UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

TRILHAS PEDAGÓGICAS: METODOLOGIAS FACILITADORAS NO ENSINO DE ÁREAS NA PREPARAÇÃO PARA O CONCURSO DO COLÉGIO NAVAL

Wagner de Oliveira Araujo

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

TRILHAS PEDAGÓGICAS: METODOLOGIAS FACILITADORAS NO ENSINO DE ÁREAS NA PREPARAÇÃO PARA O CONCURSO DO COLÉGIO NAVAL

WAGNER DE OLIVEIRA ARAUJO

Sob a Orientação do Professor

EDIVALDO FIGUEIREDO FONTES JUNIOR

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre no programa de pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de concentração em matemática.

Seropédica,RJ

2025

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A658t

Araujo, Wagner de Oliveira, 1985-
Trilhas pedagógicas: metodologias facilitadores no ensino de áreas na preparação para o concurso do colégio naval / Wagner de Oliveira Araujo. - Belford Roxo, 2025.
86 f.: il.

Orientador: Edivaldo Figueiredo Fontes Junior.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2025.

1. Preparação para o colégio naval. 2. Trilhas pedagógicas. 3. Ensino de áreas. 4. Ferramentas digitais. 5. Estudo autônomo. I. Fontes Junior, Edivaldo Figueiredo , 1983-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional III. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Seropédica-RJ, 29 de agosto de 2025.

WAGNER DE OLIVEIRA ARAUJO

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre, no Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 29/08/2025

EDIVALDO FIGUEIREDO FONTES JUNIOR Drº UFRRJ (Orientador- Presidente da Banca-Membro titular)

ORLANDO DOS SANTOS PEREIRA Drº UFRRJ (membro interno titular)

RENAN VICENTE PINTO Drº UFRJ (membro titular externo à Instituição)

ATA Nº ata/2025 - ICE (12.28.01.23)
(Nº do Documento: 4441)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 04/09/2025 13:53)
EDIVALDO FIGUEIREDO FONTES JUNIOR
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matricula: ###648#5

(Assinado digitalmente em 04/09/2025 15:09)
ORLANDO DOS SANTOS PEREIRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matricula: ###291#1

(Assinado digitalmente em 10/09/2025 12:51)
RENAN VICENTE PINTO
ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.777-##

*Visualize o documento original em https://sipac.ufrrj.br/documentos/ informando seu número: **4441**, ano: **2025**, tipo: **ATA**, data de emissão: **04/09/2025** e o código de verificação: **f71585c047***

AGRADECIMENTO

Esta jornada de minha vida profissional e acadêmica foi marcada pela participação de inúmeras pessoas especiais que me inspiram dia a dia para a concretização deste trabalho. Agradeço a minha esposa Daniele Araujo pela empatia de entender que os estudos e minha acenção profissional e acadêmica é a oportunidade que tenho de facilitar a vida de nossos filhos Davi e Isabela.

Agradeço aos meus pais que desde sempre ofertaram a mim tudo de melhor que podiam e constantemente me fizeram entender que a educação era libertadora e por este motivo sempre foi dado a ela a devida importância.

Expresso minha profunda gratidão ao meu orientador Dr. Edivaldo Figueiredo Fontes Júnior, pelo apoio, paciência e orientação incansável que foram fundamentais para a realização desta dissertação.

Aos meus pares da turma PROFMAT 2023 que ombrearam comigo esta árdua missão, compartilhando suas experiências enriquecedoras e dividindo comigo momentos de distrações que tornava nosso ambiente saudável e leve.

Por fim, e não menos importante, agradeço aos meus mestres que, direta ou indiretamente, contribuíram com informação, materiais ou apoios técnicos, que sem dúvidas e de forma ímpar, elevaram minhas capacidades.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

Wagner de Oliveira Araujo

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo auxiliar os alunos na preparação para os concursos do Colégio Naval (CN), focando nos tópicos mais recorrentes de geometria plana, com um olhar mais intenso nas áreas das figuras planas. A pesquisa ressalta a importância da compreensão dos conceitos geométricos na formação dos estudantes, bem como as dificuldades que muitos deles enfrentam ao lidarem com tais conteúdos. Para proporcionar uma vivência geométrica mais direcionada e adequada, o uso de recursos autônomos e trilhas pedagógicas é essencial, uma vez que a atratividade dessas abordagens é crucial para o processo de ensino-aprendizagem. Assim, a utilização de ferramentas digitais pode facilitar a compreensão dos conteúdos de geometria que mais frequentemente aparecem nos concursos de acesso ao colégio naval.

O principal objetivo deste trabalho é analisar a contribuição das trilhas pedagógicas digitais como ferramentas facilitadoras no aprendizado dos tópicos de geometria mais relevantes para os exames do Colégio Naval. Com um enfoque específico, pretende-se criar conteúdos digitais e aplicar aplicativos e trilhas pedagógicas, visando tornar o aprendizado desses conteúdos mais fácil e dinâmico.

A metodologia da pesquisa será fundamentada em uma análise bibliográfica sobre trilhas pedagógicas, práticas pedagógicas para o ensino de geometria, e um estudo sobre a evolução dos concursos do CN. Nos procedimentos, será realizado um teste inicial para avaliar o conhecimento prévio de geometria entre alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de um colégio particular na cidade de Nova Iguaçu no Rio de Janeiro. Em seguida, serão implementadas as trilhas pedagógicas e os aplicativos como facilitadores do ensino.

Ao final, serão coletadas as impressões dos alunos em relação ao uso das ferramentas apresentadas e à sua evolução. Uma análise qualitativa e quantitativa será realizada para observar o desempenho dos alunos e as informações coletadas.

Palavras-chave: Geometria; Colégio Naval; Trilhas Pedagógicas; Aplicativo geometria, Ensino de matemática.

ABSTRACT

This study aims to support students in preparing for the entrance exams of the Naval College (CN) by concentrating on the most frequently encountered topics in plane geometry, particularly the areas related to plane figures. The research underscores the significance of mastering geometric concepts for student development, as well as the challenges many students face when engaging with this material. To provide a more focused and effective geometric learning experience, the incorporation of autonomous resources and tailored pedagogical pathways is essential, as the appeal of these approaches plays a critical role in the teaching-learning process. In this context, digital tools can enhance students' understanding of the geometry topics prominently featured in the Naval College entrance exams.

The primary objective of this study is to evaluate the impact of digital pedagogical strategies as supportive tools for learning the most relevant geometry topics for the Naval College exams. Specifically, the study aims to create digital content and implement applications and pedagogical methods that make learning these topics more accessible and dynamic.

The research methodology will include a comprehensive bibliographic review of pedagogical strategies, analysis of teaching practices in geometry, and an examination of the evolution of CN exams. The initial phase will involve assessing the prior knowledge of geometry among 9th-grade students at a private school in Nova Iguaçu, Rio de Janeiro, through a diagnostic test. Following this, the identified pedagogical strategies and applications will be implemented as tools to facilitate teaching.

Finally, the study will gather students' feedback on the effectiveness of the introduced tools and assess their progress. Both qualitative and quantitative analyses will be conducted to evaluate student performance and to interpret the collected data.

Keywords: Geometry; Naval College; Pedagogical Strategies; Geometry Applications; Mathematics Education.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Assuntos de matemática e suas recpectivas recorrências no Colégio Naval entre os anos de 2010 e 2025 17
Tabela 2 - Assuntos de matemática e suas recpectivas recorrências no EsPCEx entre os anos de 2009 e 2025 24
Tabela 3 – Dissertações encontradas 30
Tabela 4 – Dissertações selecionadas 31
Tabela 5 – Desenpenho dos alunos no nível de análise 50
Tabela 6 - Desenpenho dos alunos no nível de Abstração..... 55
Tabela 7 – Acertos e erros em cada questão proposta sobre áreas 59

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Organograma de navegação das atividades voltadas ao colégio Naval... 44
Figura 2 - Organograma de navegação das atividades voltadas a EsPCEx 44
Figura 3 – Logotipo do site AUTOMATH 46
Figura 4 – Logotipo do canal no YouTube HORA EXATA 46
Figura 5 – Recorte de uma das questões do Apêndice A 49
Figura 6 – Distribuição de respostas na questão 6..... 52
Figura 7 – Distribuição de respostas na questão 7..... 53
Figura 8 – Distribuição de respostas na questão 8..... 53
Figura 9 – Distribuição de respostas na questão 9..... 53
Figura 10 – Distribuição de respostas na questão 10..... 53
Figura 11 – Distribuição de respostas na questão 11..... 56
Figura 12 – Distribuição de respostas na questão 12..... 57
Figura 13 – Distribuição de respostas na questão 13..... 57
Figura 14 – Distribuição de respostas na questão 14..... 57
Figura 15 – Distribuição de respostas na questão 15..... 57
Figura 16 – Quantidade de alunos em cada nível 58
Figura 17 – Relação acertos/erros em cada questão proposta sobre áreas 61
Figura 18 – Quantidade de pontos obtidos pelos participantes (triângulos) 62
Figura 19 – Predominância de acertos dos alunos em cada questão proposta sobre triângulos 64
Figura 20 – Quantiadade de pontos obtidos pelos participantes (quadriláteros) 65
Figura 21 – Predominância de acertos dos alunos em cada questão proposta sobre quadriláteros..... 67
Figura 22 – Quantiadade de pontos obtidos pelos participantes (polígonos) 68
Figura 23 – Predominância de acertos dos alunos em cada questão proposta sobre polígonos regulares 70
Figura 24 – Quantiadade de pontos obtidos pelos participantes (polígonos) 71
Figura 25 – Predominância de acertos dos alunos em cada questão proposta sobre polígonos regulares 73
Figura 26 – Nota atribuída pelos alunos em cada item da pesquisa de satisfação ... 76
Figura 27 – Árvore de opniões 77

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO..... 12
2 ESTADO DA ARTE..... 13
2.1 História do Colégio Naval..... 13
2.1.1 Análise das provas anteriores..... 16
2.2 História da EsPCEx..... 21
2.2.1 Análise das provas anteriores..... 24
2.3 Investigação sobre o tema em bancos de dissertações..... 29
3 RECURSO PEDAGÓGICO E O APRENDIZADO DE GEOMETRIA..... 34
3.1 O que diz o PCN e BNCC quanto ao pensamento geométrico e a utilização de recursos digitais 37
3.2 Geometria segundo a teoria dos Van Hiele..... 40
4 METODOLOGIA..... 41
5 RECURSO EDUCACIONAL..... 45
6 ANÁLISE DE DADOS..... 48
6.1 Analisando dados obtidos pelo teste: “Identificando alunos com chance de discalculia”..... 48
6.2 Analisando dados obtidos pelo teste: “O que sabemos sobre áreas das figuras planas”..... 59
6.3 Analisando dados obtidos com a utilização dos testes aplicados por meio do AUTOMATH..... 62
6.4 Impressões sobre o AUTOMATH..... 74
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS..... 78
REFERÊNCIAS..... 79
APÊNDICE A – IDÊNTIFICANDO ALUNOS COM CHANCE DE DISCALCULIA..... 81
APÊNDICE B – O QUE SABEMOS SOBRE ÁREA DAS FIGURAS PLANAS.....86

1 INTRODUÇÃO

Sabemos que os concursos de acesso às escolas militares são muito concorridos e exige de seus candidatos grandes habilidades em diversas áreas do conhecimento, dentre elas a matemática. Os tópicos de geometria sempre são os grandes vilões, fazendo com que àqueles que não desempenham um bom aproveitamento nestes assuntos, acabam tendo muitos problemas quando o quesito aprovação.

Esta dificuldade pode ser proveniente de vários fatores, sejam eles a forma a qual lhes foram apresentados tais conteúdos, ou a maneira que passaram a ter contatos futuros como os diversificados elementos geométricos.

Este trabalho tem por finalidade utilizar os recursos digitais, tais como, trilhas pedagógicas e/ou aplicativo, para tornar as práticas de estudos de determinados assuntos de geometria que são bem recorrentes nos concursos do Colégio Naval, mais atraentes, palpáveis e visíveis aos alunos do 9° ano do Ensino Fundamental.

Assim, a pesquisa terá como norte o problema de como os trilhas pedagógicas e os recursos digitais podem auxiliar os alunos, que serão nosso público-alvo, a estudarem os tópicos de geometria mais recorrentes de forma mais eficiente para os concursos militares.

Esta pesquisa tem como justificativa o fato de que atualmente os alunos têm sentido muita dificuldade em organizar de forma estratégica seus estudos e até mesmo utilizar ferramentas que os facilite. Os livros convencionais já dão muita bagagem a estes alunos, mas já, de certa forma, ficam obsoletos tendo em vista todo o aparato tecnológico existente, mas isso também é um problema, principalmente para alunos jovens, tais como os que buscam a aprovação no concurso do Colégio Naval.

Um dos objetivos desta investigação é fazer uma pesquisa bibliográfica e estudos estatísticos, debruçando-se sobre as provas anteriores e bibliografias sobre o ensino de geometria e trilhas pedagógicas, facilitar a vida dos alunos, mas sem perder a autonomia que cada aluno precisa ter e com isso fazer com que alcancem com mais facilidade o ingresso nessas escolas de alto renome a âmbito militar.

A pesquisa é relevante e beneficiará educandos, educadores e a comunidade acadêmica, uma vez que por meio do google formulário e matérias de apoio sobre o os tópicos de geometria mais recorrentes dos concursos do Colégio Naval (Áreas das Figuras Planas), ficará disponível, de forma online para uso de professores e alunos. O material foi previamente testado em uma turma 9° ano do Ensino Fundamental de um colégio Particular, localizada no município de Nova Iguaçu, cuja faixa etária destes alunos, varia de 13 a 15 anos . O resultado desta pesquisa será discutido e exposto na dissertação, mantendo a indiscrição e anonimato dos alunos participantes.

Foi feito um levantamento bibliográfico sobre o tema nos seguintes bancos de dados: Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, Banco de Dissertações do PROFMAT e Google Acadêmico.

O propósito desse levantamento foi localizar pesquisas anteriores que abordam assuntos destinados ao acesso ao Colégio Naval, bem como técnicas para a produção e uso de trilhas pedagógicas, muito usado na educação para se referir a um conjunto estruturado de etapas, atividades ou recursos pedagógicos com a finalidade tornar o caminho rumo à aprendizagem menos dificultoso, e aplicativos para facilitar o aprendizado de geometria, mais precisamente de Áreas das Figuras Planas, destacando algumas contribuições desses autores sobre o assunto.

Como refencial teórico temos os autores Jean Willian Fritz Piaget (PIAGET), Paulo Reglus Neves Freire (PAULO FREIRE), Pierre Marie van Hiele e Dina van Hiele-Geldof (CASAL VAN HIELE).

2. ESTADO DA ARTE

2.1 HISTÓRIA DO COLÉGIO NAVAL

O Colégio Naval, localizado na cidade de Angra dos Reis, no estado do Rio de Janeiro, é uma das instituições de ensino mais tradicionais e prestigiadas do Brasil. Vinculado à Marinha do Brasil, o colégio tem como principal missão formar e preparar jovens para o ingresso na Escola Naval, contribuindo para a constituição do oficialato da Marinha com excelência acadêmica, formação moral e preparo físico e militar. Sua história remonta ao século XIX, refletindo os anseios de modernização das Forças Armadas e o compromisso com a formação de lideranças comprometidas com os

valores da pátria.

A origem do Colégio Naval se dá no ano de 1858, quando foi criado o primeiro curso preparatório para a Escola Naval. Em 1876, a instituição foi oficializada como Corpo de Aspirantes, funcionando no Rio de Janeiro. No entanto, em virtude de reformas educacionais e reestruturações internas da Marinha, o colégio foi desativado em 1886. Décadas depois, diante da necessidade de uma formação mais sólida para os futuros oficiais da Armada, o Colégio Naval foi reativado. Em 1949, a Marinha do Brasil decidiu pela reinstalação da instituição na cidade de Angra dos Reis, aproveitando a estrutura do antigo Instituto Profissional Masculino. Em 15 de agosto de 1951, os primeiros alunos iniciaram suas atividades na nova sede, marcando o início de uma nova era.

Desde então, o Colégio Naval consolidou-se como uma escola de ensino médio militar em regime de internato, voltada exclusivamente para o preparo de jovens do sexo masculino, aprovados por meio de um concurso público rigoroso. Desde 2023 tambem da acesso a estudantes do sexo feminino. O currículo integra disciplinas do ensino médio convencional com uma formação naval específica, que inclui atividades náuticas, esportivas, culturais e militares. Além disso, promove uma sólida base ética, disciplina e espírito de corpo, fundamentos essenciais para a carreira naval.

O ambiente educacional do colégio é cuidadosamente estruturado para estimular o desenvolvimento integral do aluno. As instalações contam com modernos laboratórios, bibliotecas, centros de tecnologia, quadras esportivas, piscinas, alojamentos e centros de instrução militar. A rotina diária é intensa e planejada para fortalecer a autodisciplina, a liderança e o senso de responsabilidade. Os alunos participam de marchas, exercícios militares, atividades náuticas, cerimônias cívicas e eventos culturais, compondo um processo de formação que vai muito além do ensino convencional.

Além da formação acadêmica e militar, o Colégio Naval também se destaca pela promoção da cultura e do civismo. A Sociedade Acadêmica Greenhalgh, mantida pelos próprios alunos, é responsável por diversas atividades extracurriculares, como a publicação da revista “A Fragata”, concursos de redação, eventos científicos e torneios esportivos, fomentando o protagonismo estudantil e o desenvolvimento de

competências complementares.

Ao longo de sua trajetória, o Colégio Naval formou milhares de jovens que, posteriormente, tornaram-se oficiais da Marinha do Brasil, contribuindo de maneira significativa para a defesa nacional, a ciência, a educação e a administração pública. Muitos ex-alunos alcançaram posições de destaque não apenas na carreira militar, mas também na vida civil, demonstrando a qualidade e a abrangência da formação recebida.

Em síntese, o Colégio Naval representa um marco na educação militar brasileira. Sua história é construída sobre os pilares da tradição, da excelência e da dedicação ao serviço público. Formar jovens comprometidos com os ideais da Marinha, com a ética e com o desenvolvimento do país é a missão que orienta, até os dias atuais, essa instituição centenária. Em um cenário contemporâneo repleto de desafios, o Colégio Naval mantém-se como um verdadeiro celeiro de lideranças, reafirmando seu papel estratégico na formação de cidadãos preparados para servir à nação com honra, coragem e lealdade.

O concurso de admissão é realizado anualmente pela Marinha e possui requisitos específicos. Para participar, é necessário que o candidato tenha 15 anos completos e menos de 18 anos de idade no ano da matrícula, além de estar cursando ou ter concluído o ensino fundamental. Também é exigido que o candidato esteja em dia com suas obrigações civis e tenha autorização dos responsáveis legais. A restrição ao sexo masculino não é mais uma realidade no Colégio Naval desde 2023, se igualando a outras instituições militares que já adotaram o acesso feminino.

O processo seletivo é composto por diversas etapas eliminatórias e classificatórias. A primeira delas é o Exame Intelectual (EI), que abrange três provas objetivas: Matemática, Português, Inglês e Estudos Sociais, além de uma redação dissertativa. O conteúdo das provas corresponde ao ensino fundamental, mas apresenta elevado nível de exigência, cobrando raciocínio lógico, domínio da língua portuguesa e inglesa e conhecimentos gerais sobre história e geografia. A prova de redação, por sua vez, é eliminatória, exigindo clareza, coerência e correção gramatical.

Os candidatos aprovados nas provas escritas seguem para as demais etapas: Inspeção de Saúde (IS), Teste de Aptidão Física (TAF) e Avaliação Psicológica (AP). O teste físico inclui corrida, flexão abdominal e natação, avaliando a capacidade motora e resistência do candidato. Já a inspeção de saúde verifica condições clínicas, ortopédicas e odontológicas, enquanto a avaliação psicológica analisa características comportamentais compatíveis com a vida militar, como disciplina, responsabilidade, equilíbrio emocional e adaptabilidade.

Ao ser aprovado em todas as fases, o aluno é matriculado no Colégio Naval, onde cursará o ensino médio completo em regime de internato, com duração de três anos. Durante esse período, os alunos recebem educação acadêmica conforme as diretrizes do MEC, além de instrução naval, educação física, esportes, ética, liderança e atividades náuticas. O ensino é gratuito, e o aluno tem direito a alojamento, alimentação, assistência médica, material escolar, fardamento e uma ajuda de custo mensal, além de ter todos os direitos e deveres de um militar da Marinha em formação.

A formação oferecida pelo Colégio Naval vai muito além do conteúdo pedagógico. A instituição visa o desenvolvimento integral do aluno, moldando valores como honra, coragem, lealdade e patriotismo, que são pilares da doutrina militar. Ao concluir o ensino médio, os aprovados seguem para a Escola Naval, onde iniciam o curso superior e a formação profissional como oficiais da Marinha do Brasil.

Dessa forma, o concurso de acesso ao Colégio Naval representa uma oportunidade única de formação de excelência, associando educação acadêmica e preparação militar desde a juventude. Trata-se de um processo seletivo altamente competitivo, que exige preparo intelectual, físico e psicológico, além de um forte comprometimento com a carreira militar. Através dele, a Marinha do Brasil garante a renovação de seus quadros com jovens talentosos, disciplinados e comprometidos com a missão de proteger os interesses nacionais no mar.

2.1.1 ANALISE DAS PROVAS ANTERIORES

Para fazer uma analise segura tomamos como base os ultimos 16 concursos observando a recorrência dos assuntos abordados em cada uma das questões, Na Tabela 1 apresenta-se os assuntos de matemática e suas respectivas recorrências entre os anos de 2010 e 2025

Tabela 1 - Assuntos de matemática e suas respectivas recorrências entre os anos de 2010 e 2025

INCIDÊNCIA DE ASSUNTOS CN	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	TOTAL	PERCENTUAL
Raciocínio lógico							1				1						2	0,6%
Conjuntos		1	1		1		1	1			1		1	1		1	9	2,8%
Operações com números naturais e inteiros	1			2				1	1				1				6	1,9%
Números racionais				2	1	2		1					2		1		9	2,8%
Conjuntos numéricos e números reais			1							1		1					3	0,9%
Sistemas de numeração	2			1			2							2				2,2%
Múltiplos e divisores	1	1	1	2	3		2		1	3	1	1					16	5,0%
Divisibilidade e congruência	2	1	3	1		1		2	1	3	2			1		1	18	5,6%
Função parte inteira		1															1	0,3%
MDC/MMC				1		1			1		1		1	1		1	7	2,2%
Razões e proporções	1					1		1		1		2			2	1	9	2,8%
Regra de três							1										1	0,3%
Porcentagem												1			1		2	0,6%
Divisão em partes proporcionais e regra de sociedade								1									1	0,3%
Operações com mercadorias																	4	1,3%
Juros simples e compostos														1			1	0,3%
Misturas	1			1											1		3	0,9%
Médias							1					1			1		3	0,9%
Contagem e calendário					2								1	1	2	1	7	2,2%
Problemas tipo torneira													1	1		1	3	0,9%
Sistema métrico																	O	0,0%
Estatística														1			1	0,3%
Potências e raízes	1		2	2	1	1	1	1	2				2				13	4,1%
Produtos notáveis e fatoração			2	1		2		1	1	1		2	1			2	13	4,1%
Racionalização e radical duplo			1	1					1								3	0,9%
Função													1	1			2	0,6%
Equação do 1º grau	1				1	1				2		1					6	1,9%
Função quadrática	1							1	1	1	1	1		1		1	8	2,5%
Equações fracionárias		1	1	1					1								4	1,3%
Equações biquadradas e redutíveis ao 2º grau					1						1				1	1	4	1,3%
Equações e inequações irracionais		1	1		1	1		1			1				2		8	2,5%
Polinômios e equações polinomiais		2		1		1	1				1					2	8	2,5%
Sequências			1											1			2	0,6%
Equações e inequações modulares											1	1					2	0,6%
Função do 1° grau			1														1	0,3%
Equação do 1° grau e problemas do 1° grau						1		2			1						4	1,3%
Sistemas lineares e problemas relacionados	1					1	1						1	1			5	1,6%
Sistemas não lineares e problemas relacionados		3			1				1						1		6	1,9%
Inequações		1															1	0,3%
Inequações produto-quociente	1				1		1	1		1			1	1	1	1	9	2,8%
Desigualdades		1						1							1		3	0,9%
Fundamentos e ângulos														1	1		2	0,6%
Triângulos - ângulos, congruência e desigualdades				1				1				1					3	0,9%
Triângulos - pontos notáveis	1	1			2		1		1			2	1			2	11	3,4%
Triângulos retângulos					1		1	1			2		1		2		8	2,5%
Triângulos - semelhança e relações métricas	1					2			2	4	1	2	1		1	2	16	5,0%
Quadriláteros	1	1	1	2				1	2			1			1		10	3,1%
Polígonos - ângulos e diagonais			1														1	0,3%
Polígonos regulares - relações métricas														1			1	0,3%
Circunferência - posições relativas e segmentos tangentes	1	1											1				3	0,9%
Arco capaz, ângulos e comprimentos na circunferência	1		1		2		1				1			1			7	2,2%
Circunferência - relações métricas e potência de ponto									1								1	0,3%
Áreas	2	3	2	1	2	5	5	2	2	3	4	3	3	2	1	2	42	13,1%
TOTAL POR PROVA	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	320	100,0%
Aritmética	8	5	6	10	7	5	8	7	5	8	6	6	7	10	8	7	113	35,31%
Álgebra	5	9	9	6	6	8	4	8	7	5	6	5	6	5	6	7	102	31,88%
Geometria Plana	7	6	5	4	7	7	8	5	8	7	8	9	7	5	6	6	105	32,81%

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao analisarmos a Tabela 1 em seu contexto geral, observamos uma quase equivalência entre os eixos matemáticos: Aritmética, Álgebra e Geometria plana, com uma ligeira preferência por Aritmética. No entanto, ao focar na recorrência de um tema específico relacionado à área das figuras planas, a importância desse assunto se

torna evidente. Ele é fundamental não apenas para a aprovação dos alunos que buscam ingressar no concurso do Colégio Naval, mas também para integrar o cidadão no ambiente geométrico em que está inserido. Por Este e outros motivos, “Geometria plana: Área das figuras planas é o eixo focal desta pesquisa.

Na seção anterior, discutimos o surgimento do Colégio Naval. Com isso, para demonstrar a evolução do nível das questões nos concursos de acesso ao Colégio Naval, apresento a seguir algumas questões de geometria plana, mais especificamente relacionadas à "Área das Figuras Planas".

- **Concurso de Admissão para turmas de 1951, aplicado dia 14 de fevereiro de 1951**

Questão 30

Um polígono regular tem 40m² de área e 8m de perímetro. Calcular a área do círculo inscrito.

Nesta ocasião as provas não eram objetivas, eram dicursivas.

- **Concurso de Admissão para turmas de 2015, aplicado dia 28 de setembro de 2014 – Prova Amarela**

Questão 4

Observe as figuras a seguir.

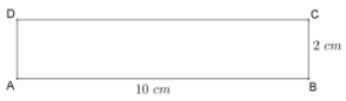


Figura I

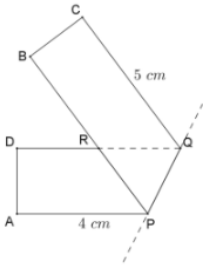


Figura II

Uma dobra é feita no retângulo 10 cm² da figura I, gerando a figura plana II. Essa dobra está indicada pela reta suporte de PQ. A área do polígono APQCBRD da figura II, em cm², é:

A) $8\sqrt{5}$

B) 20

C) $10\sqrt{2}$

D) $\frac{35}{2}$

E) $\frac{13\sqrt{6}}{2}$

Questão 5

Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 26 e perímetro 60 . A razão entre a área do círculo inscrito e do círculo circunscrito nesse triângulo é, aproximadamente:

(A) 0,035

(B) 0,055

(C) 0,075

(D) 0,095

(E) 0,105

Questão 13

Suponha que ABC seja um triângulo isósceles com lados AC=BC , e que "L" seja a circunferência de centro "C" , raio igual a "3" e tangente ao lado AB. Com relação à área da superfície comum ao triângulo ABC e ao círculo de "L", pode-se afirmar que:

(A) não possui um valor máximo.

(B) pode ser igual a 5p .

(C) não pode ser igual a 4p.

(D) possui um valor mínimo igual a 2p.

(E) possui um valor máximo igual a 4,5p.

Questão 19

Sobre o lado BC do quadrado ABCD, marcam-se os pontos "E" e "F" tais que $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{3}$ e $\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{4}$. Sabendo-se que os segmentos AF e ED intersectam-se em "P" , qual é, aproximadamente, o percentual da área do triângulo BPE em relação à área do quadrado ABCD?

(A) 2

(B) 3

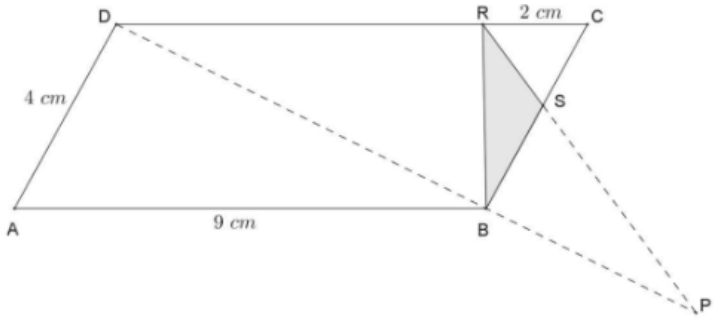
(C) 4

(D) 5

(E) 6

Questão 20

Observe a figura a seguir.



Na figura, o paralelogramo ABCD tem lados 9 cm e 4 cm . Sobre o lado CD está marcado o ponto R , de modo que CR = 2 cm ; sobre o lado BC está marcado o ponto S tal que a área do triângulo BRS seja 1/36 da área do paralelogramo; e o ponto P é a interseção do prolongamento do segmento RS com o prolongamento da diagonal DB. Nessas condições, é possível concluir que a razão entre as medidas dos segmentos de reta DP/BP vale:

(A) 13,5

(B) 11

(C) 10,5

(D) 9

(E) 7,5

- **Concurso de Admissão para turmas de 2025, aplicado dia 11 de agosto de 2024 – Prova Amarela**

Questão 8

Seja ABC um triângulo cujos lados AB, AC e BC possuem medidas iguais a 14, 12 e 10, respectivamente. Sejam “H” o ortocentro de ABC e “w” a circunferência circunscrita ao triângulo dado. Prolonga-se cada um dos segmentos AH, BH e CH, até encontrar “w”nos pontos “P”, “Q” e “R”, respectivamente. Assim, de acordo com os dados, a área do hexágono AQCPBR, em unidade de área, é igual a:

A) $24\sqrt{6}$

B) $36\sqrt{6}$

C) $40\sqrt{3}$

D) $24\sqrt{3}$

E) $48\sqrt{6}$

Quem desejar poderá conferir os gabaritos das questões apresentadas no site oficial do colégio naval por meio do link: https://www.marinha.mil.br/sspm/colegionaval/a-cn-provag

Podemos perceber uma melhora significativa no nível das questões, bem como uma escrita matemática mais refinada, o que torna as questões bem mais difíceis. Um outro fator que eleva o nível de dificuldade deste concurso é a data a qual a prova é aplicada. Geralmente ocorrendo no inicio do segundo semestre do ano letivo, esta data desprivilegia os candidatos que ainda estão cursando o 9º ano do ensino fundamental, fazendo com que a maioria dos alunos aprovados já esteja em séries do ensino médio.

Devido ao grau de dificuldade dos concurso do colégio naval, frente ao nível de dificuldade e excelência da prova, muitos candidatos migram suas atenções para o concurso na Espcex, cujo objetivo tambem é a conquista do oficialato. Frente a esta informação faremos também, um breve resumo histórico e informações relevantes ao concurso da Espcex.

2.2 HISTÓRIA DA ESPCEX

A Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx) é uma das instituições mais respeitadas do sistema de ensino militar brasileiro. Localizada em Campinas, no estado de São Paulo, a escola é responsável por preparar os futuros oficiais combatentes do Exército Brasileiro, funcionando como a porta de entrada para a Academia Militar das Agulhas Negras (AMAN). Sua história é marcada por um constante compromisso com a excelência na formação intelectual, moral e física dos jovens que almejam servir à pátria por meio da carreira militar.

A criação da EsPCEx está inserida em um contexto histórico de modernização e profissionalização das Forças Armadas no Brasil. Até a década de 1930, a preparação dos oficiais era feita diretamente na Escola Militar do Realengo, no Rio de Janeiro,

que oferecia um curso completo de formação. No entanto, a crescente complexidade das exigências militares e acadêmicas levou à criação de uma escola preparatória que antecedesse a formação definitiva dos oficiais. A EsPCEx foi fundada oficialmente em 1942, por meio do Decreto-Lei nº 4.272, e sua sede inicial foi instalada em Porto Alegre, no Rio Grande do Sul.

No entanto, foi somente em 1959 que a escola foi transferida para Campinas, onde se encontra até hoje. A escolha da nova sede visava proporcionar melhores condições estruturais e geográficas para o desenvolvimento de suas atividades. Desde então, a EsPCEx consolidou-se como referência na formação de cadetes, oferecendo um curso preparatório de um ano letivo, em regime de internato, voltado exclusivamente para jovens do sexo masculino até 2021, quando passou a admitir também candidatas do sexo feminino, marcando uma nova fase na história da instituição.

A estrutura curricular da EsPCEx abrange disciplinas das áreas de Ciências Exatas, Humanas e Biológicas, como Matemática, Física, Química, Geografia, História, Língua Portuguesa e Língua Inglesa, além de Instrução Militar, Educação Física e Formação Moral e Cívica. Esse currículo tem como objetivo preparar os alunos não apenas para os desafios acadêmicos da AMAN, mas também para a vida militar, com foco no desenvolvimento da liderança, disciplina, ética e espírito de corpo.

A rotina dos alunos da EsPCEx é rigorosa e cuidadosamente planejada. Desde as primeiras horas da manhã até o final do dia, os alunos participam de atividades que combinam o ensino intelectual com treinamento físico, instrução militar e atividades de formação cívica. Esse modelo visa forjar o caráter do futuro oficial, desenvolvendo atributos como responsabilidade, resiliência, senso de dever e compromisso com os valores institucionais do Exército Brasileiro.

Ao longo de sua trajetória, a EsPCEx formou milhares de jovens que seguiram carreira no Exército, muitos dos quais se tornaram generais, instrutores e líderes nas mais diversas áreas da corporação. O prestígio da escola é resultado de sua capacidade de aliar tradição e inovação, mantendo-se atualizada diante das mudanças sociais e tecnológicas, sem abrir mão dos princípios que norteiam a vida militar.

Além disso, a escola cumpre importante papel social ao oferecer, por meio de concurso público nacional, acesso gratuito à educação de qualidade e à carreira militar, sendo uma oportunidade concreta para jovens de todas as regiões do país alcançarem uma formação sólida e uma profissão honrada.

Em conclusão, a EsPCEx representa uma das mais importantes instituições do ensino militar brasileiro. Sua história é marcada pela dedicação à formação de líderes comprometidos com a defesa da soberania nacional e os ideais republicanos. Ao longo das décadas, a escola manteve-se fiel ao seu lema: “Onde a carreira de oficial começa”, sendo um verdadeiro símbolo da excelência, da meritocracia e do espírito patriótico que caracterizam o Exército Brasileiro (EB).

A estrutura do concurso compreende diversas etapas eliminatórias e classificatórias, sendo a primeira delas o exame intelectual, composto por provas objetivas e uma redação. Essa avaliação é dividida em dois dias consecutivos. No primeiro dia, os candidatos enfrentam questões de Português, Física e Química, além da elaboração de uma redação dissertativa. Já no segundo dia, são aplicadas questões de Matemática, História, Geografia e Inglês. Todas as disciplinas seguem o conteúdo programático do ensino médio, sendo as questões elaboradas pela própria EsPCEx, o que confere especificidade ao estilo da prova.

Além da avaliação intelectual, o concurso exige que os candidatos sejam submetidos à inspeção de saúde, ao exame de aptidão física e à avaliação psicológica. A inspeção de saúde verifica a condição física e clínica dos concorrentes, enquanto o exame de aptidão física aplica testes como corrida, flexões de braço e abdominais, com padrões diferenciados para homens e mulheres. A avaliação psicológica, por sua vez, busca identificar traços de personalidade compatíveis com a carreira militar, como disciplina, equilíbrio emocional, resiliência e capacidade de liderança.

Para participar do processo seletivo, é necessário que o candidato atenda a critérios específicos, como possuir nacionalidade brasileira, estar em dia com as obrigações eleitorais e militares, ter entre 17 e 22 anos no ano da matrícula, além de ter concluído ou estar cursando o último ano do ensino médio. Em relação à estatura mínima, exige-se 1,60m para homens e 1,55m para mulheres, salvo exceções

devidamente comprovadas. Desde 2021, o concurso passou a admitir candidatas do sexo feminino, consolidando um marco na história da instituição em direção à equidade de gênero.

Outro fator de destaque é a gratuidade da formação, que oferece aos alunos alimentação, alojamento, assistência médica e fardamento, além de uma remuneração mensal enquanto estiverem vinculados ao Exército. Ao término do curso de formação – um ano na EsPCEx e quatro na AMAN – os concluintes são declarados aspirantes-a-oficial, ingressando formalmente na carreira como oficiais de carreira da Linha Bélica.

O concurso da EsPCEx é, portanto, mais do que uma seleção para um curso de nível médio-militar: é a porta de entrada para uma trajetória profissional marcada pelo compromisso com a pátria, o desenvolvimento pessoal e a liderança institucional. A preparação para o certame exige dos candidatos não apenas domínio acadêmico, mas também disciplina, resiliência e vocação para o serviço militar. Dessa forma, a EsPCEx continua a desempenhar papel fundamental na formação das futuras lideranças do (EB), mantendo-se como símbolo de tradição, mérito e excelência no ensino militar do país.

2.2.1 ANALISE DAS PROVAS ANTERIORES

Assim como fizemos em relação ao concurso do colégio naval e com a intenção de permanecer com uma análise segura, tomamos como base os últimos 17 concursos observando a recorrência dos assuntos abordados em cada uma das questões. Na Tabela 2 apresenta-se os assuntos de matemática e suas respectivas recorrências entre os anos de 2009 e 2025. O números apresentados em cada linha indica a quantidade de aparições de determinado assunto ao longo dos anos. A última coluna apresenta o percentual de recorrências de cada assunto.

Tabela 2 - assuntos de matemática e suas respectivas recorrências entre os anos de 2009 e 2025

INCIDÊNCIA DE ASSUNTOS CN	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	TOTAL	PERCENTUAL
Conjuntos e conjuntos numéricos						1								2			1	4	1,2%
Progressões			2	2	2	1	1	2	1		1		1	2	1	1	1	18	5,4%
Trigonometria	2	2		3	2	1	3		1	3	2	2	2		1	1	2	27	8,1%
Números complexos				1	2	2	1	1	1	2	1		1	1	1	1		15	4,5%
Polinômios				3	2	2	2	3	2	1	1	3	1		1	1	4	26	7,8%
Relações e funções	1	2	1	4	3	1	3	2		1	1		1	1		3		24	7,2%
Função do 1º grau	1				1								1		1			4	1,2%
Função quadrática	1	1	1			1	1	1				2		1	1	1		11	3,3%
Função exponencial		2	1	3	1	1	1		1	1	2			1	1	1	1	17	5,1%

Logarítmo	2	2	2	2	1	1		1		2	1		1	1	1	1	1	19	5,7%
Função modular	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1		1	1		1	13	3,9%
Matrizes e Determinantes	1				1	1	1		1	1		1		2	1	1		11	3,3%
Sistemas lineares	1	1	2	1				1	1			1	1	1	1	1	1	13	3,9%
Análise combinatória	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15	4,5%
Triângulo de Pascal e Binômio de Newton							1	1	2				1	1	1			7	2,1%
Probabilidade			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15	4,5%
Geometria plana						2			2	1	3	2	3		2	1	3	19	5,7&
Geometria analítica – Reta				1			1		1		1		1	1		1		7	2,1%
Geometria Analítica – c=Circunferência				1	1	1		2	1	1	1	2	1	1		1		13	3,9%
Geometria Analítica – Cônicas				2		1	1	1	1	1	1		1		2	1	1	13	3,9%
Geometria Espacial da posição	1	1		2	2					1		1	1	1	1		1	12	3,6%
Geometria espacial métrica	2	1	2	3	1	2	1	2	2	2	2	3	1	1	1	2	1	29	8,7%
Total por prova	14	14	14	30	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	332	100%

Fonte: Elaborado pelo autor

O processo seletivo para EsPCEx é reconhecido por seu elevado nível de exigência, demandando dos candidatos uma preparação aprofundada e estratégica. A disciplina de Matemática, em particular, representa um componente curricular de grande peso e complexidade. Neste contexto, a análise do histórico de incidência dos conteúdos abordados nas avaliações anteriores emerge como uma ferramenta metodológica crucial, tanto para a orientação de estudos dos candidatos quanto para a compreensão da estrutura e do foco pedagógico do exame. O presente estudo teve como objetivo analisar os dados de recorrência dos tópicos de Matemática no período de 2009 a 2025, a fim de identificar padrões, tendências e as áreas de maior relevância que compõem o perfil da prova.

- **Análise dos Dados**

A análise quantitativa, baseada em um universo de 332 questões distribuídas ao longo de 17 anos, revela uma distribuição heterogênea dos conteúdos. Observa-se que, embora o edital do concurso abranja um vasto espectro da matemática do ensino médio, a banca examinadora demonstra uma clara predileção por determinados assuntos.

Os dados obtidos na Tabela 2, apontam que o campo da Geometria é, de longe, o mais explorado, somando suas vertentes. A Geometria Espacial Métrica lidera como o tópico de maior incidência isolada, com 29 questões, correspondendo a 8,7% do total. Em seguida, a Geometria Plana, com 19 questões (5,7%), e as Geometrias Analíticas (Reta, Circunferência e Cônicas), que juntas somam 33 questões (9,9%), consolidam a Geometria como um pilar central do exame, totalizando mais de um quarto de todas as questões do período analisado.

Outro tópico de notável destaque é a Trigonometria, que figura com 27 questões

(8,1%), demonstrando sua importância e presença constante ao longo dos anos. Logo após, Polinômios (7,8%) e o estudo de Relações e Funções (7,2%) completam o grupo dos assuntos mais recorrentes, sendo este último um tema basilar que serve de alicerce para outros, como as funções quadrática, exponencial e logarítmica.

Em um patamar de incidência intermediária, mas ainda assim relevante, encontram-se Função Exponencial (5,1%), Logaritmo (5,7%), Progressões (5,4%), Análise Combinatória (4,5%) e Probabilidade (4,5%). Estes temas, embora não liderem o ranking, possuem uma presença consistente e regular na maioria das edições do concurso, indicando a necessidade de um domínio sólido por parte dos candidatos.

Por outro lado, alguns conteúdos apresentam uma frequência notavelmente baixa. É o caso de Conjuntos e Conjuntos Numéricos (1,2%), Função do 1º Grau (1,2%) e Triângulo de Pascal e Binômio de Newton (2,1%). Embora menos recorrentes, sua presença, ainda que esporádica, sinaliza que nenhum tópico do edital deve ser completamente negligenciado.

A análise estatística da prova de Matemática da EsPCEx no período de 2009 a 2025 permite concluir que o exame possui um perfil de cobrança bem definido. Há uma ênfase clara e persistente em Geometria (espacial, plana e analítica), Trigonometria e Polinômios. Esses eixos temáticos constituem o núcleo duro da avaliação, demandando maior dedicação e tempo de estudo na preparação dos candidatos.

A recorrência consistente de temas como Funções, Logaritmos e Análise Combinatória reforça a necessidade de uma formação abrangente. A baixa frequência de outros tópicos não indica sua ausência, mas sim uma abordagem mais pontual por parte da banca. Portanto, os dados aqui apresentados servem como um mapa estratégico, permitindo que o planejamento de estudos seja otimizado e direcionado para as áreas de maior probabilidade de cobrança, no entanto, sem abrir mão de uma cobertura completa do conteúdo programático, o que se mostra como a abordagem mais segura e eficaz para o sucesso no concurso.

Embora esta pesquisa tenha seu ponto focal voltado para o colégio naval

deixamos esta experiência como forma de instrução para os alunos que desejarão participar do concurso da EsPCEx. Aproveitamos também para dizer que assuntos pertinentes aos tópicos apresentados também serão abordados em nossa ferramenta educacional.

Foi apresentado aqui, na seção anterior o surgimento do EsPCEx, tendo isso, para mostrar a evolução no nível das questões nos concursos de acesso a Escola, apresento-lhes algumas questões de geometria espacial, mas precisamente “métricas nos sólidos geométricos”

- **PROVA DA ESPCEX DE 1996**

Questão 27

O volume, em cm³, da esfera inscrita em um cone de revolução, cujo raio da base é 5 cm e cuja altura é 12 cm, é:

A) $\frac{1000\pi}{162}$

B) $\frac{2000\pi}{27}$

C) $\frac{3000\pi}{108}$

D) $\frac{4000\pi}{81}$

E) $\frac{5000\pi}{9}$

Questão 29

A área da base de uma pirâmide quadrangular regular é 36 m² . Se a altura da pirâmide mede 4 m, sua área total, em m² , é igual a:

A) 48

B) 54

C) 96

D) 120

E) 144

Questão 30

Um trapézio isósceles, cujas bases medem 2 cm e 4 cm e cuja altura é 1 cm, sofre

uma rotação de 180° em torno do eixo que passa pelos pontos médios das bases. O volume, em cm³ , do sólido gerado por essa rotação é:

A) $\frac{4\pi}{3}$

B) $\frac{5\pi}{3}$

C) 2π

D) $\frac{7\pi}{3}$

E) $\frac{8\pi}{3}$

- **PROVA DA ESPCEX 2009**

Questão 6

Uma esfera de 2 cm de raio é colocada no interior de um vaso cônico, conforme a figura a seguir. O vaso tem 12 cm de altura e sua abertura é uma circunferência com 5 cm de raio. Nessas condições, a menor distância (d) entre a esfera e o vértice do cone é:

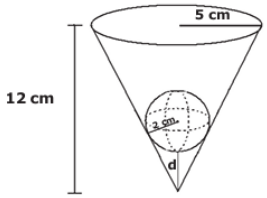
[A] 3,0 cm

[B] 3,2 cm

[C] 3,4 cm

[D] 3,6 cm

[E] 3,8 cm



Desenho Fora de Escala

Questão 7

Para obter o sólido geométrico representado abaixo, partiu-se de um cubo de aresta L e retirou-se de cada um dos vértices desse cubo uma pirâmide de base triangular com as arestas laterais medindo L/4, conforme a figura. Denominando-se V o volume do cubo a partir do qual foi obtido o sólido, pode-se concluir que o volume desse sólido é:

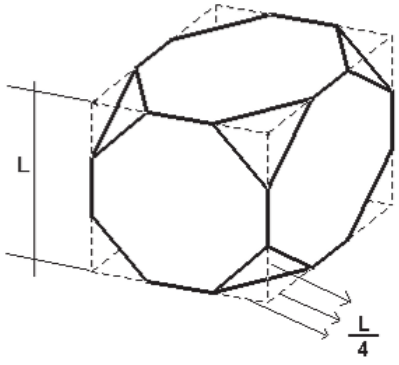
A) $\frac{23}{24}V$

B) $\frac{47}{48}V$

C) $\frac{71}{72}V$

D) $\frac{95}{96}V$

E) $\frac{143}{144}V$



- **PROVA DA ESPCEX 2024**

Questão 11

Um paralelepípedo reto tem como seção reta um paralelogramo ABCD, cujos lados AB e BC medem, respectivamente, 20 cm e 10 cm e o angulo DAB mede 30°. Sabendo que a altura do paralelepípedo é igual a 2/3 do perímetro da seção reta, o seu volume é:

A) 2000 cm³

B) 4000 cm³

C) 6000 cm³

D) $2000\sqrt{3}\ cm^3$

E) $4000\sqrt{3\ cm^3}$

Olhando pela amostragem selecionada, percebemos quue não existe muita mudança no nível das questões. Um outro fato relevante é que em todos os concursos analisados, há, ao menos uma questão de métricas nos sólidos geométricos. A quem desejar podera encontrar os gabaritos das questões apresentadas no site oficial da Espcex por meio do link: https://www.espcex.eb.mil.br/index.php/concurso/provas-anteriores

2.3 INVESTIGAÇÃO SOBRE O TEMA EM BANCOS DE DISSERTAÇÕES

Este estudo apresenta uma análise das investigações realizadas com o objetivo de avaliar até que ponto o tema — trilhas pedagógicas e recursos digitais para o aprendizado de geometria e suas aplicações nos concursos de acesso ao CN e EsPCEx — já foi explorado. Tal análise é de suma importância para evitar a duplicação de pesquisas e garantir que nosso estudo contribua de maneira significativa e inovadora para a comunidade acadêmica e para os estudantes.

Conforme observado por Mattos (2020, p.177): "O referencial teórico de um trabalho acadêmico-científico deve mostrar ao leitor o estado da arte sobre o tema ou, pelo menos, trazer os autores mais relevantes sobre o assunto.”; é precisamente isso que estamos proporcionando: uma oportunidade para que o leitor compreenda as investigações já realizadas sobre o tema, conheça os resultados obtidos até o

momento e, assim, consiga estabelecer um paralelo com as proposições desta pesquisa.

Para abordar a questão central, Realizou-se uma revisão sistemática da literatura sobre dissertações nacionais o acesso ao CN e EsPCEx. A pesquisa tem por objetivo encontrar dissertações que conversem com o tema proposto para que seja possivel acrescentar tópicos relevantes sobre esse assunto.

De acordo com Noronha e Ferreira (2020) produções bibliográficas desempenham um papel crucial na comunicação científica, permitindo que os pesquisadores compartilhem seus achados e colaborem para o desenvolvimento de novas teorias e práticas.

A principal fonte de pesquisas para a escolha das dissertações foram a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), o Banco de Dissertações do PROFMAT e Catálogo de Teses e Dissertações da Capes.

As principais palavras chaves pesquisadas foram: Geometria; Colégio Naval; Espcex; Trilhas Pedagógicas; Estudar para concursos militares; aplicativo para aprender geometria, geometria no Colégio Naval, Geometria na EsPCEx e gamificação

Primeiramente foi realizada uma pesquisa independente em relação as palavras chaves, “Colégio Naval”, “Espcex”, “Escola Preparatória para Cadetes do Exército” e “Concursos Militares”, em todos os bancos de dissertações foram usadas as mesmas palavras chaves e revelou a tabela a seguir:

Tabela 3: Dissertações encontradas

Palavras-chaves	**BDTD**	**PROFMAT**	**CAPES**
Colégio Naval	2	2	9
Espcex	11	0	7
Concursos Militares	73	1	33

Fonte: Elaborado pelo autor

Desta pesquisa conseguimos coletar uma dissertação no banco nacional de dissertações do PROFMAT que tem relação com nosso tema. A mesma dissertação também apareceu na pesquisa feita no catálogo de teses CAPES

Com esta pesquisa inicial constatamos que o assunto a qual desejamos pesquisar é bem restrito.

Na (BDTD) quando foi utilizada a palavra-chave “áreas das figuras planas” foram encontradas 955 dissertações, então acrescentamos a palavra-chave “gamificação” resultou em duas dissertações relacionadas, destas duas, apenas uma fazia sentido com o teor desta pesquisa. Ao executar a mesma pesquisa usando o termo trilha pedagógica, foi possível reduzir a mais duas dissertações que conversam com o tema da pesquisa.

No banco de dissertações do PROFMAT, ao usar a palavra-chave “áreas das figuras planas”, foram encontrados 172 resultados. Ao refinar a busca com a palavra “aplicativos”, reduzimos o número para um resultado coerente. Além disso, ao iniciar a busca com a palavra-chave “geometria espacial”, encontramos mais dois excelentes resultados.

Já no catálogo de dissertações da capes encontramos 182 resultados para “área de figuras planas” e 899 para “geometria espacial”, mas ao aplicarmos o refinamento usando a palavra “trilha” reduzimos a duas dissertações importantes no quesito geometria espacial e em relação a figuras planas mais um importante tópico, resultando então em 9 dissertações importantes que nos dará subsídios para avançarmos com a pesquisa.

Tabela 4: Dissertações selecionadas

Plataforma	Autor	Tipo	Título	Instituição	Ano	LINK
BDTD	FAGNER DE ALMEIDA CARVALHO DOS SANTOS	Dissertação	ANÁLISE SOBRE A PROVA DE ACESSO AO COLÉGIO NAVAL RELACIONANDO COM OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS E LIVROS DIDÁTICOS	UFRRJ	2019	https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=50522&id2=170510641
BDTD	LEONARDO, MARIA ZILANDA DE ANDRADE	Dissertação	METODOLOGIAS ATIVAS E TECNOLOGIAS DIGITAIS MÓVEIS: CAMINHOS PARA POTENCIALIZAR A APRENDUZAGEM DE ÁREAS.	UEPB	2021	https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/4020/5/PDF%20-%20Maria%20Zilanda%

						20de%20Andrade%20Leonardo.pdf
BDTD	GEHRKE, TATIÉLE TAMARA	Dissertação	TRILHOS MATEMÁTICOS COMO CONTEXTO PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL COM ESTUDANTES DO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO	CENTRO UNIVERSITARIO FRANCISCO	2017	http://www.tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/bitstream/UFN-BDTD/588/5/Dissertacao_TatieleTamaraGehrke.pdf
PROFMAT	RAYANNE ALMEIDA DA COSTA	Dissertação	O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES: UMA PROPOSTA DE PRÁTICAS DE ENSINO DINÂMICAS E MOTIVADORAS.	UFPA	2023	https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=72466&id2=171056319
PROFMAT	KATIA REGINA VIEIRA	Dissertação	O USO DO MINECRAFT EDUCATION COMO FERRAMENTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA: ÁREAS, VOLUMES E PROPORÇÕES	UTFPR	2022	https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=68366&id2=171053951
PROFMAT	WAGNER FIGUEIREDO DA SILVEIRA	Dissertação	PENSAMENTO COMPUTACIONAL NO ENSINO DO CÁLCULO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA	UENF	2021	https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=61800&id2=171052993
Capes	LUCIANA CRISTINA DE MELO TAVARES	Dissertação	A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO A FOTOGRAFIA, OS AMBIENTE NÃO FORMAIS DE ENSINO E OS OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM	UEG	2016	https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3686708#
CAPES	LUCIENE NUNES DA SILVA	Dissertação	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM ATRAVÉS DO JOGO “TRILHANDO NA GEOMETRIA ESPACIAL”, FUNDAMENTADA NA TEORIA DE GALPERIN, NOS ESTUDANTES DA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO DA ESCOLA AGROTÉCNICA DA UFRR	UER	2019	https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7676395#
CAPES	FRANCINE DAHM	Dissertação	ÁREA E PERÍMETRO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS: PERCEPÇÕES E CRIAÇÕES ATRAVÉS DE MALHA QUADRICULADA E O SOFTWARE GEOGEBRA	UFRGS	2019	https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=9114866#

Fonte: Elaborado pelo Autor

Não foi possível encontrar muitos temas relevantes para a pesquisa em questão, mas os 9 encontrados foram bastante significativos, mesmo não correspondendo exatamente ao que desejávamos averiguar sobre as escolas militares. A busca nos permitiu compreender algumas questões importantes relacionadas à nossa temática.

A dissertação de Fagner de Almeida (2019) nos traz uma informação importante quanto a escolhas de bons materiais didáticos quando se refere a preparação dos candidatos ao Colégio Naval. Essa boa escolha propicia ao candidato uma melhor abrangência quanto aos tópicos exigidos pelo concurso.

A dissertação de Leonardo e Maria traz à tona a importância o uso de novas tecnologias para o aprendizado de matemática, a gamificação como ferramenta motivadora e os aplicativos móveis como vetores acessíveis para a naturalidade da inserção dos tópicos de matemática.

Gehrke (2017), traz em sua dissertação uma temática bastante relevante a este projeto. A importância das trilhas pedagógicas para a evolução acadêmica e aprendizagem para os alunos, além disso ainda traz à tona a importância da de se estabelecer o pensamento intrínseco, ou seja, este pensamento partir de dentro para fora.

Já Rayane (2023), em sua dissertação, traz muitos links com este projeto, pois também tratou de trilhas pedagógicas, universo digital e Geometria. Esses assuntos foram muito relevantes para a dissertação da autora citada e trazem significativa importância a este projeto, com a exceção de não estarem direcionados aos concursos do CN e da EsPCEx.

Na dissertação de Katia Regina (2022), ela traz como ferramenta principal para aprendizado de áreas e volumes um jogo específico, e fazendo uso da gamificação, traz à tona a importância dos jogos de forma responsável atrelada a trilhas pedagógicas a evolução no processo de ensino aprendizagem.

Wagner (2021), já insere o pensamento computacional como prática pedagógica para o aprendizado de áreas das figuras planas na educação básica. Este trabalho se

torna relevante, porque teoricamente os candidatos que concorrem as vagas de acesso ao colégio naval e EsPCEx, ambos precisam de habilidades adquiridas na educação básica.

Luciana (2016) aborda a geometria no ensino médio de uma forma não convencional. Considerando a importância dos tópicos de geometria, que estão sempre presentes nos concursos da ESPCEX, este trabalho se torna extremamente relevante, especialmente pela sua abordagem inovadora, conforme pretendemos propor.

Já Luciene (2019), em sua dissertação, faz uma abordagem por resolução de problemas. Seu trabalho, pelo fato de que os concursos, a maioria de suas questões se apresentam na forma de problemas, muitas das vezes causando dificuldade. Um outro fator relevante foi o fato de fazer uma conexão com as trilhas pedagógicas, de geometria, a qual é de muita relevância a este projeto.

E por último, a dissertação de Francine 2019, nos revela a conexão geoplano e o geogebra tem na aprendizagem das áreas das figuras planas. Esta relação o antigo e o contemporâneo, nos brilhou os olhos. Perceptivamente quando aplicados de forma organizada e adequada, ambos os processos trazem relevância e eficácia ao processo de ensino aprendizagem.

Por fim, é importante ressaltar que não encontramos muitos trabalhos que nos fornecessem informações relevantes sobre o aprendizado de geometria para os concursos do CN e da EsPCEx. De acordo com esta pesquisa, isso revela que escolhemos um tema basicamente inédito, o que nos motiva ainda mais a investigá-lo.

3. RECURSOS PEDAGÓGICOS E O APRENDIZADO DE GEOMETRIA

O ensino de geometria ocupa papel central na formação matemática de estudantes da Educação Básica, pois desenvolve habilidades essenciais como o raciocínio espacial, a percepção de formas e a compreensão de relações espaciais. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o domínio da geometria é fundamental não apenas para a construção do pensamento lógico-matemático, mas também para a formação cidadã e científica (BNCC, 2017). Nesse sentido, os recursos

pedagógicos, como materiais manipulativos, trilhas pedagógicas, técnicas de estudo autônomo e, com especial destaque, os recursos digitais, atuam como mediadores fundamentais no processo de ensino-aprendizagem. Os recursos pedagógicos, sobretudo os digitais, contribuem de maneira eficaz e transformadora para a aprendizagem da geometria na Educação Básica.

Os recursos manipulativos concretos, como blocos lógicos, tangram, geoplano e cubos multibase, já são reconhecidos por seu papel facilitador na visualização e compreensão de conceitos geométricos abstratos. Lorenzato (1999) ressalta que tais instrumentos viabilizam o contato direto com as propriedades geométricas, favorecendo a construção de significados por meio da experiência tátil e visual. A BNCC e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam que tais recursos devem ser utilizados para permitir a observação, a experimentação e a formulação de hipóteses, alinhando-se a uma perspectiva construtivista de aprendizagem.

Entretanto, os recursos digitais se destacam de forma contundente por sua eficácia comprovada na potencialização da aprendizagem geométrica. *Softwares* como o GeoGebra, ambientes de realidade aumentada e plataformas de simulação interativa promovem experiências imersivas e altamente personalizáveis. Fiorentini e Miorim (2005) argumentam que a dinamicidade e o *feedback* imediato proporcionados por esses recursos digitais favorecem o pensamento conjectural e a exploração ativa dos conceitos geométricos. É preciso reconhecer que o nível de visualização, manipulação e interatividade oferecido pelos recursos digitais não pode ser replicado por materiais estáticos ou unidimensionais. Ao permitir transformações geométricas em tempo real, tais como rotações, reflexões e ampliações, esses recursos estimulam a compreensão profunda das propriedades espaciais.

Além disso, o uso estratégico de trilhas pedagógicas digitais tem se mostrado uma abordagem promissora. Elas possibilitam a construção de percursos de aprendizagem adaptativos, com atividades sequenciadas que respeitam o ritmo e as necessidades dos alunos. Essas trilhas, quando integradas a plataformas tecnológicas, promovem a personalização do ensino e tornam visível o progresso do estudante, facilitando intervenções pedagógicas mais precisas.

As técnicas de estudo autônomo, por sua vez, ganham ainda mais força quando apoiadas por recursos digitais. O acesso a videoaulas, tutoriais interativos, simuladores e exercícios com correção automática favorece a autonomia intelectual e o desenvolvimento de habilidades metacognitivas. Dante (2011) reforça que a aprendizagem da matemática exige persistência e reflexão, elementos que podem ser amplificados pelo uso de tecnologias que incentivam o protagonismo do aluno na resolução de problemas e na autoavaliação.

Importante destacar que a BNCC (2017) enfatiza o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs) como parte integrante do processo pedagógico. No eixo da geometria, isso se traduz na incorporação de ferramentas que ampliam as possibilidades de representação, experimentação e validação de ideias matemáticas. Dessa forma, os recursos digitais deixam de ser acessórios para se tornarem componentes estruturantes da prática pedagógica contemporânea.

No entanto, o uso eficaz desses recursos exige planejamento e formação docente adequados. Pavanello (2005) observa que, sem intencionalidade pedagógica, mesmo os recursos mais sofisticados podem perder seu potencial. A LDB (Lei nº 9.394/1996) reforça a necessidade de práticas educacionais que promovam a autonomia, a crítica e a criatividade, aspectos diretamente conectados ao uso de ferramentas digitais bem aplicadas no ensino da geometria.

A análise evidencia que os recursos pedagógicos, em especial os digitais, desempenham papel decisivo no processo de ensino-aprendizagem da geometria. Sua eficácia está diretamente relacionada à capacidade de promover experiências interativas, visualmente ricas e cognitivamente estimulantes. Autores como Lorenzato, Dante e Fiorentini mostram que o uso articulado de materiais concretos, trilhas estruturadas e tecnologias digitais contribui para o desenvolvimento integral do pensamento geométrico. Dentre esses, os recursos digitais se destacam como instrumentos transformadores, capazes de ampliar o acesso, a compreensão e o interesse dos estudantes pela geometria, quando utilizados com intencionalidade e fundamentação pedagógica.

Assim, a integração criteriosa e planejada desses recursos torna-se não apenas recomendável, mas imprescindível para uma prática docente alinhada às exigências

da educação contemporânea. Para futuras investigações, recomenda-se analisar o impacto específico de plataformas digitais interativas sobre o desempenho geométrico em diferentes etapas da Educação Básica, bem como as competências docentes necessárias para sua mediação eficaz.

3.1 O QUE DIZ O PCN E BNCC QUANTO AO PENSAMENTO GEOMETRICO E A UTILIZAÇÃO DE RECURSOS DIGITAIS

Para dar base a esta pesquisa teremos inicialmente como base os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) no que tange não só aos tópicos relevantes de Geometria, mas também o que diz em relação a utilização de recursos didáticos tais como trilhas pedagógicas e uso e produção de aplicativos para computador e móveis.

Inicialmente traremos um olhar para o ensino fundamental e àquilo que torna relevante ao aprendizado de geometria atrelado a práticas pedagógicas digitais gamificadas se apropriando das trilhas pedagógicas. Tendo isso fica fácil dizer que utilizar jogos e itinerários pedagógicos favorecem o aprendizado e torna mais atrativo e empolgante o aprendizado de determinados assuntos não só de geometria, como de matemática no geral

> Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância a base da atividade matemática. (Brasil, p 19, 1997)

Fazer um link entre a geometria e a álgebra não só expande os níveis de aprendizagem de forma horizontal, mas também de forma vertical, permitindo assim, caminhar de forma cada vez mais profunda no campo geométrico que se está procurando evoluir. Quando conseguimos introduzir recursos digitais e gamificação as aulas, quase que em sua totalidade, torna mais atrativa e porventura mais significativa a aprendizagem.

> Há um razoável consenso no sentido de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os

> campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria). (Brasil, p 24, 1997)

A exploração de recursos digitais e jogos faz com que os estudantes não só utilizem, mas também seja capaz de produzir conhecimento. Uma outra vertente interessante é a apropriação de conhecimentos que se da por meio de associações com jogos que já utilizam, mas quando vistos por outro olhar, engrandece cada vez mais o processo de aprendizagem de forma lúdica.

> Por meio dos jogos os estudantes não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia (jogos simbólicos): os significados das coisas passam a ser imaginados por elas. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagens, criadoras de convenções, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações. (Brasil, p 35, 1997)

A geometria é um campo muito fértil onde podemos explorá-la de forma visual ou por meio de manipulação de objetos, sejam eles físicos ou tecnológicos. Haja vista que já conhecemos uma gama imensa de recursos físicos tais como: tangram e a geometria das dobraduras, mas também os tecnológicos, tais como o logo e geogebra.

> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.
> [...]Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (Brasil, p 86, 2018).

A necessidade de entender o espaço e as formas a qual estamos inseridos nos permite entender a realidade geométrica e os conceitos sobre localização e reconhecimento das formas geométricas.

> Os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. (Brasil, p 39, 2018)

É sabido que não existem fórmulas mágicas para o processo de aprendizagem, mas é obvio que determinada abordagem faz com que esse processo fique mais nítido e agradável para nossos estudantes. Pensando nisso, teremos como base os itinerários pedagógicos por meio de jogos como recursos condutores para o processo

de aprendizagem dos tópicos de geometria mais recorrentes nos concursos de admissão do Colégio Naval e Espcex.

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. Dentre elas, destacam-se a História da Matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução. (Brasil, p 42, 2018)

Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes. Enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório necessárias para aprendizagem da Matemática.

Já no Ensino Médio esta abordagem é de forma mais concentrada porque além de fazer associações, o aluno deverá ser capaz de construir conjecturas. Organizar e articular de forma gradativa os conhecimentos de geometria e favorecer uma construção de conhecimento escalonada e gradual. Esta organização se dará por níveis sempre respeitando a individualidade de cada estudante.

> Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (Brasil, p 526, 2018)

Fazer boas escolhas sempre é um excelente passo para um ganho pedagógico eficiente. Estudar para ser admitido nestas escolas é uma aventura Árdua, porém palpável, mas quando feito de forma organizada e executando-as de forma ampla explorando os diversos recursos disponíveis, aproxima cada vez mais suas chances de sucesso.

> Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões. (Brasil, p 526, 2018)

A relação e interação entre os diversos assuntos de matemática também traz

relevância as ao processo de evolução acadêmica. No ambiente dos concursos militares uma questão é dita difícil quando ela correlaciona vários assuntos numa mesma questão. Fazendo com que o candidato tenha que transitar pelas a tríplice geometria, álgebra e aritmética.

> Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (Brasil, p 526, 2018)

3.2 GEOMETRIA SEGUNDO A TEORIA DOS VAN HIELE

O pensamento geométrico segundo a teoria de van Hiele, desenvolvida por Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof, é um modelo para entender como os estudantes aprendem e compreendem geometria. Essa teoria identifica cinco níveis hierárquicos de desenvolvimento cognitivo em relação à compreensão geométrica. Cada nível representa um estágio distinto de compreensão e raciocínio, sendo necessário dominar cada nível antes de passar ao próximo.

No nível 0 os alunos identificam figuras geométricas com base em suas formas e aparências globais, sem considerar propriedades ou relações internas. No nível 2 os alunos começam a reconhecer e nomear propriedades das figuras, mas ainda não compreendem as relações entre essas propriedades. Ao chegarem no nível 3 já são capazes de perceber e organizar as propriedades e relações das figuras, compreendendo as definições formais e utilizando-as para classificar figuras. Já no nível 4 eles começam a compreender o raciocínio lógico e a construção de provas geométricas. Eles podem fazer deduções e compreender a relação entre teoremas e definições. Por fim, no 5º nível, os alunos trabalham com sistemas axiomáticos e compreendem a geometria de maneira abstrata, podendo comparar diferentes sistemas geométricos. Este nível é tipicamente atingido apenas em estudos avançados, como na universidade

A separação em níveis é consagrada por meio dos estudos do casal Van Hiele e muito difundida do brasil por Nasser, tendo isso nossos itinerários físicos e digitais seguirão as práticas já testadas e analisadas, mas de uma forma diferenciada.

> A aplicação da metodologia de ensino baseada na teoria de Van Hiele, também considerada um modelo de aprendizagem, é uma possível estratégia para a reversão da problemática no ensino da geometria, pois, por ter sido originada em sala de aula, a teoria aliou os aspectos cognitivos e pedagógicos do ensino da geometria (Nasser, p 12, 2010)

Ascender interruptores geométricos como forma de fazer com que nosso cérebro caminhe logicamente para a resolução de uma questão recorrente em tais concursos e além disso termos ganhos pedagógicos eficientes para que possamos em futuros contatos com tais assuntos possam acender estes interruptores de forma instantânea.

> Nos trabalhos iniciais, os van Hieles desenvolveram a estrutura para uma experiência com os níveis de pensamento, com o objetivo de ajudar o estudante a desenvolver insight em geometria. Eles definem insight como se segue. Uma pessoa mostra insight se: (a) é capaz de se desempenhar numa possível situação não usual; (b) desenvolve corretamente e adequadamente as ações requeridas pela situação; (c) desenvolve deliberadamente e conscientemente um método que resolva a situação. (Kaleff, p 4, 1994)

Nos apropriaremos destes referenciais teóricos para dar base teóricas a nosso projeto, tendo em vista relevância de suas pesquisas e em concordância com elas, tomaremos como base seus pensamentos.

4. METODOLOGIA

A presente pesquisa adota uma abordagem metodológica mista, caracterizada pela integração de procedimentos qualitativos e quantitativos. Essa opção metodológica encontra respaldo em Creswell (2007), que defende a complementaridade entre os dois paradigmas investigativos, considerando que, quando utilizados de forma articulada, permitem ao pesquisador captar tanto os aspectos objetivos quanto subjetivos do fenômeno estudado. Assim, buscamos compreender não apenas os resultados mensuráveis de aprendizagem, mas também as percepções e vivências dos alunos durante o processo de ensino-aprendizagem de conceitos geométricos.

A investigação foi realizada com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada localizada no município de Nova Iguaçu, no estado do Rio de

Janeiro. Os participantes tinham faixa etária entre 13 e 15 anos, compondo um grupo heterogêneo em termos de desempenho escolar. A adesão ao projeto se deu de forma voluntária, mediante manifestação de interesse por parte dos estudantes e autorização formal da instituição escolar, bem como dos próprios alunos e de seus responsáveis legais. Conforme exigência ética para pesquisas que envolvem seres humanos, o projeto foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da universidade promotora, em conformidade com a Resolução nº 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde, que dispõe sobre as normas aplicáveis a pesquisas nas Ciências Humanas e Sociais.

Cumpridas todas as exigências legais e éticas, e assegurando a isonomia no tratamento dos participantes, foi possível iniciar a coleta de dados de forma presencial. Como objetivo principal, desejamos verificar a eficácia de um recurso educacional digital no desenvolvimento das habilidades geométricas dos alunos. Reconhecemos, no entanto, conforme assinala Gatti (2005), que o contexto educacional é multifacetado e que resultados iniciais podem não representar, de imediato, o potencial pleno do recurso, exigindo, por vezes, adaptações metodológicas ao longo do processo investigativo.

A pesquisa foi estruturada em três momentos principais. Inicialmente, os alunos foram submetidos a um conjunto de práticas pedagógicas convencionais, sem o uso de recursos digitais. Essa etapa inicial teve como finalidade colher impressões e identificar o nível de interesse dos discentes diante de métodos de ensino tradicionais. Em seguida, aplicamos um teste diagnóstico com o intuito de identificar indícios de possíveis dificuldades específicas na aprendizagem de Geometria, em especial aquelas relacionadas ao que denominamos “discalculia geométrica”. O instrumento foi elaborado com base nos cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo a Teoria de Van Hiele (1986): reconhecimento, análise, abstração, dedução formal e rigor. Espera-se que os alunos alcancem, ao menos, o nível 3 — ordenação —, considerado essencial para a compreensão conceitual das propriedades das figuras planas. O teste recebeu o título de “Identificando alunos com chance de discalculia” (Apêndice A).

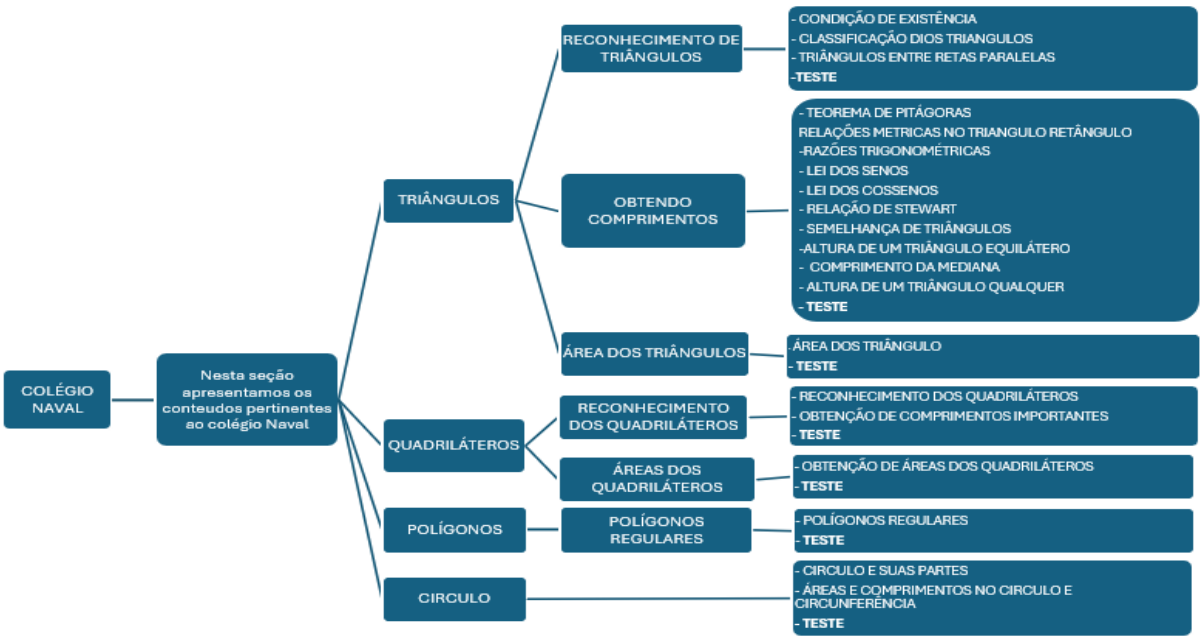
Em continuidade, foi aplicado um segundo teste intitulado “O que sabemos sobre as áreas das figuras planas” (Apêndice B). Seu objetivo foi investigar os

conhecimentos prévios dos alunos acerca do conteúdo de áreas, considerado central nesta pesquisa. Tal escolha se fundamenta em uma análise estatística prévia de editais e provas dos concursos de ingresso ao Colégio Naval e à Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx), conforme descrito no item 2.2.1 desta dissertação. Embora o material educacional desenvolvido contemple ambos os concursos, optamos por delimitar a investigação empírica, neste momento, apenas ao conteúdo relacionado ao Colégio Naval, mantendo os dados referentes à EsPCEx como referencial futuro de expansão da proposta.

Após a realização dos testes diagnósticos, foi apresentada aos estudantes a ferramenta educacional digital denominada **AUTOMATH: Ferramenta Educacional de Estudo Autônomo**, construída com o intuito de promover o desenvolvimento da autonomia discente na aprendizagem da Geometria. A plataforma foi desenvolvida no ambiente do Google Sites, oferecendo ao aluno livre acesso e navegação de acordo com seu ritmo e interesse. A estrutura da ferramenta organiza-se em dois eixos principais — Colégio Naval e EsPCEx — e um eixo de suporte. Este último consiste na conexão direta com o canal “Hora Exata”, um repositório com mais de 300 vídeos sobre Matemática, disponível gratuitamente no YouTube, que fornece apoio teórico e prático ao estudante.

O **eixo Colégio Naval** está dividido em quatro seções temáticas: Triângulos, Quadriláteros, Polígonos e Círculos (incluindo suas partes). Cada seção aborda de forma específica a temática das áreas das figuras planas, integrando conhecimentos prévios como o cálculo de perímetros, aplicação de teoremas clássicos (como Pitágoras e relações métricas no triângulo retângulo), e uso de fórmulas geométricas diversas. O material disponível inclui apostilas em formato PDF com conteúdo teórico, exemplos resolvidos, comandos operacionais e, ao final de cada seção, um teste interativo criado por meio do Google Formulários. Este processo visa à sistematização e fixação dos conteúdos. Para facilitar a navegação no AUTOMATH, apresentamos a Figura 1 - organograma de navegação das atividades voltadas ao Colégio Naval.

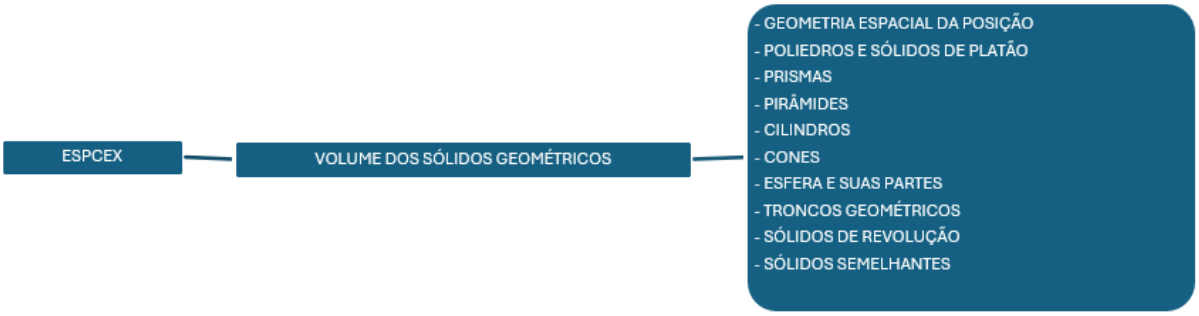
Figura 1- Organograma de navegação das atividades voltadas ao Colégio Naval



Fonte: Elaborado pelo Autor

O **eixo voltado à EsPCEx**, por sua vez, embora igualmente estruturado, ainda não possui testes disponíveis para aplicação, pois não compõe o recorte empírico da pesquisa neste momento. Seu conteúdo está centrado na abordagem métrica dos sólidos geométricos e nas relações entre seus elementos, tema recorrente nos exames da referida escola preparatória. A estrutura geral dos conteúdos pode ser visualizada pela Figura 2 - organograma de navegação das atividades voltadas ao EsPCEx.

Figura 2 - Organograma de navegação das atividades voltadas ao EsPCEx.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Concluída a disponibilização do AUTOMATH, os alunos foram incentivados a explorar o conteúdo ao longo de um período previamente determinado. Não foi

estabelecida a obrigatoriedade de cumprimento de todas as seções, permitindo-se a livre navegação e seleção dos tópicos de maior interesse por parte de cada participante. A intenção, neste estágio inicial, foi obter um panorama geral do uso da ferramenta, observando sua potencialidade em comparação aos testes diagnósticos aplicados anteriormente.

Ao término do ciclo de utilização da plataforma, realizamos uma roda de conversa com os alunos, registrada por meio de anotações a fim de colher impressões, sentimentos e percepções sobre a experiência. Complementarmente, foi aplicado um formulário de avaliação, que visava registrar o nível de satisfação dos estudantes, suas expectativas, sugestões e propostas de aprimoramento da ferramenta.

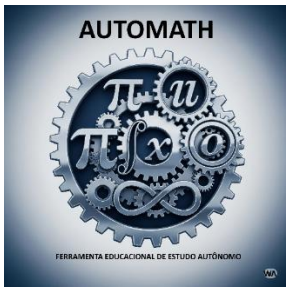
A combinação dos dados quantitativos (provenientes dos testes) com os qualitativos (advindos das conversas e formulários) nos permite traçar um perfil mais abrangente do impacto da ferramenta no processo de ensino-aprendizagem de Geometria, em consonância com os princípios da triangulação metodológica defendidos por Denzin (1978) e Minayo (2004), promovendo uma análise mais robusta e sensível à complexidade dos fenômenos educacionais.

5. RECURSO EDUCACIONAL

- **Apresentação**

Nosso Recurso Educacional (que se encontra na plataforma EDUCAPES) consiste na utilização de um site que possibilita o aprendizado de geometria de forma autônoma, a qual denomoinamos de AUTOMATH. Para uma compreenção mais profunda do conceito de áreas disponibilizamos uma sequência didática a qual o aluno pôde transitar e ter contato, não somente com materias que conduzem ao conceito de áreas, mas tambem a conceitos percursores e teoremas importante que nos permite encontrar comprimentos importantes. Além do AUTOMATH o aluno tambem pode acessar diversos videos do canal HORA EXATA, tendo isso como mais uma ferramenta provedora de conhecimento autônomo. O AUTOMATH e o canal HORA EXATA podem ser acessados através do link na figura 3 e 4.

Figura 3: Logotipo do site AUTOMATH



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4 – Logotipo do canal HORA EXATA

Fonte: Elaborado pelo autor

- **Sequências dídáticas aplicação no ensino (Triângulos)**
  - **Reconhecimento de triângulos**
    - Condição de existência dos triângulos
    - Classificação de triângulos
    - Triângulos entre retas paralelas
    - Teste sobre reconhecimento de triângulos
  - **Obtendo comprimento nos triângulos**
    - Teorema de Pitágoras
    - Relações métricas no triângulo retângulo
    - Razões trigonométricas
    - Lei dos Senos
    - Lei dos Cossenos

- Relação de Stewart
- Semelhança de triângulos
- Altura de um triangulo equilátero
- Comprimento da mediana de um triângulo e suas relações om o baricentro
- Obteção da altura de um triângulo qualquer
- Teste sobre obtenção de comprimentos nos triângulos

➢ **Área dos triângulos**

- Área dos triangulos
- Teste sobre áreas dos triângulos

- **Sequências dídáticas aplicação no ensino (Quadriláteros)**

➢ **Reconhecimento dos quadriláteros**

- Reconhecimento dos quadriláteros
- Teste sobre reconhecimento dos quadriláteros

➢ **Área dos quadriláteros**

- Área dos quadriláteros
- Teste sobre área dos quadriláteros

- **Sequências dídáticas aplicação no ensino (Polígonos regulares)**

- Área dos polígonos regulares
- Teste sobre área dos polígonos regulares

- **Sequências dídáticas aplicação no ensino (Círculos)**

- Círculos e suas partes
- Teste sobre áreas do círculo e suas partes

Além dos materiais voltados para a obtenção de áreas que é de grande valia para o concurso do colégio naval, também disponibilizamos no site AUTOMATH, uma sequência didática sobre diversos sólidos geométricos:

- **Sequência didática sobre sólidos geométricos**

- Geometria espacial da posição
- Poliedros e sólidos de Platão

- Prismas
- Pirâmides
- Cilindro
- Cone
- Esfera
- Sólidos semelhantes
- Troncos geométricos
- Sólidos de revolução

Por fim disponibilizamos um canal com mais de 300 vídeos voltados para a educação básica e ensino militar.

- **Materiais de apoio por meio do canal Hora Exata**

6. ANÁLISE DE DADOS

Nesta Seção iremos apresentar os dados colhidos por meio de 4 objetos aplicados à 23 alunos. Os teste são:

- Identificando alunos com chance de discalculia (APÊNDICE A);
- O que sabemos sobre áreas das figuras planas (APENDICE B);
- Testes aplicados por meio do AUTOMATH;
- Impressões sobre o AUTOMATH.

6.1 ANALIASANDO OS DADOS OBTIDOS PELO TESTE: “IDENTIFICANDO ALUNOS COM CHANCE DE DISCALCULIA.

Nesta fase da pesquisa apresentamos um teste composto de 5 níveis, níveis estes enquadrados nos níveis de Van Hiele. Esperamos com as aplicações que nos revele que os alunos alcancem pelo menos o nível 3 para que seja minimizado, neste grupo, a chance de uma discalculia quanto as formas geométricas.

- Reconhecimento:

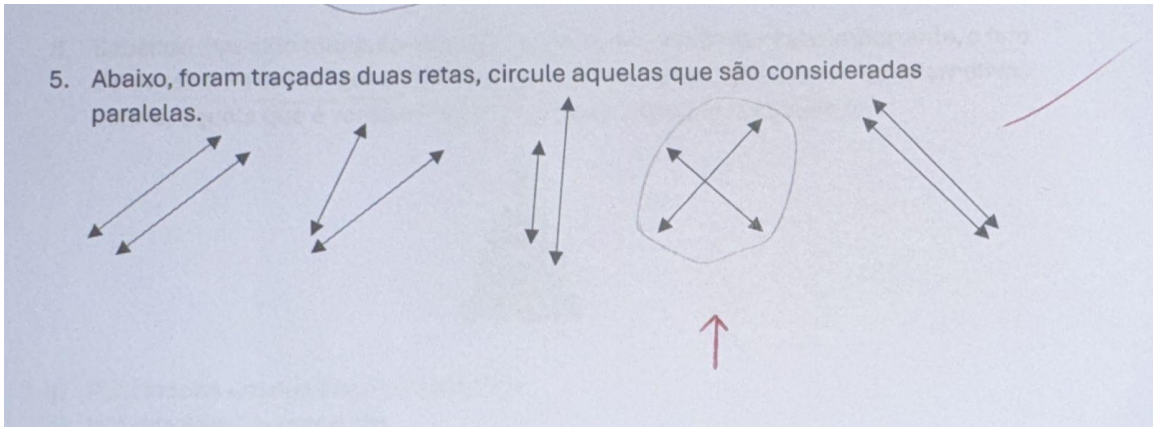
Nesta fase o aluno deverá ser capaz de reconhecer as formas geométricas de uma forma global, não se detendo a propriedades e definições muito invasivas e sim

quanto a aparência da forma geométrica.

Em cada uma das 5 questões apresentadas neste item, havia sempre uma alternativa que destoava completamente das outras e esperava-se que justamente este item não fosse assinado. Após aplicação do teste verificamos que todos os alunos tiveram aproveitamento positivo nas quatro primeiras questões apresentadas.

Em apenas uma única questão, um dos alunos analisados, assinalou exatamente o item que não deveria ser assinalado, mostrando total desconhecimento sobre o que foi solicitado, como podemos visualizar na Figura 5.

Figura 5 – Recorte de uma das questões do Apêndice A



Fonte: Acervo pessoal do autor

Deste modo conseguimos concluir que todos os alunos foram capazes de reconhecer as formas geométricas de maneira global e com isso podem ser considerados no nível de reconhecimento dos Van Hiele.

- Análise

O nível de análise é o terceiro estágio do modelo de Van Hiele e marca a transição do olhar puramente visual para o pensamento baseado em propriedades geométricas. Nele, o aluno reconhece que figuras podem ser classificadas e hierarquizadas — como compreender que todo quadrado é um retângulo — e começa a usar definições formais e raciocínio indutivo para identificar relações entre formas. Embora ainda não elabore demonstrações, esse nível consolida a base para o raciocínio dedutivo, que será desenvolvido no estágio seguinte.

Após ser corrigido cada teste, utilizamos os símbolos a seguir para representar o nível de assertividade de cada aluno em cada uma das questões propostas. Será considerado suficiente neste nível, os alunos que obtiver um nível de assertividade igual ou superior a 2,5 pontos.

Para representa a relação de acerto e erro em cada uma das questões analisadas usaremos os emojis (carinhas verde, amarela e vermelha) da seguinte forma:

- A certou completamente (ganha 1,0 ponto)
- Acertou parcialmente (ganha 0,5 ponto)
- Errou completamente (não pontua)

A análise dos dados apresentados na Tabela 5 refere-se ao desempenho de 22 alunos em cinco questões classificadas no nível de análise, segundo a taxonomia de habilidades cognitivas. Cada questão (Q6 a Q10) foi avaliada por meio de emojis representando o grau de acerto: o emoji verde indica resposta correta (valendo 1,0 ponto), O emoji amarelo corresponde a uma resposta parcialmente correta (valendo 0,5 ponto), e o emoji vermelho indica erro, que não atribui pontuação ao aluno. A pontuação total de cada aluno foi obtida pela soma dos pontos referentes a cada questão.

Tabela 5 – Desempenhos dos alunos no nível de análise

	Questões Nível Análise					
Aluno	**Q6**	**Q7**	**Q8**	**Q9**	**Q10**	**Pontuação**
A1						**3,0**
A2						**2,5**
A3						**2,5**
A4						**3,5**
A5						**3,5**
A6						**4,5**

A7						**4,5**
A8						**2,0**
A9						**3,5**
A10						**4,5**
A11						**4,0**
A12						**2,5**
A13						**2,5**
A14						**1,5**
A15						**4,5**
A16						**2,0**
A17						**2,5**
A18						**2,0**
A19						**2,0**
A20						**4,0**
A21						**2,5**
A22						**3,5**

(Elaborado pelo Autor)

Com a Tabela 5 conseguimos perceber que os alunos A8, A14, A16, A18 e A19 não conseguiram obter a pontuação mínima desejada, assim poderíamos concluir, mediante a este teste que não alcançaram o nível de análise dos Van Hiele.

Observando o desempenho geral da turma, nota-se uma variação significativa nas pontuações, com alunos obtendo notas que variam entre 1,5 e 4,5 pontos. O maior desempenho, com 4,5 pontos, foi alcançado por quatro alunos (A6, A7, A10 e A15), evidenciando um bom domínio das habilidades exigidas pelas questões. Esses estudantes demonstraram um alto nível de acertos e poucos erros, com predominância de carinhas verdes e algumas amarelas.

Por outro lado, o menor desempenho foi registrado pelos alunos A8 e A14, com

apenas 2,0 e 1,5 pontos, respectivamente. Esses estudantes apresentaram mais ocorrências de respostas erradas (carinhas vermelhas), o que impactou negativamente em suas pontuações finais. Isso pode sugerir dificuldade em compreender e aplicar os conceitos exigidos nas questões de análise.

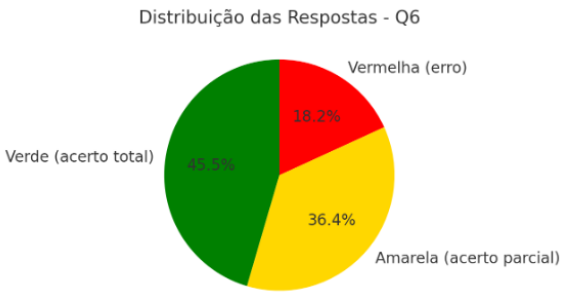
Em termos de distribuição das carinhas, observa-se que a maioria dos alunos teve um desempenho intermediário, com presença significativa de acertos parciais (carinhas amarelas), o que indica que, embora não tenham atingido completamente os objetivos de cada questão, demonstraram algum nível de compreensão do conteúdo. Essa situação é comum em níveis cognitivos mais elevados, como o de análise, que exigem do aluno habilidades como comparação, interpretação e identificação de relações entre elementos.

É relevante destacar que, mesmo entre os alunos com notas mais baixas, há ocorrência de acertos completos e parciais, o que demonstra que todos apresentaram algum grau de compreensão. Isso reforça a importância de intervenções pedagógicas direcionadas para promover avanços, sobretudo nos alunos com maiores dificuldades.

Em suma, os dados apresentados na Tabela 5 permitem uma leitura diagnóstica significativa sobre o nível de domínio dos alunos em habilidades de análise. A heterogeneidade nos resultados aponta para a necessidade de estratégias diversificadas de ensino, com foco na retomada de conceitos e práticas que favoreçam a compreensão analítica, reforçando os acertos parciais e promovendo o avanço dos alunos com menor desempenho.

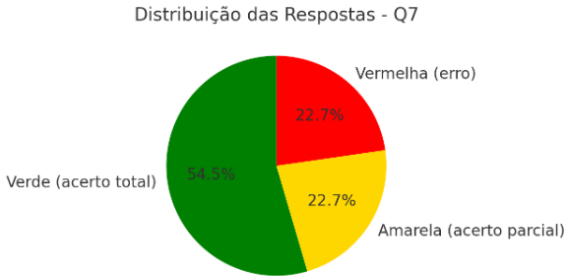
Veja a distribuição do desempenho analisando as Figuras 6,7,8,9,10.

Figura 6 - Distribuição de respostas na questão 6



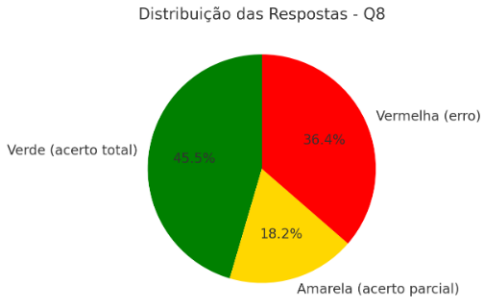
(Elaborado pelo Autor)

Figura 7 - Distribuição de resposta na questão 7



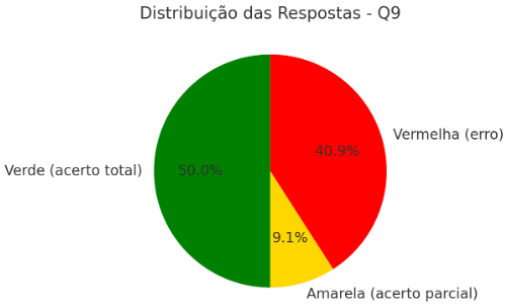
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 8: Distribuição de respostas na questão 8



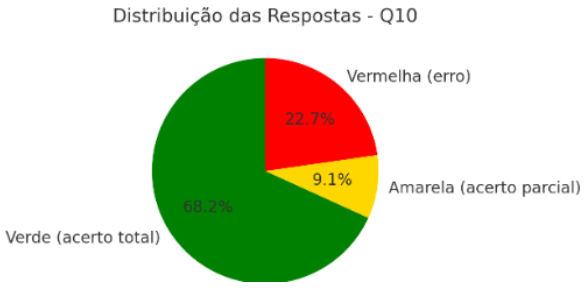
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 9: Distribuição de respostas na questão 9



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 10: Distribuição de respotas na questão 10



Fonte: Elaborado pelo autor

Com base nos resultados das questões Q6 a Q10, observa-se um panorama diversificado de desempenho entre os alunos. Questões como a Q10 apresentaram o maior índice de acertos (68,2%), evidenciando maior domínio do conteúdo, enquanto Q9 teve uma concentração mais alta de erros (40,9%), sinalizando dificuldades específicas. A presença significativa de acertos parciais em quase todas as questões demonstra que, mesmo quando o aluno não chega à resposta correta, há indícios de compreensão dos conceitos. De forma geral, os dados reforçam a importância de reforço pedagógico direcionado às questões de maior dificuldade, ao mesmo tempo em que confirmam avanços consistentes no desenvolvimento das habilidades de análise. Seguimos então com 17 alunos com aproveitamento positivo para o próximo nível.

- Abstração

O nível de abstração, também chamado de nível dedutivo ou formal, é o quarto estágio da teoria de Van Hiele e representa um salto significativo no pensamento geométrico. Nesse estágio, o estudante deixa de depender de exemplos concretos para compreender conceitos e passa a raciocinar de forma abstrata, utilizando definições formais, postulados e teoremas para construir demonstrações lógicas. Ele entende que as propriedades geométricas derivam de um sistema axiomático e torna-se capaz de seguir e criar cadeias dedutivas, justificando cada passo do raciocínio. Essa evolução revela a capacidade de trabalhar com definições precisas e linguagem matemática formal, bem como o uso consciente de teoremas e axiomas para deduzir novas propriedades. O aluno também compreende que as conclusões obtidas possuem validade geral, independentemente de figuras ou exemplos visuais, e começa a construir um pensamento lógico estruturado, aproximando-se do raciocínio matemático de nível superior.

Assim como fizemos na parte anterior seguiremos com os emojis para representar os resultados obtidos com os testes na fase de Abstração. A tabela 6 - desempenhos dos alunos no nível de abstração

Tabela 6: Desempenhos dos alunos no nível de abstração

	Questões Nível Abstração					
Aluno	**Q11**	**Q12**	**Q13**	**Q14**	**Q15**	**Pontuação**
A1	😐	☹	☹	☹	🙂	**1,5**
A2	😐	☹	☹	☹	☹	**0,5**
A3	😐	☹	☹	🙂	🙂	**2,5**
A4	😐	☹	🙂	☹	☹	**1,5**
A5	😐	☹	🙂	🙂	☹	**2,5**
A6	😐	🙂	🙂	🙂	☹	**3,5**
A7	😐	🙂	☹	☹	☹	**1,5**
A8	😐	🙂	🙂	🙂	☹	**3,5**
A9	🙂	🙂	☹	☹	☹	**2,0**
A10	😐	☹	🙂	☹	🙂	**2,5**
A11	😐	☹	🙂	☹	☹	**1,5**
A12	😐	🙂	🙂	🙂	☹	**3,5**
A13	🙂	🙂	🙂	☹	☹	**3,0**
A14	🙂	☹	☹	🙂	☹	**2,0**
A15	😐	☹	🙂	☹	☹	**1,5**
A16	😐	🙂	🙂	☹	☹	**2,5**
A17	😐	😐	🙂	☹	☹	**2,0**

Fonte: Elaborado pelo autor

A tabela 6 apresentada sintetiza o desempenho dos 17 alunos em questões voltadas para o nível de abstração do pensamento geométrico, conforme a teoria de Van Hiele. Cada questão foi avaliada a partir de três possíveis resultados: acerto, valendo 1 ponto, acerto parcial, valendo 0,5 ponto e erro onde não foi atribuído nenhuma pontuação. Dessa forma, a pontuação total de cada aluno resulta diretamente do somatório dos desempenhos nas cinco questões (Q11 a Q15).

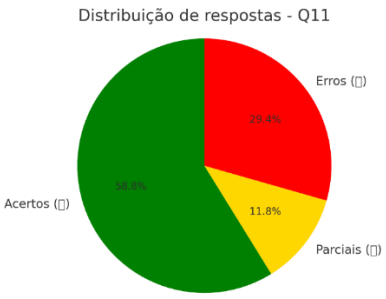
Observa-se que a pontuação dos alunos variou de 0,5 a 3,5 pontos, o que demonstra um nível de heterogeneidade significativo no grupo. O aluno A2, por exemplo, atingiu a menor pontuação, com apenas 0,5 ponto, evidenciando dificuldades expressivas na compreensão das questões de abstração. Em contrapartida, os alunos A6 e A12 obtiveram a pontuação máxima registrada, 3,5 pontos, apresentando maior domínio do conteúdo avaliado.

A distribuição das pontuações revela que a maioria dos estudantes oscilou entre 1,5 e 2,5 pontos, como os casos de A1, A3, A4, A5, A9, A10, A11, A13, A14, A15, A16 e A17. Isso sugere que, embora muitos tenham conseguido resolver parcialmente as questões, ainda há lacunas conceituais a serem superadas para alcançar um pensamento mais formal e abstrato.

Outro aspecto relevante é a presença de acertos parciais, em várias respostas, indicando que os alunos conseguem iniciar o raciocínio, mas não chegam à conclusão correta. Esse padrão reforça a importância de intervenções pedagógicas que consolidem a passagem dos níveis anteriores de Van Hiele para o nível de abstração, onde o aluno deve ser capaz de construir argumentos lógicos baseados em postulados e teoremas.

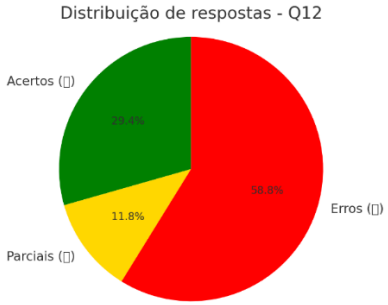
Em síntese, os dados revelam um cenário de aprendizagem em transição, no qual poucos alunos se destacam com desempenho superior, enquanto a maior parte ainda demonstra compreensão parcial dos conceitos. Essa análise evidencia a necessidade de estratégias didáticas mais direcionadas, como uso de recursos digitais, atividades investigativas e trilhas pedagógicas, para favorecer o desenvolvimento do raciocínio geométrico formal em todos os estudantes.

Figura 11: Distribuição de respotas na questão 11



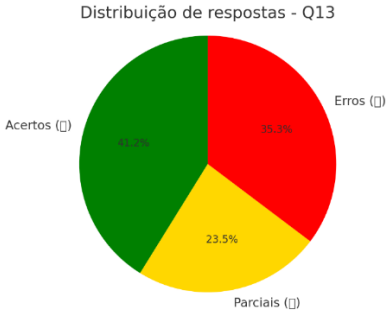
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 12: Distribuição de respotas na questão 12



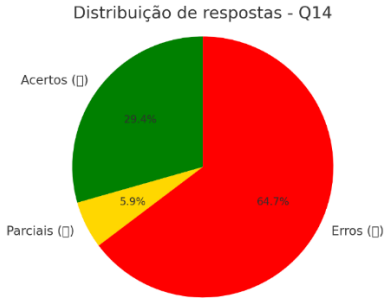
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 13: Distribuição de respotas na questão 13



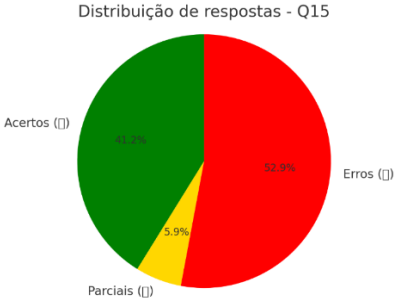
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 14: Distribuição de respotas na questão 14



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 15: Distribuição de respotas na questão 15



Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando a tabela 6 apresentada, observa-se que, para que o estudante avance para a fase de Dedução Formal, é necessário atingir pontuação mínima de 2,5 pontos no conjunto de questões avaliadas. Ao examinar o desempenho dos 17 alunos, verifica-se que 7 estudantes alcançaram ou superaram essa meta: A3, A5, A6, A12,

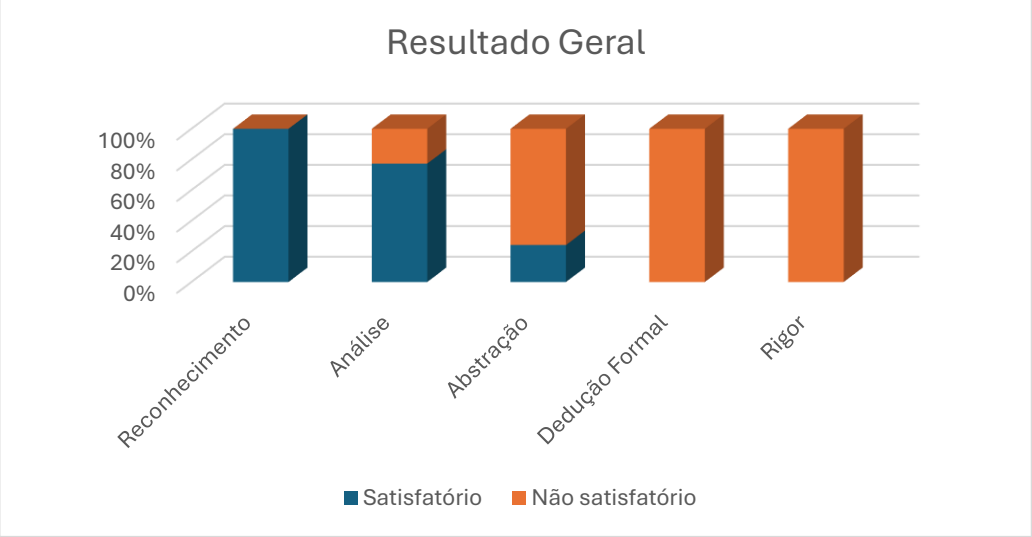
A13, A14 e A16, como podemos observar na tabela 6

Esse resultado representa 41,1% do total de participantes que foram submetidos ao nível de Análise e seguiram para o nível de Abstração, um número significativo, pois indica que quase metade dos participantes já apresenta domínio suficiente para avançar nos níveis de pensamento geométrico, conforme a teoria de Van Hiele. Por outro lado, nota-se que 10 alunos (58,9%) não atingiram a pontuação necessária, o que sugere a necessidade de reforço pedagógico e de estratégias didáticas diferenciadas para consolidar o raciocínio geométrico desses estudantes.

Portanto, a análise evidencia que, embora exista um grupo expressivo de alunos aptos a evoluir para a fase de dedução formal, ainda há um contingente maior que necessita de intervenções direcionadas para superar lacunas e alcançar a proficiência exigida.

Quando analisamos estes dados levando em consideração aos alunos no início da pesquisa, percebemos que apenas 7 dos 22 alunos pesquisados alcançaram o nível de abstração. Nenhum dos alunos restantes obtiveram êxito nos níveis de Dedução formal e Rigor, sendo assim concluímos que 7 alunos dos 22, estão no nível esperado. Sendo assim, apresentamos a Figura 16, que mostra a quantidade de alunos em cada nível.

Figura 16: Quantidade de alunos em cada nível



Fonte: Elaborado pelo autor

Evidenciamos então que apenas 7 alunos deste grupo se encontram em um nível satisfatório, ou seja, encontram-se no nível de abstração de Van Hiele. Um outro dado relevante é que todos os alunos conseguiram se sair bem no primeiro nível de Van Hiele, fazendo com que concluíssemos a este momento que existe uma pequena ou nenhuma chance de existir entre eles, um aluno acometido pela discalculia geométrica.

6.2 ANALIASANDO OS DADOS OBTIDOS PELO TESTE: "O QUE SABEMOS SOBRE ÁREA DAS FIGURAS PLANAS."

Nesta seção tivemos como objetivo analisar o conhecimento prévio dos alunos sobre áreas das figuras planas. Os 22 alunos foram submetidos ao teste intitulado como: O que sabemos sobre área das figuras planas. As questões foram corrigidas uma a uma de forma manual, considerando apenas em certo ou errado. Para cada questão considerada certa foi atribuído ao aluno uma carinha verde valendo 1,0 pontos, indicando o acerto e para cada questão considerada errada, foi atribuída a carinha vermelha, indicando o erro e neste caso não é atribuído nenhum ponto a questão. Por meio desta análise, revelamos a tabela 7 com acertos e erros dos alunos em cada questão proposta.

Tabela 7: Acertos e erros dos alunos em cada questão proposta sobre áreas

		ALUNOS																					
		A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22
QUESTÕES	1.a	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☹	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☹	☹	☺
	1.b	☺	☺	☹	☹	☺	☺	☺	☹	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺
	1.c	☺	☺	☹	☹	☺	☺	☺	☹	☹	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺
	1.d	☹	☺	☹	☹	☺	☺	☹	☹	☹	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺
	1.e	☹	☺	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☹
	1.f	☹	☺	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☹
	1.g	☹	☺	☹	☺	☺	☺	☹	☹	☺	☹	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☹	☹	☺	☹	☺
	2.a	☹	☺	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☹	☺
	2.b	☺	☺	☹	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺
	2.c	☺	☺	☹	☹	☹	☺	☺	☹	☹	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☹	☺
	2.d	☹	☺	☹	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☹	☺
	2.e	☹	☺	☹	☺	☹	☹	☺	☹	☹	☹	☹	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☹	☹	☹
	2.f	☹	☺	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺
	2.g	☹	☺	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹	☹	☺	☺	☺	☹	☹	☺	☺	☹	☹	☺	☹	☺
	3. Fig 1	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹	☺	☹	☹

	3. Fig 2	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹
	3. Fig 3	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☺	☹	☺	☺	☹	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹
	4. Fig 1	☹	☺	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹	☺	☹	☹	☹
	4. Fig 2	☹	☺	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹
	4. Fig 3	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹
	5	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹	☹
PONTUAÇÃO		**6**	**16**	**1**	**3**	**5**	**9**	**6**	**0**	**3**	**0**	**12**	**15**	**9**	**14**	**14**	**16**	**14**	**8**	**12**	**14**	**0**	**11**	

Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se na tabela 7, de início, que o desempenho dos alunos é bastante heterogêneo. Alguns, como os alunos A2, A12, e A16, obtiveram pontuações elevadas, alcançando entre 15 e 16 pontos, evidenciando maior domínio do conteúdo abordado. Por outro lado, chama a atenção o desempenho extremamente baixo de alunos como A8, A10 e A21 que não pontuaram em nenhuma das questões, bem como A3, A4 e A9, que somou apenas 1 ou 3 pontos. Essa disparidade indica que, enquanto um grupo minoritário parece ter compreendido adequadamente os conceitos, a maior parte da turma apresenta dificuldades expressivas.

Ao analisar a distribuição de erros e acertos por questão, percebe-se um padrão preocupante: a predominância de carinhas vermelhas sugere que a maioria dos alunos não conseguiu resolver corretamente grande parte dos itens. Isso pode estar relacionado à complexidade do conteúdo, a lacunas no processo de ensino-aprendizagem ou até mesmo a fatores externos, como falta de estudo autônomo ou desatenção durante a realização da atividade. É importante destacar que, mesmo em questões de aparente menor complexidade, a taxa de erro permaneceu elevada, o que reforça a hipótese de que as dificuldades não estão restritas a pontos isolados do conteúdo.

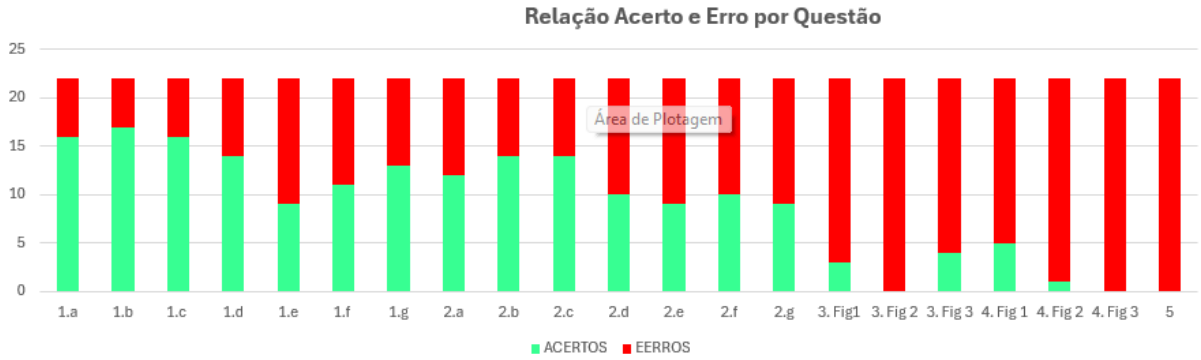
Outro ponto relevante é a análise das pontuações totais. Apenas sete alunos (A2, A12, A14, A15, A16, A17 e A20) obtiverem rendimento igual ou superior a 14 pontos, indicando desempenho consistente. Outros, como A3, A4, A5, A8, A9, A10 e A20, ficaram abaixo de 6 pontos, o que demonstra uma compreensão bastante limitada. De maneira geral, a média da turma aparenta ser baixa, sugerindo a necessidade de intervenções pedagógicas urgentes, como a revisão dos conteúdos, uso de metodologias diferenciadas e aplicação de recursos pedagógicos digitais que favoreçam a assimilação dos conceitos.

Além disso, a tabela permite inferir a existência de dificuldades coletivas em determinados tópicos. Questões que envolvem figuras (como as rotuladas “Fig 1”, “Fig 2” e “Fig 3”) tiveram uma predominância de erros, o que sugere que a interpretação de representações visuais e a aplicação de conceitos geométricos podem ser áreas críticas para a turma. Esse dado é particularmente relevante, pois aponta a necessidade de reforçar a competência de leitura e análise de informações não verbais, habilidade valorizada pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular) no ensino de Matemática.

Por fim, é importante frisar que os dados obtidos podem servir como base para o planejamento de ações pedagógicas mais assertivas. Professores podem identificar quais conteúdos precisam ser retomados, quais alunos necessitam de acompanhamento mais próximo e que estratégias – como o uso de simuladores digitais, jogos educativos ou roteiros de estudo – podem tornar o aprendizado mais efetivo. Em síntese, a tabela 7 revela não apenas os resultados brutos dos alunos, mas um diagnóstico profundo da realidade da turma, sinalizando tanto os avanços quanto os desafios que precisam ser enfrentados para promover um ensino de Matemática mais inclusivo e eficaz.

Para apresentar de forma ainda mais visual destes dados disponibilizamos a Figura 17 que revela a relação erro/acerto em cada uma das questões propostas sobre áreas.

Figura 17: Relação erro/acerto em cada uma das questões propostas sobre áreas



Fonte: Elaborado pelo autor

Percebemos nitidamente que em nenhuma questão a quantidade de acertos é superior a quantidade de erro, evidenciando ainda mais a dificuldade e a falta de conhecimento prévio deste assunto tão relevante que é área das figuras planas, para

estes alunos que buscam aprovação no concurso do colégio naval e indo mais além, na própria formação acadêmica no que diz respeito a estarem ambientados ao contexto geométrico a qual estão inseridos.

6.3 ANALIASANDO OS DADOS OBTIDOS COM A UTILIZAÇÃO DOS TESTES APLICADOS POR MEIO DO AUTOMATH”

Após o cumprimento das duas etapas anteriores foi disponibilizado aos alunos acesso a ferramenta educacional AUTOMATH, que acreditamos ser de grande valia aos alunos. Com ela o aluno pôde transitar por diversos materiais em PDF e vídeos de forma autônoma, para que de forma individualizada, pudesse alcançar melhorias em seu desempenho acadêmico.

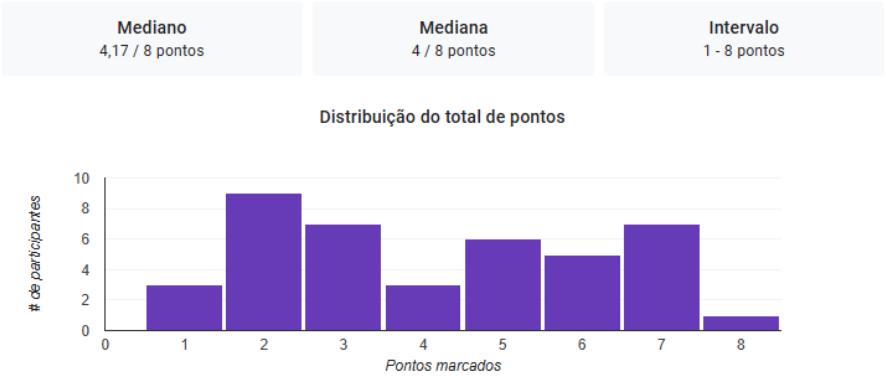
Na seção 6.2 mostra que os resultados gerados pela análise dos dados obtido com o teste que julgava o conhecimento prévio dos alunos se tendenciou a mostrar que no momento desta pesquisa ainda é muito baixo, evidenciando a necessidade de melhorar a performasse dos alunos no conteúdo de áreas das figuras planas.

Para esta análise teremos como objetivo analisar o rendimento dos alunos em 4 referenciais.

- Área dos triângulos;
- Área dos quadriláteros;
- Área dos polígonos Regulares;
- Área do círculo e suas partes

- Área dos triângulos

Figura 18: Quantidade de pontos obtidos pelos participantes (triângulos)



Fonte: Elaborado pelo autor

A análise da Figura 18 oferece um panorama importante sobre a distribuição do total de pontos obtidos pelos participantes em uma avaliação. De imediato, é possível perceber que os dados exibem uma variação significativa, com um intervalo de pontuação entre 1 e 8 pontos, evidenciando a heterogeneidade do desempenho do grupo.

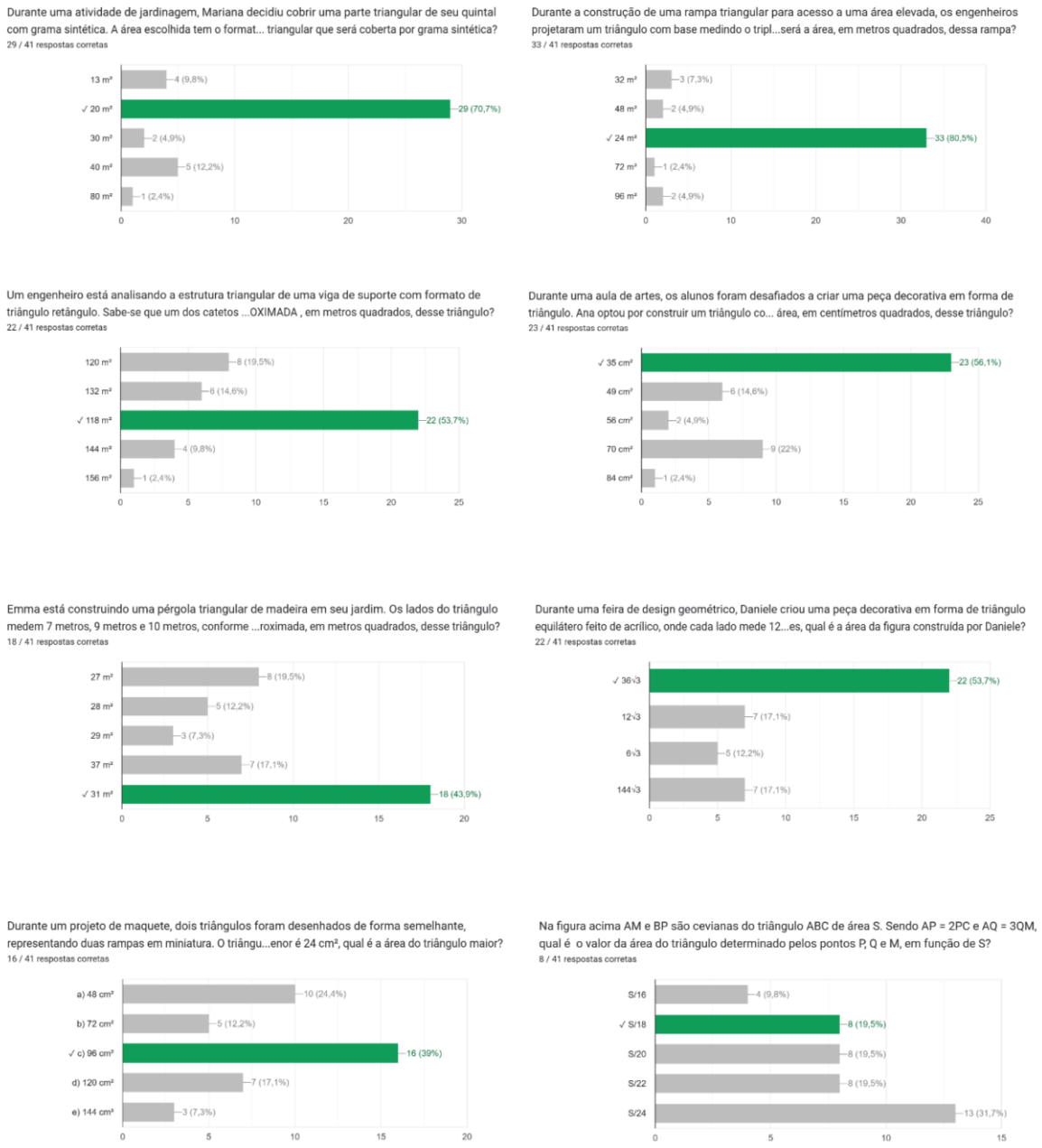
O valor mediano foi de 4,17 pontos, enquanto a mediana foi de 4 pontos, o que indica que metade dos participantes obteve pontuação igual ou inferior a esse valor, e a outra metade pontuou acima dele. Esse dado sugere que o desempenho da turma se concentra em uma faixa intermediária, sem grandes extremos de excelência, mas também sem um predomínio absoluto de notas muito baixas.

Além do que já foi citado, a Figura 18 revela uma concentração relevante de participantes nos níveis de 2 e 3 pontos, que juntos representam uma parcela significativa do grupo, sinalizando um desempenho aquém do esperado para muitos. Por outro lado, embora em menor número, há também estudantes que alcançaram pontuações mais altas, especialmente nas faixas de 6 e 7 pontos, além de um pequeno grupo que atingiu a pontuação máxima de 8 pontos, o que mostra que alguns participantes dominam plenamente o conteúdo avaliado.

Outro aspecto relevante é a presença de um pequeno contingente de alunos com pontuações muito baixas, como aqueles que marcaram apenas 1 ponto, indicando dificuldades acentuadas de compreensão ou aplicação do conhecimento. Essa discrepância sugere a necessidade de intervenções pedagógicas direcionadas, como reforço, revisão de conceitos e uso de estratégias de ensino diferenciadas, para reduzir o abismo de desempenho entre os estudantes.

Quando olhamos os resultados obtidos em cada uma das questões podemos observar uma predominância no número de acertos. A Figura 19 mostra a predominância de acertos dos alunos em cada uma das questões propostas.

Figura 19: Predominância de acertos dos alunos em cada questão de triângulos



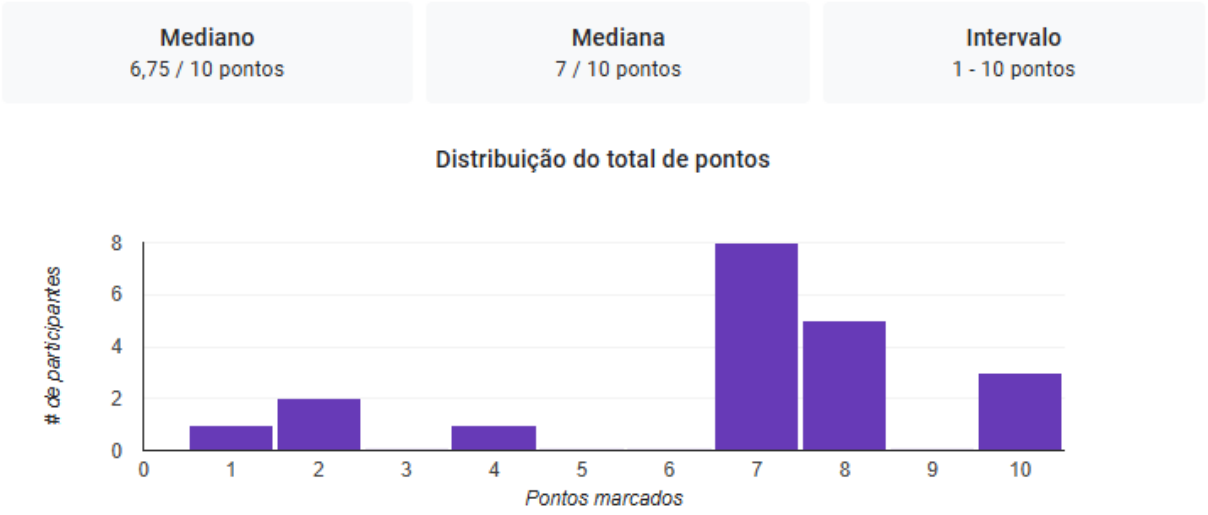
Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados apresentados nos levam a crer que houve uma melhoria moderada na compreensão da área dos triângulos. No entanto, ainda há um longo caminho a percorrer para que esses alunos alcancem a tão sonhada aprovação no Colégio Naval.

- Área dos quadriláteros

Da mesma forma que analisamos os resultados obtidos com os triângulos, analisaremos os quadriláteros. A Figura 20 mostra a quantidade de pontos obtidos pelos participantes.

Figura 20: Quantidade de pontos obtidos pelos participantes (quadriláteros)



Fonte: Elaborado pelo autor

A análise dos dados apresentados na Figura 20 possibilita uma compreensão mais ampla e detalhada sobre a distribuição do desempenho dos participantes na avaliação aplicada. Observa-se que o intervalo de pontuação registrado variou entre 1 e 10 pontos, abrangendo desde o desempenho mínimo possível até a pontuação máxima alcançável, o que demonstra uma amplitude considerável nos resultados. Essa variação expressiva evidencia que o grupo de alunos investigado não é homogêneo, apresentando diferenças marcantes em termos de compreensão, assimilação e aplicação dos conhecimentos avaliados. Essa heterogeneidade sugere a coexistência, dentro do mesmo conjunto, de estudantes que demonstram elevado domínio do conteúdo trabalhado e de outros que ainda enfrentam dificuldades significativas em determinados aspectos do tema.

Ao examinar os indicadores estatísticos, constata-se que a média foi de 6,75 pontos, enquanto a mediana se estabeleceu em 7 pontos. Esse resultado revela que pelo menos metade dos participantes obteve notas iguais ou superiores a esse patamar, apontando para um desempenho globalmente satisfatório do grupo. Esse cenário é corroborado pelo fato de que a maior concentração de notas está situada na faixa dos 7 pontos, demonstrando que muitos alunos atingiram um nível

consistente de entendimento dos conceitos cobrados. Além disso, nota-se uma quantidade expressiva de estudantes com pontuação em 8 pontos, reforçando a percepção de que parte relevante da turma não apenas assimilou os conteúdos, mas conseguiu aplicá-los com segurança e eficácia.

Essa distribuição dos resultados, ao mesmo tempo em que evidencia o sucesso de um número significativo de avaliados, também sugere a existência de uma parcela de alunos que demanda maior apoio pedagógico. A presença de notas mais baixas, especialmente próximas do mínimo, indica lacunas conceituais e dificuldades que podem estar relacionadas a fatores diversos, como metodologias de estudo, motivação ou até mesmo a complexidade dos conteúdos abordados. Assim, o conjunto das informações permite não apenas compreender o panorama do desempenho geral, mas também traçar estratégias para intervenções futuras, visando reduzir as desigualdades de aprendizagem e promover um avanço coletivo mais uniforme.

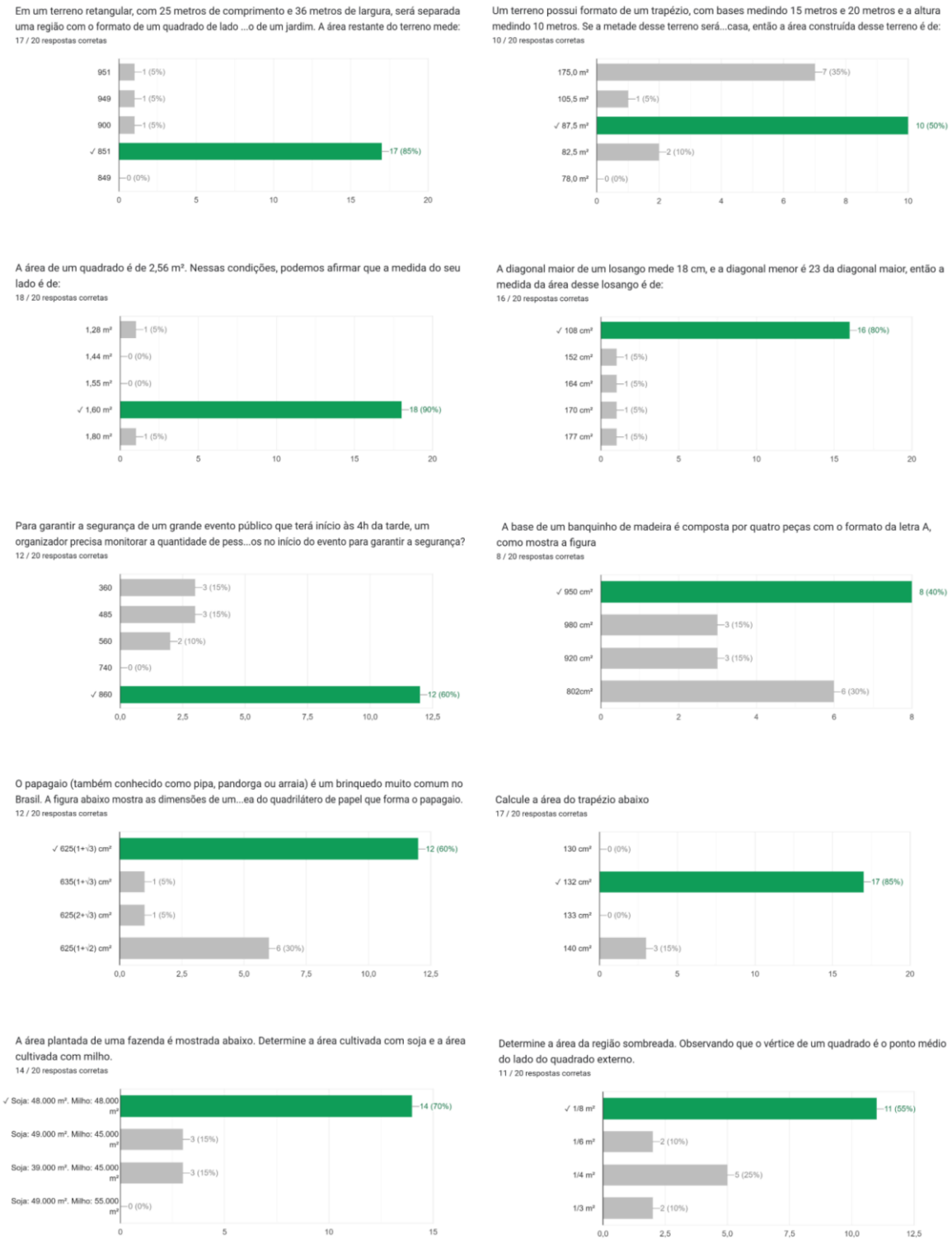
No entanto, observa-se a presença de uma pequena parcela de participantes com pontuações muito baixas, como os que obtiveram 1 ou 2 pontos, o que aponta para lacunas significativas no aprendizado e reforça a importância de estratégias pedagógicas diferenciadas para esse grupo.

Outro aspecto relevante é a presença de alunos que atingiram a pontuação máxima de 10 pontos, evidenciando que, embora haja dificuldades em alguns segmentos, também existem casos de excelência que devem ser valorizados e analisados como referência para o planejamento de intervenções futuras.

Em síntese, o gráfico demonstra um cenário em que a maioria dos alunos apresenta desempenho sólido, concentrando-se nas faixas de 7 a 8 pontos, com menor incidência de pontuações muito baixas. Esses dados não apenas refletem os resultados da avaliação, mas também oferecem subsídios para repensar práticas pedagógicas, propor reforço para os que se encontram nas extremidades inferiores da distribuição e potencializar estratégias de ensino que consolidem o nível de compreensão já alcançado pela maior parte dos estudantes.

Para podermos apresentar os dados de forma mais individualizada, apresentaremos na Figura 21 a predominância de acertos em cada uma das questões direcionadas aos quadriláteros.

Figura 21: *Predominância de acertos em cada questão proposta de quadriláteros*



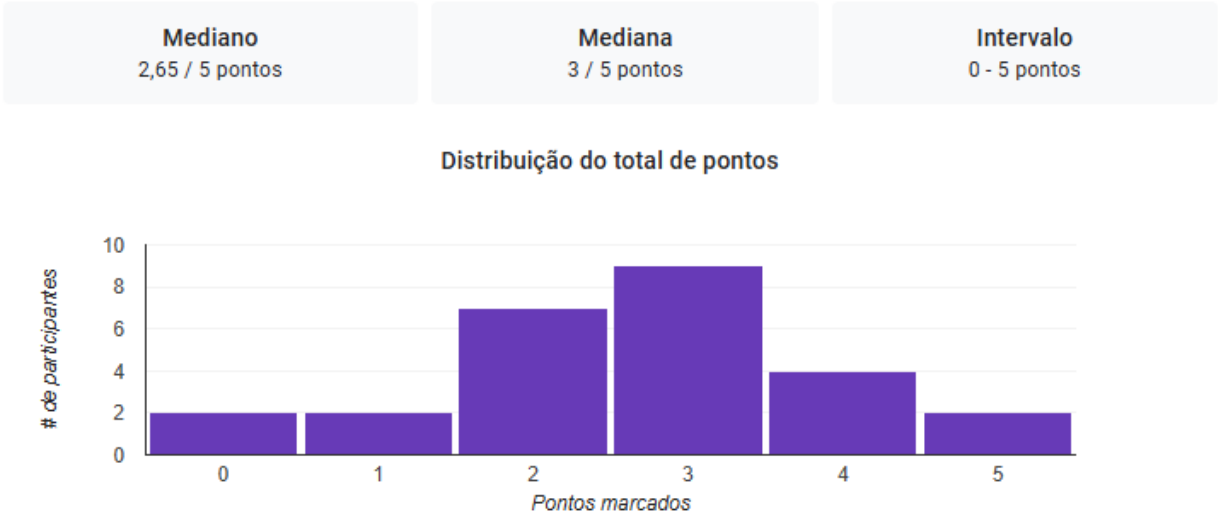
Fonte: Elaborada pelo autor

Ficou fácil ver a excelente evolução neste quesito, evidenciando uma melhoria significativa no que diz respeito a área dos quadriláteros com este grupo de alunos.

- Área dos polígonos regulares

Agora Iremos analisar os resultados obtidos com a realização do teste sobre área dos polígonos regulares. Assim como fizemos nas etapas anteriores. A Figura 22, apresenta a quantidade de pontos obtidos em cada uma das questões propostas sobre áreas dos polígonos regulares

Figura 22: Quantidade de pontos obtidos nas questões sobre áreas dos polígonos regulares



Fonte: Elaborado pelo autor

Os dados apresentados na Figura 22 revelam um panorama claro sobre o desempenho dos participantes na avaliação, permitindo inferências relevantes para a compreensão do processo de aprendizagem. O intervalo de pontuação variou de 0 a 5 pontos, demonstrando que houve desde indivíduos que não pontuaram até aqueles que atingiram o desempenho máximo. Essa amplitude, embora limitada, já indica diferenças no grau de domínio do conteúdo entre os avaliados.

A mediana, fixada em 3 pontos, sugere que metade dos participantes obteve resultados iguais ou superiores a esse valor, enquanto a outra metade ficou abaixo. De forma complementar, a média (2,65 pontos) confirma uma distribuição relativamente equilibrada, mas levemente inclinada para pontuações mais baixas, apontando para a necessidade de intervenções pedagógicas que consolidem os conhecimentos básicos antes de avançar para conteúdos mais complexos.

Ao observar a distribuição das frequências, percebe-se que o maior contingente de participantes se concentrou na faixa de 3 pontos, seguido de um número expressivo na faixa de 2 pontos. Essa concentração intermediária sugere que os estudantes apresentaram compreensão parcial dos conteúdos, mas ainda carecem de segurança conceitual. É relevante notar, contudo, que há um grupo menor com 4 e 5 pontos, o que indica que parte da turma assimilou bem os conceitos e conseguiu aplicá-los adequadamente.

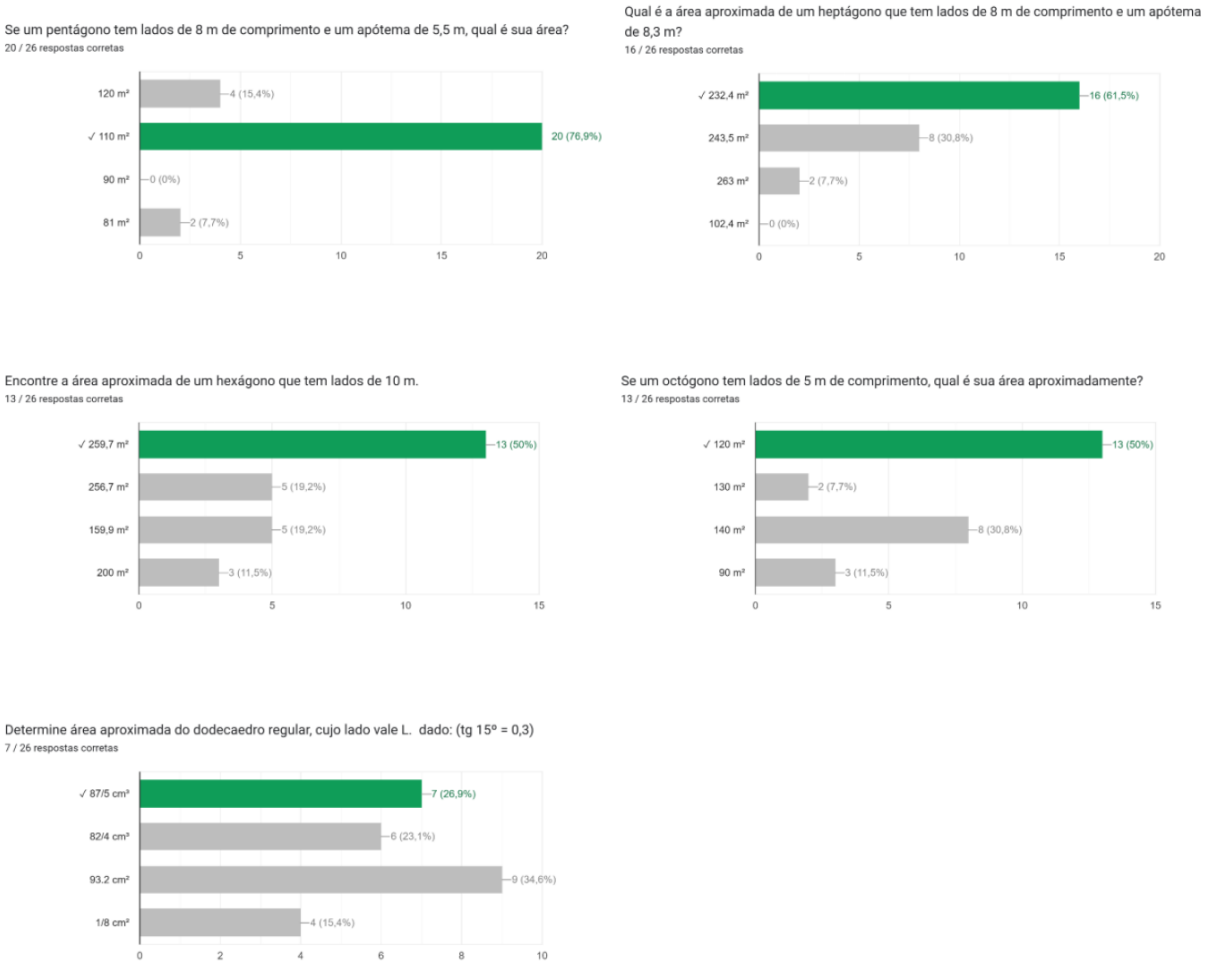
Outro dado digno de destaque é a presença de participantes com pontuação zero, revelando um nível de dificuldade bastante significativo para um pequeno grupo. Esse aspecto sinaliza a necessidade de estratégias de ensino mais personalizadas, capazes de atender estudantes que apresentam lacunas mais profundas.

Portanto, a análise minuciosa deste conjunto de dados possibilita concluir que a maioria dos participantes se situa em um nível de desempenho considerado intermediário, revelando um equilíbrio entre avanços já consolidados e aspectos que ainda demandam maior atenção. Essa constatação indica que, embora exista um grupo de estudantes que atingiu resultados expressivos, também há participantes que apresentam vulnerabilidades significativas, necessitando de intervenções pedagógicas direcionadas. A presença dessa diversidade de desempenhos reforça a ideia de que o grupo não é homogêneo em termos de aprendizagem, o que exige um olhar cuidadoso para as especificidades de cada estudante.

A partir dessas evidências, torna-se viável e até essencial orientar o planejamento pedagógico de forma mais estratégica e segmentada, contemplando ações diferenciadas para atender às distintas necessidades observadas. Para os alunos que já demonstram progresso consistente, é importante criar oportunidades de aprofundamento e consolidação dos conhecimentos adquiridos, de modo a estimular um desenvolvimento contínuo. Já para aqueles que se encontram nas extremidades inferiores da escala de pontuação, faz-se necessário oferecer um suporte mais intensivo, por meio de estratégias que envolvam reforço, acompanhamento próximo e recursos adicionais. Dessa forma, os dados analisados não apenas descrevem a realidade atual, mas fornecem subsídios concretos para a construção de práticas pedagógicas mais inclusivas, equitativas e eficazes.

Para Melhorar a visualização destes dados apresentaremos a Figura 23 que mostra a predominância de acertos em cada uma das questões propostas sobre área polígonos regulares.

Figura 23: *Predominância de acertos em cada uma das questões propostas sobre área dos polígonos regulares.*



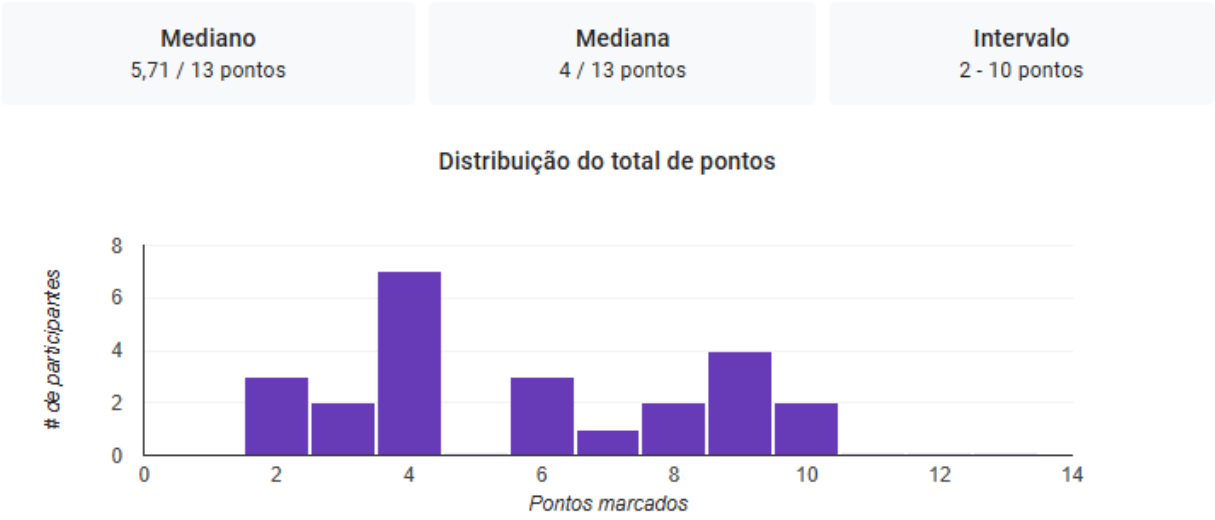
Fonte: Elaborado pelo autor

Estes dados puderam evidenciar que embora tenha havido uma melhora em relação ao que vimos nos resultados presenciais, não são nem perto do que desejamos obter como resultado, mas ficamos felizes em perceber que já houve uma melhoria aparente.

- Área do círculo e suas partes

Por fim iremos analisar os dados obtidos com a aplicação do teste sobre área do círculo e suas partes. Assim como fizemos em todas as etapas anteriores, vamos iniciar este estudo apresentando um a Figura 24 que mostra a quantidade de pontos dos alunos em cada uma das questões propostas sobre área do círculo e suas partes.

Figura 24: Quantidade de pontos obtidos em cada uma das questões sobre círculos e suas partes



Fonte: Elaborado pelo autor

O Figura 24 apresentada evidencia uma distribuição interessante do desempenho dos participantes em uma escala de 2 a 10 pontos, dentro de um total possível de 13 pontos. Essa variação já sugere, de início, que todos os avaliados conseguiram pontuar, não havendo registros de desempenho nulo, mas também indica que ninguém atingiu a pontuação máxima.

A análise da mediana, fixada em 4 pontos, e do valor médio de 5,71 pontos revela que a turma se encontra em um patamar intermediário de rendimento, ainda que a média seja um pouco superior ao ponto central. Isso indica a presença de alguns desempenhos mais altos que elevaram a média, mas não o suficiente para deslocar a concentração de notas para a faixa superior.

A maior concentração de participantes se dá na faixa dos 4 pontos, com destaque também para pontuações entre 7 e 8 pontos, revelando dois agrupamentos distintos: um grupo significativo que permanece na zona mediana de desempenho e outro, menor, que já apresenta domínio mais consistente do conteúdo. Há, ainda, uma quantidade reduzida de participantes que atingiram pontuações mais expressivas, como 10 pontos, demonstrando que, apesar das dificuldades gerais, existe um núcleo de alunos que se destaca.

O fato de não haver registros de pontuações extremas, como zero ou a nota

máxima de 13, reforça a ideia de que a turma está em um processo de aprendizado em andamento, com potencial para avanços, desde que sejam adotadas intervenções pedagógicas bem direcionadas.

Em síntese, a figura 24 revela uma distribuição que, embora apresente certa heterogeneidade, mantém um equilíbrio geral entre as diferentes faixas de desempenho, evidenciando um predomínio de resultados situados no patamar intermediário. Esse cenário indica que, dentro do grupo avaliado, a maioria dos participantes obteve notas que refletem uma compreensão razoável dos conteúdos, ainda que existam variações significativas entre os indivíduos. Observa-se também a presença de poucos casos de desempenho excepcional, que se destacam positivamente, representando estudantes que alcançaram um nível de domínio mais avançado em relação ao restante da turma.

Essas oferecem subsídios relevantes e concretos para a elaboração de estratégias pedagógicas mais direcionadas, possibilitando intervenções planejadas de acordo com as necessidades identificadas. Por um lado, torna-se possível implementar ações que visem elevar o desempenho daqueles que se encontram nas faixas mais baixas, buscando superar as dificuldades e promover maior engajamento com os conteúdos trabalhados. Por outro, é fundamental criar estímulos e desafios adicionais para os alunos que já se encontram em níveis mais elevados, de modo a evitar estagnação e incentivar o aprofundamento de suas competências. Assim, ao considerar essas diferentes dimensões, abre-se espaço para promover um progresso mais uniforme e sustentável em todo o grupo, favorecendo uma evolução coletiva mais equilibrada.

Este resultado era de se esperar, a área do círculo e suas partes é um assunto muito volátil, ou seja, muitas variações e relações entre as suas partes, o que faz com que este assunto seja considerado um dos mais difíceis neste segmento.

Para Melhorar a visualização destes dados apresentaremos a Figura 25 que mostra a predominância de acertos em cada uma das questões propostas sobre círculos e suas partes.

Figura 25: Predominância de acertos em cada uma das questões propostas sobre área do círculo e suas partes.

Fonte: Elaborado pelo autor

Os dados obtidos trouxeram à tona a constatação de que, mais uma vez, foi possível observar uma evolução consistente nos ganhos pedagógicos relacionados a este tópico específico de estudo. Essa percepção não apenas confirma uma tendência de melhoria ao longo do processo investigativo, mas também reforça a efetividade das estratégias aplicadas e dos recursos utilizados durante a pesquisa.

Percebe-se que esse avanço caminha de forma gradual, porém firme, em direção àquilo que se pretende alcançar como resultado do trabalho, validando a hipótese inicial e demonstrando que os esforços empreendidos estão gerando efeitos concretos. Dessa maneira, os dados analisados não apenas evidenciam progresso, mas indicam que o percurso adotado está alinhado com os objetivos traçados, apontando para uma construção sólida do conhecimento e um desenvolvimento pedagógico cada vez mais próximo do que se almeja atingir com a pesquisa.

6.4 IMPRESSÕES SOBRE O AUTOMATH

Para finalizar todo o processo de análise de dados, torna-se extremamente conveniente e até indispensável conhecer as impressões dos alunos que, de fato, utilizaram o AUTOMATH ao longo do período de aplicação. Compreender a visão dos usuários diretos é fundamental, pois são eles que vivenciam a experiência prática da ferramenta e podem apontar, com propriedade, seus pontos fortes, suas fragilidades e as possíveis melhorias necessárias. Essa etapa da pesquisa permite complementar os dados quantitativos já levantados com percepções mais subjetivas, criando um panorama mais completo do impacto do recurso no processo de aprendizagem.

Essa análise foi conduzida por meio de nove perguntas objetivas, cuidadosamente elaboradas para captar diferentes dimensões da experiência dos alunos. Nessas questões, eles tiveram a oportunidade de pontuar cada item em uma escala de 1 a 5, sendo o número **1** atribuído para a avaliação **“**péssimo**”** e o número **5** para **“**excelente**”**. Essa abordagem permitiu transformar impressões subjetivas em dados numéricos, favorecendo uma leitura quantitativa das percepções dos estudantes e facilitando a identificação de padrões e tendências no uso do AUTOMATH.

Além das perguntas objetivas, houve ainda uma última questão aberta, respondida de forma qualitativa, em que os participantes puderam se expressar livremente. Nesse espaço, eles foram convidados a registrar elogios, apresentar

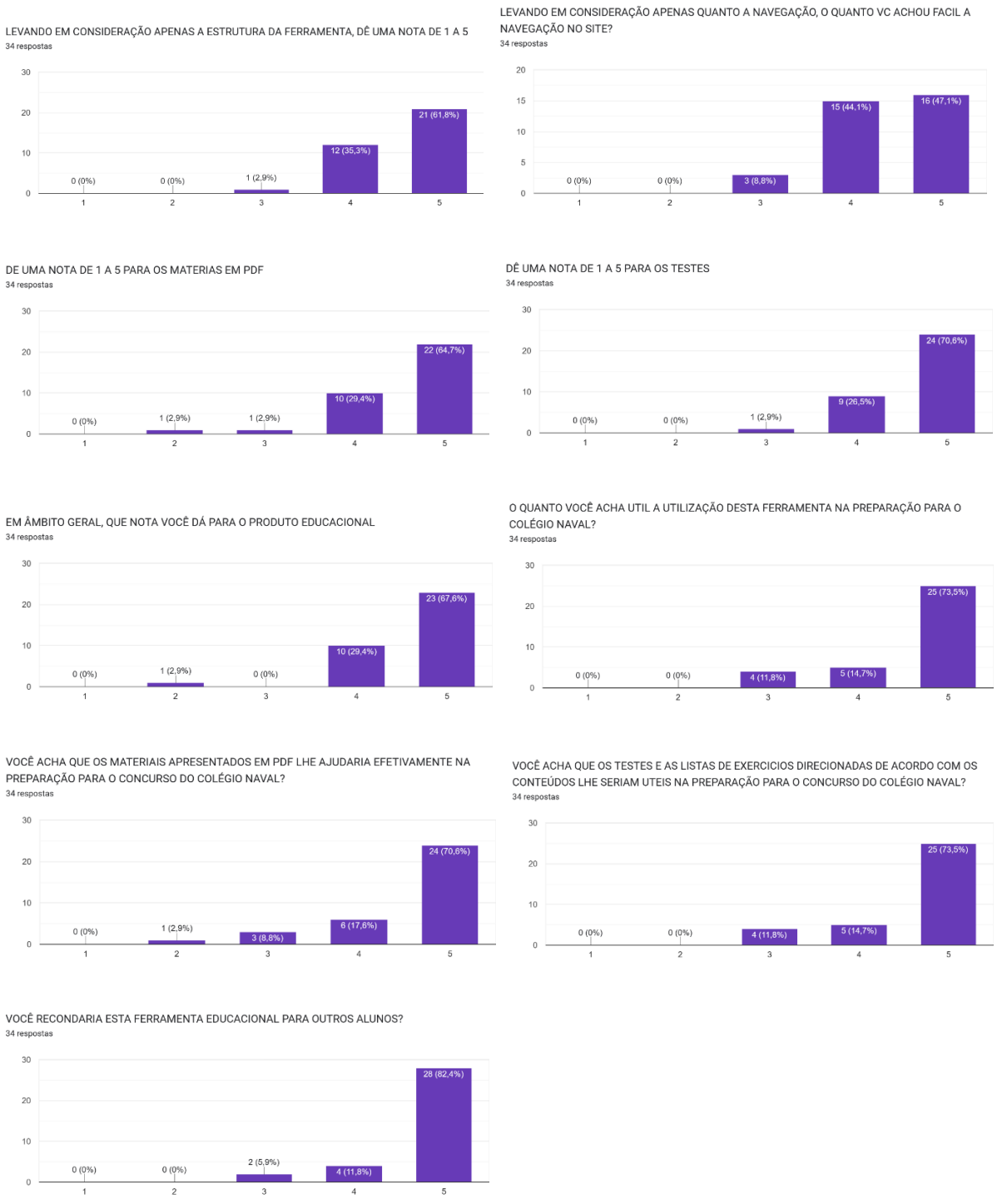
críticas construtivas, sugerir dicas de melhoria e até relatar eventuais dificuldades encontradas durante o uso da ferramenta. Esse conjunto de respostas trouxe informações de grande relevância, uma vez que oferece uma visão mais profunda sobre o que funcionou bem e o que pode ser aprimorado.

Consideramos esse levantamento de enorme valia para a evolução do AUTOMATH, pois ele representa uma base sólida de informações que possibilita compreender com maior profundidade como o recurso está sendo percebido e utilizado pelos estudantes. Ao reunir impressões, avaliações e sugestões dos próprios usuários, esse conjunto de dados fornece subsídios concretos e objetivos para a realização de ajustes futuros, permitindo que cada aspecto identificado como ponto de melhoria seja analisado e tratado de forma estratégica. Dessa forma, a pesquisa não apenas registra o desempenho atual do AUTOMATH, mas também oferece insumos fundamentais para que a ferramenta siga um processo contínuo de aprimoramento.

Essa perspectiva de aperfeiçoamento é essencial para que o recurso continue evoluindo e se adaptando às demandas pedagógicas, tornando-se cada vez mais eficaz no atendimento às necessidades reais dos alunos. Ao permitir que a experiência dos usuários influencie diretamente no desenvolvimento do AUTOMATH, cria-se um ciclo virtuoso de construção colaborativa, no qual a prática orienta a melhoria, e a melhoria, por sua vez, impacta positivamente a prática pedagógica.

Por fim, a Figura 26 apresenta, de maneira clara e organizada, as notas atribuídas pelos estudantes a cada um dos itens avaliados, sintetizando de forma visual as percepções coletadas. Essa representação gráfica facilita a compreensão do grau de satisfação geral e destaca os aspectos mais bem avaliados, bem como aqueles que necessitam maior atenção. Assim, os dados dispostos na figura funcionam como um indicador importante para o direcionamento das próximas etapas de desenvolvimento do AUTOMATH, servindo de guia para decisões futuras e garantindo que os avanços sejam sempre fundamentados em evidências concretas.

Figura 26: Nota atribuídas pelos alunos em cada item a ser considerado



Fonte: Elaborado pelo autor

A última questão por se tratar de uma pergunta aberta representaremos as diversas respostas obtidas por meio da Figura 27 que é uma árvore de opiniões.

Figura 27: Árvore de opiniões

Fonte: Elaborado pelo autor

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em linhas gerais, apresentamos uma contribuição relevante para o campo da Educação Matemática ao abordar o ensino de geometria de maneira integrada a recursos digitais e trilhas pedagógicas. O estudo evidencia a necessidade de repensar práticas tradicionais, propondo estratégias inovadoras que dialogam com as demandas de estudantes contemporâneos e com a realidade dos concursos militares, em especial o Colégio Naval.

Ao reunir fundamentação teórica consistente, análise de provas, levantamento bibliográfico e uma proposta prática aplicável, o trabalho demonstra que é possível alinhar rigor acadêmico e pertinência pedagógica. Mais do que oferecer respostas prontas, a pesquisa abre caminhos para novas reflexões, apontando para um ensino de matemática que seja, ao mesmo tempo, mais efetivo, atrativo e inclusivo para que possa ser retomado e por ventura evoluído.

Dessa forma, esta pesquisa cumpre seu papel quando se propõe a deixar um legado e um convite para que educadores, pesquisadores e instituições e principalmente alunos, continuem explorando formas criativas e fundamentadas de promover a aprendizagem, contribuindo para uma formação matemática mais sólida e significativa e que seja útil aos estudantes para o fato de aproximá-los a tão sonhada aprovação no concurso de admissão do Colégio Naval ou até mesmo na Espcex.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, F. C. S. Análise sobre a prova do Colégio Naval relacionado com os parâmetros curriculares nacionais e livros didáticos. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

ALMEIDA, R. C. O cálculo de áreas e volumes: uma proposta de práticas de ensino dinâmicas e motivadoras. 2023. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Pará, 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CONSELHO NACIONAL DE SAÚDE (Brasil). Resolução n.º 510, de 7 de abril de 2016. Dispõe sobre as normas aplicáveis a pesquisas em Ciências Humanas e Sociais. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, 24 maio 2016.

CRESWELL, J. W. Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

CRISTINA, L. M. T. A geometria no ensino médio: uma sequência didática usando fotografia, os ambientes não formais de ensino e os objetos virtuais de aprendizagem. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Goiás, Goiás, 2016.

DAHN, F. Área e perímetro de figuras geométricas planas: percepções e criações através de malha quadriculada e o software Geogebra. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2019.

DENZIN, N. K. The research act: a theoretical introduction to sociological methods. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1978.

FIGUEIREDO, W. S. Pensamento computacional no ensino de cálculo da área de figuras planas na educação básica. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, 2021.

GATTI, B. A. A construção da pesquisa em educação: planos e deliberações metodológicas. *Cadernos de Pesquisa*, São Paulo, n. 115, p. 139–154, jul. 2002. Disponível em: https://www.scielo.br/j/cp/a/v7JX9zHnrNkSqmN8mjGjytM/. Acesso em: 25 jul. 2025.

GEHRKE, T. T. Trilhos matemáticos como contexto para o ensino e a aprendizagem de geometria espacial com estudantes do terceiro ano do ensino médio. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Natal, 2017.

KALEFF, A. M. et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico: modelo de Van Hiele. *Bolema*, Rio Claro, v. 10, 1994.

LEONARDO, M. Z. A. Metodologias ativas e tecnologias digitais móveis: caminhos para potencializar a aprendizagem de áreas. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2021.

MINAYO, M. C. S. O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde. 9. ed. São Paulo: Hucitec, 2004.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. Geometria segundo a teoria de Van Hiele. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 2010.

NUNES, L. S. Resolução de problemas no processo de aprendizagem através do jogo "Trilhando na geometria espacial", fundamentada na Teoria de Galperin, nos estudantes da segunda série do ensino médio na escola de agrotécnica da UFRR. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Rondônia, Rondônia, 2019.

VAN HIELE, P. M. Structure and insight: a theory of mathematics education. New York: Academic Press, 1986.

VIEIRA, K. R. O uso do Minecraft Education como ferramenta de ensino e aprendizagem em matemática: áreas, volumes e proporções. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Paraná, 2023

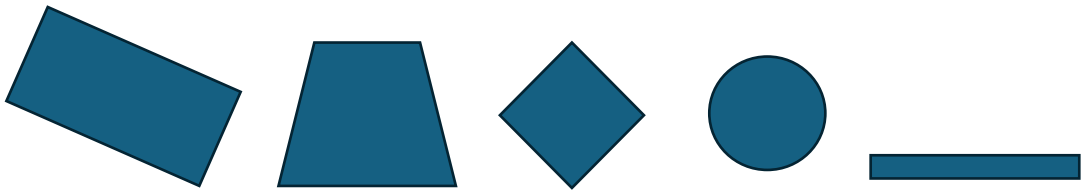
APÊNDICE A: IDENFICANDO ALUNOS COM CHANCE DE DISCALCULIA

Teste de Van Hiele – Nível 1: Reconhecimento

1. Observando as figuras a seguir, circule aquelas que são consideradas triângulos.

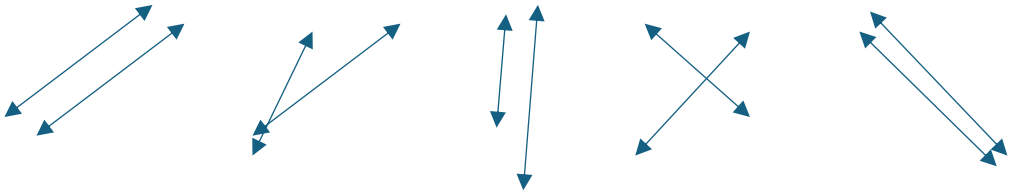
2. Observando as figuras a seguir, e circule aquelas que podem ser consideradas quadrados.

3. Abaixo, estão algumas figuras, dentre elas, circule aquelas que são consideradas retângulos.



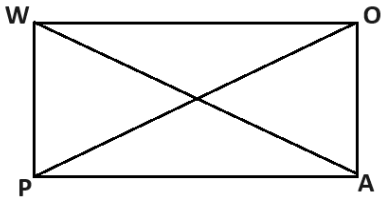
4. Dentre as figuras abaixo, quais delas podem ser consideradas paralelogramos:

5. Abaixo, foram traçadas duas retas, circule aquelas que são consideradas paralelas.



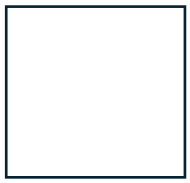
Teste de Van Hiele – Nível 2: Análise

1. A seguir encontra-se um retângulo PWOA, as linhas WA e PO são chamadas de diagonais. Assinale dentre a(s) alternativa(s) abaixo, aquela(s) que é verdadeira para qualquer Retângulos.



   a) Tem quatro ângulos retos
   b) Tem lados oposto paralelos
   c) Tem diagonais de mesmo comprimento
   d) Tem quatro lados iguais

2. A figura a seguir, representa um quadrado, tendo isso, cite três propriedades.

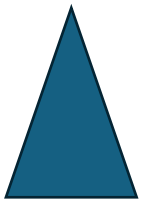


Propriedade 1: _____

Propriedade 2: _____

Propriedade 3: _____

3. Sabendo que todo triângulo isóscele tem uma propriedade muito importante, o fato de se ter dois lados iguais, tendo isso podemos dizer que dentre as alternativas abaixo, aquela que é verdadeira para qualquer triangulo isósceles é:



a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°
b) Um dos ângulos mede 90°
c) Dois ângulos têm a mesma medida
d) Todos os três ângulos têm a mesma medida

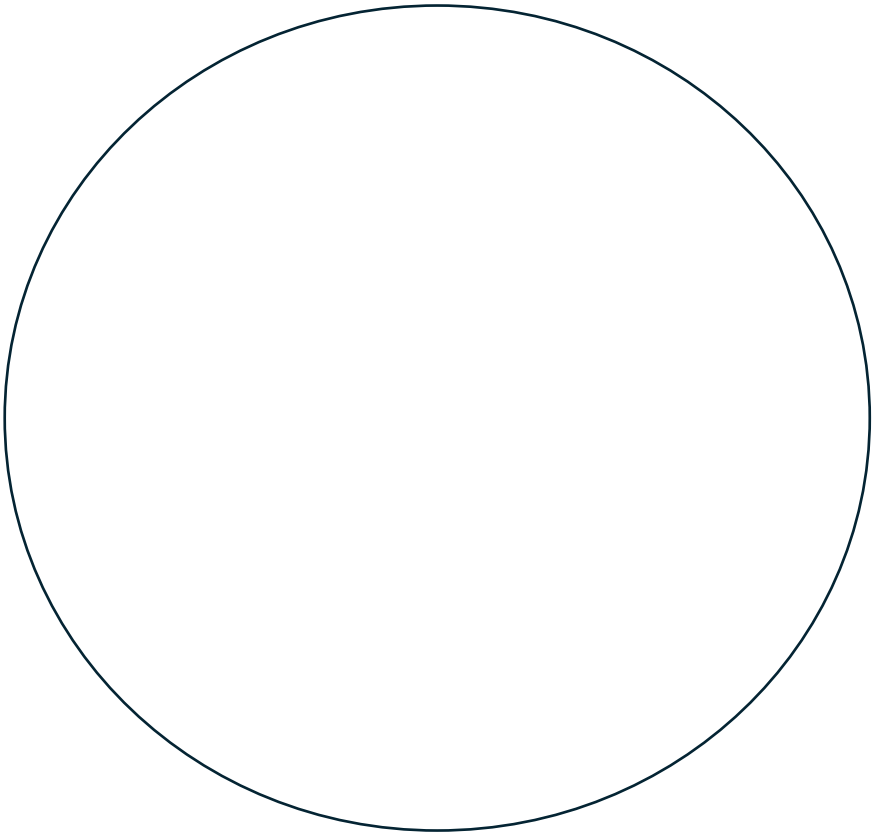
4. Cite três propriedades dos paralelogramos:

Propriedade 1: _____

Propriedade 2: _____

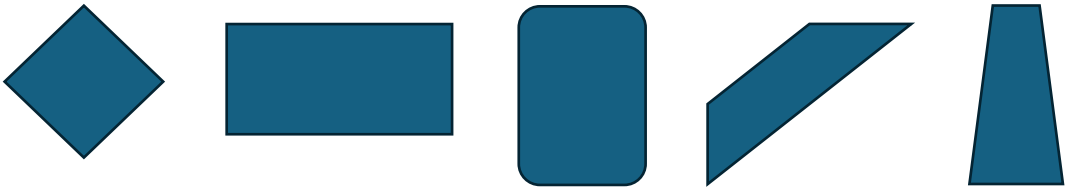
Propriedade 3: _____

5. Desenhe abaixo, dentro da região delimitada pelo círculo, um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento e que seu vértice encoste neste círculo.



Teste de Van Hiele – Nível 3: Abstração

1. Analisando as figuras abaixo, circule aquelas que podem ser consideradas retângulos:



2. De um quadrilátero ABCD, tem-se que os seus ângulos são todos eles iguais, então:

a) Pode-se afirmar que ABCD é um Quadrado? R: _____
b) Por quê? R: _____
c) Que tipo de quadrilátero é ABCD? R: _____

3. Considere as afirmativas:
   I) A figura P é um retângulo
   II) A figura P é um triângulo

Assinale a alternativa Verdadeira:

a) Se I é verdadeira, Então II é Falsa
b) Se I é falsa, então II é verdadeira
c) I e II não podem serem ambas Verdadeira
d) I e II não podem serem ambas Falsas
e) Se II é Falsa, Então I é verdadeira

4. Ao observarmos as propriedades dos Paralelogramos, podemos afirmar que todo retângulo é um paralelogramo? R: _____
   Por quê? _____

5. Assinale a alternativa que relaciona corretamente s propriedades dos retângulos e dos quadrados.
   a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos
   b) Se uma propriedade é dos quadrados, então ela não será dos retângulos
   c) Qualquer propriedade dos retângulos, é também validas para os quadrados
   d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados
   e) Nenhuma das afirmativas anteriores

Teste de Van Hiele – Nível 4: Dedução formal

1. Considere um triangulo cujo perímetro é 57 cm, de forma que ser lados sejam proporcionais a 4, 6 e 9. Qual o comprimento da bissetriz que toca o maior lado desse triangulo?

Teste de Van Hiele – Nível 5: Rigor

1. Dado Um triângulo ABC, traça-se, um segmento de reta partindo de um ponto P em AB, cortando AC em Q e encontrando o prolongamento de BC em D. Tendo isso, encontre uma fórmula capaz de gerar o comprimento do segmento AP, em função de PB, BC, BD, CQ, QA.

APÊNDICE B: O QUE SABEMOS SOBRE ÁREA DAS FIGURAS PLANA

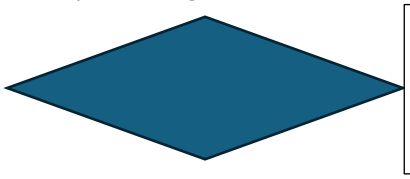
1. Em cada uma das figuras abaixo, escreva todas as fórmulas ou procedimentos que você conheça, que possibilite encontrar a área de cada uma delas. (observação 1: você poderá dar nomes a qualquer segmento da figura)

a) Triângulo

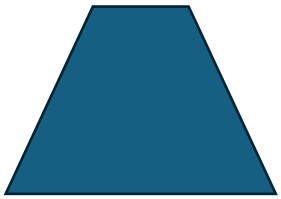
b) Quadrado:

c) Retângulo:

d) Losango

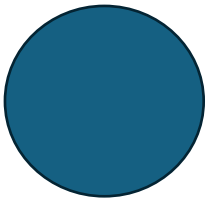


e) Trapézio



f) Paralelogramo

g) Círculo



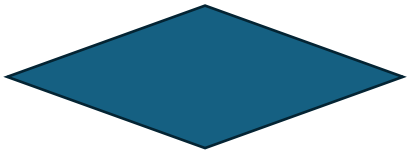
2. Dada as figuras a seguir determine suas áreas:

a) Triângulo: (Base 3 cm e altura 10 cm)

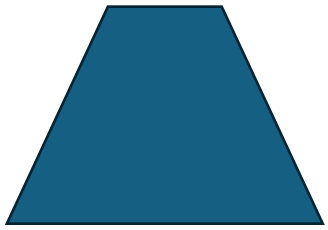
b) Quadrado: (lado 10 cm)

c) Retângulo: (Base 15 cm e altura 6 cm)

d) Losango (Diagonais medindo 10 e 12 cm)

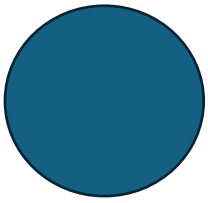


e) Trapézio (Base medindo 10 e 18 cm e a distância entre elas 12 cm)



f) Paralelogramo (bases medindo 20 cm e a distância entre elas 12 cm)

g) Círculo (Diâmetro 14 cm)



3. Determine a área dos triângulos abaixo:

Figura 1:

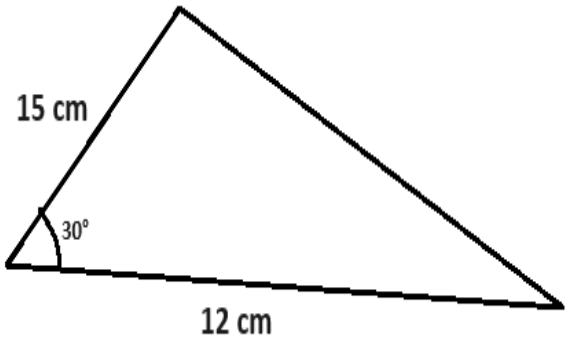


Figura 2:

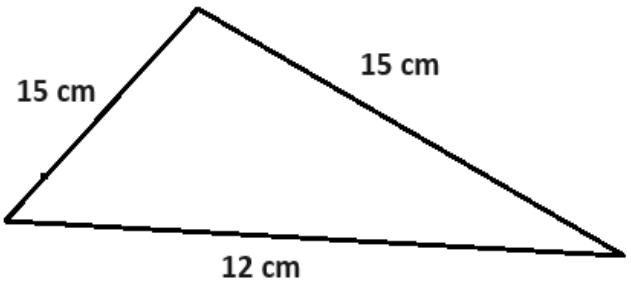
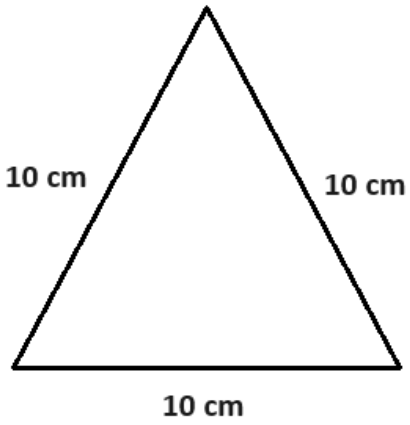


Figura 3:



4. Determine as Áreas hachuradas.

Figura 1:

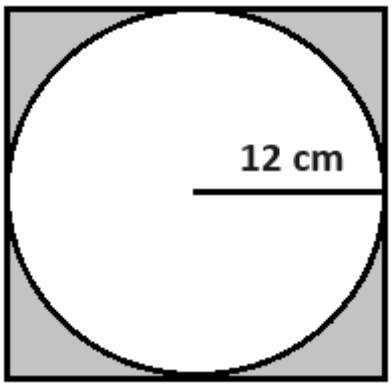


Figura 2:

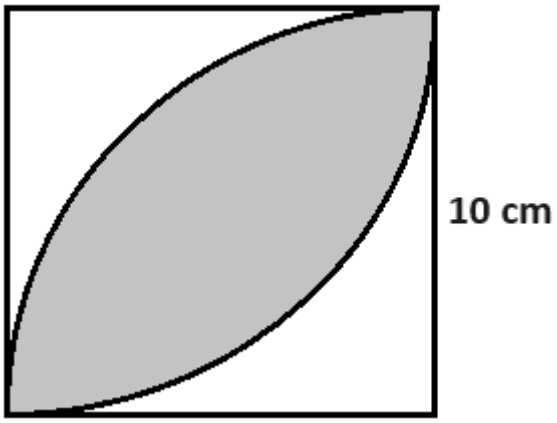
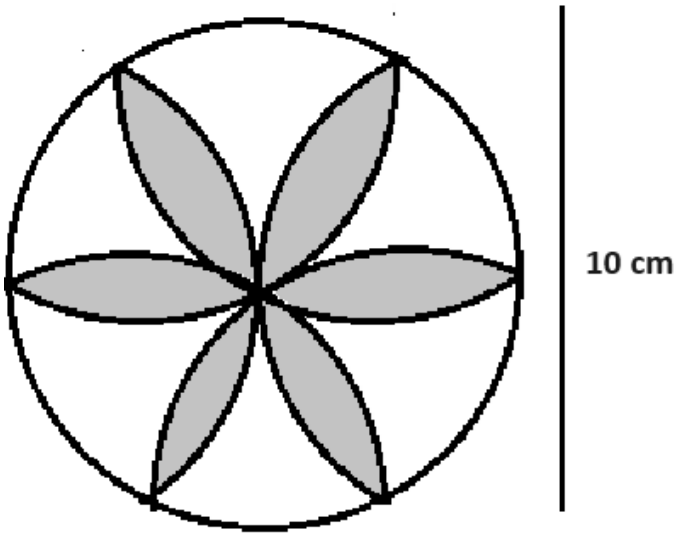
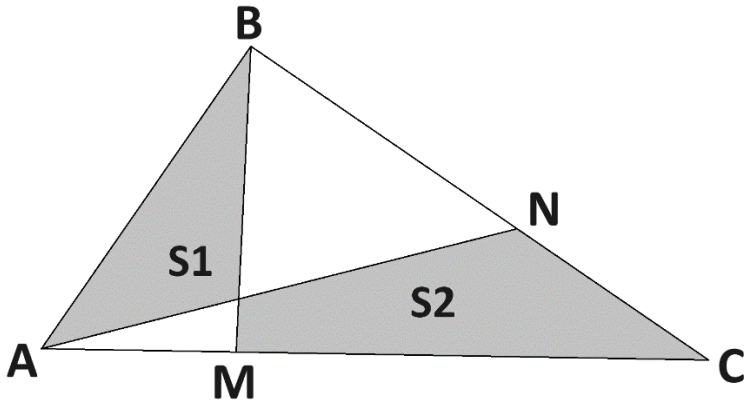


Figura 3:



5. Sabendo que MC = 3(AM) e que BN = 3(NC), determine a razão $\frac{S1}{S2}$