INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
RIO GRANDE DO SUL
CAMPUS CANOAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

CÁSSIO VOLPATO SELBACH

UM ESTUDO SOBRE A ABSTRAÇÃO APLICADO AO ENSINO DA ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma proposta com problemas e sequências.

CANOAS
2025

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
RIO GRANDE DO SUL
CAMPUS CANOAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

CÁSSIO VOLPATO SELBACH

UM ESTUDO SOBRE A ABSTRAÇÃO APLICADO AO ENSINO DA ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma proposta com problemas e sequências.

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) - Campus Canoas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Gabriel Goldmeier

Linha de Pesquisa: Formação de Professores de Matemática da Educação Básica

CANOAS
2025

CIP - Catalogação na publicação

Selbach, Cássio Volpato
UM ESTUDO SOBRE A ABSTRAÇÃO APLICADO AO ENSINO DA ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma proposta com problemas e sequências. / Cássio Volpato Selbach. -- 2025.
192 f.
Orientador: Gabriel Goldmeier.

Dissertação (Mestrado) -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Canoas, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Canoas, BR-RS, 2025.

1. Educação Matemática. 2. Álgebra - Ensino fundamental. 3. Abstração. 4. Pensamento algébrico. 5. Resolução de problemas. I. Goldmeier, Gabriel. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica do SIBIFRS com dados fornecidos pelo(a) autor(a).

“O conhecimento tem ainda um sentido mais geral, de sorte que se encontra também nas ideias ou termos, antes de chegarmos às proposições ou verdades. Pode- se dizer que aquele que tiver visto com atenção mais retratos de plantas e de animais, mais figuras de máquinas, mais descrições ou representações de casas ou de fortalezas, que tiver lido mais romances engenhosos, ouvido mais narrações curiosas, este, digo eu, terá mais conhecimento que um outro, mesmo que não houvesse uma só palavra de verdade em tudo o que viu representado ou ouviu. Com efeito, o hábito que tem de representar no espírito muitas concepções ou ideias expressas e atuais o torna mais apto a conceber o que se lhe propõe, e é certo que ele será mais instruído e mais capaz do que um outro, que não viu, não leu nem ouviu nada, sob a condição de que nessas histórias e representações não considere verdadeiro o que não o é, e que as suas impressões não o impeçam de discernir o real do imaginário, ou o existente do puramente possível.” (LEIBNIZ. 2004, p. 353)

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por simplesmente tudo e isso não é um clichê. Não sei onde estaria hoje sem o critianismo.

Agradeço também à Maria Santíssima, cuja intercessão esteve comigo desde quando passeava com o meu cachorro pela frente do IFRS de Canoas e rezava uma Ave-Maria para entrar no mestrado e uma Ave-Maria com um Pai-Nosso antes de cada prova.

Agradeço à minha esposa Mariângela que de forma admirável, tem cuidado das crianças, Benjamim e Eliseu, para eu poder frequentar as aulas.

Agradeço ao IFRS de Canoas com todo seu corpo docente pela possibilidade de estudar aqui, especialmente ao professor Gabriel pela orientação e aos colegas da segunda turma que sempre deixavam as aulas mais alegres.

Agradeço ainda às escolas João de Barro e Maria Edila onde trabalho pelo apoio durante todo o processo.

Finalmente, agradeço aos familiares e amigos por todo apoio até aqui. Minha dívida para com todos é impagável.

Salve Regina
Soli Deo Gloria

RESUMO

Este é um trabalho sobre a abstração e suas implicações pedagógicas no ensino de matemática. Ele é dividido em duas partes. A primeira parte é teórica: queremos entender a abstração do ponto de vista biológico, psicológico e metafísico, pois estamos interessados em dar uma resposta tão completa quanto possível às questões relativas ao tema da abstração. Pretendemos responder às perguntas: “qual é a definição de ‘abstração’?”, “qual é a natureza metafísica de um conceito abstrato?”, “quais são os tipos de abstração e que tipos de conceitos eles geram?”, “como ocorre o processo de abstração?”, “quais são os níveis do pensamento abstrato?” e “quais são as condições humanas para poder acontecer o processo de abstração?”. Para responder a essas questões, nos apoiamos especialmente nos estudos de Aristóteles, de Steven Pinker e de Jean Piaget.

A segunda parte investiga e propõe métodos de ensino-aprendizagem relacionados à matemática, mais especificamente à álgebra e à abstração. Para tal, realizamos uma pesquisa para saber se é possível desenvolver a capacidade de generalização e de escrita algébrica através da metodologia de resolução de problemas. Testamos essa metodologia em uma turma de uma escola pública. A sequência pedagógica se mostrou eficiente para desenvolver alguns elementos do pensamento algébrico, mas a capacidade de generalização e de escrita algébrica não foi alcançada. Acreditamos que isso se deve ao tempo estipulado para a proposta pedagógica. Desse modo a proposta é válida, mas precisa ser adaptada, adicionando mais problemas de dificuldade menor e ofertando mais tempo aos estudantes para resolver os problemas apresentados.

Palavras-chave: álgebra, generalização, sequência, abstração.

ABSTRACT

This is a work on abstraction and its pedagogical implications in mathematics teaching. It is divided into two parts. The first part is theoretical: we seek to understand abstraction from biological, psychological, and metaphysical perspectives, as we are interested in providing as complete an answer as possible to the questions related to abstraction. We aim to answer the following questions: "What is the definition of 'abstraction'?", "What is the metaphysical nature of an abstract concept?", "What are the types of abstraction and what types of concepts do they generate?", "How does the process of abstraction occur?", "What are the levels of abstract thought?", and "What are the human conditions for the process of abstraction to occur?" To answer these questions, we draw especially on the studies of Aristotle, Steven Pinker, and Jean Piaget.

The second part investigates and proposes teaching and learning methods related to mathematics, more specifically algebra and abstraction. To this end, we conducted research to determine whether it is possible to develop generalization and algebraic writing skills through problem-solving. We tested this methodology in a public school class. The pedagogical sequence proved effective in developing some elements of algebraic thinking, but generalization and algebraic writing skills were not achieved. We believe this is due to the time allotted for the pedagogical proposal. Thus, the proposal is valid, but it needs to be adapted by adding more problems of lesser difficulty and giving students more time to solve the problems presented.

Keywords: algebra, generalization, sequence, abstraction.

INTRODUÇÃO GERAL

A álgebra, como ramo fundamental da matemática, tem uma história rica e multifacetada que reflete a evolução do pensamento humano desde a resolução de problemas concretos até a construção de conceitos abstratos complexos. No contexto educacional, a álgebra ocupa um lugar central no currículo do Ensino Fundamental e Médio, sendo reconhecida pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. Contudo, o ensino da álgebra frequentemente se restringe a aspectos técnicos e operacionais, negligenciando o desenvolvimento do pensamento algébrico - uma forma de raciocínio que envolve a generalização, a abstração e a modelagem de situações matemáticas.

Este trabalho tem como objetivo discutir a importância do pensamento algébrico no processo de ensino-aprendizagem da álgebra. Para tal, destaca aspectos mais profundos da discussão sobre a abstração e o pensamento algébrico. Uma atenção especial é dada ao fundamento metafísico da abstração e ao aspecto biológico do pensamento abstrato e matemático.

Além disso, este estudo busca explorar as etapas e níveis do pensamento algébrico, fundamentando-se em teorias que destacam a importância da generalização, da simbolização e da modelagem como elementos centrais para o aprendizado efetivo da álgebra. Acredita-se que, ao integrar esses aspectos no ensino, é possível superar as deficiências apontadas em avaliações educacionais e contribuir para a formação de cidadãos capazes de utilizar o raciocínio abstrato em diversas situações do cotidiano e em outras áreas do conhecimento.

Assim, o presente trabalho se estrutura em duas partes principais: uma fundamentação teórica que aborda a definição e as características do pensamento abstrato e algébrico, e uma aplicação prática que discute estratégias de ensino-aprendizagem que favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do Ensino Fundamental.

PARTE 1 - DIFERENTES DIMENSÕES TEÓRICAS DA ABSTRAÇÃO

A seguir, apresentaremos conceitos fundamentais para estruturar o debate teórico acerca da gênese desse processo, bem como da função da abstração no desenvolvimento do raciocínio humano. Para tal, apresentaremos um resgate histórico que parte da compreensão da filosofia aristotélica e culmina em modernas contribuições das ciências cognitivas, em particular, da Teoria Computacional da Mente (TCM).

O estudo da filosofia aristotélica neste trabalho sobre a abstração se justifica, em primeiro lugar, pelo seu caráter fundacional (é a primeira teoria da abstração conhecida). Podemos dizer que as discussões sobre metafísica e teoria do conhecimento da cultura ocidental giram em torno dos caminhos abertos por Platão e Aristóteles. Além disso, tal teoria vale ser estudada por sua atualidade, dado que a metafísica de Aristóteles tem correspondentes conceituais que permitem avaliar e melhorar a inteligibilidade de qualquer ciência, inclusive as ciências modernas, em particular, a Teoria Computacional da Mente (TCM) e a Epistemologia Genética de Piaget. Assim, em primeiro lugar, discutiremos a teoria da abstração de Aristóteles. A seguir, introduziremos contribuições da ciência moderna, em particular da neurociência e da Teoria Computacional da Mente (TCM) e depois apresentaremos a teoria da abstração sob o ponto de vista de Piaget e de alguns de seus discípulos. Por fim, encerraremos com um apanhado geral das contribuições dessas teorias para nossa compreensão sobre o processo de abstração e de ensino e aprendizagem da álgebra.

1. ABSTRAÇÃO NA METAFÍSICA E NA TEORIA DO CONHECIMENTO DE ARISTÓTELES

1.1 Metafísica e epistemologia geral

Antes de estudarmos a metafísica de Aristóteles, vamos atentar para a metafísica em geral. A metafísica é uma das áreas mais importantes da Filosofia, talvez a única propriamente filosófica, mas, ao mesmo tempo, a mais difícil de ser definida. Com o intuito de avançarmos na compreensão de seu significado, comecemos investigando a sua etimologia. “Metafísica” significa literalmente “além da física”. Isto é, para além das realidades sensíveis, existe uma outra realidade imaterial, transcendente, a realidade das formas e dos conceitos abstratos. Um exemplo de conceito metafísico é o conceito de unidade, tudo que existe, existe porque tem unidade. São exemplos de proposições metafísicas as seguintes: “tudo que passou a existir tem uma causa”, “Do nada, nada vem” e “Todos os corpos são pesados”.[1]

Diversos filósofos deram respostas diferentes aos problemas da metafísica e da epistemologia. Podemos dividir, como Peter Kreeft em “Lógica Socrática” (2024), as escolas metafísicas em duas: as que acreditam na existência das essências e as que não acreditam. As primeiras são ditas realistas e as segundas de nominalistas ou conceitualistas. Platão e Aristóteles são exemplos de realistas, mas com uma distinção. Platão é chamado de “realista exagerado”, pois para Platão as essências existem por si e Aristóteles é chamado de “realista moderado”, pois as essências não possuem existência própria, mas existem em potência nas coisas, como veremos adiante. Por outro lado, os nominalistas e os conceitualistas não acreditam na existência real das essências, mas acreditam que as essências são apenas nomes que utilizamos para nos referirmos às coisas ou que as essências não existem realmente, mas são apenas objetos de pensamento. Dito de outro modo, Platão dá ênfase ao aspecto geral dos seres; os nominalistas e conceitualistas dão

[1] Devido ao seu caráter geral, os conceitos metafísicos são aplicados em todas as áreas do conhecimento. Perceba que não dissemos que os conceitos podem ser aplicados, mas que eles são sempre aplicados a todas as áreas do conhecimento. Mesmo o cidadão comum tem uma visão global da realidade que ele usa para fazer julgamentos de valores, para fazer escolhas práticas e para explicar o mundo ao seu redor. Em resumo, a cosmovisão de um sujeito modela o modo de orientação do mesmo no mundo. Com os cientistas não é diferente. Os pressupostos metafísicos dos cientistas influenciam suas respectivas teorias.

ênfase no aspecto individual dos seres, isto é, ao que cada ser tem de único. Aristóteles assume uma postura conciliatória, dizendo que o que existe possui o aspecto geral (a forma) e o aspecto individual (a matéria). Essa doutrina é conhecida como "hilemorfismo”.

Quadro 1: Escolas Metafísicas: Realismo vs. Nominalismo

Escola Filosófica	Representante	Existência das Essências	Natureza das Essências	Base Epistemológica	Exemplos
Realismo Exagerado	Platão	Sim	Essências (Formas/Ideias) existem independentemente das coisas, em um mundo transcendente.	Conhecimento via reminiscência da alma com o mundo das Ideias .	A Forma do Bem existe além do mundo sensível .
Realismo Moderado	Aristóteles	Sim	Essências (formas) existem nas coisas como ato (forma) e potência (matéria) .	Conhecimento via abstração a partir da experiência sensível (hilemorfismo) .	A "forma humana" existe apenas em indivíduos concretos .
Nominalismo	Guilherme de Ockham,	Não	Essências são apenas nomes ou convenções linguísticas para agrupar particulares .	Conhecimento baseado na percepção de particulares e na linguagem .	Humanidade é um rótulo para indivíduos com características semelhantes .
Conceptualismo	Kant	Não	Essências são construções mentais, sem realidade independente .	Conhecimento mediado por categorias a priori da mente .	Causalidade é um conceito organizador da experiência .

A visão metafísica de um pensador está estritamente ligada à sua epistemologia. A epistemologia é a teoria do conhecimento. Ela se propõe a investigar o que é o conhecimento, se ele existe, se é possível e como chegamos a obtê-lo. Podemos dividir as escolas filosóficas de epistemologia em duas: as que acreditam na possibilidade de obter um conhecimento verdadeiro sobre a realidade (chamados de realistas epistemológicos) e as que não acreditam. Dentre aqueles que acreditam na possibilidade de obter um conhecimento verdadeiro, existem os ingênuos e os críticos, isto é, aqueles que acreditam que basta ver para saber a verdade e aqueles que entendem que o processo de aquisição do conhecimento é problemático. Dentre aqueles que não acreditam podemos dividi-los em: aqueles que o conhecimento verdadeiro existe, é acessível, mas não é comunicável; aqueles que acreditam que o conhecimento verdadeiro existe, mas não é possível obtê-lo; e aqueles que não acreditam na existência do conhecimento verdadeiro. Para estes últimos, o conhecimento é meramente uma construção social, uma "verdade relativa" ou uma ilusão coletiva. Adotaremos a visão realista moderada sem aprofundar a discussão para não desviar do objetivo desta dissertação.

Vamos iniciar o estudo da abstração por Aristóteles por dois motivos: pois ele foi o primeiro pensador conhecido a estudar sistematicamente o tema da abstração e porque partimos dos pressupostos, como Aristóteles, de que as essências existem realmente nas coisas e que é possível conhecê-las.

1.2 A metafísica de Aristóteles.

Para Aristóteles, segundo Reale (REALE, 2012, p. 42), a metafísica estuda "as causas e os princípios primeiros", "o ser enquanto ser", "a substância", "Deus e a substância suprassensível". Ou seja, indagando pelas causas do mundo material, ela avança em graus de abstração variados.

Dito de outro modo, a metafísica é uma área da Filosofia que busca compreender as estruturas da realidade em si mesmas. Para compreender a expressão "ser enquanto ser", devemos ter em mente que a palavra ser é tomada em dois sentidos. O primeiro "ser" refere-se a tudo que tem existência, e o segundo "ser" é tomado em referência ao primeiro, como se disse "a metafísica estuda a existência-em-si". Podemos comparar a metafísica com as demais áreas do conhecimento. Para tal, percebamos que toda ciência abstrai do seu objeto o que lhe interessa. Por exemplo, a física olha para um cão enquanto um objeto que se move, a biologia olha para o mesmo cão com um ser que nasce, cresce, se reproduz e morre. A metafísica, por sua vez, olha para o cão como um ser que existe e se pergunta: "o que é um cão?" e "quais são as condições que, sem as quais, este cão não existiria?". Assim, desenvolve o grau mais avançado de abstração do pensamento.

Nesse sentido, a primeira pergunta da metafísica de Aristóteles é: "quais são as causas relacionadas à existência de um objeto qualquer?" Isso levanta outras questões anteriores: O que é uma causa? Quantos tipos de causas existem? Quais são esses tipos?. Voltaremos nessa pergunta em seguida, antes faremos um contraste com Platão e com os filósofos pré-socráticos.

Aristóteles não é o primeiro filósofo grego conhecido. Ele constrói sua teoria a partir das contribuições de Platão e dos filósofos pré-socráticos. Os primeiros sábios gregos, os ditos pré-socráticos, costumam ser chamados de filósofos físicos, pois buscavam essencialmente definir uma (ou mais) matéria(s) primordial(is) que serviam como componentes básicos de tudo o que existe. Tales de Mileto acreditava, por exemplo, que tudo era feito de água, Anaxímenes, que tudo era feito de ar, Heráclito atribuía ao fogo o elemento primordial, e assim por diante[2].

Esses primeiros filósofos, contudo, não se perguntavam sobre o que caracterizava a existência das coisas. Platão, Aristóteles e outros de sua época, pelo contrário, estavam justamente interessados em definir as características daquilo que é real, daquilo que realmente existe. Para Platão, a verdadeira realidade está nas formas ou ideias que temos do mundo ao nosso redor. Platão considerava que o mundo sensível é apenas uma imitação imperfeita de um mundo superior, perfeito e imutável: o mundo das ideias. O mundo das ideias, segundo Platão, é um mundo separado do mundo sensível onde “habitam” os números, as formas geométricas, os conceitos metafísicos e a essência dos seres.[3]

Por exemplo, no diálogo Eutífron, Platão, pela boca de Sócrates, indaga ao jovem Eutífron o que é a piedade. Eutífron responde a pergunta com exemplos, mas Sócrates não quer exemplos, ele quer saber o que é a essência da piedade, o que é a piedade-em-si. Ele diz:

> “Lembra-te que, pois, que não te recomendei que me ensinassem uma ou duas coisas que são piedosas, mas te perguntei por aquele aspecto próprio sob o qual todas as coisas piedosas são piedosas” (PLATÃO, 2004, p. 41)

---

[2] Pitágoras se diferencia dos demais pré-socráticos,pois ele acredita que os números são o fundamento da realidade.

[3] Uma forma de entender essa teoria é através do mito da caverna, o texto mais conhecido de Platão. No mito da caverna, Platão imagina uma caverna, onde existem alguns prisioneiros que nasceram da caverna. Esses homens estão voltados para a parede da caverna e só podem ver as sombras projetadas na parede pela luz provinda de uma abertura da caverna. Para esses prisioneiros, a realidade são as sombras. Entretanto, um dia, um certo prisioneiro consegue fugir da caverna e pode ver as coisas que geraram as sombras, sejam bois, carroças, e pessoas, ou seja, ele pode ver a realidade. Nesse sentido, o mundo sensível corresponde às sombras projetadas, e o mundo real corresponde ao mundo das ideias.

Mas, cuidado, não se deve tomar, ao menos na metafísica de Platão, a palavra ideia no sentido de “pensamento”[4]. Uma ideia ou forma é o conjunto de traços característicos de uma espécie de seres, que o diferencia das demais espécies. Por isso Sócrates (nos diálogos de Platão) pergunta pelo “aspecto próprio” da piedade[5]. Por exemplo, o aspecto próprio da justiça, segundo o que posteriormente define Aristóteles, é dar a cada um o que lhe é de direito. Já a ideia (ou o aspecto próprio) do triângulo é ser um polígono de três lados. Um triângulo pode ser feito de madeira ou de ferro, pode ser escaleno, isósceles ou equilátero, mas se deixar de ter três lados, então ele deixa de ser um triângulo. Em relação a isso, vale destacar que, para Platão, os conceitos são imutáveis e, portanto, eternos. Assim, por não serem passíveis de mudança, no entender de Platão, são perfeitos, dado que aquilo que não muda é mais perfeito[6] do que aquilo que muda. Nesse sentido, Platão atribui uma primazia e independência ao mundo das ideias.

Já a metafísica de Aristóteles vai em uma direção distinta daquela proposta por seu mestre Platão. No dizer de Boutroux: “Nessa doutrina encontra-se a ideia mesma do aristotelismo. “O geral não é princípio constitutivo do ser: não é dele, senão da matéria.”(Boutroux, 2024, p. 58). Ou seja, os elementos gerais e esquemáticos não podem gerar objeto algum, o objeto precisa de matéria. Entenda-se: a ideia de uma esfera não faz uma bola, é preciso que a bola tenha uma matéria como couro enchido de ar. Mas Aristóteles também corrige os filósofos da natureza ao dizer que a matéria sozinha não explica toda a realidade. Por exemplo, uma cadeira e uma mesa podem ser feitas de madeira, portanto a origem da sua diferença não é matéria. A diferença entre a cadeira e a mesa está na forma e na finalidade de cada uma, que não são elementos materiais. Mais do que isso, algo só existe com uma finalidade e a partir de algo que o produziu. Essas são as quatro causas aristotélicas das substâncias[7] a serem exploradas a seguir (material,

---

[4] O uso do termo ideia no sentido de pensamento data a partir do século XVIII com o filósofo inglês John Locke.

[5] A maioria dos diálogos socráticos termina com uma interrogação, em geral Sócrates não se satisfaz com a resposta dos seus interlocutores e ele mesmo não dá uma resposta.

[6] A palavra “perfeito” significa “completo”. O que muda ainda não é completo, logo é imperfeito. O eterno já está feito, logo é perfeito, portanto o mundo das ideias é perfeito e o mundo sensível é imperfeito.

[7] Substância, segundo Aristóteles, é qualquer ser que possui existência própria, como mesa ou cadeira. A cor branca não é uma substância, pois não tem existência própria, mas existe na cadeira branca, por exemplo.

formal, final, eficiente). A partir dessas correções, Aristóteles inicia a investigação pelas causas, conforme explicado acima.

A investigação aristotélica chega a concluir que existem quatro tipos de causas. No uso comum, a palavra causa se refere ao agente ativo de uma ação, como um arquiteto que constrói uma casa. No entanto, para que uma casa exista, não basta haver um arquiteto. Devem existir tijolos, madeira e outros materiais, deve existir uma planta e deve existir uma intenção para a casa. Esses elementos são denominados a causa eficiente (o arquiteto, o pedreiro, etc.), a causa material (tijolo e madeira), a causa formal (a planta da casa, a ideia mesma de casa, etc) e a causa final (a intenção da casa como moradia). Podemos perceber que o conceito de causa é, como dito acima, aquilo que sem a qual o objeto em questão não existe.[8]

Quadro 2: As quatro causas aristotélicas.

Causa	Definição	Exemplo (Casa)
Causa Material	Matéria-prima de que algo é feito.	Tijolos, madeira, telhas, cimento.
Causa Formal	Forma ou estrutura que organiza a matéria, definindo sua essência.	Projeto arquitetônico (layout, disposição dos materiais para formar uma casa).
Causa Eficiente	Agente ou processo que produz a coisa.	Construtor(es) e o ato de construir (trabalho manual, técnicas de construção).
Causa Final	Propósito ou finalidade para a qual algo existe.	Abrigar pessoas, proteger do clima (habitação).

Aristóteles continua sua investigação e percebe que as quatro causas podem ser reduzidas aos princípios de forma e matéria[9], que por sua vez podem ser reduzidos aos conceitos de ato e potência[10]. O par conceitual de ato-potência[11] também será aplicado por Aristóteles em diversas áreas de sua filosofia.

[8] Convém notar que esses conceitos são aplicados por Aristóteles em diversas áreas do conhecimento. No caso da política, podemos analisar o fenômeno do estado. A causa material do estado são os cidadãos, a causa formal é lei, a causa eficiente é o governador e legislador e a causa final é o bem estar dos cidadãos.

[9] Boutrox explica na sequência que a causa final está na forma e a causa eficiente deixa suas marcas na forma do ser. Assim, em alguma medida, a causa final e a causa eficiente podem ser reduzidos à causa formal.

[10] Em aristóteles, a matéria prima é pura potência que se atualiza pela forma.

[11] Ato significa aquilo que já existe e potência significa aquilo que pode vir a ser. Assim, a semente existe em ato, mas contém a árvore em potência, pois pode vir a ser uma árvore. Com o par ato-potência, Aristóteles pode explicar a mudança, que é um assunto muito discutido pelos filósofos anteriores, Heráclito e Parmênides.

1.3 A teoria do conhecimento de Aristóteles

Assim como fizemos na apresentação da metafísica aristotélica, também apresentaremos sua teoria do conhecimento nos distanciando da teoria platônica. Mas, antes mesmo de traçar tal distinção entre as visões de Platão e Aristóteles, apresentaremos a diferença entre metafísica e teoria do conhecimento. A metafísica pergunta: "O que é a realidade?" "Quais são as condições sem as quais os objetos da realidade não existiriam?". Por outro lado, a teoria do conhecimento pergunta: "É possível conhecer a realidade?, "Como podemos conhecê-la?", e assim por diante.

Feita essa diferenciação, agora comecemos a entender como Platão e, posteriormente, como Aristóteles entendiam os processos que nos levam a conhecer. Como dito acima, Platão procura pela essência das coisas, a ideia das coisas, a coisa-em-si. Essa coisa-em-si (o cavalo-em-si, a justiça-em-si, o número-em-si) deve existir em algum lugar. Platão postula então o "mundo das ideias", onde devem existir esses elementos. Para Platão, o mundo das ideias é também o mundo das almas[12]. Deste modo, todas as almas têm acesso a todas as ideias, porém quando a alma encarna, ela esquece o que viu no mundo das almas. Deste modo, para Platão, o aprendizado é relembrar o que já se sabia antes de encarnar. Ele chama esse processo de reminiscência. A reminiscência corresponde à fuga do prisioneiro da caverna, conforme o mito da caverna.

A fim de que a pessoa se lembre do que viu no mundo das ideias, Platão, pela boca de Sócrates, utiliza o método da maiêutica. Maiêutica significa "parto de ideias". Assim, através de perguntas, Sócrates tenta fazer "nascer" a ideia. Um exemplo notável deste método é o caso do diálogo com o escravo. No dito diálogo, Sócrates interroga um escravo para que ele descubra como construir um quadrado de área igual a 2. Note que, nessa visão epistemológica, o conhecimento já está em potência em cada indivíduo, precisando apenas ser trazido à tona, como no caso da matemática, onde as propriedades já estão nos objetos, precisando apenas ser expostas. Nesse sentido, uma demonstração é apenas uma sequência de nexos autoevidentes que destacam em ato uma verdade potencial. Assim, Platão discute a definição de conhecimento como "crença verdadeira corretamente justificada".

[12] Aqui cabe a primeira objeção a Platão: o homem-em-si, a essência de homem, é a ideia geral de humanidade, de espécie humana. Ou seja, em relação ao ser humano, o que existe é um homem geral, como caberia a existência também das almas individuais no mundo das ideias? Tal problema só será resolvido por Duns Scot, na Idade Média.

Platão diferencia entre opinião e conhecimento, pois o conhecimento possui uma justificativa adequada.

Resumida a teoria do conhecimento platônico, agora podemos examinar como Aristóteles entendia o processo de aquisição do conhecimento. Para tal, em primeiro lugar, percebamos que, ainda que a psicologia naquela época estivesse longe de existir enquanto ciência, já havia traços de análise da psicologia humana na teoria do conhecimento aristotélica. Para ele, o ato de conhecer é uma função da alma. A fim de entendermos essa questão, retomemos o que foi dito nas páginas anteriores sobre a metafísica. Os filósofos físicos atribuíam a causa da realidade à matéria e Platão fazia separação entre mundo físico e mundo das formas. Da mesma maneira, os filósofos físicos diziam que a alma é parte do corpo e Platão fez uma cisão entre alma e corpo[13]. Aristóteles busca uma posição intermediária, sem dizer que a alma é parte do corpo, mas também sem estabelecer essa cisão absoluta. A alma, para Aristóteles, é a forma do corpo. Ou seja, é o princípio da ação do corpo. Nesse sentido, Aristóteles diz:

> "Conclui-se que a alma é necessariamente uma substância no sentido de forma de um corpo natural que possui vida em potência. Mas como a substância é realização (ato), a alma é o ato de um corpo como anteriormente caracterizado" (ARISTÓTELES, 2011, p. 72)

Aristóteles usa o termo "substância"[14] em dois sentidos: como essência (conjunto de notas características distintivas de um ser) ou como o composto de forma e matéria. Na citação acima, a substância é usada como essência, apenas. A alma humana tem a função intelectiva, cuja função é captar por abstração as formas das coisas e assim encontrar a verdade, pensar, raciocinar, imaginar, entre outras. É justamente esse ponto da filosofia aristotélica que nos aponta da direção da investigação sobre o significado dos processos de abstração.

---

[13] Platão chega a dizer, no Fédon, que o corpo é uma prisão da alma.

[14] Substância, em grego, é ousía. Ousia corresponde ao pedaço de terra mínimo para que uma pessoa sobreviva. Nesse sentido, substância é o mínimo necessário para que uma coisa exista. A diferença de uso nos dois sentidos da palavra se dá pela influência platônica ainda presente no pensamento de Aristóteles. Note que substância (no primeiro sentido), forma e ideia são quase sinônimos. Esses termos correspondem aos elementos que fazem um objeto ser o que ele é e não ser outro objeto. Platão usa mais o termo ideia, pois a ideia traz a conotação de mundo espiritual, separado do mundo físico. Aristóteles prefere o termo substância, que traz uma conotação de imanência. E ambos usam o termo forma. Por isso, neste trabalho damos preferência ao termo forma.

1.4 A abstração na teoria do conhecimento de Aristóteles

Contemporaneamente, há um entendimento sobre o que é a abstração que pode ser encontrado em importantes dicionários de Filosofia. O Dicionário Oxford de Filosofia define abstração como "[s]uposto processo de formação de ideias que consiste em isolar o que é comum a diferentes casos." (BLACKBURN, 1997, p. 2). Já o Dicionário Abbagnano de Filosofia vai além e define abstração como:

> É a operação mediante a qual alguma coisa é escolhida como objeto de percepção, atenção, observação, consideração, pesquisa, estudo, etc. e isolada de outras coisas com que está numa relação qualquer. A abstração tem dois aspectos: 1º isolar a coisa previamente escolhida das demais com que está relacionada (o abstrair de); 2º assumir como objeto específico de consideração aquilo aquilo que foi assim isolado (abstração seletiva ou cisão prévia). (ABBAGNANO, 2007, p. 6)

Ainda dentro do verbete "abstração", Abbagnano traz esse conceito dentro da filosofia de Aristóteles, conforme segue:

> "Aristóteles explica com a abstração a formação das ciências teóricas, isto é, da matemática, da física e da filosofia pura. "O matemático" diz ele "despoja as coisas de todas as qualidades sensíveis (peso, leveza, dureza, etc.) e às reduz a quantidade discreta e contínua; o físico prescinde de todas as determinações do ser que não se reduzem ao movimento. Analogamente, o filósofo despoja o ser de todas as determinações particulares (quantidade, movimento, etc.) e limita-se a considerá-lo apenas como ser. (*Met*. XI, 3, 1061 a 28 ss). O processo de todo conhecimento pode ser, segundo Aristóteles, descrito com a abstração: "o conhecimento sensível consiste em assumir as formas sensíveis sem a matéria assim como a cera assume a marca do sinete sem o ferro ou o ouro de que ele é composto," (*De an* II, 12, 424, a 18). E o conhecimento intelectual recebe as formas inteligíveis abstraindo-as das formas sensíveis em que estão presentes (*ibid*, III, 7, 431 ss)." (ABBAGNANO, 2007, p. 6)

Analisando esse parágrafo, a primeira coisa a notar é que existem três níveis principais de abstração. Por conveniência chamaremos os três níveis de (i) científico, (ii) matemático e (iii) metafísico.[15]

No primeiro nível, o nível científico, Aristóteles diz que o físico (o cientista natural) busca o movimento. Movimento, para Aristóteles, não significa apenas mudança de lugar, mas qualquer tipo de mudança. Ou seja, a abstração de primeiro nível está relacionada à busca por criar o conceito de alguma espécie. Dito de outro modo, no primeiro nível de abstração, estão incluídas todas as características que

[15] Os gregos dividem o conhecimento em três tipos: produtivo, prático e teórico. Claramente, a citação se refere ao conhecimento teórico. Ou seja, a abstração é a base de todo o conhecimento teórico.

são características da espécie e excluindo as características específicas dos indivíduos. Por exemplo, a partir de diversos exemplos de cavalos, conhecemos a espécie cavalo.

O segundo nível é o nível da abstração matemática. A abstração matemática é bem explicada no seguinte trecho de Giovanni Reale e Dario Antisseri:

> Platão e muitos platônicos entendiam os números e objetos matemáticos em geral como "entidades ideais separadas das sensíveis". Outros platônicos procuraram suavizar essa dura concepção, imanentizando os objetos matemáticos nas coisas sensíveis, embora mantendo firmemente a convicção de que se tratava de realidades inteligíveis distintas das sensíveis. Pois Aristóteles refutou ambas as concepções, julgando-as uma mais absurda do que a outra e, assim, absolutamente inaceitáveis. Ele propunha o seguinte: nós podemos considerar as coisas sensíveis, prescindindo de todas as outras co-propriedades, somente como corpos com três dimensões; depois, prosseguindo o processo de abstração, podemos ainda considerar as coisas somente segundo duas dimensões, isto é, como superfícies, prescindindo de todo o resto; continuando, podemos considerar as coisas só como comprimento e depois como unidades indivisíveis, tendo porém uma posição no espaço, ou seja, só como pontos; por fim, também podemos considerar as coisas como unidades puras, ou seja, como entidades indivisíveis e sem posição espacial, isto é, como unidades numéricas.(REALE E ANTISSERI, 2003, p 196-197)

A partir dessa noção, Aristóteles explica a natureza do objeto matemático. Seguem os autores:

> Eis a solução aristotélica: os objetos matemáticos não são entidades reais, mas tampouco algo de irreal. Eles existem "potencialmente" nas coisas sensíveis, sendo que a nossa razão os "separa" através da abstração. Assim, eles são entes de razão, que, "em ato", só existem em nossa mente, precisamente em virtude de nossa capacidade de abstração (ou seja, existem como "separados" somente na e pela mente), enquanto, "em potência", existem nas coisas como sua propriedade intrínseca. (REALE E ANTISSERI, 2003, p 196-197)[16]

Vamos aprofundar esse parágrafo. Como foi dito anteriormente, uma substância é um ser que existe por si mesmo, por exemplo, este cavalo, este computador, e assim por diante. Toda substância é um ente real. Além disso, na substância acontecem os acidentes. Um acidente é aquilo que não tem existência em si mesmo, mas existe nas substâncias, como as cores. Assim, explica Aristóteles (2010), os seres podem ser divididos em dez categorias, sendo uma delas a categoria da substância e as outras nove categorias são de acidentes. Nesse sentido, a quantidade é um acidente dos seres, por exemplo, um tecido tem dois

[16] Existe uma polêmica sobre se a matemática é inventada ou descoberta. Pela visão de Aristóteles, podemos dizer: as duas coisas. Enquanto potência nos objetos, a matemática é descoberta. Enquanto resultado da ação humana de abstrair e de comunicar, ela é uma invenção.

metros é um acidente. O número dois existe de fato, mas não em si mesmo (como queriam os platônicos), mas existe no tecido como uma potência que pode ser atualizada pelo intelecto através da abstração. Assim, a abstração matemática busca, em primeiro lugar, obter os entes matemáticos. Depois, é possível construir uma série de conhecimentos sobre esses entes. De tais objetos, podemos abstrair algumas de suas propriedades, criando novos objetos matemáticos a partir do primeiro.

O terceiro nível é o nível da abstração da metafísica. No terceiro nível de abstração capta-se os inteligíveis universais, como vimos no início deste capítulo. A metafísica se interessa pela essência e pelas causas dos seres. A metafísica pergunta "o que é?" e "como surge?". A matemática estuda as propriedades dos números e das formas geométricas, mas quando perguntamos o que é um número e qual é a causa dos números, estamos entrando no campo da metafísica[17].

Quadro 3: Níveis de abstração em Aristóteles

Nível de Abstração	Descrição	Ciência Correspondente	Exemplo
1. Abstração Material (Concreta)	Despoja as coisas das qualidades sensíveis individuais (cor, peso, textura), mas mantém a matéria comum; conhecimento ligado a objetos materiais particulares.	Física, Biologia, Ciências Naturais	Estudo da casa considerando sua imagem, o que pode fazer e o que pode sofrer.
2. Abstração Formal (Matemática)	Prescinde da matéria sensível, abstrai apenas as formas ou estruturas quantitativas e espaciais; objetos matemáticos são independentes da matéria particular.	Matemática	Estudo da forma da casa (planta, medidas, proporções) sem considerar o material ou cor.
3. Separação (Metafísica)	Abstrai tanto a matéria sensível quanto a inteligível; estuda o ser enquanto ser, em sua essência universal e imaterial.	Metafísica	Estudo da casa enquanto ser, sua essência, finalidade e princípios universais, além da matéria e forma.

[17] Note aqui a importância do estudo da metafísica. A possibilidade de inteligibilidade da matemática (e de qualquer ciência) não é objeto de estudo dela mesma. Um matemático pode estudar as propriedades dos números por anos sem saber o que é um número. Então podemos perguntar: em que sentido podemos dizer que ele sabe o que está fazendo? Sem o estudo metafísico, as ciências se tornam cegas, e podem cair em absurdos. Por exemplo, em que sentido um número irracional é um número? Será que não podemos dizer que apenas os números naturais são números, e os demais conjuntos numéricos são construções, estruturas, feitas de números?

Para a análise que se seguirá, é fundamental destacar que os níveis de abstração podem ser divididos em subníveis. A abstração matemática começa com dois grandes campos de conhecimento: os números e as formas geométricas. No caso do conhecimento dos números, inicia-se a abstração ordenando e contando, depois passa-se ao conhecimento das propriedades dos números (comutatividade, associatividade, distributividade, paridade, multiplicidade, divisibilidade, operações inversas, e assim por diante), formando o conjunto dos conhecimentos aritméticos. Dos conhecimentos aritméticos, abstrai-se os conhecimentos algébricos (escrita em linguagem algébrica, operações com monômios e polinômios, termo geral de uma sequência, equações e inequações, até os conhecimentos mais gerais sobre anéis e corpos). Isto é importante: álgebra é uma abstração de uma abstração. A álgebra não lida com números, mas com formas lógicas, tal como em um jogo de xadrez, onde o que importa não são as peças, mas as suas possibilidades de movimento. Dos conhecimentos algébricos, abstrai-se as noções sobre funções, passando pela análise e seguindo em estruturas cada vez mais abstratas.

Porém, essas noções abstratas ainda estão dentro do campo da abstração matemática, e não alcançam as abstrações metafísicas. A abstração metafísica começa quando perguntamos: “O que é um número?”, “O que é o infinito?”, “O que é uma extensão?”, “O que é um ponto?”

1.5 A aquisição do conhecimento a partir da abstração na teoria do conhecimento de Aristóteles.

Depois de tratarmos sobre os níveis e subníveis da abstração, trataremos das etapas do processo de aquisição do conhecimento.

Primeiramente, a atenção se volta para algum objeto específico, então os sentidos recebem as informações do objeto e uma faculdade denominada “senso comum” une todas as informações formando uma imagem mental, que Aristóteles chama de “forma sensível”, sendo gravada no fantasma, que é a união entre memória e imaginação. Neste ponto, o intelecto distingue os elementos essenciais, a forma, dos elementos não essenciais. Então o intelecto se atenta apenas para a forma que foi abstraída e esquece os elementos não essenciais. Se essa forma for expressa em palavras, temos o conceito ou definição. Essa definição é uma síntese entre o gênero a que o objeto pertence e a diferença específica.

Vemos que os elementos principais do processo de abstração são a sensação, a memória, a imaginação e a conceituação.

Nas palavras do filósofo temos:

> É a partir da memória que os seres humanos adquirem experiência, porque as numerosas lembranças de uma mesma coisa acabam por produzir o efeito de uma única experiência. [...] A arte é produzida quando a partir de muitas noções da experiência forma-se um só juízo universal relativamente a coisas semelhantes. (ARISTÓTELES, 2006, p. 44)

Note que nesse breve parágrafo temos todos os elementos essenciais do processo abstrativo: sensação, memória, imaginação e abstração propriamente dita.

Em resumo, a metafísica de Aristóteles define um modo de ver a realidade e, em particular a matemática, a saber, que as coisas são um composto de forma e matéria, de ato e potência. Desse modo de conceber a realidade ele deduz uma teoria do conhecimento. O conhecimento inicia nos sentidos, que é unificado pelo senso comum. Do senso comum extrai-se um fantasma, um amálgama de memória e imaginação. Desse fantasma, o intelecto ativo extrai a forma inteligível do objeto e “deposita” no intelecto passivo. As palavras chaves são sensação, memória e imaginação[18].

1.6 Resumo

Nesta primeira parte buscou-se reunir um conjunto de conhecimentos capazes de responder a certas indagações sobre a abstração enunciadas na introdução do trabalho. A seguir, temos uma lista de reflexões (com breves perguntas e respostas) que o estudo sobre Aristóteles nos proporcionou.

a) *Qual é a natureza metafísica de um conceito abstrato?* O conceito abstrato é uma potencialidade dos objetos reais que é atualizado pela mente. Ele não é nem um mero som, nem uma mera expressão para catalogar objetos diferentes. O nome desta teoria metafísica chama-se Realismo Moderado.

[18] Podemos aqui extrair os seguintes princípios: 1º deve-se buscar incluir o maior número de sensações em maior número de formas possíveis. 2º se um estudante não tiver memorizado plenamente um objeto, ele não poderá tomá-lo com ser individual e não poderá raciocinar abstratamente. 3º Se um estudante não usar a imaginação, não pensar sobre o objeto, não fizer e testar hipóteses, ele não poderá distinguir entre o que é característica do objeto em particular e o que é da sua espécie, e portanto, não haverá abstração alguma.

b) *O que é abstrair?*

> É a operação mediante a qual alguma coisa é escolhida como objeto de percepção, atenção, observação, consideração, pesquisa, estudo, etc. e isolada de outras coisas com que está numa relação qualquer. A abstração tem dois aspectos: 1º isolar a coisa previamente escolhida das demais com que está relacionada (o abstrair de); 2º assumir como objeto específico de consideração aquilo que foi assim isolado (abstração seletiva ou cisão prévia). (ABBAGNANO, 2007, p. 6)

c) *Quais são os tipos de abstração e que tipos de conceitos eles geram?* Existem três níveis de abstração: o científico, o matemático e o metafísico. E em cada tipo de conhecimento corresponde um tipo de abstração.

d) Como ocorre o processo de abstração? O processo de abstração inicia nos sentidos, passa pela memória e pela imaginação para finalmente formar o conceito abstrato. Esse processo será melhor detalhado pela TCM e pela Epistemologia Genética.

e) *O que é a matemática?* A quantidade é um acidente dos seres concretos. Como tal, a quantidade existe em potência nesses seres e que pode ser atualizada segundo a abstração de segundo nível. A matemática é um conjunto de conhecimentos acerca desses seres.

f) *Como se dá a abstração matemática na teoria de Aristóteles?* Conforme a citação anterior de Reale e Antisseri (2003), a abstração matemática se diferencia da abstração científica por seu objeto. A abstração científica produz o conceito das espécies dos seres e a abstração matemática produz objetos matemáticos. Além disso, existe outra diferença importante entre as duas abstrações: a abstração científica ocorre naturalmente enquanto a abstração matemática exige uma intencionalidade. Ou seja, quando vemos os seres vivos, é natural produzirmos uma imagem de sua espécie, mas para produzir os objetos matemáticos, como retas e números, é necessário que se queira que isso aconteça. A citação de Miguel Reale e de Dario Antisseri nos diz que, na concepção aristotélica, a abstração matemática inicia-se pelo conceito de espaço, isto é, ao considerar os seres reais apenas como corpos de três dimensões. É só depois disso que abstraímos uma dimensão e consideramos os seres como tendo apenas duas dimensões, e então como tendo apenas uma dimensão, e finalmente com unidades puras, isto é, como pontos. Exemplificando: ao ver um dado podemos considerá-lo abstraindo sua cor, textura, peso, tamanho e tomando-o apenas como cubo. Do cubo abstraímos o quadrado de uma de suas faces. Do quadrado abstraímos a linha de um de seus lados e da linha abstrairmos o ponto de uma de suas extremidades. Do ponto, abstraímos a noção de ordem e de quantidade. Portanto a abstração matemática, em Aristóteles, inicia pela geometria para depois chegar na aritmética. Em cada etapa, o sujeito deve atentar para um determinado aspecto do objeto e esforçar-se por imaginar esse objeto em diversas posições e relações. Por exemplo, imaginar a linha estendendo-se infinitamente para se tornar uma reta e deve guardar essas imagens na memória. De forma análoga, é possível construir todos os objetos matemáticos.[19]

[19] Se a abstração se volta para os fundamentos da matemática, como o conceito de demonstração, de axioma, de verdeiro e de falso, de ordem ou de equivalência, estamos no nível da abstração metafísica.

2. ABSTRAÇÃO NA TEORIA COMPUTACIONAL DA MENTE DE PINKER

2.1 Da metafísica e da teoria do conhecimento segundo a filosofia às ciências

Nesta seção estudaremos a Teoria Computacional da Mente a fim de entender o processo de abstração segundo uma perspectiva científica, especificamente biológica. Para tal, iniciaremos esse capítulo diferenciando a ciência da filosofia.

Definir filosofia não é uma tarefa fácil, pois muitos filósofos já se debruçaram sobre este tema sem chegar a um consenso. É possível que o termo “filosofia” tenha sido cunhado por Pitágoras. O significado desse termo é amor à sabedoria. Desse modo, o filósofo seria alguém interessado em obter os bens do conhecimento (em oposição aos bens materiais ou aos bens da fama). Portanto, nesse sentido, todo cientista é também um filósofo. Aliás, O termo “ciência” é um termo moderno, mas por muito tempo os cientistas foram conhecidos como filósofos da natureza e não é um exagero dizer que a filosofia é a mãe de todas as ciências.

Dizer que a filosofia é a mãe de todas as ciências pressupõem uma separação entre a filosofia, a mãe, e as suas filhas. Por exemplo, Tomás de Aquino, seguindo uma linha aristotélica de pensamento, considera que existem ciências (no sentido de saberes) superiores e inferiores. Essa superioridade se dá pelo objeto próprio de cada área de estudo (alguns saberes são mais nobres do que outros, por exemplo a teologia é mais nobre do que a botânica pois Deus é mais nobre do que as plantas) e pela ordem (algumas ciências fundamentam outras, por exemplo a geometria estuda os princípios utilizados pela óptica).

Isso é particularmente importante, pois com o fim da Idade Média (e por diversos motivos que não convém explorar neste texto) a teologia e a filosofia primeira (metafísica) perderam seu prestígio. Esse prestígio foi passado para as ciências particulares (zoologia, botânica, cinemática, óptica, química, entre outras), as quais foram se desenvolvendo cada vez mais de modo independente da filosofia a tal ponto que existe quem acredite que as ciências podem vir a suplantar a filosofia, até que esta se torne obsoleta.

Na medida em que as ciências se separam da filosofia, pouco restou à filosofia, de modo que hoje existem duas tentativas de definir a filosofia: uma pelo seu objeto e a outra pelo seu objetivo. A primeira dessas tentativas diz que como as ciências particulares se emanciparam da filosofia, então a filosofia é a área do conhecimento que se ocupa das "grandes questões" abstratas da metafísica, da estética e da ética. Uma outra linha de tentativa de definir a filosofia é a linha da filosofia analítica. Essa linha diz que a filosofia é uma atividade cuja finalidade é elucidar os termos e as perguntas das outras ciências, ou seja, a filosofia ainda é um tipo de mãe que organiza os conhecimentos individuais das diversas ciências. Vale uma ressalva, a filosofia analítica pretende elucidar termos e perguntas através de uma análise linguística.

Escrevemos essas linhas para tentar compreender o que se entende por filosofia e porque ela é assim entendida. Convém agora entender o que é ciência. As diversas ciências são esforços humanos para tentar descobrir algo da realidade a partir de um certo método. Toda ciência tem um objeto real, um objeto formal e uma pergunta sobre o objeto formal e o método científico se baseia na observação empírica e em experimentos cuja finalidade é testar hipóteses. De um modo muito simplificado podemos dizer que a filosofia é abstrata e reflexiva enquanto que as ciências são concretas e empíricas.

Seguindo uma linha aristotélico-tomista, entendemos que a filosofia é a área do conhecimento que tem a função de estudar os princípios das outras áreas do conhecimento. Princípios estes que escapam ao próprio método científico. Por exemplo, a física se baseia na matemática, a matemática na lógica e a lógica na metafísica, ou dito de outro modo, o conhecimento da física afirma que $v = d/t$[20]. Esse conhecimento tem seu fundamento na matemática que estuda o que é a divisão. Mas a matemática tem seu fundamento no princípio de identidade e o princípio de identidade se baseia no princípio ontológico de que um ser é idêntico a si mesmo.[21] Mas se a filosofia estuda os princípios das ciências (e ela não faz apenas isso), por outro lado, as diversas descobertas científicas oferecem à filosofia novos problemas de reflexão, de modo que as duas crescem e se desenvolvem de modo dialético.

Isto significa que a TCM que estudaremos a seguir está em um grau inferior de valor e de certeza em relação à metafísica de Aristóteles, ainda que tenha muito a acrescentar.

---

[20] Velocidade média é a distância dividida pelo tempo.
[21] Note-se que o método científico não pode provar nem a ontologia, nem a lógica e nem a matemática.

2.2 De Aristóteles a Pinker.

Agora que já tratamos da relação entre filosofia e ciência em geral, passemos a tratar especificamente da relação entre filosofia aristotélica e Teoria Computacional da Mente. São duas as justificativas para nos aprofundarmos na metafísica e na teoria do conhecimento aristotélico. A primeira é de tipo histórica, pois Aristóteles inaugurou o tema da abstração na sua teoria do conhecimento. Além disso, estudamos Aristóteles para extrair conceitos que ainda hoje nos permitem analisar tanto as teorias científicas como as apresentadas por Pinker com as pedagógicas exploradas no próximo capítulo.

Lembremos que o objetivo desse estudo é produzir um material de aplicação prática no ensino de matemática, então tal material deve ser produzido segundo alguma teoria pedagógica. No entanto, como saber qual é a teoria mais adequada para produzir esse material? Como existem inúmeras teorias pedagógicas, algumas conflitantes entre si, portanto precisamos de critérios superiores (metafísicos e científicos) que possam ajudar a discernir qual teoria pedagógica é a mais adequada. Nesse sentido, a teoria Aristotélica nos traz conceitos úteis para tal análise. Mas, poderia-se perguntar se a filosofia aristotélica é suficiente para analisar as teorias pedagógicas. Nos parece que a resposta é negativa, pois ela precisa das contribuições da ciência contemporânea.

Apesar da profundidade dos conceitos aristotélicos, não se pode ignorar que muito conhecimento foi produzido desde que Aristóteles faleceu. No campo filosófico, Platão e Aristóteles não perderam seu valor e dificilmente se pode dizer que foram superados. Contudo, no campo científico, não devemos ignorar as contribuições da neurociência, da linguística, das pesquisas em inteligência artificial, entre outros, para a educação. Como não é possível tratar todos esses temas neste trabalho, apresentaremos uma teoria contemporânea que reuniu todos esses conhecimentos em uma síntese organizada. Essa teoria é conhecida como Teoria Computacional da Mente.

A Teoria Computacional da Mente surge no contexto das ciências cognitivas. As ciências cognitivas emergiram na década de 1950 como um campo interdisciplinar revolucionário, nascido da convergência de várias disciplinas que compartilhavam o interesse comum em compreender a mente e os processos mentais. Este movimento foi impulsionado por avanços simultâneos em psicologia experimental, linguística, filosofia da mente, neurociência, inteligência artificial e antropologia. A Teoria Computacional da Mente (TCM) reúne todos esses elementos e foi recentemente fundada por Hilary Putnam e Jerry Fodor em 1961. Contudo é com Steven Pinker que ela ganha uma versão mais abrangente e coerente. Em seu livro "Como a mente funciona" (1997), Pinker explica pormenorizadamente os mecanismos de funcionamento da mente. Nas páginas seguintes, exporemos a TCM, dando ênfase sobretudo ao funcionamento do processo de abstração e aos processos de aprendizagem.

2.3 Visão geral

A Teoria Computacional da Mente (TCM) é uma teoria científica que propõe que os conceitos usados para explicar o funcionamento de um computador também podem ser aplicados à mente humana. A TCM se baseia em três princípios epistemológicos: a teoria da evolução de Darwin, a engenharia reversa e a teoria da computação. Como a teoria da evolução e a teoria da computação são áreas bastante conhecidas do público em geral, precisamos apenas explicar o que é a engenharia reversa: engenharia reversa é a técnica de tentar entender o que um objeto é a partir de seu funcionamento.

Aplicando a engenharia reversa ao cérebro, a TCM concluiu que o cérebro é um órgão que evoluiu a fim de se aperfeiçoar na capacidade de computar dados. Segundo essa abordagem, o cérebro processa informações de maneira semelhante a um computador: ele representa informações por meio de símbolos e códigos, e os processos mentais seguem algoritmos, ou seja, sequências de etapas para resolver problemas. Por isso, termos como "input", "output" e "memória de trabalho" são utilizados para descrever o funcionamento da mente.

Existem críticas à TCM, como a famosa teoria do quarto chinês de John Searle, além de divergências entre seus próprios defensores, como Jerry Fodor. Ambos argumentam, cada um a seu modo, que a TCM não é suficiente para explicar a consciência. O comentário a seguir, de Peter Bentley, resume o argumento de Searle:

> Searle então se imaginou dentro de uma sala. Pegava pedaços de papel por uma fenda na porta, procurava os símbolos que via em um arquivo e seguia as instruções sobre quais símbolos colocar para fora pela fenda novamente. Searle estava efetivamente seguindo o programa da IA manualmente. Em nenhum momento entendia o que qualquer um dos símbolos significava. Estava apenas seguindo regras. Searle sugeriu que não havia diferença na maneira como ele estava se comportando em sua Sala Chinesa em comparação com a IA. Assim sendo, se ele não entendia chinês, a IA também não entendia. Só poderia ser uma coisa: a IA estava simulando a habilidade de conversar em chinês – IA fraca. Pode parecer um pato, grasnar como um pato, mas não é um pato. (BENTLEY, 2025, p.78-9)

Mas o mesmo Bentley, apelando ao desenvolvimento das novas Inteligências Artificiais, responde a crítica de Searle:

> Para as Inteligências Artificiais simples que operavam usando processamento simbólico, o argumento de Searle era convincente. Essas IAs simplesmente embaralhavam símbolos e não faziam ideia de como tais símbolos ou as regras que elas seguiam correspondiam a qualquer coisa em nosso mundo físico. Contudo, cientistas cognitivos passaram muitas décadas contra-argumentando para provar que Searle estava errado. Por exemplo, substitua Searle dentro de sua Sala Chinesa por um cérebro humano de um falante de chinês e observe atentamente os neurônios individuais. Algum neurônio entende chinês? No entanto, ao trabalhar juntos, eles conseguem ter essa compreensão. Se um computador construiu seu conhecimento e comportamento usando programas que funcionavam dessa maneira, por que ele não entenderia chinês tão bem quanto um cérebro humano? (BENTLEY, 2025, p.79)

Ainda que não cite diretamente, o parágrafo acima acaba sendo uma defesa contundente da TCM. Aqui não aprofundaremos esse debate, mas, no mínimo, reforçamos que essa é uma teoria bastante coerente. Além disso, não discutiremos aqui qualquer alternativa, dado que a TCM é utilizada apenas como uma chave teórica interessante, que permite conectar reflexões filosóficas e pedagógicas sobre a abstração. Mesmo que a TCM não explique a consciência, ela nos ajuda a compreender o processo de abstração, que é o foco deste trabalho.

Para Aristóteles, a alma é a forma do corpo, portanto, imaterial. A alma abstrai da matéria a causa formal dos objetos, que também é imaterial, e sobre ela opera. Assim, a abstração é fundamental, pois conecta o mundo material ao imaterial. Para Pinker, tudo o que existe é material. Embora desejos e crenças não sejam materiais (Pinker é nominalista e não crê na causa formal como algo real), a mente só existe como produto do cérebro, que é material. Portanto, o processamento da informação na mente é material: pensamentos são sinapses - descargas elétricas ou químicas entre neurônios. Pinker (1998) usa o exemplo de uma pegada: ela é um objeto material, mas um ser capaz de computação pode extrair informações sobre o animal que a deixou, sua direção e peso.

Com esse conceito de informação, Pinker acredita ser possível explicar a ação humana em termos de crenças e desejos. Por exemplo, alguém aposta na loteria porque deseja ganhar e acredita que pode ganhar. Nenhuma lei da natureza explica essa ação, mas crenças e desejos, embora não materiais (não têm cor, cheiro, massa ou ocupam espaço), são processados materialmente. Esse é o clássico problema mente-corpo: como algo imaterial pode afetar o corpo material e vice-versa? Diversas respostas foram propostas ao longo da história, como Descartes, que localizava a alma na glândula pineal. Mas, se a alma não é física, como pode ocupar um lugar?

Para Pinker (1997, p. 44), crenças e desejos são informações processadas; a informação não é material, mas é processada em bases materiais. Em outras palavras, embora crenças, desejos e a mente não sejam materiais, são resultado de um processamento material. Como diz Pinker (1999, p. 37): “A mente é o que o cérebro faz.” Ou seja, a mente é o conjunto total de informações processadas.

Afirmar que o cérebro é um órgão que processa informações significa, biologicamente, que ele é um conjunto de neurônios conectados em rede, transmitindo informações por sinapses - descargas elétricas ou químicas (geralmente potássio).

A informação captada é processada em “módulos mentais” ou “órgãos mentais”. “A mente é um conjunto de módulos, mas estes não são cubículos encapsulados ou fatias circunscritas da superfície do cérebro.” (PINKER, 1997, p. 41). Os módulos mentais são áreas cerebrais que se ativam em conjunto ou separadamente para executar funções mentais específicas. Cada módulo evoluiu para desempenhar um papel, sendo projetado para resolver um problema específico dos ancestrais humanos. Assim como os órgãos do sistema digestivo colaboram para a absorção de nutrientes, os módulos mentais se unem para permitir ao ser humano pensar, resolver problemas cotidianos e garantir a sobrevivência e a continuidade da espécie.

Portanto, a mente é resultado de milhões de anos de evolução e de inúmeras etapas de transmissão de um órgão material, cuja finalidade é a sobrevivência e a reprodução dos indivíduos.

2.4 A abstração segundo a Teoria Computacional da Mente.

Depois de abordar o que é a TCM, vamos nos deter à teoria do conhecimento segundo essa abordagem e, em particular, a como entende o processo de abstração.

Segundo Simplício e Haase (2020,p.106) e Pinker (1997, p. 176) a mente é uma rede associativa. Isso significa meramente que os neurônios trabalham em conexão visando um objetivo comum.

Vamos usar uma analogia para explicar como uma rede associativa funciona. Imagine um órgão do governo extremamente burocrático onde os funcionários são divididos em andares de um prédio. Cada andar tem um nível de função e a tarefa de cada funcionário é dizer “sim” ou “não” (“verdadeiro” ou “falso”, “aprovado” ou “reprovado” e assim por diante) para cada documento apresentado. Caso o funcionário diga “sim” para um documento seu, então você pode ir adiante e subir de andar. Agora imagine que você deseja pagar uma conta de água atrasada neste órgão, então você imprime a conta e se dirige ao prédio do órgão. O primeiro andar serve para ver se o que você tem em mãos é um papel. No segundo andar, será avaliado se o que o papel contém é uma conta. No terceiro andar, será avaliado se essa conta é uma conta de água. No quarto andar será avaliado se você tem condições de pagar a conta. Finalmente, no quinto andar, você paga a conta.

Agora, imagine que os funcionários desse órgão não são muito inteligentes. Para cada andar há uma infinidade de funcionários, cada um diz “sim” ou “não” para um aspecto muito específico de cada etapa. Por exemplo, no primeiro andar, um funcionário irá dizer se o objeto que você está trazendo é retangular, outro triângular, outro circular, e assim por diante (existe assim, um funcionário para cada forma possível). Outro quer saber se o fundo do objeto é branco, outro preto, outro vermelho e assim por diante (de modo que existe um funcionário que avalia cada cor, lembre-se que o funcionário não pode dizer uma cor, ele somente diz “sim” ou “não”), desse modo haverá uma infinidade de funcionários que avaliarão cada aspecto possível do objeto em questão. Se o funcionário da forma disser que não se trata de um retângulo ou se o funcionário da cor de fundo disser que não se trata de cor branca, então você não pode subir de andar. Vamos continuar a analogia ainda mais um pouco. No segundo andar (que avalia se o objeto é uma conta) um funcionário avalia se existe um código de barras na folha, outro se há números e assim por diante, até chegar ao quinto andar.[22]

Na teoria computacional, cada funcionário corresponde a um "demon", isto é, uma unidade de informação. Já no âmbito cerebral, cada funcionário (ou demon) pode corresponder a um neurônio ou conjunto de neurônios que processem certa informação.

Entretanto, uma correção deve ser feita a essa analogia. No cérebro humano não há andares, mas cada neurônio se conecta com muitos outros. A analogia dá a entender que há uma linha única que liga cada funcionário com sua etapa superior e os funcionários de um andar não influenciam os seus colegas e que você só subirá de andar caso tenha todos os carimbos corretos e nenhum carimbo errado. Mas na realidade, seria correto dizer que todos os funcionários desse órgão governamental estão em grande salão correndo por todos os lados e trocando informações. Assim, a mente não é somente uma rede associativa, mas uma rede autoassociativa.

E, segundo Pinker (1997, p.162 em diante), a mente ser uma rede autoassociativa assim definida tem cinco vantagens.

A primeira vantagem é que alguns funcionários podem "fazer amizade" e andar juntos, então você pode identificar um objeto apenas com algumas de suas características. A segunda vantagem é chamada de "degradação suave". Por conta da amizade dos funcionários, é possível se reconhecer certas falhas e encontrar a

---

[22] Poderíamos aplicar a mesma analogia a uma clínica veterinária e digamos que você gostaria de levar o seu cachorro para ser tratado. Assim, no primeiro andar do prédio haveria inúmeros funcionário para avaliar se o paciente é um cachorro (um avaliaria se ele tem pelos, outro se mama, outro se tem quatro patas, outro se tem focinho e assim por diante. No segundo andar, se avaliaria se o cão está doente. No terceiro andar, qual é a doença. No quarto andar, qual é o tratamento.

Outro exemplo: como o olho funciona. A identificação da forma geométrica de um objeto. O primeiro andar da visão identifica as cores do objeto, calculando uma cor média de cada parte. O segundo andar tenta resolver o problema da forma de cada parte do objeto aplicando a noção de luz e sombra (tons mais escuros representam sombra e tons claros representam as partes iluminadas) isso permite identificar as curvas e as partes planas dos objetos. O terceiro andar identifica os tamanhos das partes usando as leis de perspectiva (objetos menores tendem a estar mais longe, objetos maiores tendem a estar mais próximos). Por fim, o último andar junta todas as partes e gera a imagem mental do objeto. Essa imagem mental será guardada na memória e poderá ser utilizada para outras funções posteriores. O exemplo do olho tem implicações importantes que serão discutidas adiante.

forma correta através do contexto. A terceira vantagem é chamada “satisfação de restrição”, que não exploraremos aqui, mas é bastante similar à segunda. A quarta vantagem é que uma rede autoassociativa pode aprender com exemplos. Se os funcionários podem formar amizades, então a assimilação de exemplos de situações novas, criam a oportunidade de acomodar novas amizades entre os funcionários da empresa. Essas vantagens são importantes, pois elas justificam a possibilidade de se criar classes de objetos e isso permite o raciocínio silogístico.

Já a quinta vantagem é de particular importância para este trabalho: uma rede autoassociativa tem a capacidade de fazer generalizações automáticas. Voltemos ao exemplo do olho. O sentido da visão opera identificando pequenas partes dos objetos e depois montando uma imagem mental desse objeto. Desse modo, um objeto será reconhecido se satisfizer uma certa quantidade de características. Suponha que a mente identificou (certos funcionários identificaram certas características, ou ainda certos neurônios foram ativados associados a certas características) um objeto que é branco, tem bico de pato, tem pé de pato, tem penas, anda e se alimenta. Logo é um pato. Mas a rede autoassociativa também permite que identifiquemos uma ave pelo fato de ter penas. Então, se apenas o funcionário de “penas” for ligado, sabemos que se trata de uma ave, ainda que não saibamos qual é essa ave. Mas, pelo fato de ser ave (lembre-se da amizade dos funcionários), sabemos que ela provavelmente voa e põe ovos. Nesse sentido, a abstração é um processo que consiste em ignorar os funcionários desnecessários e a rede neural só trabalha com os funcionários especificamente associados às características gerais.

No dizer de Pinker

> Suponhamos que as unidades de input na parte inferior representem a aparência de animais: “peludo”, “quadrúpede”, “emplumado”, “verde”, “de pescoço comprido” etc. Com unidades suficientes, cada animal pode ser representado ligando-se as unidades para o conjunto único de propriedades desse animal. Um papagaio é representado ligando-se a unidade “emplumado”, desligando-se a unidade “peludo” e assim por diante. [...] Quanto menos numerosas as unidades, mais ampla a classe. Digamos que haja unidades de input para “move-se”, “respira”, “peludo”, “late”, “morde” e “levanta a perna em postes”. As conexões que emanam de todas as seis acionam fatos sobre cachorros. As conexões que emanam das três primeiras acionam fatos sobre mamíferos. As que emanam das duas primeiras acionam fatos sobre animais. Com pesos adequados, os conhecimentos programados para um animal podem ser compartilhados com seus parentes imediatos e também com os distantes. (PINKER, 1997, p. 177-179)

2.5 O pensamento matemático segundo a TCM

O ponto central da teoria do conhecimento dentro da perspectiva da TCM é o entendimento do cérebro como uma rede autoassociativa. Existem outros elementos relevantes, como a função dos sentidos, ou a forma de processamento de informações, mas tais detalhes não podem ser explorados neste trabalho. Convém agora aplicar o que foi dito ao conhecimento matemático.

De modo resumido, podemos dizer que a abstração matemática segue a mesma lógica aplicada aos animais nos exemplos anteriores. Por exemplo, cada número tem certas características, as quais serão representadas por funcionários que podem ser ligados ou desligados. Desse modo, o número 0 está associado à ausência de unidade, mas também a ser o neutro da soma e o elemento absorvente do produto. Dito de outro modo, qualquer número real somado com zero é igual a ele mesmo e qualquer número real multiplicado por zero é igual a zero e podemos usar a linguagem simbólica da matemática para escrever $x \in R \Rightarrow x + 0 = x\, e\, 0 \cdot x = 0.$

No entanto, há uma diferença essencial entre aplicar a noção de abstração segundo a TCM no contexto dos animais e das plantas e no contexto da matemática. Como foi dito acima, o cérebro é um órgão que evoluiu para resolver os problemas dos povos nômades ancestrais. Identificar animais e plantas, saber quais são aptos para comer, quais são aptos para o trabalho, etc são necessidades dos ancestrais humanos, mas escrever em linguagem simbólica uma regularidade matemática não era uma necessidade desses povos. Logo, o cérebro evoluiu para resolver os primeiros problemas, mas não os últimos.

Aqui devemos introduzir a distinção entre habilidades primárias e secundárias, que podem corresponder ao par conceitual de Pinker de racionalidade ecológica e racionalidade formal. As habilidades primárias são aquelas que o cérebro desenvolveu para realizar de modo natural, são as habilidades necessárias à sobrevivência dos povos primitivos, como andar e falar. Já as habilidades secundárias não são habilidades naturais, mas que exigem um certo esforço e treino, como usar a álgebra e escrever. Existem habilidades matemáticas primárias, como identificar pequenas quantidades, estimar as chances de um evento acontecer, comparar tamanhos e reconhecer certas formas geométricas, mas o cérebro não foi programado para realizar as habilidades matemáticas superiores.

O cérebro deve aprender as habilidades secundárias a partir das primárias. Após uma quantidade suficiente de tempo de estudo, o cérebro adquire como que uma nova natureza, incorporando novas habilidades matemáticas. Dito de outros modos, leva tempo e esforço concentrado para que novos caminhos na rede neural sejam formados e novos fatos matemáticos sejam associados a um certo funcionário da estatal. Precisamos forçar a amizade entre certos funcionários e desfazer a amizade de outros. Por exemplo, no pensamento infantil, o funcionário do conceito de "quantidade" está associado ao funcionário do conceito de "um", de "dois" e assim por diante. Para que haja um pensamento algébrico, é preciso desligar os funcionários de "um" e "dois" e deixar ligado apenas o funcionário da "quantidade" e se associar ao funcionário de conceito de "dobro", "triplo", e assim por diante. Porém isso não é uma habilidade primária que foi herdada, não faz parte da racionalidade ecológica dos povos primitivos. Logo, essa acomodação[23] exigirá reflexão atenta, memorização e esforço por parte do estudante, que pode ser mediado por exemplos e exercícios dos mais variados tipos.

Após o cérebro adquirir essa nova natureza, ele pode passar para novos níveis de aprendizado que exigirão maiores níveis de abstração.

No dizer de Simplício e Haase temos:

> À medida que a criança vai adquirindo experiência com as tarefas da adição, os resultados das associações problema-resposta são armazenados como fatos aritméticos na memória semântica[24]. Com a experiência a resolução de problemas passa a ser executada de forma mais fácil, sendo incorporada na memória de longo prazo.(SIMPLÍCIO, HAASE. 2020, p. 108)

E Pinker (1998) afirma:

> Os conceitos matemáticos provêm do encaixe de conceitos antigos formando um novo arranjo útil. Mas esses conceitos antigos são montagens de conceitos ainda mais antigos. Cada submontagem mantém-se coesa graças aos rebites mentais denominados junção e automatismo: com muita prática, os conceitos aderem uns aos outros e formam conceitos mais amplos, e sequências de passos são compiladas em um passo único.[...]. A matemática é impiedosamente cumulativa, a começar da contagem de um a dez. [...] E, sem a prática que compila uma hesitante sequência de passos em um reflexo mental, um aprendiz sempre estará construindo estruturas matemáticas a partir dos mais minúsculos parafusos e porcas, como o relojoeiro que nunca fazia submontagens e precisava recomeçar tudo desde o início cada vez que largava o relógio semimontado para atender ao telefone. (PINKER, 1997, p. 570-571)

[23] Usamos um termo piagetiano propositalmente, para indicar uma possível convergência entre os autores a ser explorada mais tarde.
[24] A memória semântica é parte da memória que não registra fatos ou experiências mas termos e frases, regras de gramática e o que foi dito sobre determinado fato ou experiência.

Lembremo-nos da distinção aristotélica de abstração científica, matemática e filosófica. Podemos entender que a abstração científica (que visa a abstração da espécie de cada ser) está dentro dessas habilidades primárias, pois é uma necessidade imediata dos povos coletores e caçadores. Contudo, a abstração matemática avançada e abstração metafísica não são necessidades associadas à sobrevivência dos ditos povos, por isso estão associadas às habilidades secundárias, àquelas que exigem esforço para serem adquiridas em cada etapa de sua construção, conforme citado acima.

2.6 Resumo.

Assim como no capítulo anterior, agora apresentaremos quais elementos da TCM podem ser aplicados à didática da matemática. Em outras palavras, apresentaremos como a TCM nos responde cada uma das perguntas abaixo:

a) *Como ocorre o processo de abstração segundo a biologia evolutiva?* Cada módulo mental tem uma função. A visão capta a imagem do objeto e produz uma imagem mental a partir de um processo de descoberta e construção da imagem na mente. Cada unidade de informação corresponde a um aspecto dessa construção que é "ligada". Abstrair é "'desligar" certas unidades de informação e dar atenção a outros aspectos.
b) *O processo de abstração é sempre fácil?* Não, a teoria dos níveis primário e secundário de funções cognitivas da TCM afirma que existe uma abstração para elementos de nível primário, que é um processo fácil, e existe uma abstração para elementos de nível secundário, que requer esforço.
c) Quais são as condições necessárias para que a abstração em geral ocorra? Segundo a TCM, para que a abstração possa ocorrer, é necessário que o objeto sobre o qual se operará a abstração não seja conhecido apenas de modo geral, mas é preciso conhecer aspectos do objeto. Quanto mais aspectos forem conhecidos, melhor será o processo abstrato e melhor será o conceito abstrato formado a partir desse objeto.
d) *Como isso se aplica à matemática?* Para que a abstração matemática ocorra é necessário que os conhecimentos prévios estejam bem solidificados. Por exemplo, a abstração algébrica só pode ocorrer quando os números não são

conhecidos apenas como quantidades, mas são conhecidas relações e propriedades numéricas[25], assim como o sinal de igualdade deve ser entendido como um sinal que representa uma relação e não apenas um sinal para indicar o local da igualdade.

[25] Como dirá Kaput mais adiante.

3. ABSTRAÇÃO SEGUNDO A EPISTEMOLOGIA GENÉTICA DE PIAGET

Destacada essa valorização da dedicação e até mesmo do possível prazer advindo de seus resultados, investiguemos agora como uma das mais influentes teoria de aprendizagem desenvolvida durante muitas décadas do século XX trata da questão do desenvolvimento dos processos de abstração nas mentes das crianças e jovens. Façamos, pois, um resumo da Epistemologia Genética de Jean Piaget.

3.1 Comparação Aristóteles - Piaget

Neste trabalho estamos assumindo uma posição em grande parte aristotélica. Portanto, convém iniciar este capítulo estabelecendo uma comparação entre Aristóteles e Piaget. Ainda que Aristóteles tenha sido aluno de Platão, e este tenha se baseado na matemática para inspirar suas teses filosóficas, o discípulo se afastou do mestre e usou a biologia como ciência base para inspirar sua pesquisa filosófica. Isso se justifica em parte pelo fato de seu pai ser médico da corte do rei Alexandre. Desse modo, não é absurdo afirmar que a imagem do médico tenha causado um profundo impacto na mente prodigiosa de Aristóteles. Como Piaget também inicia sua carreira pelo estudo da biologia, neste ponto, podemos notar uma semelhança nas ideias fundamentais dos dois pensadores, pois ambos estão interessados em processos de mudança e desenvolvimento, ambos tem um apreço pela sistematização do conhecimento e ambos atribuem um papel importante à observação empírica.

Por outro lado, Aristóteles e Piaget viveram em períodos sócio-históricos diferentes. Aristóteles é grego e, portanto, sua cosmovisão é hierárquica e teleológica, ou seja, cada ser no universo tem uma finalidade[26] que define sua posição adequada no cosmos. Piaget, por outro lado, é um pensador moderno e a modernidade exclui o conceito de causa final e de hierarquia natural dos seres[27]. Além disso, o modo de fazer ciência na modernidade é diferente do modo do período clássico. A ciência moderna é marcada pelo experimento[28]. Um experimento é uma decisão do cientista. O cientista se interessa por uma pergunta acerca de um

[26] O estudo da causa final foi realizado no segundo capítulo.
[27] Essa exclusão tem raízes em Lutero, Kant e sobretudo no iluminismo, mas não aprofundaremos esses pormenores neste texto.
[28] Vide Francis Bacon e Kant.

aspecto da realidade e tenta criar uma condição que isole as variáveis do fenômeno e deixe apenas a variável em questão para ser observada. Todavia, a prática científica do período clássico era a observação pura, conhecida como “contemplação”, onde o filósofo se sentava perante o objeto e o observava no seu estado natural, como que deixando o objeto falar.

Até agora listamos diferenças entre Aristóteles e Piaget no que se refere às suas visões acerca da realidade como um todo e a visão de ciência em particular. Convém ainda destacar que, para Aristóteles, o conhecimento está mais próximo da metafísica, enquanto que, para Piaget, o conhecimento está mais próximo da biologia, ou seja, para Aristóteles, o conhecimento verdadeiro é universal e imutável, enquanto Piaget via o conhecimento como construção ativa e adaptativa do sujeito ao ambiente.

Muito desse trabalho está alinhado à leitura metafísica e, em um certo sentido, à cosmovisão hierárquica e teleológica de Aristóteles. No entanto, não deixamos de reconhecer que avanços foram feitos em diversas áreas do conhecimento. No caso, reconhecemos que Piaget trouxe contribuições importantes para a compreensão de como o ser humano aprende.

3.2 A Epistemologia Genética

Feita esta introdução, estudemos agora os pormenores da teoria do conhecimento segundo a Epistemologia Genética de Jean Piaget. Ao contrário do que o nome pode parecer indicar, tal teoria não se propõe a explicar o conhecimento a partir do DNA (genética). Na verdade, ela procura estudar e explicar como se dá o conhecimento a partir da sua origem (gênese), isto é, a partir das nossas habilidades mais fundamentais.

Em geral, Piaget é estudado como aquele que determinou as faixas etárias do desenvolvimento infantil (do período sensório-motor até o lógico formal) e do inventor do par assimilação-acomodação. No entanto, como já enunciamos, caso se queira entender o pensamento de Piaget, deve-se iniciar o estudo de seu pensamento pela sua formação de base: a biologia.

Dentro da biologia encontramos um axioma: todo ser vivo busca a homeostase. Isso significa que, se o ser vivo sente algum desconforto, então ele buscará meios de anular este desconforto, seja a fome, o calor ou a dor. Piaget resume essa ideia no par “equilíbrio-desequilíbrio”.

> O indivíduo age apenas ao experimentar uma necessidade, ou seja, se o equilíbrio entre o meio e o organismo é rompido momentaneamente; neste caso, a ação tende a restabelecer o equilíbrio, isto é, precisamente a readaptar o organismo (Claparède). (PIAGET, 2013, p.29)[29]

Nesse sentido, toda ação comporta um componente afetivo (como o incômodo ou o desejo) que mobiliza a energia do indivíduo para a ação e um aspecto cognitivo que decide por qual meio se alcançará o objetivo desejado. No caso dos animais o aspecto cognitivo é o instinto, que impele o animal a ter uma resposta eśpecífica para cada estímulo, seja fuga, seja ataque, seja se fingir de morto e assim por diante. No caso do ser humano, o aspecto cognitivo é a inteligência. Mais do que isso, a própria inteligência segue o modelo da busca pela homeostase. Segundo Piaget “a inteligência não passa de um termo genérico que designa as formas superiores de organização ou de equilíbrio das estruturações cognitivas.” (1972, p. 15)

Aqui surge um termo importante para Piaget: a estrutura. Estrutura cognitiva significa um conjunto de esquemas ou de ações que juntas são capazes de realizar uma ação. A seguinte imagem tornará claro o conceito. Suponha que um indivíduo está de frente para uma mata fechada. Teoricamente há infinitas possibilidades de caminhos possíveis. Agora suponha que o sujeito abra um caminho do ponto A ao ponto B. Esse caminho se tornou uma resposta fácil ao problema “como ir do ponto A ao ponto B” que poderá ser novamente utilizado quantas vezes for necessário, (ele não precisará descobrir outro caminho, a menos que surjam novos obstáculos) e a isso corresponde o esquema.

Agora, suponha que abram-se inúmeros caminhos que ligam os pontos A, B, C, e assim por diante. Esse conjunto de caminhos é a estrutura cognitiva. Durante a vida, o indivíduo é colocado diante de situações para as quais ele não sabe a resposta, e ele precisa achar uma nova resposta (seja o bebê que aprende a se equilibrar, seja o estudante que precisa dominar o conceito de derivada). Assim, o sujeito adquire um conjunto de habilidades dos mais variados tipos. A esse conjunto denomina-se estrutura cognitiva. Como tal estrutura está sempre em aberto, isto é,

[29] livro A psicologia de inteligência

colocada em novas situações de desequilíbrio e deve buscar um novo equilíbrio cognitivo. "O Nascimento da Inteligência na Criança" (1966):

> "A inteligência é uma adaptação. Para aprendermos as suas relações com a vida, em geral, é preciso determinar quais as relações que existem entre o organismo e o meio ambiente. Com efeito, a vida é uma criação contínua de formas cada vez mais complexas e um equilíbrio progressivo entre essas formas e o meio." (PIAGET, 1966, p. 15)

Podemos ver essa inteligência atuando no humano desde a infância. Exames de ultrassom, por exemplo, mostram que certas crianças já fazem o movimento de sucção desde o útero materno, isto é, existe um conjunto de capacidades inatas que serão a base das habilidades superiores. Mais tarde, a criança aprende a controlar a dilatação da pupila, o movimento das mãos, aprende a sentar, depois aprende a andar e dominar o espaço. Com essas habilidades ela já pode ordenar objetos, como colocar carrinhos de brinquedo em fila, o que possibilita que ela aprenda a contar, e contando perceba que a quantidade não se altera, caso se mude a ordem dos carrinhos, de onde pode surgir a noção de número como quantidade. Com a noção de quantidade devidamente estabelecida, avança-se no domínio do conhecimento matemático.

Somente após essa contextualização podemos falar em assimilação e acomodação. O binômio assimilação-acomodação é o modo que o sujeito restabelece o equilíbrio perdido pelo desequilíbrio. O meio causa uma perturbação no indivíduo. Essa perturbação é recebida pelo sujeito e deve ser internalizada. O processo de recepção da perturbação é chamado de acomodação. Essa acomodação não é totalmente passiva. O sujeito age sobre o meio e o meio responde sobre o sujeito. Os efeitos da ação do meio sobre o sujeito é a acomodação. No campo biológico, podemos observar a absorção de um alimento. Podemos dizer que o ato de comer é a assimilação e o processo de transformação do alimento em corpo (músculo, ossos, sangue) é a acomodação. No âmbito da inteligência, o recebimento da informação é a assimilação e a mudança do sujeito em função da nova informação é a acomodação. Exemplo: imagine uma criança que torce para o time do Internacional. Suponha também que ela acredita que todos os colorados são bons e todos os gremistas são maus. Se ele encontrar um colorado mau ou um gremista bom (assimilação), ele precisará reconhecer que a opção de time de futebol não implica na qualidade moral de uma pessoa. Essa nova verdade que a criança formula para si é um exemplo de acomodação.

Assim podemos concluir que o processo de conhecimento se inicia pelos sentidos, que recebem uma certa informação do meio. Essa informação será processada pela estrutura cognitiva do sujeito. Se a informação se encaixa nos esquemas já existentes, então ela é apenas uma informação nova. Caso contrário, os esquemas deverão ser alterados para a acomodação da nova informação. Deste modo, esquemas mais complexos são criados a partir de esquemas mais elementares.[30] Os novos esquemas podem produzir novos conhecimentos que, por sua vez, possibilitam a criação de novos conhecimentos.

3.3 Os estágios de desenvolvimento para Piaget.

Depois de expor a epistemologia de Piaget, é preciso dizer que o desenvolvimento, segundo Piaget, se dá por fases. Em cada fase abrem-se novas possibilidades de conhecimento. Também é fundamental, ao menos para essa investigação, notar que a possibilidade do conhecimento abstrato vai sendo conquistado por etapas. No livro “Problemas de Psicologia Genética” (1947) e em outros textos, Piaget discorre sobre sua teoria das fases do desenvolvimento.

A primeira fase, que vai dos 0 aos 2 anos, é chamada de Sensório-motor. Ela é caracterizada pela aprendizagem ação concreta da criança, pois é nessa fase que a criança aprende a usar o seu próprio corpo dominando as mãos (aprendendo a agarrar, fazer movimento de pinça, a levar os objetos na boca), os pés (aprendendo a engatinhar e a caminhar) e aprendendo a produzir os primeiros sons.

A segunda fase é dita pré-operatória ou simbólica e se caracteriza pelo domínio físico dos símbolos. Nesta fase, que vai dos 2 aos 7 anos, a criança aprende a falar com clareza. Isso permite que entre no mundo propriamente humano. Se por um lado há a confusão entre realidade e fantasia, por outro lado ela começa a perceber o poder das palavras para influenciar os outros.

A terceira fase, dos 7 aos 12 anos, é chamada de operatório-concreto. Nessa fase a criança tem um senso correto da realidade e não confunde a realidade com a fantasia. Isso implica que ela tem a noção de causa e efeito. Ela também pode realizar operações matemáticas, se apoiada no concreto. Isto significa que a lógica ecológica, citada anteriormente, está plenamente desenvolvida nesta fase.

---

[30] Convém notar que esse processo não é somente mental. Um microscópio é um tipo de esquema extramental que possibilita a captação de informações indisponíveis a olho nu.

Na quarta fase, a partir dos 12 anos, chamada de operacional formal, a criança já está apta para desenvolver o raciocínio lógico-hipotético e um pensamento abstrato mais sofisticado. Podemos notar que a imaginação está em transformação. Na pré-operatória, a imaginação é fantasiosa, imagética, agora ela pode trabalhar a questão “e se?”. Parcialmente por isso, é nesta fase que se introduz o estudo das estruturas algébricas, o que ocorre no sétimo ano do ensino fundamental. Nessa fase escolar são apresentadas as expressões algébricas e as equações. A seguir temos um quadro que expõe essas fases.

Quadro 4: Estágios do desenvolvimento segundo Piaget

Estágio	Idade Aproximada	Características Principais
Sensório-Motor	0 a 2 anos	Aprendizagem por meio dos sentidos e ações motoras; desenvolvimento da coordenação motora e da percepção do próprio corpo; desenvolvimento da noção de permanência do objeto.
Pré-Operatório	2 a 7 anos	Desenvolvimento da linguagem e do pensamento simbólico; capacidade de usar símbolos para representar objetos e ideias; egocentrismo (dificuldade em ver a perspectiva dos outros); confusão entre realidade e fantasia; início do jogo simbólico (faz de conta).
Operatório Concreto	7 a 12 anos	Desenvolvimento do pensamento lógico sobre objetos e eventos concretos; compreensão da conservação (quantidade permanece a mesma, mesmo que a aparência mude); capacidade de classificar e seriar objetos; compreensão de causa e efeito; pensamento menos egocêntrico.
Operatório Formal	12 anos em diante	Desenvolvimento do pensamento abstrato e hipotético-dedutivo; capacidade de raciocinar sobre possibilidades e testar hipóteses; desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo; capacidade de compreender conceitos abstratos, como justiça, liberdade e moralidade; uso do raciocínio lógico.

A teoria dos estágios de desenvolvimento de Piaget é uma de suas teses mais contestadas. Um de seus discípulos, Reuven Feuerstein, escreveu

> “Quando os testes de Piaget são usados para examinar pessoas que deveriam ser capazes de altos níveis de pensamento, universitários, por exemplo, encontramos que apenas 30-40% deles, no máximo, utilizam pensamento formal, enquanto que, de acordo com Piaget, todos deveriam ser capazes de alcançar isto sozinhos.” (FEUERSTEIN, FEUERSTEIN, FALIK, 2021, p. 71)

Ou seja, o mero desenvolvimento biológico não parece suficiente para garantir o desenvolvimento de cada estágio. Na mesma obra, Feuerstein argumenta que a mera exposição ao ambiente não basta para produzir a evolução do pensamento, mas é necessária a presença de um mediador, o professor. Dito de outro modo. Embora o meio possa ser assimilado e produzir um desequilíbrio na homeostase interna do indivíduo, no que diz respeito às funções mentais, é necessária a presença de um mediador para ajudar o indivíduo a realizar uma acomodação que seja útil e produtiva[31] (o que nos faz lembrar das contribuições de Vygotsky sobre a educação). Desse modo, podemos conjecturar que, embora os universitários citados tenham o potencial biológico para usar o pensamento formal, não foram devidamente instruídos a fazê-lo.

Mas esse problema na teoria de Piaget tem uma explicação. Feuerstein (2021, p. 72) argumenta que Piaget "estava ocupado descobrindo os elementos universais (ou 'leis') que governam o desenvolvimento de um ser humano, e não estava interessado nas diferenças entre seres humanos".[32] Além disso, o próprio Piaget escreveu: "Para que haja estágios, é necessário que a ordem de sucessão das aquisições seja constante. Não a cronologia, mas a ordem de sucessão (p.235)", ou seja, mesmo o Piaget sabia que as idades relativas a cada estágio poderiam ser variáveis. O valor da teoria está em descrever as características que um indivíduo deve dominar em um certo estágio para poder avançar para o próximo.

Desse modo, mesmo que a teoria do desenvolvimento segundo as faixas etárias seja impreciso no que diz respeito às idades de cada fase do desenvolvimento, ela mantém o seu valor por colocar em destaque a importância da maturação biológica para o desenvolvimento mental, indo contra uma tendência dualista de tipo cartesiana (onde a mente não se desenvolve juntamente com o

[31] De fato, a realidade oferece uma rica quantidade de possibilidades de pensamentos. Por exemplo, um simples copo pode ser analisado sob diversos prismas. Por exemplo, podemos perguntar: qual o volume que cabe nele? Qual é a química de produção desse material? Por quanto foi vendido? Qual é a sua durabilidade? É sustentável? Ele foi usado de modo ético? e assim por diante. Por qual dessas perguntas, um estudante deveria começar? Até que ponto ele deve aprofundar a resposta de uma pergunta antes de passar para a próxima? Quantas perguntas ele deve responder antes de passar ao próximo objeto? Sem um orientador, o estudante pode se perder no caminho do conhecimento. Por isso, a função do mediador se justifica.

[32] Entendemos que Piaget imaginou um modelo biológico e tentou aplicá-lo ao desenvolvimento humano, sem atentar para as diferenças específicas da humanidade. Isso se explica pelo que foi dito no início deste capítulo sobre a diferença entre o método científico moderno e o método científico de Aristóteles. Por um lado o método moderno produz mais resultados, porém ele pode se fechar em seu modelo contra a realidade. O método clássico é mais lento para produzir resultados, justamente por estar aberto à complexidade da realidade.

corpo). Além disso, os estágios de Piaget podem não ser rígidos, mas funcionam como uma descrição dos pré-requisitos para avançar ao próximo estágio. Ou seja, não é possível chegar ao operatório formal sem antes passar pelo operatório concreto.

3.4 A abstração segundo a epistemologia genética.

É possível perceber, observando a atenção que Piaget deu às fases do desenvolvimento que a lógica e a matemática são temas caros a Piaget e, por isso, recebem atenção especial em suas obras. Na reflexão sobre a epistemologia da matemática, naturalmente surge o problema da abstração matemática. Nesse sentido, Piaget distingue dois tipos de abstração: abstração aristotélica e abstração reflexionante. Além disso, dentro da reflexionante, ele distingue duas modalidades: abstração pseudo-empírica e a abstração reflexionante refletida.

Como vimos na primeira parte deste trabalho, Aristóteles utiliza a abstração como a base de todo o conhecimento científico, pois a abstração é o que possibilita a criação dos termos que serão empregados na lógica. Com os termos formam-se as sentenças e as sentenças formam os silogismos. Piaget chama de abstração aristotélica aquela que cria termos, isto é, aquela que olha para um objeto e extrai algo do objeto. Por exemplo, da neve extraímos os conceitos de frio e de branco.

Em oposição a este tipo de abstração, Piaget observa que podemos abstrair informação não apenas de informações recebidas do mundo externo, mas também é possível extrair informação da nossa própria ação interna. Essa abstração é chamada de flexionante. Um exemplo já citado é o do menino que nota que a ordem da fila de carrinhos não altera a quantidade de carrinhos. A reordenação dos brinquedos não é um dado externo, propriamente dito, pois o mundo não se reorganiza para a criança, mas é a criança que toma a iniciativa de organizar os brinquedos. Essa é a abstração reflexionante.

Note que este tipo de abstração não produz um termo, mas uma sentença. Becker (2012, p.25) explica esse ponto da teoria piagetiana nos seguintes termos:

> “O entendimento da abstração, por exemplo, pode ser empirista ou construtivista. Empirista, se compreende por ‘abstração’ no sentido aristotélico (abstrair de) como retirada de qualidades apenas dos objetos (empiria) ou no sentido piagetiano (retirar qualidades das ações e das coordenações das ações do sujeito.” (Becker, 2012,p.25)

Piaget ainda é mais sutil em suas distinções, por isso ele diferencia entre a abstração reflexionante e a pseudo-empírica. A pseudo-empírica extrai informações do objeto que não estão no objeto, mas que foram colocadas lá pelo próprio sujeito, como juízos de valor e juízos estéticos. Becker exemplifica a diferença nos seguintes termos:

> "A flor do flamboyant é vermelha; retira-se a cor "vermelha" por abstração empírica. Mas, quando se afirma que essa flor é a mais vermelha do parque, "mais vermelha do parque" foi colocada lá pelo sujeito; se ele retira essa característica da flor, foi porque ele a colocou lá; ele a retira por abstração pseudo-empírica (que é reflexionante)" (BECKER, 2014, p 114)

Entenda-se, o vermelho da flor é uma característica real da flor, por isso extrair essa informação é função da abstração empírica, mas a "mais vermelha do parque" é uma projeção do sujeito sobre o objeto, por isso, se diz que é pseudo empírica. Ela se aproxima da empírica por ser uma extração de um objeto real (e não das funções internas do sujeito, como a abstração reflexionante), mas a informação extraída não está realmente no sujeito, é apenas uma projeção.

Por fim, ainda se distingue a abstração empírica da abstração reflexionante refletida. Sobre esta última, escreve Becker (2012): "[...] que é uma abstração reflexionante que se transforma por tomada de consciência. É essa tomada de consciência de uma abstração reflexionante que faz surgir os conceitos [...]."(p.36)

Quadro 5: Tipos de abstração segundo Jean Piaget

Tipo de Abstração	Origem da Informação	Processo	Produto	Exemplo
Empírica (Aristotélica)	Objeto externo	Extrai qualidades ou características diretamente do objeto (o que está "lá" no objeto).	Termos (conceitos)	Extrair o conceito de "frio" e "branco" da neve.
Reflexionante (Pseudo-Empírica)	Objeto externo, modificado pelo sujeito	Extrai informações do objeto, mas essas informações foram colocadas lá pelo sujeito (projeções, juízos de valor/estéticos).	Atribuições subjetivas	Dizer que uma flor é "a mais vermelha do parque" (a cor é real, mas a comparação "mais do parque" é uma projeção).
Reflexionante: (Reflexionante Refletida)	Ação interna	Tomada de consciência e reflexão sobre a abstração reflexionante, levando	Conceitos definidos e rigorosos	Metacognição sobre a ação de reordenar objetos, levando a uma compreensão mais

		à definição rigorosa dos conceitos.		profunda dos conceitos envolvidos (como conservação de quantidade).

3.5 O Construtivismo em Piaget

Agora é possível compreender o conceito de construtivismo em Piaget. Em primeiro lugar, os esquemas não vêm prontos, mas eles existem em potência no indivíduo, e essa potência precisa ser desenvolvida. Tal desenvolvimento ocorre através de uma incalculável sucessão de assimilações e acomodações.

Em segundo lugar, os conhecimentos também não vêm prontos, mas precisam ser adquiridos. Filósofos racionalistas acreditavam que o conhecimento estava em potência no sujeito e que bastava o uso da razão para adquirir esse conhecimento.[33] Já os filósofos empiristas acreditavam que o conteúdo do pensamento provia inteiramente dos sentidos, e era gravado na mente pelo processo de associação de ideias e que depois essas ideias seriam objeto de reflexão. No construtivismo de Piaget o conhecimento é construído pelo processo de assimilação e acomodação[34]. Essa assimilação se dá pelos sentidos (isso dá uma parcela de razão aos empiristas). Além disso, a acomodação pode ser uma acomodação por reflexão (dando assim, uma parcela de razão aos racionalistas). Em resumo, tanto os esquemas mentais, quanto os conhecimentos são construídos pelo processo do dito par (assimilação e acomodação).

O construtivismo, entendido deste modo, não exclui completamente a verdade do conhecimento, o que implica que não se deve tomar o construtivismo como um tipo de relativismo. O construtivismo se refere ao processo de desenvolvimento humano e o que disso se produz, não significa que o sujeito pode dizer que a grama é azul, porque “construiu assim”. Também não significa que a presença do professor seja totalmente dispensável, como se o aluno fosse capaz de construir qualquer conhecimento, basta estar em contato com o meio. Por um lado, o estudante é o principal agente e o principal responsável pela construção do conhecimento. Por outro lado, o professor pode direcionar para onde o aluno deve

[33] Um exemplo clássico dessa abordagem é a descoberta do “Cogito ergo sum” de Descartes.
[34] É interessante notar que mesmo este modelo de Piaget não está completo. Vygotsky destaca, como é de conhecimento de todos, o papel da interação social. Piaget, por sua vez, dá ênfase aos processos internos do sujeito.

olhar com atenção. O professor pode ajudar a criticar as formulações para que se chegue em uma formulação mais exata (ao exemplo socrático). O professor pode captar em cada aluno os seus pontos fracos e fortes e pensa como ajudá-lo a evoluir. O que o construtivismo corrige, e com razão, é a postura de que basta falar uma vez em aula e o aluno deve aprender, isto é, o construtivismo insiste na observação das condições prévias de aprendizado, no tempo de aprendizagem de cada aluno e, sobretudo, em afirmar que o processo de ensino não implica, necessariamente, no processo de aprendizagem.

Nesse sentido, Piaget em seus textos deixou algumas observações sobre o ensino específico de matemática. Por exemplo:

> (...) Toda uma gradação é, portanto, indispensável para passar da ação ao pensamento representativo, e uma não menos longa série de transições continua sendo necessária para passar do pensamento operatório à reflexão sobre esse pensamento. (...) A construção matemática procede por abstrações reflexivas (...)(PIAGET, 2010, p.67)

Ou seja, da mesma forma que os esquemas mais complexos são acomodações de esquemas mais simples, o pensamento matemático de nível superior se baseia na adequada compreensão dos conceitos matemáticos mais simples.

3.6 Resumo

O estudo da obra de Piaget nos permite aprofundar o conhecimento sobre a abstração. Ele nos dá as seguintes respostas:

a) *Quais são os tipos de abstração?* Os tipos de abstração são a empírica, a pseudo-flexionante, a reflexionante e a reflexionante refletida.
b) Piaget, ainda que em sua reflexão sobre abstração mencione Aristóteles, ignora dois tipos de abstração propostas pelo filósofo, as abstrações matemática e metafísica, e só considera a abstração científica.
c) *Quais são as condições humanas para que possa acontecer o processo de abstração?* As condições mínimas para ocorrer o processo de abstração são:
    i) o indivíduo já deve estar no estágio operatório formal (12 anos, aproximadamente);
    ii) o indivíduo deve dar atenção aos processos do próprio pensamento (metacognição);

iii) também é necessário existir um estímulo (natural ou artificial) para que a assimilação desse estímulo produza a adaptação.

4. DAS TEORIAS METAFÍSICAS, EPISTEMOLÓGICAS, BIOLÓGICAS E PSICOLÓGICAS AO OLHAR PEDAGÓGICO SOBRE A ABSTRAÇÃO

Neste capítulo estamos interessados em refletir sobre algumas teorias e tendências educacionais contemporâneas à luz das teorias apresentadas nos capítulos anteriores e em extrair dessas teorias e princípios para a prática em sala de aula.

4.1 A Natureza da Matemática: Entre Descoberta e Invenção

A metafísica aristotélica oferece uma perspectiva esclarecedora sobre a natureza da matemática ao definir os objetos matemáticos como potencialidades dos objetos reais - aspectos que podem ser abstraídos da realidade concreta. Esta concepção resolve elegantemente o debate sobre se a matemática é inventada ou descoberta, revelando que ela possui ambos os elementos. Retomemos a explicação de Reale e Antisseri:

> Eis a solução aristotélica: os objetos matemáticos não são entidades reais, mas tampouco algo de irreal. Eles existem "potencialmente" nas coisas sensíveis, sendo que a nossa razão os "separa" através da abstração. Assim, eles são entes de razão, que, "em ato", só existem em nossa mente, precisamente em virtude de nossa capacidade de abstração (ou seja, existem como "separados" somente na e pela mente), enquanto, "em potência", existem nas coisas como sua propriedade intrínseca. (REALE E ANTISSERI, 2003, p 196-197)

De fato, aquilo que já existe e não é conhecido não pode ser inventado, mas descoberto. Se os aspectos matemáticos já existem em potência nos seres do mundo concreto, então esses aspectos não são inventados, mas descobertos. Por outro lado, aquilo que não existe pode ser inventado.

Em certo sentido, tudo que existe foi descoberto, pois tudo que veio a existir já existia como possibilidade. Se a possibilidade da existência não existisse, então o ente seria impossível e o que é impossível não pode vir a existir. No entanto, usamos a palavra "inventar" no sentido de atualizar uma possibilidade trazendo à existência um novo ser cuja possibilidade de existência era desconhecida segundo a vontade e o engenho humano. Nesse sentido, há algum elemento de invenção na matemática. Por exemplo, os números são uma descoberta, mas o sistema de numeração é uma invenção. Da mesma forma, todos os teoremas são descobertos, mas as definições são invenções.

Esta dualidade tem implicações pedagógicas diretas, ainda que nem sempre seja fácil discernir quais aspectos são inventados e quais ão descobertos. Elementos matemáticos que podem ser descobertos beneficiam-se de metodologias como a resolução de problemas, pois essa metodologia (conforme se explicará mais adiante) permite ao estudante fazer as suas descobertas. Por outro lado, os aspectos "inventados" da matemática - como convenções e linguagens formais - requerem um ensino mais diretivo e estruturado, pois se cada estudante inventar a sua definição e a sua notação, então o diálogo se tornará impossível. Por exemplo, os alunos podem ser convidados a estudar as relações métricas em um triângulo retângulo e descobrir o teorema de Pitágoras, no entanto não se deve esperar que o estudante invente a nomenclatura de cateto e hipotenusa.

No ensino da álgebra, por exemplo, a capacidade de generalização pode ser desenvolvida através da descoberta guiada, permitindo que os alunos identifiquem padrões, formulem conjecturas que podem ser provadas ou refutadas. Por outro lado, a linguagem algébrica formal, com suas convenções e notações específicas, necessita de direcionamento pedagógico explícito e metodologias mais tradicionais de ensino.

4.2 O Papel Central da Memória, Repetição e Imaginação

A epistemologia aristotélica destaca ainda dois elementos frequentemente subestimados na educação matemática contemporânea: a memória e a imaginação. Muitas teorias educacionais têm negligenciado o papel da imaginação e rejeitado sistematicamente a função da memória.

Esta rejeição da memória surge de uma falsa dicotomia entre memorizar e compreender. Paulo Freire, em sua crítica à "educação bancária", opõe-se legitimamente ao modelo de ensino que trata o aluno como mero depositário passivo de informações. Segundo Freire (2011), uma das características da "educação bancária" é a "narração", isto é, o excesso de transmissão de conhecimentos a serem memorizados sem a devida reflexão ou problematização. Freire escreve:

> Quatro vezes quatro, dezesseis; Pará capital Belém, que o educando fixa, memoriza, repete, sem perceber o que realmente significa quatro vezes quatro. O que verdadeiramente significa capital, na afirmação, Pará, capital Belém. Belém para o Pará e Pará para o Brasil. A narração, de que o educador é o sujeito, conduz os educandos à memorização mecânica do conteúdo narrado. Mais

> ainda, a narração transforma em ‘vasilhas’, em recipientes a serem ‘enchidos’ pelo educador. (FREIRE, 2011, p. 80)

Embora esta crítica seja válida, alguns seguidores levaram esta oposição ao extremo, algo como um “freirismo radical” banindo completamente a memorização do processo educativo.

A absurdidade desta posição pode ser ilustrada por um exemplo simples: imaginemos o próprio Paulo Freire em sua sala de aula. Ele pega a palavra geradora “tijolo”, separa em sílabas “ti-jo-lo” e forma novas palavras com a sílaba “ti”: “tijoleiro”,“tiara”, “tinta”, “tirante” e assim por diante. Depois, ele faz uma reflexão problematizadora sobre a função social do tijolo e do tijoleiro. No dia seguinte, ele usa a sílaba “jo” como sílaba formadora de palavras, ou escolhe outra palavra qualquer. Podemos perguntar ao freirista radical, se Paulo Freire espera que seus estudantes se lembrem e, portanto, tenham memorizado as palavras e a discussão da aula anterior, ou ele espera que os estudantes cheguem totalmente esquecidos do dia anterior, como tábulas rasas. Claramente, a segunda opção é um absurdo. Portanto, a memorização tem o seu lugar na educação.

A memória não se opõe ao entendimento; ao contrário, a compreensão genuína facilita e sustenta uma memorização adequada e duradoura. Não se deve esquecer que pensar em como resolver problemas custa tempo e energia. Por isso, a memória surge como uma resposta rápida a um problema conhecido. Que fique claro: não estamos defendendo a memorização mecânica sem a devida compreensão e construção de significado. Estamos defendendo que a construção de significado não pode ser esquecida. Ela também deve ser objeto de memorização.

Na matemática, esta relação é particularmente evidente. Desejamos que os alunos memorizem a tabuada, mas não como mera manipulação simbólica desprovida de significado. O objetivo é que compreendam que a multiplicação representa a soma de parcelas iguais, criando uma base conceitual sólida para a memorização. Após esta compreensão, não se espera que o aluno pense em contar para obter o valor de uma multiplicação (por exemplo 4x7=7+7+7+7=28). Pelo contrário, se ele estiver diante de um problema matemático, espera-se que ele saiba o valor (28) e use sua energia mental para se concentrar em outras partes do problema.

O mesmo princípio aplica-se ao ensino de álgebra. Este não pode se basear exclusivamente na memorização de regras de manipulação, mas deve capacitar os alunos a justificar e compreender essas regras de acordo com o nível de cada faixa etária. A propriedade distributiva, por exemplo, pode ser memorizada como regra formal, mas adquire significado profundo quando compreendida através de exemplos como: $2(x+y) = (x+y) + (x+y) = (x+x) + (y+y) = 2x + 2y$.

Em alguns contextos, pode ser estratégico memorizar a regra primeiro e desenvolver a compreensão posteriormente. Contudo, o processo de aprendizagem só se completa quando o conhecimento é simultaneamente memorizado e compreendido.

Outras teorias que rejeitam o papel da memória na educação são o "Construtivismo Radical" e versões radicais da Teoria da Aprendizagem por Descoberta de Jerome Bruner. Alguns defensores dessas visões extremas argumentam que a tecnologia pode substituir a memória individual, servindo como repositório externo de conhecimento.

Esta visão é fundamentalmente equivocada. O conhecimento que não reside na memória pessoal, existindo apenas em livros ou na internet, não constitui conhecimento propriamente dito, mas apenas potencial cognitivo. Conhecimento verdadeiramente apropriado é aquele que se integra à estrutura mental do indivíduo, influenciando seu pensamento e ações de forma espontânea e efetiva. Tanto neste ponto quanto no próximo, o essencial é manter um equilíbrio para que uma ênfase em apenas um aspecto da educação não ofusque os demais.

4.3 Além do Lúdico: O Lugar Necessário do Esforço na Educação

A Teoria Computacional da Mente e as descobertas da neurociência contemporânea questionam a tendência pedagógica de tornar todo ensino necessariamente lúdico e prazeroso. Esta tendência emerge como reação compreensível a práticas educacionais historicamente problemáticas.

Durante muito tempo, o ensino enfatizou exclusivamente a transmissão de conhecimento, tratando o estudo como dever análogo ao trabalho, chegando ao extremo de usar castigos físicos para punir o insucesso acadêmico. Esta abordagem autoritária levou educadores influenciados por Dewey, Piaget, Vigotsky e Freire a procurarem propostas pedagógicas que privilegiassem a interação entre os alunos, a construção do conhecimento, a autonomia e a capacidade crítica. Porém, é possível encontrar professores e formadores de professores que enfatizam excessivamente o papel do lúdico e do prazer na educação. Atividades pedagógicas como jogos, gincanas, atividades em computadores, atividades no laboratório maker, entre outras são vistas como a solução para todos os problemas relativos ao ensino, negligenciando a função necessária do esforço pessoal, da força de vontade e de técnicas pedagógicas tradicionais como repetição e memorização.

Nossa posição não se opõe ao elemento lúdico na educação, mas busca situá-lo adequadamente no processo educativo. As habilidades primárias, desenvolvidas nas séries iniciais do Ensino Fundamental, podem e devem ser trabalhadas de forma lúdica e prazerosa. Contudo, as habilidades secundárias - mais complexas e abstratas - exigem esforço consciente, concentração sustentada e memorização sistemática de fatos fundamentais. Se algum professor encontrar uma forma lúdica e efetiva de ensinar conteúdos avançados, certamente ele deve colocar em prática a sua proposta pedagógica. Caso contrário, o professor não pode ser penalizado como um mal profissional, pois a limitação não está nele, mas na própria natureza do conteúdo que ensina.[35]

Por exemplo, é ilusório acreditar que o Ensino Médio e Superior possam basear-se predominantemente no lúdico. Embora o domínio de conceitos difíceis ou a aquisição de novas habilidades possam gerar satisfação real, o processo de aprendizagem nem sempre é agradável em si mesmo.

Steven Pinker oferece insights valiosos sobre esta questão: "Dizer que a matemática da escola deriva da matemática intuitiva não equivale a afirmar que ela deriva facilmente." Ele explica que:

> "a matemática é aprendida ajustando umas às outras rotinas já mais do que aprendidas. Os professores de cálculo queixam-se de que os alunos acham essa matéria difícil não porque derivadas e integrais sejam conceitos obscuros — eles não passam de taxa e acumulação —, mas porque o cálculo é impossível se as operações algébricas não forem uma segunda natureza, e a maioria dos estudantes começa o curso sem ter aprendido a álgebra apropriadamente, precisando concentrar nela cada gota de sua energia mental. A

---

[35] Uma ressalva deve ser feita: estamos dizendo que nem todo conteúdo pode ser ensinado de forma lúdica. Isso não implica que a aula deve ter uma forma estética ruim. A qualidade estética do material didático, a qualidade estética e organizacional do quadro e da caligrafia do professor são absolutamente fundamentais para a educação. Podemos afirmar ainda mais: a qualidade estética da arquitetura do prédio da escola é de fundamental importância para a educação, pois a harmonia da forma estética do ambiente influencia na qualidade dos estados interiores do indivíduo.

> matemática é impiedosamente cumulativa, a começar da contagem de um a dez." (PINKER, 1997, p.570)

Piaget também reconhece este caráter cumulativo da matemática. Pinker conclui: "O domínio da matemática é imensamente satisfatório, porém é uma recompensa por um trabalho árduo que nem sempre é agradável em si mesmo." Para o ensino de álgebra, isso implica que nem toda aula pode ser divertida, que exercícios de repetição sobre manipulação algébrica e resolução de equações têm lugar legítimo no currículo, e que alunos com dificuldades nas operações básicas inevitavelmente enfrentarão obstáculos no aprendizado algébrico.

4.4 A Importância do Conhecimento Detalhado para a Abstração

A Teoria Computacional da Mente, através de sua teoria da abstração, destaca o papel fundamental do conhecimento detalhado na capacidade de diferenciar objetos com precisão. Esta atenção às diferenças específicas é o que permite à mente ignorar seletivamente certas características em favor de outras, gerando processos de abstração produtivos.

Retomemos o que foi dito. Quando encontramos um objeto pela primeira vez, temos uma impressão geral e confusa acerca deste objeto. No entanto, ao desenvolver um relacionamento com o objeto (observando por mais tempo e por mais ângulos, tocando, ouvindo, ou pensando sobre ele) vamos percebendo mais detalhes deste objeto, de forma que aquela primeira imagem confusa torna-se uma imagem detalhada, sobre a qual podemos falar, discutir e perceber se, em algum momento, algum detalhe foi alterado. Isso significa que esse processo de relacionamento com o objeto produz no cérebro novas sinapses. E cada sinapse é responsável por uma nova nota acerca do objeto. A abstração é a capacidade de ignorar certas sinapses (características dos objetos em privilégio de outros). É muito interessante, por exemplo, notar na criança a formação de conceitos mais refinados com o passar do tempo. Dessa forma, uma criança pode chamar aos dois anos todo cachorro de “au-au”, mas, com o passar do tempo, ela aprende a distinguir entre “grande au-au” e pequeno “au-au” até ser capaz de distinguir entre as várias raças de cachorro, inclusive distinguir cães específicos como o “au-au da vovó”.

Por isso, escolhemos iniciar este texto com uma citação de Leibniz, onde lemos:

> “Pode- se dizer que aquele que tiver visto com atenção mais retratos de plantas e de animais, mais figuras de máquinas, mais descrições ou representações de casas ou de fortalezas, que tiver lido mais romances engenhosos, ouvido mais narrações curiosas, este, digo eu, terá mais conhecimento que um outro, mesmo que não houvesse uma só palavra de verdade em tudo o que viu representado ou ouviu. Com efeito, o hábito que tem de representar no espírito muitas concepções ou ideias expressas e atuais o torna mais apto a conceber o que se lhe propõe, e é certo que ele será mais instruído e mais capaz do que um outro, que não viu, não leu nem ouviu nada, [...]” (LEIBNIZ, 2004, p. 353)

Essa citação foi escolhida por dois motivos. Primeiramente ela mostra a importância do par “memória-imaginação” de Aristóteles no processo de aquisição do conhecimento. Em segundo lugar, ela concorda perfeitamente com o que Pinker escreve sobre a abstração, pois ter contato com mais figurinhas, história, relatos entre outros, oferece à criança a possibilidade de formar novas sinapses sobre diversos tipos de objetos, possibilitando que a abstração ocorra.

A partir dessa teoria da abstração somada com a citação acima podemos concluir que ver mais demonstrações e resoluções de exercícios favorece o aprendizado da matemática, pois oferece mais estratégias de soluções. Além disso, no contexto algébrico, isso significa que conhecer profundamente as propriedades dos números enquanto símbolos - como demonstram os problemas de criptaritmética[36] - é fundamental para a construção sólida do conhecimento algébrico. A familiaridade com os aspectos simbólicos e estruturais dos números prepara o terreno para as abstrações mais sofisticadas da álgebra.

4.5 Contribuições de Piaget: Desenvolvimento Cognitivo e Faixas Etárias

As teorias de Piaget também oferecem contribuições importantes para o ensino de matemática. O par assimilação-acomodação diz que a construção de novos conhecimentos inicia-se pelos sentidos que captam o mundo e geram um desequilíbrio no sistema de crenças do indivíduo, ou seja, o conhecimento inicia pelo incômodo da dúvida - como diria Aristóteles (2006, p.7) “Pois é devido ao seu espanto que os homens tanto agora começam quanto começaram a filosofar”. Nesse sentido, os novos conhecimentos são mais do que meras informações novas, são a reestruturação do sistema de crenças para aliviar o incômodo do estado de

[36] A criptaritmética é o nome que se dá a problemas onde é apresentada uma operação onde alguns ou todos os algarismos estão escondidos ou substituídos por letras. Neste caso, letras iguais representam algarismos iguais e letras diferentes representam algarismos diferentes.

dúvida[37], por isso se chama de acomodação. Isto significa que toda aula de matemática deve iniciar com um problema que sirva de motivador para a obtenção de novos conhecimentos[38] ou pela apresentação de um objeto concreto para ser explorado, que pode inclusive ser um jogo[39].

Se soma a isso a teoria dos estágios de desenvolvimento cognitivo. Ou seja, para uma turma de alunos no estágio operatório-concreto leva-se um problema concreto cuja solução pode ser realizada por etapas concretas. Da mesma forma, para uma turma de alunos no estágio operatório-formal, leva-se um problema que pode ser resolvido por meio formais (ou mesmo concretos). Por exemplo, tomemos o seguinte problema: Se um cubo, uma bola e uma pirâmide pesam juntos 23 kg e se o cubo pesa 12 e a bola pesa 4kg, então quanto pesa a pirâmide?

Para uma turma com alunos de até 11 anos, uma possível solução seria "Se remover o cubo, a balança marca 23-12=11kg. Se depois remover a bola, a balança marca 11-4=7kg. Logo o peso da pirâmide é de 7kg.". Se os alunos estão no operatório formal podemos resolver o problema com a expressão $P=23-(12+4)$, onde P representa o peso da pirâmide e assim introduzir a função da letra P como incógnita de modo mais interessante e natural. Assim, podemos ver que a teoria dos estágios de desenvolvimento cognitivo é útil para planejar uma aula, sabendo o que esperar dos estudantes.

Conforme a discussão sobre esse tema no capítulo sobre Piaget, a divisão das faixas etárias de cada estágio é mais fluido do que supunha inicialmente Piaget, mas isso não impede que a classificação dos estágios, pelo menos, tenha utilidade. A classificação dos estágios mantém sua utilidade, pois a divisão etária (7 a 11 anos para o estágio operatório-concreto e 12 anos em diante para o operatório formal) é adequada para a maioria dos casos[40].

---

37 Além de aliviar o incômodo da dúvida, obter novos conhecimentos também é uma fonte de prazer em si mesmo.

38 Aprofundaremos essa discussão no capítulo sobre a metodologia da proposta pedagógica. Onuchic e Allevato falam de "resolução de problemas para o ensino de matemática".

39 Isso não contradiz o que dissemos no tópico anterior, pois aqui o jogo é um motivador inicial para a introdução do conteúdo. O que dissemos foi que o jogo não pode ser usado para ensinar todos os aspectos do conteúdo, de forma que nem todas as aulas se baseiam no jogo e que certos aspectos da matemática só podem ser aprendidos por esforço próprio.

40 Caso contrário, a teoria já teria sido totalmente descartada.

4.6 Abstração Reflexionante e a Arte de Fazer Perguntas

As contribuições de Piaget oferecem implicações práticas diretas para o ensino de matemática. uma dessas contribuiçĩes refere-se à abstração reflexionante e à metacognição, processos que destacam a importância da arte de formular perguntas por parte do professor. Mais do que simplesmente fazer perguntas corretas, o educador precisa solicitar explicações sobre os processos de pensamento dos alunos e, a partir das respostas obtidas, explorar outros cenários e possibilidades.

No ensino de álgebra, esta abordagem pode ser intensificada através de questões como: "Como podemos representar essa situação em uma expressão matemática?" ou "Formule um passo-a-passo para descrever a solução do problema. Essa solução é aplicável a outros problemas?" ou "Represente a solução do problema em forma de fluxograma". Particularmente, o uso estratégico de perguntas é fundamental no desenvolvimento da habilidade de generalização, especialmente na identificação de termos gerais em sequências matemáticas.

Esta metodologia interrogativa não apenas verifica a compreensão, mas promove o desenvolvimento metacognitivo dos estudantes, capacitando-os a "aprender a aprender", a refletir sobre seus próprios processos de pensamento e a construir conexões mais profundas entre conceitos matemáticos.

A seguir, temos alguns exemplos de perguntas que podem ser feitas para fomentar a abstração e a metacognição.

1. Relações causa-efeito complexas:
   A. "Explique como diferentes fatores podem influenciar simultaneamente um mesmo fenômeno".
   B. "Que consequências indiretas podem resultar desta situação?"
   C. "Como esta ideia se conecta com conceitos que estudamos anteriormente?"
2. Generalização:
   A. "Em que outras situações este princípio poderia ser aplicado?"
   B. "Que padrões você consegue identificar entre estes casos diferentes?"
   C. "Como você adaptaria esta solução para um contexto completamente diferente?"
3. Perguntas de Pensamento Hipotético:

A. "O que teria acontecido se...?"
B. "Imagine que as condições fossem diferentes. Como isso alteraria o resultado?"
C. "Crie uma situação hipotética onde este conceito não se aplicaria."
D. "Quais são todas as maneiras possíveis de abordar este problema?"
E. "Que alternativas existem para esta solução?"
F. "Como diferentes perspectivas poderiam interpretar esta situação?"

4. Perguntas de Metacognição:
   A. "Como você chegou a esta conclusão?"
   B. "Que estratégias você usou para resolver este problema?"
   C. "Por que você descartou outras possibilidades?"
   D. "Como você saberia se sua resposta está correta?"
5. Perguntas de Síntese e Avaliação:
   A. "Com base em que critérios você faria esta escolha?"
   B. "Que evidências sustentam ou contradizem esta teoria?"
   C. "Como você justificaria sua posição para alguém que discorda?"
   D. "Como você combinaria elementos de diferentes áreas para resolver isto?"
   E. "Que conexões você vê entre este tema e outros que já estudamos?"
6. Perguntas de Transformação da Representação:
   A. "Como você representaria esta ideia de forma visual/numérica/verbal?"
   B. "Traduza este conceito para uma linguagem mais simples."
   C. "Como você explicaria isto usando apenas exemplos concretos?"
7. Outras perguntas de caráter geral:
   A. "O que você quer dizer quando afirma que...?"
   B. "Você poderia dar um exemplo?"
   C. "Que pressupostos você está fazendo?"
   D. "Por que você acha que esse pressuposto é válido?"
   E. "Que evidências sustentam sua posição?"
   F. "Como você poderia verificar isso?"
   G. "Se isso for verdade, o que mais deveria ser verdade?"
   H. "Que consequências isso teria?"

4.7 Resumo

Podemos resumir os princípios pedagógicos e didáticos estudados até aqui como se segue:

a. A parte da matemática que é descoberta pode ser ensinada pela metodologia de resolução de problemas, já a parte da matemática que é inventada precisa de um ensino diretivo.
b. Compreender e memorizar fatos aritméticos é fundamental para a abstração algébrica, pois o aprendizado da matemática se dá de forma cumulativa.
c. O lúdico é preferível ao não-lúdico, mas nem todo aprendizado pode ser obtido de forma lúdica, pois o prazer do aprendizado está no fim e nem sempre no processo.
d. O ensino da álgebra formal deve-se iniciar, em média, pelos 12 anos, ainda que elementos do pensamento algébrico possam ser desenvolvidos antes dessa idade.
e. Parte fundamental do ensino de álgebra está na arte do professor em fazer perguntas que favoreçam a metacognição.

PARTE 2 - PROCESSOS DE ENSINO-APRENDIZAGEM: TEORIA E PRÁTICA

Na primeira parte, abordamos os diferentes aspectos da abstração. Nesta segunda parte, estamos interessados no ensino de álgebra e como os conhecimentos apresentados anteriormente podem contribuir para o o dito ensino no sétimo ano do Ensino Fundamental, passando da teoria para a prática.

O capítulo 5, que virá a seguir, estuda o que é a álgebra e quais são os traços constitutivos do pensamento algébrico. Apresentaremos as teorias de Lins, Kaput e Radford sobre o pensamento algébrico. Destes três, Kaput tem destaque especial, pois suas contribuições servem diretamente para a construção da proposta pedagógica do capítulo 7.

O tema do capítulo 6 são os documentos legais: Constituição Federal, ECA, o PCN de matemática e, de modo mais específico, a BNCC. Ao analisarmos estes documentos, queremos descobrir o que se entende por educação e queremos descobrir se existe alguma orientação para o ensino de álgebra e do pensamento abstrato, além de explicitar quais habilidades e competências se esperam que o aluno obtenha pelo ensino de álgebra no sétimo ano do Ensino Fundamental.

No sétimo capítulo abordaremos a proposta pedagógica. Primeiramente falamos da escola onde ocorreu a proposta pedagógica. Depois apresentaremos a metodologia escolhida: a resolução de problemas de Polya. Por fim, apresentamos e justificamos a proposta em si.

No capítulo 8 apresentaremos os resultados da pesquisa com a proposta pedagógica e com a respectiva análise dos dados segundo todo cabedal teórico desenvolvido nos capítulos precedentes.

5. DA ABSTRAÇÃO AO ENSINO DA ÁLGEBRA

5.1 Introdução

Como vimos acima, Aristóteles é o primeiro pensador conhecido a falar em abstração. Para ele, a abstração é a base de todo o conhecimento intelectual, pois a abstração é o processo que cria os conceitos científicos, matemáticos e filosóficos, removendo dos seres os aspectos secundários. Aristóteles ainda destaca a importância da imaginação (que abre a possibilidade de conhecimento) e da memória (que retém o conhecimento para que o mesmo seja abstraído. Piaget acrescenta que o processo de abstração não é sempre igual. Ele ressalta que existe uma abstração que retira características dos seres (a abstração empírica) e uma abstração retira informações das ações do sujeito (a abstração flexionante). E a TCM explica o funcionamento da abstração em âmbito cerebral, isto é, explicando como o cérebro processa informação para construir o conceito abstrato. A partir dessa segunda parte do trabalho, passaremos a refletir sobre a álgebra à luz desse debate e apelando a autores modernos que amplificam essas contribuições, sobretudo as de Piaget.

Este capítulo tem, pois, como objetivo estabelecer as bases teóricas necessárias para compreender como se desenvolve o pensamento algébrico e qual o papel da abstração nesse processo. Para isso, buscaremos responder a questões fundamentais que orientem uma proposta pedagógica eficaz para o ensino de álgebra: O que caracteriza o pensamento algébrico? Quais são seus componentes essenciais? Como os processos de abstração estudados na primeira parte deste trabalho se manifestam especificamente no desenvolvimento das habilidades algébricas?

A discussão se estrutura em três seções principais. Inicialmente, delimitamos o campo da álgebra, explorando suas diferentes concepções e estabelecendo uma definição operacional que oriente nossa abordagem pedagógica. Em seguida, analisamos as características do pensamento algébrico segundo as principais correntes teóricas da área, com destaque para as contribuições de Lins, Kaput e Radford, autores que ampliam e detalham a compreensão piagetiana do pensamento algébrico. Por fim, articulamos essas perspectivas teóricas com os processos de abstração apresentados anteriormente, estabelecendo as conexões necessárias entre teoria cognitiva e prática educativa.

Esta fundamentação teórica é essencial para a proposta pedagógica que será desenvolvida nos capítulos subsequentes, pois oferece os critérios conceituais que nos permitirão avaliar e estruturar situações de aprendizagem verdadeiramente promotoras do desenvolvimento algébrico dos estudantes.

5.2 Do que trata a álgebra.

Vamos iniciar esta seção definindo o que é álgebra. Aqui um problema se coloca, pois a álgebra constitui-se um dos campos mais abrangentes da matemática. Por isso, não tentaremos resolver o problema da definição da álgebra neste trabalho, mas apontaremos as correntes existentes e indicaremos aquela que nos parece mais adequada.

Existem alguns caminhos possíveis para entender do que trata a álgebra. Etimologicamente, o termo “álgebra” vem de “al-jabr” que significa restauração, no sentido de restaurar o que falta para resolver equações. O termo “al-jabr” vem dos trabalhos do matemático árabe Al-Khwarizmi. Isso coloca a equação como objeto próprio da álgebra. Dito de outra forma, uma possível definição para a álgebra é a de que a álgebra é a parte da matemática que estuda os métodos de resolução de equações e inequações. De fato, historicamente falando, o estudo de resolução de equações foi o centro da álgebra dos babilônios, dos gregos e dos árabes até a era moderna, quando aconteceu a demonstração do Teorema de Abel-Ruffini no século XIX, que não existe método de resolução de equações polinomiais de grau maior do que quatro. Segundo Ponte, Branco e Matos:

> O estudo das equações algébricas esgota-se com a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra e com a demonstração de que não existem métodos algébricos gerais para a resolução de equações de grau superior ao 4.º. A partir dessa altura, a atenção dos matemáticos volta-se cada vez mais para o estudo de equações não algébricas, ou seja, para o estudo de equações diferenciais, tanto ordinárias como com derivadas parciais e para o estudo de equações envolvendo objetos matemáticos como funções. Outros matemáticos dedicam-se a partir daí ao estudo de estruturas abstractas como grupo, espaço vectorial, anel e corpo, temas que passam a constituir o núcleo central da “Álgebra moderna”. (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p. 7)

Portanto, para a álgebra posterior ao século XIX, não basta dizer que a álgebra é a parte da matemática que estuda equações, mas é necessário encontrar outra definição.

Outra possibilidade é entender a álgebra como aritmética generalizada. Esta definição é mais abrangente do que a anterior. Enquanto a aritmética estuda as relações e propriedades dos números inteiros, a álgebra estuda as estruturas a partir da aritmética. Nesse sentido, polinômios podem ser vistos como uma generalização dos números, neste caso o número é um polinômio de grau zero. Do polinômio podemos passar à função polinomial e da função polinomial podemos passar à noção de função em geral. É possível progredir de abstração em abstração, até alcançar os conceitos de estrutura que incluem anéis e corpos e os demais temas estudados no Ensino Superior.

Existe uma terceira possibilidade de encarar a matemática apenas como um aspecto da linguagem em geral ou como um mero texto e com a aĺgebra não seria diferente. No entanto, o estudo de Almeida (2023, p 16), analisa o cérebro de matemáticos em diversas situações e concluiu que a área cerebral que se ativa quando o matemático usa elementos da linguagem é diferente das áreas ativadas quando o matemático resolve um problema de matemática. Então, ao menos cerebralmente, a matemática não é um mero aspecto da matemática.

Existem ainda outras concepções possíveis para a álgebra. É notável, por exemplo, o trabalho de Lima e Neto (2023) que identifica mais de vinte concepções de álgebra diferentes em autores variados.

Por fim, segundo a linha aristotélica, que tomamos neste trabalho, temos que a matemática é uma potencialidade presente nos seres que são atualizados via abstração. Isto significa que a álgebra é uma construção por abstração dos números. Portanto, optamos por entender a álgebra como aritmética generalizada para este trabalho.

5.3 Sobre o pensamento algébrico.

A linguagem algébrica é a forma de comunicar ideias algébricas entre os indivíduos.

Como a linguagem algébrica serve para comunicar o pensamento algébrico, convém analisar o que é e quais são os tipos e níveis desse pensamento. Essa análise não será simples, pois a própria álgebra não é um termo unívoco, como visto acima. Por isso vamos explorar três teóricos, a saber: Rômulo Campos Lins, James J. Kaput e Luis Radford.

Segundo Lins (1994, p. 29) o pensamento algébrico acontece quando o estudante atribui significado aos objetos algébricos, por exemplo, ele resolve uma equação atribuindo sentido a cada passo, ao invés de simplesmente repetir os passos segundo um modelo dado pelo professor.

Para o autor, o pensamento algébrico tem três características: "(i) pensar aritmeticamente; (ii) pensar internamente; e, (iii) pensar analiticamente". Nas palavras do mesmo, lemos:

> Pensar aritmeticamente significa que os objetos com que estou lidando são exclusivamente números, operações aritméticas e, acrescento aqui, uma relação de igualdade. Pensar internamente significa que as propriedades destes objetos que sustentam o que faço com eles, isto é, que sustentam a lógica das operações num sentido mais amplo, não fazem referência a nada fora do domínio destes objetos. Por exemplo, se estou tratando de números naturais, nenhuma referência é feita a coleções de pedrinhas nem a cubinhos de madeira, sobre os quais é possível sustentar que a multiplicação de números naturais é comutativa, mas tampouco há referência a ontologias "abstratas" dos números naturais, como seria o caso dos axiomas de Peano. Pensar internamente implica que número é um objeto simbólico, no sentido preciso de que só tem propriedades em relação às operações (aritméticas). (cf Klein, 1968) Pensar analiticamente, por fim, significa que números genéricos são tratados exatamente como se fossem específicos, "incógnitas" são tratadas exatamente como se fossem "dados";(1994, p. 29)

Na citação de Lins, vemos que o pensar internamente não exige referência a nada fora da álgebra, o que não significa que, do ponto de vista pedagógico, seja interessante fazer referência a objetos reais. Considere o seguinte exemplo, seja x o volume de um copo. O volume de dois copos iguais ao primeiro é 2x e o de três copos é 3x. Podemos interpretar a expressão 2x+3x=5x como o volume de dois copos mais o volume de três copos é igual ao volume de 5 copos. Segundo a citação de Lins, o pensamento algébrico não exige referência a copos ou qualquer outro elemento do mundo real, mas apenas aos elementos matemáticos na expressão, ainda que a referência aos copos seja didaticamente interessante. Assim, vemos que o trabalho de Lins é tentar caracterizar o essencial do pensamento algébrico maduro.

Outro pensador importante sobre o tema do ensino de álgebra é James Kaput, que concorda com Lins sobre o pensamento algébrico ser uma ação do sujeito, mas acrescenta que o pensamento algébrico se diferencia de outros pensamentos matemáticos pela presença maior do elemento da generalização. A classificação de Kaput busca explicitar todos os elementos presentes no pensamento algébrico (e não apenas seus elementos essenciais). A dita classificação é a seguinte: dois aspectos principais (a generalização e capacidade de manipulação simbólica) dão origem a três vertentes na forma de pensar, a “aritmética generalizada ou pensamento quantitativo”, o “pensamento funcional” e a “modelação”. Segundo Branco e Matos:

> “Kaput identifica, em 1999, cinco facetas do pensamento algébrico, estreitamente relacionadas entre si: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintacticamente; (iii) o estudo de estruturas abstractas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenômenos. Num texto mais recente, de 2008, Kaput refere de novo estes cinco aspectos, integrando os dois primeiros (simbolismo e generalização), que designa como ‘aspectos nucleares’ (core aspects) da Álgebra, e considerando os três últimos como ‘ramos’ (strands) deste domínio com expressão na Matemática escolar.” (BRANCO, MATOS, 2009, p. 7)

Assim, para Kaput, aritmética generalizada inclui explorar e relações de números inteiros, propriedades das operações com números inteiros, explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidade, tratar o número algebricamente[41] e resolver expressões numéricas com número desconhecido.

O pensamento funcional inclui simbolizar quantidades e operar com expressões simbólicas, representar dados graficamente, descobrir relações funcionais, prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos e identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.

Por fim, temos o entendimento de Kaput sobre a questão da modelação[42] explicado por Almeida:

> “Para Kaput (2008), modelar é utilizar o aspecto sintático da álgebra para representar diversas situações, desde as essencialmente aritméticas, como problemas simples, como as ditas essencialmente algébricas, como as relações funcionais. Além disso, essa vertente do pensamento algébrico está, sobretudo, entrelaçada com as outras duas vertentes, uma vez que ela é utilizada para representar, muitas vezes, as ações realizadas nessas vertentes.” (ALMEIDA, 2016, p.73)

---

[41] Tratar o número algebricamente significa esquecer a quantidade propriamente dita e olhá-lo sob aspecto das propriedades dos algarismos, como se faz no caso dos critérios de divisibilidade. Por exemplo, para saber se o número é múltiplo de 10 pode-se ignorar a quantidade e basta procurar o 0 na casa das unidades.

[42] Ainda que Kaput coloque a modelação como elemento essencial da álgebra, cabe ressaltar que a modelação está presente em toda a matemática, por exemplo, existe a modelagem geométrica. Nesse sentido, é correto afirmar que que a modelagem é um elemento essencial mas não exclusivo da álgebra.

Assim, conforme Lins e Kaput, o domínio da linguagem algébrica não é causa necessária nem causa suficiente para afirmar a presença do pensamento algébrico. Pois, é possível existir domínio da linguagem algébrica sem o respectivo pensamento algébrico (quando o aluno resolve uma equação apenas seguindo o modelo) e pode haver pensamento algébrico sem uso da linguagem algébrica (quando o aluno está pensando algebricamente, mas utiliza a linguagem gestual ou a linguagem corrente para se expressar).

Retomando o que foi dito, Lins tenta caracterizar o pensamento algébrico, enquanto Kaput descreve detalhadamente os elementos do pensamento algébrico. Contudo, para compreender o uso da linguagem algébrica, é necessário conhecer o trabalho de Radford, pois seu interesse vai além das já importantes contribuições advindas dos trabalhos supracitados. Radford, em suas pesquisas, sugere a introdução de graus de pensamento algébrico associados à linguagem usada para resolver os problemas algébricos. O trabalho de Radford se debruça de um modo especial sobre a capacidade de generalização em sequências numéricas.

Para explicar a teoria de Radford, tomemos um exemplo. Seja (S_n) a sequência dos números ímpares. Assim, $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 5$ e imaginemos que o aluno deve encontrar o S_{18}. No estágio do pensamento factual o aluno percebe como o padrão varia, mas ainda está muito apegado aos casos particulares, assim, a variável está implícita. Se o aluno resolver o problema apenas somando 2 unidades até encontrar o 18º termo da sequência (ainda que ele organize os dados em uma tabela) ele ainda está em um pensamento aritmético.

Para que seja considerado um pensamento algébrico, ele precisa realizar a operação 2x18-1=35. O que qualifica o estágio do pensamento factual é a linguagem sem referência a incógnita. Nesse estágio, o aluno usa termos como “esse número”, “aquele ali” “faz assim” e assim por diante. O pensamento está associado às ações realizadas, por isso Radford fala em “fórmula-em-ação”. [43]

No caso do pensamento contextual o aluno percebe o padrão e é capaz de generalizar, mas se expressa em termos da língua vernácula, ele descreve as ações que precisa fazer para descobrir diretamente o centésimo termo. Neste caso ele já fala em “termo qualquer”, “termo n” e “duas vezes o número do termo menos 1”.

[43] Aqui vale lembrar o que Piaget fala sobre a abstração reflexionante: que ela é uma abstração sobre as ações do sujeito. Essa abstração sobre as ações é o que permite a entrada no próximo estágio.

Neste estágio, o aluno não escreve em linguagem simbólica, mas domina o pensamento algébrico.

Finalmente, no estágio de pensamento algébrico padrão o estudante consegue escrever em uma expressão algébrica que representa o termo geral da sequência ($T_n = 2n - 1$) e consegue encontrar solução com essa expressão algébrica. Ou seja, ele domina a gramática algébrica.

Em suma, o processo de desenvolvimento da linguagem algébrica segue a seguinte lógica:

a. Pensamento factual: sem referência à incógnita.
b. Pensamento contextual: referência à incoǵnica em linguagem vernácula.
c. Pensamento algébrico padrão: domínio formal da linguagem algébrica.

A seguir, apresentamos um quadro que resume as diferentes contribuições para entender o pensamento algébrico, conforme os autores estudados.

Quadro 6: Diferentes visões do pensamento algébrico

Autor	Principais Características do Pensamento Algébrico	Destaques e Exemplos
Lins	- Pensar aritmeticamente (refere-se à linguagem: usa apenas: números, letras, operações, igualdade) - Pensar internamente (propriedades e lógica próprias, sem referência externa) - Pensar analiticamente (tratar números genéricos como específicos, incógnitas como dados)	Ênfase na autonomia dos objetos algébricos e na lógica interna da álgebra
Kaput	- Aritmética generalizada: a) explorar propriedades e relações de números inteiros, b) propriedades das operações com números inteiros, c) explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidade, d) tratar o número algebricamente e e) resolver expressões numéricas com número desconhecido. - Pensamento funcional: a) simbolizar quantidades e operar com expressões simbólicas, b) representar dados graficamente, c) descobrir relações funcionais, d) prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos e e) identificar e descrever padrões numéricos e geométricos. - Modelação: utilizar o aspecto sintático da álgebra para representar diversas situações.	Ênfase no pensamento algébrico em si. Diferencia os elementos de cada parte do pensamento algébrico.

Radford	- Grau factual: padrão percebido, mas dependente de casos particulares (variável implícita) - Grau contextual: generalização expressa em linguagem natural (abstração inicial) - Grau padrão: generalização simbólica, expressão algébrica madura	Ênfase no desenvolvimento do domínio da linguagem algébrica. Ênfase na capacidade de generalização.

Após estudarmos as contribuições de Kaput, Lins e Radford podemos fazer uma síntese do que é o pensamento algébrico. O dito pensamento algébrico tem dois aspectos nucleares: a generalização e a manipulação algébrica (Kaput). Ambos os aspetos são conquistados de modo progressivo a partir do conhecimento dos números e da linguagem (Radford) e podemos dizer que o pensamento algébrico está plenamente dominado quando o sujeito é capaz de pensar algebricamente sem qualquer referência aos conhecimentos não-algébricos (Lins).

5.4 Resumo

Neste capítulo, autores mais modernos amplificam as contribuições, sobretudo de Piaget sobre abstração ao inseri-las no debate sobre pensamento algébrico. Usinski (2003) estuda a função do símbolo na álgebra. Lins destaca que o pensamento algébrico é, sobretudo, interno, isto é, não precisa fazer referência ao mundo externo. Kaput destaca a importância do pensamento de matemática generalizada, do pensamento funcional e da modelação. Radford estuda o desenvolvimento da linguagem algébrica, destacando que primeiro o estudante gesticula seu pensamento, depois usa a linguagem comum e por fim escreve em linguagem formal. Os autores citados acima concordam que a álgebra é uma criação humana e o pensamento algébrico pode estar presente sem simbolismo e é possível ter simbolismo sem pensamento algébrico. Por fim, eles concordam que o pensamento algébrico deve ter um elemento de generalização e um elemento de domínio simbólico.

6. ASPECTOS LEGAIS RELATIVOS AO ENSINO DA ÁLGEBRA

6.1 Introdução

O ensino da álgebra na educação básica brasileira tem sido objeto de constantes debates e reformulações curriculares, especialmente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento abstrato nos estudantes. Este capítulo tem como objetivo analisar os aspectos legais que norteiam o ensino da álgebra no Brasil, com foco particular no desenvolvimento da capacidade de abstração matemática. Examinaremos os principais documentos normativos da educação nacional - os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - buscando identificar as diretrizes, orientações e pressupostos teóricos que fundamentam o trabalho com conceitos algébricos na educação básica.

Cabe destacar, desde o início, uma limitação identificada nos documentos analisados: embora reconheçam a importância da abstração no ensino matemático, eles não apresentam teorias consolidadas ou explicações detalhadas sobre como esse processo ocorre, oferecendo apenas orientações metodológicas sem uma fundamentação teórica robusta que justifique as escolhas pedagógicas propostas.

6.2 As leis e diretrizes

Werner Jaeger em seu importante *Paideia* (2003) traz robustez à ideia de que a educação é um subproduto da civilização, ou seja, a educação é um reflexo das relações sociais e valores de um determinado povo em determinada época. Assim, a educação é mais do que um conjunto de ideias produzida por pedagogos, mas é o que um povo faz. Soma-se a isso a origem etimológica da palavra educação, que vem do latim (ex ducere) e significa “trazer para fora”. indicando que a educação tem como função principal tirar a criança do seu mundo egocêntrico e apresentar a ela o mundo exterior, seja ele geográfico, histórico-social, natural, espiritual ou o mundo do conhecimento em geral. Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que praticamente copia o Artigo 205 da Constituição Federal de 1988:

> A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o

> exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (Brasil, 1996, p. 8)

Ou seja, a legislação brasileira acrescenta duas funções à educação: o “trazer para fora” aparece como “pleno desenvolvimento do educando” e acrescido a preparação para o mundo do trabalho e para o exercício da cidadania.

Neste sentido, a educação matemática é de suma importância, pois contribui diretamente para a concretização dos três objetivos listados acima. Concordam com isso os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s) quando afirmam que:

> “A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. [...] Em contrapartida, não se deve perder de vista os caracteres especulativo, estético e não imediatamente pragmático do conhecimento matemático sem os quais se perde parte de sua natureza.” (Brasil, 1998, p.24)

Igualmente, também a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) vai ao encontro dessas ideias quando afirma que:

> “O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.” (Brasil, 2018, p. 265)

Não somente o conhecimento matemático atua no pleno desenvolvimento, mas a capacidade de abstração desenvolvida pela matemática durante as aulas de álgebra contribui para o desenvolvimento global do estudante. Por exemplo, a abstração contribui para pensar de modo lógico, organizado, a criar estratégias e pensar antes de agir. O desenvolvimento dessas características têm implicações diretas no pleno desenvolvimento do educando, em seu exercício da cidadania e em sua preparação para o mundo do trabalho. Podemos acrescentar também que o exercício da cidadania se beneficia com o conhecimento desenvolvido pela álgebra. Por exemplo, ao entender a relação entre certas grandezas e ao desenvolver a capacidade de lidar com tabelas e gráficos. Além disso, saber calcular do valor numérico através de uma fórmula e a habilidade de modelar problemas em forma de equações polinomiais e depois resolvê-las também são habilidades importantes para o mundo do trabalho, a depender da profissão escolhida pelo estudante.

De modo mais geral, a BNCC define oito habilidades gerais para o ensino da matemática no Ensino Fundamental. Cabe destacar aqui a segunda habilidade:

“Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.” (Brasil, 2018, p. 267). Isso porque tal habilidade está intimamente ligada ao domínio da linguagem algébrica, dado que, a ela é semelhante à linguagem da lógica simbólica. Compreendendo a primeira, compreende-se a segunda. Inclusive, existe uma relação direta entre a lógica proposicional e a álgebra dos conjuntos.

Sendo mais específico e focando no ensino da álgebra, a BNCC afirma que:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (Brasil, 2018, p. 270)

Para alcançar esses objetivos

> “é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados.”(Brasil, 2018, p. 270)

E ainda:

> Nessa fase [os anos finais do Ensino Fundamental], os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos.(Brasil, 2018, p. 270-271)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não comentam sobre como se dá a abstração, mas é no ensino da álgebra que ela ganha destaque. O PCN da matemática reconhece que a matemática tem construções abstratas e que a álgebra é o lugar mais favorável para desenvolver a abstração. A BNCC traz um pequeno avanço nesse sentido. Ela também reconhece o papel da abstração na matemática e que a álgebra é a unidade por excelência da abstração e acrescenta que “Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido.” (p. 299).

> Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem. Assim, algumas das habilidades formuladas começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo...”. Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos. (Brasil, 2018, p. 299)

Esse parágrafo pressupõem o entendimento de que a abstração se fundamenta na capacidade de perguntar “e se?” Sendo assim, o parágrafo está usando implicitamente o conceito de abstração reflexionante, além de também implicitamente indicar a importância da imaginação no processo. Isso porque a abstração reflexionante é aquela que abstrai a partir das ações do sujeito. No caso em questão, o sujeito imagina novos cenários a partir de um problema inicial e abstrai a partir do que há de comum desses cenários imaginados.

Outro avanço que a BNCC traz para o ensino de álgebra está alinhado ao movimento Early Algebra (que significa Álgebra Precoce). Esse movimento, do qual o próprio Kaput é um dos defensores, propõe que alguns elementos de pensamento algébrico podem ser ensinados desde as séries iniciais, tais como identificação de padrões em sequências, generalização de relações numéricas, trabalho com variáveis de forma intuitiva, resolução de problemas que envolvem incógnitas e exploração de regularidades matemáticas. Segundo este movimento, não é necessário esperar até o sétimo ano do Ensino Fundamental para iniciar o estudo de elementos de álgebra.

Contudo, um problema surge quando analisamos especificamente as habilidades e competências da BNCC no que diz respeito ao tema da álgebra. Ao contrário do que propõe Kaput, ela não aborda o pensamento de aritmética generalizada. Podemos perceber isso analisando as habilidades da BNCC associadas à álgebra:

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.
(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Podemos aqui observar que quando comparamos essas habilidades com as habilidades que Kaput apresenta como sendo essenciais para consolidar o pensamento algébrico, percebemos que a BNCC aborda o pensamento funcional[44] e a modelação, esquecendo-se do pensamento de aritmética generalizada[45]. Poderia ser que a BNCC abordasse esse tema nos anos anteriores ao sétimo ano do Ensino Fundamental ou nos anos seguintes, mas basta ler o documento da BNCC para perceber que isso não ocorre. Portanto, nossa sequência pedagógica não estará inteiramente baseada na BNCC, para que ela possa abordar plenamente o pensamento algébrico. Mas isso não implica algum tipo de ilegalidade de nossa parte, visto que a BNCC é uma base e não um teto, o que significa dizer que a base permite abordar conteúdos que ela não prevê, desde que não se deixe de abordar os conteúdos e habilidades que ela prevê.

6.3 Resumo

A análise dos aspectos legais relativos ao ensino da álgebra no Brasil revela um cenário de importantes avanços conceituais, mas também de lacunas teóricas significativas que merecem atenção especial.

---

[44] O pensamento funcional inclui simbolizar quantidades e operar com expressões simbólicas, representar dados graficamente, descobrir relações funcionais, prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos e identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.
[45] A aritmética generalizada inclui explorar as relações entre números inteiros, propriedades das operações com números inteiros, explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidade, tratar o número algebricamente e resolver expressões numéricas com número desconhecido.

Os documentos normativos brasileiros - PCN e BNCC - demonstram uma compreensão clara da importância da álgebra para a formação integral dos estudantes, reconhecendo sua contribuição não apenas para o desenvolvimento técnico-matemático, mas também para a formação cidadã e preparação para o mundo do trabalho.

Um avanço significativo identificado na BNCC refere-se à incorporação dos princípios do movimento Early Algebra, que propõe a introdução de elementos do pensamento algébrico desde os anos iniciais do ensino fundamental.

Contudo, a principal limitação identificada nos documentos analisados reside na ausência de fundamentação teórica sólida sobre os processos de abstração matemática. Embora a legislação reconheça a centralidade da abstração no ensino algébrico, não são apresentadas teorias consolidadas que explicam como esses processos cognitivos ocorrem ou que orientem de forma consistente as práticas pedagógicas. Isso implica que elementos fundamentais do pensamento algébrico ficaram excluídos da BNCC. Visto que a BNCC é usada como guia principal da produção de livros didáticos, pode ocorrer que muitos livros falhem em abordar o pensamento algébrico de modo pleno.

7. ESTRUTURANDO A PESQUISA

7.1 Introdução

Após o percurso teórico realizado nos capítulos anteriores, no qual exploramos as dimensões filosóficas, psicológicas e pedagógicas da abstração matemática - desde as contribuições aristotélicas sobre a formação de conceitos até as investigações contemporâneas da Teoria Cognitiva da Matemática e os insights piagetianos sobre o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático -, chegamos ao momento de materializar esses conhecimentos em uma proposta prática de investigação.

Os capítulos de 1 a 4 tratam do tema da abstração sob múltiplos aspectos. O capítulo 5 aplica o conteúdo desenvolvido nos capítulos anteriores ao tema da educação em geral e do ensino da álgebra. O capítulo 6 aborda o ensino da álgebra do ponto de vista dos documentos norteadores. Já este capítulo marca a transição entre a fundamentação teórica e a aplicação empírica, constituindo-se como o elo que conecta as reflexões conceituais sobre o processo de abstração com a realidade concreta da sala de aula. Aqui, não apenas delineamos os contornos metodológicos de nossa pesquisa, mas também estabelecemos como os constructos teóricos estudados se traduzem em estratégias pedagógicas observáveis.

A questão central que nos orienta - compreender como se desenvolve a capacidade de abstração no desenvolvimento cognitivo dos jovens e como isso impacta os processos de ensino-aprendizagem de álgebra - exige uma abordagem metodológica que permita capturar tanto os momentos de transição do pensamento aritmético para o algébrico quanto os elementos que favorecem ou dificultam essa passagem. Para isso, estruturamos uma investigação que privilegia a observação direta dos processos de aprendizagem em contexto natural, utilizando a metodologia de resolução de problemas como ferramenta tanto pedagógica quanto investigativa.

A escolha por uma proposta pedagógica de quatro aulas reflete nossa compreensão de que a abstração algébrica não se desenvolve de forma súbita, mas através de um processo gradual de construção de significados. Cada aula foi pensada para proporcionar diferentes oportunidades de manifestação do pensamento algébrico: desde as primeiras aproximações com a linguagem simbólica até o desenvolvimento de capacidades de generalização e modelação matemática.

Neste capítulo, apresentamos não apenas os procedimentos metodológicos e a estrutura da proposta pedagógica, mas também explicitamos brevemente as conexões entre nossa prática investigativa e o referencial teórico construído. Dessa forma, evidenciamos como questões fundamentais sobre a natureza da abstração matemática - discutidas anteriormente de forma teórica - podem ser investigadas empiricamente no contexto escolar.

7.2 Caracterização da escola

A proposta pedagógica, que se encontra nos anexos, será aplicada na EMEB João de Barro, INEP 43146457, localizada na rua Trajano Proença de Abreu, 134 no bairro Nova Sapucaia em Sapucaia do Sul. A escola conta com aproximadamente 600 estudantes, sendo 221 nos anos finais, 94 na educação infantil e 274 nos anos iniciais até o momento da entrega deste trabalho. A escola conta com 15 salas de aula, Laboratório de Informática (LabIn), Laboratório de Aprendizagem (LA), Atendimento Educacional Especializado (AEE), sala dos auxiliares de disciplina, sala dos professores, além dos espaços administrativos, sala da direção, secretaria, e sala do SOE (Supervisão e Orientação Escolar). Vale destacar que o IDEB da escola é um dos maiores do município, ainda que não se trate do bairro mais rico da cidade.

O bairro é antigo dentro do município e, segundo alguns moradores, gerações de famílias permanecem no bairro. Isso permitiu que pequenos negócios prosperassem e ficassem maiores, o que não significa que a população do bairro seja de classe alta, mas que está em ascensão, inclusive (dizem alguns moradores) que a violência tem diminuído nos últimos anos. Da mesma maneira, a associação de moradores do bairro se tornou uma entidade forte dentro do município.

A proposta didática ocorreu na primeira quinzena de agosto de 2025 em uma turma de sétimo ano (7B) com 28 alunos, dos quais, três são atendidos pelo AEE (Atendimento Educacional Especializado). Desses três, um conseguem acompanhar o andamento da turma e dois precisam de atividades adaptadas e poucas vezes permanecem na sala o tempo todo, por isso não participaram da pesquisa. É importante salientar que a turma escolhida não teve contato com nenhum conteúdo explicitamente algébrico no ano de 2025.

7.3 A proposta pedagógica: objetivos

Estamos interessados em desenvolver elementos de pensamento algébrico em uma turma de sétimo ano na EMEB João de Barro de Sapucaia do Sul. Esses elementos são a capacidade de dar sentido à escrita algébrica e a capacidade de generalização a fim de preparar o aluno para as habilidades algébricas superiores. Dessa forma, tal proposta didática tem caráter propedêutico. Isto significa que não é o objetivo neste momento estudar métodos de resolução de equações, calcular o valor numérico de uma expressão algébrica nem em como operar com símbolos. Estamos interessados em desenvolver elementos do pensamento do tipo “aritmética generalizada”[46] e elementos do pensamento funcional[47]. Para isso usaremos todo o cabedal teórico desenvolvido até aqui com ênfase ao apresentado por Kaput.

Para desenvolver o pensamento algébrico de tipo aritmética generalizada escolhemos uma série de problemas de criptaritmética e problemas numéricos. Neste caso, cada problema poderá ser resolvido com um pensamento aritmético ou com pensamento algébrico. Se o problema for resolvido com procedimentos meramente aritméticos, o professor mostrará como resolver com pensamento algébrico. Ademais, cada problema apresenta perguntas para instigar a capacidade de generalização e a escrita simbólica.

Para desenvolver o pensamento funcional usaremos os problemas associados a como encontrar o termo geral de uma sequência. O uso das sequências como motivador para o estudo da álgebra se justifica, segundo Cessa (2009), pois ele dá significado aos termos, operações e expressões equivalentes. Por exemplo, se dois estudantes chegam em fórmulas diferentes para o enésimo termo de uma sequência, eles podem dar significado ao conceito de expressão equivalente, pois existem duas fórmulas capazes de representar o mesmo objeto e,

---

[46] Explorar propriedades e relações de números inteiros, explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidade, tratar o número algebricamente e resolver expressões numéricas com número desconhecido.
[47] Simbolizar quantidades, prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos e identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.

ao efetuar os cálculos, uma se transforma na outra. Isso também justifica o conhecimento das regras de manipulação algébrica.

Finalmente, para desenvolver a capacidade de modelação, isto é, a habilidade de transcrever as situações reais em linguagem algébrica, em todas as aulas existem um ou mais problemas onde um dos itens pede que se escreva em linguagem algébrica. Tais problemas têm um grau de dificuldade crescente. De fato, as aulas 1 e 2 apresentam situações-problema para serem escritas em linguagem algébrica. Já nas aulas 3 e 4 são apresentadas sequências geométricas e se pede que o aluno encontre o padrão de crescimento e escreva uma fórmula que permita calcular qualquer termo dessa sequência.

A aplicação desses problemas será realizada segundo a metodologia de resolução de problemas tal como descrita por Polya. Tal escolha será justificada no próximo tópico, bem como será explicado quais são os passos dessa metodologia.

7.4 A metodologia da sequência didática: resolução de problemas

Para a nossa atividade pedagógica queremos que a mesma não apenas informe o estudante de algum conteúdo ou que desenvolva certa habilidade matemática, mas que dê uma experiência real do que é a matemática enquanto algo praticado por matemáticos ou por alguém que se coloque como tal. Mas o que faz um matemático? O que essa prática exige de quem pretende se colocar nesse lugar?

Para entender esse ponto, devemos lembrar que por muito tempo, o ensino de matemática foi reduzido à aritmética e à álgebra (excluindo ou, pelo menos diminuindo, a importância da geometria). Mas mesmo o ensino dos conteúdos algébricos não se deu de modo completo, mas reduzido ao conhecimento de métodos de manipulação simbólica e de resolução de equações. Por exemplo, para Elon Lages Lima (1999) o ensino da matemática deve ser estruturado em conceituação, manipulação e aplicação. Sobre a manipulação, Lima diz:

> “A presença da manipulação é tão marcante em nosso ensino que, para o público em geral (e até mesmo para muitos professores e alunos), é como se a Matemática se resumisse a ela”. (LIMA, 1999, p. 4)

Acreditamos que isso é a causa de ouvirmos estudantes dizendo que não gostam de matemática, mas quando investigamos qual foi a experiência que eles tiveram com relação a essa disciplina, percebemos que se trata de uma experiência de praticar exercícios repetitivos, que tem o seu lugar, mas não é o essencial da matemática, que não dá espaço para a liberdade de criação e que perde um dos elementos mais importantes da matemática que é a satisfação e o orgulho pessoal de uma descoberta original.

Ou seja, para muitos a matemática se resume a resolver equações e fazer cálculos, de tal forma que o público em geral não sabe que a matemática constitui-se de um conjunto organizado e sistemático de conhecimentos, que as afirmações matemáticas necessitam de prova rigorosa e quais as possíveis aplicações da matemática. A cultura popular acredita que a matemática se resume a decorar métodos prontos para obter uma resposta exata. Assim, acreditam que a matemática não é uma área do conhecimento que use a criatividade. Mas essa imagem se afasta da real prática do matemático.

Nesse sentido, perguntamos: “o que faz um matemático?”. Observando a história da matemática, podemos encontrar os seguintes traços permanentes no fazer matemático:

(i) os matemáticos absorvem a cultura matemática anterior;

(ii) dominam procedimentos e conceitos;

(iii) a partir da experiência matemática anterior ou de um problema real imediato, colocam e resolvem problemas;

(iv) generalizam soluções e cruzam com outras áreas para criar novos conceitos;

(v) registram soluções de modo claro e lógico a fim de ser claramente entendido pelos outros matemáticos;

(vi) eventualmente, aplicam suas soluções a outras áreas do conhecimento;

(vii) organizam todo o conhecimento de modo dedutivo;

(vii) eventualmente partem de necessidades de outras áreas e desenvolvem novas ideias.[48]

Pode-se argumentar que a matemática dos povos primitivos não possui todos os elementos anteriores. Respondemos a isso dizendo que, mesmo que houvesse

[48] Cada um desses pontos pode ser desmembrado em partes menores, como vimos no caso do pensamento algébrico.

uma filosofia antes de Sócrates, Sócrates é o pai da filosofia por dar a ela uma forma que serviu de modelo para os demais. Logo, a filosofia pré-socrática é uma pré-filosofia. Da mesma forma, também, a matemática anterior ao período grego é uma espécie de pré-matemática. Portanto, ela não tem todos os elementos da prática da matemática. Associado a essa ideia, vale destacar que era comum na mesma Grécia se considerar a geometria como matemática e a aritmética do dia-a-dia como não sendo matemática, da mesma maneira como se hoje se dissesse que a contabilidade não é matemática. Isso porque os elementos essenciais da matemática seriam os conhecimentos encadeados e demonstrados, e esses não fazem parte da mera prática de cálculos do dia-a-dia.

Como a proposta pedagógica será realizada em quatro aulas, queremos focar nas habilidades principais, que são a arte de resolver problemas, generalizar soluções e escrever de modo rigoroso a solução do problema. Mas isso é o que a metodologia de resolução de problemas oferece ao estudante, em grau menor. Portanto, a metodologia de resolução de problemas aproxima o estudante da realidade do trabalho do matemático.

Mas, se, por um lado, a resolução de problemas remete ao fazer do matemático e é tão antiga quanto a matemática, a metodologia de resolução de problemas foi organizada por Polya (2006) em 1945. A fim de aproximar essas duas dimensões, aqui refletimos sobre a metodologia da resolução de problemas primeiramente pensando sobre o que é um problema matemático. Seguindo a linha de Onuchic e Allevato (2011, p. 81), um problema é uma situação ou pergunta para a qual não existe resposta, técnica ou método conhecido para chegar na solução. Nesse sentido, o problema é definido na sua relação com o sujeito, ou seja, o problema só é um problema para o sujeito que não sabe ainda como resolvê-lo.

Agora, olhando para a metodologia, podemos dizer que Polya divide sua proposta em cinco etapas: familiarização, aperfeiçoamento da compreensão, procurar uma ideia proveitosa, execução do plano e retrospecto.

A familiarização consiste em entender o problema. Nessa etapa espera-se que o estudante leia o problema, consiga visualizá-lo como um todo e saiba qual é a pergunta específica, isto é, qual é objetivo que se quer chegar. Isso garante que as informações relevantes sejam destacadas e as irrelevantes descartadas.

Na etapa de aperfeiçoamento da compreensão, o estudante deve voltar ao enunciado, destacar claramente as hipóteses e a solução que se quer chegar, dividindo o problema em partes. Cada parte tem o seu objetivo específico que, junto com os demais, serve para alcançar a solução.

Na etapa de procurar uma ideia proveitosa, o estudante deve buscar em seus conhecimentos anteriores alguma ideia que se aproxime do problema em questão, por exemplo, a solução de um problema semelhante já conhecido. Basta que a solução ajude a resolver uma das partes do problema. Cada ideia proveitosa deve ter a forma de um plano de ação.

A quarta etapa é a execução do plano. Nesta etapa, o estudante deve testar a ideia proveitosa da etapa anterior. Sugere-se que o estudante execute cada passo com atenção, tendo certeza da plena execução.

Por fim, a etapa do retrospecto o estudante deve revisar o seu trabalho para garantir que o problema foi de fato resolvido, não pulou etapas importantes, e deve tentar generalizar a solução, isso pode gerar uma solução melhor ao problema.

Sobre o uso da metodologia de resolução de problemas, Onuchic e Allevato (2011, p. 79), mostram que historicamente há três modos de abordar essa metodologia: ensinar *sobre* resolução de problemas, ensinar matemática *para* resolver problemas e ensinar matemática *através* da resolução de problemas. Juntamente com as autoras, optamos pela terceira proposta, que coloca o problema no início da aula ou de um novo capítulo do ensino para motivar e dar significado ao estudo, isto é, produzir um desequilíbrio (no sentido piagetiano), pois o problema instiga a criação de conceitos e procedimentos que podem resolver outros problemas. Lima (1999, p. 6) concorda com esta abordagem quando diz que “Cada novo capítulo do curso deveria começar com um problema cuja solução requeresse o uso da matéria que vai começar a ser ensinada.”

Seguindo essa perspectiva é possível usar a resolução de problemas de dois modos. O primeiro modo, apresentado por Lima (1999) consiste em apresentar um problema para os alunos refletirem sobre o mesmo. Depois, o problema é resolvido pelo professor ou por um aluno e então seguem-se os desdobramentos da teoria matemática que se deseja ensinar. O segundo modo é distribuir vários problemas (ou um problema com diversos modos de resolução distintos) aos alunos divididos em grupos, deixar que eles resolvam e depois abrir para a discussão das soluções. Desse modo os alunos podem contribuir com os colegas para encontrar uma solução ideal. Isso permite a construção de significado do conhecimento matemático. Optamos em nossa pesquisa pelo segundo modo. Desta forma, esperamos que a metodologia de resolução de problemas em nossa proposta motive os alunos a pensar sobre os problemas propostos e ajude-os a construir os conhecimentos elencados em nosso objetivo.

7.5 Cronograma e estrutura das aulas

A proposta pedagógica inclui cinco encontros, sendo quatro aulas e uma avaliação. As duas primeiras destinam-se ao desenvolvimento do pensamento de aritmética generalizada, as duas seguintes destinam-se ao desenvolvimento do pensamento funcional e em todas as aulas são feitos questionamentos para desenvolver a capacidade de modelação.

Nas três primeiras aulas os alunos serão divididos em quatro grupos. Serão apresentados aos alunos quatro problemas um de cada vez de modo que todos os quatro grupos alunos resolvam todos os problemas. O professor observará um grupo por vez, intervindo o mínimo possível, apenas fazendo as perguntas da metodologia de resolução de problemas. Depois, o grupo acompanhado pelo professor apresentará a sua solução e os outros grupos poderão fazer observações e apresentar soluções alternativas.[49] Dessa forma, o professor observará o trabalho dos alunos em três etapas: a discussão e resolução do problema, a escrita da resolução e a apresentação da resolução. Depois passa-se a outro problema e o professor acompanha outro grupo.

Na quarta aula os alunos serão convidados a resolver um problema de modo individual e entregar a solução ao professor. Nesta aula será permitida a troca de ideias com os colegas e perguntas ao professor.

No quinto encontro será realizada uma avaliação individual ao modelo de prova onde os alunos poderão mostrar o desenvolvimento de sua capacidade de abstração e de escrita algébrica.

[49] Dessa forma, o professor observará o trabalho dos alunos em três etapas: a discussão e resolução o problema, a escrita da resolução e a apresentação da resolução.

Descrição da proposta pedagógica

Prof. Cássio Volpato Selbach

Proposta Pedagógica

IDENTIFICAÇÃO

Professor: Cássio Volpato Selbach
Professor Orientador: Gabriel Goldmeier
Disciplina: Matemática
Turma: 7B (Sétimo Ano)
Temática: Álgebra Básica
Tempo de duração da sequência: 5 encontros de 1h50min.

JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS

O conhecimento algébrico constitui um dos pilares fundamentais da educação matemática, servindo como ferramenta essencial para a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento, a formulação de leis e relações matemáticas, e o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. Sua importância transcende os limites da matemática, permitindo aos estudantes modelar situações do cotidiano, compreender padrões e regularidades, e desenvolver habilidades de abstração e generalização que são cruciais para o pensamento científico. A álgebra também funciona como uma linguagem universal que possibilita a comunicação precisa de relações quantitativas e a resolução sistemática de problemas complexos.

No entanto, para estudantes do sétimo ano, o primeiro contato formal com a álgebra frequentemente representa um obstáculo significativo no aprendizado matemático. A transição da aritmética concreta para o pensamento algébrico abstrato, marcada pela introdução de letras e símbolos para representar quantidades desconhecidas ou variáveis, pode gerar ansiedade, insegurança e resistência ao aprendizado. Esta dificuldade inicial, se não adequadamente abordada através de metodologias que privilegiam a construção gradual e significativa do conhecimento, pode comprometer não apenas o domínio algébrico, mas todo o desenvolvimento matemático subsequente do estudante. Portanto, torna-se essencial implementar estratégias pedagógicas que favoreçam uma introdução progressiva e contextualizada às habilidades, competências e conceitos algébricos.

Nosso objetivo para esta sequência é abrir a possibilidade mental para que o conhecimento dos conceitos e procedimentos algébricos possam ser desenvolvido.[50] Assim sendo, dentre os vários objetivos possíveis, selecionamos os seguintes para a proposta pedagógica: desenvolver a capacidade de generalizar e de atribuir sentido às sentenças algébricas. De modo mais específico listamos:

a. explorar propriedades e relações entre números inteiros;
b. explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidade;
c. tratar o número algebricamente;
d. resolver expressões numéricas com número desconhecido;
e. simbolizar quantidades e relações;
f. prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos e
g. identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.

Para isso, separamos duas aulas para trabalhar o aspecto da aritmética generalizada (para desenvolver os objetivos a, b, c e d) e duas aulas para trabalhar o pensamento funcional (para desenvolver os objetivos e, f e g) e o pensamento de modelação será desenvolvido em todas as aulas. Isso implica que não é o objetivo dessa proposta o treinamento da manipulação algébrica, nem resolver equações do primeiro grau, nem representar dados em um gráfico. Ou seja, o objetivo da sequência de atividades é abrir a possibilidade de um conhecimento algébrico significativo. Tal conhecimento deverá ser expandido a posteriori com outras aulas que não serão exploradas nesta pesquisa. Além disso, acreditamos que a metodologia de resolução de problemas trará o ganho de desenvolver as seguintes habilidades gerais.

1. Desenvolver nos alunos o raciocínio lógico;
2. Desenvolver nos alunos o controle da impulsividade;
3. Desenvolver nos alunos a criatividade para formular soluções;

[50] Aqui voltamos a Aristóteles. Aristóteles fala em sensação, imaginação, memória e conceituação. A proposta pretende atuar na etapa da imaginação.

4. Fazer os alunos trabalharem em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com o objetivo de solucionar as tarefas propostas e, posteriormente, generalizar os resultados obtidos;

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC

Segundo a BNCC, o ensino de matemática deve:

> “2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. (...) 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Nesse sentido, esta proposta pedagógica atende às seguintes habilidades:

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade

METODOLOGIAS E COLETA DE DADOS

As aulas são estruturadas com o intuito de dar protagonismo aos alunos utilizando metodologias ativas de aprendizagem. Para esta proposta, a metodologia de resolução de problemas, tal como descrita por Polya (2006) é a mais adequada. Ela será aplicada nas quatro aulas. Por fim, em um quinto encontro, será destinada a uma avaliação.

A fim de favorecer a coleta de dados, a dinâmica de cada aula será a seguinte: no primeiro dia, os alunos formarão quatro grupos que deverão permanecer juntos até o final da pesquisa. Nas aulas 1, 2 e 3 serão projetados para os alunos quatro problemas distintos, um de cada vez. Todos os alunos serão convidados a resolver todos os problemas em respectivos grupos. O professor acompanhará um grupo por vez enquanto este grupo resolve o problema que estiver sendo projetado no momento, anotando o que for de interesse para a pesquisa. Após o grupo resolver o problema, o grupo é convidado a resolver no quadro o problema. Após a resolução no quadro, os colegas são convidados a darem sugestões e soluções alternativas. Depois é projetado o próximo problema e o professor acompanhará outro grupo em sua discussão que, após resolver o novo problema, é convidado a apresentar a sua solução, de tal modo que ao final da aula o professor tenha acompanhado e observado todos os grupos e cada grupo tenha a oportunidade de comunicar à turma a sua solução.

Na aula 4, essa dinâmica será diferente. Os alunos serão convidados a resolver um problema de forma individual, mas podendo trocar ideias com o professor. Na quinta aula ocorrerá uma avaliação individual em que o aluno poderá mostrar quais habilidades desenvolveu nesse período.

A coleta de dados, portanto, será feita através da observação dos grupos enquanto discutem o problema, da observação da apresentação dos grupos, da observação das contribuições dos colegas e da avaliação individual. Observaremos com atenção especial em que momento da resolução do problema o aluno dá o saldo do pensamento aritmético para o pensamento algébrico (se é no momento da "ideia proveitosa", se é na escrita do problema, na apresentação para os colegas ou em algum momento posterior). Também observaremos quais dentre os problemas apresentados foram mais efetivos para o dito salto. Além disso, após os cinco encontros, o professor organizará um momento para entrevista semi-estruturada com os grupos focais, para discutir suas estratégias, insights e aprendizagens.

Em suma, as observações serão feitas em três momentos (o momento da resolução do problema, o momento da explicação para os colegas e o momento da reflexão posterior, durante a entrevista) e a atenção estará voltada para o momento do salto do do pensamento aritmético para o pensamento algébrico e qual foi o estopim para este salto.

PRESSUPOSTOS/PRÉ-REQUISITOS

Domínio das quatro operações básicas

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

A turma contou com 28 alunos, dos quais 24 alunos que concordaram em participar da pesquisa. Na metodologia de resolução de problemas utilizaremos quatro grupos de alunos, com até 6 integrantes por grupo, caso todos concordem em participar da pesquisa.

DETALHAMENTO DAS AULAS

Apresentadas essas ideias iniciais, detalharemos agora as 4 aulas de 110 minutos cada (dois períodos de 55 minutos) que compõem essa proposta.

AULA 1: Explorando relações e propriedades de números inteiros

Objetivos específicos

1. aprender a representar situações do quotidiano em linguagem algébrica
   a lidar com os símbolos algébricos no contexto de incógnitas.
2. Desenvolver nos alunos a consciência de relações e propriedades dos números inteiros;

0 - 10 min: Organização da turma em grupos e chamada.

10 - 20 min: Distribuição dos problemas, explicação da tarefa e leitura do seguinte texto: **“Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder**

ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento".

20 - 00 min: resolução dos problemas.

90 - 110 min: apresentação das soluções, discussão, perguntas e encerramento.

Problemas

1. Resolva os seguintes problemas de criptaritmética:
    a. (OBMEP 2015 - ADAPTADA) ABA - CA = AB
    b. ABC x 3 = CCC

(Criptaritmética é um tipo de problema matemático que consiste em esconder parcial ou totalmente os algarismos de um conta, substituindo-os por símbolos - geralmente letras. Em geral, cada letra representa um, e apenas um, algarismo. Ou seja, letras iguais representam números iguais, e letras diferentes representam números diferentes. O objetivo é descobrir o valor de cada letra ou de alguma letra específica.)

Soluções:

a. 101-91=10
b. 185x3=555

Este problema foi escolhido para possibilitar ao aluno perceber e descobrir relações entre números inteiros, a saber A-A=0, então B=0. Além disso, fazer perceber que 3x5=15, ou seja, preserva-se o dígito das unidades.

2. Encontre três números consecutivos cuja soma seja igual a 123.

a. Explique como seu grupo resolveu esse problema.
b. Como podemos representar a soma de quaisquer três números consecutivos em apenas uma frase matemática?

Solução: 40+41+42=123.

a. Resposta pessoal. Espera-se que a resposta seja por tentativa e erro, dado que há conhecimento algébrico prévio. Uma solução mais sofisticada seria 123/3=41 é o termo médio. Assim temos 41+41+41. Depois pensar em retirar uma unidade do primeiro 41 (para formar o primeiro número) e adicioná-lo ao terceiro 41 (para formar o último número) obtendo 40, 41 e 42.

b. n+(n+1)+(n+2). Com essa questão inicia-se o desenvolvimento do pensamento de modelação.

Se espera que, com essa questão, os alunos explorem relações de números e desenvolvam sua capacidade de generalização e de escrita algébrica.

3. Zé das Couves recebeu seu salário do mês. Seu patrão lhe deu 33 notas, algumas são de R$100,00 outras de R$10,00 totalizando o valor de seu salário que é de R$1320,00.

a. Quantas notas de R$100,00 e quantas notas de R$10,00 Zé das Couves recebeu de seu patrão?
b. Explique como seu grupo resolveu esse problema.
c. Como essa situação poderia ser representada usando até duas frases matemáticas?

Solução:

a. Foram entregues 11 notas de 100 reais e 22 notas de 10 reais.
b. Resposta pessoal. Possivelmente a solução será alcançada por tentativa e erro.
c. x+y=33, 10x+100y=1320, onde x representa o número de notas de 10 reais e y representa a quantidade de notas de 100 reais.

Nesta questão, espera-se o mesmo que na questão anterior.

4. (OBMEP 2019 - ADAPTADA) Qual é a diferença entre a soma dos números ímpares e dos números pares de 1 a 2019?

a. Como o grupo resolveu o problema?
b. Quais as propriedades dos números que mais foram utilizadas na resolução?

Solução: (1+3+5+7+...+2017+2019) - (2+4+6+...+2016+2018) = 1+(3-2)+(5-4)+...+(2019-2018) = 1+1+1+1+...+1 (2010 vezes) =2010.

Espera-se com esta questão, que os alunos usem as propriedades dos números inteiros e depois reflitam sobre essas propriedades. No item a, espera-se que consigam descrever o procedimento em palavras. No item b, espera-se que os alunos tomem consciência das propriedades de associatividade e comutatividade dos números inteiros.

AULA 2: Explorando relações de igualdade.

Objetivos específicos

1. Desenvolver nos alunos capacidade de escrita algébrica.
2. Desenvolver nos alunos a capacidade de atribuir sentido à escrita algébrica.
3. Desenvolver nos alunos a compreensão da igualdade como expressão de uma relação entre quantidades;
4. Desenvolver nos estudantes a capacidade de tratar o número algebricamente;
5. Desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver expressões numéricas com número desconhecido.

0 - 10 min: Organização da turma em grupos e chamada.
10 - 20 min: Distribuição dos problemas, explicação da tarefa e leitura do seguinte texto: **“Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento”**.
20 - 90 min: resolução dos problemas.
90 - 110 min: apresentação das soluções, discussão, perguntas e encerramento. (Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento)

Lista de problemas da aula 2

1. (OBMEP 2019) Qual é o número que está escondido pelo borrão?

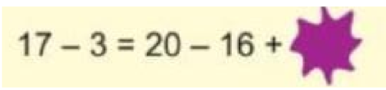


Figura 1. Extraída da prova da obmep disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm

a. Como essa situação pode ser representada sem usar o borrão?

Soluções:

O número escondido atrás do borrão é o 10, pois 17-3=14 e 20-16+10=14.

a. 17-3=20-16+B onde B indica o número escondido pelo borrão.

Este problema foi escolhido para despertar nos alunos a noção de igualdade como relação entre números e assim, perceber que a igualdade representa mais do que um sinal de indicação de resultado, bem como desenvolver a capacidade de modelação.

2. (OBMEP 2015) Nas balanças há sacos de areia de mesmo peso e tijolos idênticos. Quanto deve marcar a última balança?

Figura 2. Extraída da prova da obmep disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm

a. Como o seu grupo resolveu o problema? Existe um modo de resolver o problema sem calcular o peso individual dos tijolos e dos sacos de areia?
b. Seja T o peso dos tijolos e A o peso dos sacos de areia. Como podemos representar cada balança?

Soluções:

A última balança marca 23kg.

a. É possível resolver este problema por tentativa e erro, tentando descobrir o peso de cada objeto, mas espera-se que o aluno perceba que basta remover dois sacos de areia e um tijolo (41kg) da primeira balança para obter o peso da última balança. Portanto, temos 64-42=23 kg.
b. Balança 1: T+T+A+A+A=64 ou 2T+3A=64. Balança 2: T+A+A=41 ou T+2A=41. Balança 3: T+A=23

Este problema foi escolhido para desenvolver a capacidade de resolver expressões com números desconhecidos e a capacidade de modelação.

3. Encontre, se possível, 3 números ímpares cuja soma seja 100.

a. Como podemos representar um número par qualquer?
b. Como podemos representar um número ímpar qualquer?
c. Como podemos representar a situação descrita acima?

Soluções:

Não é possível encontrar 3 números ímpares cuja soma seja 100. De fato, sejam 2a-1, 2b-1 e 2c-1 três primos quaisquer com a,b e c números inteiros. Assim temos

(2a-1)+(2b-1)+(2c-1)=100. Logo temos 2(a+b+c)=97. Portanto a+b+c=97/2, o que é absurdo, pois a soma de números inteiros é um número inteiro.

a. Podemos representar um número par qualquer como 2n, com n inteiro.
b. Podemos representar um número ímpar qualquer como 2n-1, com n inteiro.
c. Podemos representar a soma de três números ímpares quaisquer como (2a-1)+(2b-1)+(2c-1) com a,b e c números inteiros.

Este problema foi escolhido para desenvolver as relações entre números inteiros, especialmente as relações associadas à paridade dos números bem como desenvolver a capacidade de modelação.

4. Nos quatro problemas abaixo, cada símbolo representa um número e símbolos iguais representam números iguais.

A) 📎+📎+📎=36 📎+❤+📎=30 ❤+❤+❤+📎=?	B)🔔+🔔=32 🌰+🌰=🔔+🔔+🔔 🌰+🌰+🌰+🔔=?
C) ♦+📐=14 📐+♦+♦+♦=32 ♦+♦+📐+📐+📐=?	D) A+A+B=11 A+B+B=13 A+A+A+B+B+B=? A+B=? A=? B=?

a. Encontre o valor de cada símbolo.
b. Como seu grupo resolveu cada problema?
c. Como podemos representar cada linha de cada problema com uma expressão matemática diferente e mais simples do que a expressão utilizada?

Soluções:

A) 📎=12 ❤=6 ❤+❤+❤+📎= 30 x+x+x=36 ou 3x=36 x+y+x=30 ou 2x+y=20 y+y+y+x=30 ou 3y+x=30	B)🔔=16 🌰=24 🌰+🌰+🌰+🔔=88 s+s=32 ou 2s=32 c+c=s+s+s ou 2c=3s c+c+c+s=88 ou 3c+s=88

C) ♦=9 📐=5 ♦+♦+📐+📐+📐=33 C) l+r=14 r+l+l+l=32 ou r+3l=32 l+l+r+r+r=33 ou 2l+3r=33	D) A+A+A+B+B+B=24 A+B=8 A=3 B=5 2A+B=11 A+2B=13 3A+3B=24 A+B=8 A=3 B=5

Este conjunto de problemas foi escolhido para desenvolver a capacidade de modelação. Além disso, cada problema tem uma particularidade. O primeiro é útil para introduzir o conjunto, sendo um problema fácil. O segundo problema explora a igualdade como relação. O terceiro e o quarto problema desenvolvem a capacidade de resolver expressões com números desconhecidos. Pois, se ♦+📐=14 e (📐+♦)+♦+♦=32, então 14+♦+♦=32 e o problema se resolve facilmente. Da mesma maneira, se A+A+B=11 A+B+B=13, podemos somar as duas equações e obter (A+A+B)+(A+B+B)=A+A+A+B+B+B=11+13=24. Além disso, (A+B)+(A+B)+(A+B)=24, logo A+B=8 e o problema se resolve facilmente a partir disso.

AULA 3: Explorando a generalização a partir de sequências

Objetivos específicos

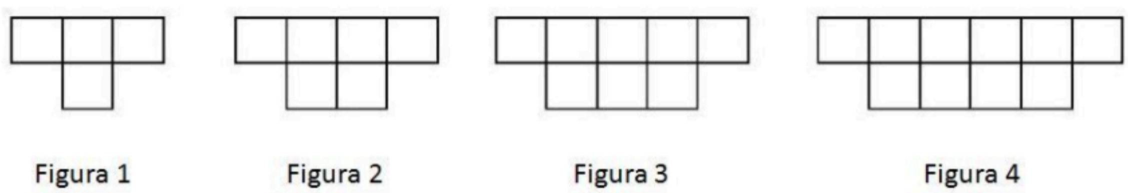
1) desenvolver diferentes estratégias e raciocínios para a resolução dos problemas propostos;
2) trabalhar em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com o objetivo de solucionar as tarefas propostas;
3) desenvolver a capacidade de escrever os procedimentos utilizados na solução das situações propostas;
4) aprender a lidar com os símbolos algébricos, tanto no contexto de incógnitas, quanto de variáveis, dando sentido a cada um deles.
5) aprender a representar uma situação com fórmulas algébricas

Como os problemas são semelhantes, e servem para desenvolver principalmente a capacidade de generalização e de escrita algébrica, escreveremos apenas as soluções dos problemas após cada um deles, sem maiores observações. Os itens a e b destinam-se a saber se o aluno entendeu como a sequência cresce. Os itens c e d destinam-se a fazer o estudante encontrar uma solução que não necessite de contar todos os termos para chegar no centésimo termo, ou seja, destina-se a desenvolver o salto da generalização. Os itens e e f destinam-se a desenvolver a capacidade de escrita algébrica. Segundo a classificação de Radford, o item e desenvolve o pensamento contextual e o item f desenvolve o pensamento algébrico padrão.

0 - 10 min: Organização da turma em grupos e chamada.
10 - 20 min: Distribuição dos problemas, explicação da tarefa e leitura do seguinte texto: **"Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento".**
20 - 90 min: resolução dos problemas.
90 - 110 min: apresentação das soluções, discussão, perguntas e encerramento. (Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento)

Problema 1 - Extraído e adaptado de
https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando um quadrado novo na fileira de cima e um quadrado na fileira de baixo.

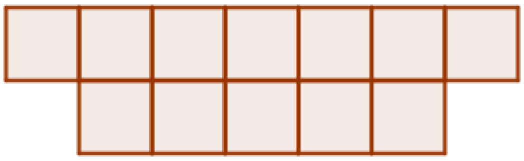


1. Desenhe a figura 5
2. Complete a tabela a seguir:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados						

3. Quantos quadrados haverá na figura 10?
4. Quantos quadrados haverá na figura 100?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.
7. Qual figura terá 84 quadrados?
8. Alguma figura terá 65 quadrados? Se sim, qual? Se não, justifique.

Soluções:

1. 
2.

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados	4	6	8	10	12	14

3. Na 10ª figura há 22 quadrados.
4. Na 100ª figura há 202 quadrados. Espera-se que o estudante perceba que o npúmero de quadrados na parte de baixo da figura é o mesmo número da figura, e na parte de cima há dois quadrados a mais do que na parte de baixo. Assim o centésimo figura terá 100+100+2=202 quadrados.
5. Para calcular o número de quadrados em qualquer figura, tome o número da figura, multiplique por dois e depois adicione dois quadrados.
6. Q=2n+2, onde Q é o número de quadrados e n é o número da figura.

Problema 2 - Extraído e adaptado de
https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando dois quadrados novos na fileira de cima e dois quadrados novos na fileira de baixo, mantendo um quadrado centralizado entre as duas fileiras.

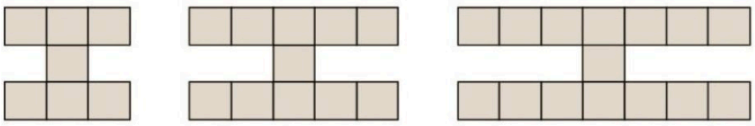


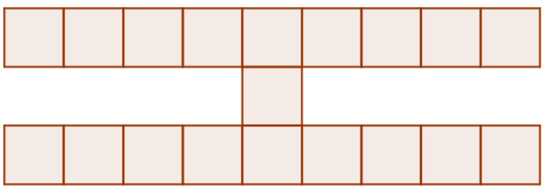
Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Desenhe a figura 4
2. Complete a tabela a seguir:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados						

3. Quantos quadrados haverá na figura 10?
4. Quantos quadrados haverá na figura 100?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.

Soluções:

1. 
2.

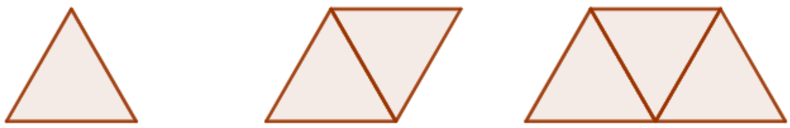
Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados	7	11	15	19	23	27

3. Na 10ª figura há 43 quadrados.

4. Na 100ª figura há 403 quadrados. Espera-se que o aluno perceba que a figura tem um “núcleo” de três quadrados e ela possui quatro braços e o número de quadrados em cada braço é o número da figura.
5. Para calcular o número de quadrados em qualquer figura, multiplique o número da figura por 4 e depois some 3.
6. $Q=4n+3$, onde Q representa o número de quadrados e n representa o número da figura.

Problema 3: Extraído e adaptado de Cessa (2009)

A sequência a seguir é formada por triângulos feitos de fósforos. O primeiro termo é feito de um triângulo, o segundo termo é feito de dois triângulos adjacentes, o terceiro é feito de três triângulos adjacentes e assim por diante. Cada lado que pertence a dois triângulos é feito de apenas um fósforo.



1º termo 2º termo 3º termo

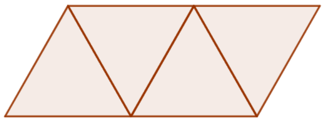
Responda:

1. Desenhe o 4º termo dessa sequência.
2. Complete a tabela a seguir:

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Número de palitos						

3. Quantos palitos são usados para compor o 10º termo?
4. Quantos palitos são usados para compor o 100º termo?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de palitos de fósforos sabendo o número do termo da sequência.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de palitos de fósforos, sabendo o número do termo da sequência.

Soluções.

1. 
2.

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Número de palitos	3	5	7	9	11	13

3. O décimo termo é composto por 21 palitos.
4. O décimo termo é composto por 201 palitos.
5. Para encontrar o número de palitos de um termo qualquer multiplique o número da figura por dois, depois adicione um palito.
6. P=2n+1, onde P é o número de palitos e n é o número do termo da figura.

Problema 4. Extraído e adaptado de Cessa (2009)

Considere a sequência de quadrados brancos dividida em quadradinhos menores de tamanhos iguais. Ao redor os lados de cada quadrado da sequência, são desenhados novos quadrados coloridos, como na imagem abaixo

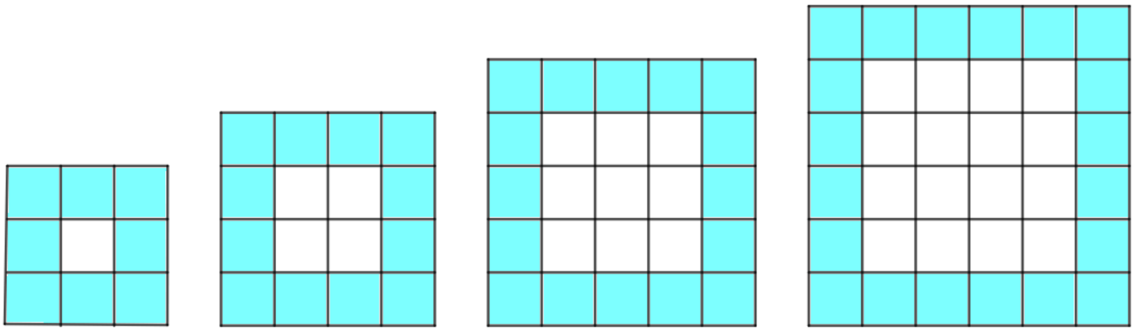


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. Descreva com palavras como a sequência cresce num?
2. Quantos quadradinhos coloridos temos no 5º, 6º e 7º termo da sequência?
3. Complete a tabela a seguir.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	7
Número de quadrados pintados							

4. Quantos quadradinhos coloridos temos no 10º termo da sequência?
5. Quantos quadradinhos azuis temos no 100º termo da sequência?
6. Descreva em palavras como você resolveu a questão anterior.
7. Faça um desenho que represente o modo que você resolveu a questão.
8. Escreva um passo a passo para calcular o número de quadrados azuis, se conhecermos o número da figura.

a. Escreva uma expressão algébrica que permita calcular o número de quadrados coloridos, se conhecermos o número da figura.

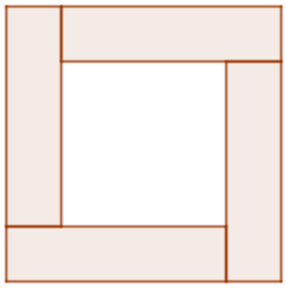
Soluções:

1. A sequência cresce como descrito no enunciado. Numericamente, cada termo tem quatro quadrados coloridos a mais do que a figura anterior.
2. O quinto termo tem 24 quadrados coloridos, o sexto termo tem 28 e o sétimo termo tem 32 quadrados coloridos.
3.

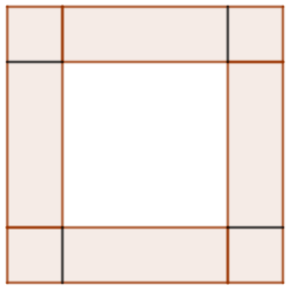
Número da figura	1	2	3	4	5	6	7
Número de quadrados pintados	8	12	16	20	24	28	32

4. O décimo termo tem 44 quadrados coloridos.
5. O centésimo termo tem 404 quadrados coloridos.
6. Há diversas maneiras de contar os quadrados coloridos e resolver o problema anterior. Espera-se que os alunos apresentem modos diferentes de alcançar o mesmo resultado. A seguir temos algumas possibilidades:
   i. É possível dividir a parte pintada em quatro blocos de 101 quadrados.
   ii. Também é possível encontrar a quantidade de quadrados coloridos pela diferença entre a quantidade de quadrados totais e a quantidade de quadrados brancos.
   iii. Outra possibilidade é dividir a parte pintada em quatro blocos de 100 quadrados e adicionar os quadrados dos cantos.
   iv. Por fim, é possível dividir a parte pintada em quatro blocos de 102 quadrados (incluindo os cantos) e remover os quatro quadrados repetidos.

7. Alguns desenhos que representam a forma de contar o número de quadrados coloridos são



ou



8. Assim como no item 6, há muitos modos de resolver essa questão. A seguir, temos algumas possibilidades.

v. Tome o número da figura, adicione 1 unidade e depois multiplique por 4.

vi. Tome o número da figura adicionado de duas unidades, eleve ao quadrado e depois subtraia o quadrado do número da figura.

vii. Tome o número da figura, multiplique por 4 e depois adicione 4 quadrados, representando os quatro cantos do quadrado.

viii. Tome o número da figura adicionado de 2 unidades, multiplique por quatro e depois subtraia 4 unidades.

b. Seja Q o número de quadrados coloridos e n o número da figura. As seguintes fórmulas representam modos de calcular Q em função de n. $Q=4(n+1)$, $Q=(n+2)^2-n^2$, $Q=4n+4$ e $Q=4(n+2)-4$.

AULA 4: A descoberta de Gauss

Objetivos específicos

1) desenvolver diferentes estratégias e raciocínios para a resolução dos problemas propostos;

2) desenvolver a capacidade de escrever os procedimentos utilizados na solução das situações propostas;

3) aprender a lidar com os símbolos algébricos, tanto no contexto de incógnitas, quanto de variáveis, dando sentido a cada um deles.

4) aprender a representar uma situação com fórmulas algébricas

0 - 10 min: Organização da turma em grupos, chamada e leitura do seguinte texto:**“Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder**

ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento”.

10 - 20 min: Apresentação do texto “A descoberta de Gauss”

20 - 70 min: resolução dos problemas de forma individual.

70 - 110 min: apresentação das soluções, discussão, perguntas e encerramento. (Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento)

A Descoberta de Gauss

Conta-se que Carl Friedrich Gauss, ainda criança com cerca de 10 anos de idade, surpreendeu seu professor ao resolver rapidamente um problema que deveria ocupar a turma por muito tempo: calcular a soma de todos os números de 1 a 100. Enquanto seus colegas começaram a somar laboriosamente 1 + 2 + 3 + 4 + ..., o jovem Gauss percebeu um padrão engenhoso. Ele observou que poderia agrupar os números em pares: o primeiro com o último (1 + 100 = 101), o segundo com o penúltimo (2 + 99 = 101), o terceiro com o antepenúltimo (3 + 98 = 101), e assim sucessivamente. Como existem 50 pares, cada um somando 101, a resposta seria simplesmente 50 × 101 = 5.050. Esta descoberta não apenas demonstrou o talento precoce de Gauss, mas também ilustrou a beleza do pensamento matemático, mostrando como a observação de padrões pode transformar um cálculo tedioso em uma solução simples e elegante. O método de Gauss revela a essência do pensamento algébrico: a capacidade de generalizar e encontrar fórmulas que funcionem para qualquer situação similar.

Agora resolva os seguintes problemas.

a. Use a mesma ideia para calcular a soma dos números de 1 a 1000.
b. Tente escrever uma expressão que calcula a soma dos números de 1 a n, onde n é um número natural qualquer.
c. Tente escrever uma expressão que calcule a soma dos pares de 2 a 2n, onde n é um número natural qualquer.
d. Imagine uma sequência de número onde p é o primeiro número, u é o último número, n é a quantidade de números e cada número dessa sequência, com exceção do primeiro número é o anterior somado com r. Por exemplo, os números 3, 10, 17, 24, 31, 38 é uma sequência desse tipo, onde p=3, u=38,

r=7 e n=6. Escreva em função de p,u,n e r uma fórmula para calcular a soma dos termos dessa sequência.

Espera-se com este exercício que os alunos desenvolvam a capacidade de modelação. O item a testa se o aluno entendeu a ideia de Gauss. O item b pede que o aluno escreva uma fórmula, como foi feito na aula anterior. O item c e d se propõe a desenvolver a capacidade de generalizar a fórmula do item b. A seguir, apresentamos as respectivas soluções.

a. (1+1000).500=500500
b. (1+n).n/2
c. (2+2n).n/2 ou (1+n).n. A primeira versão apenas aplica 2 e 2n na fórmula anterior. A segunda versão pode surgir se o aluno olhar o problema como uma duplicação do item a, pois todo número par é a soma de um número consigo mesmo.
d. (p+u).n/2

AULA 5: Avaliação

Prof. Cássio Volpato Selbach

INSTRUÇÕES:

1. **O objetivo desta avaliação é determinar quais conceitos algébricos foram desenvolvidos nas últimas aulas, por isso ela é anônima. Dessa forma, ela não vale nota para a disciplina de matemática.**
2. **Caso alguma questão te deixe desconfortável, você pode pular a questão ou encerrar a avaliação, se preferir.**
3. Responda essa avaliação com caneta azul ou preta.
4. Esta avaliação é individual e sem consulta.

QUESTÕES

1. Qual número devemos colocar no lugar do X a fim de que a afirmação $36 \div 3 = 10 - 2 + X$ se torne uma afirmação verdadeira?

Solução: X=4, pois $36 \div 3 = 12$ e $10 - 2 + 4 = 12$.
Este problema avalia se o aluno desenvolveu a compreensão do sinal de igualdade como um sinal de relação entre dois números.

2. (PORTAL OBMEP) Resolva o seguinte problema de criptaritmética:

X + X + YY = ZZZ

Explique como você resolveu esse problema.

Solução: 6+6+99=111. Este problema avalia se o aluno compreende as relações entre números inteiros. O aluno deve perceber que Z=1, pois a soma de dois números de um algarismo com um número de dois algarismos não pode ser igual a ou maior do que 222, que é um número de três algarismos.

3. No problema a seguir, cada letra representa um número de tal forma que letras iguais representam números iguais.

$$A+B=70$$

$$B+A+B=100$$

a. Encontre o valor de cada letra (A e B).

b. Como você resolveu o item anterior?

Solução: A=40 e B=30. Este problema avalia se o aluno desenvolveu a capacidade de resolver expressões com números desconhecidos. O aluno deve pensar que se A+B=70 e B+A+B=100, então B+70=100. Logo B=30. Portanto A=40.

4. A sequência a seguir é formada por quadrados feitos de fósforos. O primeiro termo é feito de um quadrado, o segundo termo é feito de dois quadrados, o terceiro é feito de três quadrados e assim por diante. Cada lado que pertence a dois quadrados é feito de apenas um fósforo.

1º termo 2º termo 3º termo

Responda:

a. Desenhe o 4º termo.

b. Preencha a tabela a seguir.

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Número de palitos								

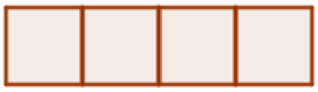
c. Descreva com palavras como o número de palitos aumenta em cada termo da sequência.

d. Quantos palitos são usados para compor o 26º termo?

e. Escreva um passo a passo que permita calcular o número de palitos de fósforos sabendo o número do termo da sequência.

f. Escreva uma expressão algébrica que permita calcular o número de palitos de fósforos, sabendo o número do termo da sequência.

Solução:

a. 

b.

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Número de palitos	4	7	10	13	16	19	22	25

c. Cada termo tem três palitos a mais do que o termo anterior.

d. O 26º termo tem 79 palitos.

e. Para calcular o número de palitos de qualquer termo da sequência, tome o número do termo, multiplique por três e depois some uma unidade.

f. $P=3n+1$, onde P é o número de palitos e n é o número do termo da sequência.

FORMULÁRIO DE ENTREVISTA

Durante as últimas aulas, vocês formaram grupos para resolver uma série de problemas. Nesta entrevista queremos conversar com vocês sobre alguns desses problemas. Por isso, farei perguntas sobre alguns problemas específicos de cada aula.

Caso você se sinta desconfortável, basta dizer que não quer responder e, imediatamente, passaremos à próxima pergunta ou encerraremos a entrevista, conforme a sua vontade. Esta entrevista visa apenas ajudar a pesquisa do professor, por isso não vale nota, nem vai influenciar as aulas de matemática.

Vamos voltar à questão 2 da aula 1 que diz o seguinte:

"Encontre três números consecutivos cuja soma seja igual a 123.

a. Explique como seu grupo resolveu esse problema.
b. Como podemos representar a soma de quaisquer três números consecutivos em apenas uma frase matemática?"

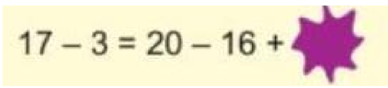
Pergunta-se:

A. Você quer continuar a entrevista?
B. De que outras formas podemos resolver o item b?
C. Como ficaria a expressão, se fossem 4 números consecutivos?

Lembre-se que você pode optar por não responder qualquer pergunta.

Na aula 2, a primeira pergunta diz:

"Qual é o número que está escondido pelo borrão?



a. Como essa situação pode ser representada sem usar o borrão?"

Pergunta-se:

A. Você quer continuar a entrevista?
B. Vocês resolveram essa questão em quanto tempo, aproximadamente?
C. Explique com suas palavras qual é(são) a(s) funções do sinal de igualdade.

Na aula 2, a quarta pergunta traz 4 enigmas com símbolos. Os dois últimos dizer o seguinte:

♦+📐=14	A+A+B=11
📐+♦+♦+♦=32	A+B+B=13
♦+♦+📐+📐+📐=?	A+A+A+B+B+B=?
	A+B=? A=? B=?

Pergunta-se:

A. Você quer continuar a entrevista?
B. Como vocês resolveram esses problemas: testando diversos números até o cálculo estar correto ou vocês usaram outra estratégia?
C. Se você tivesse que resolver essas questões hoje, você resolveria da mesma forma ou de forma diferente.

Na aula 3 foram apresentados 4 problemas com sequências de figuras geométricas. Essas sequências foram:

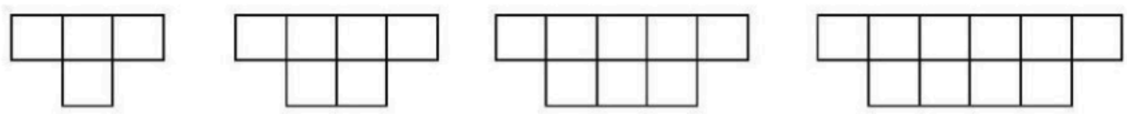


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

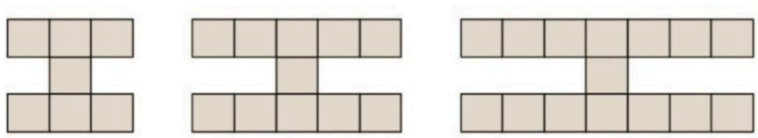
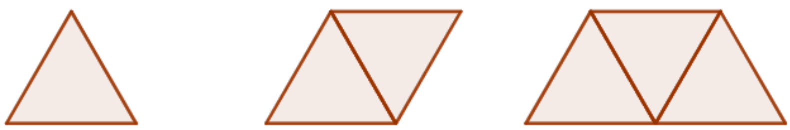


Figura 1 Figura 2 Figura 3



1º termo 2º termo 3º termo

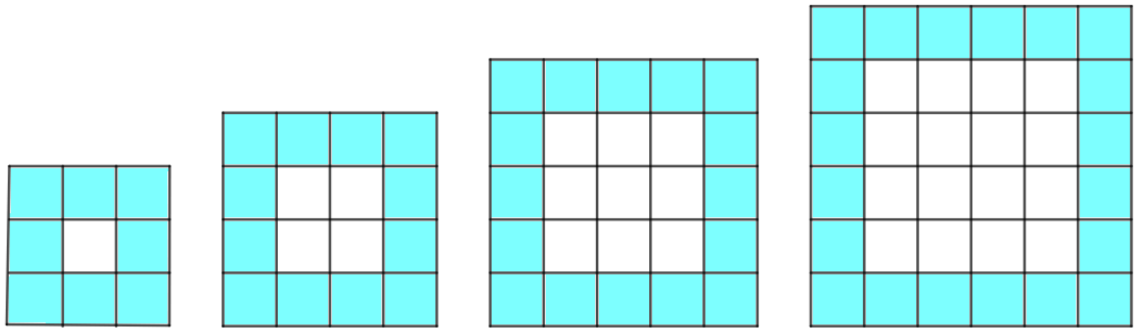


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Em todas as quatro sequências, foram apresentadas perguntas semelhantes.

Pergunta-se:

A. Você quer continuar a entrevista?
B. Desejava-se calcular o 100º termo de cada sequência. Em qual sequência foi mais fácil e a mais difícil de calcular o 100º termo? Por quê?
C. Depois, desejava-se encontrar uma fórmula geral para calcular os termos de cada sequência. Em qual sequência foi mais fácil e a mais difícil de encontrar essa fórmula? Por quê?
D. A fórmula para calcular o número de palitos para produzir algum termo da terceira sequência é P=2n+1 ou P=2(n-1)+3, (onde n é número da figura e P é o número de palitos). Como seria a fórmula, se a sequência inicia-se com dois triângulos adjacentes ao invés de apenas um?
E. Ainda na terceira sequência: suponha que ela inicie com um triângulo, mas cada nova figura acrescenta dois novos triângulos à figura anterior. Como ficaria a nova fórmula para contar o número de palitos.

8: RELATÓRIO DAS AULAS, DA AVALIAÇÃO ESCRITA E DAS ENTREVISTAS

Na primeira quinzena de agosto aplicamos a proposta pedagógica, a avaliação e as entrevistas com os grupos focais. Neste capítulo apresentaremos o relatório das aulas e em seguida a análise dos resultados obtidos. Os relatórios destacam as falas e ideias que os alunos tiveram para resolver os problemas propostos, excluindo aquilo que não possui valor para o ensino de matemática diretamente.

Depois dos relatos, passamos à análise dos dados coletados pela avaliação e pela entrevista. Os dados da avaliação estão organizados em uma tabela, onde é possível ver quais questões tiveram maior número de acertos e, portanto, quais habilidades foram melhor desenvolvidas, sobretudo, porque as questões são discursivas e demandam explicitamente por justificativa. As entrevistas feitas com os grupos focais, também tem perguntas discursivas, mas os alunos responderam as perguntas de modo breve, por isso escrevemos todas as respostas dos alunos, mas sem transcrever gírias, maneirismos ou vícios de linguagem.

8.1 Aula 1 – relato e discussão

A aula iniciou-se às 13h00 e encerrou-se às 14h50. Nos primeiros minutos foram apresentadas as instruções para a pesquisa e então os grupos se reuniram por afinidade de modo que o grupo A ficou com seis alunos, o grupo B com quatro alunos, o grupo C com seis alunos e o grupo D com oito alunos, totalizando 24 alunos. Além destes havia mais cinco alunos matriculados na turma e que não participaram da pesquisa. Dentre esses alunos, 3 são atendidos pelo Atendimento Educacional Especializado (AEE), uma aluna que não comparece às aulas e recebe atividades domiciliares e uma escolheu não participar da pesquisa.

Conforme foi dito, os primeiros minutos desta aula foram utilizados para a organização da turma, realização da chamada e para passar instruções. Devido à agitação natural dos adolescentes, o primeiro problema foi iniciado somente às 13h29. Isso causou um atraso no cronograma da aula. Era esperado que os quatro problemas fossem resolvidos na aula por todos os grupos a fim de que todos os alunos tivessem a oportunidade de desenvolver todas as habilidades propostas e construir os conhecimentos esperados. Entretanto, isso não ocorreu. Os problemas

1 e 2 foram resolvidos (pelos grupos A e B, respectivamente), o problema 3 foi iniciado, mas não foi concluído e o problema 4 não foi abordado por falta de tempo.

Nas demais aulas, não houve grande perda de tempo no início, mas em nenhuma aula foi possível abordar todos os problemas, pois havia uma certa expectativa de que os alunos conseguissem resolver os problemas mais fáceis em 10 ou 15 minutos, e os mais difíceis em até 30 minutos, se eles pensassem juntos. Porém, essa expectativa se mostrou irreal.

A seguir, apresentaremos as formas de resolução dos alunos dos grupos A e B sobre os problemas 1 e 2, respectivamente.

O enunciado do problema 1 dizia:

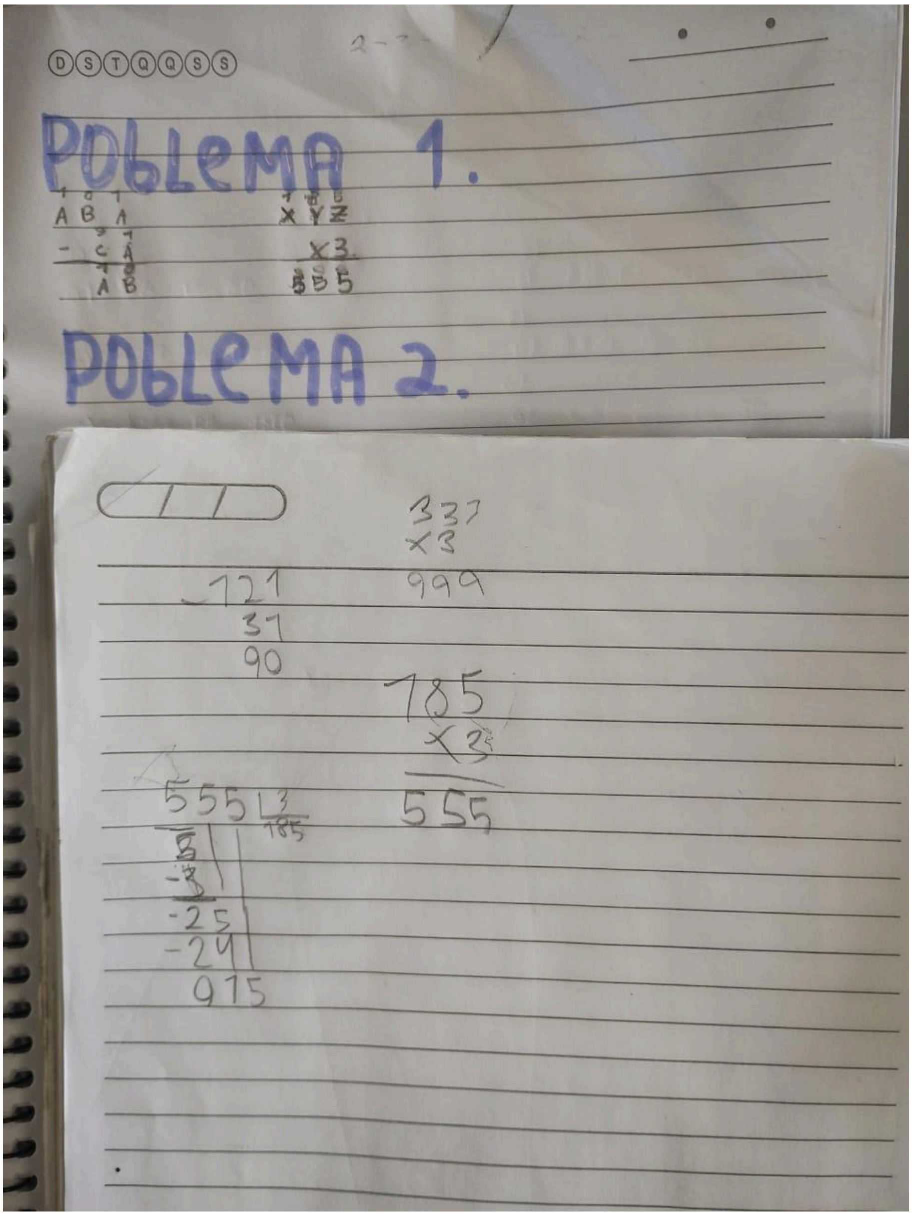
Resolva os seguintes problemas de criptaritmética:

a. **(OBMEP 2015 - ADAPTADA) ABA - CA = AB**
b. **ABC x 3 = CCC**

(OBS: Criptaritmética é um tipo de problema matemático que consiste em esconder parcial ou totalmente os algarismos de um conta, substituindo-os por símbolos - geralmente letras. Em geral, cada letra representa um, e apenas um, algarismo. Ou seja, letras iguais representam números iguais, e letras diferentes representam números diferentes. O objetivo é descobrir o valor de cada letra ou de alguma letra específica.)

O grupo A fez poucas anotações para análise, como mostra a imagem da figura 1.

Figura 1



O mais interessante foi a discussão entre os alunos, como se verá a seguir. Neste primeiro momento, os alunos estavam interessados em resolver o primeiro cripto (ABA-CA=AB)

- PE: A é 5
- G: Como você sabe?
- PE: A é 1, B é 2, C é 3.
- G: Como você sabe?
- PC: Com base em quê? Não pode ser, porque A-A=0, então B é 0.
- B: Os números são 0 e 9.
- PC: Não, os números vão de 0 a 9: 0, 1,2,3,4,...,9.

- PE: Já disse que C é 3.
- PC: Não pode porque as contas não fecham.
- N: ABA é 101 e AB é 10, então CA é 101-10=91 e C é 9.

Este diálogo foi entrecortado por diversos comentários paralelos sem importância para a pesquisa. Note-se que o valor de A (A=1) não foi deduzido por algum argumento matemático, mas pela coincidência de A ser a primeira letra do alfabeto. Isso ficou implícito na fala do aluno PE quando ele disse que “A é 1, B é 2, C é 3”. Dos 6 alunos no grupo, apenas um deles se manteve à margem da discussão o tempo todo.

Depois os alunos passam ao segundo cripto (ABC x 3 = CCC). Uma grande confusão surgiu por se acreditar que A, B e C têm os mesmos valores do primeiro cripto de forma que CCC é 999. Então o professor escreveu no quadro XYZ x 3 = ZZZ a fim de evitar essa confusão. Os alunos não sabiam por onde abordar esse problema. Visando a economia do tempo, o professor interveio e perguntou qual a letra que foi descoberta primeiro e possibilitou resolver o primeiro problema? Eles responderam: a letra A. O professor perguntou “por quê?”. Os alunos ficaram em dúvida e em silêncio. O professor completou: porque é a letra que mais aparece.

Os alunos passaram a discutir o valor da letra C. Em dado momento, um aluno falou:

- G: 3 vezes 5 é 15.
- N: Então C é 5.
- PC: Então CCC é 555 e só precisamos dividir 555 por 3 que é… 185.

Depois os alunos deveriam apresentar seus resultados para a turma. O aluno PC, que foi o mais ativo, não estava interessado em apresentar. Outros dois colegas, N e G estavam interessados, mas não conseguiam articular exatamente o que dizer. Notamos que o processo de descoberta é diferente do processo de elaboração para a apresentação. Eles basicamente esqueceram o que eles mesmos realizaram por conta do nervosismo. Em suma, quando foram apresentar só conseguiam dizer que resolveram no chute, o que não é verdade, pois houve um bom processo de pensamento matemático, inclusive de alunos que normalmente não participam das aulas de matemática.

Ao final da apresentação, o professor (eu) observou a produção dos outros grupos. Os grupos B e C resolveram o primeiro cripto, mas não o segundo e o grupo D não resolveu nenhum.

Agora reflitamos sobre o problema 2 cujo enunciado diz:

2. Encontre três números consecutivos cuja soma seja igual a 123.

a) Explique como seu grupo resolveu esse problema.

b) Como podemos representar a soma de quaisquer três números consecutivos em apenas uma frase matemática?

Os alunos deste grupo tiveram uma pequena dificuldade com a palavra "consecutivos" que o professor explicou o sentido.

- D. Vamos ver… tem que ser de 0 a 8?
- Prof. Não, pode ser qualquer número.
- Am. 1+2+3=6, 6+7=13

Note-se que os alunos estão usando método da inspeção e ainda estão pensando nos termos da criptaritmética, acreditando que a resposta está entre 0 e 9. Em dado momento, os alunos começam a tentar números maiores.

- D. Vamos ver a casa dos 30… 34+35+36=105
- Am. Então tenta a casa do 70. 77+78+79=231. Olha professor a resposta de 123 em ordem trocada.
- D. Muito alto…
- Al. Tenta a casa dos 40… 41+42+43=126. Quase, muito perto. 39+40+41=120. É menor. Então 40+41+42=123.
- Prof. Muito bem. Agora responda o item a). Como vocês responderam a questão?
- D. Foi no chute.
- Prof. Sim, isso se chama método da inspeção. Agora tentem resolver o item b) **Como podemos representar a soma de quaisquer três números consecutivos em apenas uma frase matemática?**

Neste momento os alunos não conseguiram responder a pergunta. Eles ainda não tiveram nenhum contato com conteúdos algébricos neste ano letivo. Então o professor teve de orientar:

- Prof. Como podemos representar um número qualquer?

Mesmo nesse momento eles não tinham ideia do que usar. Então professor continua:

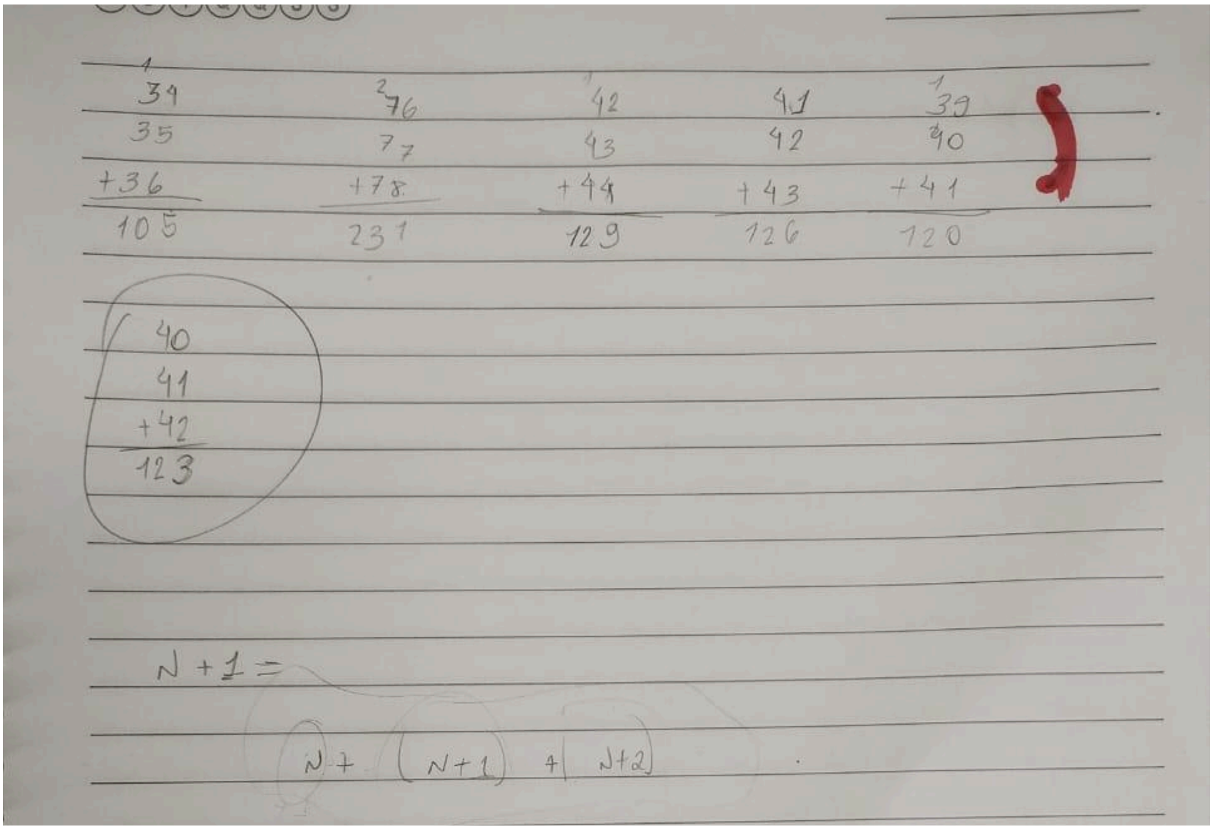
- Prof. Podemos usar a letra N de número. Se N representa um número, o que representa o sucessor?
- D. Não sei…
- Prof. Qual é o sucessor de 17?
- D. 18
- Prof. Como a gente calcula para encontrar o número sucessor?
- D. Somando mais 1.
- Prof. Isso. Então, o sucessor de N é… N+1.
- D. Faz sentido.
- Prof. Então qual é o sucessor do sucessor de N?
- D. N+2?
- Prof. Isso mesmo. E como podemos escrever a soma dos 3 números?

Neste momento, os alunos não sabiam mais o que responder e o professor precisou escrever para eles a expressão “N+(N+1)+(N+2)”. Como já foi comentado nas páginas anteriores, pela própria natureza dual da matemática (de possuir alguns aspectos inventados e outros aspectos descobertos), a metodologia de resolução de problemas permite que o aluno construa seu conhecimento nas partes que a matemática é descoberta - no caso, descobrir os números. Porém os aspectos inventados da matemática (como a linguagem algébrica) só podem ser apreendidos através de um ensino direcionado. Então, a intervenção maior por parte do professor na resolução do item b deste problema era esperada.

Após este momento, os alunos foram apresentar suas soluções. Eles escreveram no quadro o cálculo 40+41+42=123, disseram que resolveram no chute (item a) e não souberam explicar o item b, isto é, como se chega na expressão N+(N+1)+(N+2), pois não foi uma construção interinamente dos alunos. Notamos nos dois primeiros grupos uma forte presença de pensamento aritmético, o que já era esperado. Já, quanto ao pensamento algébrico, imaginamos que talvez ele se desenvolva nas próximas aulas, o que poderá ser observado usando os parâmetros do trabalho de Radford.

Em seguida, o professor passou para ver o que os outros grupos produziram neste problema. O grupo D apresentou o cálculo 61+62=123, ou seja eles não entenderam plenamente o enunciado da questão. A seguir estão os cálculos do grupo B.

Figura 2



O grupo C deveria resolver o problema 3 cujo enunciado é:

3. Zé das Couves recebeu seu salário do mês. Seu patrão lhe deu 33 notas, algumas são de R$100,00 outras de R$10,00 totalizando o valor de seu salário que é de R$1320,00.

a. **Quantas notas de R$100,00 e quantas notas de R$10,00 Zé das Couves recebeu de seu patrão?**
b. **Explique como seu grupo resolveu esse problema.**
c. **Como essa situação poderia ser representada usando até duas frases matemáticas?**

Eram 14h42, e faltavam 8 minutos para acabar a aula. Os estudantes desse grupo usaram o tempo restante para entender o enunciado.

- S. 100 notas de 10 dá quanto? 1000 reais, né?

Note que aqui o aluno S não estava atento ao enunciado que dizia explicitamente que existem apenas 33 notas ao todo. Após entender esse ponto, o aluno S iniciou alguns cálculos para resolver o problema através do pensamento aritmético, assim como fizeram seus colegas dos grupos A e B.

- S: 100x7=700, 33-7=26 notas de 10.

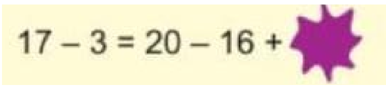
O aluno queria fazer o cálculo 26x10=260 e 260+700=960 que é diferente de 1320. Então precisaria testar outra quantidade de notas de 100 reais, mas acabou o tempo da aula. Os demais alunos não tentaram resolver este problema, já sabendo que restava pouco tempo de aula.

Um modo de trabalhar com resolução de problemas é distribuir os problemas de modo que cada grupo resolva um problema e socialize com os colegas antes do final da aula, evitando o risco de faltar o tempo para esse momento de socialização. Contudo, como a pesquisa está interessada, sobretudo, no processo de abstração, e não apenas em testar a proposta pedagógica, foi necessário observar todos os alunos resolvendo todos os problemas e isso implicou em atrasos e na perda de parte do momento de socialização.

8.2 Aula 2 – relato e discussão

A aula 2 iniciou-se às 13h00 e encerrou-se às 14h50. O primeiro problema foi distribuído às 13h10 e o professor acompanhou o grupo D, com oito alunos, pois este grupo não foi acompanhado no dia anterior. O problema que o grupo deveria resolver tem o seguinte enunciado:

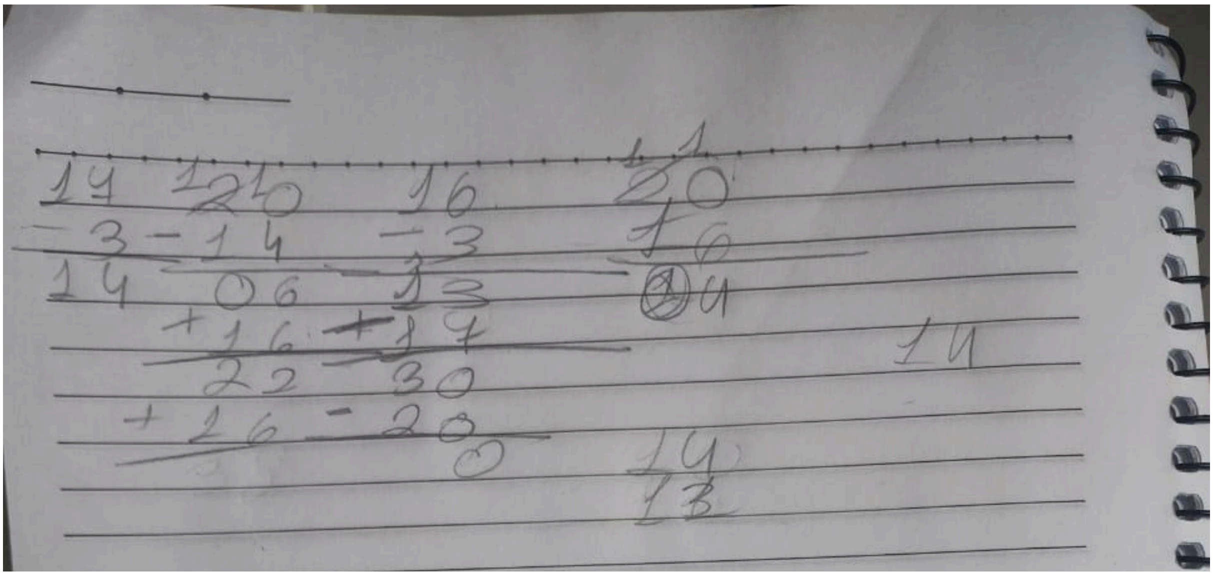
1. **(OBMEP 2019) Qual é o número que está escondido pelo borrão?**



a. **Como essa situação pode ser representada sem usar o borrão?**

Inicialmente, os alunos do grupo D não entenderam o que a questão exigia, pois começaram tentar adivinhar qual a conta que resolvia a questão, fazendo cálculos sem objetivo claramente definido, como mostra a figura 3.

Figura 3



Devido a essa circunstância, a qual os alunos se mostraram incapazes de resolver no curto período da aula, o professor precisou intervir.

- Prof. Pessoal, vocês entenderam a pergunta?
- LB. É para achar o número do borrão.
- Prof. Ok. Me explica o que isso significa.
- (Silêncio)
- Prof. Qual é a função do sinal de igualdade?
- G. [Indica o] resultado.
- Prof. O que mais?
- LB. Uma coincidência.

Depois desse diálogo, o professor indicou que o resultado do lado esquerdo deve coincidir com o resultado do lado direito e os alunos puderam resolver o problema. Isso não se deu de modo direto, mas foram feitas diversas tentativas até encontrar o valor correto. É interessante notar que o item a (Como essa situação pode ser representada sem usar o borrão?) foi resolvido imediatamente. Os alunos sugeriram as seguintes respostas: 17-3=20-16+?, 17-3=20-16+N e 17-3=20-16+X. No momento da exposição oral, eles escreveram as respostas no quadro, sem explicar para os colegas.

Esperava-se que os alunos resolvessem esse problema em até 10 minutos, mas eles encerraram às 13h42, isto é, em 30 min, o que atrasou a resolução dos demais problemas.

Passemos agora para o relato da resolução do problema 2 pelo grupo C

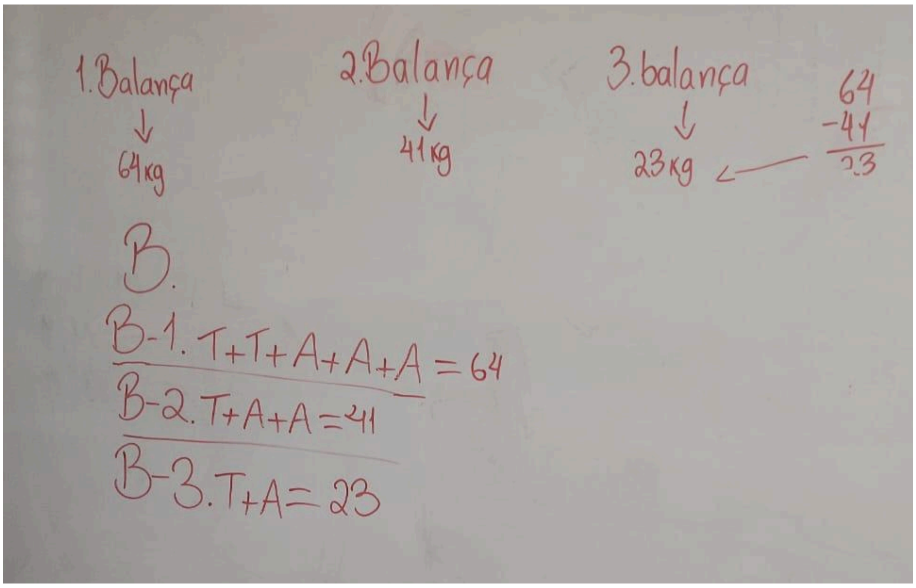
2. (OBMEP 2015) Nas balanças há sacos de areia de mesmo peso e tijolos idênticos. Quanto deve marcar a última balança?

a. **Como o seu grupo resolveu o problema? Existe um modo de resolver o problema sem calcular o peso individual dos tijolos e dos sacos de areia?**
b. **Seja T o peso dos tijolos e A o peso dos sacos de areia. Como podemos representar cada balança?**

Este problema foi, provavelmente, aquele que foi resolvido de forma mais rápida. Um aluno do grupo olhou para ele e calculou 64-41=23. Intrigado, o professor pediu por uma justificativa a fim de saber se se tratava de um pensamento adequado ou de um simples lance de sorte. O estudante não soube articular uma resposta adequada. O mais provável é que o aluno teve a ideia correta (de que basta remover os dois sacos de cimento e um tijolo de três sacos de cimento e dois tijolos para sobrar um saco de cimento e um tijolo, ou seja 64-41=23), mas não soube explicitar essa intuição.

Se, por um lado, o item a foi rapidamente resolvido, por outro lado, o item b foi mais demorado. A transformação da imagem em equação não era óbvia para os alunos. Não se tratava de uma incapacidade de abstração, mas de uma dificuldade de entender o objetivo do exercício, sobretudo porque o professor não quis dar diretrizes em excesso para que o aluno pudesse construir por si o conhecimento. No entanto, o domínio de uma linguagem precisava de uma certa quantidade de imitação. Por isso, o professor indicou como escrever a primeira equação. Depois, os estudantes conseguiram terminar a atividade sozinhos, ainda que com alguma dificuldade e hesitação. A imagem a seguir mostra o quadro com as respostas que os alunos apresentaram aos colegas. Isso provavelmente se deve a dois fatores: os alunos não estão seguros da solução encontrada e, complementar a isso, eles tem vergonha de errar a resolução no quadro.

Figura 4



Durante a explicação dos alunos no quadro, o professor precisou apenas explicar o motivo de o item A ser resolvido apenas com uma subtração. Os demais colegas entenderam a justificativa sem grandes dificuldades.

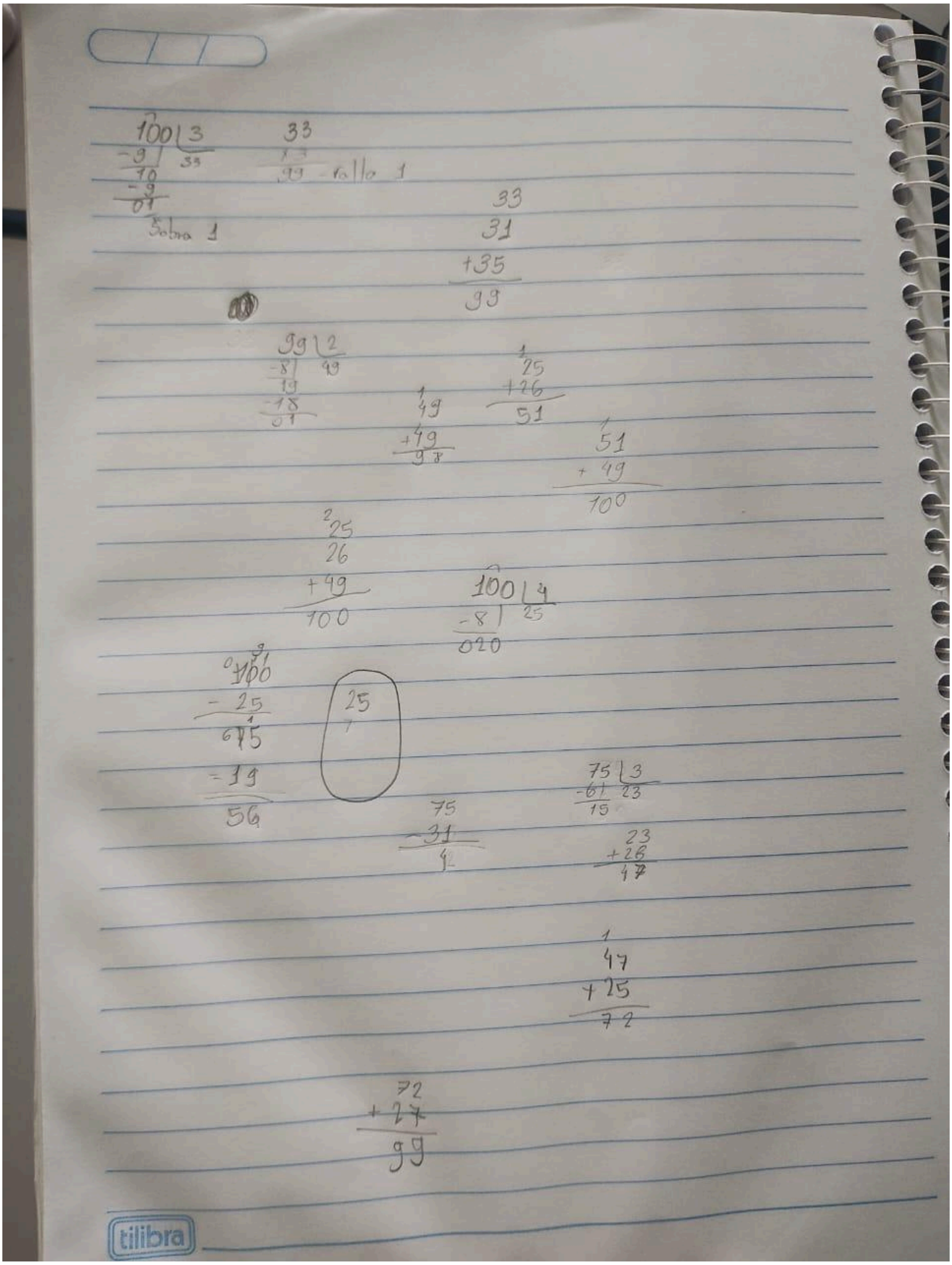
Agora, trataremos da questão 3, que foi a última a ser resolvida nesse dia. A questão foi resolvida pelo grupo B e não houve tempo hábil para finalizá-lo. O enunciado do problema dizia o que segue:

3. Encontre, se possível, 3 números ímpares cuja soma seja 100.

a. **Como podemos representar um número par qualquer?**
b. **Como podemos representar um número ímpar qualquer?**
c. **Como podemos representar a situação descrita acima?**

Os alunos do grupo imediatamente passaram a testar a soma de diversos números ímpares a fim de encontrar o resultado esperado, conforme mostra a figura 5.

Figura 5



Após alguns minutos de tentativas variadas (que incluíam somas, subtrações e divisões), os alunos demonstraram uma certa irritação com o problema e queriam desistir. O professor sugeriu que os alunos lessem novamente o enunciado da questão. Quando o aluno leu a expressão “se possível” entendeu que não era possível encontrar os três números ímpares cuja soma seja 100.

A intenção dessa questão era aproveitar o ensejo para discutir questões de paridade[51]. Entretanto, deu-se prioridade para os itens a e b que versam sobre a escrita algébrica. Novamente, esse tópico precisava ser ensinado de modo dirigido, é errado supor que o estudante pode desenvolver a linguagem sozinho. Por isso, houve um diálogo entre o professor e os estudantes (sobretudo o estudante D.) que visava possibilitar a construção do conhecimento de escrita algébrica.

- Prof. O que é um número par?
- D. Um número que pode ser dividido por dois.
- Prof. Portanto, ele é o dobro de algum número?
- D. Sim.
- Prof. O que é o dobro de um número?
- D. É duas vezes o número.
- Prof. E como podemos representar o dobro de um número?
- D. Duas vezes uma estrela.
- Prof. Bom, mas use uma letra.
- D. 2xN
- Prof. Muito bem. Agora vamos ao número ímpar.[52] Qual é a diferença entre o número par e o número ímpar.
- D. É que o número ímpar não se divide por dois.
- Prof. Sim, mas isso é difícil de representar. Qual a diferença entre os números pares e ímpares? O ímpar não tem uma unidade a mais do que o par?
- D. Sim.
- Prof. Então como podemos representar isso?
- D. P+1 [P indica um número par]?
- Prof. Usa a expressão anterior.
- D. 2xN+1

[51] A discussão de paridade desta questão deveria complementar a discussão sobre paridade da questão 4 do dia 1, mas essa questão foi excluída por falta de tempo. As duas questões juntas contribuiriam para uma compreensão das habilidade de aritmética algebrizada de conhecer relações e propriedades dos números inteiros.

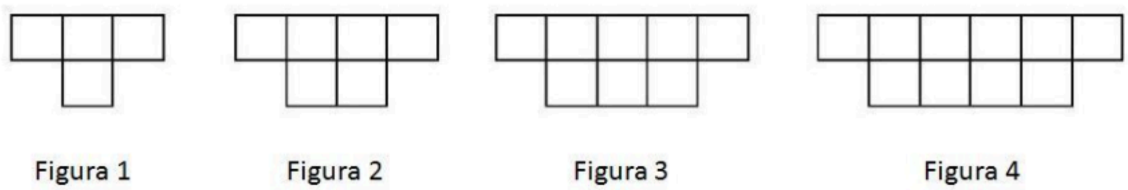
[52] Se houvesse tempo suficiente, seria interessante deixar os alunos a pensar no problema sozinhos. Com o modo como foi conduzida esta atividade, privilegiou-se a escrita algébrica, a habilidade de generalização deixou de ser desenvolvida.

Aqui vemos três erros do professor durante a aplicação desta proposta pedagógica: excesso de intervenção, privilegiar o desenvolvimento da escrita algébrica, prejudicando a capacidade de generalização e esquecer o item c da questão. Às 14h50 tocou o sinal da escola, encerrou-se a aula e os alunos não tiveram tempo de apresentar suas conclusões.

8.3. Aula 3 – relato e discussão

Passemos primeiramente ao relato do terceiro dia de aplicação da pesquisa. Nesse dia, só houve tempo hábil para resolver os problemas 1 e 2. A aula iniciou às 15h10 e encerrou às 17h00. O grupo C foi o primeiro a ser observado neste dia. O enunciado da questão dizia o seguinte:

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando um quadrado novo na fileira de cima e um quadrado na fileira de baixo.



1. **Desenhe a figura 5**
2. **Complete a tabela a seguir:**

Número da figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Número de quadrados						

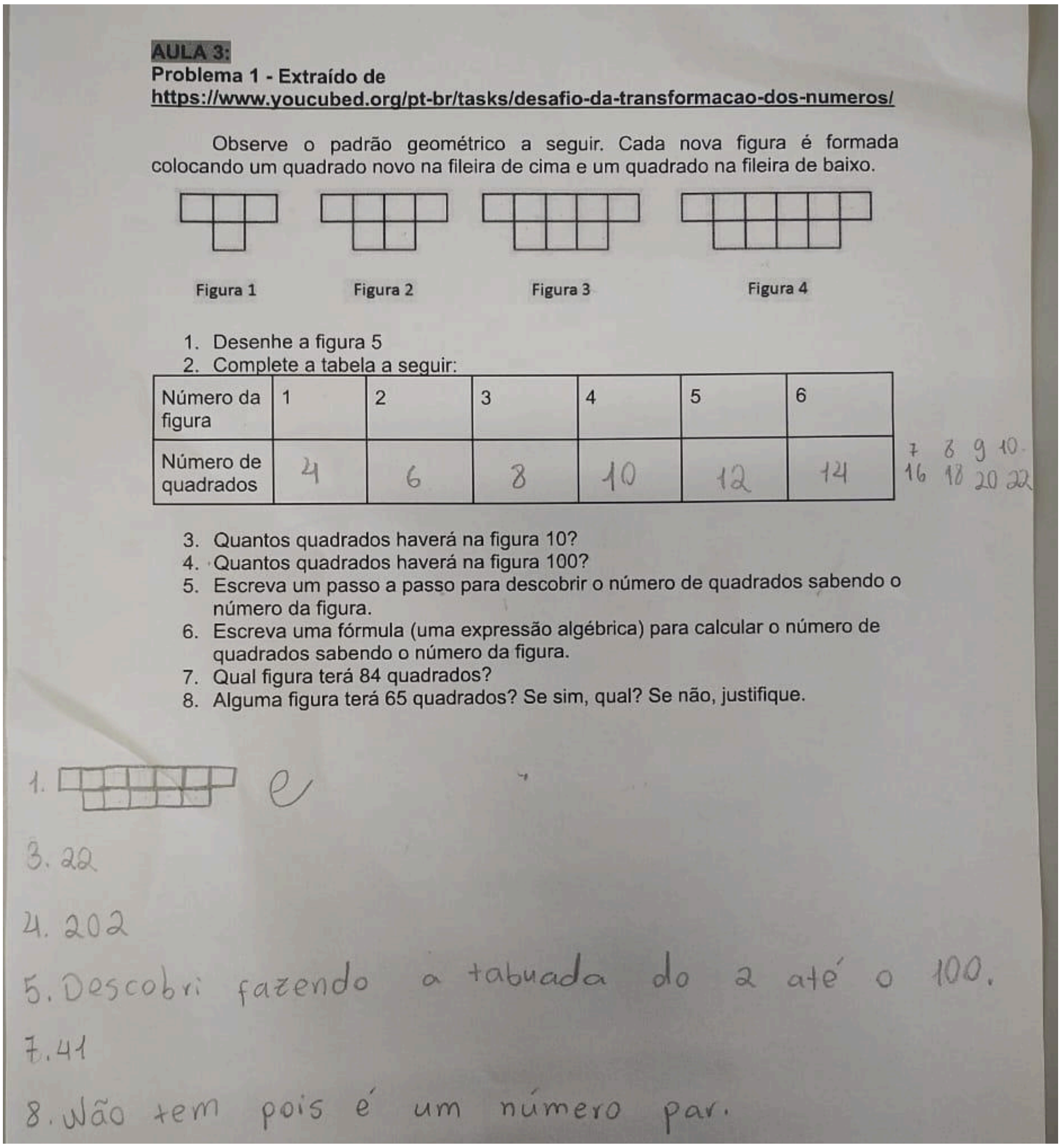
3. **Quantos quadrados haverá na figura 10?**
4. **Quantos quadrados haverá na figura 100?**
5. **Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.**
6. **Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.**
7. **Qual figura terá 84 quadrados?**
8. **Alguma figura terá 65 quadrados? Se sim, qual? Se não, justifique.**

O grupo não estava completo neste dia, pois faltaram dois membros. Além disso, o grupo não estava unido para resolver as questões, pois apenas um aluno do grupo tomou a iniciativa e resolveu[53]. O professor tentou incentivar o grupo todo a participar, mas mesmo assim, os membros não se envolveram na resolução dos problemas.

O aluno S não teve problemas para resolver os itens 1 e 2 deste problema, ou seja, identificar e reproduzir o padrão foi imediato. Porém as dificuldades surgiram ao tentar resolver os itens de 3 a 6, pois o mesmo só conseguiu raciocinar em termos de pensamento aritmético (o que já era esperado inicialmente). Para encontrar o décimo e o centésimo termo, ele somou duas unidades ao termo anterior da sequência. No item 5, ele escreveu “descobri fazendo a tabuada do dois até o 100”. Dessa forma, não é possível resolver o item 6. Já os itens 7 e 8 foram facilmente resolvidos, pois bastava olhar para a lista que já fora produzida. A seguir temos a imagem do material produzido,[54]inclusive a justificativa do item 8 foi adequada: nenhuma figura tem 65 quadrados, porque 65 é ímpar. A rigor, o aluno escreveu “não tem pois é um número par”, mas entende-se que ele quis dizer que a sequência é composta de números pares, por isso nenhuma figura tem 65 quadrados.

[53] Por conta disso, a resolução dos problemas não está descrita em forma de diálogo.
[54] Note que na listagem da quantidade de quadrados em cada sequência, há um erro, pois os termos 43 e 44 aparecem duplicados. Isso produziu um erro de contagem ao fim, que foi facilmente corrigido.

Figura 6



AULA 3:

Problema 1 - Extraído de https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando um quadrado novo na fileira de cima e um quadrado na fileira de baixo.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. Desenhe a figura 5
2. Complete a tabela a seguir:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados	4	6	8	10	12	14

7 8 9 10
16 18 20 22

3. Quantos quadrados haverá na figura 10?
4. Quantos quadrados haverá na figura 100?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.
7. Qual figura terá 84 quadrados?
8. Alguma figura terá 65 quadrados? Se sim, qual? Se não, justifique.

1. e

3. 22

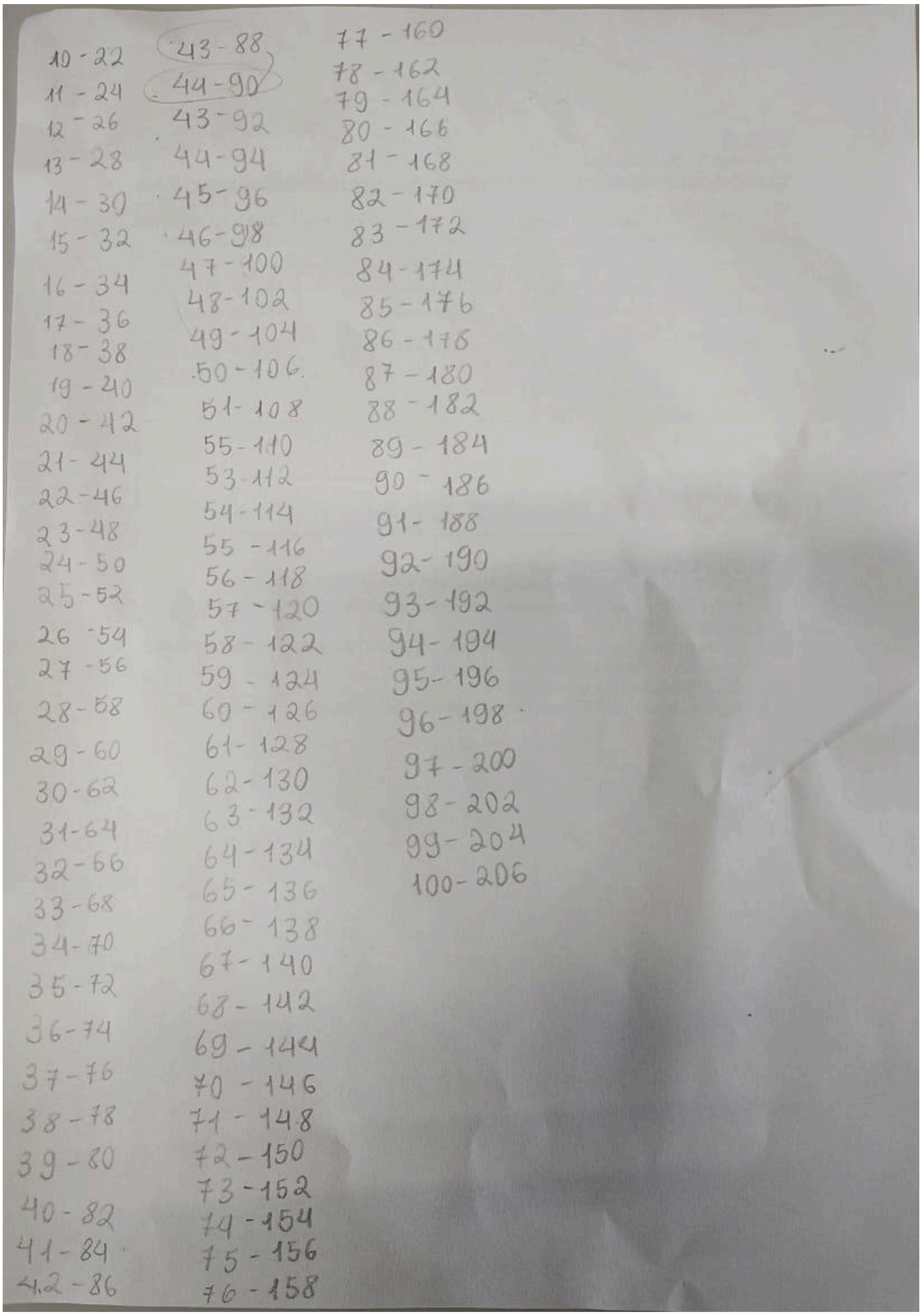
4. 202

5. Descobri fazendo a tabuada do 2 até o 100.

7. 41

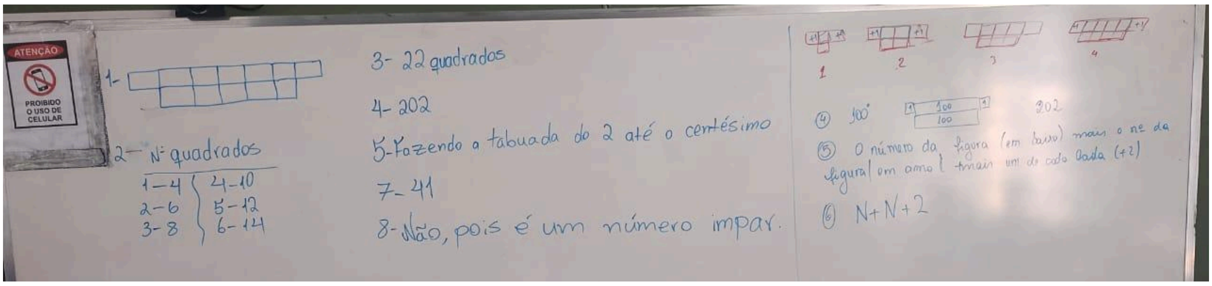
8. Não tem pois é um número par.

Figura 7


10 - 22
11 - 24
12 - 26
13 - 28
14 - 30
15 - 32
16 - 34
17 - 36
18 - 38
19 - 40
20 - 42
21 - 44
22 - 46
23 - 48
24 - 50
25 - 52
26 - 54
27 - 56
28 - 58
29 - 60
30 - 62
31 - 64
32 - 66
33 - 68
34 - 70
35 - 72
36 - 74
37 - 76
38 - 78
39 - 80
40 - 82
41 - 84
42 - 86
43 - 88
44 - 90
43 - 92
44 - 94
45 - 96
46 - 98
47 - 100
48 - 102
49 - 104
50 - 106
51 - 108
55 - 110
53 - 112
54 - 114
55 - 116
56 - 118
57 - 120
58 - 122
59 - 124
60 - 126
61 - 128
62 - 130
63 - 132
64 - 134
65 - 136
66 - 138
67 - 140
68 - 142
69 - 144
70 - 146
71 - 148
72 - 150
73 - 152
74 - 154
75 - 156
76 - 158
77 - 160
78 - 162
79 - 164
80 - 166
81 - 168
82 - 170
83 - 172
84 - 174
85 - 176
86 - 178
87 - 180
88 - 182
89 - 184
90 - 186
91 - 188
92 - 190
93 - 192
94 - 194
95 - 196
96 - 198
97 - 200
98 - 202
99 - 204
100 - 206

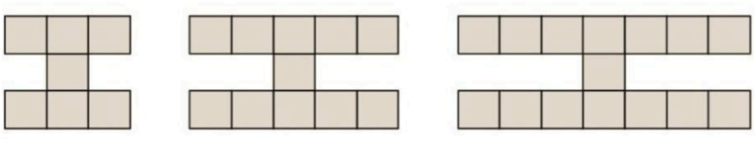
Depois o grupo C apresentou as soluções encontradas. Os alunos, em geral, demonstraram alguma vergonha de apresentar, mesmo já sabendo que estavam corretos. O grupo escreveu os seus resultados e enunciou-os. Após este momento o professor, baseado na ideia de Onuchic e Allevato de que a metodologia de resolução de problemas deve ser usada para ensinar matemática, explicou para a turma que o termo da figura é igual ao número de quadrados na parte de baixo da figura. E que o número de quadrados na parte de cima é igual ao número de baixo mais dois quadrados (um em cada lado). A partir disso, podemos escrever o passo a passo: somar o número da figura duas vezes mais duas unidades, o que permitiu escrever a fórmula Q=N+N+2, onde N é o número da figura e Q o número de quadrados na figura. Essa explicação foi importante para a resolução do problema 2 pelo grupo D como se verá na figura 8.

Figura 8



Depois passamos ao grupo D que resolverá o segundo problema da lista do dia 3. O enunciado do problema é o seguinte:

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando dois quadrados novos na fileira de cima e dois quadrados novos na fileira de baixo, mantendo um quadrado centralizado entre as duas fileiras.



1. **Desenhe a figura 4.**
2. **Complete a tabela a seguir:**

Número da figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Número de quadrados						

3. **Quantos quadrados haverá na figura 10?**
4. **Quantos quadrados haverá na figura 100?**
5. **Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.**
6. **Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.**

O grupo D estava completo, mas a discussão do problema ficou concentrada em dois alunos VH e LB Ao ver a explicação do problema 1, os alunos logo procuraram algum elemento geométrico que pudesse explicar o crescimento do padrão de crescimento, mas não conseguiram identificar um padrão claro. Ainda assim, a maneira de tentar resolver o problema já foi mais elaborada do que o pensamento aritmético do grupo anterior. Os alunos do grupo D contaram a quantidade de quadrados da primeira figura (7) e multiplicaram pelo número da figura, formando a seguinte tabela.

Número da figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Número de quadrados	**7**	**14**	**21**	**28**	**35**	**42**

Nesse instante, o professor interveio:

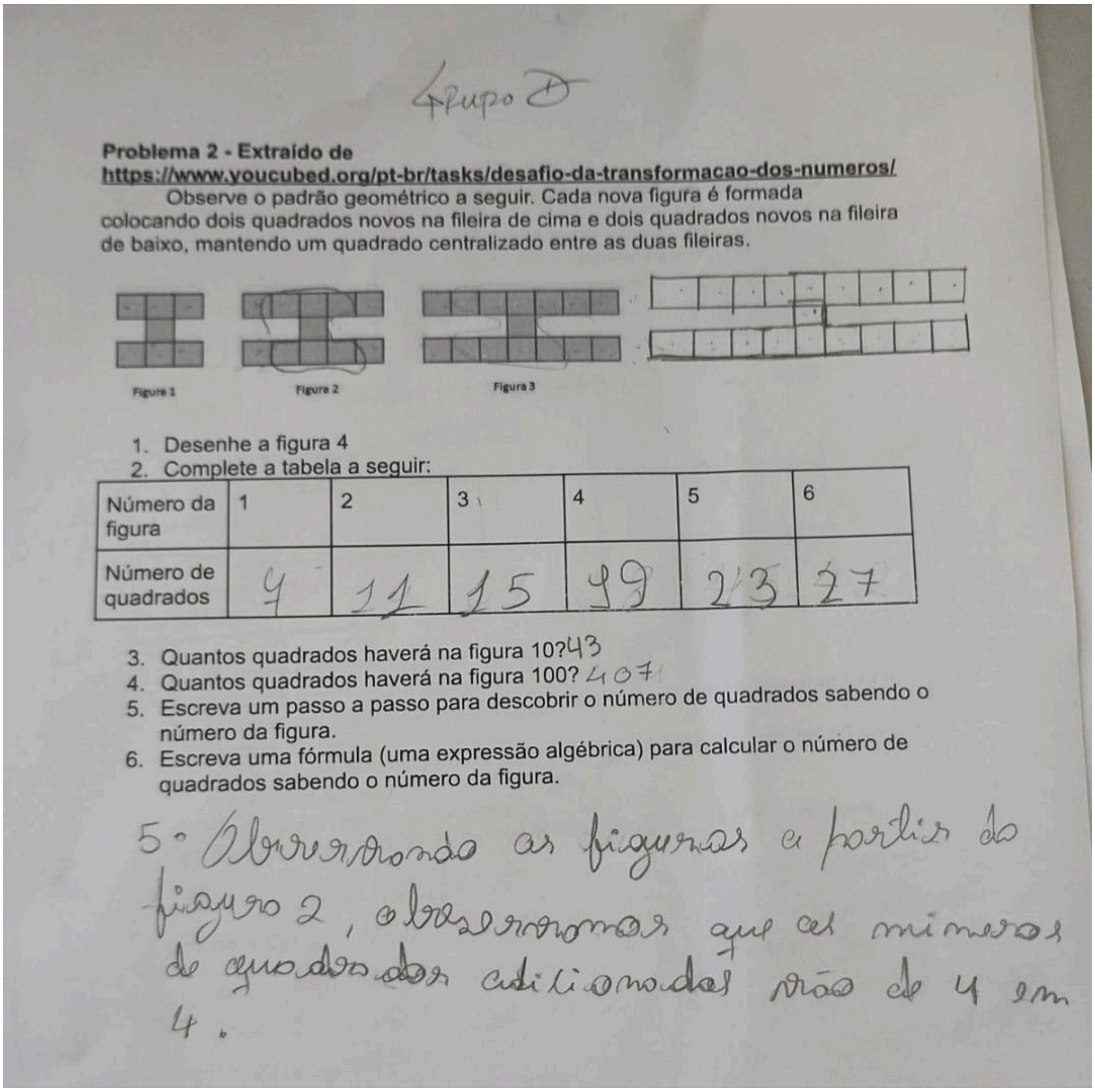
- Prof. A segunda figura tem 14 quadrados?
- VH. Ah… não tem 11.
- Prof. Então não é assim que conta os quadrados.

Depois dessa observação eles verificam que a sequência aumenta de 4 em 4 unidades. A partir desse instante os alunos foram somando quatro unidades sobre o termo anterior da sequência para encontrar o termo consecutivo até chegar ao décimo termo e responder o terceiro item.

Depois os alunos responderam o item 4. Eles encontraram a resposta 407. Questionados sobre o motivo desse número, LB disse que VH “chutou” o número 404, mas que ele acreditou que seria um número muito baixo e escolheu 407.

Como eles não conseguiram generalizar um procedimento para o cálculo de termo genérico, não puderam produzir uma fórmula e responder os itens faltantes. Ao final, os alunos não quiseram apresentar seus resultados, então o professor apresentou a solução para os demais grupos. O professor fez notar que a figura é formada por 4 “braços” crescentes e por um núcleo de 3 quadrados e que o número da figura é o numero de quadrado em cada “braço” da figura, então para calcular o número de quadrados em cada figura, basta multiplicar o número da figura por 4 (já que existem 4 braços, e somar 3 quadrados centrais. Isso nos dá a fórmula Q=4N+3, onde Q é o número de quadrados e N representa o número da figura. A seguir temos as respostas dos alunos do grupo D.

Figura 9


Grupo D

Problema 2 - Extraído de
https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando dois quadrados novos na fileira de cima e dois quadrados novos na fileira de baixo, mantendo um quadrado centralizado entre as duas fileiras.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Desenhe a figura 4
2. Complete a tabela a seguir:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados	7	11	15	19	23	27

3. Quantos quadrados haverá na figura 10? 43
4. Quantos quadrados haverá na figura 100? 407
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.

5. Observando as figuras a partir da figura 2, observamos que os números de quadrados adicionados são de 4 em 4.

No terceiro dia de aplicação desta pesquisa, houve tempo hábil para resolver apenas dois problemas, além disso, o grupo B esteve ausente, pois foi convidado a participar da FEICON (Feira do Conhecimento do Município de Sapucaia do Sul) e o grupo A deu pouca atenção à resolução dos problemas do dia. No entanto, o grupo A prestou muita atenção às explicações ao final de cada problema. Da mesma forma, os alunos do grupo D disseram “[Profes]sor, traz mais [problemas] que nem esse, a gente entendeu melhor”. Dito isso, podemos passar para o relato da aula 4.

8.4 Aula 4 – relato e discussão

Para o dia 4, estava prevista uma atividade individual para preparar os alunos para a avaliação. Essa atividade exigiria saber abstrair e saber escrever em linguagem simbólica. Os pesquisadores optaram por excluir essa atividade para poder trabalhar os problemas que não foram abordados nos dias anteriores, sobretudo o problema 4 do dia 2, de grande valor para o pensamento algébrico. Além disso, essa mudança também permitiu ao grupo B, que não esteve presente no dia 3, resolver um problema com sequências.

Iniciamos, às 13h00, com o problema 4 do segundo dia. O grupo observado foi o D, que nesse dia contava com dois alunos a menos. Um por falta e o outro por desistência da pesquisa. O citado problema tinha o seguinte enunciado.

Em cada problema abaixo, cada símbolo representa um número e símbolos iguais representam números iguais.

A) 📎+📎+📎=36 **📎+❤+📎=30** **❤+❤+❤+📎=?**	**B)🔔+🔔=32** **🌰+🌰=🔔+🔔+🔔** **🌰+🌰+🌰+🔔=?**
C) ♦+📐=14 **📐+♦+♦+♦=32** **♦+♦+📐+📐+📐=?**	**D) A+A+B=11** **A+B+B=13** **A+A+A+B+B+B=?** **A+B=? A=? B=?**

a. **Encontre o valor de cada símbolo.**
b. **Como seu grupo resolveu cada problema?**
c. **Como podemos representar cada linha de cada problema com uma expressão matemática diferente e mais simples do que a expressão utilizada?**

Como era de se esperar, o enigma A foi resolvido com facilidade, já que este enigma foi escolhido apenas para testar se o estudante entendeu a proposta do exercício e que, resolvendo-o, o estudante podia adquirir algum grau de confiança para prosseguir. As dificuldades começaram a aparecer na resolução do enigma B.

No enigma B, os alunos descobriram imediatamente que o sino vale 16. Então segue-se o seguinte diálogo entre os membros do grupo.

- LB: Se duas cebolas são iguais a 16, então uma cebola é igual a 8.
- G. Não, porque são três sinos.
- LB. Ah tá, entendi.
- G. Três sinos dá 48, então a cebola vale 24.

Vemos aqui que a noção de igualdade como relação entre duas grandezas está cada vez mais clara.

Depois os alunos passaram ao enigma C. Neste enigma os alunos chamaram o losango de diamante e o esquadro de régua. Este problema não foi resolvido, pois como ♦+📐=14, os alunos supuseram que uma das figuras deveria ser valer 4 e a outra 10. Mesmo testando as duas hipóteses e percebendo que elas são falsas, eles não conseguiram abandonar essa ideia fixa. Por isso tentaram resolver o item D. Mas o aluno LB escolheu continuar a pensar sobre o enigma C. Pensando consigo mesma, ela disse “Letra me confunde, prefiro objeto. [Letra] me deixa nervosa”[55]. Curiosamente, esse mesmo estudante, refletindo sobre o enigma C, escreve em seu caderno R+D+D+D=32.

Enquanto isso, os demais membros do grupo refletiram sobre o enigma D. O aluno MB testou a hipótese de que A=5 e B=1, mas LB mostra que a hipótese falha para A+B+B=13. Seguem-se tentativas e erros até os alunos encontrarem a solução A=3 e B=5. Vale ressaltar que falta organização e sistematização em testar hipóteses. A falta de ordem fez com que os estudantes gastassem muita energia mental em problemas simples. Além de impedir que eles conseguissem resolver problemas maiores, a falta de ordem e de sistematização atrapalharam a capacidade de generalização e de abstração.

Os estudantes demoraram quase uma hora para resolver três dos quatro enigmas propostos neste problema. Assim, os itens b e c também não foram resolvidos. Além disso, os estudantes optaram por não apresentar suas soluções no quadro. Assim, o professor resolveu no quadro os enigmas juntamente com os itens

[55] Esse comentário é muito pertinente. Ele mostra que um dos problemas dos estudantes em compreender a álgebra é simplesmente a falta de prática da escrita comum. Como as figuras têm cores diferentes e formatos bastante diferentes, isso ajuda o estudante a evitar confusões.

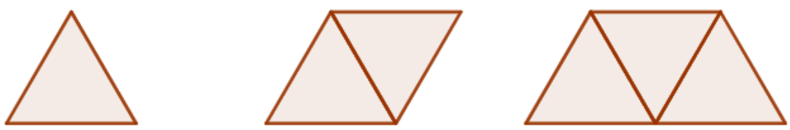
b e c. O professor destacou a função da igualdade no enigma B e que se, ♦+📐=14, então 📐+♦+♦+♦=(📐+♦)+♦+♦=14+♦+♦=32. Logo ♦+♦=18 e ♦=9. Portanto ♦+📐=9+📐=14. Portanto 📐=5.

Na mesma linha de raciocínio, o enigma D pode ser resolvido da seguinte maneira:A+A+B=11 e A+B+B=13, então A+A+A+B+B+B = (A+A+B)+(A+B+B) = 11+13 = 24. Logo A+B = 8, A=3 e B=5.

Quanto ao item c, o professor comentou que é possível reduzir expressões algébricas, por exemplo 📐+♦+♦+♦=32 pode ser reduzido a 📐+3♦=32 e A+A+A+B+B+B pode ser reduzido a 3A+3B.

Agora, passemos ao relato de experiência da resolução do problema 3 do dia 3 pelo grupo B. O dito problema tem o seguinte enunciado:

A sequência a seguir é formada por triângulos feitos de fósforos. O primeiro termo é feito de um triângulo, o segundo termo é feito de dois triângulos adjacentes, o terceiro é feito de três triângulos adjacentes e assim por diante. Cada lado que pertence a dois triângulos é feito de apenas um fósforo.



1º termo **2º termo** **3º termo**

Responda:

a. **Desenhe o 4º termo dessa sequência.**
b. **Complete a tabela a seguir:**

Termo da sequência	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**
Número de palitos						

c. **Quantos palitos são usados para compor o 10º termo?**
d. **Quantos palitos são usados para compor o 100º termo?**
e. **Escreva um passo a passo para descobrir o número de palitos de fósforos sabendo o número do termo da sequência.**

f. **Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de palitos de fósforos, sabendo o número do termo da sequência.**

O grupo B resolveu rapidamente os itens a e b do problema. Além disso, como era de se esperar, resolveu o item c somando 2 unidades ao termo anterior e os itens e e f não foram resolvidos a tempo. Porém o item d é digno de nota. Os alunos já sabiam que o décimo termo é formado por 21 palitos. Então eles multiplicaram o 21 por 10 (pois o 10 cabe 10 vezes no 100) obtendo 21 e um palitos. Diga-se de passagem que o grupo A usou a mesma estratégia. Mais tarde, o professor explicou para a turma que essa estratégia esquece que quando dois triângulos se juntam, perde-se um palito e que uma possível fórmula seria $P=2(n-1)+3$, onde n é o número da figura e P é o número de palitos.

Assim, a aula 4 encerrou às 14h50. Dois problemas com muitos itens foram resolvidos e nenhum grupo quis apresentar neste dia.

Neste momento, passamos a falar do quinto encontro previsto nesta proposta pedagógica: o encontro da avaliação.

8.5 Avaliação

Passemos agora para a análise da avaliação. A avaliação ocorreu nos dois últimos períodos de uma sexta-feira. Nesse dia, muitos alunos não estavam presentes. Dos 16 alunos presentes e em condições de participar da pesquisa, apenas 6 optaram por responder a avaliação. (Vale destacar que os 10 alunos que optaram por não responder à avaliação foram aqueles que demonstraram menor interesse durante as aulas.

A seguir temos o quadro que mostra quantos alunos responderam de modo correto, parcialmente correto, errado ou que não respondeu.

Quadro 7: Quadro-resumo da avaliação escrita

Questão	Resposta Correta	Parcialmente correta	Resposta Errada	Não respondeu
1	3	0	2	1
2a	4	0	1	1
2b	3	1	1	1

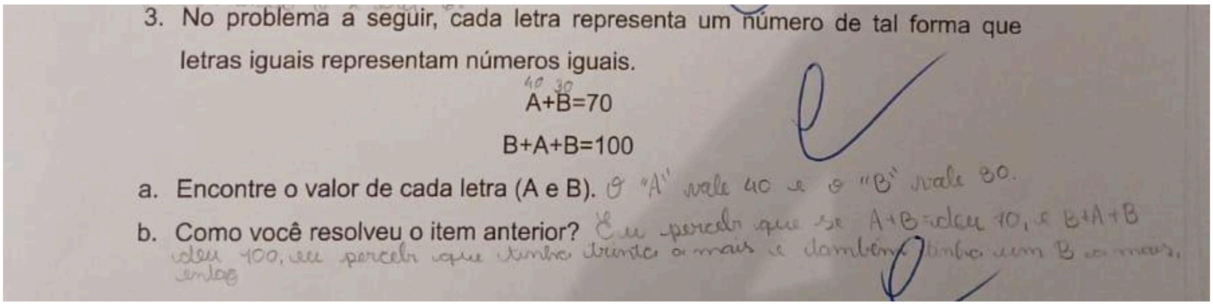
3a	4	0	1	1
3b	4	0	1	1
4a	4	0	1	1
4b	4	0	1	1
4c	4	0	1	1
4d	2	0	2	2
4e	0	2	1	3
4f	0	0	1	5

Primeiramente, devemos notar que as questões 1 a 3 são focadas em testar habilidades relativas ao pensamento de aritmética algebrizada e de pensamento funcional. Os itens 4d e 4e avaliam conjuntamente a capacidade de generalização e o item 4f avalia a capacidade de escrita algébrica. Portanto, analisando a tabela, percebemos que o pensamento algébrico foi desenvolvido nas quatro aulas por aqueles alunos que participaram ativamente da proposta pedagógica, sobretudo o pensamento de aritmética generalizada e o pensamento funcional, mas a escrita algébrica ainda precisa de mais tempo, visto que nenhum aluno conseguiu responder os itens e e f da questão 4. No entanto, é interessante destacar a justificativa apresentada por três dos quatro alunos do grupo B. Deve-se lembrar que os alunos deste grupo precisaram faltar um dia de aula para representar a escola João de Barro na feira municipal. Neste dia foi trabalhado de modo mais intenso a escrita algébrica e a generalização. Talvez, se o grupo estivesse presente, eles teriam resolvido integralmente a avaliação.

Um aluno respondeu na questão 3b “Eu percebi que, se A+B deu 70 e B+A+B deu 100, eu percebi que tinha trinta a mais e também tinha um B a mais então [B=30]”. Na classificação de Kaput, vemos que o aluno está usando a igualdade como expressão de uma relação entre quantidade[56], está tratando o número algebricamente e está resolvendo expressões numéricas com número desconhecido.

[56] Durante a entrevista, este grupo, junto com os demais, responderam que o sinal de igual é usado apenas para indicar o resultado. Entretanto, no momento do exercício, ele soube usar como uma relação entre quantidades.

Figura 10


3. No problema a seguir, cada letra representa um número de tal forma que letras iguais representam números iguais.

40 30
A+B=70

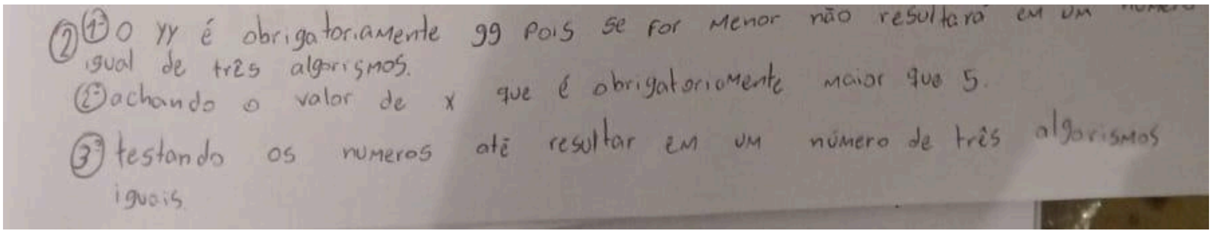
B+A+B=100

a. Encontre o valor de cada letra (A e B). O "A" vale 40 e o "B" vale 30.

b. Como você resolveu o item anterior? Eu percebi que se A+B deu 70, e B+A+B deu 100, eu percebi que tinha trinta a mais e também tinha um B a mais, então

Outro aluno respondeu no item 2b “1º. O YY é necessariamente 99, pois se for menor não resultará em um número igual de três algarismos. 2º Achando o valor de X que é obrigatoriamente maior [do] que 5. 3º Testando os números até resultar em um número de três algarismos iguais.” Este aluno está usando adequadamente as relações e propriedades dos números inteiros, o que indica que o pensamento de aritmética generalizada foi desenvolvido.

Imagem 11

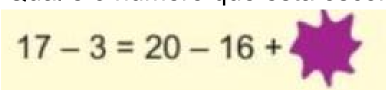


8.6 Entrevista com grupos focais

Após observarmos o trabalho dos estudantes durante quatro aulas e de coletar avaliações escritas de alguns deles, entrevistamos os alunos. O objetivo dessa entrevista foi o de estabelecer um panorama geral dos conhecimentos que eles construíram ao longo dessa caminhada e, assim, poder avaliar melhor a sua evolução.

A seguir temos um quadro que apresenta as respostas de cada grupo as perguntas. O quadro está organizado da seguinte maneira: nas células maiores reescrevemos alguns problemas apresentados nas aulas. Nas células da coluna “Pergunta” temos as questões feitas aos alunos na entrevistas sobre os tais problemas e nas células ao lado temos as respostas de cada grupo para aquela pergunta. Isso nos permite ter um panorama de comparação útil.

Quadro 8: Quadro-resumo das respostas da entrevista

<table>
<tr><td>Pergunta</td><td>Grupo A</td><td>Grupo B</td><td>Grupo C</td><td>Grupo D</td></tr>
<tr><td colspan="5">1. Vamos voltar à questão 2 da aula 1 que diz o seguinte:
“Encontre três números consecutivos cuja soma seja igual a 123.
a. Explique como seu grupo resolveu esse problema.
b. Como podemos representar a soma de quaisquer três números consecutivos em apenas uma frase matemática?“</td></tr>
<tr><td>1A. Você quer continuar a entrevista?</td><td>Sim</td><td>Sim</td><td>Sim</td><td>Sim</td></tr>
<tr><td>1B. De que outras formas podemos resolver o item b?</td><td>Queremos pular essa pergunta</td><td>Sim, é possível reescrever N+(N+1)+(N+2) com símbolos (coração, estrela, etc.)</td><td>Sim, possível trocar letras — exemplo: A+A+B</td><td>Sim, reescrever trocando por “?”, N, estrela, cebola</td></tr>
<tr><td>1C. Como ficaria a expressão, se fossem 4 números consecutivos?</td><td>[Não respondida]</td><td>N+(N+1)+(N+2)+(N+3)</td><td>N+(N+1)+(N+2)+(N+4)</td><td>Queremos pular</td></tr>
<tr><td colspan="5">2. Na aula 2, a primeira pergunta diz:
“Qual é o número que está escondido pelo borrão?


a. Como essa situação pode ser representada sem usar o borrão?”</td></tr>
<tr><td>2A. Você quer continuar a entrevista?</td><td>Sim</td><td>Sim</td><td>Sim</td><td>Sim</td></tr>
<tr><td>2B. Vocês resolveram essa questão em quanto tempo, aproximadamente?</td><td>+/- 30 minutos</td><td>+/- 10 minutos</td><td>30 minutos ou mais</td><td>Quase 1 hora</td></tr>
<tr><td>2C. Explique com suas palavras qual é(são) a(s) funções do sinal de igualdade.</td><td>Sinal de igual representa a resposta apenas</td><td>Sinal serve para mostrar resultado apenas</td><td>Sinal mostra resultado, ex: 10+10=20</td><td>Sinal usado como resposta e porque contas devem ser iguais</td></tr>
<tr><td colspan="5">3. Na aula 2, a quarta pergunta traz 4 enigmas com símbolos. Os dois últimos dizer o seguinte:
<table><tr><td>♦+📐=14
📐+♦+♦+♦=32
♦+♦+📐+📐+📐=?</td><td>A+A+B=11
A+B+B=13
A+A+A+B+B+B=?
A+B=? A=? B=?</td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>3A. Você quer continuar a entrevista?</td><td>Sim</td><td>Sim</td><td>Sim</td><td>Sim</td></tr>
<tr><td>3B. Como vocês resolveram esses problemas: testando diversos números até o cálculo estar correto ou vocês usaram outra estratégia?</td><td>Resolveram testando números</td><td>Resolveram testando números</td><td>Não conseguiram; confundiram quantidade de símbolos</td><td>Resolveram testando números</td></tr>
<tr><td>3C. Se você tivesse que resolver essas questões hoje, você resolveria da mesma forma ou de forma diferente.</td><td>Resolveria de modo diferente; “não sei” como</td><td>Resolveria da mesma forma</td><td>Resolveria diferente, tentativa e erro</td><td>Resolveria testando também</td></tr>
<tr><td colspan="5">4. Na aula 3 foram apresentados 4 problemas com sequências de figuras geométricas. Essas sequências foram:

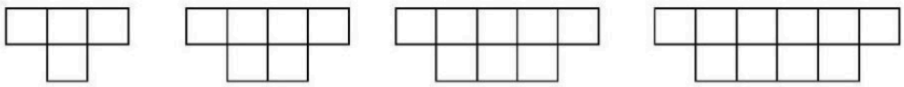



Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

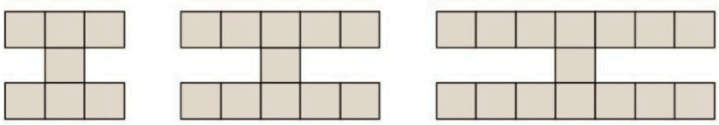
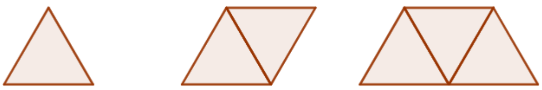



Figura 1 Figura 2 Figura 3

1º termo 2º termo 3º termo

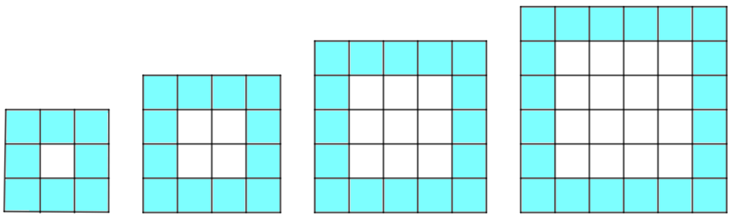



Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4
Em todas as quatro sequências, foram apresentadas perguntas semelhantes.</td></tr>
<tr><td>4A. Você quer</td><td>Sim</td><td>Sim</td><td>Sim</td><td>Sim</td></tr>
</table>

continuar a entrevista?				
4B. Desejava-se calcular o 100º termo de cada sequência. Em qual sequência foi mais fácil e a mais difícil de calcular o 100º termo? Por quê?	Primeira sequência (mais fácil: contar quadrados)	[Não responderam; não participaram da aula]	Sequência de triângulos (mais fácil)	Primeira e sequência de triângulos (mais fáceis)
4C. Depois, desejava-se encontrar uma fórmula geral para calcular os termos de cada sequência. Em qual sequência foi mais fácil e a mais difícil de encontrar essa fórmula? Por quê?	Primeira sequência (fórmula mais fácil, pois é simples contagem de dois em dois)	[Não responderam; não participaram da aula]	Primeira sequência (mais fácil para fórmula)	Queremos pular
4D. A fórmula para calcular o número de palitos para produzir algum termo da terceira sequência é P=2n+1 ou P=2(n-1)+3, (onde n é número da figura e P é o número de palitos). Como seria a fórmula, se a sequência inicia-se com dois triângulos adjacentes ao invés de apenas um?	Queremos pular	P=2(n-1)+5	Queremos pular	Queremos pular
4E. Ainda na terceira sequência: suponha que ela inicie com um triângulo, mas cada nova figura acrescenta dois novos triângulos	[Não respondida]	Não sabe	[Não respondida]	Queremos pular

à figura anterior. Como ficaria a nova fórmula para contar o número de palitos.				

8.7 Análise dos dados e reflexões

Após a descrição das aulas, do tabelamento dos dados da avaliação escrita e dos dados das entrevistas, podemos passar à análise dos dados.

Uma primeira análise dos dados nos sugere que a experiência foi mal sucedida, pois apenas seis alunos estiveram interessados em responder ao questionário proposto e isso levanta várias perguntas. Mas podemos pensar de modo diferente, podemos entender que a aplicação da pesquisa, ao gerar reflexões, já simboliza uma possibilidade de sucesso, de que, em uma eventual continuidade do trabalho, já conseguimos identificar erros, limitações e aspectos a melhorar.

A seguir, exploraremos a questão do baixo engajamento, diferenciando elementos externos e internos à proposta. Os problemas externos envolvem temas como falta de engajamento, desinteresse, ausências nas aulas, timidez e dificuldade de interpretação de texto. Já, por problemas internos, destacamos as limitações intrínsecas à proposta didática para melhorar a capacidade de abstração e compreensão da álgebra por parte dos alunos. Depois, exploraremos a questão da validade da proposta em si e como ela pode ser aperfeiçoada.

8.7.1 Problemas externos à proposta pedagógica associados ao baixo engajamento

Olhando para os problemas externos à proposta, primeiramente, notemos que no início da pesquisa contávamos com 24 alunos participantes. Entretanto, observando os dados da avaliação escrita, vemos que apenas 16 alunos estavam presentes no dia da avaliação. Isso pode ser explicado em parte pelo fato de que a avaliação escrita ocorreu em uma sexta-feira, que é um dia que tradicionalmente há menos presença de alunos na escola. Dos 8 faltantes, um deles estava de atestado médico, mas os demais faltaram por opção, um percentual maior do que o que normalmente observamos. Poderíamos perguntar se a aula estava desagradável, muito difícil, ou houve algum outro problema. Infelizmente, tal qual desenhamos a pesquisa, não temos como responder a essa pergunta. Fica essa dúvida para um estudo futuro.

Mas há um segundo dado associado ao desinteresse/desagrado/dificuldade que pudemos analisar: dos 16 alunos presentes e em condições de participar da avaliação, 10 escolheram não participar. Lendo seus relatos, podemos encontrar três tipos de causas para a recusa em participar da avaliação escrita e das aulas por parte dos alunos: causas relacionadas ao desinteresse, causas relacionadas à dificuldade de resolver os exercícios e causas relacionadas à apresentação.

Iniciemos pelo desinteresse. Os alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental têm entre 12, 13 ou 14 anos, idades que correspondem à passagem da infância para a adolescência. Essa fase de mudanças corresponde a um "perder o rumo" momentâneo, segundo Manika, Schneider e Silva (2025). Muitos alunos nesta fase estão interessados em fazer brincadeiras infantis, em namorar, etc. deixando os estudos de lado. Além disso, segundo a Sociedade Brasileira de Pediatria (2019), existem inúmeros problemas relacionados às suas estruturas familiares, à desregulação do sono, à má alimentação, etc. Tudo isso prejudica o foco e a atenção.

Ademais, o vício em telas, em *junk food,* entre outros hábitos típicos dos adolescentes, causam o excesso de dopamina (o hormônio do prazer) no cérebro (LEMBKE, 2021). Como nenhuma metodologia de ensino pode descarregar no cérebro a quantidade de dopamina que uma barra de chocolate ou um jogo de celular pode oferecer, a aula de matemática será sempre desinteressante (ou menos interessante) para alguns alunos, independentemente da metodologia e dos recursos utilizados. Cabe ressaltar, porém, que esta é uma reflexão em termos abstratos, isto é, não sabemos quais ou quantos alunos estão sem rumo, com problemas ou viciados em dopamina.

Outra causa possível para a baixa adesão dos alunos à resolução da avaliação escrita e das aulas é a dificuldade em resolver os problemas propostos. Observamos que isso se dá por dificuldades de leitura e interpretação de texto, baixo conhecimento matemático prévio e falta de pensamento organizado. É de conhecimento geral que os alunos brasileiros têm dificuldade em leitura. Os resultados do Pisa 2022 mostram que "[d]os estudantes brasileiros, 50% tiveram baixo desempenho nesta disciplina (abaixo do nível 2). [...] Apenas 2% dos brasileiros atingiram alto desempenho em leitura (nível 5 ou superior)." (INEP, 2023).

De fato, em nossas observações, vimos alunos perdendo muito tempo apenas para entender o problema. Além disso, muitos alunos têm pouco conhecimento sobre as operações básicas de matemática.

Os resultados do Pisa 2022 também mostram que, “[d]os estudantes brasileiros, 73% registraram baixo desempenho nesta disciplina (abaixo do nível 2)”.[57] (INEP, 2023) Isso confere com a experiência diária de sala de aula, pois muitos alunos conseguem usar um algoritmo de operação se a conta já vem armada ou indicada, mas não conseguem descobrir qual operação ou conjunto de operações realizar para resolver um problema apenas lendo o enunciado da questão.

Além disso, percebemos que alguns alunos de boa vontade tiveram muita dificuldade em resolver alguns problemas, por falta de um pensamento ordenado. Lembremos, por exemplo, o caso da questão 4 da aula 2 que foi aplicada na aula 4 (o problema das equações com figuras). Se os alunos testassem os números sistematicamente (primeiro o 1, depois o 2 e assim por diante) resolveram o problema de modo mais rápido e gastando menos energia, que poderia ser utilizado nos problemas seguintes. Dito de outro modo, muitos alunos não conseguem traçar uma estratégia clara e segui-la até o fim.

Finalmente, devemos ainda explorar uma terceira causa para a baixa participação nas aulas, ainda que esse fator não tenha influenciado diretamente na falta de participação dos alunos na avaliação escrita[58]: a recusa em apresentar as soluções encontradas no quadro. Essa recusa tem três causas: a timidez, a dificuldade de expressão e o baixo domínio do conteúdo. Comecemos pela timidez.. A timidez é o medo de perder ou ferir a autoimagem ou o respeito dos outros. Esse sentimento é particularmente presente nos adolescentes que não tem uma autoimagem consolidada. Desse modo, a possibilidade de errar no momento da apresentação pode causar ansiedade e a bloqueio dos pensamentos, vulgarmente conhecida como “branco”.

Além da timidez, existe o problema da dificuldade de expressão. Esse problema se divide em dois: dificuldade de organizar os pensamentos em ordem lógica e a dificuldade de provar tudo o que se sabe A dificuldade de organizar os

[57] O nível 1 de proficiência do pisa significa que o aluno consegue extrair informações diretas e resolver algarismos. O nível dois se refere a capacidade de aplicar conhecimentos básicos em situações do dia-a-dia.

[58] Mas influencia indiretamente, pois se o aluno deixa de aprender na aula, se sentirá inseguro para resolver a avaliação escrita e, podendo optar por não realizá-la, certamente optará por deixar de fazer.

pensamentos surgem naturalmente quando aprendemos um conteúdo novo e soma-se a isso o fato de que poucos alunos lêem com frequência, o que faz com que eles tenham um vocabulário empobrecido e lhes falte modelos de argumentos em suas memórias. já a dificuldade de provar tudo o que se sabe é uma característica da condição humana. A todo instante estamos percebendo muito mais coisas do que somos capazes de nomear e de provar. Por fim, o terceiro fator (baixo domínio do conteúdo) é também natural, visto que a álgebra é um conteúdo novo.

Todos esses fatores tomados em conjunto explicam a recusa dos alunos em apresentar suas resoluções. Contudo, sabemos da importância da apresentação de um conteúdo nos processos de ensino-aprendizado: expressar o que se pensa ajuda a organizar os pensamentos, encontrar falhas no pensamento e compartilha o conhecimento com os colegas. Então, quando o adolecente deixa de apresentar, ele necessariamente deixa de aprender. Ademais, as recusas aconteceram nos últimos dias de aula, o que podemos concluir que os alunos estavam cansados das aulas, o que nos leva a um questionamento importante: será que o problema também não estava na metodologia e nos problemas em si? Exploraremos essa questão no tópico abaixo.

8.7.2 Problemas internos à proposta pedagógica associados ao baixo engajamento

Partindo das externalidades mencionadas acima, agora olhemos para a forma com que a metodologia de ensino-aprendizagem foi empregada. Primeiramente, observando as aulas e os relatos de experiência, salta aos olhos a dificuldade de engajar o grupo a trabalhar em algum problema. Contudo, talvez os problemas não fossem apenas externos à proposta pedagógica. Muitas vezes os alunos trabalhavam somente enquanto o professor observava o grupo. Dito de outra maneira: em muitos casos, os alunos só realizaram a atividade quando a presença do professor os “constrangeu” a isso. Tal percepção nos faz supor que a metodologia seria mais eficaz em uma turma com menos alunos, talvez em grupos de estudo, do que na sala de aula regular do Ensino Fundamental.[59]

[59] Seria possível discutir ainda, com base em inúmeros autores, o tema da crise civilizacional do ocidente, que cria uma crise de sentido, que é uma das causas da epidemia de depressão, que é por sua vez uma das causas da falta de interesse dos jovens pelo estudo. Ora, se o jovem não quer viver, certamente também não quer estudar. No entanto optamos por não aprofundar ainda mais o tópico do desinteresse e também não queremos tocar em temas sensíveis.

Associado às diferentes propostas sobre a participação do professor nos processos de resolução dos problemas, surge uma nova pergunta: o que é melhor para o aprendizado dos alunos? Que pensem sozinhos até conseguirem resolver o problema ou que haja constantes intervenções do professor para dar orientações e reduzir o tempo gasto em um exercício? Por um lado, a intervenção pode causar uma certa preguiça por parte do aluno, ou ainda, causar uma certa dependência do aluno com o professor, de modo que ele não fará nada sozinho. Por outro lado, deixar o aluno sozinho pode significar permanecer uma aula inteira em um problema simples, deixar de avançar nos conteúdos e conhecimentos e ainda gerar frustração em alguns e até a perda do interesse em matemática. Não temos uma resposta clara para isso. A melhor resposta para o professor parece ser usar o bom senso, sabendo que muitas vezes o professor cometerá na hora da intervenção.

Além disso, será que no afã de dar protagonismo aos alunos, a metodologia também não tenha falhado em demandar demais desses alunos, de esperar que desenvolvessem e apresentassem respostas? Parece que sim, pelo menos em parte. Analisemos primeiramente a metodologia de resolução de problemas ,que visa dar protagonismo aos estudantes, colocando problemas interessantes, que buscam despertar o interesse para a aula do professor e permitir que o aluno construa suas próprias hipóteses e ideias. Isso até aconteceu, pois frequentemente vimos alunos que durante o ano letivo não se interessavam pelas aulas de matemática (não copiavam nem resolviam as atividades) envolvidos com os problemas propostos. No entanto, também depois de um tempo, entre trinta minutos e uma hora, esses alunos perdiam o interesse por algum motivo. Esse motivo deve ser algum dos fatores explorados acima. Além disso, ainda que a metodologia de resolução de problemas proponha que devamos estimular os alunos a resolver problemas para aprender matemática, muitos deles não tiveram interesse em protagonizar essas resoluções, e estavam mais interessados em ver o professor ou os colegas explicando. Dito de um outro modo, os problemas até despertaram interesse, o que foi positivo, mas não o suficiente para fazê-los protagonizar essas resoluções.

Associado a essa dificuldade, talvez a metodologia empregada nessa proposta tenha tido uma falha grave. Carmem Cessa (2009) sugere que o professor entregue aos alunos um problema por aula para a discussão. Os alunos podem receber o mesmo problema para discutir ou problemas diferentes para partilhar. No entanto, em nossa pesquisa, queríamos observar o maior número de alunos para saber se a teoria e a prática dialogam, como dissemos no início deste capítulo, isto é, queríamos observar a abstração ocorrendo e ver se a teoria nos proporcionou um ferramental teórico capaz de produzir uma boa proposta didática para o ensino da abstração. Desse modo, é possível que tenhamos dado problemas demais e/ou não bem selecionados aos alunos.

Por fim, nesse processo de mea culpa, falta refletir se a causa para a desistência estava na seleção dos problemas. Pensando agora, parece que, ao menos em parte, a resposta é: sim, ainda que também tenhamos tido algum êxito nas escolhas. Comecemos destacando o que funcionou. Alguns alunos destacaram ter gostado de resolver problemas com sequências (conforme o relato da experiência). As atividades de resolução de problemas com sequências parecem atrair mais o interesse dos alunos do que outros tipos de problemas. Associado a isso, parece que ao apresentarmos os problemas de sequências começando por alguns de fácil compreensão e resolução (como no caso de "desenhe o próximo termo") incentiva os alunos a tentar, o que os leva a entender a função da variável de forma natural. Mesmo os alunos do grupo A, que demonstraram pouco interesse em resolver até mesmo os itens mais simples da problema, se interessaram pela explicação posterior e entenderam o que foi explicado.

Mas, como já dito, muitos alunos não se interessaram. Em muitos casos, houve problemas de interpretação dos enunciados. Talvez se os problemas fossem escritos com uma linguagem mais coloquial ou contextualizada, os alunos demonstrariam maior interesse em resolvê-los. Além disso, podemos pensar que alguns problemas são muito difíceis para o nível dos alunos. Assim, embora o tipo de problema seja adequado para o desenvolvimento das habilidades algébricas desejadas, eles deveriam começar com questões mais simples. Por exemplo, introduzir a generalização de sequências através de uma sequência de triângulos ou quadrados feitos de palitos não adjacentes, solicitando que contassem os palitos, dessa forma, o termo geral da sequência seria $P=3n$, para os triângulos (ou $P=4n$, para os quadrados), depois passar aos triângulos e quadrados adjacentes.

Feita essa reflexão sobre os resultados práticos da aplicação da metodologia, ainda que tenhamos percebido muitas falhas em nossa concepção, ainda destacamos que a metodologia de resolução de problemas de fato atrai mais o interesse dos alunos do que a aula tradicional. Se tem melhores resultados quanto ao aprendizado, veremos a seguir. No entanto, existem inúmeros fatores para além da questão metodológica (fatores sociais, psicológicos e biológicos) que nenhuma metodologia é capaz de resolver e suplantar. Ademais, conjecturamos que, se a sequência fosse realizada em mais tempo para abordar todos os problemas desejados, com menos alunos e acrescentássemos problemas mais fáceis de modo introdutório, então a aprendizagem dos alunos seria melhor. Isso porque os alunos teriam mais tempo para refletir, o professor teria mais oportunidades de intervir de maneira qualificada e os alunos se sentiriam motivados por resolver problemas mais fáceis, obtendo segurança para expor suas soluções aos colegas e para avançar para problemas mais difíceis.

8.7.3 Deixando de lado o baixo engajamento, a proposta tem algum valor enquanto produto pedagógico a ser melhor desenvolvido?

Encerrada a discussão sobre as causas do baixo engajamento de vários alunos nas aulas e na avaliação propostas, agora investiguemos se ao menos os alunos interessados desenvolveram as habilidades algébricas desejadas para essa proposta: a capacidade de generalização e de escrita algébrica. Em outras palavras, analisemos se há valor nas ideias propostas pela metodologia. (Alguns problemas associados ao baixo engajamento já foram apresentados.)

Pensando sobre isso, olhemos inicialmente o quadro dos acertos da avaliação escrita e percebamos que os itens **e** (que avalia a capacidade de generalização) e **f** (que avalia a capacidade de escrita algébrica) não foram corretamente resolvidos por nenhum aluno. Portanto, nenhum desses objetivos foi plenamente atingido. Mas isso não significa que a proposta tenha falhado completamente. Quando olhamos com atenção vemos que algo foi aprendido. A seguir, vamos descrever o que foi aprendido e as causas do “fracasso” em desenvolver as habilidades algébricas desejadas.

Olhando para as primeiras aulas, fica evidente que os alunos não possuíam nenhum conhecimento prévio de álgebra.[60] Eles possuíam, por assim dizer, apenas

[60] O professor da turma (eu) optou por não iniciar este conteúdo em suas aulas, até a aplicação dessa proposta pedagógica. Isso permite ver melhor o que os alunos aprenderam sobre álgebra, pois se os alunos tivessem sido apresentados a álgebra anteriormente, poderia ser que as respostas refletissem esse conhecimento prévio e não o aprendizado adquirido através desta sequência de aulas.

o raciocínio aritmético para resolver os problemas. Ao passo que, observando as respostas das entrevistas e as respostas da avaliação escrita percebemos um avanço considerável no conhecimento algébrico, sobretudo entre os estudantes membros do grupo B, que era o grupo mais interessado em participar da pesquisa. A seguir temos o quadro de acertos da avaliação escrita do grupo B.

Quadro 9: Quadro-resumo das respostas do grupo B

Questão	Resposta Correta	Parcialmente correta	Resposta Errada	Não respondeu	Habilidade algébrica segundo Kaput
1	2	0	1	1	Explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidade.
2a	3	0	0	1	Explorar propriedades e relações de números inteiros e explorar propriedades das operações com números inteiros,
2b	3	0	0	1	
3a	3	0	0	1	Tratar o número algebricamente e resolver expressões numéricas com número desconhecido.
3b	3	0	0	1	
4a	4	0	0	0	Testar se o aluno entendeu o enunciado do problema
4b	4	0	0	0	
4c	4	0	0	0	Identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.
4d	2	0	2	0	Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos.
4e	0	2	0	2	Descobrir relações funcionais;
4f	0	0	0	4	Simbolizar quantidades

Percebemos facilmente pelo quadro que os alunos interessados, com exceção de um, desenvolveram as habilidades algébricas relacionadas ao pensamento de tipo “aritmética algebrizada” e do “pensamento funcional”. Já o “pensamento de modelação” ainda não foi plenamente desenvolvido. Talvez os alunos precisem de mais tempo para compreender e dominar uma nova linguagem. Assim, fica claro que a metodologia escolhida bem como os exercícios escolhidos não são um fracasso, pois em apenas quatro aulas os alunos interessados avançaram muito no pensamento algébrico. Podemos conjecturar que avançaram mais do que se as aulas fossem conduzidas pelas sequências didáticas apresentadas em livros didáticos.

Vale lembrar que o grupo B esteve ausente na primeira aula com atividades sobre sequências. Podemos conjecturar também que, se estivessem presentes, os alunos teriam um desempenho ainda melhor na avaliação escrita. Apoiando essa conjectura temos as respostas que o grupo ofereceu durante a entrevista, onde se destaca a pergunta “A fórmula para calcular o número de palitos para produzir algum termo da terceira sequência é P=2n+1 ou P=2(n-1)+3, (onde n é número da figura e P é o número de palitos). Como seria a fórmula, se a sequência inicia-se com dois triângulos adjacentes ao invés de apenas um?”. O grupo respondeu P=2(n-1)+5 na segunda pergunta. Isso implica que o grupo identificou o termo independente com a quantidade de palitos na primeira figura. Portanto, o pensamento de modelação está em processo de consolidação. Para que ele esteja consolidado é preciso que o estudante consiga identificar os termos de uma expressão algébrica e consiga produzir uma expressão algébrica.

Além dos bons resultados do grupo B, ainda merece uma menção honrosa outros alunos de outros grupos. No grupo A, composto por 8 alunos, três deles se envolveram com as atividades e ficaram interessados em entender a solução dos problemas. Infelizmente, dois deles não estavam presentes na avaliação escrita e nem na entrevista. Por algum motivo, o terceiro se recusou a responder a avaliação escrita. Algo semelhante aconteceu nos grupos C e D, de modo que, ao todo, tínhamos em torno de 10 a 12 dos 24 alunos interessados ou parcialmente interessados nas aulas. Lamentavelmente, apenas 6 realizaram todas as etapas da pesquisa.

Isso posto, podemos concluir que seria interessante que essa pesquisa fosse continuada em um possível doutorado, onde poderíamos acompanhar mais alunos por mais tempo e em grupos menores. A proposta pedagógica é mais promissora do que os dados deixam evidenciar, mas é necessário ter um olhar mais individualizado para cada aluno.

Voltemos à pergunta inicial. Queríamos saber se a teoria dos capítulos 1 a 6 nos ajudaria a criar uma sequência de atividades capazes de ensinar o pensamento algébrico. Aparentemente, a resposta é positiva ou parcialmente positiva. Em primeiro lugar, pois o quadro de resultados da avaliação escrita mostra uma evolução progressiva dos alunos quanto ao pensamento de aritmética algebrizada e de pensamento funcional, se compararmos com a primeira aula desta sequência de aulas. Não apenas isso, mas a proposta pedagógica atende às teses estudadas nos capítulos da primeira parte do trabalho, conforme mostraremos a seguir.

Para Aristóteles, a abstração depende da memória e sobretudo da imaginação. Podemos dizer que a proposta atende este quesito, pois os problemas abriram novas possibilidades de pensamento (isso também é imaginação) ao mostrar aos alunos que é possível escrever com variáveis, é possível operar com números desconhecidos (como no exercício da balança) e é possível entender o sinal de igualdade como uma relação de equilíbrio.

Para a TCM a abstração depende de quão detalhado é o conhecimento do objeto sobre o qual se dará a abstração. A proposta pedagógica também atende este quesito, pois a primeira aula leva o aluno a se aprofundar nos números inteiros, antes de apresentar a álgebra.

Finalmente, para Piaget, a abstração (matemática) depende de uma construção do sujeito a partir de perguntas e reflexões metacognitivas. Este quesito a proposta pedagógica atende parcialmente. Atendo ao fazer o aluno refletir sobre as propriedades dos números inteiros, mas faltam perguntas que façam refletir sobre os outros processos algébricos. Tais perguntas somente voltam a aparecer nas questões da entrevista.

Também queríamos saber se a observação do trabalho dos alunos confirmava a teoria sobre a abstração.

Vinculando nossa reflexão as teses acima, coloca-se a pergunta: podemos dizer que os alunos que adquiriram conhecimentos algébricos (portanto, abstratos) tinham boa memória, boa imaginação, conhecimento detalhado sobre a aritmética elementar e realizaram reflexões sobre os conceitos e suas ações? Parece que sim, mas não podemos provar isso de forma contundente. Os dados coletados não nos dão essa certeza, no máximo deixam insinuada essa resposta. É o pesquisador (eu) que afirma ter captado de modo sutil pelas falas, olhares, gestos, enfim, pelo ser humano integral - que não pode ser descrito em papel - que os alunos com melhores desempenhos tinham todas as características acima citadas. Para que essa tese se confirmasse com rigor científico, seria necessário observar atentamente por mais tempo um conjunto menor de alunos e elaborar um novo questionário com perguntas mais específicas, o que poderia ser feito em um continuação em um doutorado.

CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso percurso até aqui envolveu uma longa pesquisa teórica sobre diferentes entendimentos dos processos de abstração e de suas aplicações teóricas ao ensino da álgebra, especialmente à introdução da linguagem algébrica nos sétimos anos do Ensino Fundamental. No último capítulo deste estudo, arriscamos uma aplicação de uma proposta didática com total consciência de que a mesma havia sido aplicada em condições um tanto adversas e que não nos permitiria produzir muitos resultados conclusivos sobre formas de introduzir a álgebra no Ensino Fundamental. Para encerrar este trabalho, primeiramente retomaremos as questões de pesquisa teórica e prática, com suas respectivas conclusões e resultados, depois passaremos às considerações finais.

O interesse inicial da pesquisa era de entender o processo de abstração de modo abrangente, articulando diversas teorias - integrando filosofia, biologia e psicologia - e então aplicar esse conhecimento ao ensino da álgebra. Assim sendo, convém retomar o que foi dito sobre a abstração e suas principais aplicações sem, contudo, refazer toda a discussão, a qual pode ser lida nas páginas anteriores.

Usamos a definição de abstração de Abbagnano segundo o qual a abstração é “a operação mediante a qual alguma coisa é escolhida como objeto de percepção, atenção, observação, consideração, pesquisa, estudo, etc. e isolada de outras coisas com que está numa relação qualquer.” Nesse sentido, Aristóteles distingue entre abstração científica, matemática e metafísica e destaca a importância da memória e da imaginação para a abstração. A TCM, por sua vez, salienta que é fundamental que o objeto sobre o qual se dará a abstração seja conhecido de modo detalhado. Por fim, Jean Piaget, ressalta que existe a abstração empírica, pseudo-empírica e reflexionante refletida e que a abstração reflexionante refletida é um processo que opera sobre as ações do sujeito.

Também sobre a matemática e o ensino de matemática, as três abordagens estudadas têm algo a contribuir. Primeiramente, Aristóteles tem uma filosofia interessante sobre o que é matemática. Essa filosofia nos permite concluir que a matemática possui aspectos inventados e descobertos. Isso tem uma aplicação direta, ainda que nem sempre fácil: os aspectos inventados se beneficiam de uma metodologia diretiva e expositiva, mas os aspectos descobertos se beneficiam de metodologias ativas, como a resolução de problemas. Além disso, as ciências cognitivas contribuem para o ensino de matemática ao ressaltar que existem habilidades primárias e secundárias[61]. A implicação pedagógica é que as habilidades primárias se beneficiam de atividades lúdicas, mas as habilidades secundárias -ainda que possam ter um elemento de ludicidade - somente podem ser adquiridas mediante esforço repetido. Para finalizar, Jean Piaget e Steven Pinker concordam que um conceito novo e mais complexo em matemática só pode ser aprendido quando o conceito de base, que é mais simples, está automatizado, isto é, quando o conceito foi dominado com tal perícia que ele, o estudante, o realize sem precisar pensar muito sobre o conceito.

Depois, já na parte dois deste trabalho, estamos interessados em produzir e selecionar uma sequência de problemas capazes de desenvolver a capacidade de generalização e a escrita algébrica. Para isso, passamos ao estudo do ensino da álgebra onde James Kaput e Radford se destacam. Suas contribuições para descrever, respectivamente, o pensamento algébrico em si e a evolução do domínio da linguagem algébrica foram fundamentais para a construção da proposta pedagógica e da sua avaliação. Lembremos que Kaput divide o pensamento algébrico em aritmética algebrizada, pensamento funcional e modelação. Radford, por sua vez, descreve a evolução do domínio da linguagem algébrica em pensamento factual, pensamento contextual e pensamento padrão.

Ainda em uma análise teórica, mas já direcionada à prática, estudamos a BNCC e o que ela diz sobre a o ensino de álgebra e sobre a abstração. Vimos que a BNCC tem o mérito de introduzir elementos de álgebra desde o primeiro ano do Ensino Fundamental, mas nem todas as facetas do pensamento algébrico - os quais foram detalhados por Kaput e por Radford - estão presentes nas habilidades da BNCC. Além disso, a BNCC diz pouco sobre a abstração matemática.

Finalmente, chegamos à descrição da proposta pedagógica, sua aplicação e a análise dos dados. Concluímos que a proposta se mostrou insuficiente para produzir o resultado esperado, isto é, desenvolver a capacidade de generalização e de escrita algébrica. Isso se deu por vários motivos. Primeiramente, como discutido anteriormente, os estudantes estão menos engajados com o aprendizado em geral, mas não se trata apenas disso. Identificamos também problemas inerentes à própria

[61] As habilidades primárias são herdadas naturalmente pela evolução, já as habilidades secundárias não são herdadas e precisam ser incorporadas na natureza humana. Andar e falar são exemplos de habilidades primárias e ler e escrever de habilidades secundárias.

proposta: pouco tempo e problemas difíceis estão entre as principais causas para o parco resultado obtido na avaliação escrita.

No entanto, podemos encontrar pontos positivos a destacar nesta proposta pedagógica. O mais importante deles é que, ainda que a capacidade de generalização e de escrita algébrica não tenha sido plenamente alcançada, a proposta se mostrou capaz de desenvolver o pensamento funcional e de aritmética algebrizada. Portanto, suspeitamos que, se a proposta for redesenhada com mais aulas, menos problemas por aulas e com mais problemas de dificuldade intermediária, então os resultados desejados seriam alcançados. Então, a proposta tem valor para o professor de Ensino Fundamental que deseja desenvolver habilidades algébricas em seus estudantes, desde que o professor faça as alterações e adaptações necessárias à sua realidade docente.

Considerações finais

Feito esse percurso, podemos dizer por fim que o presente trabalho se preocupou em buscar bases sólidas para os conceitos desenvolvidos. Buscamos na filosofia aristotélica, nas ciências cognitivas (TCM) e nos estudos de psicologia de Piaget respostas abrangentes para os processos de desenvolvimento pelos jovens das suas capacidades de abstração. Após essa fundamentação teórica, buscamos compreender o pensamento algébrico a partir das contribuições pedagógicas mais atuais - dando destaque em primeiro lugar ao pensamento de James J. Kaput e em segundo lugar ao pensamento de Louis Radford. Somou-se a isso uma pesquisa sobre as orientações legais na BNCC e PCN's, para produzir uma proposta pedagógica segundo a metodologia de resolução de problemas capaz de desenvolver a capacidade de generalização e de escrita algébrica. Com a pesquisa (observação dos alunos enquanto resolvem os problemas, entrevistas com grupos focais e avaliação escrita), concluímos que a metodologia de resolução de problemas é uma metodologia que atrai o interesse de mais alunos do que a metodologia tradicional e permite que eles construam seus conhecimentos de forma autônoma. Concluímos ainda que os exercícios escolhidos segundo a teoria de base são capazes de conduzir o estudante a desenvolver os diferentes aspectos do pensamento algébrico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia.** Tradução de Alfredo Bosi e Ivone Castilho Benedetti. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, J. R. Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. 200 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Recife, 2016.

ALMEIDA, Manoel de Campos. Como o cérebro do matemático funciona: uma introdução à neurociência da matemática avançada. [S.l.]: [s.n.], [2020]. Disponível em:https://ppl-ai-file-upload.s3.amazonaws.com/web/direct-files/attachments/68357350/8f08fef0-e613-4354-a871-b002c9fb0bc1/COMO-O-CEREBRO-DO-MATEMATICO-FUNCIONA.pdf. Acesso em: 19 maio 2025.

ARISTÓTELES. Categorias. Tradução de José Veríssimo Teixeira da Mata. 2.ed. São Paulo. Martin Claret. 2010

________. **Metafísica**. Tradução de Edson Bini. 1.ed. Bauru, SP: Edipro. 2006.

________. **Da Alma**. Tradução de Edson Bini. 1.ed. São Paulo: Edipro. 2011.

BECKER, Fernando. Abstração pseudo-empírica e reflexionante: significado epistemológico e educacional. **Schème: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. Marília, SP. Vol. 6, Unesp (2014), p. 104-128,** 2014. https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/scheme/article/view/4276/3105

________. **Epistemologia do professor de matemática**. 1. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

BENTLEY, Peter J. **A história da inteligência artificial para quem tem pressa**. São Paulo: Valentina, 2025.

BLACKBURN, Simon (Ed.). **Dicionário Oxford de filosofia**. Tradução de Desidério Murcho et al. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1997.

BONADIMAN, Adriana. Álgebra no ensino fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas. 2007. 298 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

BOUTROUX, Émile. **Aristóteles**. São Paulo: Vide Editorial, 2017. ISBN 9788595072091.

BRASIL. Lei Federal n. 8069, de 13 de julho de 1990. ECA _ Estatuto da Criança e do Adolescente

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB. 9394/1996.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

CESSA, Carmen. Iniciação ao estudo didático da álgebra: origens e perspectivas. Local de publicação: Editora SM, 2009. 112 p.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Divulgados os resultados do PISA 2022. Brasília, DF: INEP, 2023. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/centrais-de-conteudo/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022. Acesso em: 16/08/2025.

JAEGER, Werner Wilhelm. **Paideia**: a formação do homem grego. Tradução de Artur

M. Parreira. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. **Novos ensaios sobre o entendimento humano**. Tradução de Luiz João Baraúna. 1. ed. São Paulo: Nova Cultural, 2004.

LEMBKE, Anna. **Nação dopamina.** Tradução de Elisa Nazarim. São Paulo: Vestígio, 2021.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, manipulação e aplicações: os três componentes do ensino da Matemática. Revista do Professor de Matemática, n. 41, p. 1-6, 1999. Disponível em: https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/pdf/rpm41.pdf. Acesso em: 24 set. 2025.

LIMA, Maria Vanísia Mendonça de; BORGES NETO, Hermínio. As variadas concepções de Álgebra no contexto da Educação Matemática. Educação Matemática Debate, Montes Claros (MG), v. 7, n. 13, p. 1-23, 2023. DOI: 10.46551/emd.v7n13a15. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9174408.pdf. Acesso em: 24 set. 2025.

LINS, Rômulo Campos. O modelo teórico dos campos semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. Rev. Dynamis, v.1 nº.7, 1994a, p. 29-39.

MANIKA, Lenita Gomes Barbosa. SCHNAIDER, Lilian Lima Bonfim Costa. SILVA. Diego da. DA INFÂNCIA À ADOLESCÊNCIA: EXPLORANDO A CRISE EXISTENCIAL DA TRANSIÇÃO. Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação, ano, volume, número, páginas, data. Disponível em: https://periodicorease.pro.br/rease/article/download/17143/9642/41747. Acesso em: 18 ago. 2025.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; PAVANELLO, Regina Maria. A abstração reflexionante e a produção do conhecimento matemático. *Bolema*, Rio Claro (SP), ano 21, n. 30, p. 111-130, 2008. Disponível em: https://ppl-ai-file-upload.s3.amazonaws.com/web/direct-files/attachments/68357350/31f51dce-49f0-46e3-bf97-752a14b63a1a/A-Abstracao-Reflexionante-e-a-Producao-do-Conhecimento-Matematico.pdf. Acesso em: 7 maio 2025.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: https://ppl-ai-file-upload.s3.amazonaws.com/web/direct-files/attachments/68357350/8ac28230-1f43-4783-a588-f99eb8cba069/Onuchic-e-Allevato-Resolucao-de-Problemas.pdf. Acesso em: 7 maio 2025.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 68. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2021. 328 p. ISBN 978-65-5548-027-6.

PIAGET, Jean. **A epistemologia genética: sabedoria e ilusões da filosofia; problemas de psicologia genética**. Tradução de Nathanael C. Caixeiro, Zilda Abujamra Daeir, Célia E. A. Di Piero. São Paulo: Abril Cultural, 1978. (Os Pensadores).

PIAGET, J. **A psicologia da inteligência**. Tradução de Egléa de Alencar. Rio de Janeiro: Vozes, 2013.

PIAGET, J. **O nascimento da inteligência na criança**. Tradução de Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar, 1966.

PINKER, Stephen. **Como a mente funciona?** Rio de Janeiro: Companhia das Letras, 1997.

PLATÃO. **Platão**. Coordenação editorial: Janice Florido. São Paulo: Nova Cultural, 2004. (Os Pensadores).

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J.; BRANCO, N.; MATOS, A. Álgebra no Ensino Básico. Ministério da Educação, Portugal. Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC). Portugal, 2009.

REALE, Giovanni. **História da filosofia ocidental: volume 1 – Filosofia pagã antiga**. 8. ed. São Paulo: Paulus, 2003.

FEUERSTEIN, Reuven. FEUERSTEIN, Rafael S. FALIK, Louis H. **Além da inteligência: aprendizagem mediada e a capacidade de mudança no cérebro.** Traducção: Aline Kaeler. 5.ed. Petrópolis, RJ. Editora Vozes. 2014

ROCHA, Kátia Coelho da; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; NOTARE, Márcia Rodrigues. Abordagens teóricas entre o Pensamento Computacional e a abstração reflexionante. *Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 18, n. 2, p. 580-590, dez. 2020. Disponível em: https://ppl-ai-file-upload.s3.amazonaws.com/web/direct-files/attachments/68357350/cad26406-fa9c-4bac-a5b7-56c55805a042/rocha-basso.pdf. Acesso em: 7 maio 2025.

SIMPLÍCIO, Henrique Augusto Torres. HAASE, Vitor Geraldi. **Pedagogia do fracasso: o que as ciências cognitivas têm a dizer sobre a aprendizagem?** 1.ed. Belo Horizonte. Editora Ampla. 2020.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE PEDIATRIA. O desenvolvimento do adolescente. São Paulo: SBP, 2019. Disponível em: https://www.sbp.com.br/fileadmin/user_upload/O_Desenvolvimento_do_Adolescente_-_18_09_2019_-_Final.pdf. Acesso em: 18 ago. 2025.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. As idéias da álgebra. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2003, p. 9-22.

TEIXEIRA JUNIOR, Vinicius Pazuch; SILVEIRA, Marcia Regina Abrahão da. O ensino de álgebra e a filosofia de Wittgenstein: sobre regras e essência. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 29-49, 2019. DOI: 10.23925/1983-3156.2019vol21i3p29-49. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/43603. Acesso em: 24 set. 2025.

ANEXOS

Anexo 1: Proposta Pedagógica com soluções

AULA 1: Explorando relações e propriedades de números inteiros

Problemas

1. Resolva os seguintes problemas de criptaritmética:

a. (OBMEP 2015 - ADAPTADA) ABA - CA = AB

b. ABC x 3 = CCC

(Criptaritmética é um tipo de problema matemático que consiste em esconder parcial ou totalmente os algarismos de um conta, substituindo-os por símbolos - geralmente letras. Em geral, cada letra representa um, e apenas um, algarismo. Ou seja, letras iguais representam números iguais, e letras diferentes representam números diferentes. O objetivo é descobrir o valor de cada letra ou de alguma letra específica.)

Soluções:

a. 101-91=10

b. 185x3=555

Este problema foi escolhido para possibilitar ao aluno perceber e descobrir relações entre números inteiros, a saber A-A=0, então B=0. Além disso, fazer perceber que 3x5=15, ou seja, preserva-se o dígito das unidades.

2. Encontre três números consecutivos cuja soma seja igual a 123.

a. Explique como seu grupo resolveu esse problema.

b. Como podemos representar a soma de quaisquer três números consecutivos em apenas uma frase matemática?

Solução: 40+41+42=123.

a. Resposta pessoal. Espera-se que a resposta seja por tentativa e erro, dado que há conhecimento algébrico prévio. Uma solução mais sofisticada seria 123/3=41 é o termo médio. Assim temos 41+41+41. Depois pensar em retirar uma unidade do primeiro 41 (para formar o primeiro número) e adicioná-lo ao terceiro 41 (para formar o último número) obtendo 40, 41 e 42.

b. n+(n+1)+(n+2). Com essa questão inicia-se o desenvolvimento do pensamento de modelação.

Se espera que, com essa questão, os alunos explorem relações de números e desenvolvam sua capacidade de generalização e de escrita algébrica.

3. Zé das Couves recebeu seu salário do mês. Seu patrão lhe deu 33 notas, algumas são de R$100,00 outras de R$10,00 totalizando o valor de seu salário que é de R$1320,00.

a. Quantas notas de R$100,00 e quantas notas de R$10,00 Zé das Couves recebeu de seu patrão?
b. Explique como seu grupo resolveu esse problema.
c. Como essa situação poderia ser representada usando até duas frases matemáticas?

Solução:

a. Foram entregues 11 notas de 100 reais e 22 notas de 10 reais.
b. Resposta pessoal. Possivelmente a solução será alcançada por tentativa e erro.
c. x+y=33, 10x+100y=1320, onde x representa o número de notas de 10 reais e y representa a quantidade de notas de 100 reais.

Nesta questão, espera-se o mesmo que na questão anterior.

4. (OBMEP 2019 - ADAPTADA) Qual é a diferença entre a soma dos números ímpares e dos números pares de 1 a 2019?

a. Como o grupo resolveu o problema?
b. Quais as propriedades dos números que mais foram utilizadas na resolução?

Solução: (1+3+5+7+...+2017+2019) - (2+4+6+...+2016+2018) = 1+(3-2)+(5-4)+...+(2019-2018) = 1+1+1+1+...+1 (2010 vezes) =2010.

Espera-se com esta questão, que os alunos usem as propriedades dos números inteiros e depois reflitam sobre essas propriedades. No item a, espera-se que consigam descrever o procedimento em palavras. No item b, espera-se que os alunos tomem consciência das propriedades de associatividade e comutatividade dos números inteiros.

AULA 2: Explorando relações de igualdade.

Lista de problemas da aula 2

1. (OBMEP 2019) Qual é o número que está escondido pelo borrão?

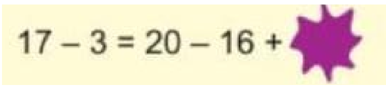


Figura 1. Extraída da prova da obmep disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm

a. Como essa situação pode ser representada sem usar o borrão?

Soluções:

O número escondido atrás do borrão é o 10, pois 17-3=14 e 20-16+10=14.

a. 17-3=20-16+B onde B indica o número escondido pelo borrão.

Este problema foi escolhido para despertar nos alunos a noção de igualdade como relação entre números e assim, perceber que a igualdade representa mais do que um sinal de indicação de resultado, bem como desenvolver a capacidade de modelação.

2. (OBMEP 2015) Nas balanças há sacos de areia de mesmo peso e tijolos idênticos. Quanto deve marcar a última balança?

Figura 2. Extraída da prova da obmep disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm

a. Como o seu grupo resolveu o problema? Existe um modo de resolver o problema sem calcular o peso individual dos tijolos e dos sacos de areia?
b. Seja T o peso dos tijolos e A o peso dos sacos de areia. Como podemos representar cada balança?

Soluções:

A última balança marca 23kg.

a. É possível resolver este problema por tentativa e erro, tentando descobrir o peso de cada objeto, mas espera-se que o aluno perceba que basta remover dois sacos de areia e um tijolo (41kg) da primeira balança para obter o peso da última balança. Portanto, temos 64-42=23 kg.

b. Balança 1: T+T+A+A+A=64 ou 2T+3A=64. Balança 2: T+A+A=41 ou T+2A=41. Balança 3: T+A=23

Este problema foi escolhido para desenvolver a capacidade de resolver expressões com números desconhecidos e a capacidade de modelação.

3. Encontre, se possível, 3 números ímpares cuja soma seja 100.

a. Como podemos representar um número par qualquer?
b. Como podemos representar um número ímpar qualquer?
c. Como podemos representar a situação descrita acima?

Soluções:

Não é possível encontrar 3 números ímpares cuja soma seja 100. De fato, sejam 2a-1, 2b-1 e 2c-1 três primos quaisquer com a,b e c números inteiros. Assim temos (2a-1)+(2b-1)+(2c-1)=100. Logo temos 2(a+b+c)=97. Portanto a+b+c=97/2, o que é absurdo, pois a soma de números inteiros é um número inteiro.

a. Podemos representar um número par qualquer como 2n, com n inteiro.
b. Podemos representar um número ímpar qualquer como 2n-1, com n inteiro.
c. Podemos representar a soma de três números ímpares quaisquer como (2a-1)+(2b-1)+(2c-1) com a,b e c números inteiros.

Este problema foi escolhido para desenvolver as relações entre números inteiros, especialmente as relações associadas à paridade dos números bem como desenvolver a capacidade de modelação.

4. Nos quatro problemas abaixo, cada símbolo representa um número e símbolos iguais representam números iguais.

A) 📎+📎+📎=36 📎+❤+📎=30 ❤+❤+❤+📎=?	B)🔔+🔔=32 🌰+🌰=🔔+🔔+🔔 🌰+🌰+🌰+🔔=?
C) ♦+📐=14 📐+♦+♦+♦=32 ♦+♦+📐+📐+📐=?	D) A+A+B=11 A+B+B=13 A+A+A+B+B+B=? A+B=? A=? B=?

a. Encontre o valor de cada símbolo.
b. Como seu grupo resolveu cada problema?
c. Como podemos representar cada linha de cada problema com uma expressão matemática diferente e mais simples do que a expressão utilizada?

Soluções:

A) 📎=12 ❤=6 ❤+❤+❤+📎= 30 x+x+x=36 ou 3x=36 x+y+x=30 ou 2x+y=20 y+y+y+x=30 ou 3y+x=30	B)🔔=16 🌰=24 🌰+🌰+🌰+🔔=88 s+s=32 ou 2s=32 c+c=s+s+s ou 2c=3s c+c+c+s=88 ou 3c+s=88
C) ♦=9 📐=5 ♦+♦+📐+📐+📐=33 C) l+r=14 r+l+l+l=32 ou r+3l=32 l+l+r+r+r=33 ou 2l+3r=33	D) A+A+A+B+B+B=24 A+B=8 A=3 B=5 2A+B=11 A+2B=13 3A+3B=24 A+B=8 A=3 B=5

Este conjunto de problemas foi escolhido para desenvolver a capacidade de modelação. Além disso, cada problema tem uma particularidade. O primeiro é útil para introduzir o conjunto, sendo um problema fácil. O segundo problema explora a igualdade como relação. O terceiro e o quarto problema desenvolvem a capacidade de resolver expressões com números desconhecidos. Pois, se ♦+📐=14 e (📐+♦)+♦+♦=32, então 14+♦+♦=32 e o problema se resolve facilmente. Da mesma maneira, se A+A+B=11 A+B+B=13, podemos somar as duas equações e obter (A+A+B)+(A+B+B)=A+A+A+B+B+B=11+13=24. Além disso, (A+B)+(A+B)+(A+B)=24, logo A+B=8 e o problema se resolve facilmente a partir disso.

AULA 3: Desenvolver habilidades do pensamento algébrico funcional através da resolução de problemas em sequências.

Problema 1 - Extraído e adaptado de
https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando um quadrado novo na fileira de cima e um quadrado na fileira de baixo.

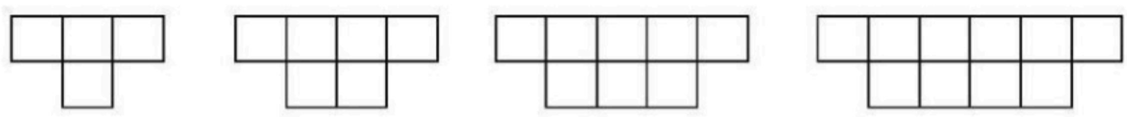


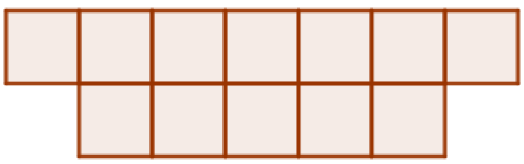
Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. Desenhe a figura 5
2. Complete a tabela a seguir:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados						

3. Quantos quadrados haverá na figura 10?
4. Quantos quadrados haverá na figura 100?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.
7. Qual figura terá 84 quadrados?
8. Alguma figura terá 65 quadrados? Se sim, qual? Se não, justifique.

Soluções:

1. 

2.

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados	4	6	8	10	12	14

3. Na 10ª figura há 22 quadrados.
4. Na 100ª figura há 202 quadrados. Espera-se que o estudante perceba que o npúmero de quadrados na parte de baixo da figura é o mesmo número da figura, e na parte de cima há dois quadrados a mais do que na parte de baixo. Assim o centésimo figura terá 100+100+2=202 quadrados.
5. Para calcular o número de quadrados em qualquer figura, tome o número da figura, multiplique por dois e depois adicione dois quadrados.
6. Q=2n+2, onde Q é o número de quadrados e n é o número da figura.

Problema 2 - Extraído e adaptado de
https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando dois quadrados novos na fileira de cima e dois quadrados novos na fileira de baixo, mantendo um quadrado centralizado entre as duas fileiras.

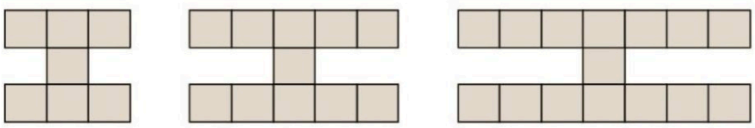


Figura 1 Figura 2 Figura 3

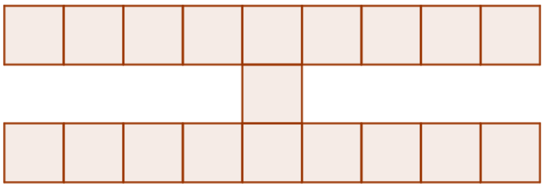
1. Desenhe a figura 4
2. Complete a tabela a seguir:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados						

3. Quantos quadrados haverá na figura 10?
4. Quantos quadrados haverá na figura 100?

5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.

Soluções:

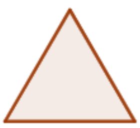
1. 
2.

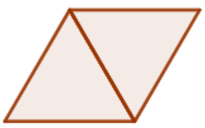
Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados	7	11	15	19	23	27

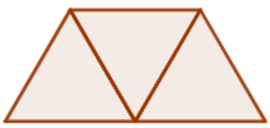
3. Na 10ª figura há 43 quadrados.
4. Na 100ª figura há 403 quadrados. Espera-se que o aluno perceba que a figura tem um "núcleo" de três quadrados e ela possui quatro braços e o número de quadrados em cada braço é o número da figura.
5. Para calcular o número de quadrados em qualquer figura, multiplique o número da figura por 4 e depois some 3.
6. $Q=4n+3$, onde Q representa o número de quadrados e n representa o número da figura.

Problema 3: Extraído e adaptado de Cessa (2009)

A sequência a seguir é formada por triângulos feitos de fósforos. O primeiro termo é feito de um triângulo, o segundo termo é feito de dois triângulos adjacentes, o terceiro é feito de três triângulos adjacentes e assim por diante. Cada lado que pertence a dois triângulos é feito de apenas um fósforo.


1º termo


2º termo


3º termo

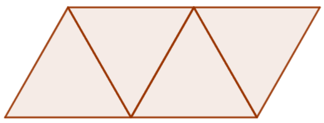
Responda:

1. Desenhe o 4º termo dessa sequência.
2. Complete a tabela a seguir:

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Número de palitos						

3. Quantos palitos são usados para compor o 10º termo?
4. Quantos palitos são usados para compor o 100º termo?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de palitos de fósforos sabendo o número do termo da sequência.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de palitos de fósforos, sabendo o número do termo da sequência.

Soluções.

1. 
2.

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Número de palitos	3	5	7	9	11	13

3. O décimo termo é composto por 21 palitos.
4. O décimo termo é composto por 201 palitos.
5. Para encontrar o número de palitos de um termo qualquer multiplique o número da figura por dois, depois adicione um palito.
6. P=2n+1, onde P é o número de palitos e n é o número do termo da figura.

Problema 4. Extraído e adaptado de Cessa (2009)

Considere a sequência de quadrados brancos dividida em quadradinhos menores de tamanhos iguais. Ao redor os lados de cada quadrado da sequência, são desenhados novos quadrados coloridos, como na imagem abaixo

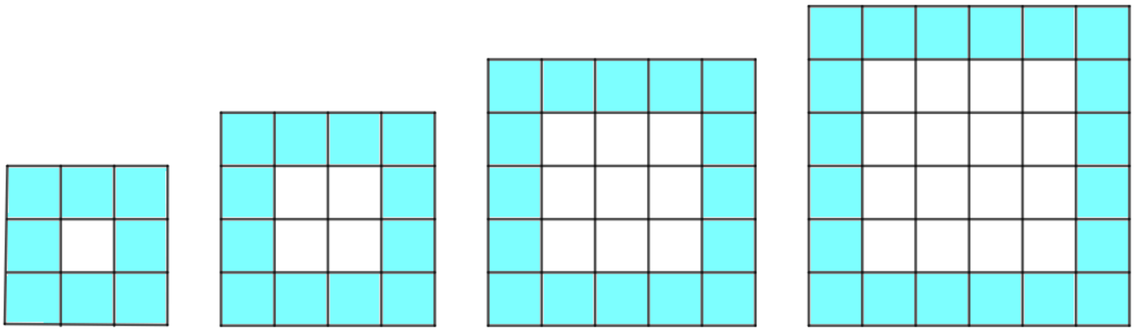


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. Descreva com palavras como a sequência cresce num?
2. Quantos quadradinhos coloridos temos no 5º, 6º e 7º termo da sequência?
3. Complete a tabela a seguir.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	7
Número de quadrados pintados							

4. Quantos quadradinhos coloridos temos no 10º termo da sequência?
5. Quantos quadradinhos azuis temos no 100º termo da sequência?
6. Descreva em palavras como você resolveu a questão anterior.
7. Faça um desenho que represente o modo que você resolveu a questão.
8. Escreva um passo a passo para calcular o número de quadrados azuis, se conhecermos o número da figura.

b. Escreva uma expressão algébrica que permita calcular o número de quadrados coloridos, se conhecermos o número da figura.

Soluções:

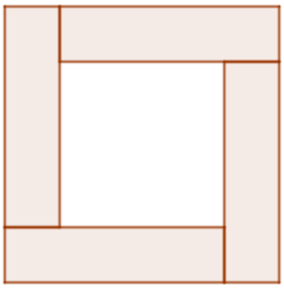
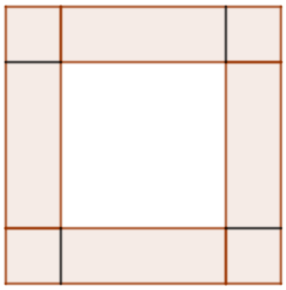
1. A sequência cresce como descrito no enunciado. Numericamente, cada termo tem quatro quadrados coloridos a mais do que a figura anterior.
2. O quinto termo tem 24 quadrados coloridos, o sexto termo tem 28 e o sétimo termo tem 32 quadrados coloridos.
3.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	7
Número de quadrados pintados	8	12	16	20	24	28	32

4. O décimo termo tem 44 quadrados coloridos.

5. O centésimo termo tem 404 quadrados coloridos.
6. Há diversas maneiras de contar os quadrados coloridos e resolver o problema anterior. Espera-se que os alunos apresentem modos diferentes de alcançar o mesmo resultado. A seguir temos algumas possibilidades:
   i. É possível dividir a parte pintada em quatro blocos de 101 quadrados.
   ii. Também é possível encontrar a quantidade de quadrados coloridos pela diferença entre a quantidade de quadrados totais e a quantidade de quadrados brancos.
   iii. Outra possibilidade é dividir a parte pintada em quatro blocos de 100 quadrados e adicionar os quadrados dos cantos.
   iv. Por fim, é possível dividir a parte pintada em quatro blocos de 102 quadrados (incluindo os cantos) e remover os quatro quadrados repetidos.

7. Alguns desenhos que representam a forma de contar o número de quadrados coloridos são

 ou 

8. Assim como no item 6, há muitos modos de resolver essa questão. A seguir, temos algumas possibilidades.
   i. Tome o número da figura, adicione 1 unidade e depois multiplique por 4.
   ii. Tome o número da figura adicionado de duas unidades, eleve ao quadrado e depois subtraia o quadrado do número da figura.
   iii. Tome o número da figura, multiplique por 4 e depois adicione 4 quadrados, representando os quatro cantos do quadrado.
   iv. Tome o número da figura adicionado de 2 unidades, multiplique por quatro e depois subtraia 4 unidades.

c. Seja Q o número de quadrados coloridos e n o número da figura. As seguintes fórmulas representam modos de calcular Q em função de n. $Q=4(n+1)$, $Q=(n+2)^2-n^2$, $Q=4n+4$ e $Q=4(n+2)-4$.

AULA 4: A Descoberta de Gauss

Conta-se que Carl Friedrich Gauss, ainda criança com cerca de 10 anos de idade, surpreendeu seu professor ao resolver rapidamente um problema que deveria ocupar a turma por muito tempo: calcular a soma de todos os números de 1 a 100. Enquanto seus colegas começaram a somar laboriosamente 1 + 2 + 3 + 4 + ..., o jovem Gauss percebeu um padrão engenhoso. Ele observou que poderia agrupar os números em pares: o primeiro com o último (1 + 100 = 101), o segundo com o penúltimo (2 + 99 = 101), o terceiro com o antepenúltimo (3 + 98 = 101), e assim sucessivamente. Como existem 50 pares, cada um somando 101, a resposta seria simplesmente 50 × 101 = 5.050. Esta descoberta não apenas demonstrou o talento precoce de Gauss, mas também ilustrou a beleza do pensamento matemático, mostrando como a observação de padrões pode transformar um cálculo tedioso em uma solução simples e elegante. O método de Gauss revela a essência do pensamento algébrico: a capacidade de generalizar e encontrar fórmulas que funcionem para qualquer situação similar.

Agora resolva os seguintes problemas.

a. Use a mesma ideia para calcular a soma dos números de 1 a 1000.
b. Tente escrever uma expressão que calcula a soma dos números de 1 a n, onde n é um número natural qualquer.
c. Tente escrever uma expressão que calcule a soma dos pares de 2 a 2n, onde n é um número natural qualquer.
d. Imagine uma sequência de número onde p é o primeiro número, u é o último número, n é a quantidade de números e cada número dessa sequência, com exceção do primeiro número é o anterior somado com r. Por exemplo, os números 3, 10, 17, 24, 31, 38 é uma sequência desse tipo, onde p=3, u=38, r=7 e n=6. Escreva em função de p,u,n e r uma fórmula para calcular a soma dos termos dessa sequência.

Espera-se com este exercício que os alunos desenvolvam a capacidade de modelação. O item a testa se o aluno entendeu a ideia de Gauss. O item b pede que o aluno escreva uma fórmula, como foi feito na aula anterior. O item c e d se propõe a desenvolver a capacidade de generalizar a fórmula do item b. A seguir, apresentamos as respectivas soluções.

a. (1+1000).500=500500
b. (1+n).n/2
c. (2+2n).n/2 ou (1+n).n. A primeira versão apenas aplica 2 e 2n na fórmula anterior. A segunda versão pode surgir se o aluno olhar o problema como uma duplicação do item a, pois todo número par é a soma de um número consigo mesmo.
d. (p+u).n/2

Avaliação

E.M.E.B. JOÃO DE BARRO

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Canoas 10 Anos

Prof. Cássio Volpato Selbach

INSTRUÇÕES:

1. **O objetivo desta avaliação é determinar quais conceitos algébricos foram desenvolvidos nas últimas aulas, por isso ela é anônima. Dessa forma, ela não vale nota para a disciplina de matemática.**
2. **Caso alguma questão te deixe desconfortável, você pode pular a questão ou encerrar a avaliação, se preferir.**
3. Responda essa avaliação com caneta azul ou preta.
4. Esta avaliação é individual e sem consulta.

QUESTÕES

1. Qual número devemos colocar no lugar do X a fim de que a afirmação $36 \div 3 = 10 - 2 + X$ se torne uma afirmação verdadeira?

Solução: X=4, pois $36 \div 3 = 12$ e $10 - 2 + 4 = 12$.
Este problema avalia se o aluno desenvolveu a compreensão do sinal de igualdade como um sinal de relação entre dois números.

2. (PORTAL OBMEP) Resolva o seguinte problema de criptaritmética:

X + X + YY = ZZZ

Explique como você resolveu esse problema.

Solução: 6+6+99=111. Este problema avalia se o aluno compreende as relações entre números inteiros. O aluno deve perceber que Z=1, pois a soma de dois números de um algarismo com um número de dois algarismos não pode ser igual a ou maior do que 222, que é um número de três algarismos.

3. No problema a seguir, cada letra representa um número de tal forma que letras iguais representam números iguais.

$$A+B=70$$

$$B+A+B=100$$

a. Encontre o valor de cada letra (A e B).
b. Como você resolveu o item anterior?

Solução: A=40 e B=30. Este problema avalia se o aluno desenvolveu a capacidade de resolver expressões com números desconhecidos. O aluno deve pensar que se A+B=70 e B+A+B=100, então B+70=100. Logo B=30. Portanto A=40.

4. A sequência a seguir é formada por quadrados feitos de fósforos. O primeiro termo é feito de um quadrado, o segundo termo é feito de dois quadrados, o terceiro é feito de três quadrados e assim por diante. Cada lado que pertence a dois quadrados é feito de apenas um fósforo.

1º termo 2º termo 3º termo

Responda:

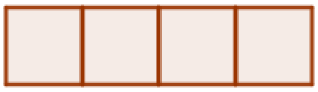
a. Desenhe o 4º termo.
b. Preencha a tabela a seguir.

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Número de palitos								

c. Descreva com palavras como o número de palitos aumenta em cada termo da sequência.

d. Quantos palitos são usados para compor o 26º termo?
e. Escreva um passo a passo que permita calcular o número de palitos de fósforos sabendo o número do termo da sequência.
f. Escreva uma expressão algébrica que permita calcular o número de palitos de fósforos, sabendo o número do termo da sequência.

Solução:

a. 

b.

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Número de palitos	4	7	10	13	16	19	22	25

c. Cada termo tem três palitos a mais do que o termo anterior.
d. O 26º termo tem 79 palitos.
e. Para calcular o número de palitos de qualquer termo da sequência, tome o número do termo, multiplique por três e depois some uma unidade.
f. $P=3n+1$, onde P é o número de palitos e n é o número do termo da sequência.

Anexo 2: Proposta Pedagógica sem soluções

AULA 1: Explorando relações e propriedades de números inteiros.

Problemas

1. Resolva os seguintes problemas de criptaritmética:
   a. (OBMEP 2015 - ADAPTADA) ABA - CA = AB
   b. ABC x 3 = CCC

(Criptaritmética é um tipo de problema matemático que consiste em esconder parcial ou totalmente os algarismos de um conta, substituindo-os por símbolos - geralmente letras. Em geral, cada letra representa um, e apenas um, algarismo. Ou seja, letras iguais representam números iguais, e letras diferentes representam números diferentes. O objetivo é descobrir o valor de cada letra ou de alguma letra específica.)

2. Encontre três números consecutivos cuja soma seja igual a 123.
   a. Explique como seu grupo resolveu esse problema.
   b. Como podemos representar a soma de quaisquer três números consecutivos em apenas uma frase matemática?

3. Zé das Couves recebeu seu salário do mês. Seu patrão lhe deu 33 notas, algumas são de R$100,00 outras de R$10,00 totalizando o valor de seu salário que é de R$1320,00.
   a. Quantas notas de R$100,00 e quantas notas de R$10,00 Zé das Couves recebeu de seu patrão?
   b. Explique como seu grupo resolveu esse problema.
   c. Como essa situação poderia ser representada usando até duas frases matemáticas?

4. (OBMEP 2019 - ADAPTADA) Qual é a diferença entre a soma dos números ímpares e dos números pares de 1 a 2019?
   a. Como o grupo resolveu o problema?
   b. Quais as propriedades dos números que mais foram utilizadas na resolução?

AULA 2: Explorando relações de igualdade.

1. (OBMEP 2019) Qual é o número que está escondido pelo borrão?

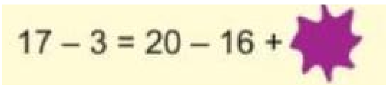


Figura 1. Extraída da prova da obmep disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm

   a. Como essa situação pode ser representada sem usar o borrão?

2. (OBMEP 2015) Nas balanças há sacos de areia de mesmo peso e tijolos idênticos. Quanto deve marcar a última balança?

Figura 2. Extraída da prova da obmep disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm

   a. Como o seu grupo resolveu o problema? Existe um modo de resolver o problema sem calcular o peso individual dos tijolos e dos sacos de areia?
   b. Seja T o peso dos tijolos e A o peso dos sacos de areia. Como podemos representar cada balança?

3. Encontre, se possível, 3 números ímpares cuja soma seja 100.
   a. Como podemos representar um número par qualquer?
   b. Como podemos representar um número ímpar qualquer?
   c. Como podemos representar a situação descrita acima?

4. Nos quatro problemas abaixo, cada símbolo representa um número e símbolos iguais representam números iguais.

A) 📎+📎+📎=36 📎+❤+📎=30 ❤+❤+❤+📎=?	B)🔔+🔔=32 🌰+🌰=🔔+🔔+🔔 🌰+🌰+🌰+🔔=?
C) ♦+📐=14 📐+♦+♦+♦=32 ♦+♦+📐+📐+📐=?	D) A+A+B=11 A+B+B=13 A+A+A+B+B+B=?

	A+B=? A=? B=?

a. Encontre o valor de cada símbolo.
b. Como seu grupo resolveu cada problema?
c. Como podemos representar cada linha de cada problema com uma expressão matemática diferente e mais simples do que a expressão utilizada?

AULA 3: Desenvolver habilidades do pensamento algébrico funcional através da resolução de problemas em sequências.

Problema 1 - Extraído e adaptado de
https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando um quadrado novo na fileira de cima e um quadrado na fileira de baixo.

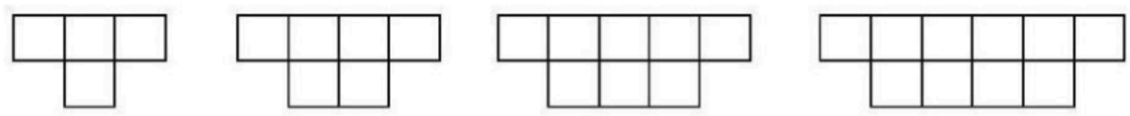


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. Desenhe a figura 5
2. Complete a tabela a seguir:

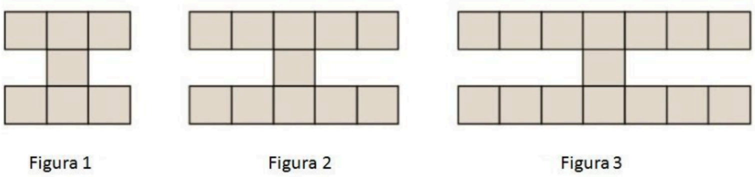
Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados						

3. Quantos quadrados haverá na figura 10?
4. Quantos quadrados haverá na figura 100?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.
7. Qual figura terá 84 quadrados?

8. Alguma figura terá 65 quadrados? Se sim, qual? Se não, justifique.

Problema 2 - Extraído e adaptado de https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando dois quadrados novos na fileira de cima e dois quadrados novos na fileira de baixo, mantendo um quadrado centralizado entre as duas fileiras.



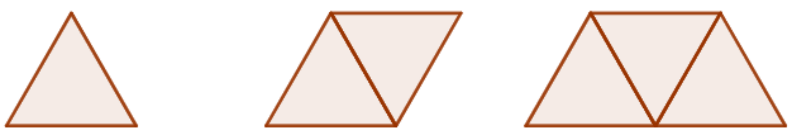
1. Desenhe a figura 4
2. Complete a tabela a seguir:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados						

3. Quantos quadrados haverá na figura 10?
4. Quantos quadrados haverá na figura 100?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.

Problema 3: Extraído e adaptado de Cessa (2009)

A sequência a seguir é formada por triângulos feitos de fósforos. O primeiro termo é feito de um triângulo, o segundo termo é feito de dois triângulos adjacentes, o terceiro é feito de três triângulos adjacentes e assim por diante. Cada lado que pertence a dois triângulos é feito de apenas um fósforo.



1º termo 2º termo 3º termo

Responda:

1. Desenhe o 4º termo dessa sequência.
2. Complete a tabela a seguir:

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Número de palitos						

3. Quantos palitos são usados para compor o 10º termo?
4. Quantos palitos são usados para compor o 100º termo?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de palitos de fósforos sabendo o número do termo da sequência.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de palitos de fósforos, sabendo o número do termo da sequência.

Problema 4. Extraído e adaptado de Cessa (2009)

Considere a sequência de quadrados brancos dividida em quadradinhos menores de tamanhos iguais. Ao redor os lados de cada quadrado da sequência, são desenhados novos quadrados coloridos, como na imagem abaixo

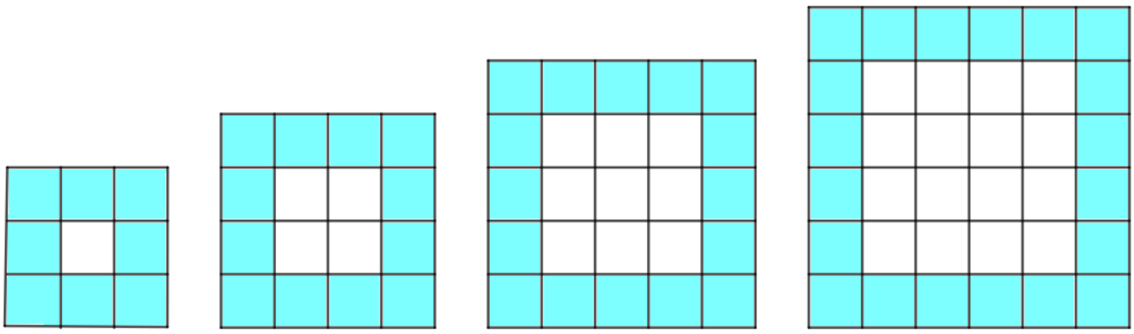


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. Descreva com palavras como a sequência cresce num?
2. Quantos quadradinhos coloridos temos no 5º, 6º e 7º termo da sequência?
3. Complete a tabela a seguir.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	7

Número de quadrados pintados							

4. Quantos quadradinhos coloridos temos no 10º termo da sequência?
5. Quantos quadradinhos azuis temos no 100º termo da sequência?
6. Descreva em palavras como você resolveu a questão anterior.
7. Faça um desenho que represente o modo que você resolveu a questão.
8. Escreva um passo a passo para calcular o número de quadrados azuis, se conhecermos o número da figura.
9. Escreva uma expressão algébrica que permita calcular o número de quadrados coloridos, se conhecermos o número da figura.

AULA 4: A Descoberta de Gauss

Conta-se que Carl Friedrich Gauss, ainda criança com cerca de 10 anos de idade, surpreendeu seu professor ao resolver rapidamente um problema que deveria ocupar a turma por muito tempo: calcular a soma de todos os números de 1 a 100. Enquanto seus colegas começaram a somar laboriosamente 1 + 2 + 3 + 4 + ..., o jovem Gauss percebeu um padrão engenhoso. Ele observou que poderia agrupar os números em pares: o primeiro com o último (1 + 100 = 101), o segundo com o penúltimo (2 + 99 = 101), o terceiro com o antepenúltimo (3 + 98 = 101), e assim sucessivamente. Como existem 50 pares, cada um somando 101, a resposta seria simplesmente 50 × 101 = 5.050. Esta descoberta não apenas demonstrou o talento precoce de Gauss, mas também ilustrou a beleza do pensamento matemático, mostrando como a observação de padrões pode transformar um cálculo tedioso em uma solução simples e elegante. O método de Gauss revela a essência do pensamento algébrico: a capacidade de generalizar e encontrar fórmulas que funcionem para qualquer situação similar.

Agora resolva os seguintes problemas.

a. Use a mesma ideia para calcular a soma dos números de 1 a 1000.
b. Tente escrever uma expressão que calcula a soma dos números de 1 a n, onde n é um número natural qualquer.
c. Tente escrever uma expressão que calcule a soma dos pares de 2 a 2n, onde n é um número natural qualquer.

d. Imagine uma sequência de número onde p é o primeiro número, u é o último número, n é a quantidade de números e cada número dessa sequência, com exceção do primeiro número é o anterior somado com r. Por exemplo, os números 3, 10, 17, 24, 31, 38 é uma sequência desse tipo, onde p=3, u=38, r=7 e n=6. Escreva em função de p,u,n e r uma fórmula para calcular a soma dos termos dessa sequência.

Avaliação

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Canoas

Prof. Cássio Volpato Selbach

INSTRUÇÕES:

1. **O objetivo desta avaliação é determinar quais conceitos algébricos foram desenvolvidos nas últimas aulas, por isso ela é anônima. Dessa forma, ela não vale nota para a disciplina de matemática.**
2. **Caso alguma questão te deixe desconfortável, você pode pular a questão ou encerrar a avaliação, se preferir.**
3. Responda essa avaliação com caneta azul ou preta.
4. Esta avaliação é individual e sem consulta.

QUESTÕES

1. Qual número devemos colocar no lugar do X a fim de que a afirmação $36 \div 3 = 10 - 2 + X$ se torne uma afirmação verdadeira?

2. (PORTAL OBMEP) Resolva o seguinte problema de criptaritmética:

X + X + YY = ZZZ

Explique como você resolveu esse problema.

3. No problema a seguir, cada letra representa um número de tal forma que letras iguais representam números iguais.

A+B=70

B+A+B=100

a. Encontre o valor de cada letra (A e B).
b. Como você resolveu o item anterior?

4. A sequência a seguir é formada por quadrados feitos de fósforos. O primeiro termo é feito de um quadrado, o segundo termo é feito de dois quadrados, o terceiro é feito de três quadrados e assim por diante. Cada lado que pertence a dois quadrados é feito de apenas um fósforo.

1º termo 2º termo 3º termo

Responda:

a. Desenhe o 4º termo.
b. Preencha a tabela a seguir.

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Número de palitos								

c. Descreva com palavras como o número de palitos aumenta em cada termo da sequência.
d. Quantos palitos são usados para compor o 26º termo?
e. Escreva um passo a passo que permita calcular o número de palitos de fósforos sabendo o número do termo da sequência.
f. Escreva uma expressão algébrica que permita calcular o número de palitos de fósforos, sabendo o número do termo da sequência.

ANEXO 3 - TALE

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL – IFRS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPPI
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa intitulado: "**UM ESTUDO SOBRE A ABSTRAÇÃO APLICADO AO ENSINO DA ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma proposta com problemas e sequências.**". Seus pais/responsáveis concordaram com a sua participação. Se você quiser participar, vamos te explicar como será essa pesquisa. Se você não quiser participar, não tem problema, não vai ter nenhum prejuízo para você ou para os seus pais.

Este projeto está vinculado ao Mestrado Profissional em Matemática em Nível Nacional PROFMAT pela instituição Instituto Federal do Rio Grande do Sul. Nessa pesquisa pretendemos descobrir como ensinar melhor o conteúdo de matemática que tem a ver com álgebra.

A pesquisa será feita na própria escola, na sua sala de aula e deverá durar em torno de uma a duas semanas através de observações, testes e entrevistas. Para a coleta de dados serão utilizadas sua participação em aula, suas respostas em um teste e, para alguns, uma entrevista. A sua participação será fotografada apenas para o uso na pesquisa e ela poderá ser divulgada na dissertação de mestrado que será produzida. As fotos serão feitas de tal modo que os rostos não apareçam.

A sua participação na pesquisa pode ter alguns riscos, por exemplo, as atividades podem gerar alguma ansiedade ou uma certa vergonha de responder as atividades no quadro. Entretanto, você pode desistir da pesquisa a hora que quiser e as as apresentações no quadro serão em grupo. Caso seja necessário, você poderá ser encaminhado(a) para o SOE a fim de receber o acompanhamento necessário. Além disso, diante de qualquer tipo de questionamento ou dúvida sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato imediato com o pesquisador responsável pelo estudo.

A sua participação na pesquisa poderá ter benefício direto, como aprender de forma mais agradável o conteúdo e desenvolver a capacidade de resolver problemas por isso a importância da sua participação.

As informações e os dados que você informar para esta pesquisa serão mantidos confidenciais, não haverá nenhuma identificação sua ou de sua família. O/A pesquisador(a) se responsabiliza pelos cuidados em preservar a sua identidade e os seus dados.

Os resultados da pesquisa vão ser divulgados no texto da dissertação de mestrado e na defesa para a respectiva banca e, caso a escola João de Barro solicite, será divulgada através de uma palestra na dita escola.

==
===

Concordo em participar da pesquisa intitulada: “**UM ESTUDO SOBRE A ABSTRAÇÃO APLICADO AO ENSINO DA ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma proposta com problemas e sequências.**”.
Recebi uma via assinada e rubricada deste termo de consentimento.

Sapucaia do Sul, ____de _________de __________.

Nome e Assinatura do(a) participante	Nome e Assinatura do(a) pesquisador(a)

Contato do pesquisador:
Nome: Cássio Volpato Selbach
Instituição: Instituto Federal do Rio Grande do Sul
Telefone: 51 981153778
e-mail: cassio.volpato@hotmail.com

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, por favor consulte o
Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) responsável pela avaliação. Um CEP é um colegiado interdisciplinar e independente, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativo, que tem como objetivo defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

CEP/IFRS
E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000
Telefone: (54) 3449-3340

ANEXO 4: TCLE

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL – IFRS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPPI
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PAIS OU RESPONSÁVEIS

Prezado (a) Senhor (a):

Seu filho(a) está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa intitulado: "**UM ESTUDO SOBRE A ABSTRAÇÃO APLICADO AO ENSINO DA ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma proposta com problemas e sequências.**". Este projeto está vinculado ao Mestrado Profissional em Matemática em Nível Nacional PROFMAT pela instituição Instituto Federal do Rio Grande do Sul, campus Canoas. Nessa pesquisa pretendemos descobrir como ensinar os adolescentes a usar as letras na matemática de forma mais agradável e eficiente.

A pesquisa será feita na Escola João de Barro, e deverá durar em torno de duas semanas através de uma série de aulas, um teste ao final e uma entrevista com alunos selecionados. Para a coleta de dados será utilizado/a apenas anotações feitas das observações em aula, do teste aplicado e das resposta da entrevista. A participação do seu/sua representado(a) será fotografada, apenas para o uso na pesquisa a fim de ilustrar como ocorreram as aulas. Nenhum rosto será fotografado; caso seja fotografado um rosto, o mesmo será borrado na fotografia.

A participação na pesquisa pode ter alguns riscos, como um descoforto pelas situações problemas ou uma certa vergonha de responder no quadro para os colegas, mas caso algo assim ocorra, seu filho(a) pode desistir da pesquisa a qualquer momento sem maiores explicações. Além disso os problemas são simples, feitos no caderno usando apenas papel e lápis, sem neecessidade de nenhum outro recuros ou de sair da sala. Ademais, as apresentações serão em grupo, o que evitará a possível vergonha. Caso seja necessário, seu representado poderá ser encaminhado(a) para SOE da escola João de Barro, a fim de receber o acompanhamento necessário. Além disso, diante de qualquer tipo de questionamento ou dúvida sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato imediato com o pesquisador responsável pelo estudo.

A participação na pesquisa poderá ter benefício direto, como aprender um conteúdo importante de forma mais agradáve e de desenvolver a habilidade de resolver problemas, que é fundamental para a vida, por isso a importância da participação do seu representado.

Ao participar desta pesquisa, saiba que você tem direito:

- de retirar o seu consentimento, a qualquer momento, sem que isso traga qualquer prejuízo ao seu representado;

- a não ser identificado e que as informações relacionadas à privacidade são confidenciais;

- de ter acesso às informações em todas as etapas do estudo, bem como aos resultados, ainda que isso possa afetar seu interesse em continuar participando da pesquisa;

- de não ter despesas ou ônus financeiro relacionado à participação nesse estudo;

- de que, caso tenha despesas (e de seu acompanhante, se aplicável) relacionadas à participação na pesquisa, terá direito a compensação material das mesmas;

- de se recusar a responder qualquer pergunta que julgar constrangedora ou inadequada.

- de que serão mantidos todos os preceitos ético-legais durante e após o término da pesquisa, de acordo com a Resoluções 466/2012, 510/2016 e outras do Conselho Nacional de Saúde relacionadas à ética em pesquisa.

==

Concordo em autorizar a participação do meu representado na pesquisa intitulada: **UM ESTUDO SOBRE A ABSTRAÇÃO APLICADO AO ENSINO DA ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma proposta com problemas e sequências.**
Recebi uma via assinada e rubricada deste termo de consentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Sapucaia do Sul, ____de _________de __________.

Nome e Assinatura do(a) responsável	Nome e Assinatura do(a) pesquisador(a)

Contato do pesquisador:
Nome: Cássio Volpato Selbach
Instituição: Instituto Federal do Rio Grande do Sul
Telefone: 51 981153778
e-mail: cassio.volpato@hotmail.com

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, por favor consulte o
Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) responsável pela avaliação. Um CEP é um colegiado interdisciplinar e independente, de relevância pública, de caráter consultivo, deliberativo e educativo, que tem como objetivo defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

CEP/IFRS
E-mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: Rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-000
Telefone: (54) 3449-3340

ANEXO 5: Termo de autorização institucional

<u>TERMO DE AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL</u>

Título da Pesquisa: UM ESTUDO SOBRE A ABSTRAÇÃO APLICADO AO ENSINO DA ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma proposta com problemas e sequências.

Pesquisador principal: Cássio Volpato Selbach

Resumo da pesquisa:

Este é um trabalho sobre a abstração. Ele é dividido em duas partes. A primeira parte é teórica: queremos entender a abstração do ponto de vista biológico, psicológico e metafísico, pois estamos interessados em dar uma resposta tão completa quanto possível às questões relativas ao tema da abstração. Pretendemos responder às perguntas: "qual é a definição de um conceito abstrato?", "qual é a natureza metafísica de um conceito abstrato?", "o que é abstrair?", "quais são os tipos de abstração e que tipos de conceitos eles geram?", "como ocorre o processo de abstração?", "quais são os níveis do pensamento abstrato?" e "quais são as condições humanas para poder acontecer o processo de abstração?". Para responder a essas questões, nos apoiamos nos estudos de Aristóteles, de Steven Pinker e de Piaget.

A segunda parte é interessada na didática da matemática, especificamente na álgebra. Aplicamos os conhecimentos obtidos na parte teórica ao estudo da abstração algébrica. Realizamos uma pesquisa para saber se é possível desenvolver os conceitos de abstração algébrica através da metodologia de resolução de problemas. Para isso, organizamos quatro aulas, onde os alunos serão convidados a resolver problemas aritméticos e algébricos. E também organizamos uma quinta aula para a avaliação. E também organizamos uma quinta aula para a avaliação. Os dados serão coletados através desta avaliação, pelas observações feitas nas quatro aulas e por entrevistas aos alunos em grupos focais. Essas observações serão realizadas utilizando elementos de pesquisa-ação.

Esta pesquisa envolve:

( ) utilização de dados de estudantes/ ou servidores

(x) participação de estudantes/ servidores/ gestores em entrevista ou questionário

(x) outra intervenção (descrever): Observação dos alunos durante as aulas de matemática enquanto realizam suas atividades.

( ) atividade nos campi: ______________________________

Assim, o(s) pesquisador(es) solicitam a disponibilização de:

(x) espaço físico Institucional: sala de aula e sala de vídeo

(   ) documentos ou dados não públicos (descrever):

(   ) outras atividades ou solicitação (descrever):

Eu, Ana Paula Zwetsch Bernardi Motta, responsável da Escola Municipal de Ensino Básico João de Barro, diretora, estou ciente e de acordo com a realização da pesquisa acima descrita, a ser conduzida pelo(s) pesquisador(es) abaixo relacionados.

A partir da documentação anexada na solicitação deste termo (projeto completo, termos e demais documentos pertinentes, fui informado pelo responsável do estudo sobre objetivos, metodologia, riscos e benefícios aos participantes da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

O pesquisador responsável assegura que os dados coletados serão mantidos em absoluto sigilo de acordo com a Resolução do Conselho Nacional de Saúde nº 466/2012, que trata da Pesquisa envolvendo seres humanos e que serão utilizados tão somente para a realização deste estudo. Serão, ainda, observadas na íntegra, as disposições constantes na Lei Geral de Proteção de Dados nº 13.709/2018, no tocante à preservação da confidencialidade de todas as informações pessoais coletadas, que serão utilizadas unicamente para atender à finalidade específica da pesquisa, sendo realizada, sempre que possível, a anonimização de eventuais dados pessoais sensíveis.

Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição participante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos participantes de pesquisa, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Esta autorização está condicionada à aprovação prévia da pesquisa acima citada por um Comitê de Ética em Pesquisa e ao cumprimento das determinações éticas das Resoluções nº 466/2012 ou 510/2016 - Conselho Nacional de Saúde/Ministério da Saúde e suas complementares.

O descumprimento desses condicionamentos assegura-me o direito de retirar minha anuência a qualquer momento da pesquisa.

____

Assinatura e carimbo do responsável institucional

Cargo que ocupa na instituição

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, consultar:

CEP IFRS
E- mail: cepesquisa@ifrs.edu.br
Endereço: rua General Osório, 348, Centro, Bento Gonçalves, RS, CEP: 95.700-086
Telefone: (54) 3449-3340
Pesquisador principal: Cássio Volpato Selbach
E-mail: cassio.volpato@hotmail.com
Telefone: 51 981153778
Demais pesquisadores
Nome:
E-mail:
Telefone:

Obs.: Este documento não autoriza o início da pesquisa, sendo apenas um requisito exigido pelo Comitê de Ética do IFRS para análise do projeto de pesquisa. Sua finalidade é atestar que o gestor do Campus ou Campi do IFRS tem ciência e autoriza a realização do projeto de pesquisa, quando forem cumpridas as instâncias de avaliação ética.