UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCOS ANDRÉ MAIA DO NASCIMENTO

MATEMÁTICA ATRAVÉS DO XADREZ: UMA PROPOSTA DE DISCIPLINA ELETIVA PARA O NOVO ENSINO MÉDIO

JUAZEIRO DO NORTE
2025

MARCOS ANDRÉ MAIA DO NASCIMENTO

MATEMÁTICA ATRAVÉS DO XADREZ: UMA PROPOSTA DE DISCIPLINA ELETIVA PARA O NOVO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho

JUAZEIRO DO NORTE
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

N282m Nascimento, Marcos André Maia do.

Matemática através do xadrez: uma proposta de disciplina eletiva para o Novo Ensino Médio/ Marcos André Maia do Nascimento. – 2025.
78 f. (Inclui referências bibliográficas, p.68-74).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Juazeiro do Norte, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho.

1. Novo Ensino Médio. 2. Xadrez. 3. Matemática. 4. Metodologia ativa. I. Benjamim Filho, Francisco de Assis - orientador. II. Universidade Federal do Cariri, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 511.12

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MARCOS ANDRÉ MAIA DO NASCIMENTO

MATEMÁTICA ATRAVÉS DO XADREZ: UMA PROPOSTA DE DISCIPLINA ELETIVA PARA O NOVO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em: 29 de agosto de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br FRANCISCO DE ASSIS BENJAMIM FILHO
Data: 10/12/2025 19:24:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho (Orientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Documento assinado digitalmente
gov.br FRANCISCO PEREIRA CHAVES
Data: 12/12/2025 13:47:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Documento assinado digitalmente
gov.br JOAO FRANCISCO DA SILVA FILHO
Data: 13/12/2025 15:39:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho as quatro mulheres da minha vida, minha esposa Ângela Alves, minha mãe Maria de Fátima, minha filha Cecília Maia e minha avó materna Josefa Maia

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pelo dom da vida, agradeço por todas as bênçãos que tem me dado, pessoais, espirituais, profissionais e acadêmicas.

A minha esposa Ângela Alves que sempre me apoiou em minhas lutas, por isso sou grato a Deus por tê-la em minha vida, espero sempre poder compartilhar de minhas conquistas com você e minha família.

A minha mãe Maria de Fátima por ter me ensinado valores e princípios dos quais hoje formam meu caráter, agradeço por sempre estar comigo quando preciso, se cheguei até aqui é porque a senhora me ajudou.

Ao meu tio Sebastião Filho pelas portas que abriu em minha vida, portas que se não fossem abertas atrasaria ou até mesmo fechariam para sempre a que abro hoje, ser mestre em matemática.

Aos meus amigos Leonardo Lins, Thiago Vieira, David Alves, Marcelo Silva e Cassiano Rodrigues pela amizade dos últimos anos.

Aos meus primos Marcelo Alves e Rafael Silva pelo apoio em diversas fases da minha vida.

Aos meus professores da UFCA por terem me ensinado ao longo desse curso, tenho grande adimiração por todos, em particular pelos professores Francisco Pereira Chaves e Francisco de Assis Benjamim Filho dos quais me espelho como profissional.

Ao meu orientador Francisco de Assis Benjamim Filho pela ajuda na construção deste trabalho, obrigado por acreditar em mim.

Aos meus colegas de curso pela partilha dos desafios enfrentados e pela companhia agradável ao longo do curso.

Aos demais familiares e amigos.

RESUMO

O ensino brasileiro sofreu uma série de modificações ao longo da história, iniciado pela chegada dos Jesuítas com o modelo de ensino tradicional, se desenvolvendo com os movimentos escolanovistas, passando pela escola tecnicista, até chegar em seu modelo atual baseado na pedagogia Crítico Social dos Conteúdos. Dentre as principais modificações que o ensino médio sofreu ao longo dos anos, podemos destacar a trazida pela Lei nº 13.415/2017, que implementou o Novo Ensino Médio. Este trabalho apresenta como objetivo geral o desenvolvimento de uma proposta de disciplina eletiva com material de apoio, baseada na utilização do xadrez como recurso didático para o ensino de matemática, contribuindo para os docentes que atuam no Novo Ensino Médio. Este é um estudo que se caracteriza como pesquisa bibliográfica, onde foram utilizados livros, teses, dissertações, artigos e sites de busca, como Google Acadêmico e Repositório de dissertações do PROFMAT, através das palavras-chave: Propostas de disciplina eletiva, matemática através do xadrez, história do xadrez e marcos legais da implantação do novo Ensino Médio, dentre outras. Como resultado da pesquisa foi possível a criação de uma disciplina eletiva para implementação no Catálogo das Disciplinas Eletivas da Secretaria da Educação do Estado do Ceará (Seduc), bem como a criação de uma sequência didática que servirá de material de apoio para o docente que ministrará a disciplina eletiva apresentada. Espero que a sequência didática apresentada provoque o interesse nos estudantes, através da implementação de abordagens mais lúdicas. Conclui-se então que o uso do xadrez como metodologia ativa para o ensino de matemática pode ser uma ferramenta valiosa, conciliada a uma boa contextualização do docente.

Palavras-chave: Novo Ensino Médio. Xadrez. Matemática.

ABSTRACT

Brazilian education has undergone a series of modifications throughout history, starting with the arrival of the Jesuits with the traditional teaching model, developing with the New School movements, passing through the technical school, until reaching its current model based on the Critical Social Content pedagogy. Among the main changes that secondary education has undergone over the years, we can highlight the one brought about by Law No. 13,415/2017, which implemented the New Secondary Education. The general objective of this work is to develop a proposal for an elective course with support material, based on the use of chess as a didactic resource for teaching mathematics, contributing to teachers working in the New High School. This is a study that is characterized as bibliographical research, where books, theses, dissertations, articles and search sites were used, such as Google Scholar and PROFMAT Dissertation Repository, using the keywords: Proposals for elective subjects, mathematics through chess, history of chess and legal milestones for the implementation of the new High School, among others. As a result of the research, it was possible to create an elective course for implementation in the elective catalog of the Education Department of the State of Ceará (Seduc), as well as the creation of a didactic sequence that will serve as support material for the teacher who will teach the elective course presented. I hope that the teaching sequence presented will spark interest in students, through the implementation of more playful approaches. It is therefore concluded that the use of chess as an active methodology for teaching mathematics can be a valuable tool, combined with a good contextualization of the teacher.

Keywords: New High School. Chess. Mathematics.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1. Introdução

Minha experiência como docente teve início, ainda na licenciatura em matemática na Universidade Estadual do Ceará (UECE), em 2018 através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), no qual atuei por 18 meses. De 2018 até os dias atuais, muitas coisas mudaram no ensino médio, dentre essas grandes mudanças destaco a implantação do ensino em tempo integral, que trouxe para o currículo a proposta dos itinerários formativos, e dentro desses as disciplinas eletivas.

O novo ensino médio traz a proposta de ampliação da carga horaria através do ensino em tempo integral. Para essa ampliação serão adicionados ao currículo os itinerários formativos que complementarão a formação geral básica. Podemos entender itinerários formativos como uma parte mais flexível do currículo, que poderão ser escolhidos pelos alunos conforme seu projeto de vida. São exemplos de disciplinas dos itinerários formativos, projeto de vida, disciplinas eletivas, aprofundamento em matemática, aprofundamento em português, dentre outras.

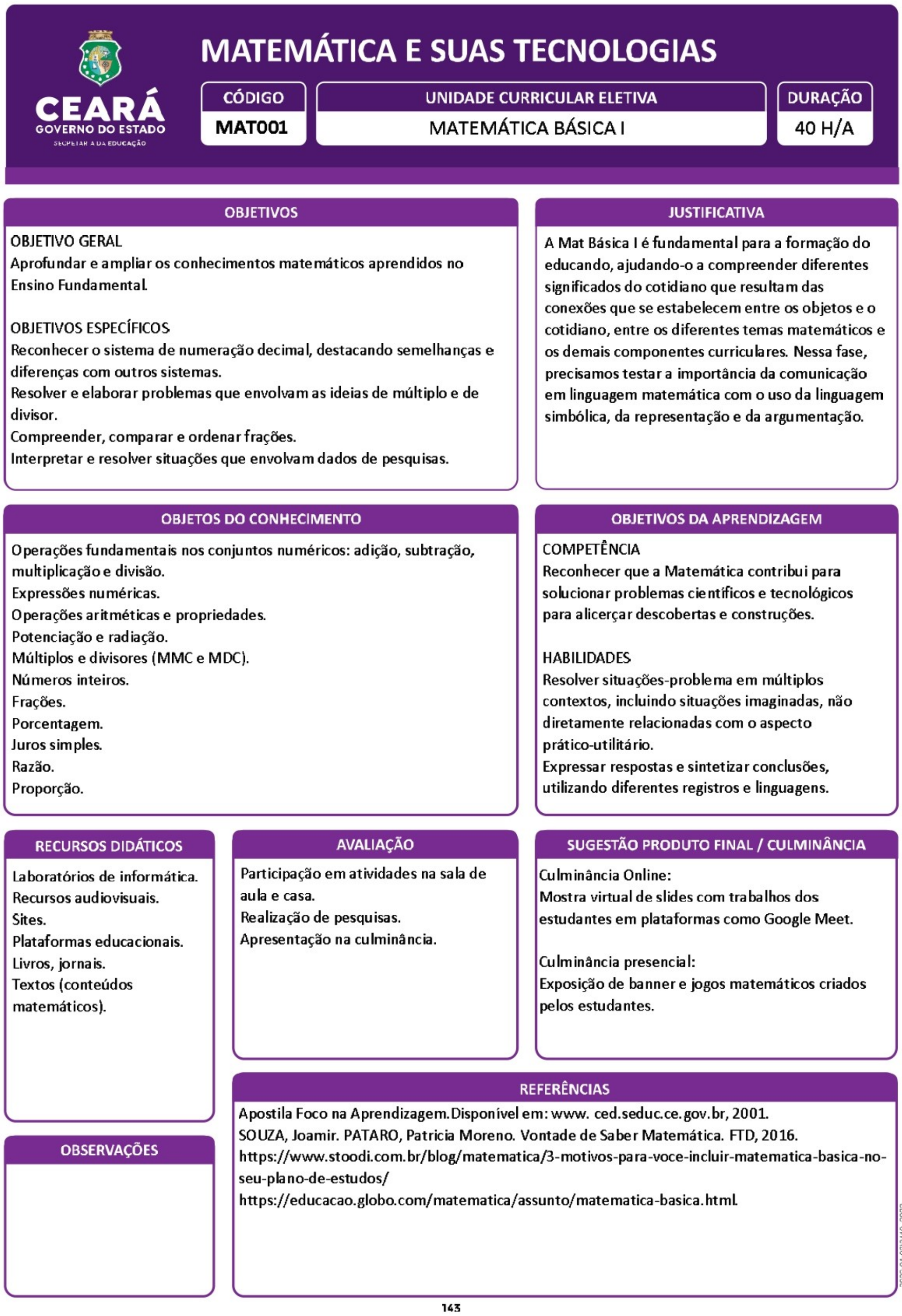
A eletiva é uma disciplina curricular do Novo Ensino Médio que pode estar vinculada tanto à Base Comum Curricular quanto à formação profissional. A cada semestre, o estudante tem a possibilidade de escolher quais disciplinas eletivas deseja cursar, de acordo com seu projeto de vida. As ementas dessas disciplinas constam no Catálogo de disciplinas Eletivas disponibilizado pela Secretaria de Educação (SEDUC), disponível em (CEARÁ, 2023). A disciplinas eletivas são flexíveis, podendo estas serem adaptadas pelo professor regente conforme haja necessidade.

Meu primeiro contato com o novo ensino médio aconteceu em 2022, no meu primeiro ano como docente na rede estadual de ensino. A priori fiquei impressionado com tamanha mudança no currículo do ensino médio, tendo em vista meu último contato em 2018. Dentre essas mudanças a que mais me desafiou foi a proposta das disciplinas eletivas.

Os desafios iniciaram já no processo de definição das disciplinas eletivas que eu ministraria no primeiro semestre, tendo como referência o Catálogo das disciplinas Eletivas da Seduc. Por afinidade com minha formação, escolhi a eletiva “Matemática Básica I” e “Informática Básica”.

A seguir apresentaremos a ementa da disciplina eletiva “matemática básica I”.

Figura 1.1: Disciplina eletiva Matemática básica I



MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO

CÓDIGO	UNIDADE CURRICULAR ELETIVA	DURAÇÃO
MAT001	MATEMÁTICA BÁSICA I	40 H/A

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL
Aprofundar e ampliar os conhecimentos matemáticos aprendidos no Ensino Fundamental.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Reconhecer o sistema de numeração decimal, destacando semelhanças e diferenças com outros sistemas.
Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
Compreender, comparar e ordenar frações.
Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas.

JUSTIFICATIVA

A Mat Básica I é fundamental para a formação do educando, ajudando-o a compreender diferentes significados do cotidiano que resultam das conexões que se estabelecem entre os objetos e o cotidiano, entre os diferentes temas matemáticos e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisamos testar a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação.

OBJETOS DO CONHECIMENTO

Operações fundamentais nos conjuntos numéricos: adição, subtração, multiplicação e divisão.
Expressões numéricas.
Operações aritméticas e propriedades.
Potenciação e radiação.
Múltiplos e divisores (MMC e MDC).
Números inteiros.
Frações.
Porcentagem.
Juros simples.
Razão.
Proporção.

OBJETIVOS DA APRENDIZAGEM

COMPETÊNCIA
Reconhecer que a Matemática contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos para alicerçar descobertas e construções.

HABILIDADES
Resolver situações-problema em múltiplos contextos, incluindo situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário.
Expressar respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens.

RECURSOS DIDÁTICOS

Laboratórios de informática.
Recursos audiovisuais.
Sites.
Plataformas educacionais.
Livros, jornais.
Textos (conteúdos matemáticos).

AVALIAÇÃO

Participação em atividades na sala de aula e casa.
Realização de pesquisas.
Apresentação na culminância.

SUGESTÃO PRODUTO FINAL / CULMINÂNCIA

Culminância Online:
Mostra virtual de slides com trabalhos dos estudantes em plataformas como Google Meet.

Culminância presencial:
Exposição de banner e jogos matemáticos criados pelos estudantes.

REFERÊNCIAS

Apostila Foco na Aprendizagem.Disponível em: www. ced.seduc.ce.gov.br, 2001.
SOUZA, Joamir. PATARO, Patricia Moreno. Vontade de Saber Matemática. FTD, 2016.
https://www.stoodi.com.br/blog/matematica/3-motivos-para-voce-incluir-matematica-basica-no-seu-plano-de-estudos/
https://educacao.globo.com/matematica/assunto/matematica-basica.html.

OBSERVAÇÕES

143

Fonte: (CEARÁ, 2023, p. 143).

Logo após a escolha das disciplinas eletivas, questionei aos gestores escolares a respeito do material de apoio para ministrar a disciplina eletiva, como um livro didático ou apostila. Porém, como resposta fui orientado a seguir a ementa da disciplina eletiva, me baseando pelas referências trazidas pela ementa. No início, consegui preparar bons materiais de aula a custo de longos planejamentos, porém à medida que o semestre avançava a dificuldade de produzir o material para ministrar durante as aulas aumentava, a ponto de precisar utilizar outros momentos além do horário de planejamento escolar para preparar os materiais das aulas.

Tendo em vista os desafios enfrentados por mim durante a regência das aulas das disciplinas eletivas, é possível que este cenário seja a realidade de muitos professores da rede estadual de ensino. Atualmente na escola em que trabalho, já contamos com apostilas impressas de algumas disciplinas eletivas, cerca de doze, também é possível encontrar alguns materiais em PDF disponíveis em (GOVERNO DO ESTADO DO CEARÁ, 2025). No endereço eletrônico encontram-se materiais de 99 disciplinas eletivas de diferentes áreas do conhecimento, entretanto ainda não é uma quantidade significativa quando comparado com as 481 disciplinas eletivas disponíveis no Catálogo das disciplinas Eletivas da Seduc de 2025.

Esses desafios enfrentados pelos professores para ministrar novas disciplinas eletivas, contribuem para uma padronização no currículo dos alunos, pois os professores tendem a repetir a escolha das disciplinas eletivas a cada semestre, prejudicando alguns alunos que são obrigados a escolher uma disciplina eletiva que não condiz com seu projeto de vida.

Esses desafios também são citados por Gomes (2023), que destaca em seu trabalho, desenvolvido através da coleta de respostas via formulário eletrônico, os diversos desafios enfrentados pelos docentes na realização das disciplinas eletivas, dentre eles: o tempo de planejamento, ementa das disciplinas eletivas rasa, falta de material de apoio para o professor, dentre outros.

O questionário aplicado pelo autor foi destinado a professores que atuam no ensino médio da rede estadual de ensino do Ceará, das quais foram obtidas 24 respostas ao formulário. A partir do questionário concluiu-se que boa parte dos docentes dizem que uma das maiores dificuldades para a aplicação das disciplinas eletivas é a ausência de materiais de apoio, tais como: ferramentas pedagógicas, jogos, dinâmicas, dentre outros.

A temática deste trabalho está relacionada ao jogo de xadrez não foi um acaso, mas pela minha afinidade com a prática do jogo. Pratico o jogo desde 2011 e até hoje ainda costumo jogar algumas partidas para me divertir.

Diante dessa situação, o presente trabalho tem como objetivo desenvolver uma proposta de disciplina eletiva com material de apoio, baseada na utilização do xadrez como recurso didático para o ensino de matemática, contribuindo para os docentes que atuam no Novo Ensino Médio.

Para alcançar tal objetivo definiremos os objetivos específicos abaixo.

- Investigar o sistema de ensino brasileiro, apontando a importância da utilização das metodologias ativas no processo de ensino-aprendizagem.

- Realizar uma pesquisa bibliográfica acerca da criação e desenvolvimento do xadrez, desde sua origem como jogo até seu uso como ferramenta pedagógica na disciplina de matemática.

- Realizar uma pesquisa documental e bibliográfica acerca da legislação que permeia a implementação do Novo Ensino Médio.

- Apresentar a dinâmica de funcionamento dos itinerários formativos e disciplinas eletivas.

- Apresentar a ementa de uma disciplina eletiva na perspectiva dos documentos orientadores do Novo Ensino Médio.

- Descrever o conteúdo programático de ensino de uma disciplina eletiva baseada no uso do xadrez para o ensino de matemática, elaborando material didático e estratégias pedagógicas.

Para o desenvolvimento do trabalho, inicialmente foi realizada uma pesquisa documental no banco de dissertações do PROFMAT, disponível em (PROFMAT, 2025). A pesquisa teve como finalidade encontrar trabalhos que apresentassem propostas de disciplina eletiva como objeto central.

Ao digitar "eletiva" no botão de pesquisa, foram obtidos 13 resultados. Das 13 dissertações, foram listadas 12 tendo como tema central a criação de uma nova disciplina eletiva para o Catálogo de disciplinas Eletivas da Seduc ou a criação de um material de apoio para o professor durante a aplicação de uma disciplina eletiva já existente do catálogo. A Figura 1.2 apresenta os resultados da pesquisa citada acima até o dia 10 de Agosto de 2025.

Figura 1.2: Dissertações PROFMAT

Data de defesa	Aluno	Título da Dissertação	Instituição	Dissertação
09/05/2025	VANESSA BATISTA BROTTO	EMPODERAMENTO FEMININO NAS CIÊNCIAS: RESGATANDO HISTÓRIAS E INSPIRANDO FUTUROS PROPOSTA DE DISCIPLINA ELETIVA	UNIRIO	PDF
09/08/2024	TIAGO EMANOEL MELO PEREIRA	INVESTIGANDO PROCESSOS INFINITOS: UMA PROPOSTA DE DISCIPLINA ELETIVA SOB A ÓTICA DO NOVO ENSINO MÉDIO	UFCG	PDF
26/03/2024	NAFTALY CRISTAL FELIX	MATEMÁTICA E ASTRONOMIA: CONSTRUÇÃO DE UMA DISCIPLINA ELETIVA PARA EDUCAÇÃO BÁSICA	UFES	PDF
15/12/2023	JOICE DE LIMA COSTA ROCHA	A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO PROPOSTA DE ELETIVA PARA O NOVO ENSINO MÉDIO	UFERSA	PDF
23/11/2023	NAIARA HOLANDA FALCAO	A INTEGRAÇÃO DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO NOVO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DE UMA DISCIPLINA ELETIVA	SEDUC-CE/UNILAB	PDF
25/08/2023	ANDRESON DA SILVA ALQUINO	MATEMÁTICA ELEITORAL - UMA PROPOSTA DE ELETIVA À LUZ DO NOVO ENSINO MÉDIO	UFCG	PDF
09/05/2023	ANDRESA MARQUES DE LIMA	NOVO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO SOBRE O IMPACTO DA DISCIPLINA ELETIVA DE MATEMÁTICA BÁSICA I EM UMA ESCOLA ESTADUAL DO CEARÁ	UFERSA	PDF
24/02/2023	FRANCISCO JOSE MARINHO DE OLIVEIRA	A EDUCACÃO FINANCEIRA COMO DISCIPLINA ELETIVA NO NOVO E NSINO MÉDIO	UFRN	PDF
13/05/2022	JOSE GILSON DE SOUSA BENIGNO	CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO COMO DISCIPLINA ELETIVA	UFC	PDF
04/02/2022	LUCIANO FRANCO DA SILVA	PROGRAMAÇÃO LINEAR E INTEIRA NO NOVO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE DISCIPLINAS ELETIVAS	UESC	PDF
21/12/2021	CASSISLANE MARIA RIBEIRO SILVA	A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA: UMA PROPOSTA PARA ELETIVA DE EXATAS	UESB	PDF
10/07/2021	ALLANNY KARLA BARBOSA VASCONCELOS	UMA PROPOSTA DE ELETIVA PARA UM ITINERÁRIO FORMATIVO: A GEOMETRIA E CARTOGRAFIA DA TERRA.	UFAL	PDF
07/04/2021	DIEGO MARIANO VALERO	MATEMÁTICA FINANCEIRA COMO ELETIVA DO PROGRAMA INOVA EDUCAÇÃO DO GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO	UNICAMP	PDF

Fonte: (PROFMAT, 2025).

Também foi realizada uma pesquisa usando a palavra-chave "xadrez", para a qual obtivemos 19 resultados com variados temas, tais como: O uso do xadrez como recurso didático para o ensino de algum conteúdo matemático, construção de oficinas com o uso pedagógico do jogo de xadrez, dentre outros. A Figura 1.3 destaca os trabalhos apresentados a partir da pesquisa citada acima nos últimos cinco anos.

Figura 1.3: Dissertações PROFMAT II

Data de defesa	Aluno	Título da Dissertação	Instituição	Dissertação
30/09/2024	SEBASTIAO ERASTO CANDIDO PEREIRA	O XADREZ COMO INSTRUMENTO PEDAGÓGICO NO ENSINO DA MATEMÁTICA NO ENSINO BÁSICO	UFG	PDF
01/08/2024	FRANCENILDO DA SILVA PEREIRA	UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM AUXÍLIO DO JOGO DE XADREZ PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA	UFPA	PDF
14/09/2023	GIUSEPPE LUIGI TOSCANO	O JOGO DE XADREZ COMO FERRAMENTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM: DESENVOLVENDO ESTRATÉGIAS COM OFICINAS E CARTÕES AUTOINSTRUTIVOS	UERJ	PDF
10/04/2023	CARLOS HENRIQUE GOMES FRANCO GRILLO	XEQUE-MATE(MÁTICO): O USO DO XADREZ NO DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	IFSP	PDF
06/05/2022	LUCAS VIEIRA BRITO	A LÓGICA MATEMÁTICA E O JOGO DE XADREZ APLICADO AO ENSINO FUNDAMENTAL II	UESB	PDF
25/02/2022	DANIVALDO GUEDES VULCAO	UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM A UTILIZAÇÃO DO JOGO DE XADREZ	UFPA	PDF
24/02/2022	THIAGO LOPES VERBICARIO DOS SANTOS	XADREZ E O APRENDIZADO DA MATEMÁTICA	UERJ	PDF
13/09/2021	ABRAAO RODRIGUES DE OLIVEIRA	CONTRIBUIÇÕES DO JOGO DE XADREZ NA PRÁTICA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA	IFPI	PDF
16/07/2021	JOSE AUGUSTO ALVES DE MOURA	O USO DO JOGO DE XADREZ COMO RECURSO AUXILIAR NAS AULAS DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO DE CASO NA ESCOLA C.E. ΞINÁCIO PASSARINHOΞ EM CAXIAS - MARANHÃO	UFPI	PDF
20/05/2021	DANIEL MATTOS ESCOBAR	XADREZ DE SOCIEDADE: DO GAME À GAMIFICAÇÃO	UnB	PDF

Fonte: (PROFMAT, 2025).

Concluímos, portanto, que este trabalho apresenta uma temática atual e relevante para o ensino de matemática nas escolas públicas do Ceará. Além de uma proposta inovadora dentro do banco de dissertações do PROFMAT, utilizando o jogo de xadrez como ferramenta pedagógica para o ensino me matemática através da proposta de uma disciplina eletiva para o novo ensino médio.

Este trabalho se caracteriza como uma pesquisa bibliográfica, pois foi "desenvolvido com base em materiais já elaborados, constituído principalmente de livros e artigos científicos" (GIL, 2002, p. 45). Além disso, a pesquisa também se qualifica como pesquisa exploratória que tem como característica "proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses" (GIL, 2002, p. 41).

Com finalidade de atingir os objetivos listados na introdução, o presente trabalho encontra-se dividido em cinco seções.

A seção 1 traz a introdução do trabalho, onde foram abordadas temáticas relacionadas à implantação do Novo Ensino Médio no Brasil, explicando sobre a proposta das disciplinas eletivas. Também foi apresentada a problemática deste trabalho, relacionada à falta de material de apoio para os professores durante o ministro das disciplinas eletivas, os objetivos e sua abordagem metodológica.

A seção 2 tratará sobre o desenvolvimento do ensino brasileiro, iniciando com o modelo de ensino tradicional trazido pelos jesuítas onde o aluno era tido como ser passivo do processo de ensino-aprendizagem, e posteriormente se desenvolvendo com ideias de pensadores como Comênius, Pestalozzi e Montessori, abordando a importância do uso de metodologias ativas para o ensino. Nesta seção também foram abordadas temáticas relacionadas à possível criação do jogo de xadrez na Índia, disseminação pela Europa, até se tornar um esporte olímpico atualmente.

Na seção 3, abordaremos temáticas relacionadas à implementação do Novo Ensino Médio no Brasil, apresentando os principais marcos legais para essa política pública, destacando a Lei n°13.415/2017 que foi a responsável pela flexibilização curricular e ampliação de carga horária, introduzindo o ensino integral regular. Nesta seção também foi apresentada a proposta curricular da disciplina eletiva Matemática Através do Xadrez.

Na seção 4, foi apresentada a sequência didática que servirá como material de apoio para os docentes que lecionarem a disciplina eletiva Matemática Através do Xadrez. Nela constam conteúdos matemáticos como: localização de pontos no plano cartesiano, área e perímetro de algumas figuras planas, probabilidade, estatística, raciocínio lógico e análise combinatória. Vale destacar que para participar da disciplina eletiva proposta neste trabalho, o aluno não necessita ter nenhum conhecimento prévio sobre o jogo de xadrez, pois ao longo das aulas o professor apresentará aos alunos os conhecimentos específicos do jogo para o desenvolvimento de cada aula.

Na seção 5, apontaremos nossas conclusões e considerações finais sobre a pesquisa, o qual foram apresentados os desafios enfrentados na construção deste trabalho, bem como perspectivas futuras, tais como: a aprimoração do trabalho a fim de possibilitar a publicação de artigos em revistas, a submissão da disciplina eletiva proposta para o Catálogo de disciplinas Eletivas da Seduc, e até a criação de projetos através da aplicação da disciplina eletiva em algumas escolas da CREDE 15.

2. Xadrez e o ensino de matemática

Nesta seção serão discutidas ideias sobre a evolução do xadrez, desde sua criação como jogo até seu desenvolvimento como possível material didático para o ensino de matemática, em especial nas áreas de análise combinatória, geometria plana e geometria analítica.

2.1 O ensino de matemática e suas tecnologias

A educação no Brasil passou por uma série de reformas ao longo da história, iniciada pelo modelo de ensino tradicional, foi se desenvolvendo a partir das necessidades da sociedade. Após longos períodos de luta, a educação passou a ser mais equânime e atualmente é um direito assegurado pelo Estado.

Anastasiou (2001), realizou um levantamento histórico dos métodos e metodologias de ensino, e percebeu a forte influência das escolas jesuítas na formação do sistema educacional brasileiro, cujos reflexos ainda são perceptíveis nos dias atuais. As aulas expositivas, memorização de conteúdos e um rígido sistema de conduta e avaliação eram características predominantes do sistema tradicional de ensino.

Quando se fala no ensino de matemática, o modelo de ensino tradicional ainda é muito presente nas salas de aula. Segundo Martins, Mata-Pereira e Ponte (2021), o ensino de Matemática ainda enfrenta a forte presença do modelo tradicional, no qual o professor atua como transmissor de conteúdos e o estudante assume uma postura passiva, restrita à memorização de procedimentos.

Porém a matemática vai muito além da postulação de teoremas e definições. D'Ambrosio (1989) já destacava que na matemática persiste a ideia de que a aprendizagem está resumida ao acúmulo de fórmulas e algoritmos, sem abrir espaço para interpretações ou a criticidade dos alunos. Ele destaca que o ensino de matemática sempre foi considerado um desafio tanto para educadores quanto para alunos. A disciplina, muitas vezes vista como abstrata e difícil, exige um tipo de aprendizagem que vai além da simples memorização de fórmulas e regras.

O ensino tradicional, por muito tempo, foi a principal abordagem utilizada na educação matemática, fundamentado na transmissão direta de conhecimento pelo professor e na memorização de procedimentos pelos alunos. No entanto, conforme apontam estudos de Oliveira (2019), baseados nas ideias de Ludwig Wittgenstein, filósofo austríaco com diversas contribuições no campo da lógica e da filosofia da matemática, a metodologia de ensino tradicional tem sido alvo de críticas. O autor cita que em alguns casos a metodologia tem sido substituída por abordagens que tratam o ensino da matemática a partir da exploração de uma situação-problema oriunda do cotidiano do aluno ou de outras ciências.

A evolução do ensino da matemática tem caminhado em direção a práticas que envolvem maior interação e protagonismo dos estudantes. Segundo Azevedo (2020), a evolução do ensino da Matemática deve privilegiar práticas que promovam a participação ativa dos estudantes, por meio de metodologias investigativas e da resolução de problemas, de modo a favorecer a construção de significados. Essa mudança busca tornar o aprendizado mais significativo, despertando o interesse dos alunos e promovendo um melhor entendimento dos conceitos matemáticos.

Dessa forma, embora o ensino tradicional tenha sua importância e contribuição para o processo de ensino e aprendizado ao longo da história da educação, a necessidade de adaptação às novas demandas educacionais evidencia a importância de metodologias que favoreçam a autonomia, a criatividade e o pensamento crítico dos estudantes.

Ao longo dos anos novas discussões surgiram sobre técnicas de ensino, buscando formas mais dinâmicas e significativas de engajar os estudantes. Nesse contexto, discussões sobre o uso de metodologias ativas têm crescido nos últimos anos, visando tornar o aprendizado mais estimulante e eficaz.

Para Lovato, Michelloti e Loreto (2018), nas metodologias ativas os professores devem atuar como mediadores na construção do conhecimento, enquanto os alunos atuam como protagonistas do processo de ensino-aprendizagem, dessa forma contribuindo para uma aprendizagem mais significativa. Os autores fazem um alerta da necessidade do docente utilizar tais metodologias, visto que muitos alunos veem as aulas de matemática como monótonas e desestimulantes.

As metodologias ativas têm ganhado grande destaque nos debates educacionais, sobretudo depois que foram implementadas na Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Esse documento compreende o conjunto de aprendizagens essenciais aos alunos de todas as etapas e modalidades da Educação Básica.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017a), as metodologias ativas como estratégias pedagógicas podem promover uma aprendizagem mais participativa e engajada. Ela destaca a importância de colocar o aluno no centro do processo educativo, incentivando-o a ser protagonista de sua própria aprendizagem. A BNCC orienta que os professores adotem práticas que favoreçam a autonomia, o pensamento crítico, a colaboração e a resolução de problemas, utilizando as metodologias ativas para tornar o ensino mais dinâmico e conectado com a realidade dos estudantes.

Freire (1996) destaca a importância das metodologias ativas como um meio de tornar o aluno protagonista do próprio aprendizado, em oposição a um modelo tradicional e passivo de ensino. Segundo Freire, a educação deve ser dialógica e baseada na problematização, permitindo que os estudantes construam conhecimento de forma crítica e significativa.

Dentro desse contexto, a gamificação surge como uma estratégia poderosa, utilizando elementos de jogos para engajar os alunos e motivá-los a alcançar seus objetivos educacionais. Mendes (2019) afirma que alguns elementos presentes nos jogos podem ser adaptados para também serem utilizados na sala de aula, como objetivos, regras, voluntariedade e feedback.

Cieslak, Mourão e Paixão (2023) discutem sobre a gamificação na educação. Eles destacam que a gamificação consiste em aplicar mecânicas de jogos, como pontos, medalhas e desafios, ao processo de ensino-aprendizagem, tornando as atividades mais envolventes e motivadoras para os alunos, ao mesmo tempo em que estimula a participação ativa e o desenvolvimento de habilidades.

Pallesi (2021) faz um estudo sobre a eficácia do uso da gamificação nas aulas de matemática. Incialmente ele utilizou três jogos – Monster Numbers, Fractions Smart Pirates e Kahoot – com 120 alunos de quatro turmas do sexto ano do ensino fundamental. Os dados da pesquisa foram coletados por meio de questionários, observações e registros das sequências didáticas gamificadas.

Os resultados indicaram que o uso dos jogos foi eficiente no engajamento os alunos, promovendo uma participação ativa destes. Além disso, a gamificação aumentou o interesse dos alunos em estudar matemática, facilitando a compreensão dos conceitos matemáticos. O autor defende que a gamificação é uma ferramenta que pode auxiliar no processo de ensino de matemática, uma vez que ao aplicar conceitos matemáticos em contextos divertidos e interativos, os estudantes conseguem desenvolver suas habilidades de resolução de problemas de maneira mais prática e criativa.

Dessa forma, a gamificação não só pode facilitar a compreensão de conteúdos complexos, mas também pode contribuir para o desenvolvimento de competências cognitivas, promovendo um aprendizado mais eficaz e prazeroso.

Visto que no contexto atual o uso de metodologias ativas pode contribuir diretamente para o ensino de matemática, o uso do xadrez como recurso didático é uma excelente opção para o ensino de matemática, pois estimula o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais, como o raciocínio lógico, a tomada de decisões, o planejamento estratégico e a resolução de problemas.

Na seção posterior iremos discorrer sobre essa ferramenta tão poderosa para o ensino de matemática, fazendo uma linha do tempo desde sua criação até o seu uso no contexto educacional.

2.2 A história do xadrez e sua aplicação educacional

O xadrez é um jogo com origens antigas. Embora não haja fontes que relatem precisamente sobre sua criação, existem registros de várias versões do jogo por todo o mundo com datas de criação distintas. Lasker (1999), afirma que as origens do xadrez se perderam no processo histórico do seu surgimento.

De acordo com Castro (1994) o xadrez possui uma longa trajetória histórica, com suas origens mais antigas encontradas na Índia, por volta do século VII, sob o nome de "chaturanga". Este jogo era jogado em um tabuleiro com 64 casas, representando uma forma primitiva do xadrez, e suas peças simulavam diferentes unidades do exército, como a infantaria, cavalaria, elefantes e carruagens. O objetivo era capturar o rei adversário, um conceito que se mantém até os dias de hoje. O autor indica que, o jogo foi disseminado pelo continente asiático principalmente pelos budistas, e inserido na cultura de diversos países, como China, Coréia e Japão.

Quanto à difusão do jogo para o Oriente, ele chegou à Pérsia por volta do ano 625d.C., e foi levado à Rússia a partir do século IX, principalmente através da rota do comércio Mar Cáspio-Volga. Por volta do ano 1000 o jogo já era muito conhecido pela Europa, segundo Castro (1994). O autor indica que, foi na Europa, durante os séculos XV e XVI, que o xadrez passou por transformações significativas. As regras começaram a ser padronizadas, e a movimentação das peças foi ajustada, o que culminou na forma moderna do jogo.

De acordo com Sousa (2010), no século XIX, o xadrez se tornou mais formalizado, com a criação do primeiro torneio internacional, em 1851, na cidade de Londres, e o estabelecimento do título de "Campeão Mundial de Xadrez". A partir daí, o xadrez passou a ser visto como um esporte intelectual, com competições e campeonatos sendo realizados globalmente.

Existe uma famosa anedota sobre a criação do jogo de xadrez, que embora muito conhecida não existem indícios confiáveis que seja real, ficando apenas para o campo da ficção.

Conforme descrito por Lasker (1999), segundo a lenda, um sábio, após inventar o xadrez, apresentou o jogo ao rei, que ficou tão impressionado com a complexidade e beleza da invenção que ofereceu ao sábio qualquer recompensa que desejasse. O sábio então pediu algo aparentemente modesto: 1 grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro, 2 para a segunda, 4 para a terceira, e assim por diante, dobrando a quantidade a cada casa até a 64ª.

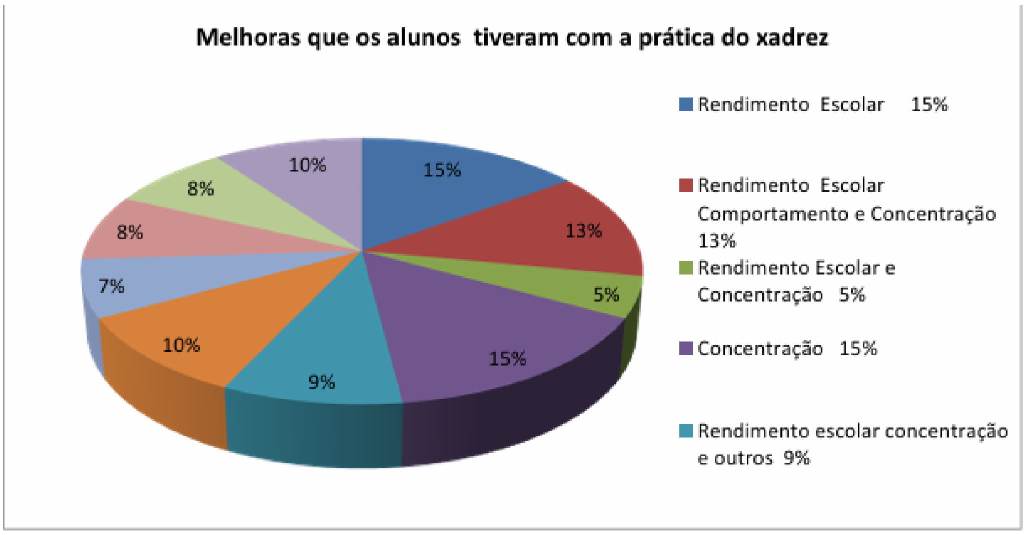
O rei, achando o pedido ridiculamente modesto, concordou sem hesitar. No entanto, ao ordenar a contagem, seus matemáticos logo perceberam que a quantidade total de grãos ultrapassava em muito todas as reservas do reino — e até mesmo toda a produção de trigo da Terra por muitos séculos. O total seria de 18.446.744.073.709.551.615 grãos de trigo, um número astronômico que demonstra como uma progressão geométrica pode rapidamente ultrapassar qualquer expectativa intuitiva.

Essa história é frequentemente usada para ensinar conceitos de crescimento exponencial, humildade diante do conhecimento, e para destacar a beleza matemática por trás do xadrez — um jogo que, tal como a lenda, esconde profundezas imensas sob uma superfície aparentemente simples.

Atualmente o xadrez é tido como um dos jogos mais praticados do mundo, sendo um instrumento importante de desenvolvimento cognitivo, estratégico e educacional.

Tabosa e Costa (2023) investigaram o jogo de xadrez como ferramenta didático-pedagógica dentro da Escola Municipal Gilda Bertino Gomes de CUMARU-PE. Eles concluíram que a prática do jogo contribuiu para a melhoria nos rendimentos escolares, concentração e comportamento do alunos da instituição.

Figura 2.1: Gráfico de resultados



Fonte: (TABOSA; COSTA, 2023, p. 147).

Eles verificaram que os professores da referida escola relataram que os alunos obtiveram melhoria de modo geral, dentre elas 15% nos rendimentos escolares, 13% no rendimento, comportamento e concentração, 5% rendimento escolar e concentração, 15% comportamento e concentração, 9% no rendimento escolar, concentração, comportamento e outros, 10% no rendimento escolar, 7% rendimento escolar e comportamento, 8% rendimento escolar, comportamento e outros, 8% na concentração e 10% outras melhorias.

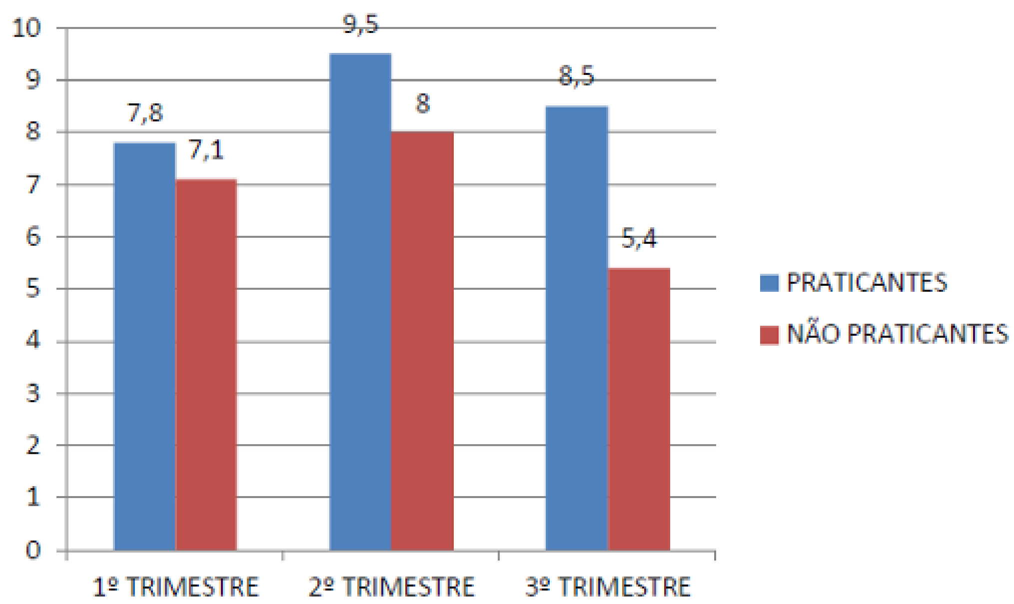
Freire (1996) afirma que ao integrar o xadrez ao ensino, especialmente na matemática, os professores podem incentivar a participação ativa dos alunos, promovendo autonomia e pensamento crítico. O jogo exige planejamento, antecipação de movimentos e adaptação a novas situações, habilidades que também são essenciais para a aprendizagem em diferentes áreas do conhecimento.

Assim, o uso do xadrez como ferramenta educacional exemplifica a aplicação prática dos princípios de Paulo Freire, podendo tornar o aprendizado mais envolvente e contextualizado. Nesse sentido, o xadrez pode ser um recurso pedagógico alinhado a essa visão, pois envolve tomada de decisões, resolução de problemas e reflexão constante sobre estratégias e consequências.

2.3 O xadrez como ferramenta pedagogica

Segundo a pesquisa conduzida por Tenório (2015), a implementação do projeto Machadiano de Xadrez no Colégio Estadual Liceu do Ceará teve um impacto positivo no desempenho acadêmico dos alunos. Os dados levantados indicam que os estudantes que participaram do projeto obtiveram médias aritméticas mais altas na disciplina de matemática em comparação aos que não participaram.

Figura 2.2: Desenvolvimento das notas



Fonte: (TENÓRIO, 2015, p. 47).

Essa diferença foi observada ao considerar as médias dos três primeiros trimestres de 2014, esse resultado sugere uma possível relação entre a prática do xadrez e o desenvolvimento de habilidades matemáticas.

A Figura 2.2 mostra que nos três primeiros trimestres de 2014 na escola estadual Liceu do Ceará, em Fortaleza, os alunos praticantes de xadrez obtiveram desempenho mais satisfatório na disciplina de matemática do que o estudantes não praticantes.

Soares (2016) destaca que o uso do xadrez na educação matemática pode atuar como um mediador eficaz no processo de ensino-aprendizagem, criando um ambiente lúdico que facilita tanto a aquisição quanto a retenção de conhecimentos matemáticos. Além disso, o autor ressalta que a prática do xadrez estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico, da concentração e da tomada de decisões estratégicas, habilidades fundamentais para a resolução de problemas matemáticos.

Dessa forma, a inclusão do jogo no contexto escolar não apenas torna o aprendizado mais dinâmico e motivador, mas também contribui para a construção de um pensamento crítico e analítico nos alunos.

Bezerra e Zanella (2010) destacam em seu trabalho alguns conteúdos matemáticos que podem ser trabalhados com o uso do xadrez como ferramenta pedagógica, dentre elas o ensino de frações, noções de simetria, equivalência de expressões numéricas, noções de razão e proporção, potenciação, produtos notáveis, conceitos de área e perímetro, localização de pontos no plano cartesiano, funções, progressões e análise combinatória. Os autores destacam a variedade de opções lúdicas que o docente pode ter ao utilizar o jogo de xadrez nas aulas de matemática, segundo o autor, em conjunto com uma contextualização adequada o jogo pode ajudar no processo de ensino da disciplina.

Kobill e Carvalho (2014) evidenciam em sua pesquisa acerca da grande influência que o jogo de xadrez proporcionou no entendimento de alguns conteúdos matemáticos, dentre eles: potenciação, problemas do 1° grau(quatro operações), soma dos ângulos internos de um triângulo, plano cartesiano, fração, razão, porcentagem, formas geométricas e área de figuras planas.

Figura 2.3: Tabela pré e pós-teste

CONTEÚDOS	ACERTOS PRÉ TESTE	ACERTOS PÓS TESTE
Potenciação	3/10	8/9
Plano Cartesiano	5/10	8/9
Frações	3/10	8/9
Formas Geométricas	8/10	9/9
Área de Figuras Planas	3/10	8/9
Problemas do 1º Grau	5/10	9/9
Razão	3/10	6/9
Porcentagem	5/10	8/9

Fonte: (KOBILL; CARVALHO, 2014, p. 17).

Foi realizado um pré-teste com 10 alunos, os quais obtiveram 44,4% de acertos, após a aplicação do projeto utilizando o xadrez para o ensino de matemática foi aplicado um pós-teste, o qual teve uma média de acertos de 86,6%. Para os autores, após a utilização do jogo, os alunos evoluíram significativamente no processo de ensino-aprendizagem.

Bezerra e Zanella (2010) destacam que o xadrez pode ser um recurso metodológico eficaz no ensino da matemática, favorecendo a compreensão de conceitos espaciais, como os presentes no sistema de coordenadas cartesianas. Segundo os autores, o tabuleiro de xadrez, com sua estrutura quadriculada e organização em colunas e fileiras, pode ser utilizado como uma representação concreta do plano cartesiano, facilitando a assimilação das noções de localização, posição e movimentação no espaço.

Já Ferreira e Silva (2012) enfatizam que o uso do xadrez no ensino da matemática contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da habilidade de resolver problemas matemáticos, aspectos fundamentais para a compreensão do sistema de coordenadas cartesianas. Os autores ressaltam que a prática do jogo estimula os alunos a trabalharem com referências espaciais, identificando posições e deslocamentos, o que pode facilitar a transição do pensamento intuitivo para o pensamento algébrico e geométrico. Desse modo, o xadrez se mostra uma ferramenta pedagógica valiosa para tornar o ensino das coordenadas cartesianas mais concreto e dinâmico, proporcionando aos alunos uma experiência interativa que favorece a aprendizagem significativa desse conteúdo matemático.

Os estudos de Neves (2023), Vulcão (2022) e Almeida (2010) ressaltam a importância do xadrez como um recurso pedagógico eficaz para o ensino da análise combinatória, pois o jogo exige que os jogadores avaliem múltiplas possibilidades antes de tomar decisões estratégicas.

Segundo Neves (2023), a complexidade das jogadas no xadrez permite aos alunos vivenciar, de forma prática, princípios fundamentais da análise combinatória, como permutações e combinações, tornando o aprendizado mais intuitivo e significativo.

Vulcão (2022) reforça essa ideia ao propor uma sequência didática baseada no xadrez, demonstrando que sua aplicação no ensino da matemática pode melhorar a compreensão dos alunos sobre contagem e probabilidade. O autor destaca que, ao analisar as diversas opções de movimento e seus desdobramentos, os estudantes desenvolvem habilidades matemáticas essenciais, aprimorando seu raciocínio lógico e sua capacidade de resolver problemas combinatórios.

Por sua vez, Almeida (2010) enfatiza que o xadrez estimula a capacidade analítica dos alunos ao desafiá-los a antecipar jogadas e calcular probabilidades dentro do tabuleiro. O autor aponta que o jogo fornece um contexto prático para a análise combinatória, ajudando os estudantes a compreenderem, na prática, como diferentes arranjos e escolhas afetam os resultados de uma partida, desse modo o xadrez não apenas torna o ensino da análise combinatória mais acessível e envolvente, mas também contribui para o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Na visão de Bueno Junior (2017), o tabuleiro de xadrez, com suas 64 casas, pode ser utilizado para ilustrar e aprofundar o entendimento sobre o número de possibilidades e formas de realizar movimentos. Por exemplo, ao analisar os movimentos de uma peça, como o cavalo ou a torre, o estudante pode ser incentivado a pensar nas diferentes opções que ele tem em cada jogada, fazendo a ponte com o princípio fundamental da contagem, que envolve multiplicar o número de possibilidades de cada etapa para obter o total de combinações possíveis. O autor destaca ainda que o xadrez não só ajuda na visualização de conceitos de contagem, mas também favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e da estratégia, estimulando os alunos a refletirem sobre o número de escolhas e decisões possíveis em cada jogada. Isso ajuda a consolidar a compreensão do princípio fundamental da contagem de uma forma lúdica e envolvente.

Assim, o uso do xadrez no ensino de matemática, conforme argumenta Bueno Junior (2017), não apenas reforça o aprendizado dos princípios de contagem, mas também oferece uma maneira dinâmica e contextualizada de aplicar conceitos matemáticos.

Bezerra e Zanella (2010)destacam que o tabuleiro de xadrez, com sua disposição quadriculada e simetria clara, serve como uma excelente representação para conceitos geométricos como área e perímetro de figuras planas. Ao associar as peças do xadrez às formas geométricas e ao espaço no tabuleiro, os alunos podem visualizar, manipular e calcular áreas de forma intuitiva.

Para Almeida (2010), o xadrez oferece uma excelente oportunidade para trabalhar com figuras geométricas no contexto escolar, pois o tabuleiro e as peças podem ser usados para representar de forma concreta conceitos como simetria, proporção, área e perímetro de figuras planas. O autor destaca que, o próprio formato do tabuleiro, com suas casas quadradas e alinhadas de maneira regular, permite que os alunos experimentem e visualizem esses conceitos de maneira mais clara. Ao manipular as peças do xadrez, os estudantes podem perceber as relações geométricas de forma interativa, visualizando áreas cobertas pelas peças, movimentos e padrões geométricos gerados durante o jogo.

É notório o grande potencial pedagógico do jogo de xadrez para o ensino de matemática, com uma contextualização adequada o jogo pode ser utilizado para ensinar diferentes tipos de conteúdo da área, mostrando-se um recurso eficaz.

3. O novo ensino médio

Nesta seção serão abordadas temáticas relacionadas à reforma do novo ensino médio. Dentre elas serão apresentados alguns marcos legais das principais mudanças no sistema educacional brasileiro desde a Lei Diretrizes e Bases (LDB) de 1996, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) prevê a implementação do novo ensino e o detalhamento acerca dos itinerários formativos e disciplinas eletivas.

3.1 Marcos legais da evolução do ensino médio brasileiro

O Novo Ensino Médio, implementado por meio da Lei n° 13.415/2017 e ajustado posteriormente pela Lei n° 14.945/2024, tem como objetivo principal flexibilizar o currículo e oferecer novas possibilidades aos estudantes. A partir dessa base, diversos marcos legais e portarias ajudaram a moldar as características e diretrizes que definem o ensino médio brasileiro atual, com especial ênfase nos itinerários formativos e nas disciplinas eletivas.

As transformações do ensino médio são iniciadas por volta de 1996 com a aprovação da LDB de 1996. De natureza legal, podemos listar algumas ações que impactaram a evolução do ensino médio.

O Decreto n° 5.154/2004 (BRASIL, 2004), foi um importante marco legal no Brasil, pois estabeleceu as diretrizes e bases para a organização da educação profissional no país. Este decreto regulamenta a oferta de educação profissional técnica de nível médio e sua articulação com o ensino médio regular, com o objetivo de garantir uma formação mais integrada e alinhada com as demandas do mercado de trabalho.

A principal contribuição do Decreto n° 5.154/2004 foi a ampliação do acesso à educação profissional para os jovens, permitindo que eles se formassem não apenas com conhecimentos acadêmicos, mas também com habilidades técnicas específicas, aumentando, assim, suas chances de inserção no mercado de trabalho.

Outro marco importante na educação brasileira foi a Lei n° 11.494, de 20 de junho de 2007 (BRASIL, 2007), pois instituiu o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (Fundeb). Essa lei teve como objetivo melhorar a distribuição dos recursos financeiros para a educação básica no Brasil, com foco especial na valorização dos profissionais da educação e na redução das desigualdades educacionais entre as diferentes regiões do país.

De acordo com o Conselho Nacional de Educação (BRASIL, 2020), o Exame Nacional do Ensino Médio foi criado em 1998 pelo Ministério da Educação (MEC) do Brasil. Inicialmente, o exame tinha como objetivo principal avaliar a qualidade do ensino médio no país, atualmente o ENEM é o principal meio de ingresso à universidade do Brasil.

Uma das grandes mudanças na estrutura do ENEM foi efetivado a partir da Portaria n° 109, de 27 de maio de 2009 (BRASIL, 2009), essa portaria instituiu o novo formato do ENEM, ampliando sua importância e impacto no sistema educacional brasileiro.

Com a Portaria n° 109/2009, o ENEM deixou de ser apenas uma avaliação para diagnóstico do ensino médio e passou a ser utilizado oficialmente como critério de seleção para universidades públicas. A portaria estabeleceu o exame como uma ferramenta para o ingresso em instituições de ensino superior, principalmente por meio do Sistema de Seleção Unificada (SISU).

Outro momento marcante da reforma do ensino médio brasileiro foi com à PL 6840/2013 (CÂMARA DOS DEPUTADOS, 2013), que propõe a implementação de uma jornada escolar em tempo integral no ensino médio. A proposta também inclui a reorganização do currículo do ensino médio, estruturando-o em áreas do conhecimento, em vez de disciplinas isoladas.

A medida provisória n° 746 de 2016 (CONGRESSO NACIONAL, 2016), instituiu o fomento à implementação das escolas de ensino médio de tempo integral, esse foi um marco na tentativa de modernizar o ensino médio brasileiro, promovendo uma maior flexibilidade curricular, a integração do ensino profissionalizante, e a expansão da jornada escolar.

Existiram outros momentos importantes na educação brasileira que culminaram na criação do modelo atual de ensino médio, porém a principal lei que instituiu o novo ensino médio foi a 13.415/2017, que reformulou de forma considerável o ensino de jovens do Brasil.

A Lei n° 13.415/2017, de 16 de fevereiro de 2017 (BRASIL, 2017b), foi um marco importante para a reestruturação do ensino médio no Brasil, com o objetivo de modernizar e tornar a educação mais flexível. Ela trouxe uma série de modificações significativas, com ênfase no fortalecimento da formação geral e na personalização dos trajetos educacionais dos estudantes. A proposta da Lei 13.415/2017 busca promover um modelo de ensino médio mais conectado com as realidades sociais e econômicas dos estudantes, além de possibilitar a escolha das áreas de aprofundamento de acordo com seus interesses e aptidões.

A seguir comentaremos de maneira mais detalhada acerca da Lei 13.415/2017, destacando as principais mudanças trazidas pela reforma. No art. 1° é apresentada a proposta de alteração da carga horária, mostrada no inciso I o aumento da carga horária anual para no mínimo 1400 (mil e quatrocentas) horas distribuídas em 200 (duzentos) dias letivos, com data de início da implementação em 2022. Diante dessa grande mudança, foi concedida às redes de ensino um prazo de 5 (cinco) anos para adequação, tendo em vista que a implementação será aplicada em todo o Brasil.

Descrito nos arts. 2°, 3°, 4° e 5°, a Lei 13.415/2017 também está diretamente ligada à BNCC, que estabelece os conhecimentos, habilidades e competências essenciais que devem ser desenvolvidos em todas as etapas da educação básica. No ensino médio a BNCC define as diretrizes para a formação geral dos estudantes, assegurando que os conhecimentos essenciais de cada área do saber sejam trabalhados de maneira eficaz.

No art. 6° é destacado o conceito de flexibilidade curricular, permitindo que escolas organizem seu currículo de acordo com as necessidades locais e com as preferências dos alunos, sendo um dos elementos centrais da reforma proposta pela Lei.

Posteriormente nos arts. 7° e 8° é descrito como será a nova carga horária do novo ensino médio, estabelecendo a ampliação da carga horária do ensino médio para 1.400 horas anuais, com a possibilidade de ampliação para 1.800 horas nas escolas de tempo integral.

A proposta da lei também inclui a ampliação da oferta de educação técnica e profissionalizante, descritos nos arts. 10 e 11, os alunos podem, assim, escolher um itinerário formativo que combine conhecimentos acadêmicos e técnicos, preparando-os melhor para o mercado de trabalho. Isso representa uma tentativa de integração entre a educação escolar e as demandas do mundo do trabalho, oferecendo mais possibilidades de inserção profissional dos jovens ao término do ensino médio.

Nos arts. 12 e 13 são discutidas ideias sobre a implementação da Lei, detalhando as etapas e o acompanhamento do processo de mudança nas escolas, incluindo a adequação da infraestrutura escolar para oferecer os itinerários e atividades propostas. Por fim, nos artigos subsequentes é tratado o financiamento, com enfoque nos repasses necessários pela União, através do Ministério da Educação.

Posterior a essa grande mudança, foram realizadas pequenas implementações para melhorar o novo ensino médio, a mudança mais recente está descrita em BRASIL (2024), a Lei n° 14.945, sancionada em 31 de julho de 2024 tem o objetivo de ajustar e aprimorar a reforma do ensino médio iniciada pela Lei n° 13.415/2017, especialmente no que se refere à implementação dos itinerários formativos e à promoção de uma educação mais inclusiva e equitativa, atendendo às necessidades dos estudantes e ao contexto local.

Na Figura 3.1, é possível observar a cronologia dos marcos legais que levaram à implantação do novo ensino médio.

Figura 3.1: Marcos históricos da implementação do Novo Ensino Médio

Fonte: (ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE EDUCADORES CATÓLICOS (ANEC), 2021, p. 7).

Ela visa melhorar a qualidade do ensino, garantir a flexibilidade curricular e reforçar a integração da educação profissional, com o intuito de formar cidadãos mais preparados para o mercado de trabalho e para a sociedade como um todo. Esse ajuste foi necessário para corrigir falhas de implementação, garantir igualdade de oportunidades entre os alunos de diferentes regiões e garantir que o novo ensino médio tenha impacto positivo na qualidade educacional em todo o Brasil.

3.2 A organização dos itinerários formativos e disciplinas eletivas

Disposto nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, BRASIL (2018b), o ensino médio é orientado pelos princípios específicos: formação integral dos estudantes, projeto de vida, pesquisa com práticas para a inovação, respeito aos direitos humanos, compreensão das diversidades, sustentabilidade ambiental, diversificação da oferta de educação, indissociabilidade entre educação e prática social e indissociabilidade entre teoria e prática.

Posto isso, a estrutura dos itinerários formativos é uma proposta inovadora que visa personalizar e enriquecer o ensino médio brasileiro, adaptando-o melhor às necessidades e interesses dos alunos. Definimos itinerários formativos como

> cada conjunto de unidades curriculares ofertadas pelas instituições e redes de ensino que possibilitam ao estudante aprofundar seus conhecimentos e se preparar para o prosseguimento de estudos ou para o mundo do trabalho de forma a contribuir para a construção de soluções de problemas específicos da sociedade (BRASIL, 2018b, p. 2).

De acordo com a Resolução CNE/CEB n° 3, de 21 de novembro de 2018, os itinerários formativos devem ser organizados a partir das áreas do conhecimento: linguagens e suas tecnologias, matemática e suas tecnologias, ciências da natureza e suas tecnologias, ciências humanas e sociais aplicadas e formação técnica e profissional.

Nesse contexto, "os itinerários formativos indicam os caminhos possíveis que um estudante pode seguir durante sua trajetória acadêmica e de formação" (TEIXEIRA et al., 2021). Assim, de acordo com o autor, o estudante passa a ter autonomia para direcionar sua própria formação, enquanto a escola facilita o desenvolvimento de habilidades que são valiosas para o seu crescimento pessoal e profissional.

A proposta dos itinerários formativos visa proporcionar uma maior flexibilidade na educação, permitindo que os estudantes possam escolher áreas de conhecimento e trajetórias que se alinhem mais aos seus interesses, aptidões e projetos de vida.

Dentro dessa proposta de flexibilidade no currículo, o novo ensino médio traz também a proposta das disciplinas eletivas. Definimos disciplinas eletivas como

> componentes curriculares de livre escolha dos estudantes, que lhes possibilitam experimentar diferentes temas, vivências e aprendizagens, de maneira a diversificar e enriquecer o seu Itinerário Formativo. As Eletivas têm como objetivo ampliar e aprofundar as aprendizagens previstas na Formação Geral e aquelas relativas à Formação Básica para o Trabalho (BRASIL, 2019, p. 36).

O trecho acima, destaca o papel fundamental das disciplinas eletivas no novo ensino médio, enfatizando sua flexibilidade e a possibilidade de os estudantes explorarem diferentes áreas do conhecimento, ampliando suas perspectivas e aprendizagens. Ao serem componentes curriculares de livre escolha, as disciplinas eletivas oferecem aos alunos a oportunidade de personalizar sua trajetória educacional, contribuindo para um itinerário formativo mais rico e diversificado.

O objetivo de ampliar e aprofundar as aprendizagens dentro da formação geral e da formação básica para o trabalho reflete uma tentativa de preparar os estudantes não apenas para o mercado de trabalho, mas também para uma formação integral, permitindo-lhes desenvolver competências tanto acadêmicas quanto práticas.

A ideia de que as disciplinas eletivas devem ter uma intencionalidade pedagógica clara é essencial, pois garante que, apesar da flexibilidade e da liberdade de escolha, o desenvolvimento intelectual e pessoal dos estudantes seja promovido de forma estruturada.

> Apesar de serem mais lúdicas, as Eletivas devem ter clara intencionalidade pedagógica, desafiar os estudantes e promover o desenvolvimento de seus conhecimentos, habilidades, atitudes e valores. Para tanto, precisam se articular com: a) as Áreas do Conhecimento, de preferência de forma interdisciplinar; b) os eixos estruturantes dos Itinerários Formativos; c) as Competências Gerais definidas pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2019, p. 36).

As disciplinas eletivas devem, portanto, desafiar os alunos, estimulando-os a sair da zona de conforto e a explorar novas áreas de conhecimento, ao mesmo tempo que promovem o desenvolvimento de habilidades, atitudes e valores. Dessa forma, elas não são apenas uma diversão ou um espaço de descompressão, mas sim uma oportunidade pedagógica de crescimento e amadurecimento, complementando a formação acadêmica e preparando o aluno para os desafios do futuro.

Quanto ao processo avaliativo, o mesmo não se dá através de uma avaliação somativa, mas através de métodos diversificados, como: projetos, experiências, apresentações, relatórios, dentre outros. A flexibilidade das disciplinas eletivas permite uma abordagem mais personalizada e diversificada no ensino e na avaliação, respeitando o ritmo e os interesses dos estudantes.

Conforme disposto nas Recomendações e Orientações para a Elaboração e Arquitetura Curricular dos Itinenários Formativos (BRASIL, 2019), as disciplinas eletivas devem ser ofertadas semestralmente, com uma média de dois tempos de aula por semana. Sugere-se que as disciplinas eletivas sejam ofertadas simultaneamente, podendo haver uma mescla de alunos de diferentes séries, a depender da escolha dos estudantes.

Com a implementação dos itinerários formativos e das disciplinas eletivas, o novo ensino médio brasileiro busca não apenas a qualificação técnica dos estudantes, mas também a formação de cidadãos críticos e preparados para os desafios de uma sociedade em constante mudança. Espera-se que a flexibilidade curricular ofereça mais oportunidades aos estudantes, permitindo-lhes uma educação mais diversificada e personalizada, que se alinhe com suas necessidades e projetos de vida.

3.3 Proposta curricular

Um grande desafio enfrentado pelos docentes na regência das disciplinas eletivas é a carência de material. Atualmente a Secretaria Educação do Estado do Ceará

(SEDUC) fornece os recursos de ensino para a aplicação de algumas disciplinas eletivas específicas. Entretanto as disciplinas eletivas que possuem material de apoio para os professores ainda são uma minoria, o que contribui negativamente para a diversidade da oferta das disciplinas eletivas uma vez que os professores optam pela escolha das disciplinas eletivas que já possuem algum material de apoio.

É importante destacar também que, além da carência material, existe um desafio relacionado ao acesso a uma formação continuada específica. Muitos professores podem ter a qualificação e o domínio da sua área, mas podem carecer de uma formação específica para lidar com o caráter interdisciplinar das disciplinas eletivas, ou com a utilização de novos recursos pedagógicos, como tecnologias digitais e metodologias ativas.

Nesse sentido, este trabalho se configura como uma proposta curricular de eletiva que servirá de material de apoio para o docente que aplicará esta disciplina eletiva, contribuindo para a formação integral do aluno.

De acordo com as Recomendações e Orientações para a Elaboração e Arquitetura Curricular dos Itinenários Formativos (BRASIL, 2019), o Documento Curricular Referencial do Ceará (DCRC, 2021) e a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018a),a seguir será descrita a organização curricular da disciplina eletiva "Matemática Através do Xadrez".

1. Título: Matemática através do xadrez.

2. Professor responsável: Marcos André Maia do Nascimento.

3. Resumo: Nesta disciplina eletiva serão abordados conceitos matemáticos. Serão explorados localização de pontos no plano cartesiano, área e perímetro de algumas figuras planas, probabilidade, estatística, raciocínio lógico e análise combinatória. Contém aulas práticas com jogos e desafios, tornando as aulas mais estimulantes.

4. Área do conhecimento: Matemática e suas tecnologias.

5. Eixos estruturantes: Investigação científica e processos criativos.

6. Objetivo geral: Abordar conhecimentos básicos de matemática nas grandes áreas da geometria, aritmética e álgebra utilizando o xadrez como recurso pedagógico.

7. Objetivos específicos: Compreender o sistema de coordenadas cartesianas; Entender a noção intuitiva de área e perímetro; Entender noções intuitivas de probabilidade; Melhorar o raciocínio lógico dos estudantes; Dialogar sobre técnicas de contagem; Analisar dados estatísticos e extrair suas medidas de tendência central.

8. Unidade curricular: Laboratório/oficina.

9. Sequência de Situações/Atividades Educativas: Durante as aulas serão propostas diversas situações-problema utilizando o jogo de xadrez como recurso didático para introduzir e trabalhar conteúdos matemáticos.

10. Carga horária: 40 h/a.

11. Perfil docente: Licenciatura plena em matemática ou outro curso superior de Licenciatura com habilidade legal para o exercício da docência em matemática.

12. Perfil dos participantes: Estudantes do ensino médio.

13. Recursos: Computadores com internet, plataformas educacionais, slides, jogo de xadrez, resumos e exercícios impressos e cartazes.

14. Avaliação: Participação em atividades na sala de aula, realização de pesquisas, apresentação na feira das eletivas e realização de avaliação somativa.

15. Fontes de informação: A sequência didática que será apresentada na seção seguinte.

16. Habilidades da BNCC: (EM13MAT202): Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não, apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das de dispersão; (EM13MAT203): Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões; (EM13MAT307): Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais; (EM13MAT310): Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore; (EM13MAT311): Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades; (EM13MAT312): Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos; (EM13MAT316): Resolver e

elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão); (EM13MAT408): Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

Esta disciplina eletiva tem como objetivo proporcionar aos estudantes do ensino médio a oportunidade de aprender matemática de um jeito mais dinâmico através do uso do xadrez como recurso didático. Também poderão se conectar com a matemática de forma lúdica, através da utilização da gamificação e com o uso das TICs.

4. Recurso Educacional

Nesta seção será apresentada uma sequência didática que servirá de material de apoio para o professor regente da disciplina eletiva Matemática Através do Xadrez. A sequência didática foi criada baseada na utilização de metodologias ativas como a gamificação e o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), com finalidade de se adequar às novas propostas pedagógicas apresentadas pela BNCC sobre o Novo Ensino Médio, bem como tornar a disciplina eletiva mais dinâmica e interessante para os estudantes.

No material consta um esquema bem detalhado de propostas de aulas para serem aplicadas durante a ministração da disciplina eletiva. A sequência didática também conta com propostas de exercícios, avaliação e produto final para a feira das eletivas, evento de culminância para o encerramento das disciplinas eletivas, o qual é apresentado pelos alunos e orientado pelos professores que ministraram alguma disciplina eletiva ao longo do semestre.

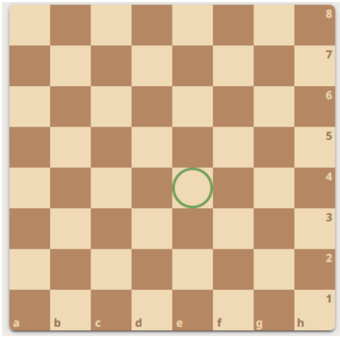
Ao longo da sequência didática serão trabalhados conteúdos importantes da matemática como: localização de pontos no plano cartesiano, área e perímetro de algumas figuras planas, probabilidade, estatística, raciocínio lógico e análise combinatória.

4.1 Semana 1 – Sistema de notação algébrica do xadrez

Nesta semana o professor deve desenvolver com os alunos atividades que propiciem a identificação das casas do tabuleiro de xadrez, apresentando a notação algébrica do jogo.

Conforme descrito por Kasparov (2005a), as casas do tabuleiro são descritas por meio de um sistema de coordenadas, a cada uma correspondendo um par formado por uma letra e um número, exatamente nessa ordem. As colunas são identificadas por letras de A até H, e as linhas, por números de 1 a 8. A Figura 4.1 ilustra um tabuleiro comum com marcação na casa “e4”.

Figura 4.1: Tabuleiro de xadrez

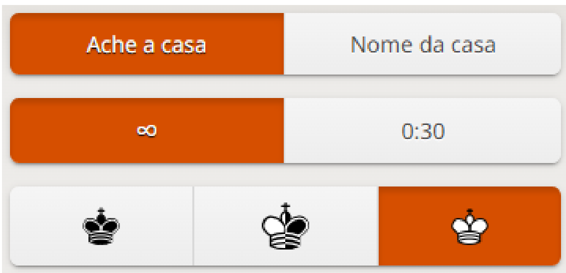


Fonte: Elaborada pelo autor

Sugere-se ao docente a criação de uma atividade geral para introduzir o conceito e praticar com os alunos. Ele poderá expor com o auxílio do data show o tabuleiro virtual da plataforma de xadrez online (LICHESS, 2025). Em seguida clicar em "Ferramentas" na parte superior do site, em seguida "Análise". Em seguida, marcar algumas casas no tabuleiro (para fazer as marcações, clicar numa casa com o botão direito do mouse), para que os alunos acompanhem oralmente.

Em seguida o professor pode sugerir uma dinâmica com os estudantes. Ele convidará os alunos a acessarem a plataforma online de xadrez do lichess. Em seguida clicar em "Aprender" na parte superior do site. Em seguida em "Coordenadas" e, por fim, "Começar treino". Fazendo a sequência descrita o usuário será direcionado para a aba de treinamentos, onde o professor orientará os alunos a praticarem a notação algébrica. As configurações sugeridas para a primeira parte da dinâmica são ilustradas pela Figura 4.23.

Figura 4.2: Configurações do jogo



Fonte: Lichess (2025)

O docente destinará 20 minutos para a primeira parte da dinâmica, após o término da atividade e algumas discussões o professor dará continuidade com a segunda parte da dinâmica. Utilizando a mesma ferramenta de treino,descrita anteriormente, será proposta uma competição de acertos, a ferramenta será usada agora com limite de tempo, o objetivo é a maior quantidade de acertos em 30 segundos, o professor dará a largada e monitorará os acertos dos alunos podendo destacar quem está no pódio com mais acertos, a fim de estimular o empenho dos alunos. Ao final da dinâmica, o professor deve presentear o estudante com melhor desempenho com um brinde surpresa.

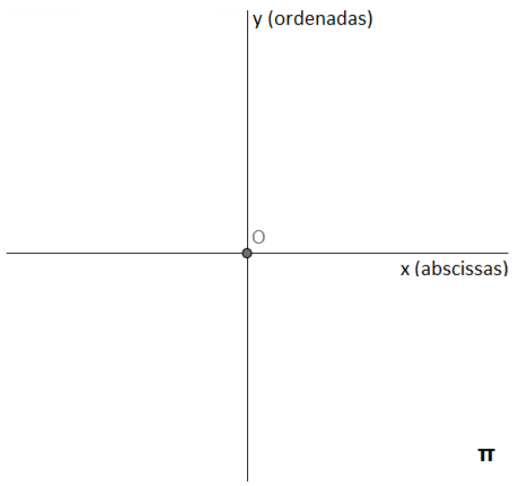
4.2 Semanas 2 e 3 – Localização de pontos no plano cartesiano

Estas duas semanas serão para definir o plano cartesiano bem como suas propriedades. Utilizaremos como principais referências Iezzi (2013a), Iezzi (2013b) e Gómez, Frensel e Santos Crissaff (2017).

É importante que o docente ao introduzir o conceito de par ordenado, relacione com a notação algébrica do xadrez uma vez que, no xadrez o nome das casas são gerados pela combinação de uma linha com uma coluna obrigatoriamente nessa ordem.

Seja π um plano e considere duas retas perpendiculares contidas em π, com unidades de medida de comprimento igual, que se intersectam num ponto que chamaremos de origem e denotaremos por O.

Figura 4.3: Plano cartesiano

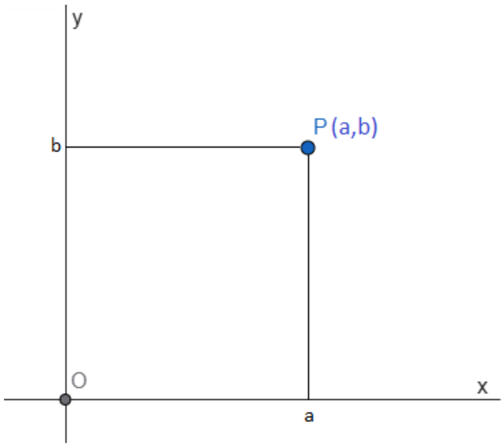


Fonte: Elaborada pelo autor

O eixo OX, eixo horizontal, é denominado eixo das abscissas e o eixo OY, eixo vertical, é denominado eixo das ordenadas. A escolha dos eixos ortogonais, permite fazer uma correspondência entre um ponto do plano π e um par ordenado de números reais.

O ponto P, pertencente ao plano π, corresponde ao par ordenado (a, b) no plano cartesiano, onde a é coordenada cartesiana em relação ao eixo x, criada a partir da projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo x, e b é a coordenada cartesiana em relação ao eixo y, criada a partir da projeção ortogonal do ponto P em relação ao eixo y.

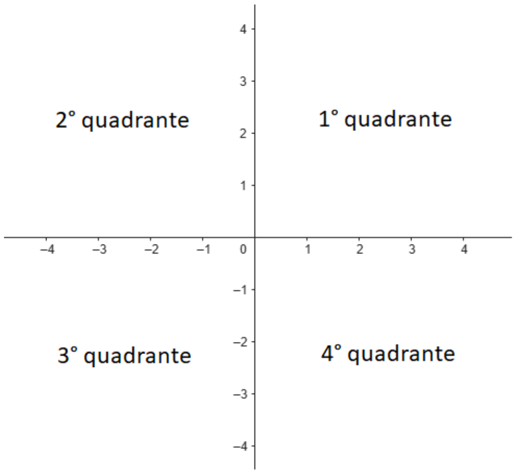
Figura 4.4: Coordenadas do ponto P



Fonte: Elaborada pelo autor

Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas quadrantes, nomeados conforme a Figura 4.5.

Figura 4.5: Quadrantes



Fonte: Elaborada pelo autor

Note que:

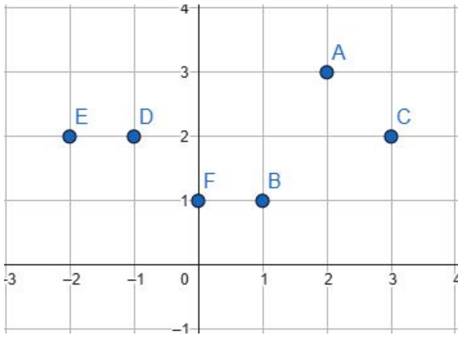
- Quando $P(a, b)$ está no 1° quadrante, então $a > 0$ e $b > 0$.
- Quando $P(a, b)$ está no 2° quadrante, então $a < 0$ e $b > 0$.
- Quando $P(a, b)$ está no 3° quadrante, então $a < 0$ e $b < 0$.

- Quando $P(a, b)$ está no 4° quadrante, então $a > 0$ e $b < 0$.

Exemplo 1: Localize os pontos $A(2, 3)$, $B(1, 1)$, $C(3, 2)$, $D(-1, 2)$, $E(-2, -2)$ e $F(0, 1)$ no plano cartesiano abaixo.

Solução: Conforme mostra a Figura 4.6.

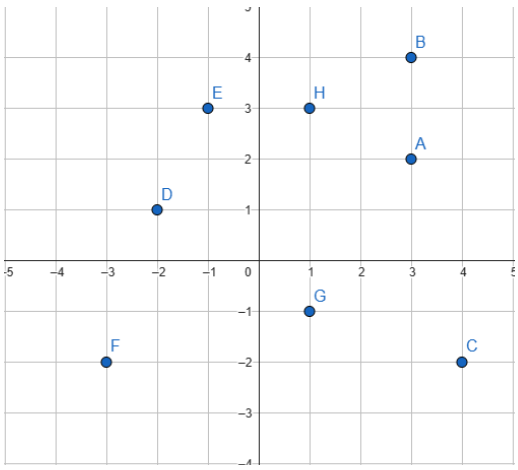
Figura 4.6: Solução



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 2: Expresse em forma de par ordenado os pontos apresentados no plano cartesiano da Figura 4.7.

Figura 4.7: Exemplo 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Solução: $A(3, 2), B(3, 4), C(4, -2), D(-2, 1), E(-1, 3), F(-3, -2), G(1, -1), H(1, 3)$.

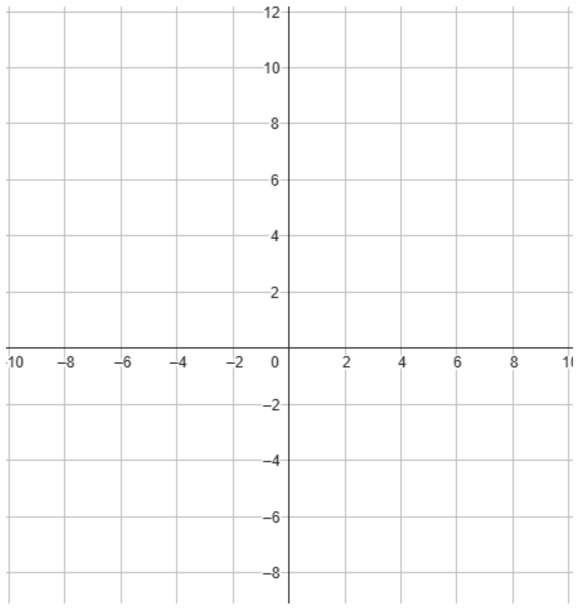
Após a aula expositiva o docente poderá propor algumas atividades para melhor fixação do conteúdo trabalhado.

Proposta de atividade 1: Localizando pontos no plano cartesiano.

Problema 1: No plano cartesiano da Figura 4.8 siga o passo a passo descrito a seguir e crie um desenho. Marque e ligue os pontos $(1, 10)$, $(3, 11)$, $(4, 11)$, $(6, 10)$, $(4, 9)$, $(1, 8)$.

Sem marcar o papel volte ao ponto $(4, 9)$ e continue com o processo, $(4, 9)$, $(5, 8)$, $(5, 6)$, $(4, 7)$, $(3, 7)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(2, -1)$, $(3, -3)$, $(3, -5)$, $(4, -5)$, $(5, -4)$, $(6, -4)$, $(7, -5)$, $(5, -7)$, $(4, -7)$, $(3, -6)$, $(3, -7)$, $(-5, -7)$, $(-5, -6)$, $(-4, -5)$, $(-3, -5)$, $(-4, -4)$, $(-4, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, -2)$, $(-3, 0)$, $(-3, 1)$, $(-4, 2)$, $(-5, 1)$, $(-6, 2)$, $(-5, 3)$, $(-4, 3)$, $(-4, 4)$, $(-5, 3)$, $(-6, 4)$, $(-5, 5)$, $(-4, 5)$, $(-3, 4)$, $(-2, 5)$, $(-3, 6)$, $(-3, 7)$, $(-1, 10)$, $(1, 10)$. Por fim marque o ponto $(-1, 8)$.

Figura 4.8: Plano cartesiano para atividade



Fonte: Elaborada pelo autor

4.3 Semanas 4, 5 e 6 – Geometria plana

Nestas semanas o professor trabalhará os conceitos de área e perímetro de figuras planas. As referências indicadas para abordar esse conteúdo são: Dolce e Pompeo (2013) e Caminha (2022).

Inicialmente iremos trabalhar o cálculo da área e perímetro de figuras planas na malha quadriculada, pois ela é muito importante para desenvolver no aluno uma noção intuitiva do cálculo de área e perímetro e até mesmo de como calcular de forma aproximada, segundo Dahm (2019).

O docente dividirá a turma em equipes de no máximo 5 alunos e disponibilizará para cada equipe um ou dois tabuleiros de xadrez e uma fita adesiva fina. Após a divisão o docente exibirá a Figura 4.9 em um data show para a turma e pedir aos alunos que façam as marcações no tabuleiro utilizando a fita adesiva, bem como identificar cada local da planta baixa escrevendo sobre a fita.

Após a confecção dos produtos o professor desenvolvenrá o assunto falando sobre a noção intuitiva de área e perímetro na malha quadriculada, relacionando área ao número de quadrados que formam a figura e perímetro ao número de arestas que cercam cada figura. Após um breve diálogo serão propostas as perguntas.

a) Qual a área total do apartamento?

b) Qual é a área do banheiro?

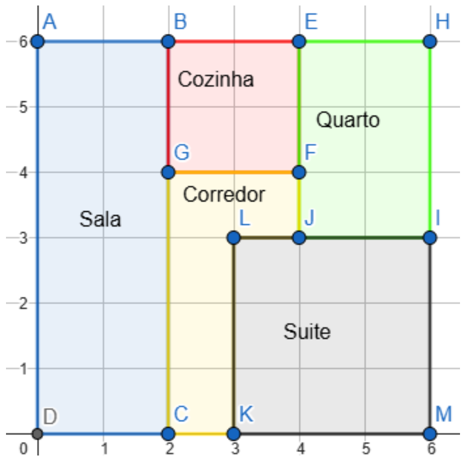
c) Qual cômodo possui 5 unidades de área?

d) Quais cômodos possuem área superior à 6 unidades de área?

e) Qual o perímetro da casa?

f) Qual o perímetro de cada cômodo da casa?

Figura 4.9: Planta baixa



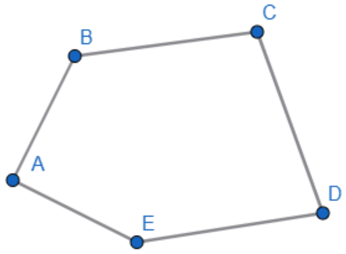
Fonte: Elaborada pelo autor

Ainda em grupos, os alunos produzirão suas próprias plantas baixas sobre o tabuleiro com as fitas adesivas. Para essa atividade os alunos poderão usar sua criatividade, sendo definido uma área total mínima da casa de 36 unidades de área, com no mínimo 5 cômodos. O docente receberá uma atividade por equipe, e avaliará o cálculo da área e perímetro de cada cômodo da casa desenhada por eles.

Em alguns casos a malha quadriculada não é o suficiente para calcular de forma precisa essas grandezas, desse modo foram criadas algumas relações matemáticas para efetuar esses cálculos. Para isso, é importante compreender inicialmente alguns conceitos fundamentais, que serão importantes para o desenvolvimento das relações matemáticas apresentadas.

Definição 4.1. Chamamos de polígono uma figura geométrica plana formada por uma sequência fechada de segmentos consecutivos de reta.

Figura 4.10: Polígono



Fonte: Elaborada pelo autor

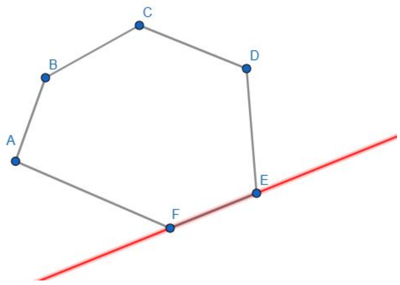
A Figura 4.10 ilustra o polígono $\overline{ABCDE}$ de cinco lados. A seguir, apresentaremos alguns elementos fundamentais dos polígonos.

- Cada um dos pontos A, B, C, D e E é chamado vértice do polígono.
- Cada um dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ é chamado lado do polígono.
- Cada segmento de reta com extremidades em dois vértices não adjacentes (que não estão contidos em um mesmo lado do polígono) é chamado de diagonal, como, por exemplo, a diagonal $\overline{AD}$.

Definição 4.2. Um polígono P no plano é dito convexo se qualquer reta que contém um dos seus lados deixa o polígono P inteiramente contido em um dos semiplanos determinados por tal reta.

A Figura 4.11 ilustra um hexágono convexo.

Figura 4.11: Hexágono convexo



Fonte: Elaborada pelo autor

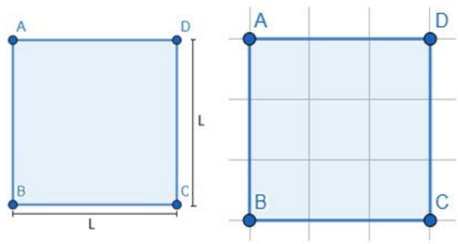
Vale ressaltar que, os polígonos considerados nesta subseção do trabalho são todos convexos.

Definição 4.3. Duas retas distintas r e s são ditas paralelas se elas pertencem a um mesmo plano e não possuem nenhum ponto em comum.

Veremos a seguir algumas propriedades das figuras geométricas planas. Estudaremos a área de cada uma delas e incluiremos propostas de atividade.

Definição 4.4. O quadrado é um polígono que possui 4 lados iguais e ângulos internos medindo 90°.

Figura 4.12: Quadrado



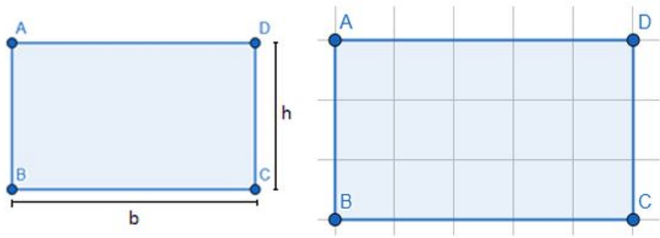
Fonte: Elaborada pelo autor

Como discutido anteriormente, a partir da noção intuitiva de área na malha quadriculada, para calcular a área do quadrado acima basta contar quantos quadrados de malha compõem a figura. A área total é, portanto, de 9 unidades de área, que corresponde ao resultado da multiplicação do número de linhas pelo número de colunas 3 vezes 3.

Proposição 4.1. *A área A de um quadrado de lado L é dada por $A = L^2$.*

Definição 4.5. O retângulo é um polígono que possui 2 pares de lados paralelos e ângulos internos medindo 90°. Chamamos de base qualquer um dos lados do retângulo. A altura de um retângulo relativa a uma base fixada, é um dos lados adjacentes a essa base.

Figura 4.13: Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

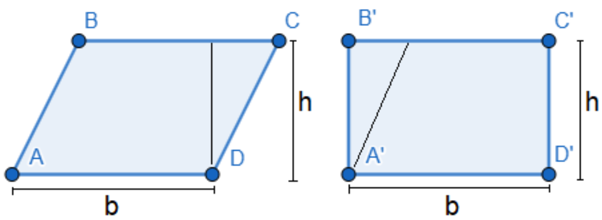
A ideia intuitiva do cálculo de área do retângulo é semelhante à do quadrado, basta multiplicar a quantidade de linhas pela quantidade de colunas.

Proposição 4.2. *A área A de um retângulo de base b e altura h é dada por* $A = b \cdot h$.

Definição 4.6. O paralelogramo é um polígono que possui 2 pares de lados paralelos. Chamamos de base qualquer um dos lados do paralelogramo. A altura de um paralelogramo relativa a uma base fixada, é o segmento de reta com extremidades na base e em seu lado paralelo, e que forma um ângulo de 90° com a base.

Observação 1: Note que um paralelogramo $ABCD$ tem área equivalente a um retângulo $A'B'C'D'$. Desse modo para calcular sua área basta utilizar a relação já conhecida para a área do retângulo, a Figura 4.14 ilustra esse fato.

Figura 4.14: Paralelogramo

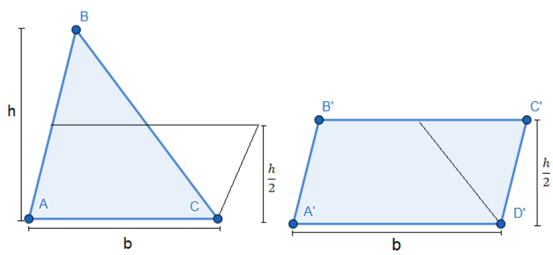


Fonte: Elaborada pelo autor

Proposição 4.3. *A área A de um paralelogramo de base b e altura h é dada por* $A = b \cdot h$.

Definição 4.7. O triângulo é um polígono de três lados. Chamamos de base qualquer um dos lados do triângulo. A altura de um triângulo relativa a uma base fixada, é o segmento de reta com extremidades na base (ou em seu prolongamento) e no vértice que não está contido na base, e que forma um ângulo de 90° com a base.

Figura 4.15: Triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

O triângulo ABC tem área equivalente ao paralelogramo $A'B'C'D'$ cuja base se mantém e a altura é diminuída pela metade, logo para calcular a área de um triângulo basta multiplicar a sua base pela metade da sua altura, a Figura 4.23 ilustra esse fato.

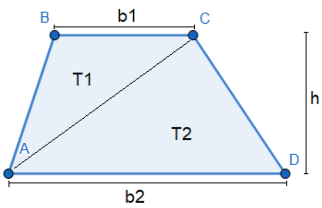
Assim, obtemos a

Proposição 4.4. *A área A de um triângulo de base b e altura h é dada por* $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Definição 4.8. Um trapézio é um polígono de 4 lados, que possui um par de lados paralelos. Chamamos de bases os lados paralelos do trapézio, sendo base maior a de maior segmento e base menor a de menor segmento. A altura de um trapézio relativa a uma base fixada, é o segmento de reta com extremidades nas base, e que forma um ângulo de 90° com as bases.

Um trapézio sempre pode ser dividido em dois triângulos de mesma altura fazendo a divisão por uma de suas diagonais, logo para calcular a área de um trapézio basta calcular as áreas dos dois triângulos e somá-las.

Figura 4.16: Trapézio



Fonte: Elaborada pelo autor

Dividimos o trapézio $ABCD$ em dois triângulos, T_1 e T_2, calculamos então a área de T_1 e T_2.

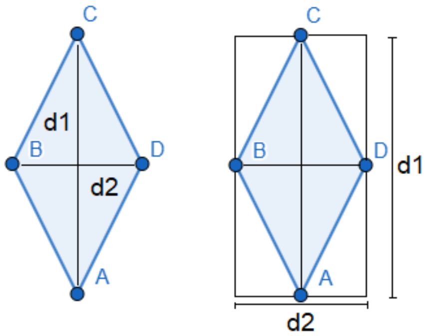
Temos que a área de T_1 é igual a $\frac{b1 \cdot h}{2}$, enquanto área de T_2 é igual a $\frac{b2 \cdot h}{2}$. Segue que a área do trapézio ABCD é igual a $\frac{b1 \cdot h}{2} + \frac{b2 \cdot h}{2}$. Assim, obtemos a

Proposição 4.5. *A área A de um trapézio de base menor* b_1*, base maior* b_2 *e altura* h *é dada por* $A = \frac{(b1+b2) \cdot h}{2}$.

Definição 4.9. O losango é um polígono que possui 4 lados iguais. O losango possui duas diagonais, denominadas diagonal maior(a diagonal de maior segmento) e diagonal menor(a diagonal de menor segmento).

Note que ao dividirmos o losango, temos 4 triângulos congruentes, tais que refletidos em relação a sua hipotenusa, obteremos um retângulo, porém a área do losango será a metade da área desse retângulo que tem como base e altura as diagonais do losango respectivamente.

Figura 4.17: Losango



Fonte: Elaborada pelo autor

Proposição 4.6. *A área A de um losango de diagonal maior d_1 e diagonal menor d_2 é dada por* $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Exemplo 3: Calcule a área e o perímetro de um quadrado de lado 5 cm.

Solução: Área = lado · lado

Área = 5 × 5 = 25 cm^2

Perímetro = 5 + 5 + 5 + 5 = 20 cm

Exemplo 4: Calcule a área e o perímetro de um retângulo de base 5 cm e altura 10 cm.

Solução: Área = base · altura

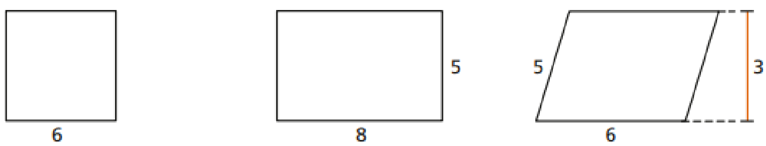
Área = 5 × 10 = 50 cm^2

Perímetro = 5 + 10 + 5 + 10 = 30 cm

Proposta de atividade 2: Noções de área e perímetro de figuras planas.

Problema 2: Determine o perímetro dos polígonos abaixo, sendo metro a unidade das medidas indicadas.

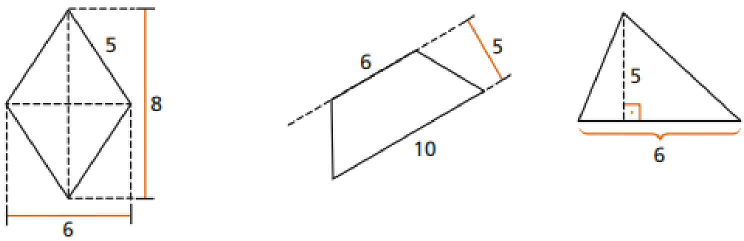
Figura 4.18: Calculando perímetro



Fonte: (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 309)

Problema 3: Calcule a área dos polígonos.

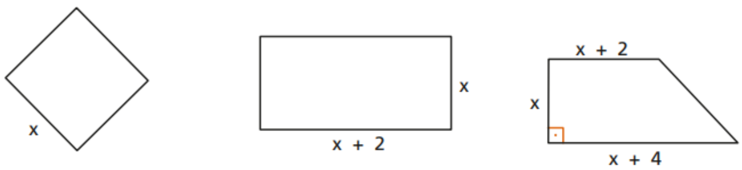
Figura 4.19: Calculando área



Fonte: (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 310)

Problema 4: A área do quadrado é 36 cm^2, do retângulo é 24 cm^2 e a do trapézio é 18 cm^2, em cada caso abaixo, determine x.

Figura 4.20: Calculando o valor de x



Fonte: (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 310)

4.4 Semanas 7, 8 e 9 – Estatística

Nessas semanas exploraremos noções básicas de estatística, utilizando a história do xadrez como fonte de dados para análise. Para as definições matemáticas nos basearemos nos autores Castro e Silva, Fernandes e Almeida (2015) e Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2013).

Inicialmente o docente fará uma breve introdução sobre estatística, apresentando uma situação em que a estatística é muito útil para a tomada de decisões.

No ano de 2022 ocorreram as eleições para presidente no Brasil, a qual tiveram como principais candidatos Jair Bolsonaro, candidato do Partido Liberal (PL), e Lula, candidato do partido dos trabalhadores. Nesse período de eleição, regularmente eram feitas pesquisas sobre a intenção de votos da população brasileira, as quais eram divulgadas em jornais de televisão.

A partir dos resultados das pesquisas, os candidatos podiam verificar em quais regiões tinham menor intenção de votos, podendo utilizar essas informações para traçar estratégias de ganhar alguns votos nessas regiões, com objetivo principal de vencer as eleições. Esse é um pequeno exemplo da aplicação da estatística no cotidiano, e como citado, pode ser uma ferramenta poderosa na tomada de decisões e definição de estratégias.

Definimos Estatística como "um campo do estudo centrado na produção de metodologia para coleta, organização, descrição, análise e interpretação de dados bem como na obtenção de conclusões válidas e na tomada de decisões razoáveis baseadas em tais análises" Castro e Silva, Fernandes e Almeida (2015, p. 9).

Para entender melhor os conceitos estatísticos, é fundamental distinguir os conceitos de população e amostra.

Definição 4.10. População corresponde ao conjunto total de elementos que possuem pelo menos uma característica em comum e que são objeto de estudo.

Definição 4.11. Amostra refere-se a um subconjunto representativo dessa população, selecionado com o intuito de possibilitar análises e inferências sobre o todo.

Por exemplo, se quisermos estudar a opinião dos estudantes de uma escola sobre a merenda escolar, a população será formada por todos os estudantes da escola, enquanto a amostra pode ser um grupo de alunos selecionados de uma turma específica.

A estatística não se restringe somente à área da matemática, pode ser também aplicada em campeonatos de futebol, análise de dados em economia, análise de dados na agronomia, divulgação de dados de epidemias, muito utilizada no período da COVID-19, análise de dados em estudos clínicos, como eficácia de um medicamento, dentre outras.

Figura 4.21: Variáveis

Sexo	Idade	Frequência semanal	Estado civil	Meio de transporte	Tempo de permanência	Renda familiar mensal (em salários mínimos)
Masculino	26	2	casado	carro	30 min	13,3
Masculino	23	1	solteiro	ônibus	35 min	11,8
Feminino	41	5	viúva	a pé	2h50min	8,9
Masculino	49	3	separado	a pé	45 min	13,9
Feminino	19	5	solteira	carro	1 h	11,6
Feminino	20	4	solteira	a pé	1h20min	16,0
Masculino	27	3	solteiro	carro	45 min	19,5
Masculino	38	3	casado	a pé	2h15min	9,3
Masculino	27	2	separado	ônibus	1h30min	10,2

Fonte: (IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2013, p. 74)

A Figura 4.21 apresenta resultados fictícios de uma pesquisa realizada com 9 pessoas que visitavam um parque. Cada entrevistado respondeu questões relacionadas ao sexo, idade, frequência semanal de visita ao parque, estado civil, meio de transporte que utiliza para ir ao parque, tempo de permanência no parque e renda familiar.

Cada um dos aspectos investigados são denominados variáveis, um atributo mensurável, que podem ser classificadas de dois modos, variável qualitativa e variável quantitativa.

Definição 4.12. Variáveis qualitativas são aquelas que classificam os elementos de uma população ou amostra em categorias distintas, representando características, qualidades ou atributos que não envolvem valores numéricos.

Definição 4.13. Variáveis quantitativas são aquelas cujos valores resultam de processos de contagem ou medição, representando quantidades numéricas.

Podemos citar como exemplo de variáveis qualitativas: cor do olho, estado civil, grau de escolaridade, dentre outras. Podemos citar como exemplo de variáveis quantitativas: quantidade de irmãos, renda familiar, dentre outros.

Exemplo 5: Complete a Tabela 4.1 classificando as variáveis como qualitativas ou quantitativas.

Tabela 4.1: Exemplo 5

Variáveis	**Classificação**
Idade	
Sexo	
Estado civil	
Renda familiar	
Cor da pele	
Altura	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Resposta: quantitativa, qualitativa, qualitativa, quantitativa, qualitativa, quantitativa.

Proposta de atividade 3: Classificação de variáveis.

Problema 5: Foi realizada uma pesquisa com jovens de uma escola de ensino médio, as perguntas que o questionário continha estão descritas abaixo.

a) Quantos anos você tem?

b) De qual série você é?

c) Qual sua matéria preferida?

d) Qual seu sexo?

e) Com qual raça você se identifica?

f) Quantas pessoas moram na mesma casa que você?

g) Qual meio de transporte você utiliza para chegar até a escola?

h) Com qual curso universitário você mais se identifica?

Cada uma das questões anteriores define uma variável. Classifique-as como qualitativas ou quantitativas.

Problema 6: Na prova do Spaece, os estudantes responderam a um questionário socioeconômico no qual constavam, entre outras, as seguintes questões:

1. Qual sua renda familiar?
2. Quantos aparelhos de celular existem na sua casa?
3. Qual é o nível de escolaridade da sua mãe?
4. Quanto tempo você demora para chegar a escola em que você estuda?
5. Qual é a distância média da sua casa para a escola?
6. Qual a profissão do seu pai?
7. Quantos banheiros existem na sua casa?
8. Em qual matéria você tem mais dificuldade?

Em relação às variáveis definidas pelas questões acima, responda:

a) Quantas são classificadas como qualitativas?

b) Converse com seus colegas e compare suas respostas.

A partir dos valores assumidos por uma variável quantitativa, definiremos a seguir as medidas de tendência central, média, moda e mediana.

Definição 4.14. Seja X um conjunto de valores de uma variável quantitativa e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os elementos desse conjunto. Definimos a média aritmética dos elementos - denotada por $\bar{x}$ - como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Exemplo 6: Numa escola de ensino médio, na disciplina de matemática foi observado o desempenho de uma turma especial de 10 alunos, os resultados obtidos foram: 8, 9, 10, 10, 9, 7, 8, 7, 9, 10. Calcule a média das notas.

Solução: Como já sabemos, para calcular a média basta dividir a soma das notas pela quantidade de notas.

$$\bar{x} = \frac{8+9+10+10+9+7+8+7+9+10}{10} = \frac{87}{10} = 8,7.$$

Exemplo 7: João foi comprar seus materiais escolares para o início do ano letivo. No supermercado ele comprou um caderno, uma bolsa, um estojo, 2 canetas, 3 lápis e 2 borrachas. No total ele gastou 210 reais nas compras, qual foi o preço médio por produto que João gastou no supermercado?

Solução: No total foram comprados 10 produtos custando um total de 210 reais, assim podemos calcular a média de compra por.

$$\bar{x} = \frac{210}{10} = 21.$$

Portanto, o valor médio da compra foi de 21 reais por produto.

Definição 4.15. Sejam X um conjunto de valores de uma variável quantitativa e $x_1, x_2, \ldots, x_k$ os elementos desse conjunto. Além disso, considere n_1 o número de vezes que a variável x_1 aparece, n_2 o número de vezes que a variável x_2 aparece, ..., n_k o número de vezes que a variável x_k aparece. Seja n_j o valor máximo entre $n_1, n_2, \ldots, n_k$, para algum $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Definimos moda — indicada por Mo — como o valor assumido por x_j.

Em outras palavras, podemos definir moda como o termo que mais se repete na distribuição. Vale destacar, que a moda não necessariamente será um único elemento, pode ser nenhum, neste caso chamamos a distribuição de amodal, pode ser dois valores, neste caso chamamos de bimodal, três valores, neste caso chamamos de trimodal e assim sucessivamente, a depender da distribuição que se observa.

Exemplo 8: Em uma turma de terceiro ano do ensino médio foi realizada uma pesquisa amostral quanto à idade de 10 estudantes. Após a pesquisa concluiu-se que 4 estudantes tinham 16 anos, 5 estudantes 17 anos e 1 estudante com 18 anos. Qual a moda da idade dos estudantes dessa pesquisa?

Solução: Como o número mais frequente foi 17 anos, com 5 respostas, concluímos que a moda é 17 anos.

Observação 2: Atenção para não confundir variável com frequência. No exemplo acima, 5 seria o número de vezes que a resposta 17 anos foi dada, já 17 a variável.

Exemplo 9: Em uma rodada do campeonato brasileiro de futebol 5 jogadores se destacaram, Alessandro marcando 3 gols; Bruno marcando 2 gols; Carlos marcando 3 gols; Douglas, marcando 4 gols e Emanuel, marcando 2 gols. De acordo com os dados apresentados, qual a moda?

Solução: Observamos que o dado que mais se repetiu foi 2 e 3 gols com duas repetições cada, logo a moda dessa distribuição é 2 e 3, este é um caso de distribuição bimodal.

Definição 4.16. Sejam $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$ os k valores ordenados de uma variável x. A mediana desse conjunto de valores – indicada por Me – é definida por:

$$Me = \begin{cases} x_{\frac{k+1}{2}}, \text{se } k \text{ é ímpar,} \\ \frac{x_{\frac{k}{2}} + x_{\frac{k+1}{2}}}{2}, \text{se } k \text{ é par.} \end{cases}$$

Em outras palavras, podemos definir mediana como o termo central de um conjunto de valores.

Observação 3: Caso o conjunto não seja ordenado, é necessário que se organizem os dados em ordem crescente.

Exemplo 10: Maria e suas 4 amigas resolveram se medir em uma farmácia. Ao concluírem a atividade obtiveram o seguinte resultado. Maria possui 1,45m, Ana 1,47m, Bia 1,5m, Carol 1,54m e Cecília 1,6m. De acordo com os dados apresentados, calcule a mediana.

Solução: Note que os dados já estão em ordem crescente, desse modo basta destacar o termo central. Temos que $5 + 1 = 6$ e $6 \div 2 = 3$, logo o termo central será o terceiro. Concluímos que a altura de Bia é a mediana com 1,5m.

Exemplo 11: Foi realizada uma pesquisa com 8 moradores locais em relação à quantidade de filhos que estes possuíam. Como resultado foram obtidas as respostas a seguir: nenhum, 3, 4, 2, 2, 3, 5 e 1. Calcule a mediana dessa distribuição.

Solução: Note que os dados não estão em ordem crescente. Desse modo, faz-se necessária a organização deles. Assim, obtemos 0, 1, 2, 2, 3, 3, 4 e 5. Sendo 8 a quantidade de elementos dessa distribuição, podemos destacar seus elementos centrais fazendo $8 \div 2 = 4$, logo seus elementos centrais estão na quarta e quinta posição, sendo eles 2 e 3.

Fazendo a média aritmética de 2 e 3, obtemos a mediana da distribuição 2,5.

Proposta de atividade 4: Produção de seminário.

Divida a turma em equipes de no máximo 4 alunos e proponha uma pequena viagem na história do xadrez mundial. Em equipe, os alunos utilizarão um computador para visitar a plataforma virtual de xadrez, disponível em (CHESS.COM, 2024). A partir da leitura do material, os aluno criarão uma tabela com informações de 10 campeões mundiais a critério dos alunos, a tabela deve conter seus nomes, a sua principal característica como jogador da época e o tempo em que ficaram como campeões mundiais.

Os alunos realizarão o trabalho numa cartolina com finalidade de apresentar à turma. Além da tabela, o cartaz também deve conter as medidas de tendência central da variável tempo como campeão mundial.

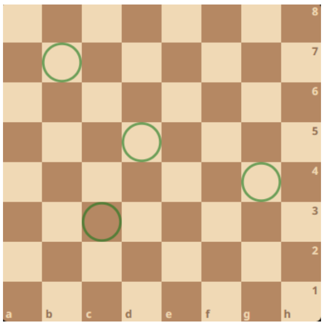
Recursos: Cartolina, pincel e computadores com internet.

4.5 Semana 10 – Proposta de avaliação

Nessa semana será proposta uma avaliação parcial, que servirá como um dos critérios avaliativos para a disciplina eletiva.

Questão 1: Observe a Figura 4.22 e escreva o nome de cada casa destacada.

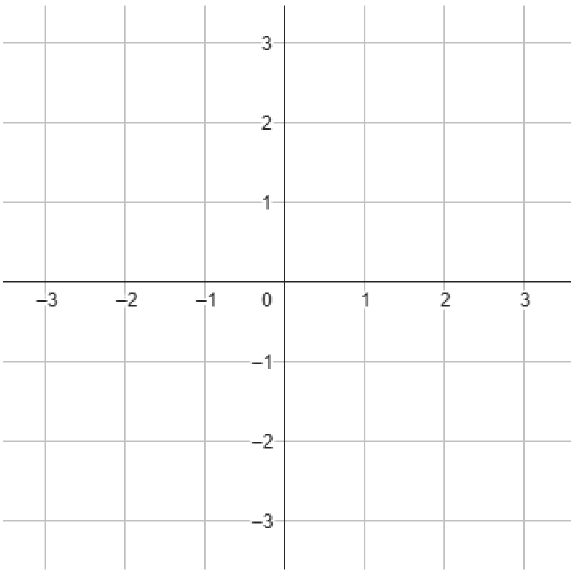
Figura 4.22: Questão 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Questão 2: No plano cartesiano da Figura 4.23 marque os pontos $A(1, 2)$, $B(3, 2)$, $C(3, 3)$, $D(-2, 1)$, $E(0, 1)$ e $F(-3, 0)$.

Figura 4.23: Questão 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

Questão 3: Em uma turma de 10 alunos foi realizada uma pesquisa amostral a fim de estabelecer um perfil etário da turma, as idades obtidas foram: 15, 16, 16, 17, 17, 15, 15, 16, 16 e 17. Marque a alternativa que apresenta a média, a moda e mediana respectivamente.

a) 16, 16 e 16.

b) 16, 17 e 17.

c) 15, 16 e 16.

d) 16, 15 e 17.

e) 16, 16 e 18.

Questão 4: Observe a Tabela 4.2 que apresenta alguns dos campeões mundiais de xadrez e, em seguida, responda o que se pede.

Tabela 4.2: Campeões mundiais

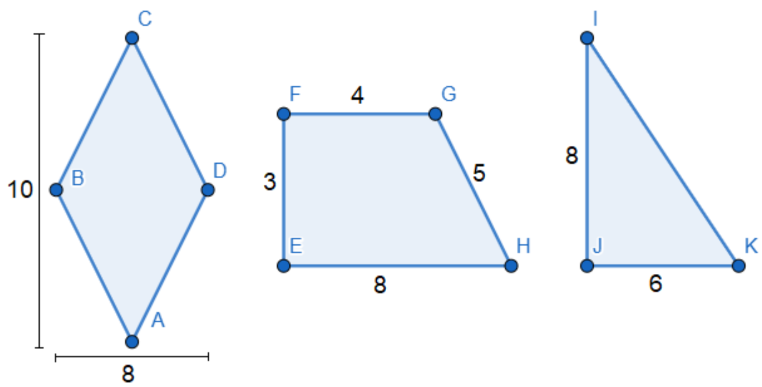
CAMPEÃO MUNDIAL	TEMPO COMO CAMPEÃO
Magnus Carlsen	10 anos
Garry Kasparov	15 anos
Bobby Fischer	3 anos
Mikhail Tal	3 anos
José Raúl Capablanca	6 anos

Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com a tabela, calcule a média, a moda e a mediana da variável tempo como campeão.

Questão 5: Determine a área dos polígonos abaixo.

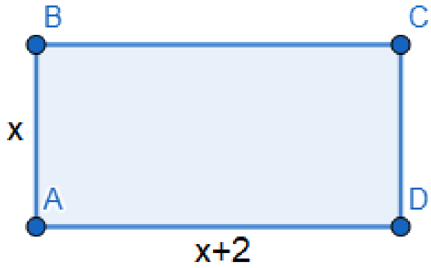
Figura 4.24: Questão 5



Elaborada pelo autor.

Questão 6: Sabendo que o perímetro do retângulo abaixo mede 20 centímetros, calcule o valor de x.

Figura 4.25: Questão 6



Elaborada pelo autor.

4.6 Semana 11 – A história do jogo xadrez

Nesta semana comentaremos de forma geral a história do xadrez além de explorar alguns fundamentos do jogo. Os conceitos apresentados nesta semana servirão de suporte para a construção dos conteúdos matemáticos abordados nas próximas semanas. Para esta aula é necessário que o professor disponibilize um jogo de xadrez para cada dois alunos.

Conforme descrito por Rocha (2009), Kasparov (2005b) e Neto (2023), o Xadrez é um jogo de origem tão antigo que, ao longo de sua longa existência, diversas histórias foram associadas à sua criação. Uma das histórias mais aceitas é que o jogo foi criado na Índia com o nome de "chaturanga" e foi se espalhando pela China, Rússia, Pérsia e Europa. O jogo sofreu muitas mudanças desde que foi criado até tornar-se um esporte olímpico conhecido mundialmente.

A primeira história contada se passa na Índia, na cidade de Taligana, onde um rei vivia numa tristeza profunda em luto pela morte de seu filho. Com o passar do tempo, esse problema atingiu também a gestão de seu reino, que foi ruindo aos poucos. Vendo a queda iminente de seu reino, um brâmane apresentou ao rei um jogo semelhante ao xadrez.

O sacerdote aconselhou o rei a aceitar o jogo, dizendo ser possível acalmar o rei. De modo inexplicável o rei foi saindo da depressão, até apresentar uma melhora significativa. Satisfeito com o presente do brâmane o rei ofereceu-lhe como recompensa a oportunidade de pedir o que quisesse.

Surpreendendo o rei, o brâmane pediu-lhe 1 grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro, 2 para a segunda, 4 para a terceira, 8 para a quarta e assim sucessivamente para cada uma das 64 casas do jogo. O rei chegou a gargalhar diante da ingenuidade do brâmane, entretanto se espantou ao ouvir a explicação do sacerdote de qual seria a quantia total que o rei deveria pagar.

Ele descobriu que, para atender ao pedido, seria necessária toda a safra do reino pelos próximos dois mil anos. Impressionado com a inteligência do brâmane, convidou-o para ser seu conselheiro, o qual foi aceito.

Regras

O jogo de xadrez possui 6 diferentes peças, as quais exercem papeéis diferentes no jogo. Cada peça possui também um valor, que é medido de acordo com sua capacidade de se movimentar pelo tabuleiro ou importância para o jogo, a seguir apresentaremos cada peça.

Antes de comentarmos sobre o movimento das peças, é necessário definir um movimento do jogo de xadrez chamado "xeque". "O xeque pode ser visto como um aviso: "Cuidado! O rei está em perigo!". Como um rei nunca pode ser capturado, o termo "xeque" é usado quando um rei é ameaçado" (CHESS.COM, 2025). A seguir ilustraremos uma situação em que o rei das peças pretas está em "xeque".

Figura 4.26: Posição de xeque

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 4.26, o bispo em b5 está atacando o rei em e8, deixando o rei das peças pretas em xeque.

Outro movimento importante do jogo de xadrez é o "xeque-mate", semelhante ao xeque, porém quando o rei está nesta posição, ele não possui nenhuma casa de fuga, quando isso acontece o jogo termina.

Figura 4.27: Posição de xeque-mate

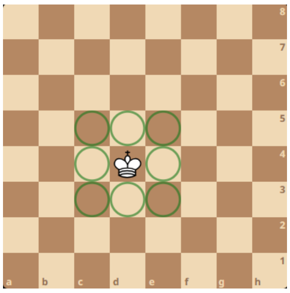
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 4.27, o rei das peças pretas está sob ataque da Dama das peças brancas e não tem nenhuma casa de fuga, esse é um exemplo de posição de xeque-mate.

Rei

O rei é a peça mais importante do jogo e possui valor absoluto, pois quando esta peça está em posição de xeque-mate o jogo termina. Esta peça pode se movimentar livremente pelo tabuleiro no sentido horizontal, vertical ou diagonal, porém apenas uma casa por vez. Numa partida, cada jogador inicia com um rei sobre o tabuleiro.

Figura 4.28: Movimentos do rei

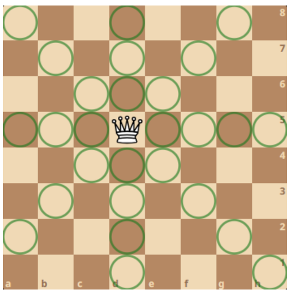


Fonte: Elaborada pelo autor.

Dama

A dama, também conhecida por rainha, é uma peça muito importante para o jogo possuindo valor de 9 pontos, assim como o rei seus movimentos são livres pelo tabuleiro no sentido horizontal, vertical ou diagonal, porém quantas casas quiser, desde que esta casa não esteja ocupada por outra peça. Ao iniciar a partida o jogador possui somente uma dama sobre o tabuleiro.

Figura 4.29: Movimentos da dama

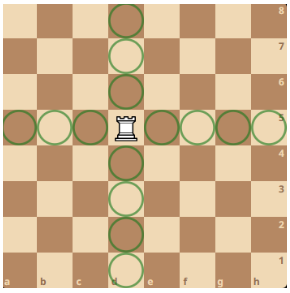


Fonte: Elaborada pelo autor.

Torre

A torre possui valor de 5 pontos, ela pode se movimentar livremente pelo tabuleiro no sentido vertical ou horizontal desde que esta casa não esteja ocupada por outra peça, num jogo de xadrez o jogador inicia a partida com duas torres no tabuleiro.

Figura 4.30: Movimentos da torre

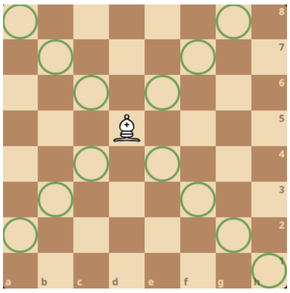


Fonte: Elaborada pelo autor.

Bispo

O bispo possui valor de 3 pontos, ele move-se em diagonal quantas casas quiser. Ao iniciar o jogo cada jogador possui 2 bispos, um de casas pretas e outro de casas brancas, o bispo que inicia na casa branca só pode se movimentar por casas brancas, enquanto o bispo das casas pretas só se movimenta pelas casas pretas.

Figura 4.31: Movimentos do bispo

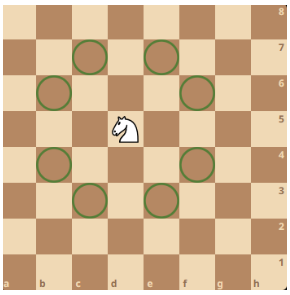


Fonte: Elaborada pelo autor.

Cavalo

O cavalo possui valor de 3 pontos, ela é a única peça que pode saltar sobre as outras peças no tabuleiro, seu movimento é sempre em "L", ao iniciar a partida cada jogador possui dois cavalos.

Figura 4.32: Movimentos do cavalo

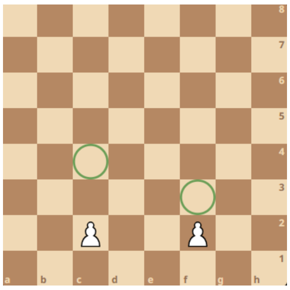


Fonte: Elaborada pelo autor.

Peão

O peão possui valor de 1 ponto, ele move-se sempre para frente com exceção do primeiro movimento que pode ser feito uma ou duas casas à frente, cada jogador inicia o jogo com 8 peões. Embora seja a peça que possui menor valor, ela pode ser transformada em qualquer outra peça com exceção do rei, esse movimento chama-se promoção que é realizado quando o peão avança até a última linha do tabuleiro.

Figura 4.33: Movimentos do peão



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para jogar uma partida de xadrez ainda é necessária a apresentação de outras regras. Essas regras serão apresentadas nas semanas seguintes desta disciplina eletiva.

4.7 Semanas 12 e 13 – Probabilidade

Nessa semana abordaremos alguns conceitos básicos de probabilidade, espaço amostral, eventos aleatórios e cálculo de probabilidade. Para definição dos conceitos matemáticos apresentados nessas semanas, utilizaremos como referências Morgado e Carvalho (2023) e Hazzan (2013).

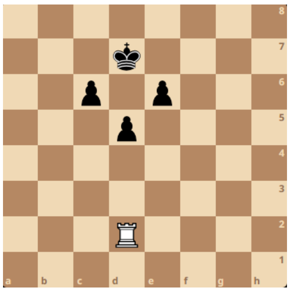
Inicialmente o docente dividirá a turma em duplas e disponibilizará para cada dupla um jogo completo de xadrez. Um ponto muito importante para jogo é conseguir pensar em todas ou pelo menos na maioria das possíveis jogadas que o seu adversário pode realizar, isso pode te ajudar a traçar estratégias mais eficazes para vencer uma partida de xadrez.

O jogador de peças brancas posicionará uma torre na casa d2, e o jogador de peças pretas posicionará 3 peões nas casas c6, d5, e6 e o rei na casa d7, conforme a Figura 4.34.

O objetivo da prática é a torre dar xeque no rei adversário com menos de 5 movimentos, cada aluno terá 10 chances para fazer a tarefa.

Observação 4: As peças brancas começam o desafio.

Figura 4.34: Prática 1



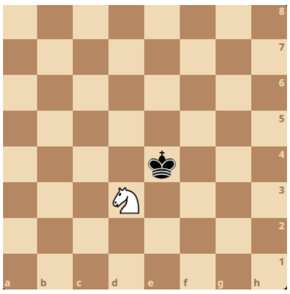
Fonte: Elaborada pelo autor.

Após cada aluno fazer o desafio, o professor comentará que se o jogador de peças brancas for habilidoso ele sempre conseguirá completar a atividade. Na matemática chamamos isso de evento certo de acontecer, ou que o evento do rei ser colocado em perigo em menos de 5 lances tem 100% de chance de acontecer, caso o jogador faça as melhores jogadas.

Solução: O jogador de peças brancas fará a jogada torre em f2, a melhor jogada do adversário é rei em d6, caso contrário o desafio já pode se encerrar. Em seguida será jogado torre em f7, e como melhor resposta teremos rei em c5, o jogador de peças brancas jogará torre em b7 e no próximo lance independente do lance de rei ele conseguirá completar o desafio.

O jogador de peças brancas posicionará o cavalo na casa d3 e o jogador de peças pretas posicionará o rei na casa e4, conforme ilustrado na Figura 4.35.

Figura 4.35: Prática 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

O objetivo da prática é fazer o cavalo dar xeque no rei inimigo com menos de 5 movimentos, cada aluno terá 10 tentativas.

Observação 5: As peças pretas começam o desafio.

Após cada aluno tentar o desafio, o professor comentará que por mais habilidoso que seja o jogador de peças brancas ele nunca conseguirá completar o desafio se o jogador de peças pretas for preciso em seus movimentos, na matemática chamamos isso de evento impossível, pois não há chances de ocorrência.

Solução: O jogador de peças pretas sempre fará lances de modo a ocupar uma casa de cor diferente da que o cavalo ocupa, caso o cavalo esteja numa casa branca o jogador de peças pretas deve ocupar uma casa preta em seu lance, e vice-versa.

Existem também alguns eventos em que as chances do jogador ganhar variam, nesses casos podemos calculá-las utilizando conceitos de probabilidade, a seguir iremos definir esses conceitos.

Definição 4.17. Definimos experimento aleatório como experiências que repetidas sob as mesmas condições produzem geralmente resultados diferentes.

A seguir apresentaremos alguns exemplos desse experimento.

a) Lançar uma moeda e observar a face de cima.

b) Lançar um dado e observar o número da face de cima.

c) De um baralho de 52 cartas, selecionar uma carta e observar seu naipe.

Definição 4.18. Chamamos de espaço amostral, e indicamos por S, o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de espaço amostral.

a) Lançar uma moeda e observar a face de cima.

$S = \{$K, C$\}$, em que K representa cara e C, coroa.

b) Lançar um dado e observar o número da face de cima.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Definição 4.19. Definimos evento como qualquer subconjunto de um espaço amostral.

Exemplo 12: Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eis alguns eventos:

a) ocorrência de número ímpar.

$A = \{1, 3, 5\}$.

b) ocorrência de número primo.

$B = \{2, 3, 5\}$.

c) ocorrência de número menor que 4.

$C = \{1, 2, 3\}$.

Probabilidade

Calcular a probabilidade de um evento ocorrer é calcular as chances desse evento acontecer, esse cálculo nos fornece um percentual de incidência desse fenômeno estudado. Podemos calcular a probabilidade de um evento acontecer, dividindo a quantidade de elementos do evento pelo número de elementos do espaço amostral.

Definição 4.20. Chamaremos de P a probabilidade de ocorrência de um envento, a qual definimos como

$$P = \frac{\text{Número de elementos do evento}}{\text{Espaço amostral}}.$$

Exemplo 13: No lançamento de uma moeda comum não viciada, qual a probabilidade de cair a face cara virada para cima?

Solução: Temos $S = \{\text{cara, coroa}\}$

E considerando A como os casos favoráveis para cara estar com a face para cima, temos $A = \{\text{cara}\}$.

Logo

$$P = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Exemplo 14: Numa urna existem duas bolas vermelhas e três brancas. Sorteando-se uma bola aleatoriamente, qual a probabilidade de ser uma bola branca?

Solução: Temos $S = \{\text{branca, branca, branca, vermelha, vermelha}\}$

$A = \{\text{branca, branca, branca}\}$

Logo

$$P = \frac{3}{5} = 60\%.$$

Proposta de atividade 5: Cálculo de probabilidade.

Problema 7: Numa cidade com 10000 eleitores haverá uma eleição com dois candidatos, André e Bruno. Foi feita uma prévia em que os 10000 eleitores são consultados, sendo que 6200 já se decidiram, definitivamente, por André. Calcule a probabilidade de André ganhar a eleição.

Problema 8: Ao jogar um dado comum e observarmos as faces viradas para cima, qual a probabilidade de.

a) Obtermos um número ímpar voltado para cima?

b) Obtemos um número par voltado para cima?

c) Obtermos um número maior que 4 voltado para cima?

Problema 9: Ao jogar dois dados comuns para cima, e observarmos as faces viradas para cima, qual a probabilidade de.

a) A soma dos números ser par?

b) A soma dos números ser 7?

c) A soma dos números ser maior que 7.

Problema 10: Calcule a probabilidade de tirar uma carta de espada, ao retirar ao acaso uma carta de um baralho comum, com 52 cartas. (um baralho comum possui quatro naipes: copas, paus, ouros e espadas).

Problema 11: Uma urna contém 20 bolas enumeradas de 1 a 20, de tamanhos iguais, retirando-se aleatoriamente uma bola da urna, qual a probabilidade de que esse número seja múltiplo de 2?

4.8 Semanas 14, 15, 16 e 17 – Análise Combinatória

Nessas semanas serão abordados alguns conceitos básicos de análise combinatória: Princípio fundamental da contagem, permutação simples, permutação com repetição e combinação simples. Os conceitos matemáticos definidos a seguir, baseiam-se nos autores Morgado e Carvalho (2023) e Hazzan (2013).

Uma partida de xadrez clássica sempre inicia-se a partir de uma posição predefinida, conforme mostrado na Figura 4.36.

Figura 4.36: Posição inicial

Fonte: Elaborada pelo autor.

Atualmente existem outras modalidades de xadrez além do clássico, uma delas é o Chess 960, também conhecido como xadrez aleatório de Fischer, essa modalidade consiste em organizar a posição inicial de um jeito diferente, ela busca incentivar a criatividade e o talento dos jogadores.

Figura 4.37: Chess 960

Fonte: Elaborada pelo autor.

O professor dividirá a turma em duplas e disponibilizará um jogo de xadrez para cada dupla, a seguir orientará os alunos a reproduzirem a posição da Figura 4.37.

O objetivo da atividade é contar quantas posições distintas surgem a partir da mudança de posição das peças.

Observação 6: As mudanças devem ser feitas apenas nas linhas 1 e 8, as linhas de peões devem ser mantidas na configuração inicial. Os alunos podem conversar sobre a atividade e comparar os resultados obtidos entre si.

Observação 7: As mudanças devem ser feitas de modo que as peças brancas só ocupem as casas e1, f1, g1 e h1, já as peças pretas só podem ocupar as casas a8, b8, c8 e d8.

Após a conclusão da atividade o professor apresentará aos alunos a solução introduzindo noções intuitivas de permutação simples, concluindo que as peças pretas possuem 24 variações assim como as brancas. Em seguida o professor explicará aos alunos que existe um ramo da matemática que conta o número de combinações distintas de formar agrupamentos em um conjunto de valores, esse ramo é conhecido como análise combinatória o qual exploraremos a seguir.

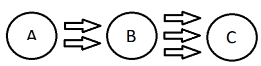
Princípio fundamental da contagem

A Combinatória é uma área importante da matemática que visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes agrupamentos formados sob certas condições. A análise combinatória possui muitas aplicações, desde a Probabilidade e Estatística até áreas mais abstratas, como a Computação Teórica.

Esse campo trouxe novos métodos para a matemática e exige uma forma de pensar própria. Para aprender bem combinatória, é preciso desenvolver algumas técnicas e maneiras específicas de raciocinar. Iniciaremos nossos estudos com um exemplo introdutório.

Exemplo introdutório: Visando a melhoria do tráfego entre as cidades A, B e C, foram construídas 2 estradas ligando a cidade A à cidade B, e 3 estradas ligando a cidade B à cidade C. Sabendo que não existem estradas que liguem as cidades A à C diretamente, calcule de quantas maneiras distintas é possível ir da cidade A até a cidade C.

Figura 4.38: Exemplo introdutório



Fonte: Elaborada pelo autor.

Solução: Se enumerarmos as estradas que saem de A até B, temos as estradas 1 e 2, enumerando também as estradas que saem de B até chegar em C temos as estradas 3, 4 e 5. Desse modo, como possíveis soluções temos as combinações $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(2, 3)$, totalizando 6 opções distintas de sair da cidade A com destino a cidade C.

De modo geral, é possível calcular o número de possibilidades distintas de ocorrência de dois eventos através do princípio fundamental da contagem (PFC).

Definição 4.21. Se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é x vezes y.

Note que, no caso do exemplo introdutório, o estudo de todas as combinações de forma manual também resolve o problema de contagem, porém para um grande número de opções, destacar todas as combinações pode ser uma tarefa longa, por isso, usar o PFC simplificará a contagem.

Podemos resolver o exemplo introdutório utilizando o PFC, temos que: de A à B temos 2 opções, de B à C temos 3 opções, logo o número de opções para ir de A até C são $2 \cdot 3 = 6$.

Exemplo 15: Com 4 homens e 4 mulheres, de quantos modos pode-se formar um casal heterossexual?

Solução: Formar um casal é necessário a tomada de duas decisões:

D_1 : Escolha do homem (4 opções).

D_2 : Escolha da mulher (4 opções).

Pelo PFC, temos $4 \cdot 4 = 16$ maneiras distintas de formar um casal heterossexual.

É importante destacar que o PFC é válido para calcular a ocorrência de três ou mais eventos, desde que esses sejam uma quantidade finita. De modo geral, para calcular o número de possibilidades distintas de ocorrência de n eventos, basta utilizar o PFC $(n - 1)$ vezes.

Suponha que há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2 e, após tomada a decisão D_2, há z modos de tomar a decisão D_3. Utilizando o PFC, temos que o número de modos distintos de tomar as decisões D_1 e D_2 sucessivamente é x vezes y, utilizando novamente o PFC, o número de modos distintos de tomar as decisões (D_1 e D_2) e D_3 sucessivamente é x vezes y vezes z.

Exemplo 16: João foi a uma loja para comprar um conjunto completo de roupas (blusa, calça e tênis). A loja dispunha de 5 opções de blusa, 6 opções de calça e 4 pares de tênis, quantos conjuntos distintos João pode comprar?

Solução: Para montar um conjunto de roupas, é necessária a tomada de três decisões:

D_1: Escolha da blusa (5 opções).

D_2: Escolha da calça (6 opções).

D_3: Escolha do tênis (4 opções).

Pelo PFC, temos $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$ maneiras distintas de montar um conjunto de roupas.

Exemplo 17: Cinco atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o 1°, 2° e 3° lugares?

Solução: Para a construção de um pódio, é necessária a tomada de três decisões:

D_1: Escolha do primeiro lugar (5 opções).

Como já foi definido o atleta a ficar na primeira colocação, este será excluído da contagem total de atletas, segue que

D_2: Escolha do segundo colocado (4 opções).

De modo análogo, o atleta definido para compor a segunda colocação deve ser excluído da contagem total de atletas, segue que

D_3: Escolha do terceiro colocado (3 opções).

Pelo PFC, temos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneiras distintas de compor um pódio.

Exemplo 18: Dispondo dos algarismos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar?

Solução: Para montar um número de três algarismos, é necessária a tomada de três decisões:

Iniciaremos pela decisão do algarismo da classe das unidades do número, pois este determinará a condição de ser par, logo.

D_1: Escolha do algarismo das unidades (2 opções, pois dentre os cinco números, apenas 2 e 4 são pares).

Como o número pretendido deve possuir todos os algarismos distintos, excluiremos o algarismo da classe das unidades, escolhido em D1, segue que

D_2: Escolha do algarismo das centenas (4 opções).

D_3: Escolha do algarismo das dezenas (3 opções).

Pelo PFC, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ números pares distintos de três algarismos.

Exemplo 19: Quantos números ímpares de 3 algarismos distintos, podemos formar dispondo dos algarismos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$?

Solução: Para montar um número de três algarismos, são necessárias a tomada de três decisões:

Iniciaremos pela decisão do algarismo da classe das unidades do número, pois este determinará a condição de ser ímpar, logo

D_1: Escolha do algarismo das unidades (3 opções, pois dentre os seis números, apenas 1, 3 e 5 são ímpares).

Como o número pretendido deve possuir todos os algarismos distintos, excluiremos o algarismo das unidades, escolhido em D1, segue que

D_2: Escolha do algarismo das unidades (4 opções).

Note que, o algarismo 0 não poderá ser incluso na contagem da escolha para o algarismo das unidades do número, pois caso contrário o número não terá 3 algarismos e sim 2 algarismos.

D_3: Escolha do algarismo das dezenas (4 opções).

Note que, excluímos um algarismo da contagem total na tomada de decisão D1 e um algarismo na tomada de decisão D2, porém o 0 volta a fazer parte da contagem total de algarismos para compor a classe das dezenas do número.

Pelo PFC, temos $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ números pares ímpares com 3 algarismos distintos.

Observação 8: É importante que o aluno sempre preze por iniciar pelas tomadas de decisões que definam o critério mais restritivo da questão, em caso de não haver nenhuma restrição se faz livre a escolha a depender do contexto da questão.

Proposta de atividade 6: Praticando o PFC.

Problema 12: Quatro atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o 1°, 2° e 3° lugares?

Problema 13: De quantos modos três pessoas podem ficar em fila indiana?

Problema 14: Um homem vai a um restaurante disposto a comer um só prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece oito pratos distintos de carne e cinco pratos diferentes de sobremesa. De quantas formas pode o homem fazer sua refeição?

Problema 15: Um edifício tem 8 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

Problema 16: Dispondo dos algarismos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, quantos são os números naturais:

a) Com 3 algarismos?

b) Com 4 algarismos distintos?

c) Ímpares de 4 algarismos?

Fatorial

Para simplificar as fórmulas matemáticas que serão estudadas a seguir, vamos definir o símbolo fatorial.

Definição 4.22. Seja m um número inteiro não negativo ($m \in \mathbb{N}$). Definimos o fatorial de m (e indicamos por $m!$) por meio da relação:

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad \text{para } m \geq 2$$

Para os casos particulares 0 e 1, temos que:

$$1! = 1,\ 0! = 1.$$

Exemplo 20: Vejamos alguns exemplos do cálculo do fatorial pela definição.

1. $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
2. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
3. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

O cálculo de $m!$, diretamente, torna-se trabalhoso à medida que m aumenta. Por exemplo, temos que $10! = 3628800$. Entretanto, muitos cálculos podem ser simplificados se notarmos que:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n+1) \cdot n!.$$

Exemplo 21: Calcule $\dfrac{10!}{9!}$.

Solução: Para calcular a razão acima, não é necessário que se desenvolvam os fatoriais e em seguida efetue a divisão, podemos simplificar os fatoriais conforme mostrado abaixo.

$$\frac{10!}{9!} = \frac{10 \cdot 9!}{9!} = 10.$$

Exemplo 22: Calcule $\dfrac{10!}{8!}$.

Solução: Temos que

$$\frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90.$$

Permutação Simples

A seguir, estudaremos as permutações simples. O foco do estudo das técnicas de contagem, não é decorar fórmulas, mas entender os processos de contagem. Introduziremos o conceito de permutação simples através de um exemplo.

Exemplo introdutório: De quantos modos podemos ordenar em fila 6 objetos distintos?

Solução: A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de 6 modos; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de $6-1=5$ modos; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de $6-2=4$ modos, etc.; a escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo. Logo, teremos

$$6 \cdot (6-1) \cdot (6-2) \cdots 1 = 6! = 720 \text{ modos de ordenação.}$$

Cada ordem que se dá aos objetos é chamada de uma permutação simples (ou apenas permutação) dos objetos. Assim, por exemplo, as permutações dos números 1, 2 e 3 são $\{123\}$, $\{132\}$, $\{213\}$, $\{231\}$, $\{312\}$ e $\{321\}$.

Definição 4.23. Seja n um número inteiro não negativo ($n \in \mathbb{N}$). Para calcular as permutações de n objetos, fazemos:

$$P_n = n!$$

Indicamos P_n como o número de permutações simples de n elementos.

Exemplo 23: De quantas formas podem 5 pessoas ficar em fila indiana?

Solução: Notemos que, cada forma de ficar em fila indiana é uma permutação das 5 pessoas. O número de permutações (modos de ficar em fila indiana) será:

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Um típico problema de permutação simples é o dos anagramas de uma palavra.

Definimos anagrama como palavras formadas a partir da reorganização de letras, mesmo que essas não possuam sentido na leitura. Por exemplo, a palavra Roma é um anagrama da palavra amor, porém moar também é um anagrama da palavra amor.

Exemplo 24: Quantos são os anagramas da palavra escola? Quantos começam com consoantes?

Solução: O número de anagramas é:

$$P_6 = 6! = 720.$$

Para formar um anagrama começado por consoante, devemos primeiramente escolher a consoante (3 modos) e, depois, permutar as cinco letras restantes:

$$P_5 = 5! = 120.$$

Logo, há $3 \cdot 120 = 360$ anagramas começados por consoante.

Proposta de atividade 7: Praticando permutação simples.

Problema 17: Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares ?

Problema 18: Dispomos de 3 cores queremos pintar uma bandeira de 5 listras, sabendo que, cada listra deve ser pintada com uma punica cor e uma listra não pode ter a mesma cor da listra adjacente. De quantas formas isso pode ser feito?

Problema 19: Há placas de automóveis que são formadas por duas letras, seguidas de 4 algarismos. Quantas placas podem ser formadas com as letras A e B e os algarismos pares, sem repetir nenhum algarismo?

Problema 20: Com os algarismos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, quantos números com algarismos distintos existem entre 300 e 900?

Problema 21: De quantos modos podemos arrumar em fila 4 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Química e 2 livros diferentes de Biologia, de modo que livros de uma mesma matéria permaneçam juntos?

Problema 22: Quantos anagramas podemos formar das palavras:

a) Deus.

b) André.

c) Lua.

Permutação com repetição

Consideremos a palavra BOB e procuremos seus anagramas. Vamos indicar por B* o segundo B. Teremos, então:

Tabela 4.3: Anagramas de BOB

BOB*	BB*O	OBB*	OB*B	B*OB	B*BO
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Notemos que as permutações:

(1) e (5) são iguais;

(2) e (6) são iguais;

(3) e (4) são iguais.

Na verdade, não temos $3! = 6$ permutações distintas, mas apenas 3, que são:

BOB, BBO, OBB.

Essa diminuição do número de permutações decorreu do fato de termos duas letras iguais, B* e B, no conjunto das letras a serem permutadas. É intuitivo perceber que o fato de existirem letras repetidas para serem permutadas acarreta numa diminuição do número de permutações, em relação ao número que teríamos se todas fossem distintas.

Tendo em vista essa particularidade, para permutações com repetições é necessária uma estratégia para excluir da contagem os casos repetidos, para isso fazemos uma divisão pelas permutações das letras repetidas.

Em geral, para calcular uma permutação de n elementos, com n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2, $\ldots$, n_r elementos iguais a a_r, por meio da seguinte fórmula:

$$P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_r)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}.$$

Exemplo 25: Quantos são os anagramas da palavra DADO.

Solução: Temos uma palavra com 4 letras, sendo que a letra "d" se repete duas vezes, assim utilizaremos permutação com repetição para contar seus anagramas.

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Exemplo 26: Sobre uma mesa são colocadas em linha 5 moedas. Quantos são os modos possíveis de colocar duas caras e cinco coroas voltadas para cima?

Solução: Seja C a abreviação de cara e K a de coroa, note que $CCKKK$ é uma das possíveis soluções do problema acima, assim como KCCKK. Observe para contar quantas maneiras distintas podemos organizar as moedas basta utilizar a permutação de 5 elementos com 3 repetições da letra K e duas repetições da letra C.

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Proposta de atividade 8: Praticando permutação com repetição.

Problema 23: Quantos anagramas existem da palavra BANANA.

a) Que começam com B.

b) Que começam com A.

c) Total de anagramas sem restrição.

Problema 24: Em um torneio de futsal um time obteve 7 vitórias, 4 empates e 2 derrotas, nas 13 partidas disputadas. De quantas maneiras distintas esses resultados podem ter ocorrido?

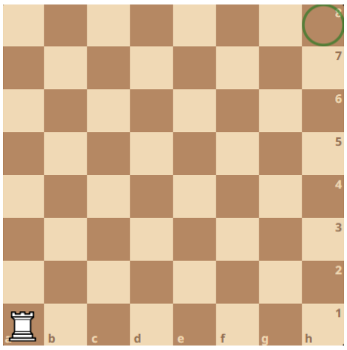
Problema 25: Uma moeda é lançada 10 vezes. Quantas sequências de caras e coroas existem, com 5 caras e 5 coroas?

Problema 26: Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 2 amarelas. Elas são extraídas uma a uma sem reposição. Quantas sequências de cores podemos observar?

Problema 27: João realizou uma prova objetiva na auto escola, essa prova era composta de 15 questões envolvendo V ou F, de quantas maneiras distintas teremos dez respostas V e cinco respostas F?

Problema 28: Em um jogo de xadrez, uma torre das peças brancas está localizada na casa a1, de quantos modos distintos é possível mover a torre para a casa h8 de modo que ela só pode fazer movimentos para cima e para a direita?

Figura 4.39: Problema da torre



Fonte: Elaborada pelo autor.

Combinação

Iniciemos os estudos de combinações simples com o problema introdutório a seguir.

Problema introdutório: De quantos modos podemos selecionar 3 livros distintos entre 5 livros distintos de matemática?

Solução: Cada coleção de 3 livros é chamada uma combinação simples dos 5 livros. Defina os 5 livros como: livro A, livro B, livro C, livro D e livro E. As combinações simples de 3 livros são: {A, B, C}, {A, B, D}, {A, B, E}, {A, C, D}, {A, C, E}, {A, D, E}, {B, C, D}, {B, C, E}, {B, D, E} e {C, D, E}, totalizando 10 combinações distintas. Note que, na enumeração das combinações temos {A, B, C} = {B, C, A}, pois a ordem das escolhas não altera o fato de ao final ter os três livros.

De modo geral, para resolver problemas de combinação simples de n objetos, visando selecionar p objetos, basta notar que, selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos (os selecionados) e um grupo de $(n-p)$ objetos (os não selecionados).

Podemos calcular uma combinação simples de n elementos, tomados p a p, pela seguinte fórmula

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Observação 9: Alguns autores utilizam outro tipo de notação para denotar uma combinação simples, conforme apresentada a seguir

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemplo 27: Deseja-se formar um grupo de três membros e dispõe-se de nove funcionários. Quantos grupos distintos podem ser formados?

Solução: Note que cada grupo, é um subconjunto de três elementos (pois em cada grupo não importa a ordem dos elementos). Logo, o número de grupos é:

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{3!\cdot 6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2} = 84 \text{ grupos distintos.}$$

Exemplo 28: Com 4 homens e 3 mulheres, quantos grupos de 4 pessoas, com exatamente 2 homens, podem ser formadas?

Solução: Para formar um grupo devemos escolher 2 dos homens e 2 das mulheres. Assim, temos duas decisões a serem tomadas.

D1: Escolha de 2 homens dentre os 4.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6.$$

D2: Escolha de 2 mulheres dentre as 3.

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3.$$

Pelo PFC, temos $6 \times 3 = 18$ opções de grupos a serem formados.

Proposta de atividade 9: Praticando combinações simples.

Problema 29: Em uma reunião social, é tradição que se inicie com uma saudação geral entre os envolvidos, haviam 12 pessoas na sala, cada pessoa cumprimentou todas as outras uma única vez, sabendo disso, quantos apertos de mão houve?

Problema 30: Um time de futebol de salão deve ser escalado a partir de um conjunto de 12 jogadores, dentre os quais, apenas um é goleiro. Sabendo que um time de futsal é composto por quatro jogadores e um goleiro, de quantas formas distintas é possível fazer a escalação desse time?

Problema 31: Num grupo de 5 homens e 6 mulheres. De quantas formas:

a) podemos formar um grupo de 4 pessoas?

b) podemos formar um grupo de 6 pessoas de modo que haja três homens e três mulher na mesma comissão?

Problema 32: Uma urna contém 4 bolas vermelhas e 5 brancas. De quantas formas podemos extrair 3 bolas, sem reposição e sem levar em conta a ordem na extração, de modo que:

a) as três sejam vermelhas?

b) as três sejam brancas?

c) uma seja vermelha e as outras sejam brancas?

Problema 33: Um grupo consta de 20 pessoas, das quais 5 matemáticos. De quantas formas podemos formar grupos de 10 pessoas de modo que:

a) nenhum membro seja matemático?

b) todos os matemáticos participem do grupo?

c) haja exatamente um matemático no grupo?

4.9 Semanas 18, 19 e 20 – Proposta de produto final da disciplina eletiva

Essas semanas serão destinadas à construção do produto final da disciplina eletiva "Matemática Através do Xadrez". Como sugestão deixamos a proposta da construção de um jogo de xadrez gigante, para exposição de alguns desafios e até mesmo para ser utilizado em alguma partida de exibição.

Construção do xadrez gigante

Material utilizado: Régua, compasso, tesoura, cola branca, jornal velho, lixa, tinta guache, tnt(tecido), palitos de churrasco e caixas de papelão.

A construção das peças vai se basear no empilhamento de círculos de papelão fixados com cola branca, o palito de churrasco servirá para reforçar a estrutura das peças, este será fixado ao meio delas.

Figura 4.40: Peça de papelão

Fonte: (ESPERANÇA; PREDEBON; SANTINI, 2021, p. 78)

Para melhorar a estética as peças, podem ser adicionadas a elas algumas folhas de papelão na vertical, no caso do cavalo, nos detalhes do topo das torres, na cruz do rei, no topo da rainha, dentre outras. Para dar acabamento, os alunos podem fazer um revestimento de jornal nas peças e lixá-las para que fiquem com superfície lisa. A estética e o tamanho das peças ficam a critério dos estudantes, dependendo também da obtenção de material.

Figura 4.41: Peças em acabamento

Fonte: (ESPERANÇA; PREDEBON; SANTINI, 2021, p. 77)

Após finalizadas, os estudantes podem aplicar sobre as peças a tinta branca e a tinta preta. O tabuleiro pode ser feito utilizando tnt de diferentes cores para dar a base e branco com preto para representar as casas. Outra sugestão para a construção do tabuleiro é a utilização de retalhos costurados.

Figura 4.42: Jogo de xadrez gigante

Fonte: (ESPERANÇA; PREDEBON; SANTINI, 2021, p. 79)

Conforme Esperança, Predebon e Santini (2021), a criação de um xadrez em tamanho gigante pode proporcionar aos alunos a exploração da matemática envolvida no processo de construção, como técnicas de ampliação, processo de medida, capacidade de resolução de problemas, planejamento, execução, raciocínio lógico, dentre outras.

Essa prática também pode proporcionar a interação dos estudantes, além de contribuir para o meio ambiente fazendo uso da reutilização de caixas de papelão e jornais velhos. Ela pode também servir como recurso pedagógico para atividades futuras, podendo ser implementada em diversas atividades e eventos escolares.

5. Considerações finais

Espera-se que a proposta de disciplina eletiva sugerida provoque o interesse dos estudantes, ao trazer metodologias que permitam o ensino de matemática de forma mais dinâmica, onde os alunos atuam como protagonistas na construção do conhecimento.

Acredita-se que o objetivo principal deste trabalho: Desenvolver uma proposta de disciplina eletiva com material de apoio, baseada na utilização do xadrez como recurso didático para o ensino de matemática, contribuindo para os docentes que atuam no Novo Ensino Médio, foi alcançado a partir da seção 4 deste trabalho.

A disciplina eletiva proposta neste trabalho será submetida para que seja inserida no Catálogo de disciplinas Eletivas da SEDUC, e assim possa ser aplicada nas escolas públicas do estado do Ceará.

Espera-se que sejam desenvolvidos artigos para publicação em revistas, e até mesmo um projeto maior, que será iniciado pelo aperfeiçoamento da sequência didática da disciplina eletiva proposta seguido da aplicação da disciplina eletiva em algumas escolas da CREDE 15, com finalidade de observar o desenvolvimento do rendimento dos alunos na disciplina de matemática.

Referências

ALMEIDA, José Wantuir Queiroz de. **O jogo de xadrez e a educação matemática: como e onde no ambiente escolar**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

ANASTASIOU, L. G. C. **Metodologia de Ensino na Universidade Brasileira: elementos de uma trajetória**. Campinas: Papirus, 2001.

ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE EDUCADORES CATÓLICOS (ANEC). **Guia de implantação do Novo Ensino Médio**. [S.l.: s.n.], 2021. Disponível em: <https://anec.org.br/wp-content/uploads/2021/04/Guia-de-implantacao-do-Novo-Ensino-Medio.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2025.

AZEVEDO, N. de M. Investigações matemáticas na sala de aula dos autores: João Pedro da Ponte; Joana Brocardo e Hélia Oliveira. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 7, n. 2, p. 303–307, 2020. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/47634>.

BEZERRA, Renata Camacho; ZANELLA, Ildemar André. O xadrez: um recurso metodológico facilitador do processo de ensino e aprendizagem da matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 4, n. 2, p. 145–158, 2010. Disponível em: <https://erevista.unioeste.br/index.php/ideacao/article/view/3952>. Acesso em: 21 mar. 2025.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio**. 1. ed. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/cne/bncc_ensino_medio.pdf. Acesso em: 31 mar. 2025.

________. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília: Ministério da Educação, 2017.

________. **Decreto nº 5.154, de 23 de julho de 2004. Estabelece as diretrizes e bases da organização da educação profissional no Brasil**. [S.l.: s.n.], 2004. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 jul. 2004. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2004/decreto/d5154.htm>. Acesso em: 30 mar. 2025.

BRASIL. **Histórico do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem)**. [S.l.: s.n.], 2020. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – Inep, de 09 de setembro de 2020. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/historico>. Acesso em: 7 mai. 2025.

________. **Lei nº 11.494, de 20 de junho de 2007. Institui o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação – Fundeb e dá outras providências**. [S.l.: s.n.], 2007. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 20 jun. 2007. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2007/lei/l11494.htm>. Acesso em: 30 mar. 2025.

________. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Altera a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, para dispor sobre a reorganização do ensino médio**. [S.l.: s.n.], 2017. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 16 fev. 2017. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm>. Acesso em: 30 mar. 2025.

________. **Lei nº 14.945, de 31 de julho de 2024. Altera a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), e dá outras providências**. [S.l.: s.n.], 2024. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2023-2026/2024/lei/L14945.htm>. Acesso em: 31 mar. 2025.

________. **Portaria INEP nº 109, de 27/05/2009. Estabelece a sistemática para a realização do Exame Nacional do Ensino Médio no exercício de 2009 (Enem/2009)**. [S.l.: s.n.], 2009. Brasília, 27 maio 2009. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/legislacao/2009/portaria_enem2009_%203.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2025.

________. **Recomendações e Orientações para Elaboração e Arquitetura Curricular dos Itinerários Formativos**. [S.l.: s.n.], 2019. Brasília.

________. **Resolução CNE/CEB nº 3, de 21 de novembro de 2018. Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. [S.l.: s.n.], 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file>. Acesso em: 31 mar. 2025.

BUENO JUNIOR, Jair Antônio. **O tabuleiro de xadrez no ensino de matemática**. 2017. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 56 f. Curso de Matemática, Estatística e Computação Científica.

CÂMARA DOS DEPUTADOS. **Projeto de Lei nº 6840, de 2013. Altera a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, para dispor sobre a organização dos currículos do ensino médio e a jornada escolar**. [S.l.: s.n.], 2013. Disponível em: <https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/prop_mostrarintegra?codteor=1200428&filename=PL%206840/2013>. Acesso em: 31 mar. 2025.

CAMINHA, Antonio Muniz Neto. **Geometria**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022. P. 474.

CASTRO, Celso. Uma história cultural do xadrez. **Cadernos de Teoria da Comunicação**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 2, p. 3–12, 1994.

CASTRO E SILVA, Jorge Luiz de; FERNANDES, Maria Wilda; ALMEIDA, Rosa Lívia Freitas de. **Matemática: Estatística e Probabilidade**. 3. ed. Fortaleza: Uece, 2015. P. 128. Acesso em: 20 maio 2025. Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/554261/2/Livro%20Estatistica%20e%20Probabilidade%20.pdf>.

CEARÁ, Secretaria da Educação. **Catálogo de Unidades Curriculares Eletivas 2023**. Fortaleza: Seduc-CE, 2023. Acesso em: 26 maio 2025. Disponível em: <https://www.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/37/2023/03/catalogo_unidades_curriculares_eletivas_2023.pdf>.

CHESS.COM. **Todos os campeões mundiais de xadrez**. dez 2024. Disponível em: <https://www.chess.com/pt-BR/blog/CheckmateDiario/todos-os-campeoes-mundiais-de-xadrez>. Acesso em: 3 out. 2025.

________. **Xeque**. Acesso em: 12 maio 2025. 2025. Disponível em: <https://www.chess.com/pt-BR/terms/xeque-xadrez>. Acesso em: 12 mai. 2025.

CIESLAK, Igor de Albuquerque; MOURÃO, Keila Renata Moreira; PAIXÃO, Antônio Jorge Paraense da. Gamificação e educação: conceituação, estado da arte e agenda de pesquisa. **Revista de Educação, Ciência e Tecnologia**, v. 9, n. 1, p. 1–20, 2023. Acesso em: 6 maio 2025. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/tear/article/view/3636>.

CONGRESSO NACIONAL. **Medida Provisória nº 746, de 22 de setembro de 2016. Reforma do ensino médio**. [S.l.: s.n.], 2016. Disponível em: <https://www.congressonacional.leg.br/materias/medidasprovisorias/-/mpv/126992>. Acesso em: 31 mar. 2025.

D'AMBROSIO, B. S. Como Ensinar Matemática Hoje? **Temas e Debates**, Brasília, v. 2, n. 2, p. 15–19, 1989.

DAHM, Francine. **Área e Perímetro de Figuras Geométricas Planas: Percepções e Criações através de Malha Quadriculada e o Software GeoGebra**. 2019. F. 192. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

DCRC. **Diretrizes Curriculares da Rede Estadual de Ensino do Estado do Ceará**. [S.l.: s.n.], 2021. Disponível em: https://www.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/37/2022/01/dcrc_completo_v14_09_2021.pdf. Acesso em: 31 mar. 2025.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. P. 468.

EFREMOVA, Lyudmila Alekseevna. **Desenhamos no plano de coordenadas**. Acesso em: 23 jan. 2025. 2011. Disponível em: <https://ludmilaefremov.blogspot.com/2011/04/blog-post_4396.html>.

ESPERANÇA, Antonio Cesar dos Santos; PREDEBON, Eduardo Angonesi; SANTINI, Paulo Henrique. Clube de Xadrez do IFRS Campus Erechim. **Revista Viver IFRS**, v. 9, n. 9, p. 76–80, 2021. Acesso em: 25 fev. 2025. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/ViverIFRS/article/view/4668>.

FERREIRA, Sérgio Eduardo; SILVA, Lázaro Fernando Rodrigues. As potencialidades do xadrez para apoiar o ensino da matemática. In: ANAIS do 3º Congresso Internacional de Educação Matemática e Tecnologias. [S.l.: s.n.], 2012. P. 209–218. Disponível em: <https://www.anais.ueg.br/index.php/jaueg/article/view/6421>. Acesso em: 21 mar. 2025.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 25. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GOMES, Matheus Honorato do Nascimento. **Disciplinas Eletivas no Ensino Médio: O que pensam os professores?** 2023. TCC (Graduação) – Departamento de Biologia, Fortaleza. Curso de Licenciatura em Ciências Biológicas. 58 f. Acesso em: 08 abr. 2025. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/73597/3/2023_tcc_mhngomes.pdf>.

GÓMEZ, Jorge Joaquín Delgado; FRENSEL, Katia Rosenvald; SANTOS CRISSAFF, Lhaylla dos. **Geometria Analítica: Coleção PROFMAT**. 2. ed. São Paulo: SBM, 2017. P. 373.

GOVERNO DO ESTADO DO CEARÁ, Secretaria da Educação (SEDUC) / CED. **Eletivas**. 2025. Disponível em: <https://www.ced.seduc.ce.gov.br/apoio-aos-estudos-domiciliares/eemti/eletivas/>. Acesso em: 3 out. 2025.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. P. 212.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos funções**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. P. 420.

________. **Fundamentos de matemática elementar: Geometria analítica**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013. P. 324. Acesso em: 09 maio 2025. Disponível em: <https://barbosadejesu.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/09/fundamentos-da-matematica-elementar-7-1.pdf>.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. **Fundamentos de Matemática Elementar: Matemática Comercial, Matemática Financeira, Estatística Descritiva**. 2. ed. São Paulo: Atual, 2013. P. 260.

KASPAROV, Garry. **Aprenda xadrez com Garry Kasparov**. Rio de Janeiro: Ediouro, 2005. P. 128.

________.________. Rio de Janeiro: Ediouro, 2005. P. 128.

KOBILL, João Otávio; CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de. Jogo de xadrez e aprendizagem da matemática. In: PARANÁ. SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO. SUPERINTENDÊNCIA DE EDUCAÇÃO. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, 2012. Curitiba: SEED/PR, 2014. v. 1. (Cadernos PDE).

LASKER, Edward. **História do xadrez**. 2. ed. São Paulo: IBRASA, 1999. Tradução de Aydano Arruda.

LICHESS. **Lichess: Free Online Chess**. Acesso em: 10 set. 2025. 2025. Disponível em: <https://lichess.org/>.

LOVATO, Luís Fabrício; MICHELLOTI, Ângela; LORETO, Elgion Lúcio Silva. Metodologias ativas de aprendizagem: uma breve revisão. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 20, n. 2, 2018.

MARTINS, Micaela; MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. Os desafios da abordagem exploratória no ensino da matemática: aprendizagens de duas futuras professoras através do estudo de aula. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 35, n. 69, p. 512–536, 2021. DOI: 10.1590/1980-4415v35n69a16. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a16>.

MENDES, L. R. **A Gamificação como estratégia de ensino: a percepção de professores de matemática**. 2019. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. 4. ed. São Paulo: SBM, 2023. P. 321.

NETO, Hélio. **Manual de Xadrez**. Acesso em: 11 fev. 2025. 2023. Disponível em: <https://archive.org/details/manual-de-xadrez-2023-pdf-1compressed_202401/page/2/mode/2up>. Acesso em: 11 fev. 2025.

NEVES, Flávio de Lima das. **Xadrez e análise combinatória: a matemática do jogo**. 2023. Trabalho de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Castanhal. Orientador: Renato Germano Reis Nunes. 42 f. Faculdade de Matemática, Campus Universitário de Castanhal.

OLIVEIRA, Marcelo de Sousa. Uma reflexão sobre a ideia de superação do ensino tradicional na educação matemática: a dicotomia entre a abordagem clássica e abordagens inovadoras em foco. **Revista Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 57–75, 2019.

PALLESI, D. M. **Percepções dos Estudantes do Sexto Ano do Ensino Fundamental sobre a Aprendizagem Matemática por meio de Estratégias Gamificadas e dos Games**. 2021. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Paraná, Curitiba. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

PROFMAT. **Dissertações do PROFMAT**. Acesso em: 5 maio 2025. 2025. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?aluno=&titulo=eletiva&polo=>.

ROCHA, Wesley Rodrigues. **O jogo e o xadrez: Entre teorias e a história**. 2009. Dissertação (Mestrado) – Universidade Católica de Goiás, Goiânia. Curso de História, 80 f.

SOARES, Carlos Pereira. **O uso do xadrez como mediador na educação matemática**. 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho. Curso de Educação Escolar, Departamento de Ciências da Educação. 145 f. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/294854165.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2025.

SOUSA, Juliano de. **O XADREZ EM XEQUE – UMA ANÁLISE SOCIOLÓGICA DA “HISTÓRIA ESPORTIVA” DA MODALIDADE**. 2010. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Paraná, Curitiba. Curso de Educação Física, Educação de Educação Física. Disponível em:

<https://acervodigital.ufpr.br/xmlui/bitstream/handle/1884/25008/Dissertacao%20%20versao%20biblioteca.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 11 mar. 2025.

TABOSA, Ricardo Jorge Gonçalves; COSTA, Alba Lúcia Nunes Gomes da. O XADREZ COMO FERRAMENTA DIDÁTICO–PEDAGÓGICA NA ESCOLA MUNICIPAL DE CUMARU – PE. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação - REASE**, São Paulo, v. 9, n. 6, p. 137–155, jun. 2023.

TEIXEIRA, R. d. F. B. et al. Concepções de itinerários formativos a partir da Resolução CNE/CEB nº 06/2012 e da Lei nº 13.415/2017. **Educação no Século XXI - Volume 28: Gestão e Políticas Públicas**, p. 59, 2021.

TENÓRIO, Paulo Roberto Linhares. **As contribuições do xadrez no aprendizado da matemática em alunos do ensino médio: um estudo de caso**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza. 79 f. Curso de Graduação em Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia (CCT).

VULCÃO, Danivaldo Guedes. **Uma sequência didática sobre análise combinatória com a utilização do jogo de xadrez**. 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Abaetetuba.

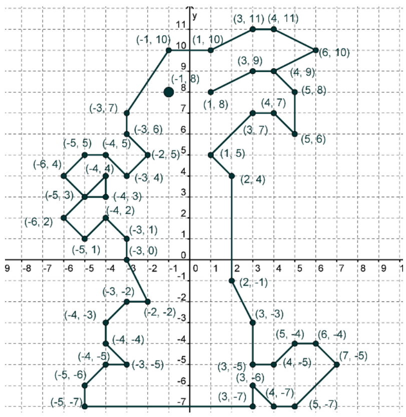
Apêndice A - Gabaritos

A seguir, serão apresentados os gabaritos da proposta de avaliação e das propostas de atividades apresentadas na seção 4 deste trabalho.

Gabarito das propostas de atividades

1. Figura 1.

Figura 1: Gabarito



Fonte: Efremova (2011)

2. Quadrado = 24m; retângulo = 26 m; paralelogramo = 22 m.

3. Losango = 24; trapézio = 40; triângulo = 15.

4. Quadrado = 6; retângulo = 4; trapézio = 3.

5. a) Quantitativa.

   b) Quantitativa.

   c) Qualitativa.

   d) Qualitativa.

   e) Qualitativa.

   f) Quantitativa.

   g) Qualitativa.

h) Qualitativa.

6. a) 3.

   b)Resposta pessoal.

7. 62%.

8. a) 50%.

   b)50%.

   c) $\frac{1}{3}$.

9. a) 50%.

   b) $\frac{1}{6}$.

10. 25%.

11. 50%.

12. 24.

13. 6.

14. 40.

15. 56.

16. a) 180.

    b) 300.

    c) 144.

17. 6840.

18. 48.

19. 20160.

20. 336.

21. 1728.

22. a) 24.

    b) 120.

    c) 6.

23. a) 10.

    b)15.

    c) 60.

24. 25740.

25. 252.

26. 10.

27. 3003.

28. 3432.

29. 66.

30. 330.

31. a) 330.

    b) 200.

32. a) 4.

    b) 10.

    c) 30.

33. a) 2002.

    b) 2002.

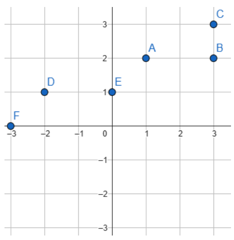
    c) 5005.

Gabarito da proposta de avaliação

1. B7, c3, d5, g4.

2. Figura 2.

Figura 2: Gabarito questão 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

3. A.
4. Média = 7,4 anos; Moda = 3 anos; Mediana = 6 anos.
5. Losango = 40; Trapézio = 18; Triângulo = 24.
6. 4.