 15 e 39 unidades. Em seguida, subdividimos esse retângulo em quadrados de maior lado possível. Como  $39 = 15 \cdot 2 + 9$ , podemos construir dois quadrados medindo 15 unidades cada, restando apenas um retângulo de lados medindo 15 e 9 unidades. A Figura 3.13 mostra essa ilustração.

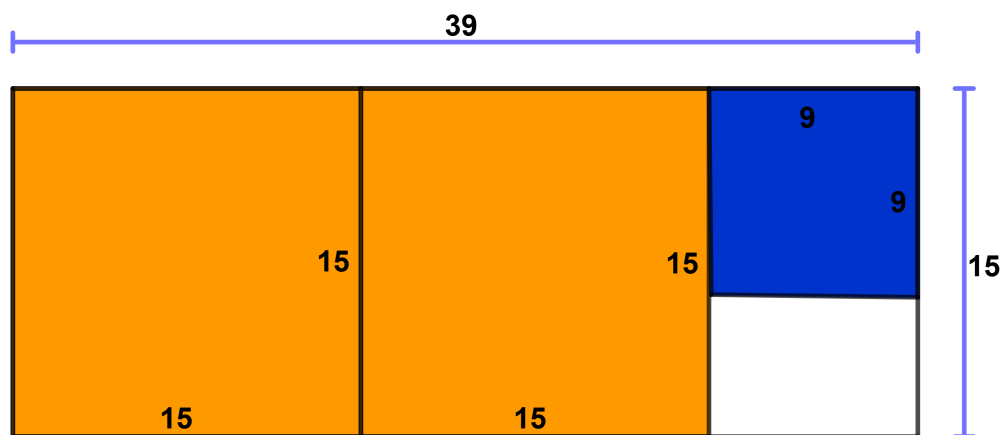
Figura 3.13 – Modelo retangular para  $(15, 39)$ : primeiro passo



Fonte: Autora.

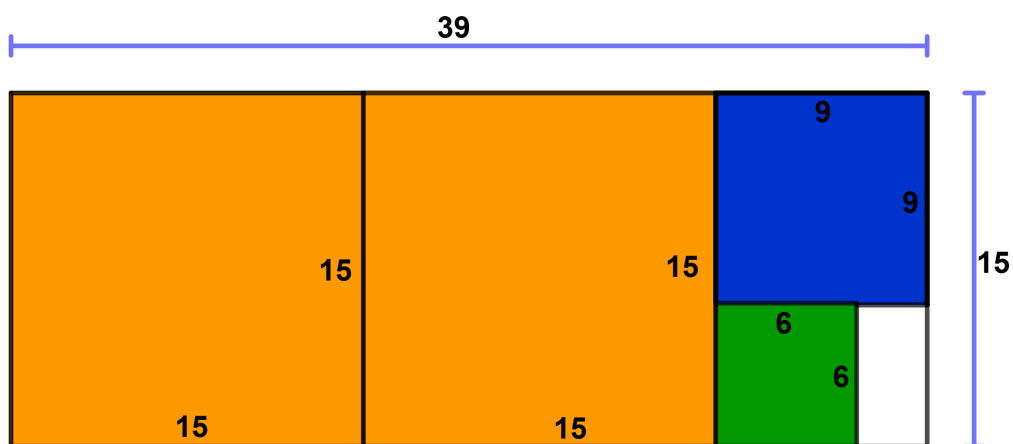
Repetimos o processo de subdivisões até preencher toda área do retângulo. A Figura 3.14 e 3.15 mostra essa sequência de passos e sua relação com o Algoritmo de Euclides, apresentado no Exemplo 3.3.

Figura 3.14 – Modelo retangular para (15, 39): segundo passo

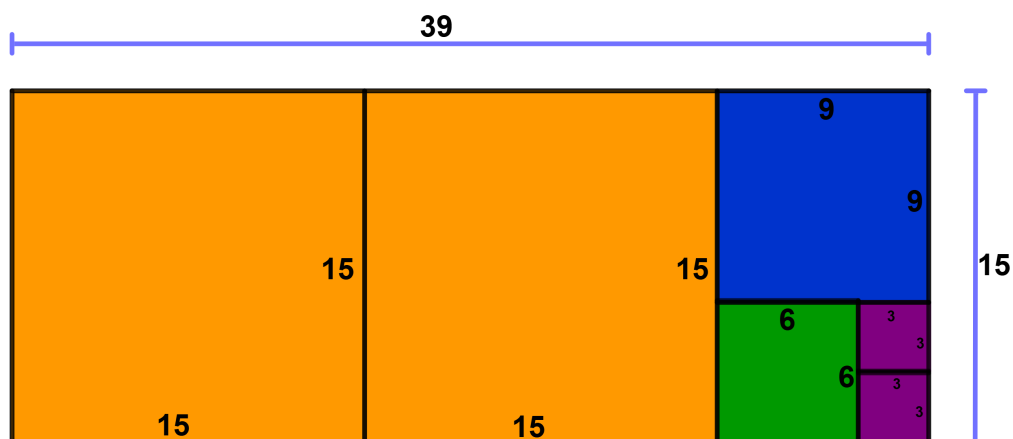


Fonte: Autora.

Figura 3.15 – Modelo retangular para (15, 39): últimos passos



$$(a) 9 = 6 \cdot 1 + 3$$

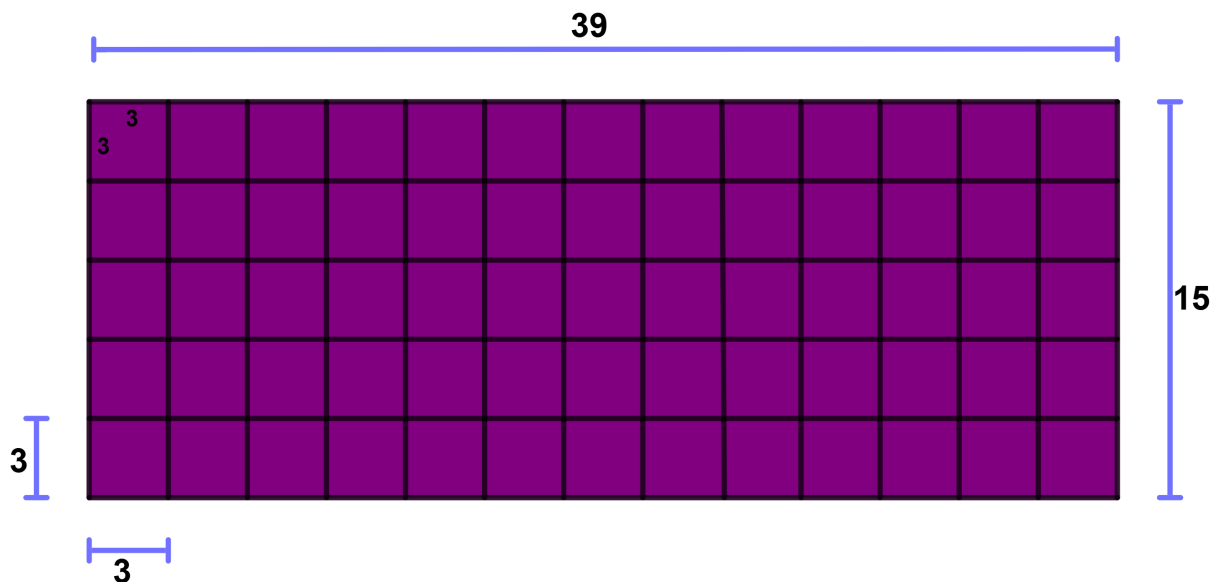


$$(b) 6 = 3 \cdot 2$$

Fonte: Autora.

Logo, é possível revestir todo retângulo com quadrados de lado medindo 3 unidades. A Figura 3.16 ilustra essa representação. Portanto o máximo divisor comum de 15 e 39 é 3.

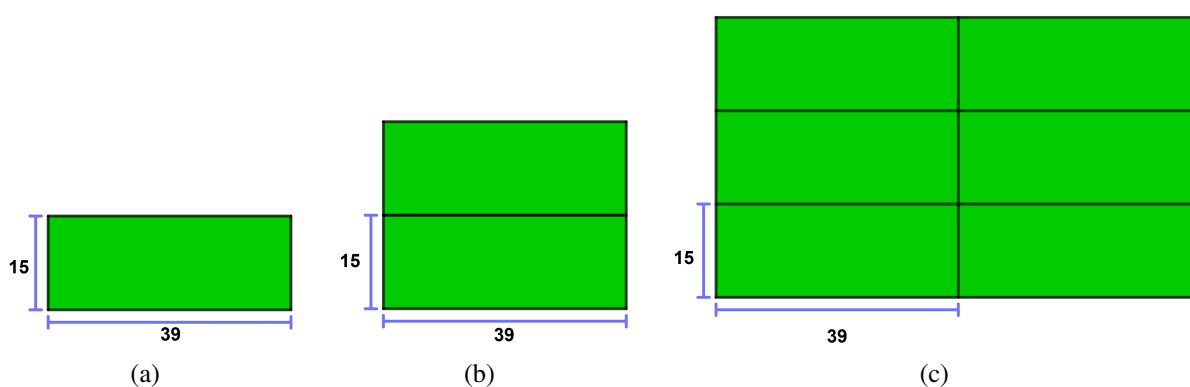
Figura 3.16 – Modelo retangular para (15, 39): retângulo revestido



Fonte: Autora.

Utilizando o modelo retangular para encontrar o mínimo múltiplo comum dos números 15 e 39, iniciamos construindo retângulos de lados medindo 15 e 39 unidades até encontrarmos o menor quadrado revestido somente com retângulos congruentes ao dado inicialmente. Observe a Figura 3.17.

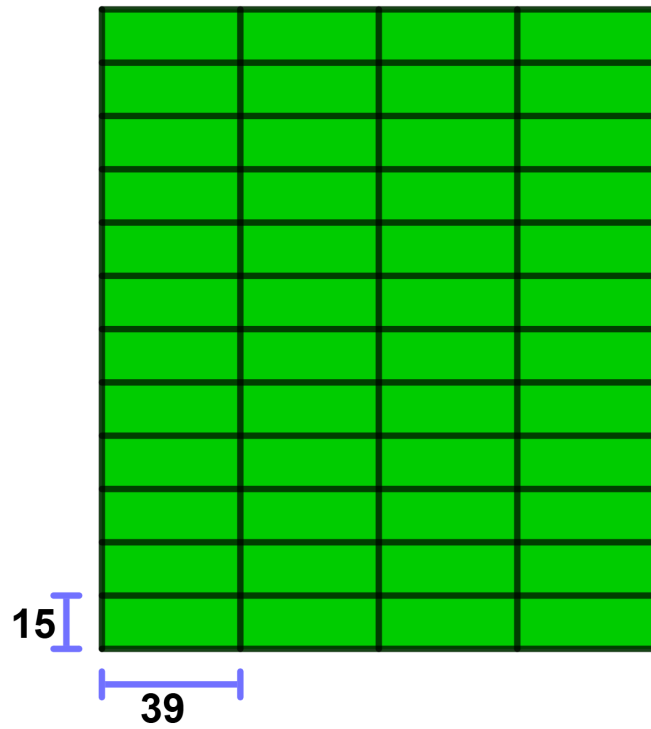
Figura 3.17 – Modelo retangular para [15, 39]: primeiros passos



Fonte: Autora.

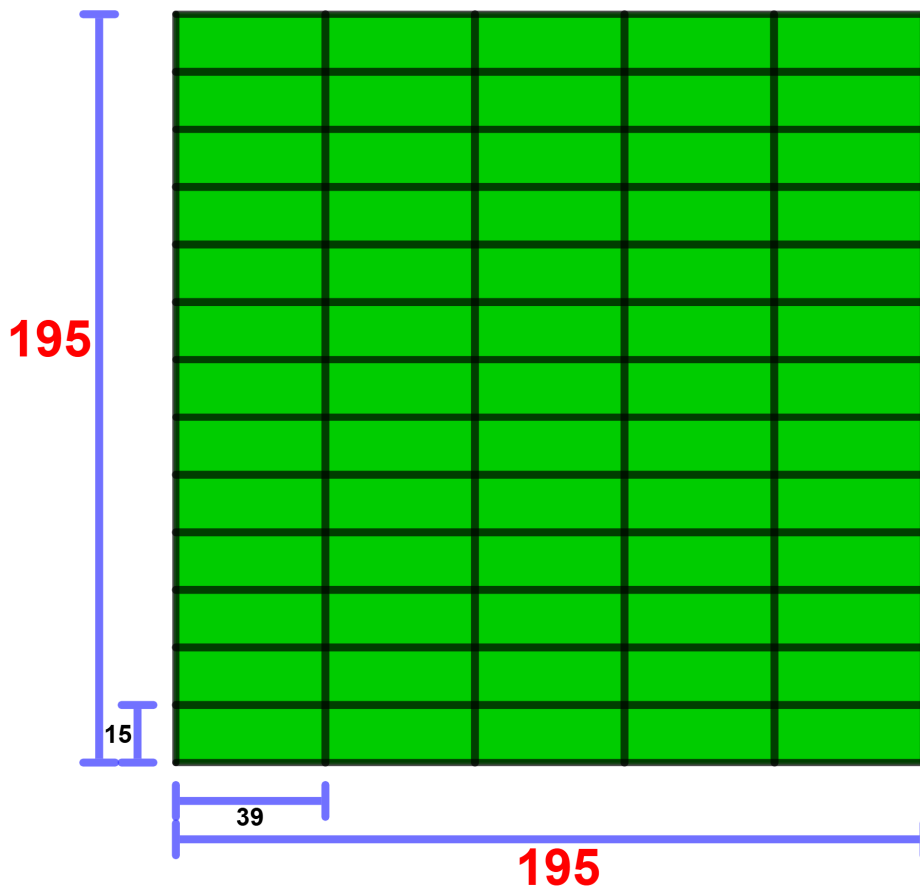
Continuamos o processo de adicionar retângulos como na Figura 3.18, até encontrarmos o menor quadrado possível (Figura 3.19). Logo, 195 é mínimo múltiplo comum dos números 15 e 39.

Figura 3.18 – Modelo retangular para [15, 39]: construção



Fonte: Autora.

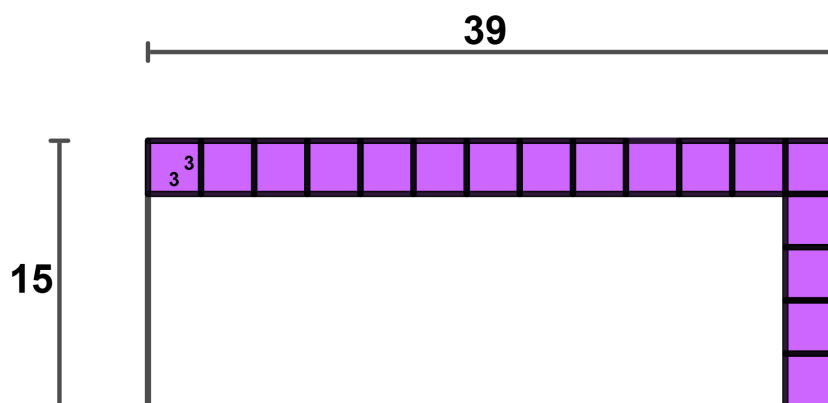
Figura 3.19 – Modelo retangular: mínimo múltiplo comum de 15 e 39



Fonte: Autora.

Também podemos obter o mínimo múltiplo comum multiplicando o número de quadrados construídos ao longo da aresta de 39 unidades (vide Figura 3.20), pelo comprimento da aresta de 15 unidades. Logo,  $[15, 39] = 13 \cdot 15 = 195$ .

Figura 3.20 – Modelo retangular:  $[15, 39]$



Fonte: Autora.

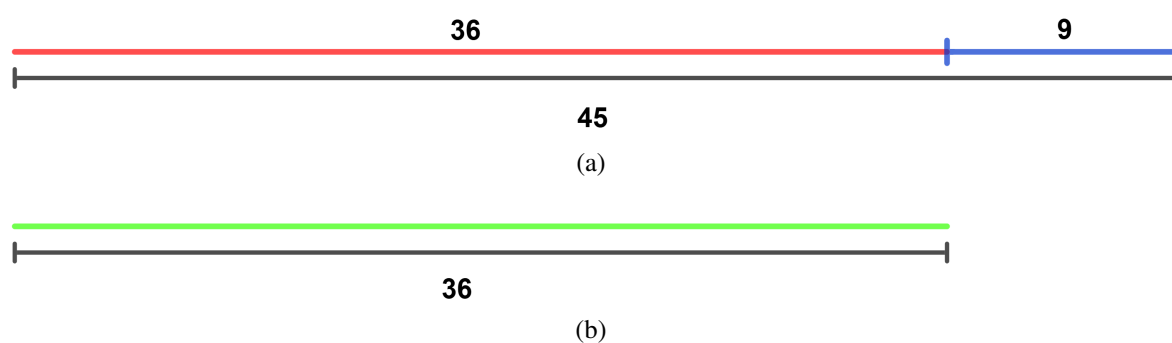
Do mesmo modo, ao multiplicar o número de quadrados da aresta de 15 unidades pelo comprimento da aresta de 39 unidades, obtemos o mínimo múltiplo comum de 15 e 39, ou seja,  $[15, 39] = 5 \cdot 39 = 195$ .

### 3.2.3 MODELO DE SEGMENTO DE RETA

Outro modelo visual proposto por Lidan e Pjanić (2020), usa representações de segmentos de retas. Considere  $a > b$  e um segmento de reta com medida  $a$ . Para determinar o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$ , isto é,  $(a, b) = d$  precisamos encontrar a medida do maior segmento que possa dividir o segmento original em segmentos da mesma medida. A medida desse segmento  $d$  será o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$  que pode ser obtido via o Algoritmo de Euclides.

Vamos mostrar essa representação para os números 36 e 45. Na Figura 3.21(a) e (b) encontramos a representação dos segmentos de retas medindo 36 e 45 unidades. Note que  $45 = 36 \cdot 1 + 9$ .

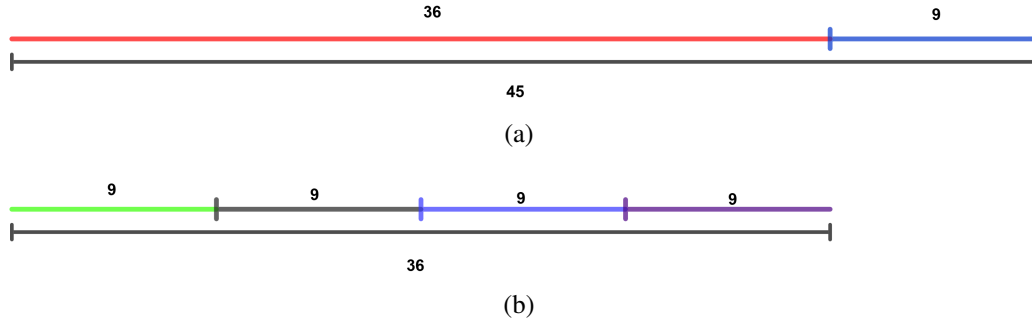
Figura 3.21 – Modelo segmento de reta para  $(36, 45)$ : primeiro passo



Fonte: Autora.

Procedemos fazendo divisões agora no segmento medindo 36 unidades. Temos que  $36 = 9 \cdot 4 + 0$ . Portanto, podemos representar o segmento como mostra a Figura 3.22.

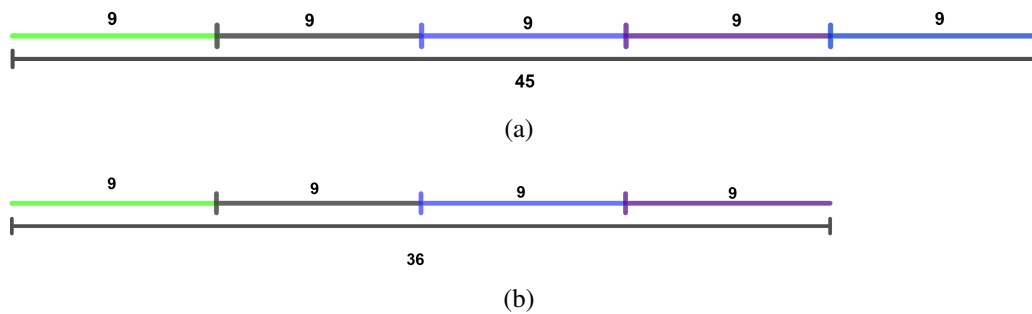
Figura 3.22 – Modelo segmento de reta para (36, 45): segundo passo



Fonte: Autora.

Logo, o máximo divisor comum de 36 e 45 é 9. Observe a Figura 3.23 com essa ilustração.

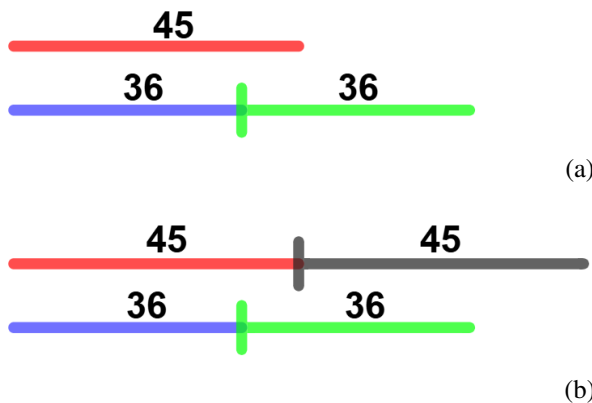
Figura 3.23 – Modelo segmento de reta para (36, 45)



Fonte: Autora.

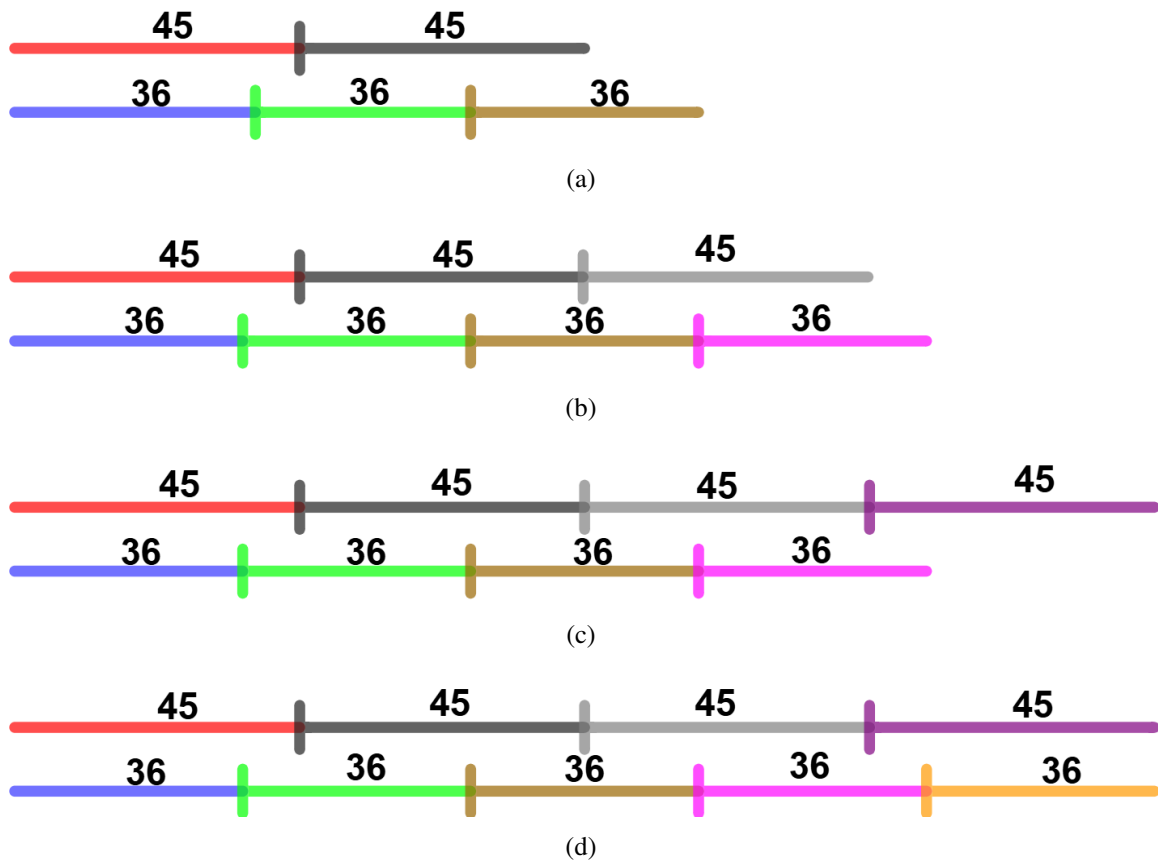
Para determinar o mínimo múltiplo comum através do modelo segmento de reta utilizamos um princípio semelhante ao modelo de área retangular. Desenhemos segmentos de reta com  $a$  e  $b$  unidades, em seguida repetimos o processo até encontrarmos o menor múltiplo comum. As Figuras 3.24 e 3.25 ilustram o processo para determinar o mínimo múltiplo comum de 36 e 45.

Figura 3.24 – Modelo segmento de reta para [36, 45]: primeiros passos



Fonte: Autora.

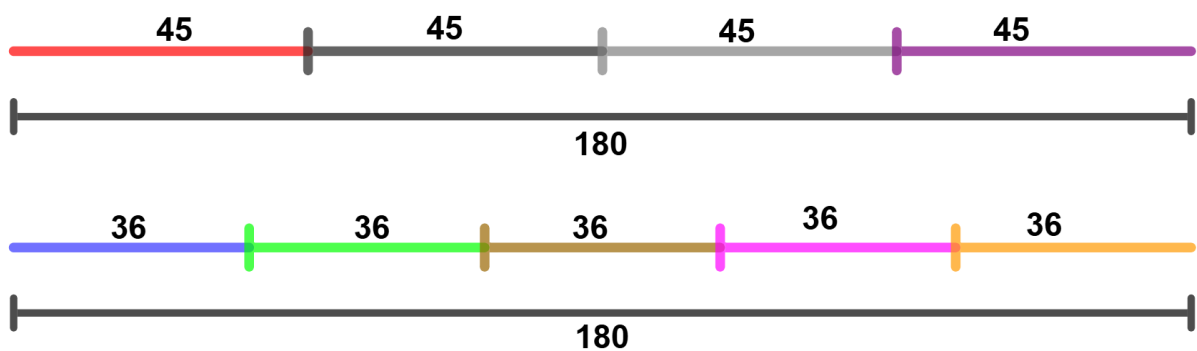
Figura 3.25 – Modelo segmento de reta para  $[36, 45]$ : próximos passos



Fonte: Autora.

Como  $[36, 45] = \frac{36 \cdot 45}{9} = 4 \cdot 45 = 5 \cdot 36 = 180$ , temos que o mínimo múltiplo comum de 36 e 45 é 180, ilustrado na Figura 3.26.

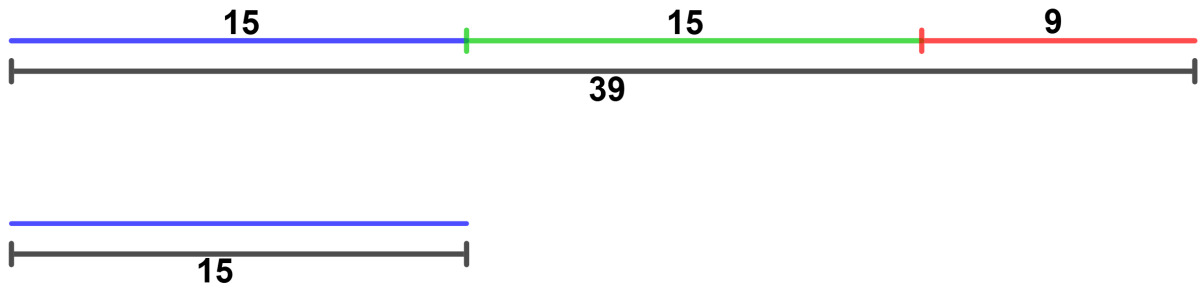
Figura 3.26 – Modelo segmento de reta para  $[36, 45]$



Fonte: Autora.

Vamos calcular o máximo divisor comum dos números 15 e 39 utilizando o modelo segmento de reta. Primeiro construímos dois segmentos medindo 15 e 39 unidades. Levando em consideração que  $39 = 15 \cdot 2 + 9$ , dividimos o segmento como na Figura 3.27.

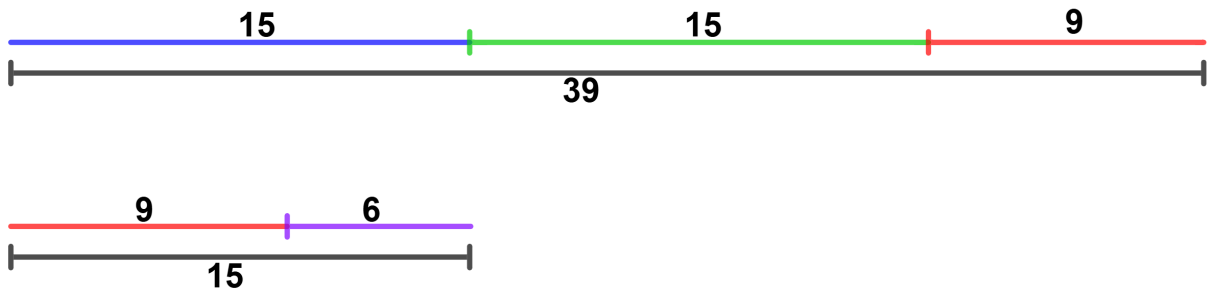
Figura 3.27 – Modelo segmento de reta para (15, 39): primeiro passo



Fonte: Autora.

Podemos escrever  $15 = 9 \cdot 1 + 6$ , então fazemos esta representação como mostrado na Figura 3.28.

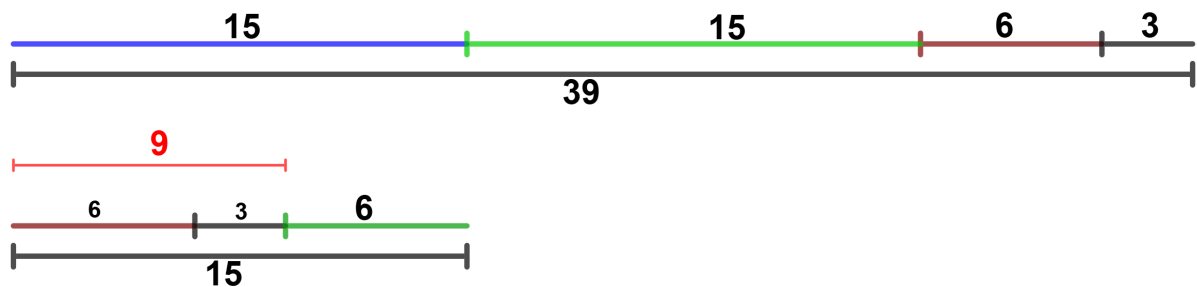
Figura 3.28 – Modelo segmento de reta para (15, 39): segundo passo



Fonte: Autora.

Continuando o processo de divisões para determinarmos o máximo divisor comum de 15 e 39, agora escrevemos  $9 = 6 \cdot 1 + 3$ , como ilustrado na Figura 3.29.

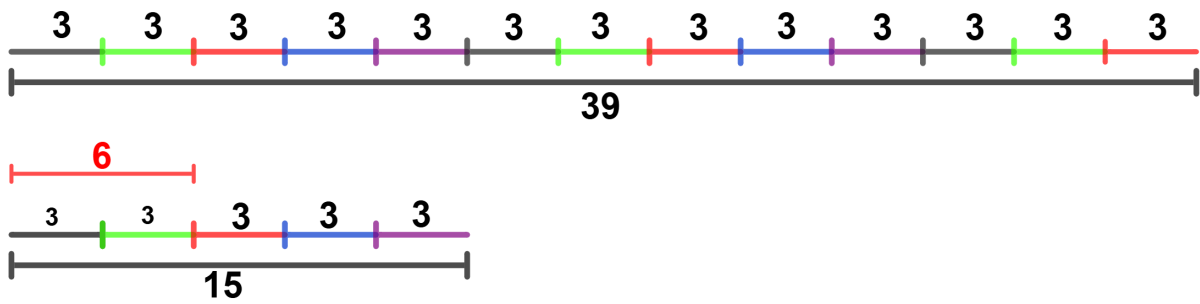
Figura 3.29 – Modelo segmento de reta para (15, 39): terceiro passo



Fonte: Autora.

Como  $6 = 3 \cdot 2$ , então podemos dividir ambos os segmentos por medidas iguais a 3 unidades. Portanto, o máximo divisor comum entre 15 e 39 é 3. Observe a Figura 3.30 com essa representação.

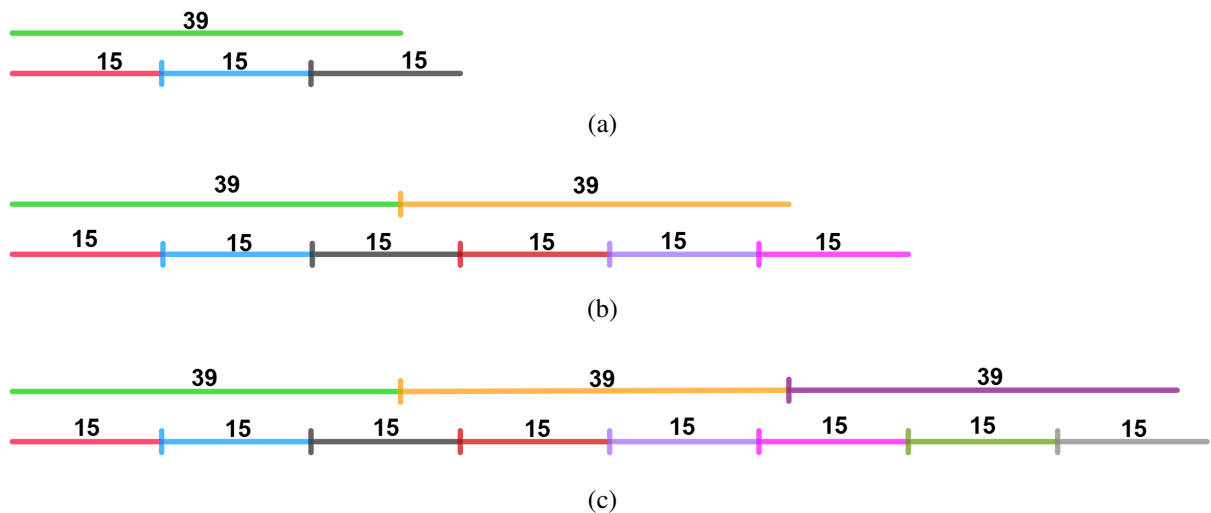
Figura 3.30 – Modelo segmento de reta para (15, 39)



Fonte: Autora.

Para encontrar o mínimo múltiplo comum, construímos segmentos com medidas múltiplas de 15 e 39 até encontrarmos o menor segmento com medida comum a ambos. A Figura 3.31 mostra os primeiros passos dessa construção.

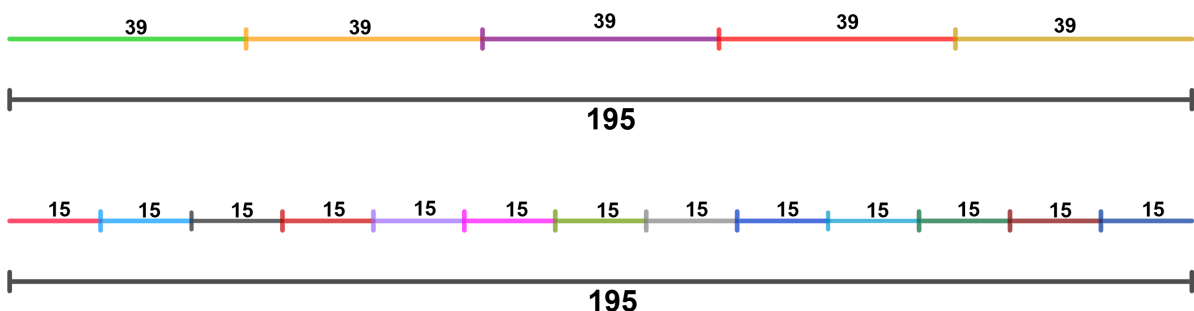
Figura 3.31 – Modelo segmento de reta para [15, 39]: primeiros passos



Fonte: Autora.

Repetimos o processo até chegar em 195 que é o mínimo múltiplo comum de 15 e 39. A Figura 3.32 apresenta o resultado.

Figura 3.32 – Modelo segmento de reta para [15, 39]



Fonte: Autora.

### 3.3 UMA ABORDAGEM DIFERENTE DO CRIVO DE ERATÓSTENES

A teoria dos números primos, tema fundamental da matemática, tem sido objeto de estudo por séculos. Nesta seção, propomos uma outra abordagem para a aplicação do crivo de Eratóstenes, um algoritmo clássico para a identificação de números primos, baseada em Omejc (1972).

Lembrando que, um número primo é um número natural maior do que 1 que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio. Então, dados dois números primos  $p$  e  $q$  e um número inteiro  $a$  qualquer, temos que:

*i)* Se  $p|q$ , então  $p = q$ .

De fato, como  $p|q$  e sendo  $q$  primo, temos que  $p = 1$  ou  $p = q$ . Sendo  $p$  primo, tem-se que  $p > 1$ , o que acarreta  $p = q$ .

*ii)* Se  $p \nmid a$ , então  $(p, a) = 1$ .

Se  $(p, a) = d$ , temos que  $d|p$  e  $d|a$ . Portanto,  $d = p$  ou  $d = 1$ . Mas  $d \neq p$ , pois  $p \nmid a$  e, conseqüentemente,  $d = 1$ .

Um número natural maior do que 1 e que não é primo será dito composto. Portanto, se um número natural  $n > 1$  é composto, então existem números naturais  $n_1$  e  $n_2$  tais que

$$n = n_1 n_2, \text{ com } 1 < n_1, n_2 < n.$$

Por exemplo, 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17 são números primos, enquanto 4, 6, 8, 9 e 10 são números compostos.

E quantos números primos existem? Em Hefez (2022) essa pergunta foi respondida utilizando a mesma prova dada por Euclides no livro IX de *Os Elementos*, considerada uma das perólas da matemática.

**Teorema 3.3.** *Existem infinitos números primos.*

*Demonstração.* Suponhamos que exista apenas um número finito de números primos  $p_1, \dots, p_r$ . Seja

$$n = p_1 p_2 \dots p_r + 1$$

um número natural.

Sendo que todo número natural maior do que 1 é primo ou se escreve de modo único, a menos da orden dos fatores, como produto de números primos (Teorema Fundamental da Aritmética), temos que  $n$  possui um fator primo  $p$ . Logo,  $p$  deve ser um dos  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . Mas isso implica que  $p$  divide 1, o qual é um absurdo.  $\square$

Assim existem infinitos números primos. Mas como obtemos uma lista contendo os números primos até um determinado número? Um dos métodos mais antigos foi desenvolvido pelo matemático grego Eratóstenes (230 a.C.), esse método conhecido como crivo de Eratóstenes, que permite encontrar todos os números primos até um número desejado.

Por exemplo, vamos determinar todos os números primos inferiores a 120. Observe o Quadro 3.1 com essa representação.

O passo a passo para colorir todos os números compostos do quadro é realizado da seguinte maneira:

1. Colorimos todos os múltiplos de 2 maiores que 2, já que são todos compostos.
2. O segundo número que não está colorido é o 3, que é primo. Colorimos todos os múltiplos de 3 maiores do que 3, pois estes não são primos.
3. O próximo número que não está colorido é o 5, que é primo. Colorimos todos os múltiplos de 5, maiores do que 5, pois não são primos.
4. O quarto número que não está colorido é o 7, que é primo. Colorimos todos os múltiplos de 7 maiores do que 7, pois não são primos.

Quadro 3.1 – Números primos até 120

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Podemos continuar com o processo para os outros números primos até 120. Mas será necessário? A resposta está no Lema 3.2, resultado obtido por Eratóstenes.

**Lema 3.2.** *Se um número natural  $n > 1$  não é divisível por nenhum primo  $p$  tal que  $p^2 \leq n$ , então ele é primo.*

*Demonstração.* Suponhamos, que  $n$  é um número composto. Seja  $q$  o menor número primo tal que  $q|n$ , isto é,  $n = qm$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Assim,  $q \leq m$ . Como  $q > 1$ , temos que

$q^2 \leq qm = n$ . Desta maneira,  $n$  é divisível por um número primo  $q$  tal que  $q^2 \leq n$  o qual é um absurdo.  $\square$

Logo, como os valores do quadro vão até 120, devemos realizar o processo de eliminação dos múltiplos até o primo 7, pois  $11^2 = 121$ , que excede 120.

O crivo de Eratóstenes, tradicionalmente é um método escolar empregado para a identificação de números primos por meio da eliminação sucessiva de múltiplos, demonstra sua eficácia em escalas menores. Contudo, sua aplicação se torna pouco eficiente para a determinação de primos muito grandes. Por exemplo, ao marcar todos os múltiplos de 23, devemos contar de 23 em 23 ou usar métodos como adição repetida ou multiplicação.

Existe uma forma diferente de encontrar os números primos que abordaremos nesta seção, que não só facilita a maneira de localizar como também apresenta outras propriedades. Os resultados apresentados são baseados em Omejc (1972), e neste caso iniciamos listando os números até 120, agora em seis colunas como representado no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 – Números até 120

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Para localizar os primos, procedemos do seguinte modo: por definição, o número 1 não é primo, por isso ele é riscado.

Agora, o número primo 2 é circulado. Em seguida, todos os seus múltiplos são sistematicamente eliminados da lista. Como o quadro está organizado em seis colunas, três delas

são múltiplos de dois facilitando o processo de marcação e exclusão dos números compostos. Observe o Quadro 3.3, que mostra esse caso. Outro fato é que as colunas eliminadas formam segmentos de retas paralelas entre si.

Quadro 3.3 – Múltiplos de 2

X	②	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Quadro 3.4 – Múltiplos de 2 e 3

X	②	③	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

O número primo 3, circulado no Quadro 3.4, possui seus múltiplos destacados. Ao dispor os números em 6 colunas, nota-se que duas delas (terceira e sexta) contêm múltiplos de 3. Uma dessas colunas, em particular, também apresenta múltiplos de 2. As colunas 3 e 6, representando os múltiplos de 3, encontram-se paralelas entre si.

Agora resta apenas a primeira e a quinta colunas para encontrarmos os números primos. Observe que conseguimos eliminar grande parte dos números compostos somente com as duas etapas já mencionadas.

O próximo número primo a ser considerado é o 5, conforme destacado no Quadro 3.5. Seus múltiplos, 10, 15, 20 e 25, quando representados no quadro, alinham-se em um segmento de reta. Esse padrão se repete para os demais múltiplos de 5, formando um conjunto de segmentos de retas paralelas que cruzam o quadro. O Quadro 3.5 ilustra essa regularidade, onde os segmentos de reta que passam por 10, 15, 20 e 25 e por 30, 35, 40, 45, 50 e 55, respectivamente, eliminam todos os múltiplos de 5 para os dois primeiros segmentos de retas não verticais. Ao continuarmos esse processo até o final do quadro conseguimos eliminar todos os múltiplos de 5.

Prosseguindo com o algoritmo, o próximo número primo a ser considerado é o 7. Seus múltiplos, assim como os do 5, formam segmentos de retas paralelos, porém com outra inclinação. Conforme ilustra o Quadro 3.6, o primeiro segmento de reta com múltiplos de 7 inicia em 14 e termina em 42. O próximo segmento de reta, começando em 49, se estende até 84. Esse processo é repetido para todos os números primos subsequentes até que todos os números menores ou iguais a 120 sejam eliminados.

Quadro 3.5 – Múltiplos de 2 até 5

X	②	③	4	⑤	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Quadro 3.6 – Múltiplos de 2 até 7

X	②	③	4	⑤	6
⑦	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Como o quadro mencionado vai até 120 e  $11^2 = 121$  temos pelo Lema 3.2, que basta encontrarmos os múltiplos de primos até 7. Agora temos que todos os números compostos já foram marcados restando apenas os primos. Veja esse resultado no Quadro 3.6.

Se continuamos marcando os demais múltiplos de primos presentes no quadro que possuem propriedades semelhantes às já mencionadas, vide Quadro 3.7 e 3.8, observamos que para os números primos maiores do que  $p$  tais que  $p^2 \leq n$  a propriedade do paralelismo entre os segmentos de reta permanece válida. Contudo, vale destacar que tais segmentos podem incluir números que não constituem múltiplos do primo em análise, exigindo atenção ao implementar a presente proposta para números maiores no ambiente de ensino.

O próximo passo será verificar se é possível encontrar os múltiplos de um número primo, grande o suficiente, que estejam na primeira ou quinta coluna, para que a reta que liga esses múltiplos seja paralela aos segmentos de retas dos múltiplos de 2 e 3. Logo, os números primos

Quadro 3.7 – Múltiplos de 2 até 11

X	②	③	4	⑤	6
⑦	8	9	10	⑪	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Quadro 3.8 – Números primos até 120

X	②	③	4	⑤	6
⑦	8	9	10	⑪	12
⑬	14	15	16	⑰	18
⑲	20	21	22	⑳	24
25	26	27	28	⑳	30
⑳	32	33	34	⑳	36
⑳	38	39	40	⑳	42
⑳	44	45	46	⑳	48
49	50	51	52	⑳	54
55	56	57	58	⑳	60
61	62	63	64	⑳	66
67	68	69	70	⑳	72
73	74	75	76	⑳	78
79	80	81	82	⑳	84
85	86	87	88	⑳	90
91	92	93	94	⑳	96
97	98	99	100	⑳	102
103	104	105	106	⑳	108
109	110	111	112	⑳	114
115	116	117	118	⑳	120

Fonte: Autora.

teriam que ter todos os múltiplos na mesma coluna, ou seja, na primeira ou quinta coluna. Porém ambas as colunas apresentam apenas números ímpares. Como um número pode ser multiplicado por um número par, então alguns dos múltiplos do número primo tem que ser par, e portanto estar em colunas com números pares (2ª, 4ª ou 6ª). Desta forma, os múltiplos de um número primo não poderiam estar todos na primeira ou quinta coluna, ou seja, não obtemos retas paralelas aos segmentos de retas dos múltiplos de 2 e 3.

Traçando o primeiro segmento de reta relacionado ao número primo  $p$  em análise, para traçar os próximos segmentos paralelos a este, contamos  $p$  linhas para baixo dos números que representam as extremidades dos segmentos traçados nos passos anteriores. Assim, o segmento passará pelas células onde estão estes números.

Para exemplificar este modelo, consideremos o número primo  $p = 7$ . A partir desse primo, construímos uma sequência de segmentos de retas da seguinte maneira: o primeiro segmento de reta tem como extremidade inicial o próprio  $7 = 7 \cdot 1$  e como extremidade final seu múltiplo,  $42 = 7 \cdot 6$ . O próximo segmento de reta inicia 7 linhas abaixo do 7, ou seja, em  $49 = 7 \cdot 7$  e termina em  $84 = 7 \cdot 12$ , o último segmento de reta do quadro inicia 7 linhas abaixo do 49, isto é, em  $91 = 7 \cdot 13$  e termina em  $119 = 7 \cdot 17$ . O Quadro 3.9 ilustra os segmentos de reta para  $p = 7$ .

Quadro 3.9 – Segmentos de reta: múltiplos de 7

X	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Porém para valores de primos maiores esse método torna-se bastante demorado, então podemos utilizar os Quadros 3.10, 3.11 e 3.12 que mostram os exemplos para  $p = 5$ ,  $7$  e  $11$ . Consideremos  $p$  o número primo escolhido,  $n$  o número da posição em ordem de aparição dos segmentos de retas com múltiplos de  $p$ ,  $k_1$  o primeiro múltiplo de  $p$  e  $k_2$  o último múltiplo de  $p$  do segmento de reta.

Quadro 3.10 – Exemplo para  $p = 5$ 

n	$k_1$	$k_2$
1	$5 = 5 \cdot 1$	$25 = 5 \cdot 5$
2	$30 = 5 \cdot 6$	$55 = 5 \cdot 11$
3	$60 = 5 \cdot 12$	$85 = 5 \cdot 17$
4	$90 = 5 \cdot 18$	$115 = 5 \cdot 23$

Fonte: Autora.

Quadro 3.11 – Exemplo para  $p = 7$ 

n	$k_1$	$k_2$
1	$7 = 7 \cdot 1$	$42 = 7 \cdot 6$
2	$49 = 7 \cdot 7$	$84 = 7 \cdot 12$
3	$91 = 7 \cdot 13$	

Fonte: Autora.

Quadro 3.12 – Exemplo para  $p = 11$ 

n	$k_1$	$k_2$
1	$11 = 11 \cdot 1$	$55 = 11 \cdot 5$
2	$66 = 11 \cdot 6$	$121 = 11 \cdot 11$

Fonte: Autora.

Os quadros auxiliam a descobrir os segmentos de retas resultantes dos múltiplos de  $p$ . Para determinar os valores iniciais e finais das retas, podemos utilizar as seguintes fórmulas. Se

o primo estiver na quinta coluna,

$$k_1 = \begin{cases} p, & \text{se } n = 1; \\ p[6(n-1)], & \text{se } n > 1; \end{cases}$$

$$k_2 = p(6n - 1).$$

Caso o primo  $p$ , esteja na primeira coluna temos,

$$k_1 = p[6(n-1) + 1];$$

$$k_2 = p(6n).$$

## 4 NÚMEROS TRIANGULARES, TRIPLAS PITÁGORICAS E NÚMEROS PERFEITOS

Sabemos que um número pode possuir muitos significados de acordo com sua aplicação, como estar associado a quantidades, cardinalidade, medidas, entre outros. Um fato é que para muitas dessas aplicações é possível fazer uma interpretação com formas visuais que retratam as propriedades presentes. No decorrer do capítulo, serão demonstradas e ilustradas algumas propriedades para números triangulares, triplas pitagóricas e números perfeitos. Usaremos o GeoGebra para ilustrar os resultados e utilizaremos a ferramenta controle deslizante para exibir alguns casos.

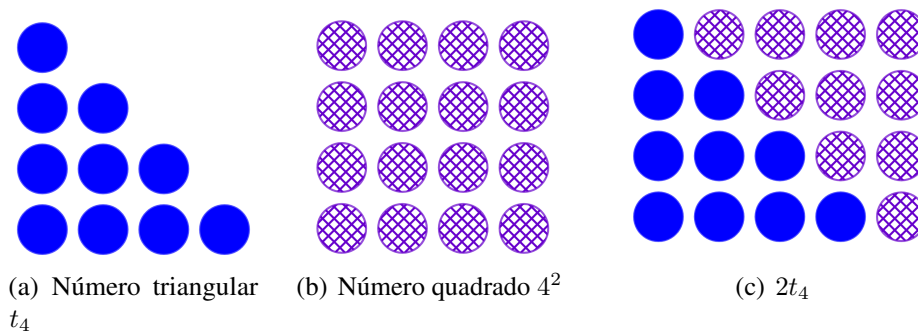
### 4.1 NÚMEROS TRIANGULARES

As propriedades e demonstrações a seguir são baseadas em Nelsen (2008). Iniciamos com os números triangulares e números quadrados.

Dado um número  $n$ , dizemos que  $n$  é um número quadrado se existe um número  $k$  tal que  $n = k^2$ .

Um número triangular, denotado por  $t_n$ , é a soma dos primeiros  $n$  números naturais, isto é,  $t_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ . A Figura 4.1(a) mostra o caso  $t_4$  e a Figura 4.1(b) representa  $4^2$ . Como a fórmula geral para  $t_n$  é  $\frac{n(n+1)}{2}$ , segue que  $2t_n = n(n+1)$ , que está representado na Figura 4.1(c) para o caso de  $n = 4$ .

Figura 4.1 – Representação geométrica de alguns números triangulares e quadrados



Fonte: Autora.

No link a seguir é possível verificar os números triangulares até  $t_{15}$  de forma interativa e conferir os resultados:

<<https://www.geogebra.org/m/e9tepspt>>.

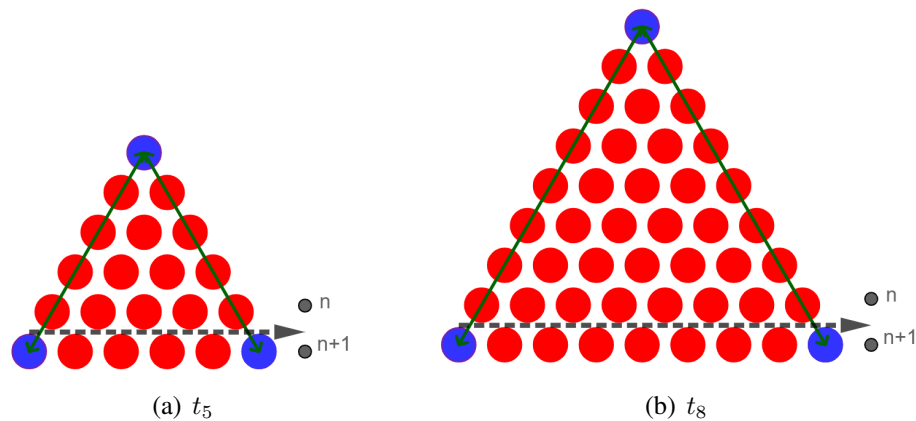
Os números triangulares possuem uma representação geométrica interessante. Cada número triangular também é um coeficiente binomial:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \binom{n+1}{2}.$$

Logo, existe uma correspondência entre um conjunto com  $t_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$  elementos e o conjunto, de subconjuntos de dois elementos de um conjunto, com  $n+1$  elementos.

Observe através da Figura 4.2 a visualização desta correspondência no caso de  $t_5$  e  $t_8$ .

Figura 4.2 – Correspondência: casos  $t_5$  e  $t_8$



Fonte: Autora.

Estes e outros casos podem ser visualizados no link a seguir.

<<https://www.geogebra.org/m/fdkt8gsd>>.

Ao movimentar o controle deslizante  $a$  obtemos outras configurações de triângulos, enquanto o controle deslizante  $i$  desloca essas correspondências horizontalmente e ao movimentar o controle deslizante  $n+1$  observamos os casos das correspondências.

Existem belas relações entre triângulos e os números triangulares, e os números quadrados. Por exemplo, uma delas está na seguinte proposição:

**Proposição 4.1.** *Se  $n$  é ímpar então  $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .*

*Demonstração.* Se  $n$  é ímpar então  $n = 4a + 1$  ou  $n = 4a + 3$ , para algum  $a \in \mathbb{Z}$ .

1. Se  $n = 4a + 1$ , então

$$\begin{aligned} n^2 &= (4a + 1)^2 = 16a^2 + 8a + 1 \\ &= 8a(2a + 1) + 1 \\ &= 8 \left( \frac{2a(2a + 1)}{2} \right) + 1 = 8t_{2a} + 1. \end{aligned}$$

Assim,  $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .

2. Se  $n = 4a + 3$ , então

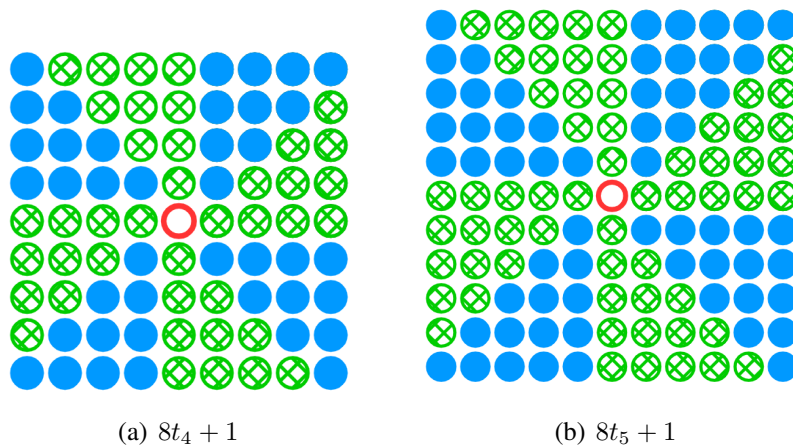
$$\begin{aligned} n^2 &= (4a + 3)^2 = 16a^2 + 24a + 9 \\ &= 16a^2 + 24a + 8 + 1 \\ &= 8(2a^2 + 3a + 1) + 1 \\ &= 8 \left( \frac{4a^2 + 6a + 2}{2} \right) + 1 \\ &= 8 \left[ \frac{(2a + 1)(2a + 2)}{2} \right] + 1 \\ &= 8t_{2a+1} + 1. \end{aligned}$$

Logo,  $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .

□

A demonstração da proposição estabelece que se  $n$  é ímpar então  $n^2 = 8t_k + 1$ , onde  $k = 2a$  ou  $2a + 1$ . Geometricamente, essa relação pode ser visualizada como a decomposição de um quadrado de lado  $n$  em 8 triângulos isósceles e um resto destacado no centro da figura. As Figuras 4.3(a) e 4.3(b) exemplificam essa decomposição para  $n = 9$  e  $n = 11$ , respectivamente. A parcela  $8t_k$  representa o total de círculos dos triângulos, enquanto o resto 1 corresponde ao círculo destacado no centro. Veja que para  $n = 9$  temos que  $n^2 = 9^2 = 81 = 8 \cdot 10 + 1 = 8t_4 + 1$ . Do mesmo modo para  $n = 11$ , obtemos  $n^2 = 11^2 = 121 = 8 \cdot 15 + 1 = 8t_5 + 1$ .

Figura 4.3 – (a)  $9^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ; (b)  $11^2 \equiv 1 \pmod{8}$



Fonte: Autora.

No link a seguir é possível explorar outros casos em que  $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .

<<https://www.geogebra.org/m/buaqemtv>>.

Vejam outras propriedades envolvendo os números triangulares que também possuem representações geométricas.

**Proposição 4.2.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $t_{3n-1} \equiv 0 \pmod{3}$ .

*Demonstração.* Procedemos por indução em  $n$ .

Para  $n = 1$ , temos que:

$$t_{3 \cdot 1 - 1} = t_2 = 2 + 1 = 3 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Logo, a propriedade é válida para  $n = 1$ .

Suponhamos que a propriedade seja válida para  $n = k$ , ou seja, que exista um  $x \in \mathbb{Z}$  tal que

$$t_{3k-1} = 1 + 2 + 3 + \dots + (3k - 2) + (3k - 1) = 3x.$$

Mostremos que a propriedade é válida para  $k + 1$ , ou seja:

$$t_{3(k+1)-1} = t_{3k+2} = 1 + 2 + 3 + \dots + (3k - 1) + (3k) + (3k + 1) + (3k + 2) = 3y, \text{ para algum } y \in \mathbb{Z}.$$

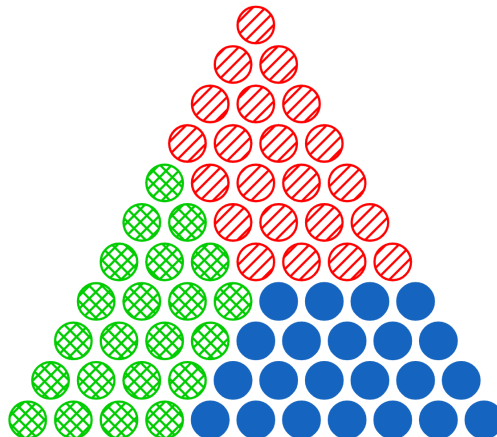
Como por hipótese de indução  $t_{3k-1} = 1 + 2 + 3 + \dots + (3k - 2) + (3k - 1) = 3x$ , então:

$$\begin{aligned} t_{3(k+1)-1} &= 3x + (3k) + (3k + 1) + (3k + 2) \\ &= 3(x + 3k + 1). \end{aligned}$$

Seja  $y = (x + 3k + 1)$  e então  $t_{3(k+1)-1} = 3y$ . Portanto, pelo princípio de indução finita a propriedade é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Vejam a representação visual da propriedade anterior para  $n = 4$ , ou seja, para  $t_{11} = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 = 66 = t_{3 \cdot 4 - 1} = \frac{(3 \cdot 4 - 1)3 \cdot 4}{2} = 3 \left[ \frac{4(3 \cdot 4 - 1)}{2} \right] = 3 \cdot 2(3 \cdot 4 - 1)$ . Na representação de  $t_{11}$ , observamos três trapézios congruentes com um total de  $2(3 \cdot 4 - 1)$  círculos cada um, como mostra a Figura 4.4.

Figura 4.4 – Representação  $t_{11} = t_{3 \cdot 4 - 1} \equiv 0 \pmod{3}$



Fonte: Autora.

Observe no link abaixo outras variações para valores de  $n$  que obedecem a Proposição 4.2.

<https://www.geogebra.org/m/mvjxvxc9>.

Outra propriedade na qual encontramos representações visuais de números triangulares é dada pela proposição a seguir.

**Proposição 4.3.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $t_{3n} \equiv 0 \pmod{3}$ .

*Demonstração.* Será provado por indução em  $n$  a seguir.

Para  $n = 1$ , temos

$$t_{3 \cdot 1} = t_3 = 3 + 2 + 1 = 6 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Suponhamos que a propriedade seja válida para  $n = k$ , ou seja, que exista um  $m \in \mathbb{Z}$ , tal que

$$t_{3k} = 1 + 2 + 3 + \dots + (3k - 1) + 3k = 3m.$$

Mostremos que a propriedade é válida para  $k + 1$ , ou seja:

$$t_{3(k+1)} = t_{3k+3} = 1 + 2 + \dots + 3k + (3k + 1) + (3k + 2) + (3k + 3) = 3r, \text{ com } r \in \mathbb{Z}.$$

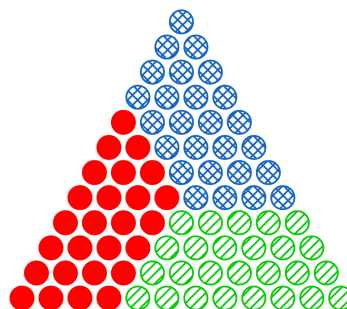
Como por hipótese de indução temos que  $t_{3k} = 1 + 2 + 3 + \dots + 3k = 3m$ , logo:

$$\begin{aligned} t_{3(k+1)} &= 1 + 2 + \dots + 3k + (3k + 1) + (3k + 2) + (3k + 3) \\ &= 3m + (3k + 1) + (3k + 2) + (3k + 3) \\ &= 3(m + 3k + 2). \end{aligned}$$

Seja  $r = (m + 3k + 2)$ , e então  $t_{3(k+1)} = 3r$ . Portanto, pelo princípio de indução finita a propriedade é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Observe a representação  $t_{3 \cdot 4} = t_{12} = \frac{3 \cdot 4(3 \cdot 4 + 1)}{2} = 3 \left[ \frac{4(3 \cdot 4 + 1)}{2} \right] = 3 \cdot 2(3 \cdot 4 + 1)$ , ou seja,  $t_{12} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 11 + 12 = 78$  e  $78 \equiv 0 \pmod{3}$ . A Figura 4.5 mostra esse caso. Note que é possível visualizar três trapézios congruentes com um total de  $2(3 \cdot 4 + 1)$  círculos cada um.

Figura 4.5 – Representação  $t_{12} = t_{3 \cdot 4} \equiv 0 \pmod{3}$



Fonte: Autora.



Ao acessar o link a seguir encontramos a representação para outros valores de  $n$ .

<<https://www.geogebra.org/m/hbjub6bm>>.

Outras duas propriedades que podem ser identificadas nos números triangulares que podem ser encontradas em Miller (2012, p. 14-15), são apresentadas nas proposições a seguir.

**Proposição 4.5.** *Se  $t_n$  é o  $n$ -ésimo número triangular, então  $3t_n + t_{n-1} = t_{2n}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.*

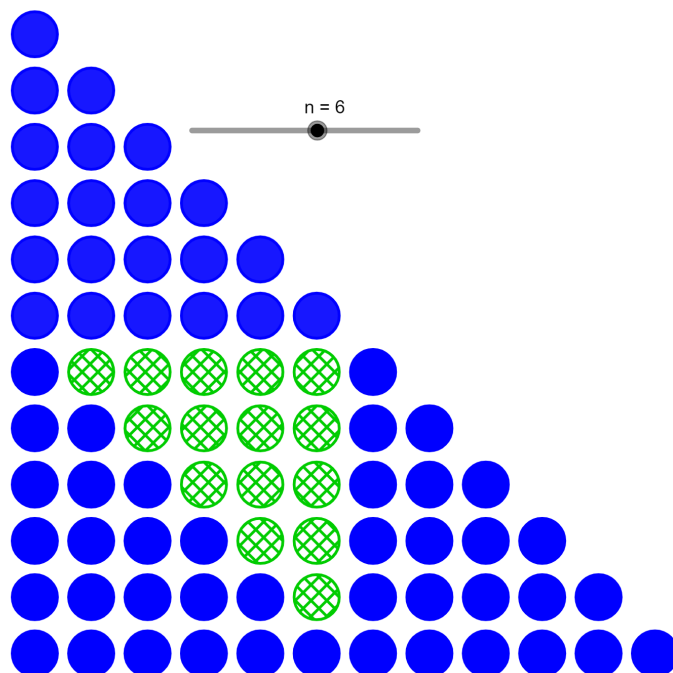
$$\begin{aligned} 3t_n + t_{n-1} &= \frac{3n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{n}{2}[3(n+1) + n-1] = \frac{n}{2}[4n+2] = \frac{2n(2n+1)}{2} = t_{2n}. \end{aligned}$$

□

A visualização dessa identidade é encontrada na Figura 4.7. Cada número triangular é representado por uma coleção de círculos dispostos em um triângulo. Para facilitar a compreensão são usados círculos preenchidos com uma única cor e outros quadriculados, para diferenciar os números triangulares. A Figura 4.7 mostra esse resultado para o caso  $n = 6$ . Observe que podemos visualizar  $3t_6$  destacado com cores preenchidas e no centro da figura, em destaque, o número triangular  $t_{6-1} = t_5$ . O total representado pode ser calculado como

$$3t_6 + t_5 = 3 \cdot 21 + 15 = 78 = t_{12} = t_{2 \cdot 6}.$$

Figura 4.7 – Representação de  $3t_6 + t_5 = t_{2 \cdot 6}$



Fonte: Autora.

No link podemos observar outros valores para  $n$  da Proposição 4.5.

<<https://www.geogebra.org/m/tfmfjbeu>>.

A outra propriedade envolvendo números triangulares que pode ser retratada por modelos visuais é a seguinte.

**Proposição 4.6.** *Se  $t_n$  é o  $n$ -ésimo número triangular, então  $3t_n + t_{n+1} = t_{2n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Procedemos por indução em  $n$ . Para  $n = 1$  temos que

$$3t_1 + t_2 = 3 \cdot 1 + 3 = 6 = t_3 = t_{2 \cdot 1 + 1}.$$

Logo, a propriedade é válida para o caso base. Suponhamos que seja válida para algum  $n = k$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , isto é,

$$3t_k + t_{k+1} = t_{2k+1}.$$

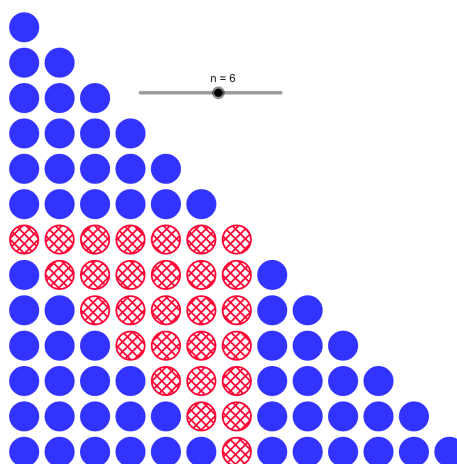
Mostremos que é válida para  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} 3t_{k+1} + t_{k+2} &= 3[t_k + (k + 1)] + t_{k+1} + (k + 2) \\ &= 3t_k + t_{k+1} + 4k + 5 \\ &\stackrel{\text{h.i.}}{=} t_{2k+1} + (2k + 2) + (2k + 3) \\ &= t_{2(k+1)+1}. \end{aligned}$$

Assim, pelo princípio de indução finita a propriedade é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Novamente recorreremos à visualização para exibir essa identidade em um caso particular, veja a Figura 4.8. Vejamos que para o caso de  $n = 6$  encontramos  $3t_6$  destacado com cores preenchidas. Mas agora no centro da figura representamos  $t_7$ . O total de círculos da figura é  $t_{2 \cdot 6 + 1} = t_{13} = 1 + 2 + \dots + 13 = 91 = 3t_6 + t_7$ .

Figura 4.8 – Representação de  $3t_6 + t_7 = t_{13}$



Fonte: Autora.

No link a seguir é possível observar outros valores de  $n$  que representam o caso da Proposição 4.6.

<https://www.geogebra.org/m/yka3t5x4>.

## 4.2 TRIPLAS PITAGÓRICAS

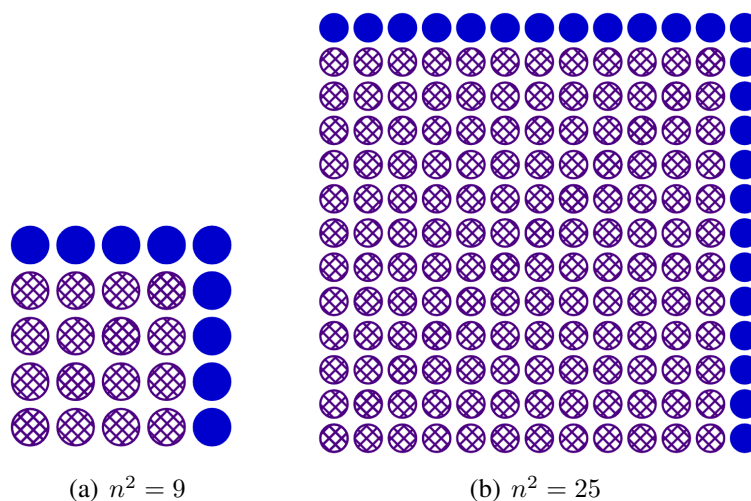
Na seção anterior representamos os números triangulares através de triângulos e quadradinhos. Essas interpretações remetem uma aplicação muito importante, o Teorema de Pitágoras e, com ele, as triplas pitagóricas. Segundo Nelsen (2008) uma tripla pitagórica primitiva é uma terna

$$(a, b, c)$$

de inteiros positivos sem fatores comuns que satisfaçam  $a^2 + b^2 = c^2$ . Alguns exemplos familiares são  $(3, 4, 5)$ ,  $(5, 12, 13)$  e  $(8, 15, 17)$ .

Existem infinitas triplas pitagóricas. A Figura 4.9 mostra, para  $n^2 = 9$  e  $n^2 = 25$ , que dado  $n^2$  ímpar, ou seja,  $n^2 = 2k + 1$ , implica que  $n^2 + k^2 = (k + 1)^2$ . Portanto,  $(n, k, k + 1)$  é uma tripla pitagórica.

Figura 4.9 – Triplas pitagóricas: (a)  $(3, 4, 5)$ ; (b)  $(5, 12, 13)$



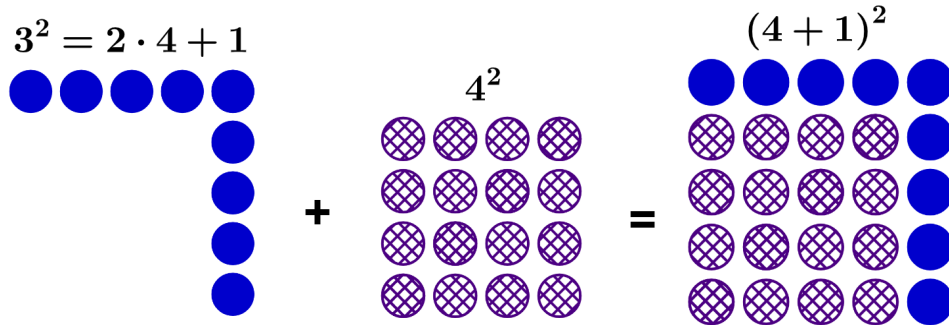
Fonte: Autora.

No link a seguir é possível observar outros casos que representam a proposição  $n^2 + k^2 = (k + 1)^2$  quando  $n^2 = 2k + 1$ . Ao movimentar o controle deslizante verifica-se os valores de  $k$  que satisfazem a igualdade  $n^2 = 2k + 1$ , para  $n$  e  $k$  inteiros.

<https://www.geogebra.org/m/qfgbr8qp>.

Para visualizar esse fato, primeiro organizamos os  $n^2 = 2k + 1$  círculos, destacados com a cor preenchida, e depois os  $k^2$  círculos são desenhados formando um quadrado, totalizando  $(k+1)^2$  círculos. A Figura 4.10 representa a forma visual do caso para  $n^2 = 9$ . Como  $9 = 2 \cdot 4 + 1$ , então  $k = 4$ , e assim organizamos os 9 círculos que estão representados pela cor preenchida, e em seguida os  $4^2$  círculos são desenhados. Como  $3^2 + 4^2 = (4 + 1)^2$  verificamos a representação de  $n^2 + k^2 = (k + 1)^2$ .

Figura 4.10 – Representação de  $3^2 + 4^2 = (4 + 1)^2$



Fonte: Autora

O mesmo ocorre para  $n^2 = 25$  (Figura 4.9(b)). Como  $25 = 2 \cdot 12 + 1$ , temos que  $k = 12$ , e  $k^2 = 12^2$  é representado pelos círculos rachurados que preenchem o quadrado e  $25 = 5^2 = 2 \cdot 12 + 1$  é ilustrado pelos círculos com cor preenchida. Assim,  $5^2 + 12^2 = (12 + 1)^2$  como observado na Figura 4.9(b).

A única tripla em que a soma de dois quadrados consecutivos resulta no próximo termo é (3, 4, 5).

Agora vejamos o que acontece quando somamos quadrados de três números consecutivos ou quatro números consecutivos.

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

⋮

Esse fato possui uma relação com os números triangulares, dado que a última parcela da soma do lado esquerdo da igualdade é igual ao quadrado de quatro vezes um número triangular. No exemplo acima temos  $4 = 4(1) = 4t_1$ ,  $12 = 4(1 + 2) = 4t_2$ ,  $24 = 4(1 + 2 + 3) = 4t_3$ . De modo geral temos o seguinte:

**Proposição 4.7.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que

$$(4t_n - n)^2 + (4t_n - (n - 1))^2 + \cdots + (4t_n)^2 = (4t_n + 1)^2 + \cdots + (4t_n + n)^2.$$

*Demonstração.* Seja  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\begin{aligned}
 & (4t_n - n)^2 + (4t_n - (n - 1))^2 + \cdots + (4t_n - 1)^2 + (4t_n)^2 \\
 &= (4t_n + 1 - (n + 1))^2 + (4t_n + 2 - (n + 1))^2 + \cdots + (4t_n + n - (n + 1))^2 + (4t_n)^2 \\
 &= (4t_n + 1)^2 - 2(n + 1)(4t_n + 1) + (n + 1)^2 + (4t_n + 2)^2 - 2(n + 1)(4t_n + 2) + (n + 1)^2 + \\
 &+ \cdots + (4t_n + n)^2 - 2(n + 1)(4t_n + n) + (n + 1)^2 + (4t_n)^2 \\
 &= (4t_n + 1)^2 + \cdots + (4t_n + n)^2 - 2(n + 1)[(4t_n + 1) + (4t_n + 2) + \cdots + (4t_n + n)] + \\
 &+ n(n + 1)^2 + (4t_n)^2 \\
 &= (4t_n + 1)^2 + (4t_n + 2)^2 + \cdots + (4t_n + n)^2 - 2(n + 1)[4nt_n + t_n] + n(n + 1)^2 + (4t_n)^2 \\
 &= (4t_n + 1)^2 + (4t_n + 2)^2 + \cdots + (4t_n + n)^2 - 2(n + 1)(4n + 1)t_n + \\
 &+ \frac{n(n + 1)}{2}2(n + 1) + (4t_n)^2 \\
 &= (4t_n + 1)^2 + (4t_n + 2)^2 + \cdots + (4t_n + n)^2 - 2(n + 1)4nt_n + (4t_n)^2 \\
 &= (4t_n + 1)^2 + (4t_n + 2)^2 + \cdots + (4t_n + n)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \frac{(n + 1)}{2}nt_n + (4t_n)^2 \\
 &= (4t_n + 1)^2 + (4t_n + 2)^2 + \cdots + (4t_n + n)^2 - 4^2t_n^2 + (4t_n)^2 \\
 &= (4t_n + 1)^2 + (4t_n + 2)^2 + \cdots + (4t_n + n)^2.
 \end{aligned}$$

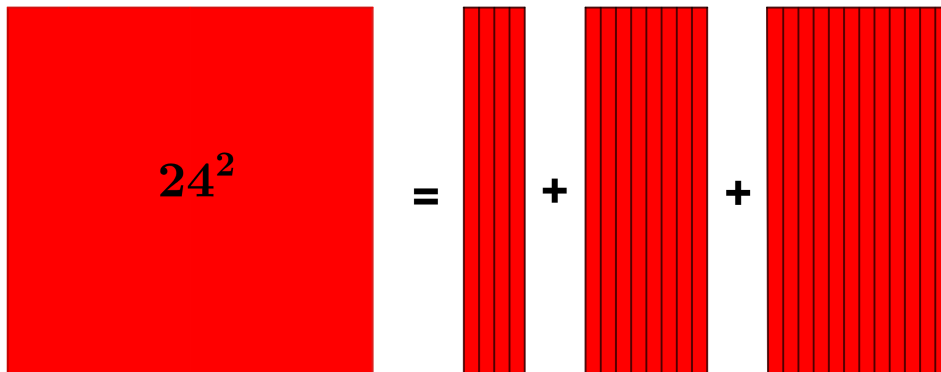
□

Observe a Figura 4.11 para o caso de  $n = 3$ , usando o fato que  $4t_3 = 4(1 + 2 + 3)$ .

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2.$$

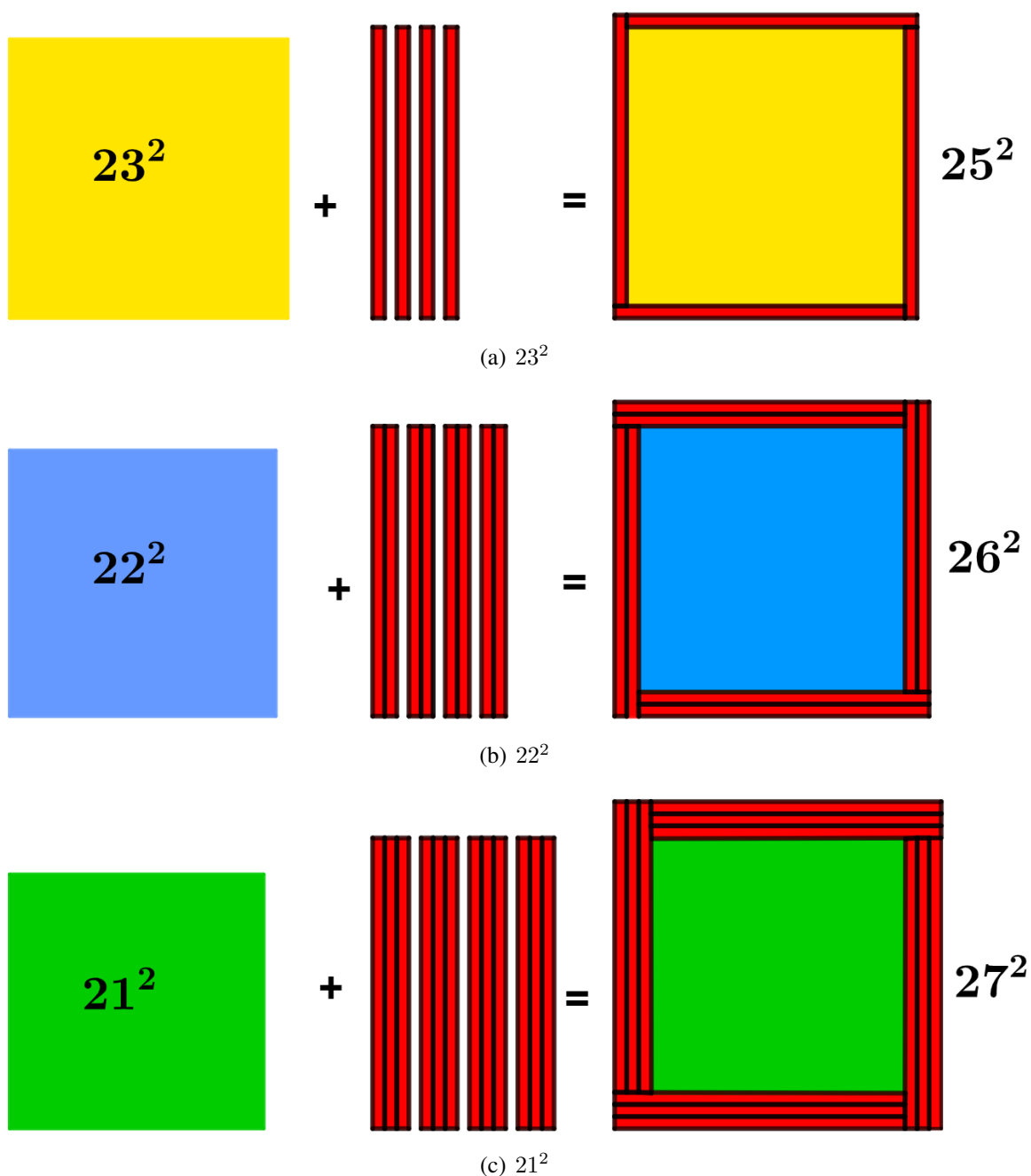
Primeiro dividimos  $24^2$  em três partições conforme a Figura 4.11:

Figura 4.11 – Decomposição de  $24^2$  como soma



Fonte: Autora.

Agora será distribuído essas partes como ilustrado na Figura 4.12:

Figura 4.12 – Representação da distribuição de  $24^2$  para  $23^2$ ,  $22^2$  e  $21^2$ 

Fonte: Autora.

### 4.3 NÚMEROS PERFEITOS, DEFICIENTES E ABUNDANTES

Os números perfeitos são objetos de estudo desde a antiguidade, segundo Eves (2004, p.98) “(...) os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números e, ao mesmo tempo, do lançamento das bases do futuro misticismo numérico, foram dados por Pitágoras e seus seguidores”. Para os pitagóricos os números perfeitos, deficientes e abundantes apresentavam ligações místicas essenciais e especulações numerológicas.

Nesta seção será apresentada a representação visual dos números perfeitos baseada em

Nelsen (2008). Segundo Prielipp (1970) um número inteiro positivo  $n$  é um número perfeito se, e somente se, a soma de seus divisores é  $2n$ . Por exemplo, 28 é um número perfeito, pois seus divisores inteiros positivos são 1, 2, 4, 7, 14 e 28, e

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28.$$

Os primeiros números perfeitos são 6, 28, 496, 8128, 33550336. Podemos observar que cada um desses números é par. Não há descobertas de nenhum número perfeito ímpar.

Para auxiliar na continuidade sobre o tema recorreremos a proposições e exemplos encontradas em Hefez (2022, p. 142-144). Esses resultados mostram como achar de modo eficaz outros números com a mesma característica citada anteriormente.

Dado um número natural  $n$ , denotemos por  $S(n)$  a soma de todos os seus divisores naturais. Por exemplo,  $S(1) = 1$ . Então, pela definição, um número é perfeito se  $S(n) = 2n$ .

**Proposição 4.8.** *Dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $S(n) = n + 1$  se, e somente se,  $n$  é um número primo.*

*Demonstração.* Um número natural  $n$  é considerado primo se, e somente se, seus divisores positivos sejam exclusivamente 1 e  $n$ , o que implica em  $S(n) = n + 1$ .  $\square$

A próxima proposição, fornece uma fórmula para  $S(n)$  em função da decomposição de  $n$  em fatores primos, com  $n \geq 2$ .

**Proposição 4.9.** *Seja  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$  a decomposição de  $n$  em fatores primos. Então,*

$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

*Demonstração.* Considere a igualdade a seguir

$$(1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \dots (1 + p_r + \dots + p_r^{\alpha_r}) = \sum p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}.$$

O somatório presente no lado direito da igualdade abrange todas as  $r$ -uplas  $(\beta_1, \dots, \beta_r)$ , em que  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ , com  $i = 0, \dots, r$ . Dado que essa soma representa a totalidade dos divisores de  $n$ , a expressão para  $S(n)$  é obtida aplicando a fórmula da soma de uma progressão geométrica a cada parcela do lado esquerdo da igualdade.  $\square$

Segue da proposição acima o seguinte corolário.

**Corolário 4.1.** *A função  $S(n)$  é multiplicativa, isto é, se  $(m, n) = 1$ , então  $S(mn) = S(n)S(m)$ .*

**Exemplo 4.1.**

$$S(3) = 3 + 1 = 4;$$

$$S(4) = S(2^2) = \left( \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \right) = 7;$$

$$S(6) = S(2 \cdot 3) = S(2)S(3) = (2 + 1)(3 + 1) = 12;$$

$$S(24) = S(2^3 \cdot 3) = S(2^3)S(3) = \left( \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \right) (3 + 1) = 60;$$

$$S(28) = S(2^2 \cdot 7) = S(2^2)S(7) = \left( \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \right) (7 + 1) = 56;$$

$$S(72) = S(2^3 \cdot 3^2) = S(2^3)S(3^2) = \left( \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \right) \left( \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \right) = 195.$$

Podemos observar que  $S(24) = 60 \neq 84 = S(4)S(6)$ , portanto o Corolário 4.1 não é válido se  $(m, n) \neq 1$ .

Para determinar outros números com as mesmas características recorremos a Hefez (2022, p.144).

**Teorema 4.1.** *Um número natural  $n$  é um número perfeito par se, e somente se,  $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$  onde  $2^p - 1$  é um primo de Mersenne.*

*Demonstração.* Considere um número inteiro positivo  $n$ , com  $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ , onde  $2^p - 1$  representa um primo de Mersenne. Assim, o expoente  $p$  é maior do que 1, o que implica que  $n$  é um número par.

Dado que  $2^p - 1$  é um número ímpar, então  $(2^{p-1}, 2^p - 1) = 1$ , e como consequência da Proposição 4.9 e o Corolário 4.1, temos que

$$S(n) = S(2^{p-1}(2^p - 1)) = S(2^{p-1})S(2^p - 1) = \frac{2^p - 1}{2 - 1} 2^p = 2n.$$

Logo,  $n$  é um número perfeito.

Reciprocamente, vamos admitir que  $n$  seja perfeito e par. Seja  $2^{p-1}$  a maior potência de 2 que divide  $n$ . Consequentemente,  $p > 1$  e  $n$  pode ser expresso como  $n = 2^{p-1}b$ , onde  $b$  é um número ímpar. Estabelecendo então, que  $(2^{p-1}, b) = 1$ . Pela Proposição 4.9 e do Corolário 4.1, decorre que  $S(n) = (2^p - 1)S(b)$ . Como  $n$  é perfeito, temos que  $S(n) = 2n$ . Logo

$$(2^p - 1)S(b) = 2^p b. \quad (4.1)$$

Assim, resulta que  $(2^p - 1) | b$  pois  $(2^p, 2^p - 1) = 1$ . Portanto, existe  $c \in \mathbb{N}$  com  $c < b$  tal que

$$b = c(2^p - 1). \quad (4.2)$$

Substituindo (4.2) em (4.1), obtemos

$$(2^p - 1)S(b) = 2^p(2^p - 1)c;$$

portanto,

$$S(b) = 2^p c. \quad (4.3)$$

De (4.2) nota-se que  $c$  e  $b$  representam dois divisores distintos de  $b$  que satisfazem a relação  $c + b = 2^p c$ .

Afirmamos que  $c = 1$ . Suponha por absurdo, que  $c \neq 1$ . Com isso, temos que a soma dos divisores de  $b$ , satisfaz a desigualdade  $S(b) \geq 1 + c + b$  que é estritamente maior que  $c + b$ . Dado que  $c + b = 2^p c$ , segue que  $S(b) > 2^p c$ . Logo, por esse fato e de (4.3) temos que

$$2^p c = c + b < S(b) = 2^p c,$$

o que é uma contradição.

Consequentemente, por (4.2) e (4.3) segue que a soma dos divisores de  $b$  é  $S(b) = b + 1$ . Em virtude da Proposição 4.8, conclui-se que  $b$  é um número primo. Desta forma, temos que  $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$  com  $2^p - 1$  primo.  $\square$

A sequência de passos a seguir apresentada em Santos (2020), mostra como determinar se um número é perfeito utilizando o teorema anterior.

1. Dado um número natural  $p > 1$ .
2. Verificamos se  $2^p - 1$  é ou não primo.
3. Em caso afirmativo, então  $(2^p - 1)2^{p-1}$  é um número perfeito.

Observe que:

- Se  $p = 2$ , então  $2^2 - 1 = 3$ , que é primo. E  $(2^2 - 1) \cdot 2^{2-1} = 6$ , que é um número perfeito.
- Se  $p = 3$ , então  $2^3 - 1 = 7$ , que é primo. E  $(2^3 - 1) \cdot 2^{3-1} = 28$ , que é um número perfeito.
- Se  $p = 4$ , então  $2^4 - 1 = 15$ , que não é primo.
- Se  $p = 5$ , então  $2^5 - 1 = 31$ , que é primo. E  $(2^5 - 1) \cdot 2^{5-1} = 496$ , que é um número perfeito.
- Se  $p = 11$ , então  $(2^{11} - 1) = 2047 = 23 \cdot 89$ , que não é primo.

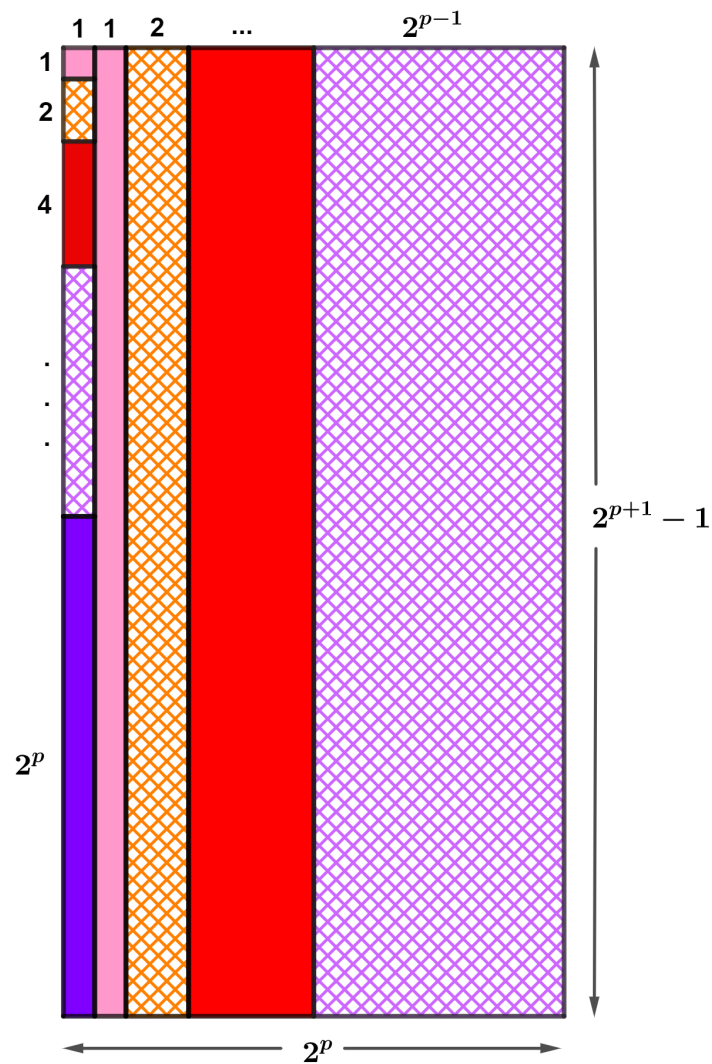
Podemos ilustrar a implicação do fato que  $n = 2^p(2^{p+1} - 1)$  é perfeito se  $(2^{p+1} - 1)$  é primo, como mostra a Figura 4.13. Considerando  $n$  como a área de um retângulo de lados  $2^p$  e  $(2^{p+1} - 1)$ , e observando que esse retângulo pode ser particionado em retângulos menores (e um

quadrado) cujas áreas são precisamente os divisores próprios de  $n$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^p + (2^{p+1} - 1) + 2(2^{p+1} - 1) + \dots + 2^{p-1}(2^{p+1} - 1) &= \\ = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1})(1 + 2^{p+1} - 1) + 2^p &= \\ = (2^p - 1)2^{p+1} + 2^p &= \\ = 2^p(2^{p+1} - 1). \end{aligned}$$

Portanto,  $n$  é a soma dos seus divisores próprios.

Figura 4.13 – Representação visual utilizando área de um retângulo para números perfeitos



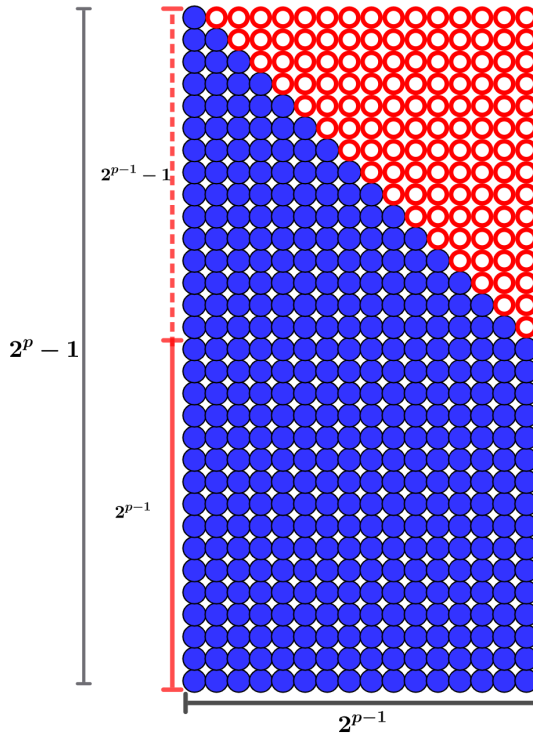
Fonte: Autora.

No link encontramos a representação visual utilizando área de um retângulo dos números perfeitos para  $p = 2, 3, 5$  e  $7$ .

<<https://www.geogebra.org/m/mzm2mdmb>>.

Um fato interessante entre os números perfeitos e triangulares é que todo número perfeito par pode ser representado como um número triangular, já que  $2^{p-1}(2^p - 1) = \frac{2^p(2^p-1)}{2} = t_{2^{p-1}}$ . Observe a Figura 4.14 que mostra a representação de um número perfeito para  $p = 5$ .

Figura 4.14 – Número perfeito  $p = 5$



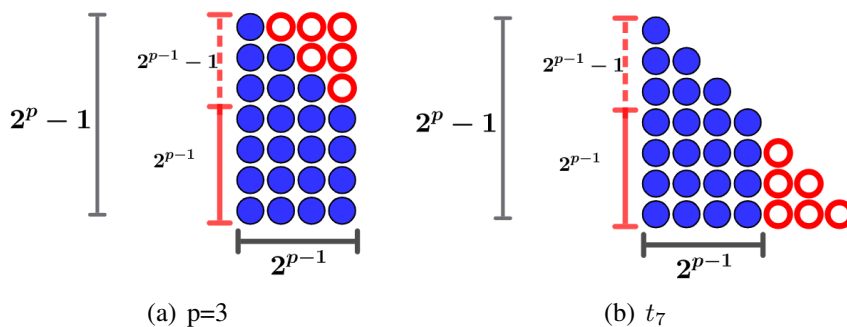
Fonte: Autora.

No link a seguir é possível observar a relação entre os números triangulares e perfeitos. Ao movimentar o controle deslizante  $p$  obtemos a representação visual dos números perfeitos e ao movimentar o controle deslizante  $n$  encontramos o número triangular correspondente.

<<https://www.geogebra.org/m/y2urftma>>.

A Figura 4.15 ilustra a relação entre números perfeitos e triangulares para o caso de  $p = 3$  que resulta no número perfeito 28 e no qual obtemos o número triangular  $t_7$ .

Figura 4.15 – Números perfeitos e triangulares



Fonte: Autora.

Em Prielipp (1970, p. 693) os números inteiros positivos que não são perfeitos são chamados abundantes ou deficientes. Um número é dito *abundante* se, e somente se, a soma de seus divisores inteiros positivos for maior que duas vezes ele mesmo, ou seja,  $S(n) > 2n$ . Por exemplo, doze é um número abundante, pois seus divisores inteiros positivos são 1, 2, 3, 4, 6 e 12. Como

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28 > 24 = 2 \cdot 12.$$

Outro exemplo ocorre com o número vinte, onde seus divisores inteiros positivos são 1, 2, 4, 5, 10 e 20,

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 = 42 > 40 = 2 \cdot 20.$$

Um número é chamado *deficiente* se, e somente se, a soma de seus divisores inteiros positivos for menor que duas vezes ele mesmo, ou seja,  $S(n) < 2n$ , como por exemplo para o número três, seus divisores são 1 e 3, e

$$1 + 3 = 4 < 6 = 2 \cdot 3.$$

No Quadro 4.1 é possível observar os números inteiros positivos menores do que 105 classificados em abundantes (A), deficientes (D) e perfeitos (P).

Quadro 4.1 – Números abundantes, deficientes e perfeitos

1	D	14	D	27	D	40	A	53	D	66	A	79	D	92	D
2	D	15	D	28	P	41	D	54	A	67	D	80	A	93	D
3	D	16	D	29	D	42	A	55	D	68	D	81	D	94	D
4	D	17	D	30	A	43	D	56	A	69	D	82	D	95	D
5	D	18	A	31	D	44	D	57	D	70	A	83	D	96	A
6	P	19	D	32	D	45	D	58	D	71	D	84	A	97	D
7	D	20	A	33	D	46	D	59	D	72	A	85	D	98	D
8	D	21	D	34	D	47	D	60	A	73	D	86	D	99	D
9	D	22	D	35	D	48	A	61	D	74	D	87	D	100	A
10	D	23	D	36	A	49	D	62	D	75	D	88	A	101	D
11	D	24	A	37	D	50	D	63	D	76	D	89	D	102	A
12	A	25	D	38	D	51	D	64	D	77	D	90	A	103	D
13	D	26	D	39	D	52	D	65	D	78	A	91	D	104	A

Fonte: Autora

Observando o Quadro 4.1 vemos que todos os números primos são deficientes. Podemos provar esse fato com o Teorema 4.2.

**Teorema 4.2.** *Se  $p$  é um número primo, então  $p$  é um número deficiente.*

*Demonstração.* Note que os divisores de  $p$  são  $p$  e 1. E como,

$$1 + p < p + p = 2p,$$

temos que  $p$  é deficiente. □

De onde podemos deduzir o seguinte corolário.

**Corolário 4.2.** *Existem infinitos números deficientes.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.3, existem infinitos números primos e pelo Teorema 4.2 cada número primo é um número deficiente, então concluímos que há infinitos números deficientes. □

**Teorema 4.3.** *Se  $p$  é um número primo e  $k$  é um inteiro positivo, então  $p^k$  é um número deficiente.*

*Demonstração.* Os divisores de  $p^k$  são  $1, p, p^2, \dots, p^{k-1}$  e  $p^k$ , e

$$1 + p + p^2 + \dots + p^{k-1} + p^k = \frac{p^k - 1}{p - 1} + p^k < p^k + p^k = 2p^k.$$

□

**Corolário 4.3.** *Existem infinitos números pares deficientes e infinitos números ímpares deficientes.*

*Demonstração.* Números pares da forma  $2^k$ , para todo  $k$  inteiro positivo são números deficientes. Assim como números da forma  $3^k$  é um número ímpar deficiente para cada  $k$  inteiro positivo. □

**Teorema 4.4.** *Se  $n = 2^{k+1} \cdot 3$  onde  $k$  é um inteiro positivo, então  $n$  é um número abundante.*

*Demonstração.* A soma dos divisores de  $n = 2^{k+1} \cdot 3$  é dado por,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k+1} + 3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k+1}) &= 4(1 + 2 + \dots + 2^{k+1}) = \\ &= 4 \left( \frac{2^{k+2} - 1}{2 - 1} \right) = 4 \cdot 2^{k+2} - 4 = 3 \cdot 2^{k+2} + 2^{k+2} - 4 > 3 \cdot 2^{k+2} = 2 \cdot 3 \cdot 2^{k+1} = \\ &= 2n. \end{aligned}$$

□

**Observação 4.1.** *Nem todos os números abundantes são pares.*

Por exemplo, somando os divisores de 945, tem-se que,

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 15 + 21 + 27 + 35 + 45 + 63 + 105 + 135 + 189 + 315 + 945 &= \\ = 1920 > 1890 = 2 \cdot 945. \end{aligned}$$

Portanto, há números ímpares abundantes.

**Teorema 4.5.** *Existem infinitos números ímpares abundantes.*

*Demonstração.* Seja  $n$  um número ímpar da forma  $n = 945m$ , onde  $m$  é um inteiro positivo que não é divisível por 2, 3, 5 ou 7. Como  $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ , então  $m$  e 945 são primos entre si. Assim pelo Corolário 4.1 segue que,

$$S(n) = S(945)S(m) > S(945) \cdot m = 1920m = 2 \cdot 960m > 2 \cdot 945m = 2n.$$

Portanto, existem infinitos números abundantes ímpares.

□

## 5 ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo, apresentaremos uma série de atividades que visam aplicar os conceitos aritméticos discutidos ao longo deste trabalho. Essas atividades são propostas com o intuito de proporcionar aos alunos experiências concretas e significativas, estimulando a resolução de problemas e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

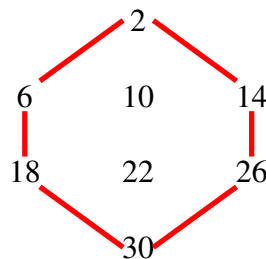
### 5.1 PROPOSTA DE ATIVIDADE: POLÍGONOS E PADRÕES

A interdisciplinaridade entre geometria e aritmética através da exploração de polígonos e padrões numéricos, configura-se como uma estratégia pedagógica alternativa para tornar a aprendizagem mais engajadora. A associação de representações visuais às operações aritméticas, como adição e multiplicação, configura-se como um recurso que pode auxiliar os estudantes a consolidar conhecimentos geométricos e desenvolver uma compreensão mais profunda das propriedades dos polígonos.

Algumas das relações interessantes presentes no hexágono, octógono e losango, envolvendo as operações de adição e multiplicação, que podem ser exploradas em sala de aula com o intuito de tornar o conhecimento matemático mais atrativo e engajador para os discentes, serão abordadas nas atividades propostas.

Vamos relembrar brevemente as relações vistas no Capítulo 2. Chamaremos de  $P$  a soma dos números que se encontram nos vértices do polígono e  $I$  a soma dos números do interior do polígono. Ao escolhermos 8 termos consecutivos de uma progressão aritmética com primeiro termo  $a$  e razão  $r$ , e posicioná-los como mostra a Figura 5.1 (para  $a = 2$  e  $r = 4$ ) obtemos um hexágono, cuja relação é  $P = 3I$ , ou seja, a soma dos números dos vértices é igual a três vezes a soma dos números do seu interior.

Figura 5.1 – Exemplo de polígonos e padrões: hexágono



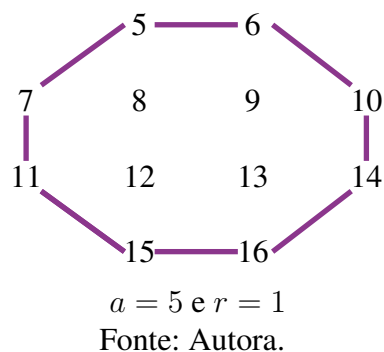
$$a = 2 \text{ e } r = 4$$

Fonte: Autora.

Observe que  $P = 2 + 6 + 18 + 30 + 26 + 14 = 96$ ,  $I = 10 + 22 = 32$  e  $P = 3 \cdot 32 = 3I$ .

Ao escolhermos 12 termos consecutivos podemos formar um octógono que possui a relação  $P = 2I$ , a Figura 5.2 mostra um exemplo para esse fato.

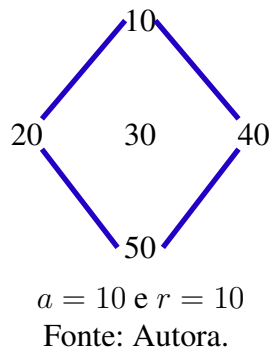
Figura 5.2 – Exemplo de polígonos e padrões: octógono



Logo,  $P = 5 + 7 + 11 + 15 + 16 + 14 + 10 + 6 = 84$ ,  $I = 8 + 9 + 12 + 13 = 42$  e neste caso  $P = 84 = 2 \cdot 42 = 2I$ .

Se escolhermos apenas 5 termos consecutivos de uma progressão aritmética, obtemos um losango que apresenta a relação  $P = 4I$ , vide a Figura 5.3.

Figura 5.3 – Exemplo de polígonos e padrões: losango



Note que  $P = 10 + 20 + 50 + 40 = 120 = 4 \cdot 30 = 4I$ .

As atividades propostas buscam fixar conteúdos que envolvem polígonos e operações de maneira atrativa, curiosa e desafiadora para o estudante. As atividades foram baseadas em Duncan e Litwiller (1990).

**Objetivo Geral:** Reconhecer padrões com somas e produtos de números em polígonos.

**Objetivos Específicos:**

1. Reconhecer polígonos e suas características (vértices, nomenclatura);
2. Identificar e verificar padrões existentes nos polígonos;
3. Estimular a concentração e a curiosidade do estudante;

4. Fixar conteúdos;
5. Resolver exercícios de maneira lúdica.

**Contexto didático:** As atividades aqui apresentadas foram planejadas para serem aplicadas a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, após a conclusão de uma sequência de conteúdo sobre polígonos e operações de adição e produto. Também, podem ser estudadas na 3ª série do Ensino Médio durante o conteúdo de progressões aritméticas.

**Quantidade de aula:** 2 aulas de 45 minutos.

**Material didático:**

- Fichas com polígonos impressas disponíveis no Apêndice A;
- Caça-octógonos impresso, disponível no Apêndice A;
- Lápis, borracha e papel para rascunho;
- Lápis para colorir;
- Dados de 6 faces;
- Tablets ou computadores com acesso a internet.

**Metodologia:** O encaminhamento da aula se dará de forma explicativa e dialogada recorrendo a metodologia ativa “Rotação por Estações”, uma estratégia de ensino que divide a sala de aula em diferentes “estações”, cada uma com uma atividade de aprendizagem específica. Os alunos são divididos em grupos e rotacionam entre as estações, completando as atividades propostas em cada uma delas.

Para o desenvolvimento da aula o professor deverá separar os estudantes em grupos de 3 até 5 integrantes. Teremos quatro atividades sobre o conteúdo, cada atividade terá duração de 20 minutos. E nos 10 minutos finais o professor pode retomar as dúvidas e questionamentos dos estudantes. Após montar os grupos, o professor pode direcionar cada grupo a uma estação. Depois de passar o tempo os grupos trocam de estação.

Logo que todos os grupos percorrerem todas as estações, os estudantes voltam aos lugares do início da aula para um feedback. A seguir o professor realiza a correção dos exercícios com os estudantes identificando as dificuldades que ocorreram e as dúvidas.

### 5.1.1 1ª ESTAÇÃO: HEXÁGONOS

Serão disponibilizadas algumas fichas com polígonos como mostra a Figura 5.4, 5.5 e 5.6 e um dado. Os estudantes devem jogar o dado e o número que cair deve ser escrito no círculo do segmento externo ao hexágono e adjacente à palavra início e imediatamente realizar

as operações solicitadas escrevendo o resultado nos círculos. Quando chegar em um dos círculos pertencentes ao hexágono inicia o preenchimento dos outros círculos, incluindo os círculos do interior do polígono, obedecendo a razão  $r$  que se encontra no centro da figura (no caso da Figura 5.4 seriam +1, +7, +9, no caso da Figura 5.5 são +8 e +15, no caso da Figura 5.6 seriam +2, +3 e +5). Em seguida, precisam determinar os valores de  $P$  e  $I$  com os números obtidos e verificar a relação  $P = 3I$ .

Figura 5.4 – Ficha de atividade: 1

Nomes: _____		
$P =$ _____ $I =$ _____	$P =$ _____ $I =$ _____	$P =$ _____ $I =$ _____

Fonte: Autora.

Figura 5.5 – Ficha de atividade: 2

Nomes: _____	
$P =$ _____ $I =$ _____	$P =$ _____ $I =$ _____

Fonte: Autora.

Figura 5.6 – Ficha de atividade: 3

Nomes:		
$P = \underline{\hspace{2cm}}$ $I = \underline{\hspace{2cm}}$	$P = \underline{\hspace{2cm}}$ $I = \underline{\hspace{2cm}}$	$P = \underline{\hspace{2cm}}$ $I = \underline{\hspace{2cm}}$

Fonte: Autora.

### 5.1.2 2ª ESTAÇÃO: ATIVIDADES UTILIZANDO O GEOGEBRA

Os alunos responderão um quiz de questões que envolvem as relações presentes nos polígonos estudados. Esse quiz foi criado pelo software GeoGebra e pode ser compartilhado com o estudante pelo Google Sala de Aula.

As atividades propostas são encontradas no link a seguir:

<https://www.geogebra.org/m/u6wcbpz7>.

Os estudantes deverão responder 11 questões sobre o tema polígonos e padrões, identificando valores faltantes, e em algumas questões os valores de  $P$  e  $I$ . Há também uma atividade para completar os números faltantes no polígono. Os alunos devem responder as questões no tempo de 20 minutos. A Figura 5.7 mostra uma atividade a ser resolvida pelo estudante.

Figura 5.7 – Atividade no GeoGebra

Questão 1.  
Qual o valor faltante na Figura 1?

As  $\pi$  Digite sua resposta aqui...

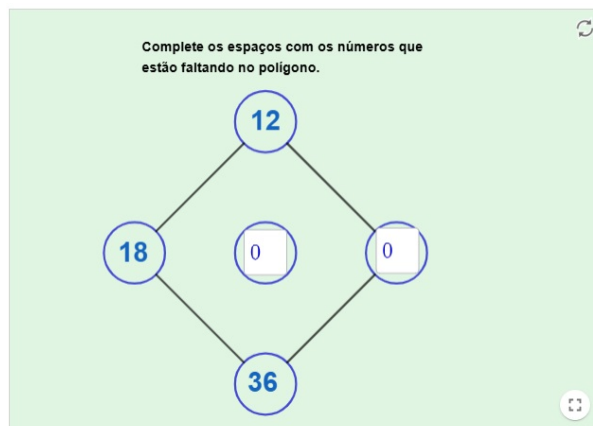
VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Figura 1

Fonte: Autora.

Os alunos também deverão determinar os valores faltantes na atividade, como mostra a Figura 5.8.

Figura 5.8 – Atividade proposta no GeoGebra



Fonte: Autora.

### 5.1.3 3ª ESTAÇÃO: OCTÓGONOS

Nesta estação os alunos deverão encontrar octógonos que apresentem a relação estudada durante as aulas, ou seja,  $P = 2I$ . Para isso o grupo receberá uma folha de caça octógonos, como mostra a Figura 5.9.

Figura 5.9 – Caça-octógonos

Nome: \_\_\_\_\_

#### Caça-octógonos

5	5	12	13	19	75	4	5	6	12	76	82	1	2	7	3
19	26	33	40	12	20	7	8	9	10	13	3	4	5	6	10
47	54	61	68	42	55	11	12	13	14	22	7	8	9	10	11
14	75	82	2	4	11	23	15	16	47	69	96	11	12	69	33
21	21	6	8	10	12	19	44	42	99	98	72	69	55	14	14
33	14	14	16	18	20	14	21	36	6	7	13	8	10	18	20
99	3	69	22	24	47	59	96	8	9	10	11	69	89	26	28
12	5	4	93	24	30	97	6	12	13	14	15	9	69	44	34
28	6	86	36	42	48	54	7	96	16	17	83	18	17	41	96
63	69	9	60	66	72	78	51	54	75	82	85	33	15	16	34
45	48	55	78	84	90	66	54	12	13	16	25	17	18	19	20
12	8	16	33	30	20	14	55	19	22	25	28	21	22	23	24
24	32	40	48	3	45	46	1	31	34	37	40	0	25	26	29
56	64	72	80	47	48	49	50	62	43	46	22	51	21	49	73
16	88	96	1	51	52	53	54	74	91	8	63	7	40	83	92
22	3	6	37	90	55	56	53	38	52	5	10	39	20	6	41
9	12	15	18	36	6	4	8	20	15	20	25	30	93	95	8
21	24	27	30	4	12	16	20	24	35	40	45	50	19	5	23
45	33	36	89	55	28	32	36	40	20	55	60	31	11	42	7
89	1	3	2	13	27	44	48	82	61	9	30	10	72	9	10

Fonte: Autora.

Os estudantes devem em 20 minutos, encontrar o máximo de octógonos que obedecem a relação estudada. Quando encontrar um octógono, o estudante deve colorir o polígono com lápis de cor. O professor pode atribuir pontuações aos octógonos encontrados de acordo com o nível de dificuldade, por exemplo, números consecutivos que aumentam de 1 em 1 recebem uma pontuação menor que números que são múltiplos consecutivos ou que obedecem uma determinada razão. A Figura 5.10 mostra o gabarito do caça-octógonos.

Figura 5.10 – Gabarito: caça-octógonos

5	5	12	13	19	75	4	5	6	12	76	82	1	2	7	3
19	26	33	40	12	20	7	8	9	10	13	3	4	5	6	10
47	54	61	68	42	55	11	12	13	14	22	7	8	9	10	11
14	75	82	2	4	11	23	15	16	47	69	96	11	12	69	33
21	21	6	8	10	12	19	44	42	99	98	72	69	55	14	14
33	14	14	16	18	20	14	21	36	6	7	13	8	10	18	20
99	3	69	22	24	47	59	96	8	9	10	11	69	89	26	28
12	5	4	93	24	30	97	6	12	13	14	15	9	69	44	34
28	6	86	36	42	48	54	7	96	16	17	83	18	17	41	96
63	69	9	60	66	72	78	51	54	75	82	85	33	15	16	34
45	48	55	78	84	90	66	54	12	13	16	25	17	18	19	20
12	8	16	33	30	20	14	55	19	22	25	28	21	22	23	24
24	32	40	48	3	45	46	1	31	34	37	40	0	25	26	29
56	64	72	80	47	48	49	50	62	43	46	22	51	21	49	73
16	88	96	1	51	52	53	54	74	91	8	63	7	40	83	92
22	3	6	37	90	55	56	53	38	52	5	10	39	20	6	41
9	12	15	18	36	6	4	8	20	15	20	25	30	93	95	8
21	24	27	30	4	12	16	20	24	35	40	45	50	19	5	23
45	33	36	89	55	28	32	36	40	20	55	60	31	11	42	7
89	1	3	2	13	27	44	48	82	61	9	30	10	72	9	10

Fonte: Autora.

#### 5.1.4 4ª ESTAÇÃO: JOGOS NA PLATAFORMA WORDWALL

Nesta seção os estudantes testarão seus conhecimentos em jogos utilizando a plataforma Wordwall (2025) sobre o tema polígonos e padrões. Os alunos deverão em 20 minutos responder questões para determinarem os valores de P e I em cada caso, respeitando a relação correspondente a cada polígono. O professor pode disponibilizar folhas para rascunho e lápis para os

cálculos. É necessário tablets ou computadores com acesso a internet e o link dos jogos.

<<https://wordwall.net/pt/resource/85650668>>.

<<https://wordwall.net/pt/resource/85653716>>.

Os alunos responderão questões para determinar os valores de P e I dos polígonos.

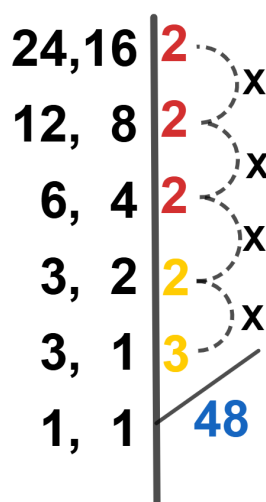
**Avaliação:** A avaliação ocorrerá de forma diagnóstica pelo professor. Ela será realizada durante a execução das atividades pelos estudantes, identificando as dificuldades e complementando o assunto se há necessidade.

## 5.2 PROPOSTA DE ATIVIDADE: MODELOS VISUAIS DO MÁXIMO DIVISOR COMUM E MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Um dos conteúdos abordados no Ensino Fundamental pelos professores é o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum. Segundo a BNCC (Brasil, 2018a, p. 308) espera-se que após a aplicação do tema os estudantes adquiram a seguinte habilidade: (EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

Só a aplicação tradicional do algoritmo não garante que o estudante compreenda o processo usual, como mostra a Figura 5.11, que representa o cálculo para o mínimo múltiplo comum utilizando fatoração entre os números 16 e 24.

Figura 5.11 – Mínimo múltiplo comum entre 16 e 24



Fonte: Autora.

Utilizando modelos visuais para determinar o máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, o estudante consegue compreender os passos para encontrar o resultado.

Mostraremos algumas atividades que podem ser utilizadas para uma melhor compreensão do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum em sala de aula. As atividades propostas foram baseadas em Lidan e Pjanić (2020) e MathVentures (2008).

**Objetivo Geral:** Compreender os processos para determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum.

**Objetivos Específicos:**

1. Determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum entre dois números;
2. Estimular a aprendizagem;
3. Fixar conteúdos;
4. Resolver exercícios de maneira lúdica.

**Contexto didático:** As atividades apresentadas podem ser aplicadas durante as aulas de matemática para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental quando o professor abordar o tema máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.

**Quantidade de aulas:** 2 aulas de 45 minutos.

**Material didático:**

- Cartolina ou papel tamanho A4 ou A3;
- Régua, tesoura, cola;
- Papeis coloridos;
- Canetinhas ou lápis de cor;
- Quebra-cabeça disponível no Apêndice B.

**Metodologia:** A atividade proposta utiliza o modelo de área retangular para explorar os conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, exemplificados pelos pares de valores 22 e 5 e outro exemplo para os números 38 e 16, com a possibilidade de adaptação para outros valores.

Os alunos podem ser divididos em grupos e em seguida o professor propõe a cada grupo os valores para determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum utilizando o modelo de área retangular.

Inicialmente, os estudantes desenham o retângulo cujos lados tem medidas 22 e 5 unidades. Com os papéis coloridos deverão construir quadrados até preencher todo o retângulo 22 por 5. Da mesma forma se deve proceder para determinar o máximo divisor comum entre os números 38 e 16.

Para determinar o mínimo múltiplo comum entre 22 e 5 e entre 16 e 38, utilizando o modelo de área retangular, podemos aproveitar as construções realizadas pelos estudantes ao determinar o máximo divisor comum.

Também é proposto um desafio no formato de quebra-cabeça utilizando o modelo de área retangular para determinar o mínimo múltiplo comum entre 22 e 5. Os alunos devem realizar a montagem do quebra-cabeça e em seguida realizar os cálculos para determinar o mínimo múltiplo comum entre os valores.

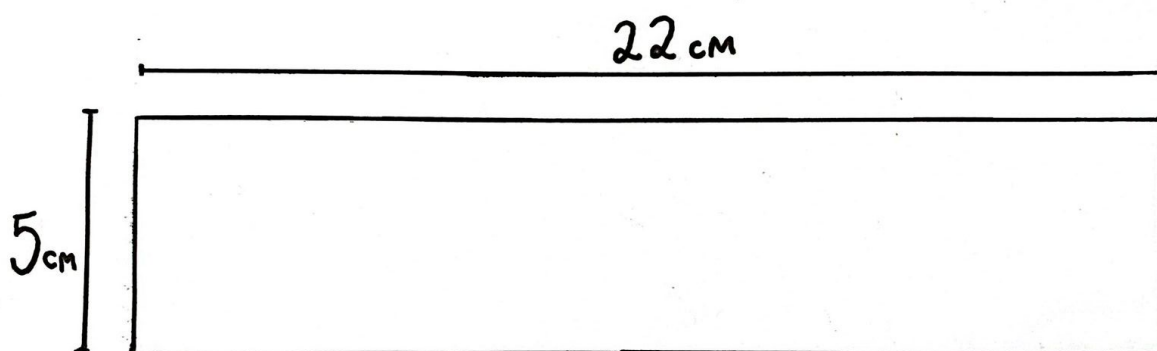
### 5.2.1 ATIVIDADE: MODELO DE ÁREA RETANGULAR

Apresentaremos uma forma de sistematizar com os estudantes os conteúdos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum utilizando o modelo de área retangular.

- **Atividade 1:** Determine o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de 22 e 5 utilizando o modelo de área retangular.
- **Atividade 2:** Determine o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de 16 e 38 utilizando o modelo de área retangular.

**Atividade 1:** Inicialmente vamos determinar o máximo divisor comum de 5 e 22. Com o auxílio de uma régua os alunos deverão desenhar um retângulo de lados com medidas 22 e 5 centímetros (pode ser utilizada outras unidades de medida), como mostra a Figura 5.12.

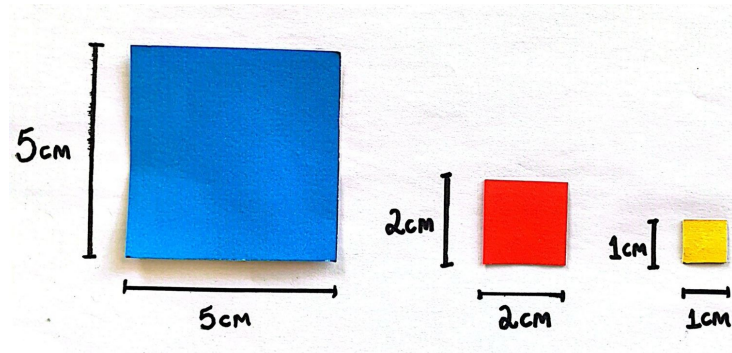
Figura 5.12 – Retângulo de 22 por 5 centímetros



Fonte: Autora.

Agora os alunos deverão analisar qual é o maior quadrado possível que cabe no retângulo e em seguida preencher todo o retângulo com esses quadrados. A Figura 5.13 mostra as medidas dos quadrados necessários para ladrilhar toda a figura.

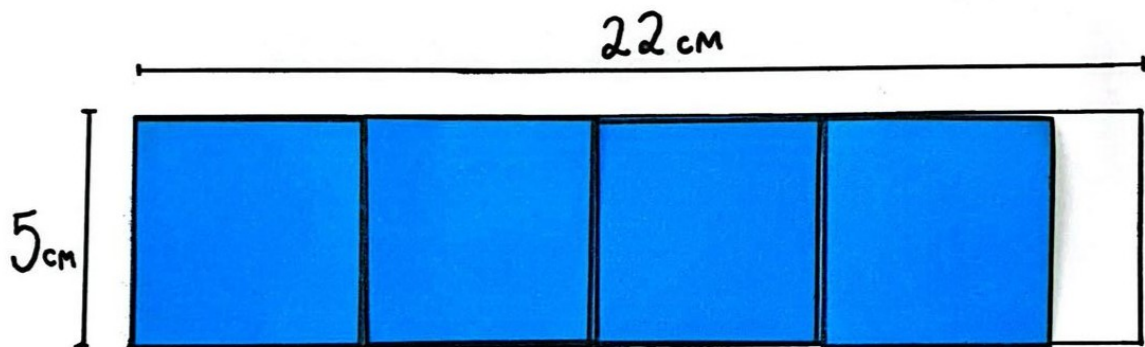
Figura 5.13 – Quadrados necessários para preencher o retângulo de lados com medidas 22 e 5



Fonte: Autora.

Utilizando o Algoritmo de Euclides podemos representar  $22 = 4 \cdot 5 + 2$ , ou seja, são necessários quatro quadrados de lado 5 centímetros como mostra a Figura 5.14.

Figura 5.14 – Quadrados de medidas 5 centímetros



Fonte: Autora.

Continuando o processo, agora devemos adicionar o máximo de quadrados possíveis para preencher o retângulo restante. Como  $5 = 2 \cdot 2 + 1$ , necessitamos de dois quadrados de lado 2 centímetros. Vide a Figura 5.15.

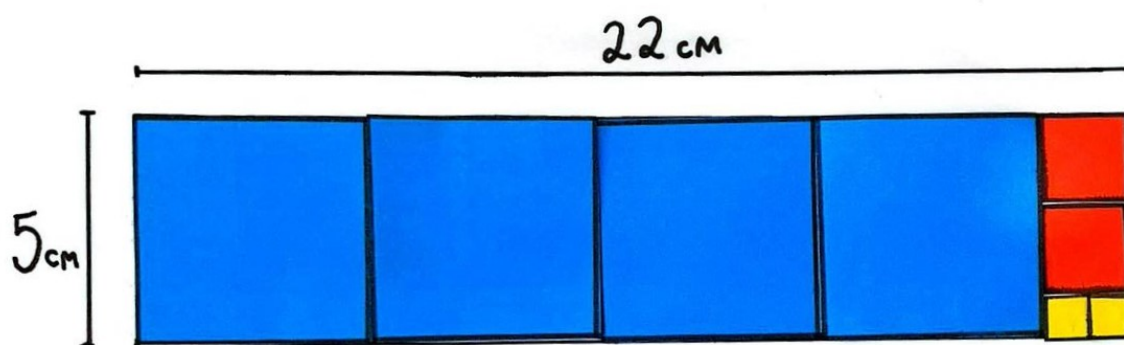
Figura 5.15 – Quadrados de medidas 2 centímetros



Fonte: Autora.

Para finalizar precisa-se preencher o espaço restante agora com  $2 = 2 \cdot 1 + 0$ , ou seja, dois quadrados de lado medindo 1 centímetro. Portanto, todo o retângulo foi ladrilhado e a medida do lado do último quadrado representa o máximo divisor comum de 22 e 5, isto é, 1. A Figura 5.16 ilustra esse fato.

Figura 5.16 – Retângulo de lados 22 e 5 centímetros ladrilhado

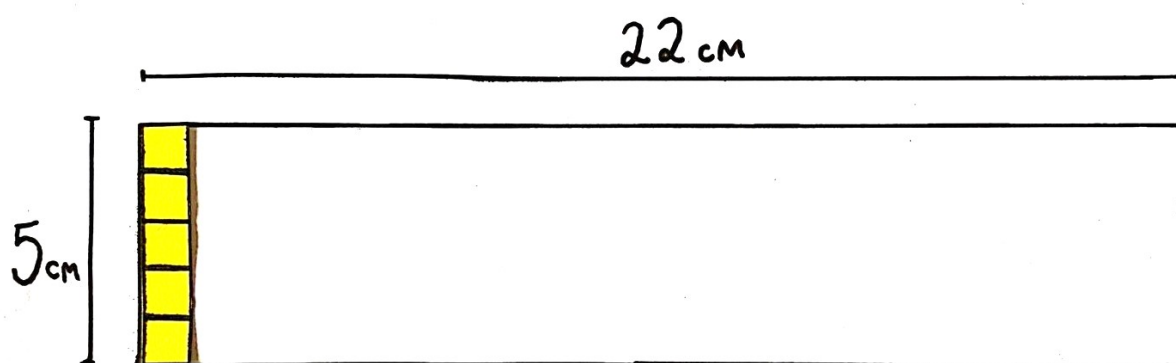


Fonte: Autora.

Para determinar o mínimo múltiplo comum recorrendo a um dos modelos de área retangular, utilizamos o quadrado de lado igual ao máximo divisor comum, isto é, o quadrado de lado 1 centímetro.

Primeiro desenhamos ao longo do lado medindo 5 centímetros os quadrados de lado igual a 1 centímetro de modo a preencher todo o comprimento, vide Figura 5.17.

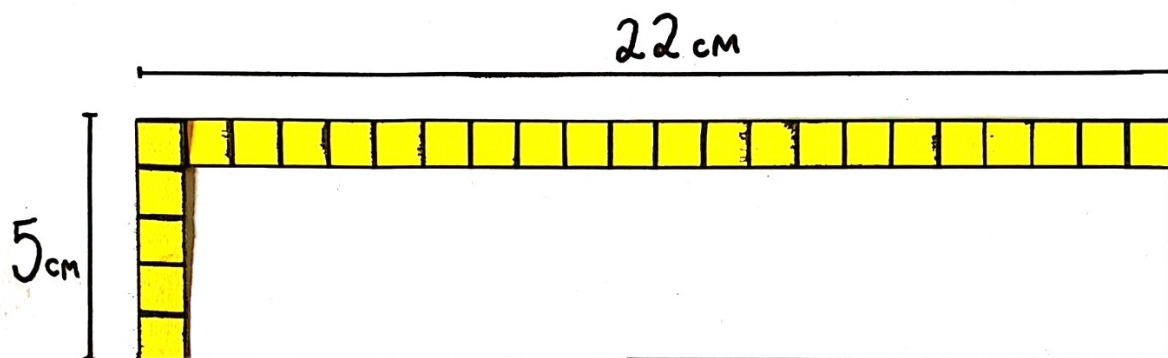
Figura 5.17 – Quadrados sobre o lado medindo 5 centímetros



Fonte: Autora.

Em seguida, desenhamos ao longo da aresta medindo 22 centímetros os quadrados de lado igual a 1 centímetro de modo a preencher todo comprimento como ilustra a Figura 5.18.

Figura 5.18 – Quadrados sobre o lado medindo 22 centímetros



Fonte: Autora.

Ao longo do lado de 5 centímetros é possível desenhar 5 quadrados de lado 1 centímetro. Já no lado medindo 22 centímetros foram desenhados 22 quadrados de lado 1 centímetro.

Para determinar o mínimo múltiplo comum devemos multiplicar a quantidade de quadrados sobre o lado menor (5 cm), pela medida do lado maior, isto é, 22 centímetros e portanto  $5 \cdot 22 = 110$ .

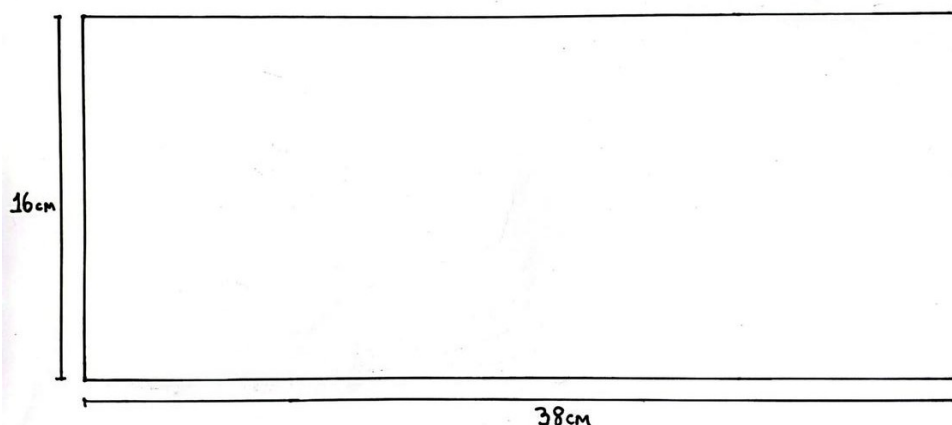
Podemos também obter o resultado multiplicando a quantidade de quadrados de lado 1 centímetro sobre o lado maior (22 cm), pela medida do lado menor, 5 centímetros, logo o mínimo múltiplo comum é  $22 \cdot 5 = 110$ .

Esse resultado é válido já que  $[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$ , com  $a$  e  $b$  inteiros, apresentado no Capítulo 3. Logo o mínimo múltiplo comum de 22 e 5 é dado por

$$[22, 5] = \frac{22 \cdot 5}{1} = 110.$$

**Atividade 2:** Para determinar o máximo divisor comum dos números 16 e 38 desenhamos um retângulo de lados de medida 16 e 38 centímetros. Como mostra a Figura 5.19.

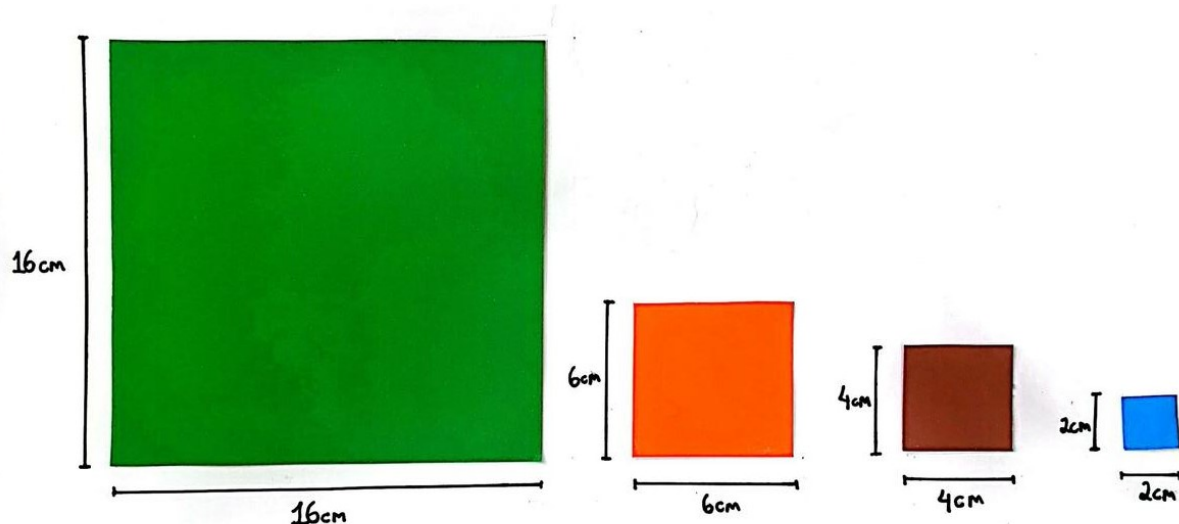
Figura 5.19 – Retângulo com medidas 16 e 38 centímetros



Fonte: Autora.

Agora é preciso verificar qual é o maior quadrado possível que possa cobrir parte do retângulo. Para essa atividade são necessários quadrados como mostra a Figura 5.20.

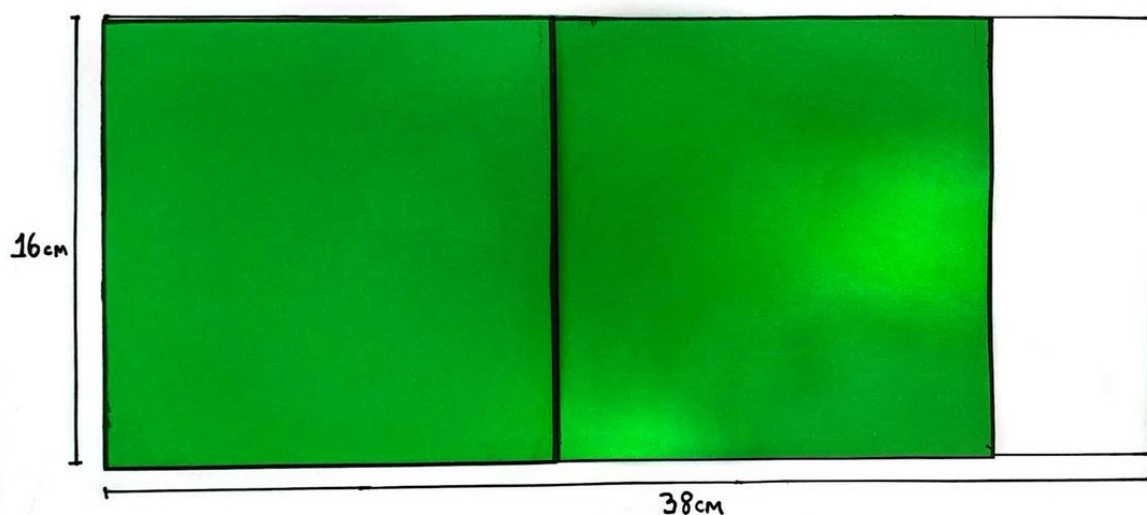
Figura 5.20 – Quadrados para preencher o retângulo de lados com medidas 16 e 38



Fonte: Autora.

Utilizando o Algoritmo de Euclides podemos determinar quantos quadrados de cada medida são necessários para cobrir a maior parte possível do retângulo. Temos que  $38 = 2 \cdot 16 + 6$ , logo é preciso dois quadrados de lado 16 centímetros. Vide Figura 5.21.

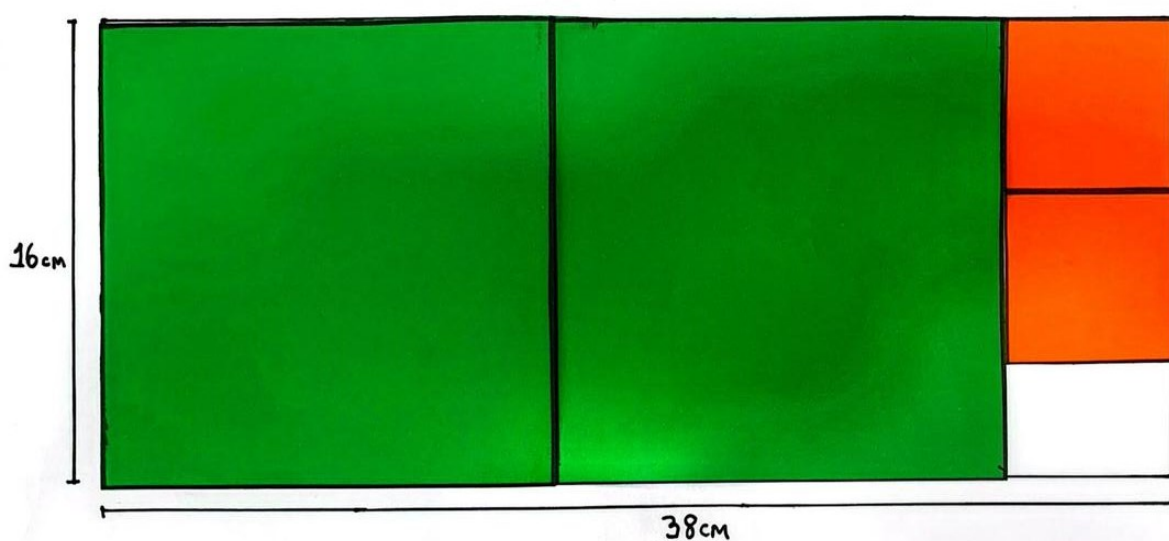
Figura 5.21 – Quadrados de 16 centímetros



Fonte: Autora.

Agora resta preencher um retângulo de lado medindo 16 e 6 centímetros. Aplicando o Algoritmo de Euclides novamente tem-se que  $16 = 2 \cdot 6 + 4$ , ou seja, precisamos de dois quadrados medindo 6 centímetros de lado como mostra a Figura 5.22.

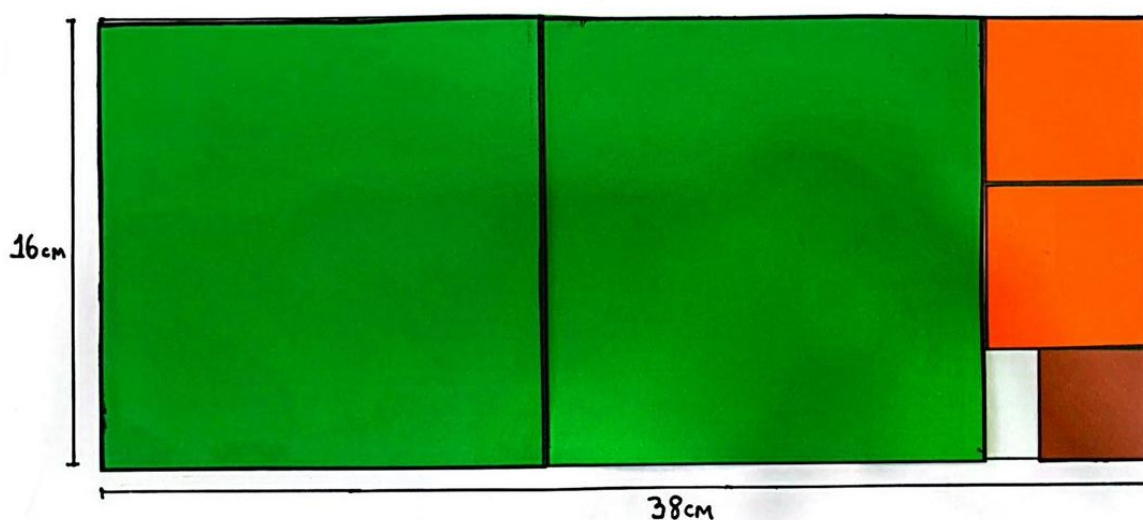
Figura 5.22 – Quadrados de 6 centímetros



Fonte: Autora.

Repetindo o processo,  $6 = 1 \cdot 4 + 2$ , então precisamos de um quadrado de lado 4 centímetros. A Figura 5.23 representa esse caso.

Figura 5.23 – Quadrados de 4 centímetros

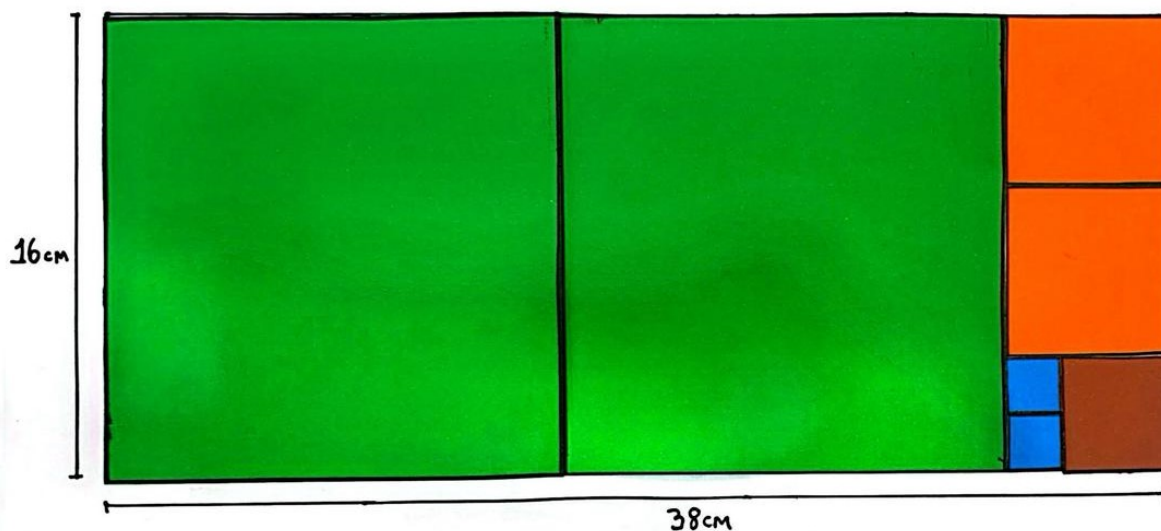


Fonte: Autora.

Finalmente temos que  $4 = 2 \cdot 2 + 0$ , ou seja, precisamos de dois quadrados de lado 2 centímetros para preencher todo o retângulo 16 por 38 centímetros, logo o máximo divisor comum de 16 e 38 é 2, vide Figura 5.24.

Para encontrar o mínimo múltiplo comum de 16 e 38 utilizaremos os quadrados de lado medindo 2 centímetros, determinados pelo máximo divisor comum.

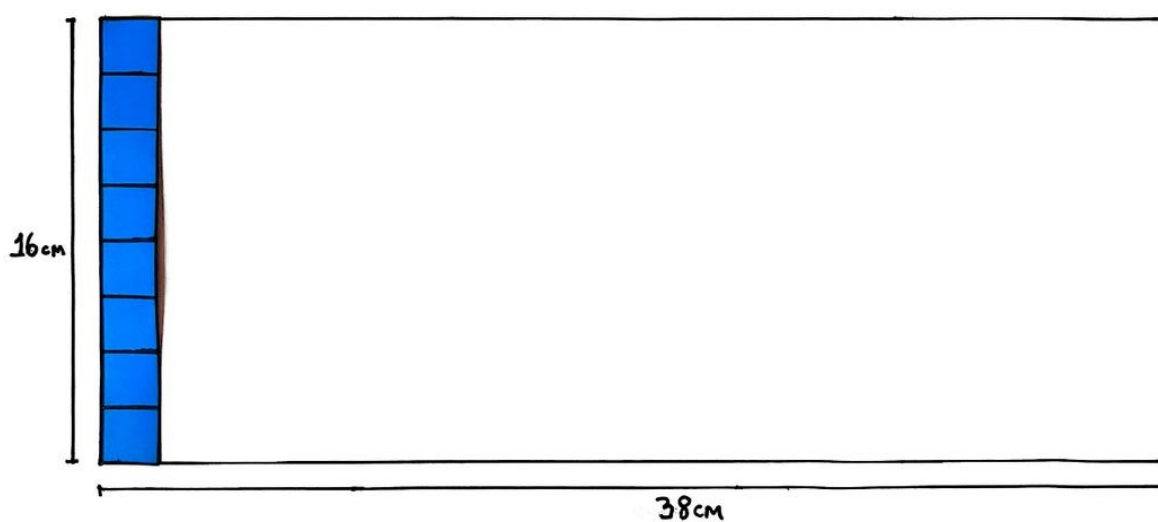
Figura 5.24 – Retângulo de lados 16 e 38 ladrilhado



Fonte: Autora.

Ao desenharmos sobre o lado medindo 16 centímetros, temos um total de 8 quadrados de lado 2 centímetros. A Figura 5.25 mostra esta representação.

Figura 5.25 – Quadrados sobre aresta medindo 16 centímetros

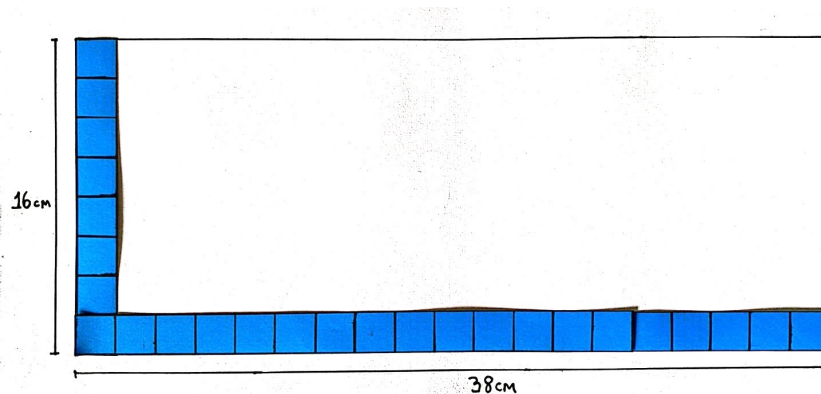


Fonte: Autora.

Já sobre o lado medindo 38 centímetros é possível desenhar 19 quadrados de lado 2 centímetros, vide Figura 5.26.

Para determinar o mínimo múltiplo comum de 16 e 38, multiplicamos a quantidade de quadrados sobre o lado menor, ou seja, de lado medindo 16 centímetros pelo comprimento do lado maior de 38 centímetros, isto é,  $8 \cdot 38 = 304$ .

Figura 5.26 – Quadrados sobre aresta medindo 38 centímetros



Fonte: Autora.

Para verificar o resultado podemos multiplicar a quantidade de quadrados de lado 2 centímetros sobre a aresta maior, ou seja, de lado medindo 38 centímetros pelo comprimento do lado menor, isto é, 16 centímetros. Portanto  $19 \cdot 16 = 304$ .

Como  $[a, b] = \frac{|ab|}{(a,b)}$ , então o mínimo múltiplo comum de 16 e 38, é dado por,

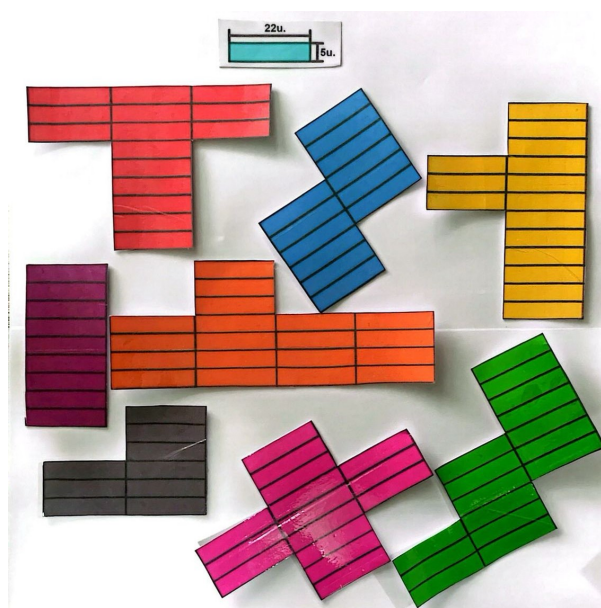
$$[38, 16] = \frac{38 \cdot 16}{2} = 38 \cdot 8 = 304 \text{ ou } \frac{38 \cdot 16}{2} = 19 \cdot 16 = 304.$$

### 5.2.2 DESAFIO

Utilizando o quebra-cabeça disponível no Apêndice B, determine o mínimo múltiplo comum utilizando o modelo de área retangular.

**Atividade desafio:** Para determinar o mínimo múltiplo comum com o modelo de área retangular utilizaremos o quebra-cabeça que mostra a Figura 5.27.

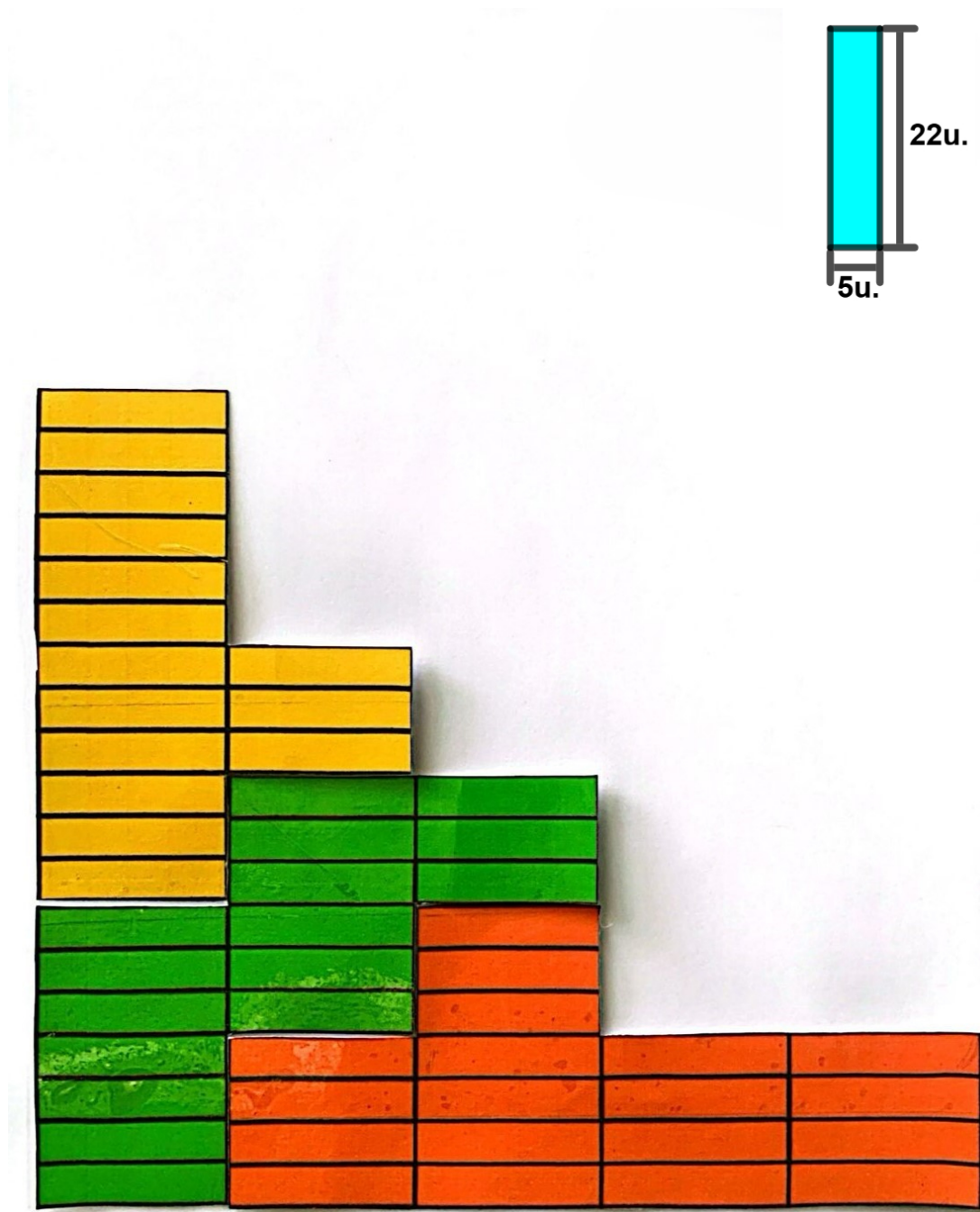
Figura 5.27 – Quebra-cabeça



Fonte: Autora.

Em seguida os estudantes devem montar as peças de modo a obter um quadrado com os retângulos de lados de medida 22 e 5 unidades ( $u$ ). A Figura 5.28 mostra o início do processo de montagem.

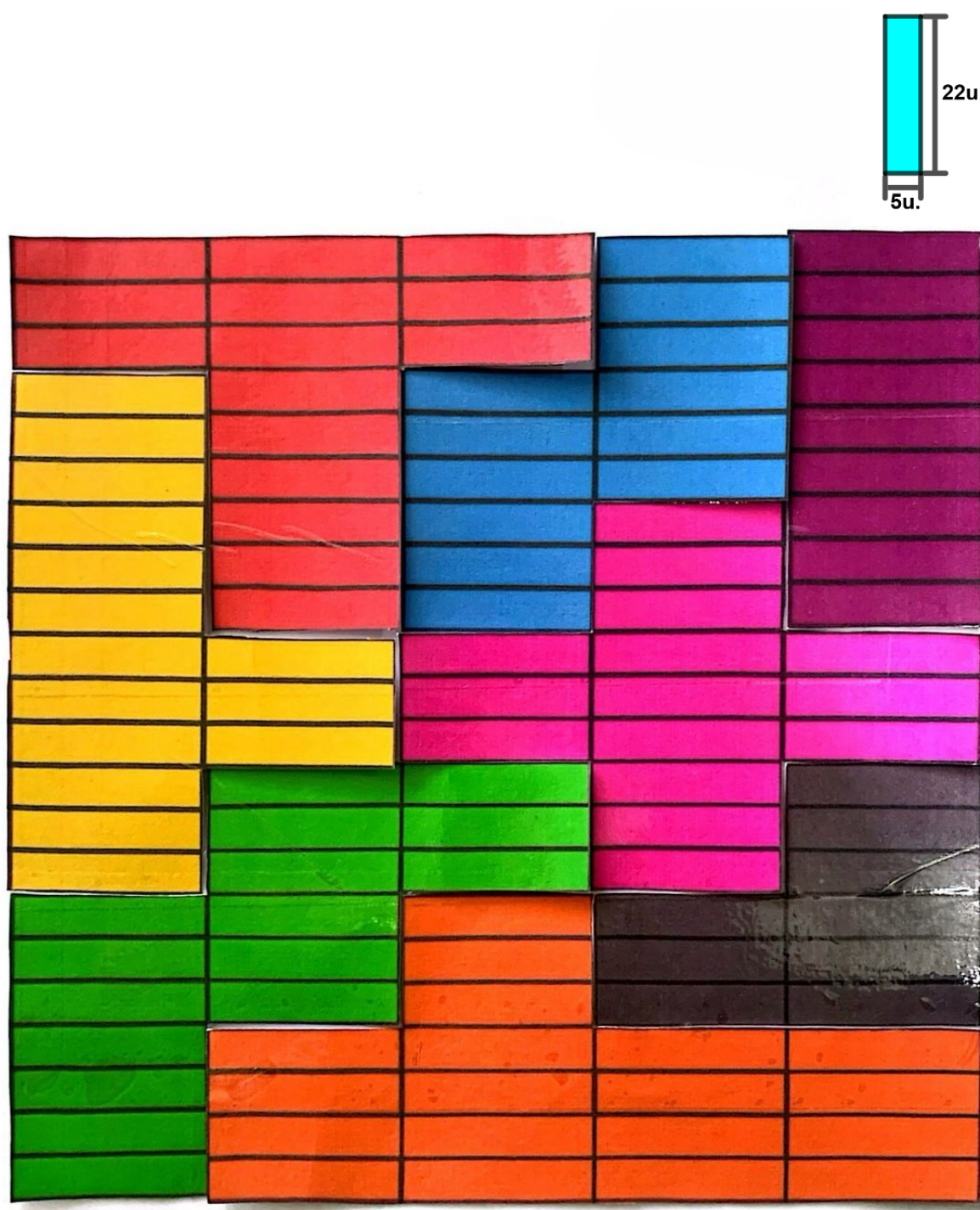
Figura 5.28 – Quebra-cabeça início da montagem



Fonte: Autora.

Após concluírem a montagem, como mostra a Figura 5.29, os estudantes deverão realizar os cálculos de acordo com as medidas apresentadas. Em uma das laterais temos 22 vezes a medida de  $5u$ , o que equivale a  $22 \cdot 5 = 110u$ , enquanto a outra lateral possui 5 vezes a medida de  $22u$ , portanto  $5 \cdot 22 = 110u$ . Logo o mínimo múltiplo comum de 5 e 22 é 110.

Figura 5.29 – Quebra-cabeça pronto



Fonte: Autora.

**Avaliação:** Deve ocorrer durante o desenvolvimento da atividade verificando as principais dúvidas e dificuldades, além da compreensão dos estudantes sobre o conteúdo. O professor pode propor outras atividades caso seja necessário.

### 5.3 PROPOSTA DE ATIVIDADE: CRIVO DE ERATÓSTENES COM SEIS COLUNAS E NÚMEROS PRIMOS

Um dos recursos utilizados em sala de aula para a apresentação e identificação dos números primos é o crivo de Eratóstenes, que consiste em eliminar todos os múltiplos restando apenas os números primos.

Utilizando uma estratégia diferente da usual com 10 colunas, vamos propor a utilização do crivo com apenas seis colunas. Existem vantagem ao utilizar esse modo, pois além de eliminar os múltiplos com mais facilidade o professor pode explorar com os alunos outros conceitos, como retas paralelas.

Apresentaremos algumas atividades que visam aprimorar a compreensão e fixação dos números primos em sala de aula, oferecendo uma alternativa visualmente rica e conceitualmente integrada ao currículo do 6º ano do Ensino Fundamental. O crivo de Eratóstenes com seis colunas foi baseado em Omejc (1972).

Para a consolidação do aprendizado, são propostas mais duas atividades sobre os números primos: jogo de trilha e bingo. As atividades podem ser um recurso para que o estudante identifique e reconheça quais são os números primos.

**Objetivo Geral:** Conhecer e identificar números primos.

**Objetivos Específicos:**

1. Conhecer os números primos;
2. Identificar os múltiplos de outros números;
3. Estimular a curiosidade do estudante;
4. Fixar conteúdos;
5. Diferenciar números primos e compostos.

**Contexto didático:** As atividades podem ser utilizadas durante a aula de matemática para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental quando abordar o tema números primos e compostos.

**Quantidade de aula:** 2 aulas de 45 minutos.

**Material didático:**

- Quadro de números até 120, disponível no Apêndice B;
- Lápis para colorir;
- Jogo de trilha, disponível no Apêndice B;

- Dois Dados;
- Cartelas de bingo disponíveis no Apêndice B.

**Metodologia:** O encaminhamento da aula ocorrerá de maneira explicativa e dialogada. Cada estudante receberá um quadro numerado de 1 a 120, dividido em 6 colunas. O professor deve solicitar aos estudantes que o número 1 seja riscado, pois não atende as condições necessárias de um número primo. Em seguida solicita aos alunos que devem colorir os múltiplos de 2, exceto o próprio 2. Procede de maneira semelhante aos próximos números que não estão coloridos, 3 depois o 5, 7 e 11.

O professor pode pedir aos estudante que identifiquem os múltiplos de 13, 17, 19 até que percebam que não existe mais números para colorir. Neste momento, mostra aos estudante que o processo não precisa ocorrer para todos os números, mas apenas para os números menores que a maior raiz quadrada exata até os valores solicitados. Como  $11 \cdot 11 = 121$  então a maior raiz quadrada exata é 10, logo ao colorir todos os múltiplos dos números primos até 10, já identificou todos os primos até 120.

Após essa atividade, para a fixação o professor deve propor uma “corrida dos primos”, utilizando um jogo de trilha numerado de 1 a 100. Primeiramente ao jogarem os dados o estudante deve realizar a soma dos números das duas faces dos dados voltados para cima e verificar no tabuleiro a casa onde parou. Caso o número seja primo deve avançar 5 casas, caso contrário deve permanecer no número em que parou até a próxima jogada.

Em seguida, utilizando as cartelas de bingo o professor pode jogar com os estudantes o bingo dos primos. Ao sortear números primos os alunos devem marcá-lo em sua cartela. Caso o professor faça o sorteio de um número composto o aluno não deverá marcar na sua cartela, mesmo que contenha o número. Ganha quem marcar primeiro 3 números primos corretamente.

### 5.3.1 PRIMEIRA ATIVIDADE: CRIVO DE ERATÓSTENES COM SEIS COLUNAS

Determine os números primos utilizando o Quadro 5.1.

**Atividade:** O professor deve solicitar aos estudantes que riscuem o número 1. Em seguida, começar a colorir os múltiplos de 2 exceto o próprio 2. Do mesmo modo com o número 3. O Quadro 5.2 e o Quadro 5.3 mostram como devem ficar após os alunos marcarem os múltiplos de 2 e de 3.

Quadro 5.1 – Quadro de números

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Quadro 5.2 – Múltiplos de 2

X	②	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Quadro 5.3 – Múltiplos de 2 e 3

X	②	③	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

O aluno deve seguir colorindo o quadro até restar apenas primos. Veja o Quadro 5.4 com a representação de todos os múltiplos coloridos.

Quadro 5.4 – Números primos até 120

X	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Em seguida o professor pode solicitar aos alunos que coleem o quadro em seus cadernos para futuras consultas aos números primos em caso de dúvidas.

### 5.3.2 SEGUNDA ATIVIDADE: CORRIDA DOS PRIMOS

Esta atividade propõe um jogo de tabuleiro (disponível no Apêndice B) no qual o professor pode imprimir antecipadamente. Sugere-se dividir a turma em grupos, com 3 ou 4 integrantes cada um. Cada grupo receberá dois dados e um tabuleiro. O objetivo é que na sua vez, cada aluno lance os dois dados e realize a soma dos valores que aparecem nas faces voltadas para cima. Por exemplo, no primeiro dado lançado saiu o número 3 e no segundo dado 5, então  $5 + 3 = 8$ . Assim, o aluno deve percorrer 8 casas consecutivas sobre o tabuleiro. Se o aluno parar sobre um número primo, ele ganhará a vantagem de avançar mais 5 números. Caso o número no qual o aluno parou não seja primo, deve permanecer no mesmo lugar até a próxima jogada. Vence aquele que alcançar primeiro a chegada. A Figura 5.30 mostra o modelo do tabuleiro.

Figura 5.30 – Modelo da trilha

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
15										27
14		62	63	64	65	66	67	68		28
13		61						69		29
12		60		92	93	94		70		30
11		59		91		95		71		31
10		58		90		96		72		32
9		57		89		97		73		33
8		56		88		98		74		34
7		55		87		99		75		35
6		54		86		100		76		36
5		53		85		CHEGADA		77		37
4		52		84				78		38
3		51		83	82	81	80	79		39
2		50								40
1		49	48	47	46	45	44	43	42	41

Fonte: Autora.

### 5.3.3 TERCEIRA ATIVIDADE: BINGO DOS PRIMOS

Esta é uma versão do bingo mas com regras que reforcem o estudo dos números primos. Utilizando as cartelas disponíveis no Apêndice B, o professor pode realizar o sorteio de números de 1 até 99 para testar os conhecimentos dos discentes sobre os números primos. A Figura 5.31 mostra alguns modelos de cartelas.

Figura 5.31 – Modelo de cartelas de bingo

BINGO DOS PRIMOS			
79	4	14	37
22	7	18	9
15	32	23	68
11	91	77	53

BINGO DOS PRIMOS			
5	6	9	69
47	33	29	42
39	17	87	89
23	32	75	81

BINGO DOS PRIMOS			
19	48	15	5
39	49	85	21
53	43	79	74
7	1	38	99

BINGO DOS PRIMOS			
8	79	45	29
43	24	44	63
72	16	11	47
95	17	86	55

BINGO DOS PRIMOS			
13	6	16	83
27	2	33	42
61	51	69	17
78	41	88	93

BINGO DOS PRIMOS			
7	4	22	3
10	66	23	99
35	29	96	46
43	57	34	97

BINGO DOS PRIMOS			
12	49	52	97
43	93	37	39
27	96	11	81
5	58	15	83

BINGO DOS PRIMOS			
1	18	46	11
20	41	89	26
37	65	97	50
8	32	77	23

Fonte: Autora.

Durante o sorteio o discente deve marcar apenas os números primos. O primeiro aluno que marcar três números primos na rodada será o vencedor. O professor pode perceber durante a

atividade quais são as dificuldades dos estudantes. Opcionalmente pode-se deixar os estudantes consultarem o crivo de Eratóstenes construído por eles.

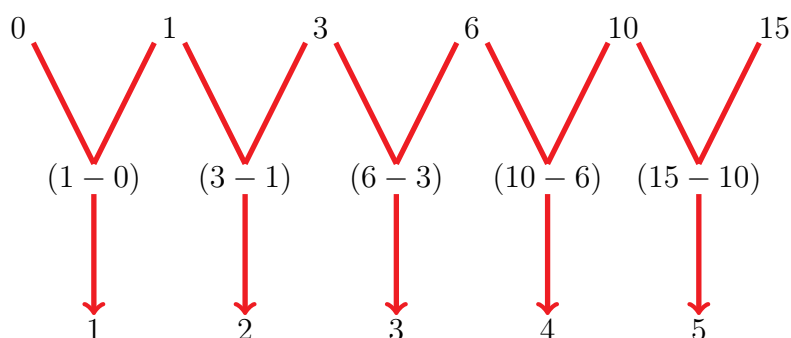
**Avaliação:** Deve ocorrer de maneira simultânea com a realização das atividades. O professor pode identificar os estudantes que não compreenderam o conteúdo e propor novas atividades.

## 5.4 PROPOSTA DE ATIVIDADE: NÚMEROS TRIANGULARES

Os números triangulares são contagens que podem ser representados por um triângulo como abordado no Capítulo 4. Os primeiros 6 números triangulares são 1, 3, 6, 10, 15 e 21. Esses valores são encontrados a partir da soma de números naturais consecutivos, por exemplo,  $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$  e, portanto, o 6º número triangular é 21.

Outro fato é a diferença entre dois números triangulares consecutivos:

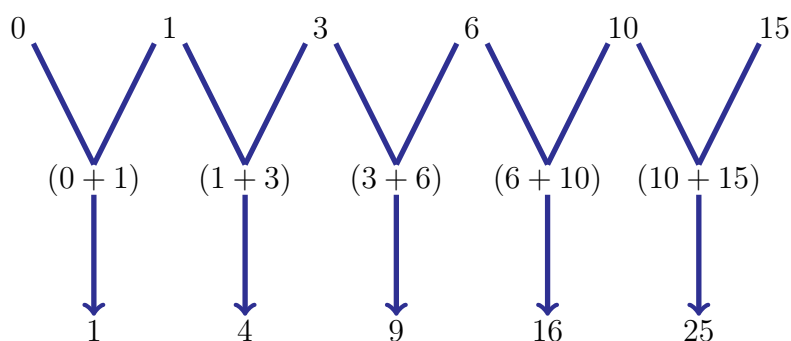
Figura 5.32 – Diferença entre dois números triangulares consecutivos



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Observa-se que a diferença entre os dois números triangulares consecutivos resulta nos números naturais. Quando fazemos a soma desses números obtemos números quadrados como mostra a Figura 5.33.

Figura 5.33 – Soma de números triangulares consecutivos



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Nesta atividade abordaremos uma relação entre números triangulares e a combinatória baseadas em Bacche (2023).

**Objetivo Geral:** Abordar números triangulares e sua relação com a combinatória.

**Objetivos Específicos:**

1. Compreender e identificar números triangulares;
2. Encontrar relações entre números triangulares e a combinatória;
3. Realizar cálculos que envolvem números triangulares e combinatória;
4. Estimular a aprendizagem;
5. Fixar conteúdos.

**Contexto didático:** Esta aula foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de matemática sobre princípio fundamental da contagem e combinações no 8º ano do Ensino Fundamental ou na 2ª série do Ensino Médio em que já foi abordado o tema números triangulares e alguns exercícios com combinatória.

**Quantidade de aula:** 1 aula de 45 minutos.

**Material Didático:**

- Fichas com desafios impressas pelo professor, disponível no Apêndice C;
- Lápis, borracha e papel para rascunho.

**Metodologia:** O encaminhamento da aula ocorrerá de forma explicativa e dialogada. Para o desenvolvimento da aula o professor pode separar os estudantes em grupos para resolver os exercícios. Serão três atividades que o professor pode optar por fazê-las em sequência com toda a turma.

O professor deverá disponibilizar aos alunos uma ficha com desafio que juntos devem discutir e resolver o problema. Após acabar o tempo resolver junto com os estudantes e verificar suas soluções e os métodos utilizados pelos alunos.

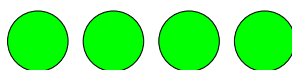
#### 5.4.1 DESAFIO: APERTO DE MÃO

Ana estava muito animada para a festa de aniversário de seu amigo Bernardo. Além do bolo e dos presentes, ela queria descobrir quantos apertos de mão aconteceriam durante a festa. Ao chegar na festa, Ana, Bernardo, Carol, Davi e Edu começaram a se cumprimentar com calorosos apertos de mão. Enquanto todos se divertiam, Ana não conseguia tirar da cabeça a pergunta: “Quantos apertos de mão foram dados até agora?”.

1. Utilize os conteúdos estudados sobre números triangulares para ajudar Ana a resolver esse problema. Então quantos apertos de mão acontecem no total?
2. Se tivéssemos 10 pessoas na festa, qual seria o número de apertos de mão?
3. E para  $n$  pessoas?

**Solução da Questão 1:** Na festa estão cinco pessoas que deverão se cumprimentar com aperto de mão. Representaremos cada aperto de mão que acontece com um círculo como mostra a Figura 5.34. A primeira pessoa a cumprimentar deverá apertar a mão das outras quatro pessoas e se retira.

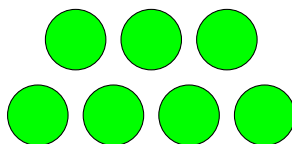
Figura 5.34 – Apertos de mão: 4



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Agora, das quatro pessoas, uma delas aperta a mão das outras três e se retira. Então, mais três apertos de mão contecem. Já temos  $4 + 3$  apertos de mão até o momento. Novamente podemos representar os apertos de mão como mostra a Figura 5.35.

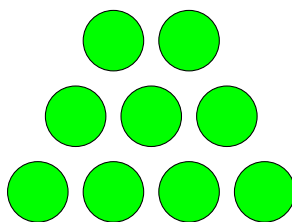
Figura 5.35 – Apertos de mão:  $4+3$



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Continuando o processo, das três pessoas restantes uma delas cumprimenta as outras duas e se retira. Então, dois apertos de mão acontecem, logo já aconteceram  $4 + 3 + 2$  cumprimentos. A Figura 5.36 representa os apertos de mão.

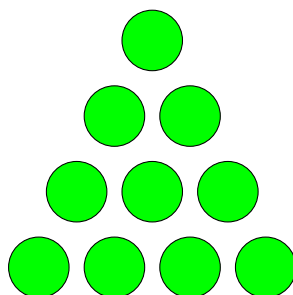
Figura 5.36 – Apertos de mão:  $4+3+2$



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Para concluir as duas pessoas restantes se cumprimentam com um aperto de mão. A Figura 5.37 representa o total de apertos de mão.

Figura 5.37 – Apertos de mão no total entre 5 pessoas



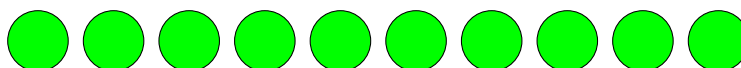
Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Logo, o total de apertos de mão é  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ . O que temos aqui é um número triangular  $t_4 = 10$ . O número de apertos de mão entre cinco pessoas, onde cada uma aperta a mão das outras pessoas uma única vez é 10.

A mesma atividade pode ser resolvida utilizando os conhecimentos em combinatória. Temos 5 pessoas presentes e cada uma delas pode cumprimentar com aperto de mão uma única vez as demais pessoas. Essa situação pode ser resolvida como  $C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = t_4 = 10$ .

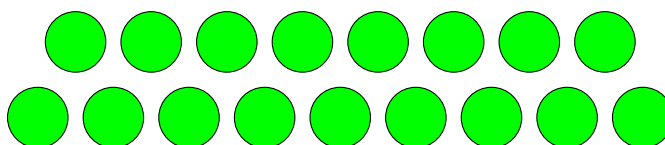
**Solução da Questão 2:** Procedemos de maneira semelhante a solução anterior. No caso de 10 pessoas, a primeira cumprimenta as outras nove e se retira. A Figura 5.38 mostra o número de apertos de mão até o momento com círculos.

Figura 5.38 – Primeiros apertos de mão



Fonte: Autora.

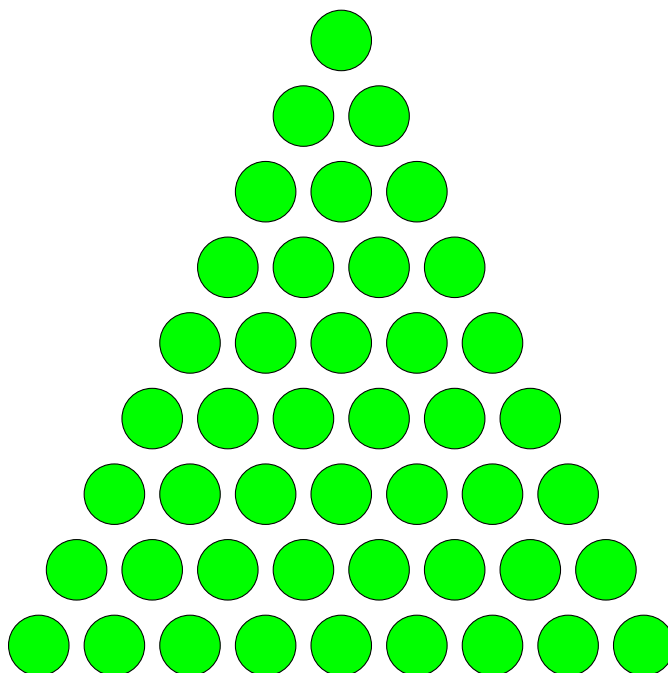
Agora, uma das nove pessoas restantes cumprimenta com aperto de mão as oito pessoas e se retira. Temos agora  $9 + 8$  apertos de mão. A Figura 5.39 mostra esse caso.

Figura 5.39 – Apertos de mão:  $9+8$ 

Fonte: Autora.

Repetimos o processo para as oito pessoas restantes, uma delas cumprimenta com aperto de mão as outras sete pessoas e se retira. Em seguida, uma das sete pessoas cumprimenta as seis pessoas restantes e se retira. Uma das seis pessoas cumprimenta as outras cinco restantes e se retira. Agora com as cinco pessoas restantes repetimos o processo mostrado na solução da Questão 1. Logo, o total de apertos de mão com 10 pessoas pode ser representado como mostra a Figura 5.40.

Figura 5.40 – Apertos de mão no total entre 10 pessoas



Fonte: Autora.

Portanto o total de apertos de mão entre 10 pessoas é dado por

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 = t_9.$$

No link é possível verificar outros casos de apertos de mão possíveis.

<<https://www.geogebra.org/m/gesb4smd>>.

Para resolver o problema utilizando a combinatória temos que  $C_2^{10} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = t_9 = 45$ .

**Solução da Questão 3:** Caso existissem  $n$ , com  $n \geq 2$ , pessoas o número de apertos de mão também poderia ser representado utilizando os números triangulares. Se uma das  $n$  pessoas cumprimentasse as outras  $(n - 1)$ , já aconteceriam  $(n - 1)$  apertos de mão. Repetindo esse processo até finalmente chegar no último aperto de mão então teríamos um total de:

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n - 1)}{2} = t_{n-1}.$$

Para  $n$  pessoas temos  $t_{n-1}$  apertos de mão.

Mostraremos esta afirmação por indução em  $n$ .

Para o caso de 2 pessoas o número de apertos de mão será,

$$1 = t_1.$$

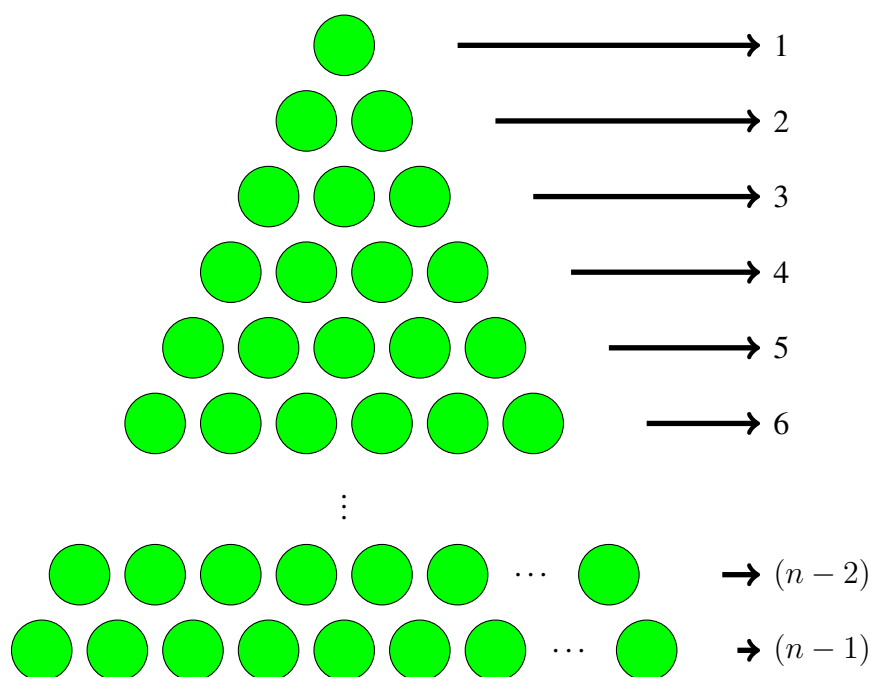
Suponhamos que para algum  $n \geq 2$ , temos  $t_{n-1}$  apertos de mão entre as  $n$  pessoas. Mostremos que temos  $t_n$  apertos de mão entre  $n + 1$  pessoas.

Considerando que uma dessas  $n + 1$  pessoas cumprimente todas as  $n$  pessoas presentes. Ocorreram então  $n$  apertos de mão. Portanto, ficamos com  $n$  pessoas para dar apertos de mão. Pela hipótese indutiva temos  $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1 = t_{n-1}$  apertos de mão entre as  $n$  pessoas. Assim, em total teremos  $n + t_{n-1} = t_n$  apertos de mão entre as  $n + 1$  pessoas.

Logo, pelo princípio de indução finita a propriedade é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq 2$ .

A Figura 5.41 mostra a representação para o caso de apertos de mão entre  $n$  pessoas.

Figura 5.41 – Apertos de mão por  $n$  pessoas



Fonte: Autora.

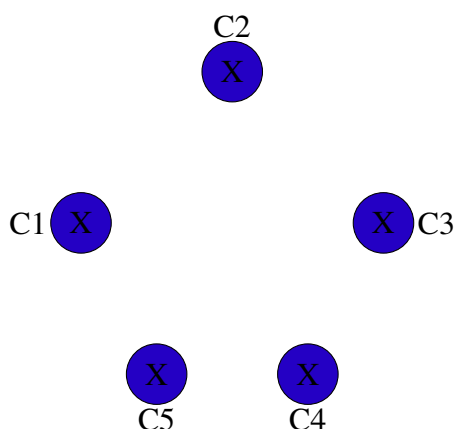
Utilizando a combinatória para resolver a atividade temos que,

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = t_{n-1}.$$

#### 5.4.2 DESAFIO: REDE DE MALHA DE ESTRADAS

1. Dadas 5 cidades, representadas pelos círculos  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  e  $C_5$ , conforme mostra a Figura 5.42, quantas estradas precisam ser construídas para que haja uma conectividade rodoviária direta de qualquer cidade para outra cidade?

Figura 5.42 – Posição das cidades  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$ ,  $C4$  e  $C5$

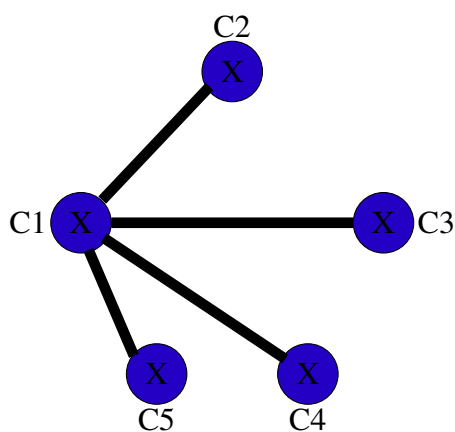


Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

2. Se fossem dadas 7 cidades?
3. Caso existissem  $n$  cidades?

**Solução da Questão 1:** Para resolver esse problema os estudantes podem iniciar escolhendo uma das cidades e desenhar as possíveis estradas que ligam as outras quatro cidades como mostra a Figura 5.43.

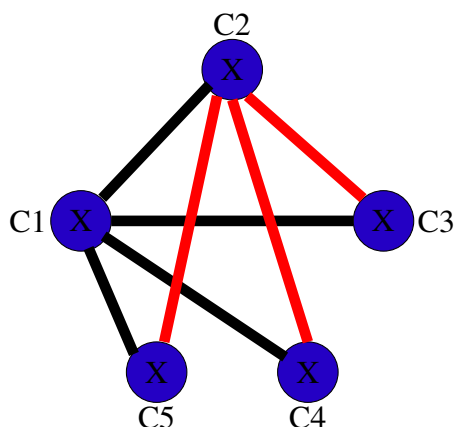
Figura 5.43 – Estradas partindo da cidade  $C1$



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Logo, temos um total de 4 estradas partindo da cidade  $C1$ . Continuando o processo agora com a cidade  $C2$ , como mostra a Figura 5.44, temos mais três estradas.

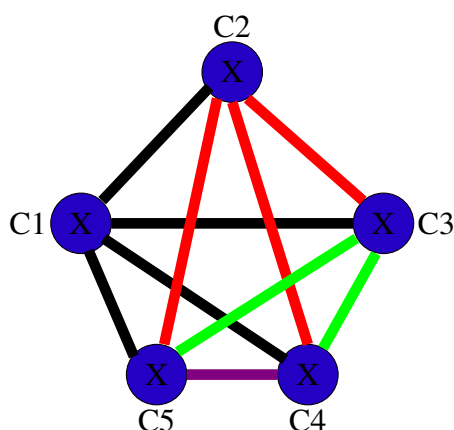
Figura 5.44 – Estradas partindo das cidades C1 e C2



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Repetindo o processo para as cidades 3 e 4, obtemos um total de  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  estradas. A Figura 5.45 mostra essas estradas.

Figura 5.45 – Total de estradas da malha



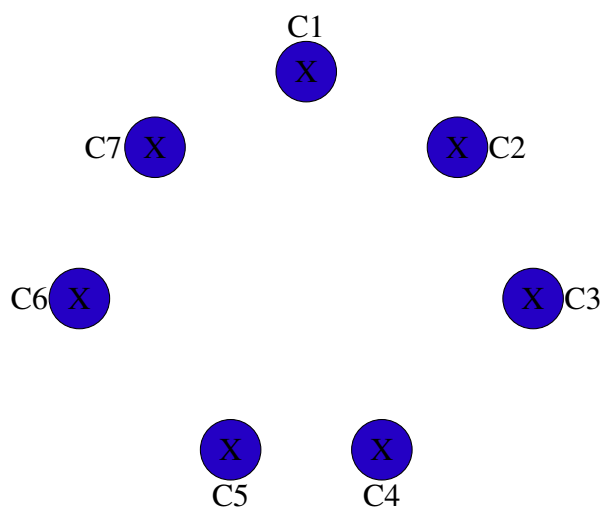
Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

O número de estradas entre 5 cidades também está associado aos números triangulares, ou seja,  $4 + 3 + 2 + 1 = 10 = t_4$ .

Essa mesma atividade pode ser resolvida utilizando a combinatória. Temos 5 cidades que precisam de apenas uma estrada que ligue diretamente as outras cidades, portanto

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = t_4 = 10.$$

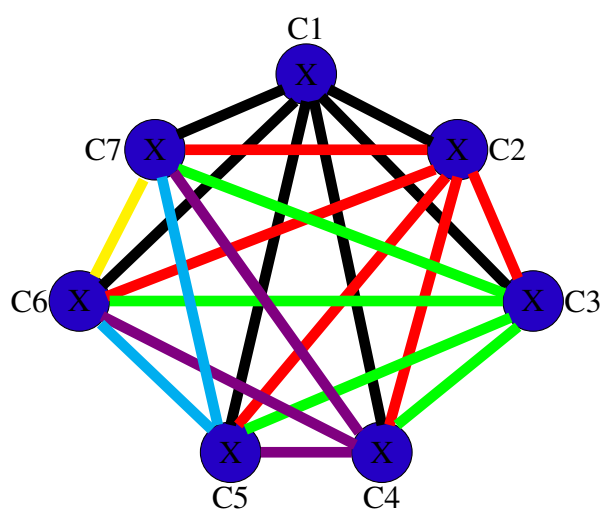
**Solução da Questão 2:** Agora tem-se 7 cidades e é preciso determinar o número de estradas que precisam ser construídas para que haja uma conexão direta para a outra cidade. Podemos proceder como na questão anterior. Na Figura 5.46 temos as 7 cidades.

Figura 5.46 – Posição das cidades  $C1, C2, C3, C4, C5, C6$  e  $C7$ 

Fonte: Autora.

Fazendo as ligações possíveis como mostra a Figura 5.47, temos  $6+5+4+3+2+1 = 21$  estradas possíveis. Esse número representa o número triangular  $t_6$ .

Figura 5.47 – Caminhos possíveis para 7 cidades



Fonte: Autora.

Portanto, o número de estradas possíveis é  $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = t_6 = 21$ .

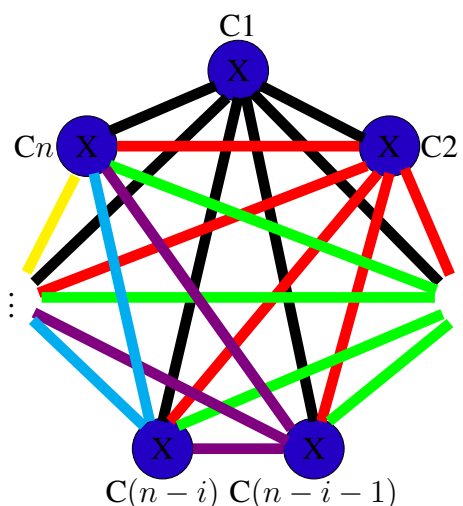
Utilizando a combinatória para calcular o número de estradas necessárias entre as 7 cidades mencionadas temos que  $C_2^7 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = t_6 = 21$ .

**Solução da Questão 3:** Como aconteceu na atividade dos apertos de mão, temos que o resultado para  $n$  cidades é:

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 = t_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

A Figura 5.48, ilustra o caso de  $n$  estradas. A demonstração ocorre por indução em  $n$  como na atividade anterior.

Figura 5.48 – Caminhos possíveis para  $n$  cidades



Fonte: Autora.

### 5.4.3 DESAFIO: TIRAS NUMÉRICAS

Considere uma tira de papel como mostrada na Figura 5.49. Quantas tiras com números diferentes você pode fazer, se você pode apenas cortar a tira, mas não juntar tiras menores cortadas? Por exemplo, é possível fazer 12, 2345 ou 789 e assim por diante. No entanto não é permitido o número 15, pois você precisará cortar duas tiras menores, 1 e 5, e juntá-las.

Figura 5.49 – Tira numérica



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

**Atividade:** Vamos considerar as diferentes tiras a serem formadas. Primeiro recortamos a tira em números de um dígito como mostra a Figura 5.50.

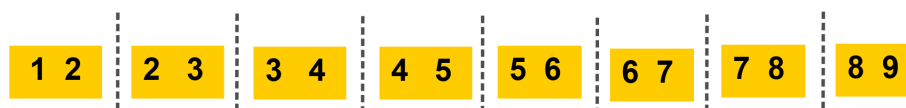
Figura 5.50 – Recortes de um dígito



Fonte: Autora.

Logo, há 9 opções de tiras com recortes de um dígito. Outra opção é recortes com dois dígitos, como mostra a Figura 5.51. Neste caso temos 8 opções de tiras com dois dígitos.

Figura 5.51 – Recortes de dois dígitos



Fonte: Autora.

Continuando o processo de cortes da tira agora com 3 dígitos, obtemos 7 opções como mostra a Figura 5.52.

Figura 5.52 – Recortes de três dígitos



Fonte: Autora.

Para o caso de 4 dígitos temos agora 6 opções de cortes na tira como ilustrado na Figura 5.53.

Figura 5.53 – Recortes de quatro dígitos



Fonte: Autora.

Com tiras de 5 dígitos temos 5 opções de tiras mostradas na Figura 5.54.

Figura 5.54 – Recortes de cinco dígitos



Fonte: Autora.

Na Figura 5.55 temos as tiras de 6 dígitos, 7 dígitos e 8 dígitos.

Figura 5.55 – Recortes na tira numérica



(a) Recorte de seis dígitos



(b) Recorte de sete dígitos



(c) Recortes de 8 dígitos

Fonte: Autora.

E também a tira sem recortes equivale a 1 opção de tira. Vide Figura 5.49. Portanto, o número total de tiras é dado pela soma  $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 = t_9$ . Logo a solução da questão está associada a números triangulares e o professor pode abordar diferentes tiras numéricas com os estudantes para uma melhor compreensão do tema.

**Avaliação:** Ocorre de maneira simultânea com a resolução das atividades pelos estudantes, com objetivo de identificar dificuldades e diagnosticar a necessidade de atividades complementares sobre o tema.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos aplicações na aritmética que podem ser adotadas para tornar o conhecimento mais atrativo, utilizando polígonos e padrões para sistematizar operações básicas como adição e multiplicação, além de abordar características de alguns polígonos como vértices e nomenclaturas. O crivo de Eratóstenes, conteúdo apresentado a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, pode ser apresentado de um modo diferente do usual contribuindo para a fixação e identificação dos números primos. O uso de modelos visuais para trabalhar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum, como recurso para o ensino do tema apresenta o potencial de alcançar de forma mais ampla os estudantes, favorecendo a compreensão dos processos.

A capacidade de visualizar números triangulares e números perfeitos por meio de ferramentas como o GeoGebra mostra-se um recurso valioso para a compreensão desses conceitos matemáticos. Acreditamos que a visualização matemática, quando utilizada de forma estratégica, pode esclarecer conceitos complexos e tornar a matemática mais acessível aos estudantes.

Buscamos, ao elaborar as atividades, oferecendo experiências que explorassem múltiplas abordagens, incluindo a tecnologia com o GeoGebra, jogos matemáticos e a resolução de problemas, de modo a abranger os vários estilos de aprendizagem (visual, auditivo, cinestésico, leitura e escrita).

Dessa forma, entendemos que é fundamental aprofundar nosso estudo, pesquisa e desenvolvimento de abordagens alternativas que possibilitem professores e alunos variadas interpretações sobre os temas propostos no trabalho.

Finalmente, espera-se que este trabalho contribua significativamente para a prática pedagógica em sala de aula, ao tornar os conteúdos abordados mais acessíveis e estimulantes para os discentes. Queremos também despertar no leitor curiosidades sobre os temas apresentados.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, S. W. C. **Uma extensão do MDC e MMC dos inteiros aos comensuráveis**. 42 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amapá, Macapá, Amapá, 2016. 17
- BACCHE, K. A. **Triangular numbers & combinations**. 2023. Disponível em: <<https://www.mathematicsmagazine.com/corresp/KiranBacche/TriangularNumbersandCombinations.pdf>>. Acesso em: 18 abr. 2025. 109, 110, 111, 112, 115, 116, 118, 133, 134
- BRANDÃO, C. L. **Números perfeitos**. 44 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2021. 17
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <[https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal.pdf](https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf)>. Acesso em: 18 abr. 2025. 14, 15, 16, 18, 20, 92
- BRASIL. **Parâmetro Curricular Nacional: matemática**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 18 abr. 2025. 14, 15, 18, 20
- CHICONELLO, L. A. **Números Figurados e as Sequências Recursivas: uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados**. 86 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, São Paulo, 2013. 17
- CRUZ, S. O. **Números perfeitos**. 69 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Paraíba, 2013. 17
- DUNCAN, D. R.; LITWILLER, B. H. Number-lattice polygons and patterns: Sums and products. **National Council of Teachers of Mathematics**, v. 37, n. 5, p. 14–15, 1990. 17, 20, 21, 86
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Unicamp, 2004. 844 p. 76
- FIORELLI, J. de O. **Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum generalizados aplicados no Ensino Básico**. 72 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2017. 17
- GEOGEBRA. **GeoGebra**. 2025. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 29 set. 2025. 15
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. 1<sup>a</sup>. ed. Porto Alegre: UFRGS, 2009. 120 p. 18
- HEFEZ, A. **Aritmética**. 3<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022. 285 p. 17, 35, 36, 42, 57, 77, 78
- IBRAHIM, S. **Interpretações algébricas e combinatória dos números triangulares**. 55 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2022. 17
- KOSHY, T. The euclidean algorithm via matrices and a calculator. **The Mathematical Gazette**, n. 489, p. 570–574, 1996. 17, 38

LIDAN, E.; PJANIĆ, K. Evaluation of three visual models for the greatest common factor and the least common multiple. v. 8/9, p. 7–21, 09 2020. 17, 42, 46, 52, 93

MARIANO, J. C. F. **Uma proposta didática para o ensino de mmc e mdc no Ensino Médio**. 97 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, Espírito Santo, 2024. 17

MATHVENTURES. **Finding the Least Common Multiple Visually, without Calculation**. MathVentures, 2008. Disponível em: <<https://www.mathematicool.org/math/mathed/Arithmetic/FindingLCM.htm>>. Acesso em: 18 abr. 2025. 93

MATOS, R. J. P. de. **O Algoritmo de Euclides e uma generalização da sequência de Fibonacci**. 40 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, 2018. 17

MELO, J. B. **Os números perfeitos e teorema de Euclides-Euler**. 53 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, Ceará, 2021. 17

MILLER, R. L. On proofs without words. **Whitman College**, p. 25, 2012. 17, 71

NELSEN, R. B. Visual gems of number theory. **Math Horizons**, n. 15, p. 31, 2008. 17, 65, 73, 77

OMEJC, E. A different approach to the sieve of eratosthenes. **The Arithmetic Teacher**, v. 19, p. 192–196, 1972. 17, 57, 59, 104

PARANÁ. **Referencial Curricular do Paraná: princípios, direitos e orientações - Ensino Fundamental**. Paraná: Secretaria de Educação e do Esporte do Estado do Paraná, 2018. Disponível em: <[https://www.inesul.edu.br/atividades/arquivos/Material1f5g4492552\\_1585631919.pdf](https://www.inesul.edu.br/atividades/arquivos/Material1f5g4492552_1585631919.pdf)>. Acesso em: 29 set. 2025. 15

PARANÁ. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Paraná: Secretaria de Educação e do Esporte do Estado do Paraná, 2021. Disponível em: <[https://professor.escoladigital.pr.gov.br/sites/professores/arquivos\\_restritos/files/documento/2022-02/ensino\\_medio\\_referencial\\_curricular\\_vol2\\_vf.PDF](https://professor.escoladigital.pr.gov.br/sites/professores/arquivos_restritos/files/documento/2022-02/ensino_medio_referencial_curricular_vol2_vf.PDF)>. Acesso em: 18 abr. 2024. 16, 18

PARANÁ, G. do Estado do. **Currículo da Rede Estadual Paranaense - Matemática**. Curitiba: SEED, 2021. Disponível em: <[https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos\\_restritos/files/documento/2021-05/crep\\_matematica\\_2021\\_anos finais.pdf](https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-05/crep_matematica_2021_anos finais.pdf)>. Acesso em: 18 abr. 2025. 16

PRIELIPP, R. W. Perfect numbers, abundant numbers, and deficient numbers. **National Council of Teachers of Mathematics**, v. 63, n. 8, p. 692–696, 1970. 17, 77, 82

SANTOS, J. C. Números perfeitos. **Ciência Elementar**, n. 4, 2020. 79

SANTOS JÚNIOR, R. J. dos. **Números perfeitos e amigáveis**. 69 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, Pernambuco, 2020. 17

SANTOS, P. D. B. dos. **Relação entre máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e o diagrama de Venn**. 99 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, 2017. 17

SILVA, A. S. **Um estudo sobre aplicação do algoritmo de Euclides**. 40 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Paraíba, 2014. 17

WORWALL. **Crie lições melhores e mais rapidamente.** 2025. Disponível em: <<https://wordwall.net/pt>>. Acesso em: 29 set. 2025. 91

## APÊNDICE A – ATIVIDADE: POLÍGONOS E PADRÕES

Utilize o material abaixo para aplicar a metodologia ativa “Rotação por Estação” no tema polígonos e padrões.

**1ª Estação – fichas com hexágonos:** Com o auxílio das fichas previamente impressas, os estudantes executarão a seguinte sequência de ações: lançar um dado, preencher o círculo inicial adjacente à palavra “início”, realizar as operações aritméticas subsequentes até alcançar o círculo posicionado no hexágono. Ao atingir o hexágono, proceder ao preenchimento de todos os círculos localizados nos vértices e na área interna do polígono, utilizando o valor da razão numérica especificada no centro do hexágono.

Figura A.1 – Ficha de atividade – 1

Nomes: _____		
P= _____ I= _____	P= _____ I= _____	P= _____ I= _____

Fonte: Autora.

Figura A.2 – Ficha de atividade – 2

Nomes:	
P= _____ I= _____	P= _____ I= _____

Fonte: Autora.

Figura A.3 – Ficha de atividade – 3

Nomes:		
P= _____ I= _____	P= _____ I= _____	P= _____ I= _____

Fonte: Autora.

**2ª Estação – caça-octógonos:** Encontre no caça-octógonos, os octógonos que obedecem a relação estudada  $P = 2I$ . O professor pode atribuir pontuações aos octógonos encontrados de acordo com a razão presente no polígono.

Figura A.4 – Caça-octógonos

Nome: \_\_\_\_\_

### Caça-octógonos

5	5	12	13	19	75	4	5	6	12	76	82	1	2	7	3
19	26	33	40	12	20	7	8	9	10	13	3	4	5	6	10
47	54	61	68	42	55	11	12	13	14	22	7	8	9	10	11
14	75	82	2	4	11	23	15	16	47	69	96	11	12	69	33
21	21	6	8	10	12	19	44	42	99	98	72	69	55	14	14
33	14	14	16	18	20	14	21	36	6	7	13	8	10	18	20
99	3	69	22	24	47	59	96	8	9	10	11	69	89	26	28
12	5	4	93	24	30	97	6	12	13	14	15	9	69	44	34
28	6	86	36	42	48	54	7	96	16	17	83	18	17	41	96
63	69	9	60	66	72	78	51	54	75	82	85	33	15	16	34
45	48	55	78	84	90	66	54	12	13	16	25	17	18	19	20
12	8	16	33	30	20	14	55	19	22	25	28	21	22	23	24
24	32	40	48	3	45	46	1	31	34	37	40	0	25	26	29
56	64	72	80	47	48	49	50	62	43	46	22	51	21	49	73
16	88	96	1	51	52	53	54	74	91	8	63	7	40	83	92
22	3	6	37	90	55	56	53	38	52	5	10	39	20	6	41
9	12	15	18	36	6	4	8	20	15	20	25	30	93	95	8
21	24	27	30	4	12	16	20	24	35	40	45	50	19	5	23
45	33	36	89	55	28	32	36	40	20	55	60	31	11	42	7
89	1	3	2	13	27	44	48	82	61	9	30	10	72	9	10

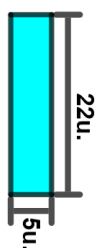
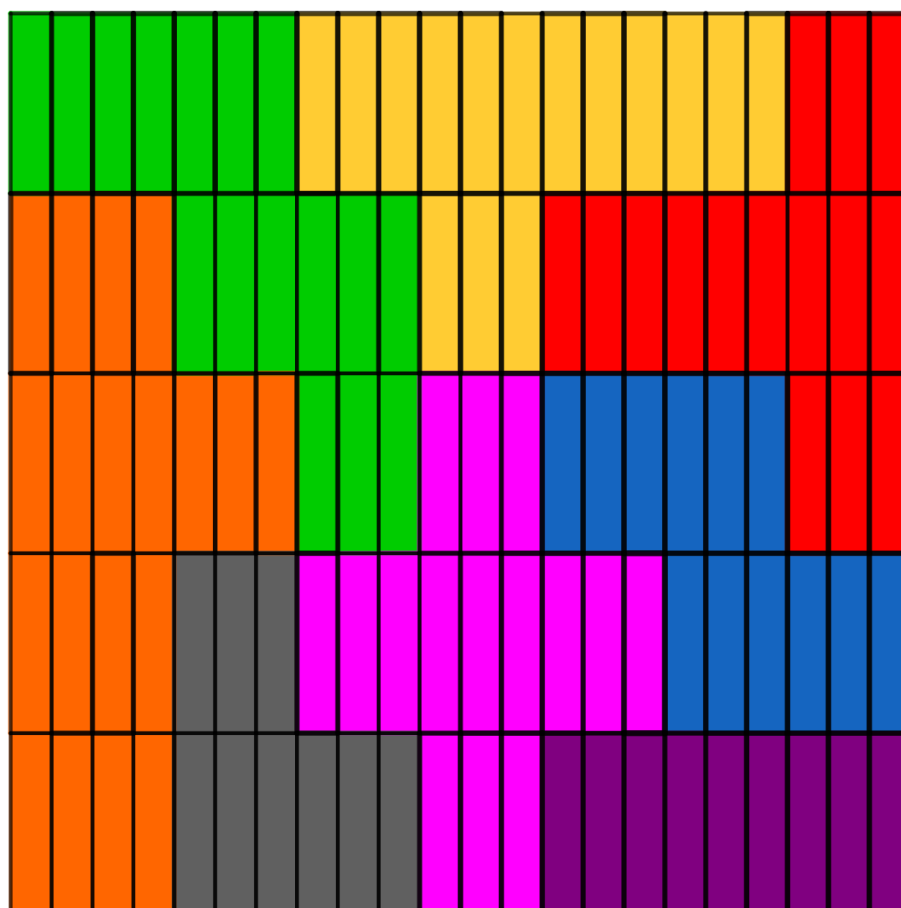
Fonte: Autora.

## APÊNDICE B – ATIVIDADE: MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM, CRIVO DE ERATÓSTENES E NÚMEROS PRIMOS

### Desafio: quebra-cabeça

Antecipadamente, proceda com o recorte da figura, destacando os polígonos maiores que compartilham a mesma coloração. Em seguida, solicite aos estudantes que construam um quadrado utilizando as peças recortadas. Após a conclusão da montagem, realize o cálculo do mínimo múltiplo comum entre os números 5 e 22.

Figura B.1 – Quebra-cabeça: mínimo múltiplo comum entre 22 e 5



### Atividade: crivo de Eratóstenes com seis colunas

O professor deve proceder solicitando aos alunos que:

- Risquem o número 1;
- Colorir os múltiplos de 2, exceto o próprio 2;
- Colorir os múltiplos de 3, exceto o próprio 3;
- Colorir os múltiplos de 5, exceto o próprio 5;
- Repetir o processo até todos os múltiplos estarem coloridos.

Quadro .1 – Encontre os números primos

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Quadro .2 – Encontre os números primos-1

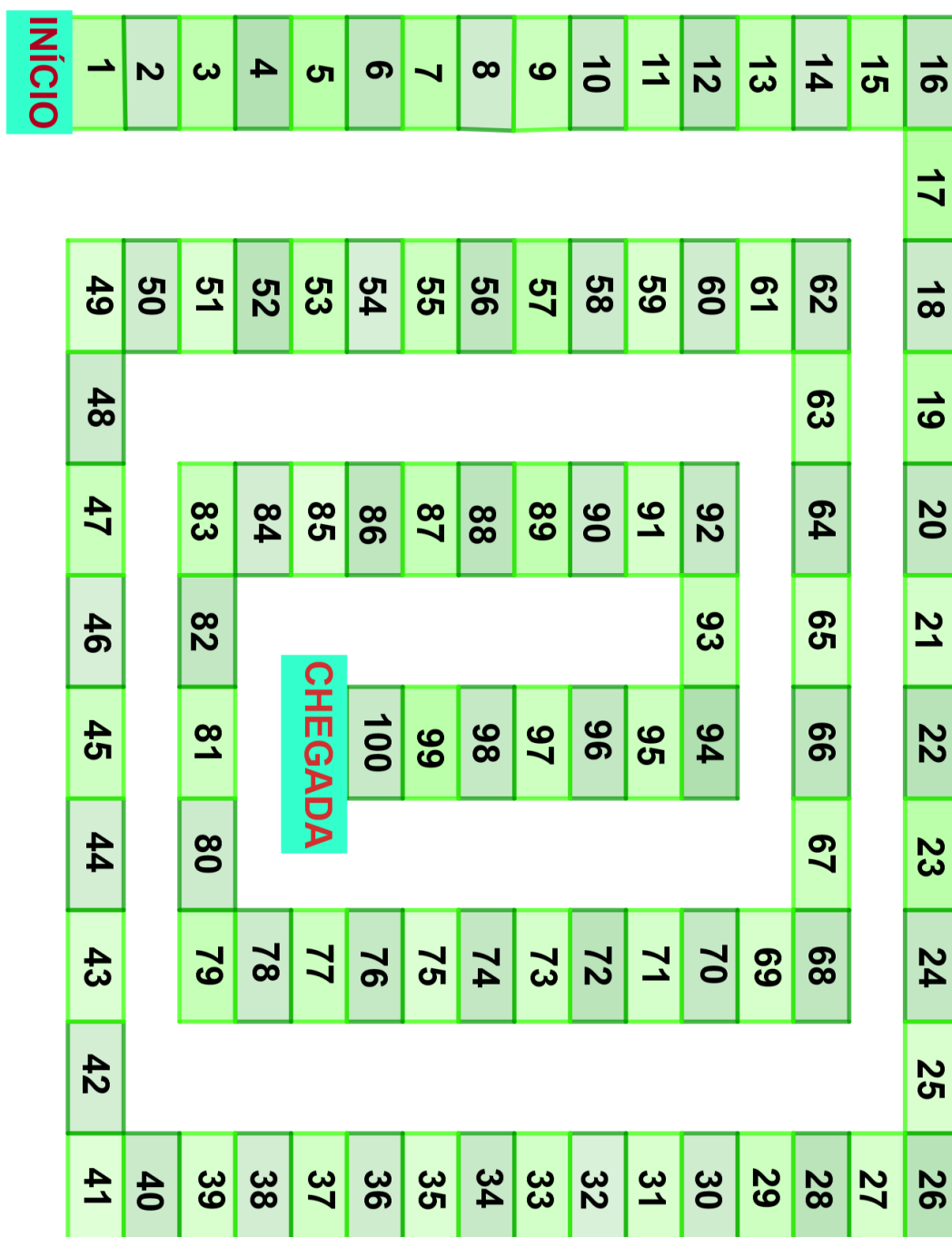
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

### Atividade: corrida dos primos

O jogo “Corrida dos Primos” será realizado utilizando o tabuleiro fornecido. Os discentes, organizados em grupos, deverão lançar dois dados e somar os valores obtidos nas faces superiores. O resultado da soma determinará o número de casas que o aluno deverá percorrer no tabuleiro. Caso o estudante pare em uma casa correspondente a um número primo, este avançará cinco casas adicionais. Caso contrário, permanecerá na mesma posição até a próxima rodada. O aluno que alcançar a última casa do tabuleiro primeiro será o vencedor.

Figura B.2 – Jogo: corrida dos primos



### Atividade: Bingo dos primos

Utilize as cartelas fornecidas para a realização do jogo. Os participantes deverão marcar três números primos em cada rodada, para ser o vencedor.

Figura B.3 – Bingo dos primos: cartelas – 1

BINGO DOS PRIMOS			
79	4	14	37
22	7	18	9
15	32	23	68
11	91	77	53

BINGO DOS PRIMOS			
5	6	9	69
47	33	29	42
39	17	87	89
23	32	75	81

BINGO DOS PRIMOS			
19	48	15	5
39	49	85	21
53	43	79	74
7	1	38	99

BINGO DOS PRIMOS			
8	79	45	29
43	24	44	63
72	16	11	47
95	17	86	55

BINGO DOS PRIMOS			
13	6	16	83
27	2	33	42
61	51	69	17
78	41	88	93

BINGO DOS PRIMOS			
7	4	22	3
10	66	23	99
35	29	96	46
43	57	34	97

BINGO DOS PRIMOS			
12	49	52	97
43	93	37	39
27	96	11	81
5	58	15	83

BINGO DOS PRIMOS			
1	18	46	11
20	41	89	26
37	65	97	50
8	32	77	23

Fonte: Autora.

Figura B.4 – Bingo dos primos: cartelas – 2

<b>BINGO DOS PRIMOS</b>				
19	44	1	59	
20	2	16	99	
15	33	71	65	
73	91	76	67	

<b>BINGO DOS PRIMOS</b>				
5	6	39	69	
47	38	13	49	
26	83	87	31	
67	30	70	81	

<b>BINGO DOS PRIMOS</b>				
17	40	15	3	
27	40	82	21	
73	29	31	82	
7	1	98	99	

<b>BINGO DOS PRIMOS</b>				
10	79	25	11	
41	22	55	69	
76	16	19	53	
90	89	87	54	

<b>BINGO DOS PRIMOS</b>				
17	54	14	79	
35	2	34	46	
71	51	84	23	
70	41	80	94	

<b>BINGO DOS PRIMOS</b>				
5	1	21	13	
12	56	37	91	
35	29	94	40	
43	57	33	89	

<b>BINGO DOS PRIMOS</b>				
10	65	18	61	
43	98	31	30	
27	36	19	81	
5	28	85	71	

<b>BINGO DOS PRIMOS</b>				
9	6	20	11	
28	3	97	38	
47	62	31	10	
78	32	27	59	

Fonte: Autora.

## APÊNDICE C – ATIVIDADE: NÚMEROS TRIANGULARES

### Desafio: aperto de mão

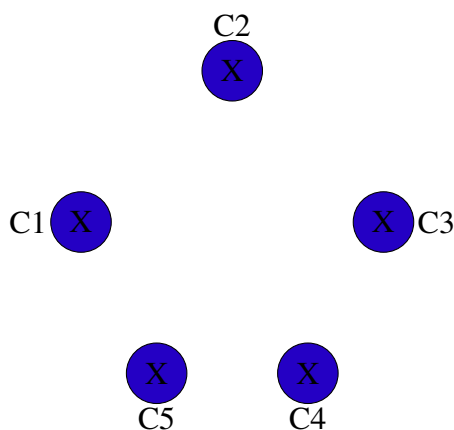
Ana estava muito animada para a festa de aniversário de seu amigo Bernardo. Além do bolo e dos presentes, ela queria descobrir quantos apertos de mão aconteceriam durante a festa. Ao chegar na festa, Ana, Bernardo, Carol, Davi e Edu começaram a se cumprimentar com calorosos apertos de mão. Enquanto todos se divertiam, Ana não conseguia tirar da cabeça a pergunta: “Quantos apertos de mão foram dados até agora?”.

1. Utilize os conteúdos estudados sobre números triangulares para ajudar Ana a resolver esse problema. Então quantos apertos de mão acontecem no total?
2. Se tivéssemos 10 pessoas na festa, qual seria o número de apertos de mão?
3. E para  $n$  pessoas?

### Desafio: rede de malha

1. Dadas 5 cidades, representadas pelos círculos  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$ ,  $C4$  e  $C5$ , conforme mostra a Figura C.1, quantas estradas precisam ser construídas para que haja uma conectividade rodoviária direta de qualquer cidade para outra cidade?

Figura C.1 – Exemplo de 5 cidades



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

2. Se fossem dadas 7 cidades?
3. Caso existissem  $n$  cidades?

**Desafio: tiras numéricas**

Considere uma tira de papel como mostrada na Figura C.2. Quantas tiras com números diferentes você pode fazer, se você pode apenas cortar a tira, mas não juntar tiras menores cortadas? Por exemplo, é possível fazer 12, 2345 ou 789 e assim por diante. No entanto não é permitido o número 15, pois você precisaria cortar duas tiras menores, 1 e 5, e juntá-las.

Figura C.2 – Tira numérica



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).