INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
RIO GRANDE DO SUL
CAMPUS CANOAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

CÁSSIO VOLPATO SELBACH

UM ESTUDO SOBRE A ABSTRAÇÃO APLICADO AO ENSINO DA ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: uma proposta com problemas e sequências.

Recurso Educacional

CANOAS
2025

ÍNDICE

1. RESUMO

Este recurso educacional apresenta uma proposta pedagógica para o ensino da álgebra no sétimo ano do Ensino Fundamental, fundamentada no desenvolvimento gradual da capacidade de abstração dos estudantes. A proposta reconhece que a transição da aritmética concreta para o pensamento algébrico abstrato representa um obstáculo significativo para muitos alunos, e por isso estrutura uma sequência de cinco aulas que privilegia a construção progressiva e significativa do conhecimento algébrico.

A metodologia adotada baseia-se na resolução de problemas e em metodologias ativas de aprendizagem, colocando o estudante como protagonista de seu processo de aprendizagem. As atividades foram cuidadosamente selecionadas para desenvolver três aspectos fundamentais do pensamento algébrico: a aritmética generalizada, o pensamento funcional e a modelação matemática. O trabalho está alinhado às competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), particularmente aquelas relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio lógico, à capacidade de investigação e à produção de argumentos convincentes.

A sequência didática inicia com problemas que exploram relações e propriedades dos números inteiros, utilizando criptaritmética e situações-problema que incentivam os alunos a perceberem padrões numéricos. Na segunda aula, o foco se desloca para a compreensão da igualdade como expressão de uma relação entre quantidades, superando a concepção limitada do sinal de igual como mero indicador de resultado. A terceira aula trabalha com sequências geométricas, desenvolvendo a capacidade de generalização. A quarta aula apresenta o método de Gauss para soma de progressões aritméticas, culminando no desenvolvimento de fórmulas gerais. Por fim, a quinta aula propõe uma avaliação formativa que permite verificar quais conceitos e habilidades algébricos foram efetivamente desenvolvidos pelos estudantes durante o processo.

O diferencial desta proposta está em sua abordagem progressiva, que não visa ao treinamento mecânico da manipulação algébrica ou à resolução de equações de primeiro grau, mas sim à abertura da possibilidade mental para que o conhecimento algébrico possa ser desenvolvido de forma significativa. Os problemas favorecem o trabalho cooperativo em grupos e a reflexão sobre os

procedimentos utilizados, permitindo que os alunos vivenciem o processo de abstração de maneira natural e contextualizada.

Neste material, os problemas são apresentados duas vezes. Primeiramente com as respectivas soluções e comentários. Posteriormente, os problemas são apresentados sem soluções ou comentários, prontos para a impressão e aplicação em sala de aula.

Palavras-chave: álgebra, generalização, sequência, abstração.

2. ABSTRACT

This educational resource presents a pedagogical proposal for teaching algebra in seventh grade, based on the gradual development of students' abstraction skills. The proposal recognizes that the transition from concrete arithmetic to abstract algebraic thinking represents a significant obstacle for many students, and therefore structures a five-lesson sequence that prioritizes the progressive and meaningful construction of algebraic knowledge.

The methodology adopted is based on problem-solving and active learning methodologies, placing the student as the protagonist of their own learning process. The activities were carefully selected to develop three fundamental aspects of algebraic thinking: generalized arithmetic, functional thinking, and mathematical modeling. The work is aligned with the competencies and skills outlined in the National Common Curricular Base (BNCC), particularly those related to the development of logical reasoning, investigative skills, and the production of convincing arguments.

The teaching sequence begins with problems that explore relationships and properties of integers, using cryptarithmetic and problem situations that encourage students to perceive numerical patterns. In the second lesson, the focus shifts to understanding equality as an expression of a relationship between quantities, overcoming the limited conception of the equal sign as a mere indicator of a result. The third lesson works with geometric sequences, developing the ability to generalize. The fourth lesson presents Gauss's method for adding arithmetic progressions, culminating in the development of general formulas. Finally, the fifth lesson proposes a formative assessment that allows students to verify which algebraic concepts and skills were effectively developed during the process.

The uniqueness of this proposal lies in its progressive approach, which does not aim at mechanically training algebraic manipulation or solving first-degree equations, but rather at opening the mental possibilities for meaningful algebraic knowledge development. The problems encourage cooperative group work and reflection on the procedures used, allowing students to experience the abstraction process in a natural and contextualized way.

In this material, the problems are presented twice. First, with their respective solutions and comments. Then, the problems are presented without solutions or comments, ready for printing and classroom use.

Keywords: algebra, generalization, sequence, abstraction.

Proposta Pedagógica

3. JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS

O conhecimento algébrico constitui um dos pilares fundamentais da educação matemática, servindo como ferramenta essencial para a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento, a formulação de leis e relações matemáticas, e o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. Sua importância transcende os limites da matemática, permitindo aos estudantes modelar situações do cotidiano, compreender padrões e regularidades, e desenvolver habilidades de abstração e generalização que são cruciais para o pensamento científico. A álgebra também funciona como uma linguagem universal que possibilita a comunicação precisa de relações quantitativas e a resolução sistemática de problemas complexos.

No entanto, para estudantes do sétimo ano, o primeiro contato formal com a álgebra frequentemente representa um obstáculo significativo no aprendizado matemático. A transição da aritmética concreta para o pensamento algébrico abstrato, marcada pela introdução de letras e símbolos para representar quantidades desconhecidas ou variáveis, pode gerar ansiedade, insegurança e resistência ao aprendizado. Esta dificuldade inicial, se não adequadamente abordada através de metodologias que privilegiam a construção gradual e significativa do conhecimento, pode comprometer não apenas o domínio algébrico, mas todo o desenvolvimento matemático subsequente do estudante. Portanto, torna-se essencial implementar estratégias pedagógicas que favoreçam uma introdução progressiva e contextualizada às habilidades, competências e conceitos algébricos.

Nosso objetivo para esta sequência é abrir a possibilidade mental para que o conhecimento dos conceitos e procedimentos algébricos possam ser desenvolvidos. Assim sendo, dentre os vários objetivos possíveis, selecionamos os seguintes para a proposta pedagógica: desenvolver a capacidade de generalizar e de atribuir sentido às sentenças algébricas. De modo mais específico listamos:

a. explorar propriedades e relações entre números inteiros;
b. explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidade;
c. tratar o número algebricamente;
d. resolver expressões numéricas com número desconhecido;
e. simbolizar quantidades e relações;
f. prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos e
g. identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.

Para isso, separamos duas aulas para trabalhar o aspecto da aritmética generalizada (para desenvolver os objetivos a, b, c e d) e duas aulas para trabalhar o pensamento funcional (para desenvolver os objetivos e, f e g) e o pensamento de modelação será desenvolvido em todas as aulas. Isso implica que não é o objetivo dessa proposta o treinamento da manipulação algébrica, nem resolver equações do primeiro grau, nem representar dados em um gráfico. Ou seja, o objetivo da sequência de atividades é abrir a possibilidade de um conhecimento algébrico significativo. Tal conhecimento deverá ser expandido a posteriori com outras aulas que não serão exploradas nesta pesquisa. Além disso, acreditamos que a metodologia de resolução de problemas trará o ganho de desenvolver as seguintes habilidades gerais.

1. Desenvolver nos alunos o raciocínio lógico;
2. Desenvolver nos alunos o controle da impulsividade;
3. Desenvolver nos alunos a criatividade para formular soluções;
4. Fazer os alunos trabalharem em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com o objetivo de solucionar as tarefas propostas e, posteriormente, generalizar os resultados obtidos;

4. COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC

Segundo a BNCC, o ensino de matemática deve:

> “2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. (...) 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Nesse sentido, esta proposta pedagógica atende às seguintes habilidades:

(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

5. METODOLOGIA

As aulas são estruturadas com o intuito de dar protagonismo aos alunos utilizando metodologias ativas de aprendizagem. Para esta proposta, a metodologia de resolução de problemas é a mais adequada. Ela será aplicada nas quatro aulas. Por fim, em um quinto encontro, será destinada a uma avaliação.

A dinâmica de cada aula será a seguinte: no primeiro dia, os alunos formarão quatro grupos que deverão permanecer juntos até o final da pesquisa. Nas aulas 1, 2 e 3 serão projetados para os alunos quatro problemas distintos, um de cada vez. Todos os alunos serão convidados a resolver todos os problemas em respectivos grupos. O professor acompanhará um grupo por vez enquanto este grupo resolve o problema que estiver sendo projetado no momento, anotando o que for de interesse para a pesquisa. Após o grupo resolver o problema, o grupo é convidado a resolver no quadro o problema. Após a resolução no quadro, os colegas são convidados a darem sugestões e soluções alternativas. Depois é projetado o próximo problema e o professor acompanhará outro grupo em sua discussão que, após resolver o novo problema, é convidado a apresentar a sua solução, de tal modo que ao final da aula o professor tenha acompanhado e observado todos os grupos e cada grupo tenha a oportunidade de comunicar à turma a sua solução.

Na aula 4, essa dinâmica é diferente. Os alunos serão convidados a resolver um problema de forma individual, mas podendo trocar ideias com o professor. Na quinta aula ocorrerá uma avaliação individual em que o aluno poderá mostrar quais habilidades desenvolveu nesse período.

Por fim, a avaliação individual seleciona e adapta exercícios das aulas anteriores focando nas habilidades algébricas mais importantes.

6. **DETALHAMENTO DAS AULAS**

DURAÇÃO DAS AULAS: Dois períodos de 55 minutos, aproximadamente.

AULA 1: Explorando relações e propriedades de números inteiros

Objetivos específicos

1. aprender a representar situações do quotidiano em linguagem algébrica a lidar com os símbolos algébricos no contexto de incógnitas.
2. Desenvolver nos alunos a consciência de relações e propriedades dos números inteiros;

0 - 10 min: Organização da turma em grupos e chamada.
10 - 20 min: Distribuição dos problemas, explicação da tarefa e leitura do seguinte texto: **"Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento".**
20 - 00 min: resolução dos problemas.
90 - 110 min: apresentação das soluções, discussão, perguntas e encerramento.

Problemas

1. Resolva os seguintes problemas de criptaritmética:
    a. (OBMEP 2015 - ADAPTADA) ABA - CA = AB
    b. XYZ x 3 = ZZZ

(Criptaritmética é um tipo de problema matemático que consiste em esconder parcial ou totalmente os algarismos de um conta, substituindo-os por símbolos - geralmente letras. Em geral, cada letra representa um, e apenas um, algarismo. Ou seja, letras iguais representam números iguais, e letras diferentes representam números diferentes. O objetivo é descobrir o valor de cada letra ou de alguma letra específica.)

Soluções:

a. 101-91=10
b. 185x3=555

Este problema foi escolhido para possibilitar ao aluno perceber e descobrir relações entre números inteiros, a saber A-A=0, então B=0. Além disso, fazer perceber que 3x5=15, ou seja, preserva-se o dígito das unidades.

2. Encontre três números consecutivos cuja soma seja igual a 123.

a. Explique como seu grupo resolveu esse problema.
b. Como podemos representar a soma de quaisquer três números consecutivos em apenas uma frase matemática?

Solução: 40+41+42=123.

a. Resposta pessoal. Espera-se que a resposta seja por tentativa e erro, dado que há conhecimento algébrico prévio. Uma solução mais sofisticada seria 123/3=41 é o termo médio. Assim temos 41+41+41. Depois pensar em retirar uma unidade do primeiro 41 (para formar o primeiro número) e adicioná-lo ao terceiro 41 (para formar o último número) obtendo 40, 41 e 42.
b. n+(n+1)+(n+2). Com essa questão inicia-se o desenvolvimento do pensamento de modelação.

Se espera que, com essa questão, os alunos explorem relações de números e desenvolvam sua capacidade de generalização e de escrita algébrica.

3. Zé das Couves recebeu seu salário do mês. Seu patrão lhe deu 33 notas, algumas são de R$100,00 outras de R$10,00 totalizando o valor de seu salário que é de R$1320,00.

a. Quantas notas de R$100,00 e quantas notas de R$10,00 Zé das Couves recebeu de seu patrão?
b. Explique como seu grupo resolveu esse problema.
c. Como essa situação poderia ser representada usando até duas frases matemáticas?

Solução:

a. Foram entregues 11 notas de 100 reais e 22 notas de 10 reais.
b. Resposta pessoal. Possivelmente a solução será alcançada por tentativa e erro.

c. x+y=33, 10x+100y=1320, onde x representa o número de notas de 10 reais e y representa a quantidade de notas de 100 reais.

Nesta questão, espera-se o mesmo que na questão anterior.

4. (OBMEP 2019 - ADAPTADA) Qual é a diferença entre a soma dos números ímpares e dos números pares de 1 a 2019?

a. Como o grupo resolveu o problema?
b. Quais as propriedades dos números que mais foram utilizadas na resolução?

Solução: (1+3+5+7+...+2017+2019) - (2+4+6+...+2016+2018) = 1+(3-2)+(5-4)+...+(2019-2018) = 1+1+1+1+...+1 (2010 vezes) =2010.

Espera-se com esta questão, que os alunos usem as propriedades dos números inteiros e depois reflitam sobre essas propriedades. No item a, espera-se que consigam descrever o procedimento em palavras. No item b, espera-se que os alunos tomem consciência das propriedades de associatividade e comutatividade dos números inteiros.

AULA 2: Explorando relações de igualdade.

Objetivos específicos

1. Desenvolver nos alunos capacidade de escrita algébrica.
2. Desenvolver nos alunos a capacidade de atribuir sentido à escrita algébrica.
3. Desenvolver nos alunos a compreensão da igualdade como expressão de uma relação entre quantidades;
4. Desenvolver nos estudantes a capacidade de tratar o número algebricamente;
5. Desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver expressões numéricas com número desconhecido.

0 - 10 min: Organização da turma em grupos e chamada.

10 - 20 min: Distribuição dos problemas, explicação da tarefa e leitura do seguinte texto: **"Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento"**.

20 - 90 min: resolução dos problemas.

90 - 110 min: apresentação das soluções, discussão, perguntas e encerramento. (Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento)

Lista de problemas da aula 2

1. (OBMEP 2019) Qual é o número que está escondido pelo borrão?

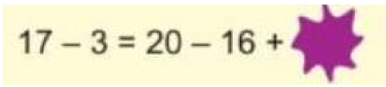


Figura 1. Extraída da prova da obmep disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm

a. Como essa situação pode ser representada sem usar o borrão?

Soluções:

O número escondido atrás do borrão é o 10, pois 17-3=14 e 20-16+10=14.

a. 17-3=20-16+B onde B indica o número escondido pelo borrão.

Este problema foi escolhido para despertar nos alunos a noção de igualdade como relação entre números e assim, perceber que a igualdade representa mais do que um sinal de indicação de resultado, bem como desenvolver a capacidade de modelação.

2. (OBMEP 2015) Nas balanças há sacos de areia de mesmo peso e tijolos idênticos. Quanto deve marcar a última balança?

Figura 2. Extraída da prova da obmep disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm

a. Como o seu grupo resolveu o problema? Existe um modo de resolver o problema sem calcular o peso individual dos tijolos e dos sacos de areia?
b. Seja T o peso dos tijolos e A o peso dos sacos de areia. Como podemos representar cada balança?

Soluções:

A última balança marca 23kg.

a. É possível resolver este problema por tentativa e erro, tentando descobrir o peso de cada objeto, mas espera-se que o aluno perceba que basta remover dois sacos de areia e um tijolo (41kg) da primeira balança para obter o peso da última balança. Portanto, temos 64-42=23 kg.
b. Balança 1: T+T+A+A+A=64 ou 2T+3A=64. Balança 2: T+A+A=41 ou T+2A=41. Balança 3: T+A=23

Este problema foi escolhido para desenvolver a capacidade de resolver expressões com números desconhecidos e a capacidade de modelação.

3. Encontre, se possível, 3 números ímpares cuja soma seja 100.

a. Como podemos representar um número par qualquer?
b. Como podemos representar um número ímpar qualquer?
c. Como podemos representar a situação descrita acima?

Soluções:

Não é possível encontrar 3 números ímpares cuja soma seja 100. De fato, sejam 2a-1, 2b-1 e 2c-1 três primos quaisquer com a,b e c números inteiros. Assim temos (2a-1)+(2b-1)+(2c-1)=100. Logo temos 2(a+b+c)=97. Portanto a+b+c=97/2, o que é absurdo, pois a soma de números inteiros é um número inteiro.

a. Podemos representar um número par qualquer como 2n, com n inteiro.
b. Podemos representar um número ímpar qualquer como 2n-1, com n inteiro.
c. Podemos representar a soma de três números ímpares quaisquer como (2a-1)+(2b-1)+(2c-1) com a,b e c números inteiros.

Este problema foi escolhido para desenvolver as relações entre números inteiros, especialmente as relações associadas à paridade dos números bem como desenvolver a capacidade de modelação.

4. Nos quatro problemas abaixo, cada símbolo representa um número e símbolos iguais representam números iguais.

A) 📎+📎+📎=36 📎+❤+📎=30 ❤+❤+❤+📎=?	B)🔔+🔔=32 🌰+🌰=🔔+🔔+🔔 🌰+🌰+🌰+🔔=?
C) ♦+📐=14	D) A+A+B=11

📐+♦+♦+♦=32 ♦+♦+📐+📐+📐=?	A+B+B=13 A+A+A+B+B+B=? A+B=? A=? B=?

a. Encontre o valor de cada símbolo.
b. Como seu grupo resolveu cada problema?
c. Como podemos representar cada linha de cada problema com uma expressão matemática diferente e mais simples do que a expressão utilizada?

Soluções:

A) 📎=12 ❤=6 ❤+❤+❤+📎= 30 x+x+x=36 ou 3x=36 x+y+x=30 ou 2x+y=20 y+y+y+x=30 ou 3y+x=30	B)🔔=16 🌰=24 🌰+🌰+🌰+🔔=88 s+s=32 ou 2s=32 c+c=s+s+s ou 2c=3s c+c+c+s=88 ou 3c+s=88
C) ♦=9 📐=5 ♦+♦+📐+📐+📐=33 C) l+r=14 r+l+l+l=32 ou r+3l=32 l+l+r+r+r=33 ou 2l+3r=33	D) A+A+A+B+B+B=24 A+B=8 A=3 B=5 2A+B=11 A+2B=13 3A+3B=24 A+B=8 A=3 B=5

Este conjunto de problemas foi escolhido para desenvolver a capacidade de modelação. Além disso, cada problema tem uma particularidade. O primeiro é útil para introduzir o conjunto, sendo um problema fácil. O segundo problema explora a igualdade como relação. O terceiro e o quarto problema desenvolvem a capacidade de resolver expressões com números desconhecidos. Pois, se ♦+📐=14 e (📐+♦)+♦+♦=32, então 14+♦+♦=32 e o problema se resolve facilmente. Da mesma maneira, se A+A+B=11 A+B+B=13, podemos somar as duas equações e obter

(A+A+B)+(A+B+B)=A+A+A+B+B+B=11+13=24. Além disso, (A+B)+(A+B)+(A+B)=24, logo A+B=8 e o problema se resolve facilmente a partir disso.

AULA 3: Explorando a generalização a partir de sequências

Objetivos específicos

1) desenvolver diferentes estratégias e raciocínios para a resolução dos problemas propostos;

2) trabalhar em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com o objetivo de solucionar as tarefas propostas;

3) desenvolver a capacidade de escrever os procedimentos utilizados na solução das situações propostas;

4) aprender a lidar com os símbolos algébricos, tanto no contexto de incógnitas, quanto de variáveis, dando sentido a cada um deles.

5) aprender a representar uma situação com fórmulas algébricas

Como os problemas são semelhantes, e servem para desenvolver principalmente a capacidade de generalização e de escrita algébrica, escreveremos apenas as soluções dos problemas após cada um deles, sem maiores observações. Os itens a e b destinam-se a saber se o aluno entendeu como a sequência cresce. Os itens c e d destinam-se a fazer o estudante encontrar uma solução que não necessite de contar todos os termos para chegar no centésimo termo, ou seja, destina-se a desenvolver o salto da generalização. Os itens e e f destinam-se a desenvolver a capacidade de escrita algébrica. Segundo a classificação de Radford, o item e desenvolve o pensamento contextual e o item f desenvolve o pensamento algébrico padrão.

0 - 10 min: Organização da turma em grupos e chamada.

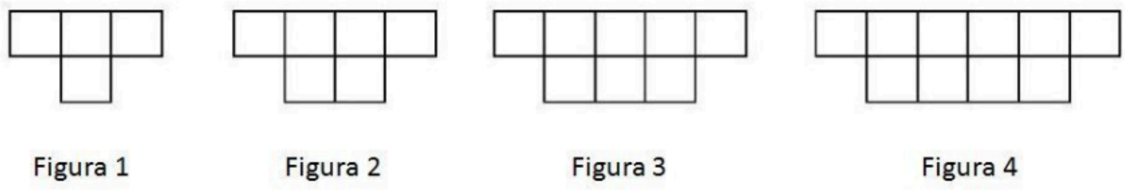
10 - 20 min: Distribuição dos problemas, explicação da tarefa e leitura do seguinte texto: **“Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento”.**

20 - 90 min: resolução dos problemas.

90 - 110 min: apresentação das soluções, discussão, perguntas e encerramento. (Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento)

Problema 1 - Extraído e adaptado de
https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando um quadrado novo na fileira de cima e um quadrado na fileira de baixo.

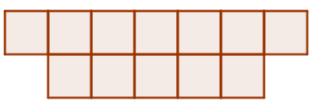


1. Desenhe a figura 5
2. Complete a tabela a seguir:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados						

3. Quantos quadrados haverá na figura 10?
4. Quantos quadrados haverá na figura 100?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.
7. Qual figura terá 84 quadrados?
8. Alguma figura terá 65 quadrados? Se sim, qual? Se não, justifique.

Soluções:

1. 

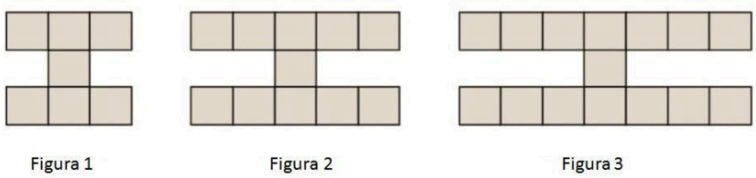
2.

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados	4	6	8	10	12	14

3. Na 10ª figura há 22 quadrados.
4. Na 100ª figura há 202 quadrados. Espera-se que o estudante perceba que o npumero de quadrados na parte de baixo da figura é o mesmo número da figura, e na parte de cima há dois quadrados a mais do que na parte de baixo. Assim o centésimo figura terá 100+100+2=202 quadrados.
5. Para calcular o número de quadrados em qualquer figura, tome o número da figura, multiplique por dois e depois adicione dois quadrados.
6. Q=2n+2, onde Q é o número de quadrados e n é o número da figura.

Problema 2 - Extraído e adaptado de
https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando dois quadrados novos na fileira de cima e dois quadrados novos na fileira de baixo, mantendo um quadrado centralizado entre as duas fileiras.



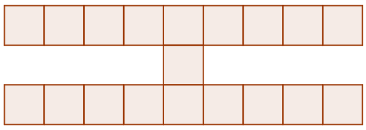
1. Desenhe a figura 4
2. Complete a tabela a seguir:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados						

3. Quantos quadrados haverá na figura 10?
4. Quantos quadrados haverá na figura 100?

5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.

Soluções:

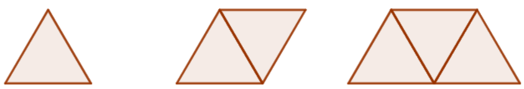
1. 
2.

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados	7	11	15	19	23	27

3. Na 10ª figura há 43 quadrados.
4. Na 100ª figura há 403 quadrados. Espera-se que o aluno perceba que a figura tem um "núcleo" de três quadrados e ela possui quatro braços e o número de quadrados em cada braço é o número da figura.
5. Para calcular o número de quadrados em qualquer figura, multiplique o número da figura por 4 e depois some 3.
6. Q=4n+3, onde Q representa o número de quadrados e n representa o número da figura.

Problema 3: Extraído e adaptado de Cessa (2009)

A sequência a seguir é formada por triângulos feitos de fósforos. O primeiro termo é feito de um triângulo, o segundo termo é feito de dois triângulos adjacentes, o terceiro é feito de três triângulos adjacentes e assim por diante. Cada lado que pertence a dois triângulos é feito de apenas um fósforo.



1º termo 2º termo 3º termo

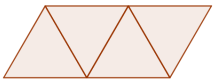
Responda:

1. Desenhe o 4º termo dessa sequência.
2. Complete a tabela a seguir:

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Número de palitos						

3. Quantos palitos são usados para compor o 10º termo?
4. Quantos palitos são usados para compor o 100º termo?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de palitos de fósforos sabendo o número do termo da sequência.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de palitos de fósforos, sabendo o número do termo da sequência.

Soluções.

1. 
2.

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Número de palitos	3	5	7	9	11	13

3. O décimo termo é composto por 21 palitos.
4. O décimo termo é composto por 201 palitos.
5. Para encontrar o número de palitos de um termo qualquer multiplique o número da figura por dois, depois adicione um palito.
6. P=2n+1, onde P é o número de palitos e n é o número do termo da figura.

Problema 4. Extraído e adaptado de Cessa (2009)

Considere a sequência de quadrados brancos dividida em quadradinhos menores de tamanhos iguais. Ao redor os lados de cada quadrado da sequência, são desenhados novos quadrados coloridos, como na imagem abaixo:

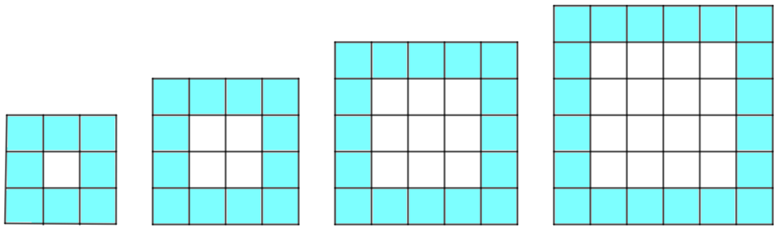


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. Descreva com palavras como a sequência cresce num?
2. Quantos quadradinhos coloridos temos no 5º, 6º e 7º termo da sequência?
3. Complete a tabela a seguir.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	7
Número de quadrados pintados							

4. Quantos quadradinhos coloridos temos no 10º termo da sequência?
5. Quantos quadradinhos azuis temos no 100º termo da sequência?
6. Descreva em palavras como você resolveu a questão anterior.
7. Faça um desenho que represente o modo que você resolveu a questão.
8. Escreva um passo a passo para calcular o número de quadrados azuis, se conhecermos o número da figura.

a. Escreva uma expressão algébrica que permita calcular o número de quadrados coloridos, se conhecermos o número da figura.

Soluções:

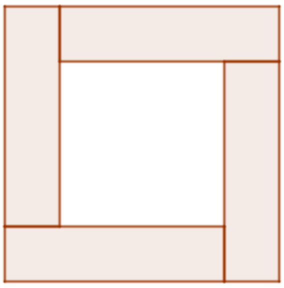
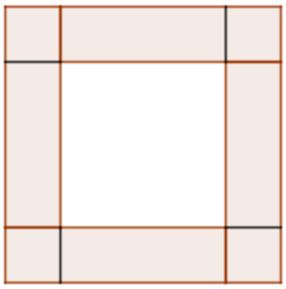
1. A sequência cresce como descrito no enunciado. Numericamente, cada termo tem quatro quadrados coloridos a mais do que a figura anterior.
2. O quinto termo tem 24 quadrados coloridos, o sexto termo tem 28 e o sétimo termo tem 32 quadrados coloridos.
3.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	7
Número de quadrados pintados	8	12	16	20	24	28	32

4. O décimo termo tem 44 quadrados coloridos.
5. O centésimo termo tem 404 quadrados coloridos.

6. Há diversas maneiras de contar os quadrados coloridos e resolver o problema anterior. Espera-se que os alunos apresentem modos diferentes de alcançar o mesmo resultado. A seguir temos algumas possibilidades:
    i. É possível dividir a parte pintada em quatro blocos de 101 quadrados.
    ii. Também é possível encontrar a quantidade de quadrados coloridos pela diferença entre a quantidade de quadrados totais e a quantidade de quadrados brancos.
    iii. Outra possibilidade é dividir a parte pintada em quatro blocos de 100 quadrados e adicionar os quadrados dos cantos.
    iv. Por fim, é possível dividir a parte pintada em quatro blocos de 102 quadrados (incluindo os cantos) e remover os quatro quadrados repetidos.

7. Alguns desenhos que representam a forma de contar o número de quadrados coloridos são

 ou 

8. Assim como no item 6, há muitos modos de resolver essa questão. A seguir, temos algumas possibilidades.
    v. Tome o número da figura, adicione 1 unidade e depois multiplique por 4.
    vi. Tome o número da figura adicionado de duas unidades, eleve ao quadrado e depois subtraia o quadrado do número da figura.
    vii. Tome o número da figura, multiplique por 4 e depois adicione 4 quadrados, representando os quatro cantos do quadrado.
    viii. Tome o número da figura adicionado de 2 unidades, multiplique por quatro e depois subtraia 4 unidades.

b. Seja Q o número de quadrados coloridos e n o número da figura. As seguintes fórmulas representam modos de calcular Q em função de n. $Q=4(n+1)$, $Q=(n+2)^2-n^2$, $Q=4n+4$ e $Q=4(n+2)-4$.

AULA 4: A descoberta de Gauss

Objetivos específicos

1) desenvolver diferentes estratégias e raciocínios para a resolução dos problemas propostos;
2) desenvolver a capacidade de escrever os procedimentos utilizados na solução das situações propostas;
3) aprender a lidar com os símbolos algébricos, tanto no contexto de incógnitas, quanto de variáveis, dando sentido a cada um deles.
4) aprender a representar uma situação com fórmulas algébricas

0 - 10 min: Organização da turma em grupos, chamada e leitura do seguinte texto:**"Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento".**
10 - 20 min: Apresentação do texto "A descoberta de Gauss"
20 - 70 min: resolução dos problemas de forma individual.
70 - 110 min: apresentação das soluções, discussão, perguntas e encerramento. (Caso o aluno se sinta desconfortável, ele pode optar por não responder ou não apresentar qualquer problema, e ainda, pode pedir para ser excluído da pesquisa a qualquer momento)

A Descoberta de Gauss

Conta-se que Carl Friedrich Gauss, ainda criança com cerca de 10 anos de idade, surpreendeu seu professor ao resolver rapidamente um problema que deveria ocupar a turma por muito tempo: calcular a soma de todos os números de 1 a 100. Enquanto seus colegas começaram a somar laboriosamente 1 + 2 + 3 + 4 + ..., o jovem Gauss percebeu um padrão engenhoso. Ele observou que poderia agrupar os números em pares: o primeiro com o último (1 + 100 = 101), o segundo com o penúltimo (2 + 99 = 101), o terceiro com o antepenúltimo (3 + 98 = 101), e assim sucessivamente. Como existem 50 pares, cada um somando 101, a resposta seria simplesmente 50 × 101 = 5.050. Esta descoberta não apenas demonstrou o talento precoce de Gauss, mas também ilustrou a beleza do pensamento matemático, mostrando como a observação de padrões pode transformar um cálculo tedioso em uma solução simples e elegante. O método de Gauss revela a essência do pensamento algébrico: a capacidade de generalizar e encontrar fórmulas que funcionem para qualquer situação similar.

Agora resolva os seguintes problemas.

a. Use a mesma ideia para calcular a soma dos números de 1 a 1000.
b. Tente escrever uma expressão que calcula a soma dos números de 1 a n, onde n é um número natural qualquer.
c. Tente escrever uma expressão que calcule a soma dos pares de 2 a 2n, onde n é um número natural qualquer.
d. Imagine uma sequência de número onde p é o primeiro número, u é o último número, n é a quantidade de números e cada número dessa sequência, com exceção do primeiro número é o anterior somado com r. Por exemplo, os números 3, 10, 17, 24, 31, 38 é uma sequência desse tipo, onde p=3, u=38, r=7 e n=6. Escreva em função de p,u,n e r uma fórmula para calcular a soma dos termos dessa sequência.

Espera-se com este exercício que os alunos desenvolvam a capacidade de modelação. O item **a** testa se o aluno entendeu a ideia de Gauss. O item b pede que o aluno escreva uma fórmula, como foi feito na aula anterior. O item c e d se propõe a desenvolver a capacidade de generalizar a fórmula do item b. A seguir, apresentamos as respectivas soluções.

a. (1+1000).500=500500
b. (1+n).n/2
c. (2+2n).n/2 ou (1+n).n. A primeira versão apenas aplica 2 e 2n na fórmula anterior. A segunda versão pode surgir se o aluno olhar o problema como uma duplicação do item a, pois todo número par é a soma de um número consigo mesmo.
d. (p+u).n/2

AULA 5: Avaliação

Prof. Cássio Volpato Selbach

INSTRUÇÕES:

1. **O objetivo desta avaliação é determinar quais conceitos algébricos foram desenvolvidos nas últimas aulas, por isso ela é anônima. Dessa forma, ela não vale nota para a disciplina de matemática.**
2. **Caso alguma questão te deixe desconfortável, você pode pular a questão ou encerrar a avaliação, se preferir.**
3. Responda essa avaliação com caneta azul ou preta.
4. Esta avaliação é individual e sem consulta.

QUESTÕES

1. Qual número devemos colocar no lugar do X a fim de que a afirmação $36 \div 3 = 10 - 2 + X$ se torne uma afirmação verdadeira?

Solução: X=4, pois $36 \div 3 = 12$ e $10 - 2 + 4 = 12$.
Este problema avalia se o aluno desenvolveu a compreensão do sinal de igualdade como um sinal de relação entre dois números.

2. (PORTAL OBMEP) Resolva o seguinte problema de criptaritmética:

X + X + YY = ZZZ

Explique como você resolveu esse problema.

Solução: 6+6+99=111. Este problema avalia se o aluno compreende as relações entre números inteiros. O aluno deve perceber que Z=1, pois a soma de dois números de um algarismo com um número de dois algarismos não pode ser igual a ou maior do que 222, que é um número de três algarismos.

3. No problema a seguir, cada letra representa um número de tal forma que letras iguais representam números iguais.

$$A+B=70$$

$$B+A+B=100$$

a. Encontre o valor de cada letra (A e B).
b. Como você resolveu o item anterior?

Solução: A=40 e B=30. Este problema avalia se o aluno desenvolveu a capacidade de resolver expressões com números desconhecidos. O aluno deve pensar que se A+B=70 e B+A+B=100, então B+70=100. Logo B=30. Portanto A=40.

4. A sequência a seguir é formada por quadrados feitos de fósforos. O primeiro termo é feito de um quadrado, o segundo termo é feito de dois quadrados, o terceiro é feito de três quadrados e assim por diante. Cada lado que pertence a dois quadrados é feito de apenas um fósforo.

1º termo 2º termo 3º termo

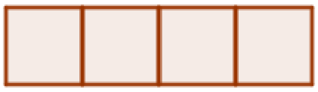
Responda:

a. Desenhe o 4º termo.
b. Preencha a tabela a seguir.

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Número de palitos								

c. Descreva com palavras como o número de palitos aumenta em cada termo da sequência.
d. Quantos palitos são usados para compor o 26º termo?
e. Escreva um passo a passo que permita calcular o número de palitos de fósforos sabendo o número do termo da sequência.
f. Escreva uma expressão algébrica que permita calcular o número de palitos de fósforos, sabendo o número do termo da sequência.

Solução:

a. 

b.

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Número de palitos	4	7	10	13	16	19	22	25

c. Cada termo tem três palitos a mais do que o termo anterior.

d. O 26º termo tem 79 palitos.

e. Para calcular o número de palitos de qualquer termo da sequência, tome o número do termo, multiplique por três e depois some uma unidade.

f. $P=3n+1$, onde P é o número de palitos e n é o número do termo da sequência.

7. APRESENTAÇÃO DAS QUESTÕES SEM AS RESPECTIVAS SOLUÇÕES

AULA 1: Explorando relações e propriedades de números inteiros.

Problemas

1. Resolva os seguintes problemas de criptaritmética:

a. (OBMEP 2015 - ADAPTADA) ABA - CA = AB

b. XYZ x 3 = ZZZ

(Criptaritmética é um tipo de problema matemático que consiste em esconder parcial ou totalmente os algarismos de um conta, substituindo-os por símbolos - geralmente letras. Em geral, cada letra representa um, e apenas um, algarismo. Ou seja, letras iguais representam números iguais, e letras diferentes representam números diferentes. O objetivo é descobrir o valor de cada letra ou de alguma letra específica.)

2. Encontre três números consecutivos cuja soma seja igual a 123.

a. Explique como seu grupo resolveu esse problema.

b. Como podemos representar a soma de quaisquer três números consecutivos em apenas uma frase matemática?

3. Zé das Couves recebeu seu salário do mês. Seu patrão lhe deu 33 notas, algumas são de R$100,00 outras de R$10,00 totalizando o valor de seu salário que é de R$1320,00.

a. Quantas notas de R$100,00 e quantas notas de R$10,00 Zé das Couves recebeu de seu patrão?

b. Explique como seu grupo resolveu esse problema.

c. Como essa situação poderia ser representada usando até duas frases matemáticas?

4. (OBMEP 2019 - ADAPTADA) Qual é a diferença entre a soma dos números ímpares e dos números pares de 1 a 2019?

a. Como o grupo resolveu o problema?
b. Quais as propriedades dos números que mais foram utilizadas na resolução?

AULA 2: Explorando relações de igualdade.

1. (OBMEP 2019) Qual é o número que está escondido pelo borrão?

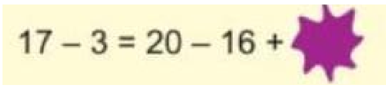


Figura 1. Extraída da prova da obmep disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm

   a. Como essa situação pode ser representada sem usar o borrão?

2. (OBMEP 2015) Nas balanças há sacos de areia de mesmo peso e tijolos idênticos. Quanto deve marcar a última balança?

Figura 2. Extraída da prova da obmep disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm

   a. Como o seu grupo resolveu o problema? Existe um modo de resolver o problema sem calcular o peso individual dos tijolos e dos sacos de areia?
   b. Seja T o peso dos tijolos e A o peso dos sacos de areia. Como podemos representar cada balança?

3. Encontre, se possível, 3 números ímpares cuja soma seja 100.
   a. Como podemos representar um número par qualquer?
   b. Como podemos representar um número ímpar qualquer?
   c. Como podemos representar a situação descrita acima?

4. Nos quatro problemas abaixo, cada símbolo representa um número e símbolos iguais representam números iguais.

A) 📎+📎+📎=36 📎+❤+📎=30 ❤+❤+❤+📎=?	B)🔔+🔔=32 🌰+🌰=🔔+🔔+🔔 🌰+🌰+🌰+🔔=?
C) ♦+📐=14 📐+♦+♦+♦=32 ♦+♦+📐+📐+📐=?	D) A+A+B=11 A+B+B=13 A+A+A+B+B+B=?

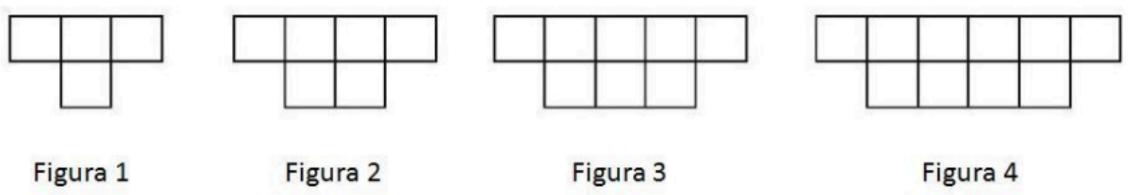
	A+B=? A=? B=?

a. Encontre o valor de cada símbolo.
b. Como seu grupo resolveu cada problema?
c. Como podemos representar cada linha de cada problema com uma expressão matemática diferente e mais simples do que a expressão utilizada?

AULA 3: Desenvolver habilidades do pensamento algébrico funcional através da resolução de problemas em sequências.

Problema 1 - Extraído e adaptado de
https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando um quadrado novo na fileira de cima e um quadrado na fileira de baixo.



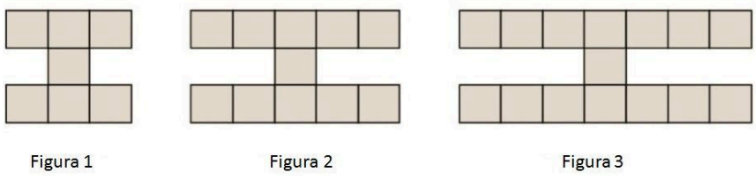
1. Desenhe a figura 5
2. Complete a tabela a seguir:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados						

3. Quantos quadrados haverá na figura 10?
4. Quantos quadrados haverá na figura 100?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.
7. Qual figura terá 84 quadrados?
8. Alguma figura terá 65 quadrados? Se sim, qual? Se não, justifique.

Problema 2 - Extraído e adaptado de
https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/desafio-da-transformacao-dos-numeros/

Observe o padrão geométrico a seguir. Cada nova figura é formada colocando dois quadrados novos na fileira de cima e dois quadrados novos na fileira de baixo, mantendo um quadrado centralizado entre as duas fileiras.



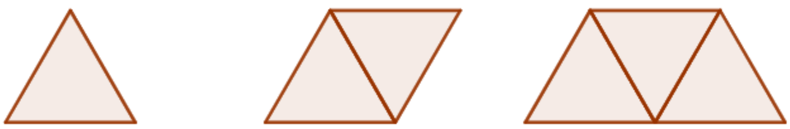
1. Desenhe a figura 4
2. Complete a tabela a seguir:

Número da figura	1	2	3	4	5	6
Número de quadrados						

3. Quantos quadrados haverá na figura 10?
4. Quantos quadrados haverá na figura 100?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de quadrados sabendo o número da figura.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de quadrados sabendo o número da figura.

Problema 3: Extraído e adaptado de Cessa (2009)

A sequência a seguir é formada por triângulos feitos de fósforos. O primeiro termo é feito de um triângulo, o segundo termo é feito de dois triângulos adjacentes, o terceiro é feito de três triângulos adjacentes e assim por diante. Cada lado que pertence a dois triângulos é feito de apenas um fósforo.



1º termo   2º termo   3º termo

Responda:

1. Desenhe o 4º termo dessa sequência.
2. Complete a tabela a seguir:

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º

Número de palitos						

3. Quantos palitos são usados para compor o 10º termo?
4. Quantos palitos são usados para compor o 100º termo?
5. Escreva um passo a passo para descobrir o número de palitos de fósforos sabendo o número do termo da sequência.
6. Escreva uma fórmula (uma expressão algébrica) para calcular o número de palitos de fósforos, sabendo o número do termo da sequência.

Problema 4. Extraído e adaptado de Cessa (2009)

Considere a sequência de quadrados brancos dividida em quadradinhos menores de tamanhos iguais. Ao redor os lados de cada quadrado da sequência, são desenhados novos quadrados coloridos, como na imagem abaixo

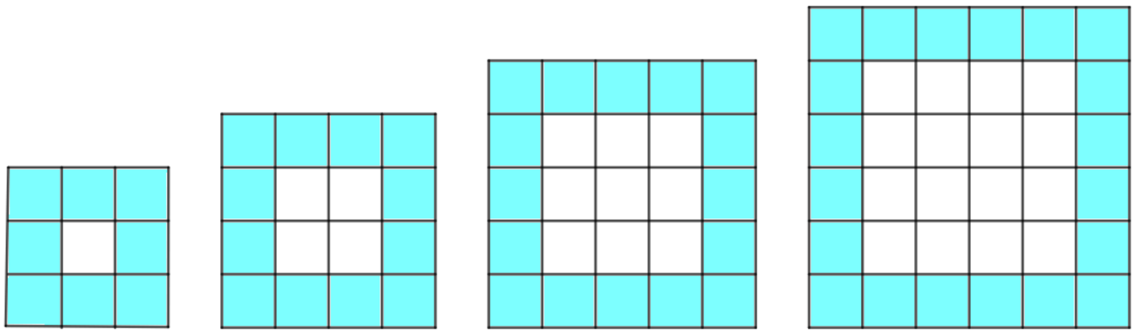


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. Descreva com palavras como a sequência cresce num?
2. Quantos quadradinhos coloridos temos no 5º, 6º e 7º termo da sequência?
3. Complete a tabela a seguir.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	7
Número de quadrados pintados							

4. Quantos quadradinhos coloridos temos no 10º termo da sequência?
5. Quantos quadradinhos azuis temos no 100º termo da sequência?
6. Descreva em palavras como você resolveu a questão anterior.
7. Faça um desenho que represente o modo que você resolveu a questão.

8. Escreva um passo a passo para calcular o número de quadrados azuis, se conhecermos o número da figura.
9. Escreva uma expressão algébrica que permita calcular o número de quadrados coloridos, se conhecermos o número da figura.

AULA 4: A Descoberta de Gauss

Conta-se que Carl Friedrich Gauss, ainda criança com cerca de 10 anos de idade, surpreendeu seu professor ao resolver rapidamente um problema que deveria ocupar a turma por muito tempo: calcular a soma de todos os números de 1 a 100. Enquanto seus colegas começaram a somar laboriosamente 1 + 2 + 3 + 4 + ..., o jovem Gauss percebeu um padrão engenhoso. Ele observou que poderia agrupar os números em pares: o primeiro com o último (1 + 100 = 101), o segundo com o penúltimo (2 + 99 = 101), o terceiro com o antepenúltimo (3 + 98 = 101), e assim sucessivamente. Como existem 50 pares, cada um somando 101, a resposta seria simplesmente 50 × 101 = 5.050. Esta descoberta não apenas demonstrou o talento precoce de Gauss, mas também ilustrou a beleza do pensamento matemático, mostrando como a observação de padrões pode transformar um cálculo tedioso em uma solução simples e elegante. O método de Gauss revela a essência do pensamento algébrico: a capacidade de generalizar e encontrar fórmulas que funcionem para qualquer situação similar.

Agora resolva os seguintes problemas.

a. Use a mesma ideia para calcular a soma dos números de 1 a 1000.
b. Tente escrever uma expressão que calcula a soma dos números de 1 a n, onde n é um número natural qualquer.
c. Tente escrever uma expressão que calcule a soma dos pares de 2 a 2n, onde n é um número natural qualquer.
d. Imagine uma sequência de número onde p é o primeiro número, u é o último número, n é a quantidade de números e cada número dessa sequência, com exceção do primeiro número é o anterior somado com r. Por exemplo, os números 3, 10, 17, 24, 31, 38 é uma sequência desse tipo, onde p=3, u=38, r=7 e n=6. Escreva em função de p,u,n e r uma fórmula para calcular a soma dos termos dessa sequência.

Avaliação

Prof. Cássio Volpato Selbach

INSTRUÇÕES:

1. **O objetivo desta avaliação é determinar quais conceitos algébricos foram desenvolvidos nas últimas aulas, por isso ela é anônima. Dessa forma, ela não vale nota para a disciplina de matemática.**
2. **Caso alguma questão te deixe desconfortável, você pode pular a questão ou encerrar a avaliação, se preferir.**
3. Responda essa avaliação com caneta azul ou preta.
4. Esta avaliação é individual e sem consulta.

QUESTÕES

1. Qual número devemos colocar no lugar do X a fim de que a afirmação $36 \div 3 = 10 - 2 + X$ se torne uma afirmação verdadeira?

2. (PORTAL OBMEP) Resolva o seguinte problema de criptaritmética:

X + X + YY = ZZZ

Explique como você resolveu esse problema.

3. No problema a seguir, cada letra representa um número de tal forma que letras iguais representam números iguais.

A+B=70

B+A+B=100

a. Encontre o valor de cada letra (A e B).
b. Como você resolveu o item anterior?

4. A sequência a seguir é formada por quadrados feitos de fósforos. O primeiro termo é feito de um quadrado, o segundo termo é feito de dois quadrados, o terceiro

é feito de três quadrados e assim por diante. Cada lado que pertence a dois quadrados é feito de apenas um fósforo.

1º termo 2º termo 3º termo

Responda:

a. Desenhe o 4º termo.

b. Preencha a tabela a seguir.

Termo da sequência	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Número de palitos								

c. Descreva com palavras como o número de palitos aumenta em cada termo da sequência.

d. Quantos palitos são usados para compor o 26º termo?

e. Escreva um passo a passo que permita calcular o número de palitos de fósforos sabendo o número do termo da sequência.

f. Escreva uma expressão algébrica que permita calcular o número de palitos de fósforos, sabendo o número do termo da sequência.

8. REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R. Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. 200 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Recife, 2016.

ALMEIDA, Manoel de Campos. Como o cérebro do matemático funciona: uma introdução à neurociência da matemática avançada. [S.l.]: [s.n.], [2020]. Disponível em:https://ppl-ai-file-upload.s3.amazonaws.com/web/direct-files/attachments/68357350/8f08fef0-e613-4354-a871-b002c9fb0bc1/COMO-O-CEREBRO-DO-MATEMATICO-FUNCIONA.pdf. Acesso em: 19 maio 2025.

BECKER, Fernando. Abstração pseudo-empírica e reflexionante: significado epistemológico e educacional. **Schème: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas. Marília, SP. Vol. 6, Unesp (2014), p. 104-128,** 2014. https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/scheme/article/view/4276/3105

_______. **Epistemologia do professor de matemática**. 1. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

BONADIMAN, Adriana. Álgebra no ensino fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas. 2007. 298 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

CESSA, Carmen. Iniciação ao estudo didático da álgebra: origens e perspectivas. Local de publicação: Editora SM, 2009. 112 p.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, manipulação e aplicações: os três componentes do ensino da Matemática. Revista do Professor de Matemática, n. 41, p. 1-6, 1999. Disponível em:

https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/pdf/rpm41.pdf. Acesso em: 24 set. 2025.

LIMA, Maria Vanísia Mendonça de; BORGES NETO, Hermínio. As variadas concepções de Álgebra no contexto da Educação Matemática. Educação Matemática Debate, Montes Claros (MG), v. 7, n. 13, p. 1-23, 2023. DOI: 10.46551/emd.v7n13a15. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9174408.pdf. Acesso em: 24 set. 2025.

LINS, Rômulo Campos. O modelo teórico dos campos semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. Rev. Dynamis, v.1 nº.7, 1994a, p. 29-39.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; PAVANELLO, Regina Maria. A abstração reflexionante e a produção do conhecimento matemático. *Bolema*, Rio Claro (SP), ano 21, n. 30, p. 111-130, 2008. Disponível em: https://ppl-ai-file-upload.s3.amazonaws.com/web/direct-files/attachments/68357350/31f51dce-49f0-46e3-bf97-752a14b63a1a/A-Abstracao-Reflexionante-e-a-Producao-do-Conhecimento-Matematico.pdf. Acesso em: 7 maio 2025.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: https://ppl-ai-file-upload.s3.amazonaws.com/web/direct-files/attachments/68357350/8ac28230-1f43-4783-a588-f99eb8cba069/Onuchic-e-Allevato-Resolucao-de-Problemas.pdf. Acesso em: 7 maio 2025.

PIAGET, Jean. **A epistemologia genética: sabedoria e ilusões da filosofia; problemas de psicologia genética**. Tradução de Nathanael C. Caixeiro, Zilda Abujamra Daeir, Célia E. A. Di Piero. São Paulo: Abril Cultural, 1978. (Os Pensadores).

PIAGET, J. **A psicologia da inteligência**. Tradução de Egléa de Alencar. Rio de Janeiro: Vozes, 2013.

PIAGET, J. **O nascimento da inteligência na criança**. Tradução de Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar, 1966.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J.; BRANCO, N.; MATOS, A. Álgebra no Ensino Básico. Ministério da Educação, Portugal. Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC). Portugal, 2009.

ROCHA, Kátia Coelho da; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; NOTARE, Márcia Rodrigues. Abordagens teóricas entre o Pensamento Computacional e a abstração reflexionante. *Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 18, n. 2, p. 580-590, dez. 2020. Disponível em: https://ppl-ai-file-upload.s3.amazonaws.com/web/direct-files/attachments/68357350/cad26406-fa9c-4bac-a5b7-56c55805a042/rocha-basso.pdf. Acesso em: 7 maio 2025.