



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL**

RONIVON ALVES

**UM ESTUDO SOBRE OS TRIÂNGULOS: PROPRIEDADES E
RELAÇÕES FUNDAMENTAIS**

JUAZEIRO DO NORTE

2025

RONIVON ALVES

UM ESTUDO SOBRE OS TRIÂNGULOS: PROPRIEDADES E RELAÇÕES
FUNDAMENTAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis
Benjamim Filho

JUAZEIRO DO NORTE

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

A47e Alves, Ronivon.

Um estudo sobre os triângulos: propriedades e relações fundamentais/ Ronivon Alves.
– 2025. 112 f. (Inclui bibliografia, p.110-112).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e
Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do
Norte, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho.

1. Geometria. 2. Triângulos. 3. Relacionador. 4. Ensino de Matemática. I. Filho, Francisco de Assis Benjamim - orientador. II. Título.

CDD 516

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

RONIVON ALVES

UM ESTUDO SOBRE OS TRIÂNGULOS: PROPRIEDADES E RELAÇÕES
FUNDAMENTAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 22 de agosto de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho (Orientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho aos meus pais, Zuleica e Francisco (in memoriam), cuja inspiração e motivação me impulsionaram a buscar este diploma, ainda que não possa mais entregá-lo a eles.

Agradecimentos

Uma cadeia de fatores e um contingente de pessoas contribuíram para que eu chegasse até aqui, e sou profundamente grato a cada um que fez parte dessa jornada, contribuindo com uma parcela da minha formação.

Sou grato aos meus pais, *in memoriam*, pelo incentivo e dedicação aos meus estudos. Aos professores que marcaram minha trajetória, especialmente ao professor Clóvis Barbosa, que, no ensino fundamental, despertou em mim o encanto pela matemática.

Ao longo dos anos, precisei morar com pessoas especiais que me acolheram de coração aberto. A eles, meu mais sincero reconhecimento: obrigado, vó Zefinha e vô Antônio (*in memoriam*); obrigado, Zé de Neto e Aparecida; obrigado, tia Euride (*in memoriam*) e tio Joaquim (*in memoriam*); obrigado, tia Cleide e Jota Vieira (*in memoriam*). Além de abrirem suas portas para mim, sempre estiveram dispostos a ajudar-me.

Minha querida irmã, Raiane, merece um agradecimento especial por sempre vibrar com minhas conquistas e estar presente em todas as batalhas.

À minha amada esposa, Rayla, minha eterna gratidão. Em tantos momentos, ela cuidou sozinha da nossa filha, Alice, para que eu pudesse estudar, sempre me incentivando, torcendo e comemorando cada vitória comigo. Com todo amor e dedicação, fazia o possível para que eu seguisse em frente, e até nos dias mais difíceis ainda encontrava tempo para me trazer um lanche.

Sou grato também à minha amiga Alexsandra, por sua positividade constante e por sempre me lembrar que, mesmo quando não parecia, tudo já estava dando certo. Aos colegas de curso, que compartilharam angústias, desafios e aprendizados, meu reconhecimento. Com o apoio mútuo, tudo se tornou mais leve. Um agradecimento especial à Daniela Morais, cuja experiência e disponibilidade foram fundamentais para a elaboração do abstract deste trabalho.

Aos professores do ProfMat, minha mais profunda gratidão. Além de serem profissionais de excelência, são seres humanos incríveis. Obrigado, Francisco Chaves, Érica Boizan, Valdinês Leite, Vicente Helano e Valdir Ferreira. Um reconhecimento especial ao meu professor e orientador, Francisco de Assis, cujo incentivo à publi-

cação abriu portas para os estudos que culminaram neste trabalho. Obrigado pelo tempo dedicado, pela paciência e por todo apoio ao longo do percurso.

Registro também meu reconhecimento à Secretaria Municipal de Educação de São José de Piranhas-PB, na pessoa da secretária Fabiana Inácio, pela concessão da licença para estudos. Sem essa oportunidade, esse sonho teria sido muito mais difícil de realizar.

Por fim, um agradecimento aos meus companheiros de viagem, Fábio, Fabiano e Danilo, que tornaram as longas jornadas a Juazeiro, no último ano do mestrado, mais leves e descontraídas. Entre conversas, risadas e desafios compartilhados, cada viagem se tornou parte essencial dessa caminhada.

Este trabalho é a materialização de um sonho que não foi construído sozinho. Cada apoio, cada palavra de incentivo e cada gesto de solidariedade foram essenciais para que eu pudesse chegar até aqui. Carrego comigo o aprendizado de que o conhecimento é um patrimônio valioso, mas que se torna ainda mais significativo quando compartilhado. A todos que fizeram parte dessa caminhada, meu eterno agradecimento. Que essa conquista não seja um ponto final, mas apenas mais um passo rumo a novos desafios e descobertas.

RESUMO

Desde a antiguidade aos tempos contemporâneos os triângulos despertam curiosidade e relevante interesse pela busca de relações matemáticas e propriedades inerentes a esse polígono. Como o próprio nome sugere, essa dissertação tem por objetivo estudar os triângulos e as principais relações existentes entre os seus elementos, servindo de fonte de aprofundamento acerca do tema para estudantes e professores da educação básica. Inicialmente faremos um levantamento sobre como o tema tem sido abordado em livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) e em seguida um estudo teórico acerca do assunto. Notamos que ao explorar tal temática nos deparamos com uma expressão recorrente, que neste estudo a definimos como relacionador triangular. Definir tal expressão, nos possibilita reescrever equações famosas como a de Heron com uma outra aparência e tornar expressões envolvendo os elementos triangulares mais simples e práticas de serem manipuladas, como, de fato, veremos no decorrer deste trabalho.

Palavras-chave: Geometria. Triângulos. Relacionador.

ABSTRACT

From ancient to modern times, triangles have sparked curiosity and significant interest in the search for mathematical relationships and inherent properties of that polygon. As its title suggests, this study aims to investigate triangles and the main relationships among their elements, serving as a resource for deeper exploration of the topic by students and teachers in basic education. Initially, we surveyed how the topic has been addressed in textbooks approved by the National Textbook Program (PNLD) and then conducted a theoretical study on the subject. We observed that, in exploring this theme, a recurring expression emerges which, in this study, we define as the triangular relational operator. Defining such expression allows us to rewrite well-known equations, such as Heron's formula, in a different form and to simplify expressions involving triangular elements, making them easier and more practical to manipulate, as we demonstrate throughout this study.

Keywords: Geometry. Triangle. Relational Operator.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1	Introdução 1
2	A geometria plana no contexto escolar 4
2.1	O ensino da geometria plana no ensino médio 4
2.2	Análise dos livros didáticos sobre triângulos 6
3	Fundamentos Teóricos 12
3.1	Definições e ângulos do triângulo 12
3.2	Congruência e semelhança de triângulos 16
3.3	Cevianas de um triângulo 25
3.4	Relações métricas e existência de um triângulo 29
4	Relacionador triangular 42
4.1	Definição e propriedades básicas 42
4.2	Interpretações geométricas e analíticas 46
4.3	Semelhança e deslocamento de vértices 53
5	Altura e relações trigonométricas no triângulo 55
6	Medida de uma ceviana de um triângulo 60
6.1	Medianas 64
6.2	Bissetrizes internas 69
6.3	Mediatrizes e circuncentro 80
6.4	Relações métricas e área do triângulo 86
7	Exercícios resolvidos 90
7.1	Exercícios 90
7.2	Soluções 93
Referências Bibliográficas	105

Lista de Figuras

1	Capas das oito obras analisadas nesta subseção.	7
2	Ângulos internos de um triângulo.	13
3	Ângulos externos de um triângulo.	14
4	Soma dos ângulos internos de um triângulo.	15
5	Teorema do ângulo externo.	16
6	Triângulos congruentes.	17
7	1º Caso de congruência: LAL.	18
8	2º Caso de congruência: ALA.	19
9	3º Caso de congruência: LLL.	20
10	Triângulos semelhantes.	21
11	Triângulos semelhantes pelo Caso LLL.	22
12	Triângulos semelhantes pelo Caso LAL.	23
13	Triângulos semelhantes pelo Caso AA.	24
14	Teorema da bissetriz interna.	26
15	Teorema de Ceva	28
16	O ponto P é interno ao triângulo ABC	28
17	O ponto P é externo ao triângulo ABC	28
18	Teorema de Pitágoras.	30
19	Recíproca do Teorema de Pitágoras (Caso 1).	31
20	Recíproca do Teorema de Pitágoras (Caso 2).	31
21	Razões trigonométricas.	32
22	Lei dos Cossenos: 1º caso.	34
23	Lei dos Cossenos: 2º caso.	35
24	Lei dos Cossenos: 3º Caso.	36
25	Lei dos senos: 1º caso.	37
26	Lei dos senos: 2º caso.	38
27	Lei dos senos: 3º caso.	39
28	Desigualdade triangular	40
29	Relacionador triangular e projeção ortogonal entre lados do triângulo.	46
30	O relacionador triangular e o produto interno de vetores no plano	48
31	Projeção ortogonal do segmento \overline{AB} sobre a reta r	49

32	Projeção ortogonal do lado \overline{CA} sobre o lado \overline{CB} (1º caso)	50
33	Projeção ortogonal do lado \overline{CA} sobre o lado \overline{CB} (2º caso)	51
34	Deslocamentos do ponto C' sobre a reta suporte do lado \overline{BC}	55
35	Altura \overline{AH} do triângulo ABC	56
36	Distância entre o vértice A e o ortocentro O de um triângulo ABC .	59
37	Medida de uma ceviana.	61
38	Baricentro G do triângulo ABC	67
39	2º Teorema de Booth	68
40	Medida da bissetriz interna de um triângulo.	69
41	Cosseno, seno e tangente do ângulo metade do triângulo.	72
42	Distância de um vértice do triângulo ao seu incentro.	76
43	Ponto sobre a bissetriz.	77
44	Ponto equidistante de dois lados de um triângulo.	78
45	Medida do raio do círculo inscrito em um triângulo.	79
46	Mediatrizes internas de um triângulo.	81
47	Medida de uma mediatriz interna de um triângulo.	83

Lista de Tabelas

1	O estudo dos triângulos em coleções de matemática para o ensino médio	10
---	---	----

1 Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)(Ministério da Educação, 2017) preconiza um estudo aprofundado nas relações envolvendo triângulos, principalmente no ensino médio, visto que essa temática é muito presente em diversas áreas do conhecimento e em muitas situações cotidianas, a citar, nas artes, arquitetura, agrimensura, etc. Nesse sentido, podemos fomentar a importância de um estudo mais detalhado no que concerne aos elementos triangulares, já que apesar de haver grande volume de materiais abordando o tema, ainda há relevantes assuntos a serem investigados, muitos dos quais, relativamente triviais, que podem ser explorados, inclusive na educação básica.

Os livros didáticos, ano após ano, trazem os mesmos tópicos relacionados aos triângulos, pouco ou nada se acrescenta. Em uma entrevista à (Associação Nacional dos Professores de Matemática, 2016) (ANPMat), quando perguntado sobre suas obras para o ensino básico o renomado matemático brasileiro Elon Lages Lima (2015) respondeu não ter feito nenhum livro voltado para alunos do ensino básico, justificando que havia um longo período que não lecionava para esse público e faz uma crítica ao ciclo desgastante dos professores que vêm e vão mas sempre baseiam suas aulas apenas nos livros didáticos, que por sua vez baseiam-se na experiência do autor.

Sem sombra de dúvidas, o livro didático é uma importante fonte de estudo para o aluno, porém não é uma diretriz ou base única de estudo para o professor elaborar suas aulas, nesse sentido, cabe ao professor buscar outras referências, para que assim seja capaz de levar algo a mais para o seu público e/ou ter maior domínio de conteúdo. Sob essa perspectiva, livros paradidáticos, periódicos, artigos acadêmicos ou dissertações de mestrado como esta são uma boa opção para diversificar as perspectivas sob as quais se aborda determinados assuntos em sala de aula e encontrar inspiração para aulas dinâmicas e com maior ressignificação dos objetos de estudo.

Por que estudar matemática? Em que vou usar isso na minha vida? Quem nunca perguntou isso, provavelmente já ouviu alguém perguntando. Obviamente, responder a essas perguntas renderiam um livro completo, mas de forma sucinta a resposta é: Porque somos seres humanos. Quando se descobre a beleza da matemática perguntas como essas se tornam obsoletas e triviais. Bem sabemos que graças as descobertas/criações matemáticas houve grandes avanços tecnocientíficos, mas mesmo que não houvesse uma relação intrínseca entre Matemática e progresso (o que nem de longe é o caso) ainda assim essa ciência nos encantaria. Nesse sentido, o grande desafio do professor é mostrar que aprender Matemática vai muito além de meras memorizações e que ela nos dá a possibilidade de treinarmos o nosso cérebro

para sermos solucionadores de problemas, sejam eles abstratos ou concretos, afinal é isso que nos distingue dos demais seres vivos terrestres.

O êxito de um professor de Matemática deve ser medido pela quantidade de alunos que, ao longo da vida, ele ensinou a pensar por si mesmos e não pelo volume de fórmulas que os fez memorizar. Porque as fórmulas decoradas podem ser esquecidas ou empregadas erroneamente mas uma pessoa que tenha entrado pelo caminho lógico-dedutivo jamais o abandonará ou sentir-se-á perplexa diante de uma situação nova. (GARBI, 2010, p. 10)

A geometria, apesar de ser altamente aplicável às situações práticas da sociedade, requer um alto nível de abstração, mas isso não deve ser empecilho para um estudo mais aprofundado e sistemático no ensino básico, muito pelo contrário, afinal a abstração é a essência da Matemática. Os estudantes devem ser capazes de conjecturar por si só e mais que isso, entender de onde vêm as equações que encurtam os nossos cálculos para chegarmos à solução de um problema.

Dentro de uma escola, cada turma é única e somente a experiência do professor e a convivência professor/aluno e demais membros que compõem a escola poderão mostrar os melhores métodos de ensino para se alcançar o número máximo de estudantes dispostos a se dedicar à aprendizagem da Matemática (o que não significa que sempre haverá um método que alcançará a maioria, infelizmente), para tanto a prática adquirida ao longo dos anos é de grande apoio, mas é imprescindível que o professor tenha uma boa “bagagem” teórica e mais que isso, consiga fazer uma transposição didática de acordo com o nível de conhecimento da sua turma.

Vale salientar que a transposição didática é um estudo dentro das teorias da aprendizagem que mostra como acontece uma transformação do conhecimento desde a sua produção científica até chegar aos estudantes do ensino básico, sendo que é o professor que fará a última análise da forma como tais produções científicas serão apresentadas à turma. Com isso, reforço a importância de se ter um bom embasamento teórico do assunto que será ministrado, bem como das formas que tais assuntos podem ser ministrados.

A Teoria da Transposição Didática é uma teoria que envolve a epistemologia da ciência, a teoria cognitiva da ciência, a didática do ensino e teorias sociais para se entender, criar regras e estudar os mecanismos que regem o processo de transformação do conhecimento produzido nas esferas de pesquisa, para o campo acadêmico, deste para os livros didáticos e deste para a sala de aula do ensino básico. (MELLO, 2019, p. 9)

A principal motivação deste trabalho é apresentar a geometria plana dos triângulos e as relações entre seus elementos de forma aprofundada, proporcionando um

material de estudo mais detalhado para alunos e, sobretudo, para professores de Matemática do ensino básico. Essa abordagem se justifica pelo fato de que esses temas costumam ser pouco explorados ou tratados de maneira superficial nessa etapa da educação.

Inicialmente, será realizado um levantamento bibliográfico sobre o ensino de Geometria no Ensino Básico no Brasil, seguido de uma análise das abordagens apresentadas em quatro coleções de Matemática para o Ensino Médio aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD): Matemática em Contextos, de (DANTE; VIANA, 2020b, 2020a); Matemática, de (SOUZA, 2020a, 2020b); Matemática, de (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020, 2020); e Conexões, obra coletiva sob a edição de (LEONARDO, 2020b, 2020a). Ao longo deste trabalho, essas obras serão denominadas, respectivamente, Coleção 1, Coleção 2, Coleção 3 e Coleção 4.

Na sequência, apresenta-se um aprofundamento teórico contendo definições, proposições e teoremas clássicos relacionados aos triângulos, os quais servirão de base para uma abordagem inovadora, incluindo, entre outros, o desenvolvimento de equações para o cálculo de medidas de cevianas notáveis, como altura e bissetriz. Essa abordagem conduz tanto a expressões já conhecidas quanto a resultados pouco explorados, além de outras formulações apresentadas de modo original neste trabalho. Por fim, é disponibilizada uma lista de exercícios acompanhada de suas respectivas soluções, consolidando os conceitos discutidos.

2 A geometria plana no contexto escolar

Esta seção tem como objetivo discutir a presença e o tratamento da geometria plana no ambiente escolar, com ênfase no Ensino Médio. Inicialmente, aborda-se a forma como o ensino da geometria plana é proposto nos documentos oficiais e nas práticas pedagógicas, destacando avanços, desafios e lacunas presentes nesse processo. Em seguida, analisa-se a abordagem adotada em algumas coleções de livros didáticos aprovadas pelo PNLD, considerando de que maneira esses materiais apresentam e desenvolvem os conteúdos de geometria plana, em especial aqueles relacionados ao estudo dos triângulos. Dessa forma, busca-se oferecer um panorama que articula teoria, orientações curriculares e práticas de sala de aula, evidenciando a relevância da geometria plana na formação matemática dos estudantes.

2.1 O ensino da geometria plana no ensino médio

Atualmente, o ensino da Geometria no Brasil está previsto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como uma das cinco unidades temáticas da Matemática, juntamente com Números, Álgebra, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. O documento destaca a importância do pensamento geométrico no desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes.

Embora não contemple todos os objetos de aprendizagem essenciais da Geometria, a BNCC estabelece que o aluno deve ser capaz de desenvolver um raciocínio crítico e atuar como solucionador de problemas. Conforme descrito no documento: “A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (Ministério da Educação, 2017).

Posto isso, o grande desafio é garantir que o conhecimento geométrico formal seja efetivamente consolidado pelos estudantes da educação básica. De acordo com (COSTA, 2020), embora o Brasil tenha avançado significativamente nas pesquisas em Educação Matemática e no ensino da Geometria, esses progressos nem sempre se refletem na prática escolar. Muitas vezes, esse distanciamento ocorre devido a circunstâncias adversas do contexto em que as escolas estão inseridas ou, simplesmente, por lacunas na formação acadêmica dos professores nessa área. Assim,

Diante dessa circunstância, fica devidamente compreendido o motivo desses docentes, quando exercerem sua profissão, em considerarem o ensino de Geometria inconcebível. Isto é, na maior parte dos casos, alegam que não é possível ensinar, com precisão e clareza, o que é desconhecido ou superficial para eles. (COSTA, 2020, p. 130)

Todavia, vale salientar que a formação continuada é essencial para que o docente exerça seu papel de maneira eficaz, contribuindo para a melhoria da educação básica no Brasil. Diante das constantes mudanças nas diretrizes curriculares, dos avanços nas pesquisas em Educação Matemática e do surgimento de novas metodologias de ensino, é fundamental que os professores estejam em permanente atualização.

A formação continuada possibilita a ampliação do repertório pedagógico, o aprimoramento do conhecimento teórico e prático, além do desenvolvimento de estratégias mais dinâmicas e eficazes para o ensino da Geometria e de outros conteúdos matemáticos. Dessa forma, investir na capacitação docente não apenas fortalece a prática pedagógica, mas também impacta diretamente na qualidade da aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, (ARAÚJO, 2014) complementa

Por outro lado, se a formação inicial agregar ao professor conhecimentos técnicos, sólidos conhecimentos básicos e uma boa formação metodológica, mesmo assim esse conjunto de fatores não é suficiente para a prática profissional, a formação continuada torna-se indispensável, pois é uma forma de o professor desenvolver competências de ensino e aprendizagem. (ARAÚJO, 2014, p. 6-7)

Nos últimos anos, observa-se uma melhoria significativa na abordagem da Geometria nos livros didáticos. Enquanto no passado o tema era frequentemente relegado a apêndices ou tratado de forma superficial, atualmente há uma integração mais efetiva com outros conteúdos matemáticos. Essa constatação é confirmada por (TENÓRIO, 2019), ao analisar coleções de livros didáticos publicadas antes e depois da implantação do PNLD. O autor verificou que as obras mais recentes destinam maior espaço e número de capítulos à Geometria, apresentam seções específicas e articulam figuras planas e espaciais, estabelecendo também conexões com a Álgebra. Tais mudanças evidenciam uma evolução na forma como a Geometria vem sendo tratada nos materiais didáticos, tornando-se mais integrada e significativa para o ensino de Matemática.

Mais que isso, muitas coleções dedicam um ou mais volumes exclusivamente ao estudo da Geometria, proporcionando uma exploração mais aprofundada e contextualizada do tema. No entanto, apesar desses avanços, é importante reconhecer que nenhum material didático consegue abranger a totalidade dos conceitos geométricos. Dessa forma, para garantir uma compreensão mais ampla e aprofundada, é essencial que professores e estudantes busquem referências complementares, expandindo o repertório teórico e prático além do que é apresentado nos livros escolares.

Vale destacar que a ausência de determinado tema em um livro didático não o torna, por si só, bom ou ruim. Longe disso, a questão central é que esses materiais não devem ser encarados como a única referência para definir o que deve ser ensinado ou como os conteúdos devem ser abordados em sala de aula. Cabe ao do-

cente, no processo de transposição didática, avaliar a necessidade de complementar o material com outras fontes e estratégias, assegurando uma abordagem mais ampla, contextualizada e significativa para os alunos.

No que se refere ao estudo dos triângulos, o tema é introduzido já na Educação Infantil e percorre toda a Educação Básica. No entanto, conceitos fundamentais abordados de forma elementar nos anos finais do Ensino Fundamental muitas vezes não são devidamente aprofundados ou sequer revisados em diversas coleções didáticas do Ensino Médio. É comum que esses materiais não tragam nem mesmo a definição formal de triângulo ou sua classificação, além de deixarem de abordar temas relevantes e frequentemente cobrados em avaliações externas e olimpíadas, como as cevianas e os pontos notáveis.

Retomando as coleções mencionadas na introdução, analisamos a abordagem do estudo dos triângulos nesses materiais, verificando a profundidade e a abrangência com que o tema é tratado.

2.2 Análise dos livros didáticos sobre triângulos

Examinaremos, nesta subseção, quatro coleções de livros didáticos de Matemática aprovadas pelo PNLD, a saber:

- Coleção 1: *Matemática em Contextos* de (DANTE; VIANA, 2020b, 2020a);
- Coleção 2: *Matemática* de (SOUZA, 2020a, 2020b);
- Coleção 3: *Matemática* de (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020, 2020);
- Coleção 4: *Conexões*, obra coletiva sob a edição de (LEONARDO, 2020b, 2020a).

A análise dessas coleções tem como objetivo exemplificar que, embora os livros didáticos sejam importantes recursos pedagógicos, nem sempre abordam de forma suficiente determinados temas relevantes à formação matemática dos alunos. Dessa forma, busca-se destacar que, conforme o perfil da turma e os objetivos de aprendizagem, o professor pode complementar o material, explorando conteúdos pouco tratados nas obras, a fim de enriquecer o processo de ensino e ampliar a compreensão dos conceitos.

Com o objetivo de facilitar a identificação das obras analisadas, foram incluídas neste trabalho imagens das capas dos livros didáticos examinados na Figura 1. As referidas imagens têm caráter meramente ilustrativo e visam proporcionar ao leitor uma melhor compreensão de quais coleções se tratam, não havendo qualquer finalidade comercial ou de reprodução integral das obras.

Todas essas coleções são estruturadas em volumes temáticos e, para este estudo, serão considerados especificamente os livros dedicados à geometria e à trigonometria, por se mostrarem mais relevantes ao objetivo desta pesquisa.

Figura 1: Capas das oito obras analisadas nesta subseção.



Fonte: Arcevo pessoal do autor.

No que se refere ao tratamento dos triângulos na geometria plana, a análise incidirá sobre a presença e a abordagem dos seguintes tópicos: definições e classificações, relações entre ângulos, relações métricas, cevianas e pontos notáveis, semelhança, relações trigonométricas, cálculo de áreas envolvendo ângulos e a fórmula de Herão.

COLEÇÃO 1:

Definição de triângulo: A coleção define a região triangular com base no conceito de triângulo, utilizando esse termo para tratar do cálculo de área. Apresenta a região triangular como a porção do plano delimitada pelos lados de um triângulo, estabelecendo assim a relação entre a forma geométrica e sua medida de superfície. No entanto, não fornece uma definição explícita de triângulo.

Classificação dos triângulos: A coleção não apresenta uma classificação formal dos triângulos, embora utilize os termos correspondentes nos exercícios. Isso sugere que o autor considera esse conteúdo consolidado nos anos finais do ensino fundamental.

Ângulos internos e externos: Não há um estudo específico sobre os ângulos do triângulo. O tema aparece indiretamente em equações associadas ao ladrilhamento do plano e na abordagem da trigonometria.

Relações métricas: O material aborda as relações métricas no triângulo retângulo, inclusive o Teorema de Pitágoras.

Cevianas e pontos notáveis: O conteúdo não explora esse tema, embora mencione termos como bissetriz e altura do triângulo.

Semelhança de triângulos: A coleção define semelhança de triângulos e razão de semelhança, além de apresentar exemplos e expor os casos de semelhança sem demonstrá-los.

Relações trigonométricas: São abordadas as principais relações trigonométricas, incluindo as Leis dos Senos e dos Cossenos, acompanhadas de suas respectivas demonstrações.

Cálculo de área envolvendo ângulo: Apesar de explorar bem o conceito de área, a coleção não apresenta o cálculo de área de um triângulo utilizando ângulos.

Fórmula de Herão: O material inclui a Fórmula de Herão e disponibiliza links para sua demonstração.

Observa-se que a coleção privilegia relações usuais para o ensino médio, mas deixa em segundo plano definições, classificações e ângulos. Isso pode ser problemático em turmas heterogêneas, nas quais muitos alunos precisam retomar noções formais. Além disso, a ausência de cevianas e pontos notáveis limita a visão estrutural do triângulo. Nesse contexto, o professor tem um espaço importante para complementar com retomadas conceituais e atividades investigativas que articulem propriedades clássicas.

COLEÇÃO 2:

Definição de triângulo: A coleção define inicialmente polígono e, a partir disso, apresenta a definição de triângulo.

Classificação dos triângulos: Não há apresentação formal da classificação dos triângulos.

Ângulos internos e externos: O material não aborda diretamente os ângulos do triângulo, com exceção da abordagem trigonométrica.

Relações métricas: O estudo apresenta as relações métricas no triângulo retângulo, com destaque para o Teorema de Pitágoras.

Cevianas e pontos notáveis: O tema não é abordado.

Semelhança de triângulos: A coleção primeiro define semelhança de polígonos e, em seguida, apresenta os casos de semelhança de triângulos sem demonstrá-los.

Relações trigonométricas: São apresentadas as principais relações trigonométricas, incluindo as Leis dos Senos e dos Cossenos, acompanhadas de suas demonstrações.

Cálculo de área envolvendo ângulo: O material não aborda essa forma de cálculo de área.

Fórmula de Herão: A coleção apresenta a Fórmula de Herão, seguida de um exemplo, mas sem a demonstração.

A coleção traz uma definição formal de triângulo, mas faltam classificações e um estudo sistemático de ângulos. O foco maior em fórmulas e demonstrações trigonométricas pode restringir a aprendizagem a procedimentos algébricos. Para que os alunos desenvolvam intuições geométricas, o professor pode inserir atividades práticas de construção, retomando propriedades elementares e complementando com problemas que exijam argumentação.

COLEÇÃO 3:

Definição de triângulo: A coleção não apresenta uma definição explícita de triângulo.

Classificação dos triângulos: Embora não classifique formalmente os triângulos, utiliza os termos referentes às classificações.

Ângulos internos e externos: O estudo dos ângulos do triângulo não é abordado, exceto no contexto da trigonometria.

Relações métricas: A coleção trata das relações métricas no triângulo retângulo, com destaque para o Teorema de Pitágoras.

Cevianas e pontos notáveis: O tema é abordado superficialmente. A coleção apresenta o Teorema da Bissetriz Interna e sua demonstração.

Semelhança de triângulos: O material fornece uma definição informal de figuras semelhantes e uma definição formal de polígonos semelhantes, além de expor os casos de semelhança de triângulos e de congruência, sem demonstrá-los.

Relações trigonométricas: São abordadas as principais relações trigonométricas, incluindo as Leis do Seno e do Cosseno, com suas respectivas demonstrações.

Cálculo de área envolvendo ângulo: A coleção apresenta o cálculo da área de um triângulo quando são fornecidos dois lados e o ângulo entre eles, trazendo a demonstração e exemplos práticos.

Fórmula de Herão: A Fórmula de Herão é apresentada sem exemplos ou demonstração, mas a coleção disponibiliza um link para uma página externa que oferece essa demonstração.

Esta coleção oferece mais recursos, como a demonstração da bissetriz interna e a dedução da fórmula da área com dois lados e ângulo, o que favorece a aprendizagem significativa. No entanto, a falta de uma abordagem integrada de pontos notáveis e de uma definição formal deixa lacunas. O professor pode usar esse ponto de partida para expandir o estudo de cevianas e explorar conexões com semelhança e áreas.

COLEÇÃO 4:

Definição de triângulo: A coleção não apresenta a definição de triângulo.

Classificação dos triângulos: A classificação dos triângulos não é abordada.

Ângulos internos e externos: A coleção não trata do estudo dos ângulos do triângulo.

Relações métricas: São apresentadas as relações métricas no triângulo retângulo, com grande destaque para o Teorema de Pitágoras.

Cevianas e pontos notáveis: O tema não é abordado.

Semelhança de triângulos: A coleção define semelhança de polígonos e semelhança de triângulos, mas não apresenta explicitamente os casos de semelhança.

Relações trigonométricas: O material cobre as principais relações trigonométricas, incluindo as Leis dos Senos e Cossenos, com demonstrações e exemplos.

Cálculo de área envolvendo ângulo: Apresenta, em um pequeno quadro explicativo, o cálculo da área de um triângulo utilizando dois lados e o ângulo entre eles, incluindo sua demonstração.

Fórmula de Herão: A Fórmula de Herão é mencionada de forma sucinta, sem exemplos ou demonstração.

O tratamento dado é funcional para aplicações diretas, mas com menor densidade conceitual em tópicos estruturantes como ângulos e pontos notáveis. Isso pode levar os alunos a verem a geometria apenas como aplicação de fórmulas. O professor pode complementar com discussões mais conceituais e atividades que evidenciem a interdependência entre definições, ângulos e propriedades clássicas.

ANÁLISE COMPARATIVA DAS COLEÇÕES:

Por fim, podemos sintetizar os resultados desta análise comparativa na Tabela 1.

Tabela 1: O estudo dos triângulos em coleções de matemática para o ensino médio

	Coleção 1	Coleção 2	coleção 3	coleção 4
Definição de triângulo	Não	Sim	Não	Não
Classificação dos triângulos	Não	Não	Não	Não
Ângulos internos e externos	Não	Não	Não	Não
Relações métricas	Sim	Sim	Sim	Sim
Cevianas e pontos notáveis	Não	Não	Não	Não
Semelhança de triângulos	Sim	Sim	Sim	Sim
Relações trigonométricas	Sim	Sim	Sim	Sim
Cálculo de área envolvendo ângulo	Não	Não	Sim	Sim
Fórmula de Herão	Sim	Sim	Sim	Sim

Alguns temas podem parecer triviais para o ensino médio, como a definição de triângulo. No entanto, para uma parcela significativa dos estudantes, uma formu-

lação formal e criteriosa pode não ser tão evidente. Por isso, é essencial que o professor realize um diagnóstico inicial para identificar os conhecimentos prévios da turma sobre o tema.

Observamos que as relações métricas estão presentes em todas as coleções analisadas. Já as cevianas, apesar de serem introduzidas conceitualmente no ensino fundamental, não são revisadas nem aprofundadas nas coleções do ensino médio, mesmo sendo um tema recorrente em vestibulares e avaliações externas.

Quanto à Fórmula de Herão, embora esteja presente em todas as coleções, nenhuma delas apresenta sua demonstração, possivelmente devido à complexidade das manipulações algébricas envolvidas. Mais adiante, proporemos uma equação alternativa para o cálculo da área de um triângulo com base nas medidas de seus lados, acompanhada de uma demonstração acessível a partir do conceito de relacionador triangular.

A tabela deixa evidente que os livros convergem nos pontos centrais (relações métricas, semelhança, trigonometria), mas divergem em profundidade e consistência nos fundamentos (definições, classificações, ângulos e pontos notáveis). Essa escolha editorial não compromete o uso pedagógico das obras, mas exige do professor uma postura ativa de mediação, de modo a complementar conceitos e promover conexões que não aparecem explicitamente nos livros.

Ressaltamos, mais uma vez, que essa análise não tem o objetivo de classificar uma coleção como melhor ou pior, mas sim destacar a importância de o professor diversificar suas fontes de estudo e selecionar os conteúdos de acordo com o perfil da sua turma. Afinal, os autores precisaram fazer escolhas sobre quais tópicos consideraram mais relevantes para suas obras, assim como também foi feito nessa dissertação.

3 Fundamentos Teóricos

A seguir, apresentamos o embasamento teórico geométrico clássico, omitindo a parte axiomática e os tópicos introdutórios que precedem o estudo dos triângulos, como os entes primitivos, segmentos, ângulos, paralelismo e perpendicularismo, Teorema de Tales, conceitos fundamentais de área, bem como algumas identidades trigonométricas. Esses conteúdos podem ser consultados nas obras que fundamentam este trabalho (DOLCE; POMPEO, 2013) (NETO, 2013) (GARBI, 2010). Com base nisso, exploramos o tema sob uma nova abordagem, introduzindo equações inéditas na literatura matemática na forma em que são apresentadas.

3.1 Definições e ângulos do triângulo

Nesta subseção apresentam-se inicialmente as definições e classificações fundamentais dos triângulos, tanto em relação aos lados quanto em relação aos ângulos, bem como os principais elementos que os constituem. Em seguida, discutem-se os teoremas relacionados aos ângulos internos e externos, com destaque para o teorema da soma dos ângulos internos e o teorema do ângulo externo, além de algumas de suas consequências diretas. Esses resultados são essenciais para a compreensão das propriedades geométricas dos triângulos e servirão de base para o desenvolvimento dos tópicos abordados nas subseções posteriores.

Definição 1. *Sejam A , B e C pontos não colineares no plano euclidiano, chamamos de triângulo ABC a união dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} . Os pontos A , B e C são denominados vértices e os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} são denominados lados do triângulo.*

Observação 1. *Ao longo deste trabalho, sempre que nos referirmos a um plano, estaremos considerando o plano euclidiano, salvo indicação em contrário.*

Observação 2. *Sempre que escrevermos \overline{AB} estaremos nos referindo ao segmento de reta que une os pontos A e B . Por outro lado, a notação AB será usada para indicar apenas a medida desse segmento.*

Definição 2. *Seja ABC um triângulo no plano. A região limitada pelo triângulo é dita região interna do triângulo e a região não-interna do triângulo é denominada região externa do triângulo.*

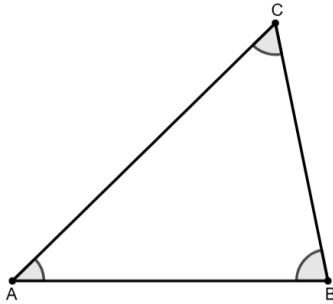
Definição 3. *Chamamos de região triangular o conjunto dos pontos do plano formado pela união dos pontos de um triângulo e a sua região interna.*

Observação 3. *Neste trabalho, adotaremos a convenção de empregar o termo triângulo para designar a região triangular (incluindo seus lados), pois o contexto em cada caso evitará ambiguidades.*

Definição 4. *Seja ABC um triângulo. Em cada vértice, considera-se o ângulo formado pelos dois lados que nele se encontram, medido na região interna do triângulo. Esses ângulos são chamados ângulos internos e são denotados por*

$$\hat{A} = \widehat{BAC}, \quad \hat{B} = \widehat{ABC}, \quad \hat{C} = \widehat{ACB}.$$

Figura 2: Ângulos internos de um triângulo.



Fonte: Autor (2025).

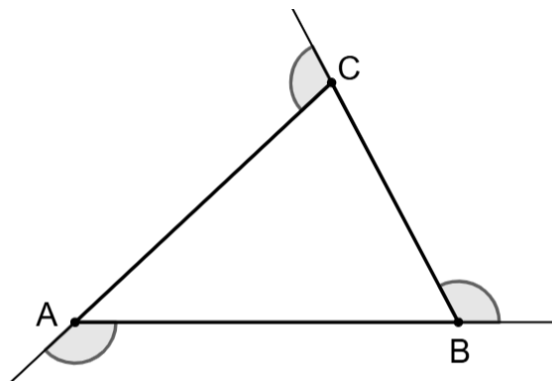
Observação 4. *Adotaremos a convenção de utilizar a mesma notação tanto para a medida quanto para a representação de um ângulo. Por exemplo, escreveremos*

$$\hat{A} = \widehat{BAC},$$

entendendo que o contexto indicará se nos referimos ao ângulo em si ou à sua medida.

Definição 5. *Seja ABC um triângulo. Em cada vértice, considera-se o ângulo formado por um lado do triângulo e pelo prolongamento do lado adjacente, medido na região externa ao triângulo. Esses ângulos são chamados ângulos externos.*

Figura 3: Ângulos externos de um triângulo.



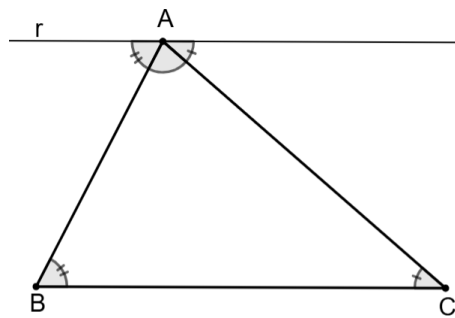
Fonte: Autor (2025).

Os triângulos podem ser classificados quanto às medidas dos seus lados ou quanto às medidas dos seus ângulos.

- (i) Quanto às medidas dos lados, o triângulo pode ser:
- (a) **Isósceles:** Possui dois lados com a mesma medida.
 - (b) **Equilátero:** Os três lados possuem a mesma medida.
 - (c) **Escaleno:** Os três lados possuem medidas distintas.
- (ii) Quanto às medidas dos ângulos, o triângulo pode ser:
- (a) **Acutângulo:** Possui três ângulos agudos.
 - (b) **Retângulo:** Possui um ângulo reto. Os lados adjacentes ao ângulo reto são chamados de catetos e o lado oposto de hipotenusa.
 - (c) **Obtusângulo:** Possui um ângulo obtuso.

Proposição 1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .*

Figura 4: Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: Autor (2025).

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Pelo vértice A , construa a reta r paralela ao lado \overline{BC} , conforme a Figura 4.

Na reta r , o ângulo formado entre r e \overline{AB} tem a mesma medida que $\hat{A}BC$, pois são ângulos alternos internos em relação às paralelas r e \overline{BC} com a transversal \overline{AB} . De modo análogo, o ângulo formado entre r e \overline{AC} tem a mesma medida que $\hat{B}CA$, também por serem alternos internos.

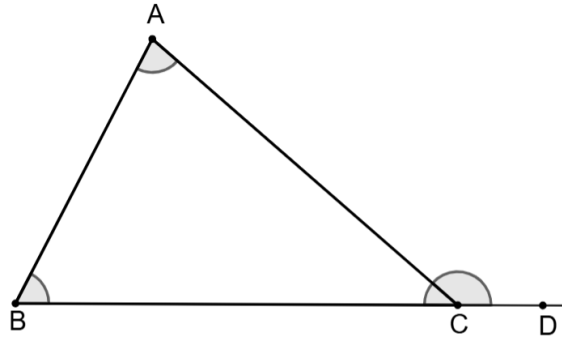
Assim, sobre a reta r , temos três ângulos adjacentes: $\hat{A}BC$, $\hat{C}AB$ e $\hat{B}CA$, cuja soma é 180° . Portanto,

$$\hat{A}BC + \hat{B}CA + \hat{C}AB = 180^\circ.$$

□

Proposição 2. *Em um triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Figura 5: Teorema do ângulo externo.



Fonte: Autor (2025).

Demonstração. Seja ABC um triângulo e considere o ângulo externo em C , formado pelo prolongamento de \overline{BC} além do ponto C e pelo lado \overline{AC} . Denotemos esse ângulo por \hat{ACD} , onde D é um ponto colinear com B e C , situado fora do triângulo, como vemos na Figura 5.

Sabemos que $\hat{BCA} + \hat{ACD} = 180^\circ$, pois são ângulos suplementares. Além disso, do resultado anterior, temos

$$\hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} = 180^\circ.$$

Substituindo 180° da segunda igualdade na primeira, obtemos

$$\hat{ACD} = \hat{ABC} + \hat{CAB}.$$

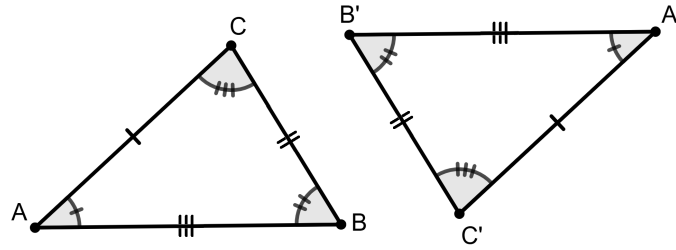
Portanto, o ângulo externo \hat{ACD} é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. \square

3.2 Congruência e semelhança de triângulos

Nesta subseção serão apresentados os principais critérios de congruência de triângulos, que permitem estabelecer quando duas figuras desse tipo possuem a mesma forma e o mesmo tamanho, a partir da comparação de lados e ângulos correspondentes. Em seguida, discute-se a noção de semelhança de triângulos, na qual se preserva a forma, mas não necessariamente as dimensões, destacando os critérios que asseguram tal relação.

Definição 6. *Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes e escrevemos $ABC \equiv A'B'C'$, se existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e do outro, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes tenham a mesma medida, bem como o sejam os lados opostos a vértices correspondentes.*

Figura 6: Triângulos congruentes.

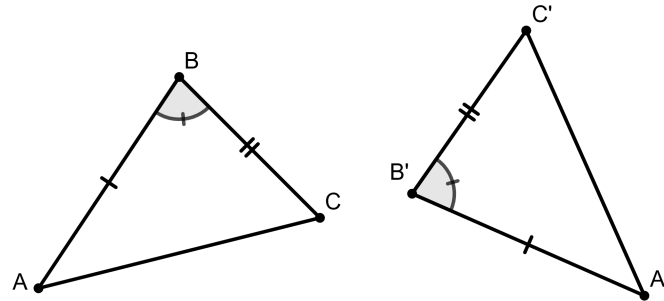


Fonte: Autor (2025).

Em sua obra, Fundamentos de Matemática Elementar, volume 9, geometria plana, (DOLCE; POMPEO, 2013) nos apresentam casos de congruência de triângulos, o primeiro é posto como axioma e os demais como proposição. Abaixo os apresentamos de modo semelhante ao que eles fizeram.

Axioma 1. (1º Caso de congruência - LAL) *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre esses dois lados, então eles são congruentes.*

Figura 7: 1º Caso de congruência: LAL.



Fonte: Autor (2025).

Com base no axioma 1 de congruência de triângulos, podemos demonstrar uma das propriedades fundamentais da geometria plana, que estabelece uma relação entre lados e ângulos em triângulos isósceles. Tal resultado é apresentado a seguir.

Proposição 3. *Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes.*

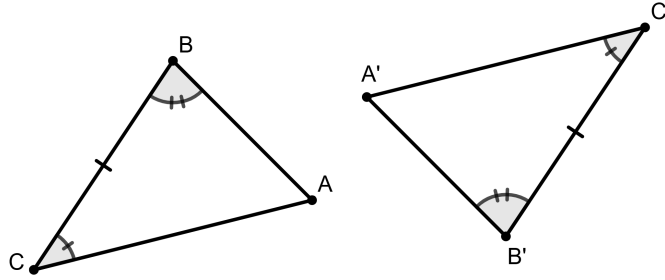
Demonstração. Consideremos os triângulos ABC e ACB , note que $AB = AC$, $\hat{B}AC = \hat{C}AB$ e $AC = AB$. Logo, os triângulos são congruentes pelo caso LAL, portanto $\hat{B} = \hat{C}$. \square

De modo análogo ao primeiro caso de congruência (LAL), é possível estabelecer outros critérios que asseguram a congruência entre dois triângulos. O segundo desses casos envolve um lado e os ângulos adjacentes a ele, conforme a proposição a seguir.

Proposição 4. (2º Caso de congruência - ALA) *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.*

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $\hat{B} = \hat{B}'$, $BC = B'C'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$, conforme vemos na Figura 8. Vamos provar que $BA = B'A'$. Assim recaímos no 1º caso. Seja X um ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{B'A'}$ tal que $B'X = BA$. Note que, pelo caso LAL os triângulos ABC e $XB'C'$ são congruentes. Desse modo, $B\hat{C}A = B'\hat{C}'X$. Mas $B\hat{C}A = B'\hat{C}'A'$. Logo $X = A'$, ou seja, $BA = B'A'$.

Figura 8: 2º Caso de congruência: ALA.



Fonte: Autor (2025).

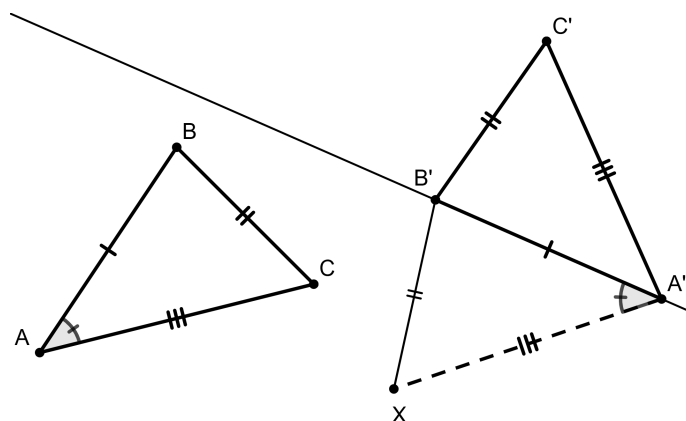
□

Além dos casos LAL e ALA, há ainda uma terceira condição que garante a congruência entre dois triângulos. Esse critério baseia-se exclusivamente na congruência dos três lados correspondentes, conforme apresentado a seguir.

Proposição 5. (3º Caso de congruência - LLL) *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.*

Demonstração. Seja ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $CA = C'A'$. Considere X um ponto do semiplano oposto ao de C' em relação à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $X\hat{A}B' = C\hat{A}B$ e $A'X = AC$, conforme vemos na Figura 9. Como $AC = A'C'$, segue que $A'X = A'C'$. Pelo caso LAL os triângulos ABC e $A'B'X$ são congruentes. Assim $XB' = CB$, logo $XB' = C'B'$. Perceba que os triângulos $A'C'X$ e $B'C'X$ são isósceles, com isso temos que $A'\hat{C}'X = A'\hat{X}C'$ e $B'\hat{C}'X = B'\hat{X}C'$, ou seja, $A'\hat{C}'B = A'\hat{X}B'$. Desse modo, os triângulos $A'B'C'$ e $A'B'X$ são congruentes pelo caso LAL. Como os triângulos ABC e $A'B'X$ são congruentes, segue o resultado.

Figura 9: 3º Caso de congruência: LLL.



Fonte: Autor (2025).

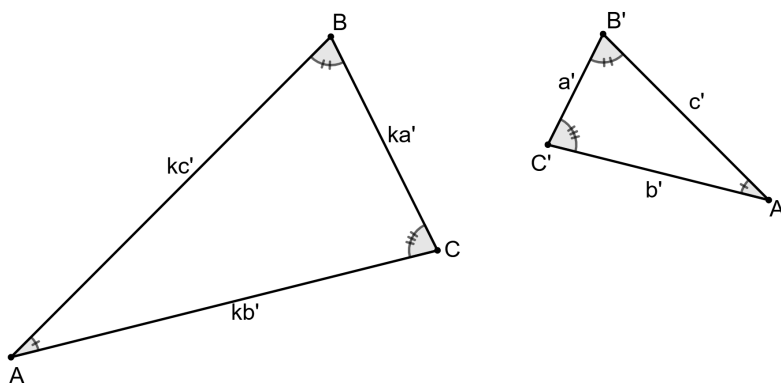
□

A definição a seguir refere-se a semelhança de triângulos, um conceito essencial na Geometria, que relaciona figuras de mesma forma, mas de tamanhos diferentes. Seu estudo é fundamental para compreender diversas propriedades métricas e demonstrar importantes teoremas.

Definição 7. *Dois triângulos são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam congruentes e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma, tal constante é denominada razão de semelhança.*

Na Figura 10, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes e k é a razão de semelhança.

Figura 10: Triângulos semelhantes.



Fonte: Autor (2025).

Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos semelhantes com a correspondência de vértices $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$ e $C \rightarrow C'$, denotamos $ABC \sim A'B'C'$ (é importante

escrever de acordo com a correspondência). Assim $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$ e existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k.$$

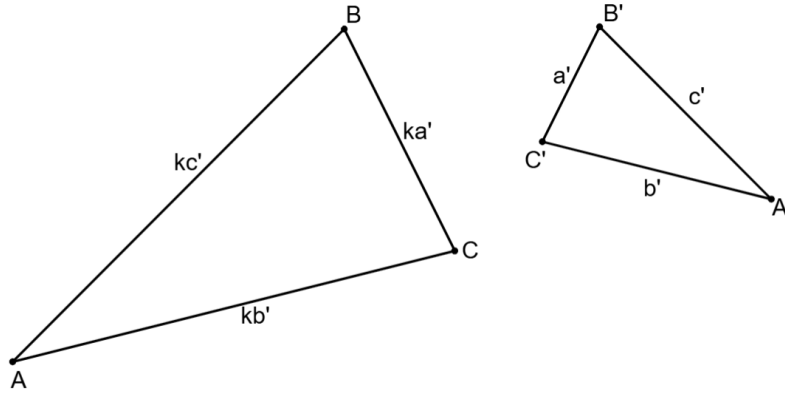
As três proposições a seguir, denominadas casos de semelhança de triângulos, estabelecem as condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Proposição 6. (Caso de semelhança - LLL) *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos, tais que*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k, \quad k \in \mathbb{R}_+^*.$$

Então $ABC \sim A'B'C'$.

Figura 11: Triângulos semelhantes pelo Caso LLL.



Fonte: Autor (2025).

Demonstração. Temos que $\frac{AB}{A'B'} = k$, $\frac{BC}{B'C'} = k$ e $\frac{AC}{A'C'} = k$, conforme vemos na Figura 11. Suponha, sem perda de generalidade, $k > 1$. Sejam D o ponto sobre o segmento \overline{AB} tal que $AD = A'B'$ e E a interseção, com o lado \overline{AC} , da reta que passa por D e é paralela ao lado \overline{BC} , segue do Teorema de Tales que

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{k},$$

de maneira que $AE = \frac{1}{k} \cdot AC = A'C'$.

Seja F a interseção, com o lado \overline{BC} , da reta que passa por E e é paralela ao lado \overline{AB} . Assim o quadrilátero $DEFB$ é um paralelogramo e novamente pelo Teorema de Tales, temos

$$\frac{DF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{k}.$$

Logo, $DF = \frac{1}{k}BC = B'C'$, ou seja,

$$AD = A'B', \quad AE = A'C' \quad \text{e} \quad DE = B'C'.$$

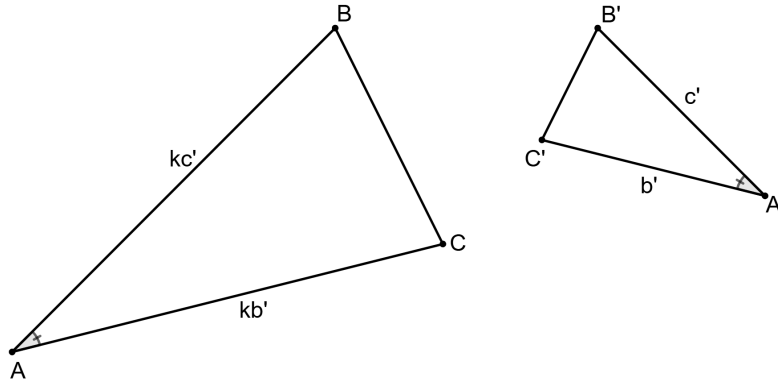
Desse modo, pelo caso LLL, os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes e, portanto, $\widehat{B} = \widehat{A}BC = \widehat{A}DE = \widehat{A'B'C'} = \widehat{B}'$, e analogamente, $\widehat{A} = \widehat{A}'$ e $\widehat{C} = \widehat{C}'$. \square

Proposição 7. (Caso de semelhança - LAL) *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos, tais que*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = k, \quad k \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{e} \quad \widehat{A} = \widehat{A}'.$$

Então $ABC \sim A'B'C'$.

Figura 12: Triângulos semelhantes pelo Caso LAL.



Fonte: Autor (2025).

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere $k > 1$. Sejam D e E pontos dos lados \overline{AC} e \overline{AC} respectivamente, tais que $AD = A'B'$ e $AE = A'C'$, conforme vemos na 12. Pelo caso LAL, os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes. Note que, por hipótese

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

ou seja

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Pela recíproca do Teorema de Tales, o segmento \overline{DE} é paralelo ao segmento \overline{BC} , logo

$$\widehat{B}' = \widehat{A}DE = \widehat{B}$$

e, analogamente, $\widehat{C}' = \widehat{C}$.

Temos que provar agora que $\frac{BC}{B'C'} = k$. De fato, seja F a interseção, com o lado \overline{BC} , da reta que passa pelo ponto E e é paralela ao lado \overline{AB} . Assim o quadrilátero

$DEFB$ é um paralelogramo e novamente pelo Teorema de Tales, temos

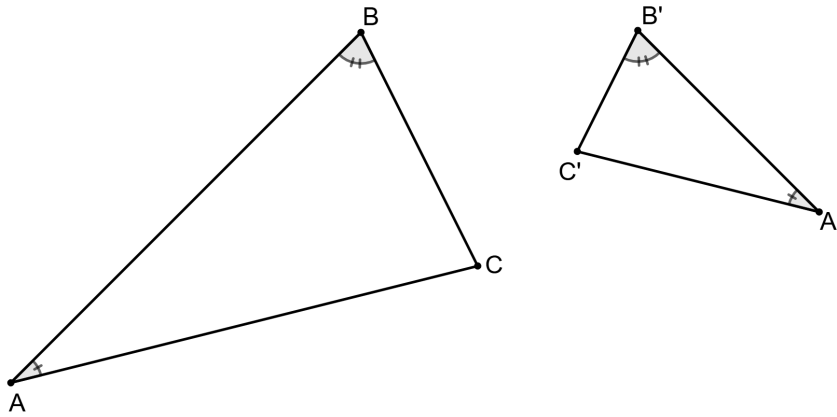
$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BC}{DE} = \frac{BC}{BF} = \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{A'C'} = k.$$

Portanto, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. \square

Proposição 8. (Caso de semelhança - AA) *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos, tais que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$.*

Então $ABC \sim A'B'C'$.

Figura 13: Triângulos semelhantes pelo Caso AA.



Fonte: Autor (2025).

Demonstração. Sabemos que, em qualquer triângulo, a soma das medidas de seus ângulos internos é sempre igual a 180° . Desse modo, para os triângulos ABC e $A'B'C'$, temos

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \quad \text{e} \quad \widehat{A'} + \widehat{B'} + \widehat{C'} = 180^\circ.$$

Considerando que $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{A'} + \widehat{B'}$, segue imediatamente que $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Seja D um ponto sobre o segmento \overline{AB} tal que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$, e traçando por D uma reta paralela ao lado \overline{BC} , designamos por E o ponto de interseção dessa reta com o lado \overline{AC} . Com essa construção, o ângulo em D é igual aos ângulos \widehat{B} e $\widehat{B'}$, ou seja, $\widehat{B} = \widehat{B'} = \widehat{D}$.

Pelo caso de congruência ALA , os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes. Aplicando o Teorema de Tales às retas paralelas consideradas, obtemos

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

o que implica

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Por fim, pelo caso de semelhança LAL , demonstrado anteriormente, conclui-se que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, conforme ilustrado na Figura 13.

□

3.3 Cevianas de um triângulo

As cevianas desempenham papel central no estudo dos triângulos, pois permitem estabelecer importantes relações métricas e identificar pontos notáveis. Nesta subseção serão definidas as principais cevianas: medianas, alturas e bissetrizes. Discutiremos suas propriedades fundamentais e o modo como determinam pontos de interseção de grande relevância, como o baricentro, o ortocentro e o incentro.

Definição 8. *Denomina-se ceviana de um triângulo, qualquer segmento de reta que tem uma das extremidades num dos vértices do triângulo e a outra sobre um ponto, denominado pé da ceviana, da reta suporte do lado oposto ao vértice considerado.*

Entre as principais cevianas de um triângulo, destacam-se: a **mediana**, que tem sua extremidade no ponto médio do lado oposto ao vértice de origem; a **altura**, que é perpendicular à reta suporte do lado oposto ao vértice em que está sua outra extremidade; e a **bissetriz interna**, que parte de um vértice e divide o ângulo interno correspondente em dois ângulos congruentes, tendo sua outra extremidade em um ponto do lado oposto.

Teorema 1. (Teorema da bissetriz interna) *Seja ABC um triângulo e \overline{AD} sua bissetriz interna referente ao ângulo \hat{A} , então*

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

Demonstração. Seja r a reta que passa pelo ponto C e é paralela à bissetriz AD . Seja E a interseção da reta r com a reta \overleftrightarrow{AB} , conforme vemos na Figura 14. Pelo Teorema de Tales, temos

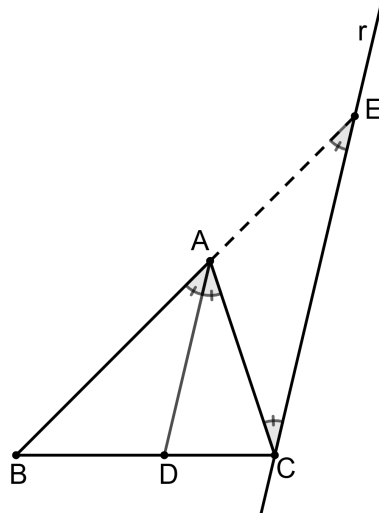
$$\frac{AB}{AE} = \frac{DB}{DC}.$$

Os ângulos \hat{BAD} e \hat{AEC} são correspondentes e, portanto, congruentes. Os ângulos \hat{DAC} e \hat{ACE} são alternos internos, logo também são congruentes, bem como $\hat{BAD} = \hat{DAC}$, pois \overline{AD} é bissetriz, concluímos que \hat{ACE} e \hat{CEA} têm a mesma medida, ou seja, o triângulo CAE é isósceles, sendo $AE = AC$, portanto

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

□

Figura 14: Teorema da bissetriz interna.



Fonte: Autor (2025).

Abaixo, enunciamos e demonstramos um lema de modo semelhante ao que foi feito por SILVA, 2015 (SILVA, 2015) em sua dissertação de mestrado.

Lema 1. *Dados dois pontos distintos A e B em uma reta r , e um número real positivo $t > 0$, existe um único ponto $M \in r$ tal que M divide o segmento \overline{AB} na razão t , isto é, $\frac{MA}{MB} = t$.*

Demonstração. Suponha que M divide o segmento \overline{AB} na razão $t > 0$. Mostraremos que tal ponto é único, considerando separadamente os casos em que M está entre A e B (divisão interna) ou fora do segmento \overline{AB} (divisão externa).

Caso 1: M entre A e B (divisão interna).

Suponha, por absurdo, que existam dois pontos distintos M e N , ambos entre A e B , tais que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = t.$$

Como M e N estão entre A e B , temos $MA + MB = AB$ e $NA + NB = AB$. Assim,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \Rightarrow \frac{MA + MB}{MB} = \frac{NA + NB}{NB} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AB}{NB} \Rightarrow MB = NB.$$

Como M e N estão do mesmo lado de B e a mesma distância, conclui-se que $M = N$, o que contradiz a hipótese de que são distintos. Logo, o ponto M é único nesse caso.

caso 2: M fora do segmento \overline{AB} (divisão externa). Suponha novamente, por absurdo, que existam dois pontos distintos M e N sobre a reta r , ambos fora do segmento \overline{AB} , tais que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = t.$$

Neste caso, temos $MA = MB + AB$ e $NA = NB + AB$, o que implica

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \Rightarrow \frac{MB + AB}{MB} = \frac{NB + AB}{NB} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AB}{NB} \Rightarrow MB = NB.$$

Novamente, $M = N$, o que contradiz a suposição inicial. Assim, o ponto M é único também neste caso.

Portanto, em qualquer das configurações possíveis (divisão interna ou externa), a razão $\frac{MA}{MB} = t$ determina um único ponto M sobre a reta r . □

As cevianas ocupam papel central no estudo das relações internas de um triângulo, pois permitem estabelecer importantes vínculos entre segmentos e pontos notáveis. Entre essas relações, destaca-se o Teorema de Ceva, que fornece uma condição necessária e suficiente para a concorrência de três cevianas em um mesmo ponto.

Teorema 2. (Teorema de Ceva) *As retas suportes de três cevianas AX , BY e CZ de um triângulo ABC são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Demonstração. Considere que as cevianas AX , BY e CZ do triângulo ABC se interseccionam em um ponto P . Denotamos por A_{ABC} a área de um triângulo ABC .

Figura 15: Teorema de Ceva

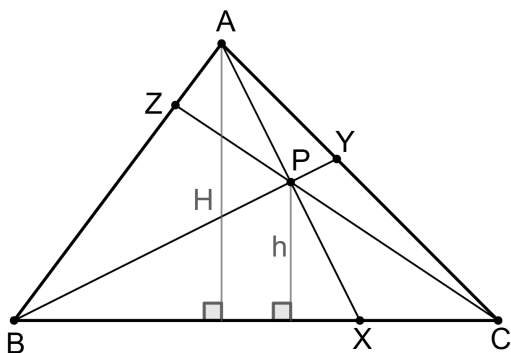


Figura 16: O ponto P é interno ao triângulo ABC .

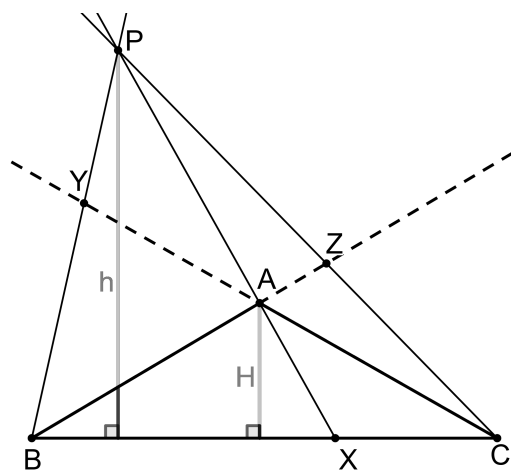


Figura 17: O ponto P é externo ao triângulo ABC .

Fonte: Autor (2025).

Observe na Figura 15, que os triângulos BXP e CXP possuem a mesma altura de medida h com respeito às bases BX e XC , respectivamente. E os triângulos

ABX e ACX têm a mesma altura de medida H com respeito às bases BX e CX , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 15. Assim

$$A_{ABX} = \frac{1}{2}H \cdot BX, \quad A_{ACX} = \frac{1}{2}H \cdot CX$$

e

$$A_{BXP} = \frac{1}{2}h \cdot BX, \quad A_{CXP} = \frac{1}{2}h \cdot CX.$$

Isto implica que

$$\frac{A_{ABP}}{A_{ACP}} = \frac{A_{ABX} - A_{BXP}}{A_{ACX} - A_{CXP}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot H \cdot BX - \frac{1}{2} \cdot h \cdot BX}{\frac{1}{2}H \cdot CX - \frac{1}{2} \cdot h \cdot CX} = \frac{(\frac{1}{2}BX) \cdot (H - h)}{(\frac{1}{2}CX) \cdot (H - h)} = \frac{BX}{CX}.$$

Da mesma forma, obtemos

$$\frac{CY}{YA} = \frac{A_{BCP}}{A_{ABP}}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{A_{CAP}}{A_{BCP}}.$$

Portanto,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{A_{ABP}}{A_{ACP}} \cdot \frac{A_{BCP}}{A_{ABP}} \cdot \frac{A_{CAP}}{A_{BCP}} = 1.$$

Reciprocamente, considere que $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$.

Seja P o ponto de interseção das cevianas \overline{AX} e \overline{BY} . Vamos mostrar que CZ passa por P . Seja $\overline{CZ'}$ uma ceviana que passa por P , desse modo, vale que

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1.$$

Como, por hipótese,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1,$$

segue que

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} \Rightarrow \frac{AZ}{ZB} = \frac{AZ'}{Z'B}.$$

A equação acima nos mostra que os pontos Z e Z' dividem o segmento AB na mesma razão. Mas para quaisquer dois pontos distintos A e B , a razão segmentar $\frac{AZ}{ZB}$ determina, de forma única, a posição de Z sobre AB conforme visto no Lema 1. Portanto, segue que $Z = Z'$, o que conclui a demonstração. □

Observação 5. *O Teorema de Ceva continua sendo válido mesmo nos casos em que o ponto de interseção das retas suportes das cevianas não se localiza no interior do triângulo, mas sim em sua região externa. Em outras palavras, a veracidade dessa relação geométrica independe da posição do ponto de concorrência, mantendo-se*

correta mesmo quando as cevianas se encontram fora da área delimitada pelos lados do triângulo, conforme mostra a Figura 17.

3.4 Relações métricas e existência de um triângulo

Nesta subseção serão abordadas as principais relações métricas que envolvem os lados, ângulos e cevianas de um triângulo, tais como as expressões derivadas do teorema de Pitágoras, da lei dos senos e da lei dos cossenos em sua forma métrica. Tais relações são essenciais para a resolução de problemas de cálculo de medidas e constituem a base para deduções mais sofisticadas no campo da geometria plana. Além disso, será discutida a condição de existência de um triângulo a partir de seus lados, expressa pela desigualdade triangular, que estabelece os limites necessários para que três segmentos possam formar um triângulo.

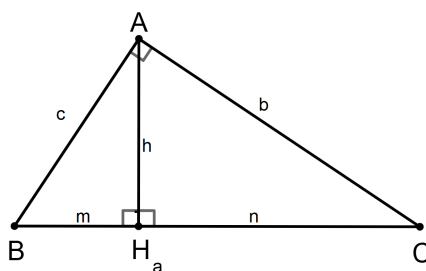
O Teorema de Pitágoras é um dos resultados mais conhecidos e fundamentais da Geometria. Ele estabelece uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo e serve de base para diversas aplicações matemáticas e físicas. A seguir, apresentamos sua formulação clássica.

Teorema 3. (Teorema de Pitágoras) *Seja ABC um triângulo com lados $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Então, o triângulo ABC é retângulo em A se, e somente se*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Demonstração. Seja H o pé da altura relativa ao vértice A , de modo que $AH = h$, $BH = m$ e $HC = n$, como na Figura 18.

Figura 18: Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor (2025).

Pelo caso AA, os triângulos ABC , HBA e HAC são semelhantes. Assim,

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot m, \quad (1)$$

e

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot n. \quad (2)$$

Somando membro a membro (1) e (2), obtemos

$$am + an = b^2 + c^2 \Rightarrow a(m + n) = b^2 + c^2.$$

Como $a = m + n$, segue que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Agora, suponhamos, por absurdo, que $a^2 = b^2 + c^2$ e $\widehat{A} \neq 90^\circ$. Sem perda de generalidade, admita-se que $b \leq c$. Tracemos, a altura relativa ao vértice C , que intersecta o lado AB no ponto H_C .

Sejam $AH_C = m$ e $CH_C = h$.

Como o triângulo $AH_C C$ é retângulo, tem-se:

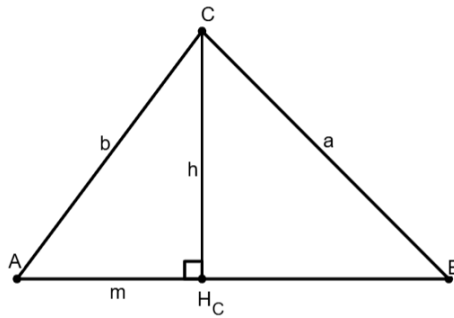
$$b^2 = h^2 + m^2.$$

Como admitimos $\widehat{A} \neq 90^\circ$, temos dois casos:

Caso 1: $\widehat{A} < 90^\circ$ (triângulo acutângulo).

Nesse caso, o pé da altura H_C situa-se no interior do lado \overline{AB} , conforme vemos na Figura 19.

Figura 19: Recíproca do Teorema de Pitágoras (Caso 1).



Fonte: Autor (2025).

O triângulo $BH_C C$ é retângulo, e, portanto:

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2.$$

Substituindo $h^2 = b^2 - m^2$ na equação anterior, obtém-se:

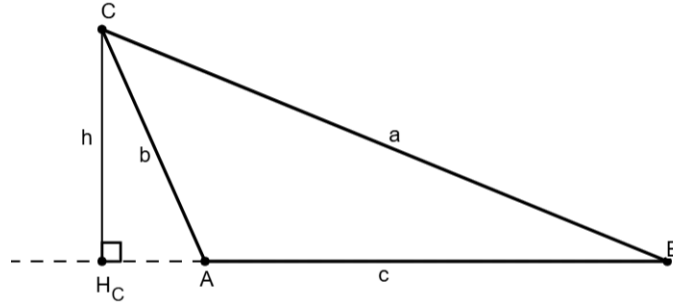
$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cm.$$

Como $c > 0$ e $m > 0$, conclui-se que $a^2 < b^2 + c^2$, o que contradiz a hipótese inicial.

Caso 2: $\widehat{A} > 90^\circ$ (triângulo obtusângulo).

Nesse caso, o pé da altura H_C situa-se na extensão do lado \overline{AB} , além do vértice B , conforme vemos na Figura 20.

Figura 20: Recíproca do Teorema de Pitágoras (Caso 2).



Fonte: Autor (2025).

O triângulo $BH_C C$ é novamente retângulo, de modo que:

$$a^2 = h^2 + (c + m)^2.$$

Substituindo $h^2 = b^2 - m^2$ na equação anterior, tem-se:

$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cm.$$

Como $c > 0$ e $m > 0$, segue que $a^2 > b^2 + c^2$, novamente em contradição com a condição inicial.

Conclui-se, portanto, que as únicas possibilidades para \widehat{A} diferentes de 90° levam a contradições. Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $\widehat{A} = 90^\circ$. \square

Podemos definir as razões trigonométricas denominadas seno, cosseno e tangente dentro da geometria plana euclidiana, como o fez (SANTOS; VIGLIONI, 2011).

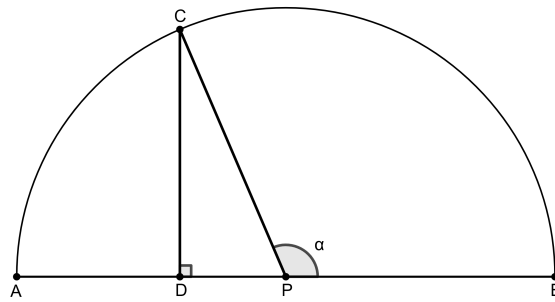
Considere um semicírculo de centro P e diâmetro AB . Seja C um ponto qualquer desse semicírculo e defina o ângulo $\alpha = \widehat{CPB}$. Seja D a projeção ortogonal de C sobre \overline{AB} , ou seja, o ponto de \overline{AB} tal que \overline{CD} é perpendicular a \overline{AB} , conforme Figura 21.

Definição 9. *Define-se*

1) *seno do ângulo α , e denotamos por $\text{sen } \alpha$, o quociente*

$$\text{sen } \alpha = \frac{CD}{PC}.$$

Figura 21: Razões trigonométricas.



Fonte: Autor (2025).

2) *coosseno do ângulo α , e denotamos por $\cos \alpha$, o quociente*

$$\cos \alpha = \frac{PD}{PC} \quad \text{se } 0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$

ou

$$\cos \alpha = -\frac{PD}{PC} \quad \text{se } 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ.$$

3) *tangente do ângulo α , e denotamos por $\operatorname{tg} \alpha$, o quociente:*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{com } \alpha \neq 90^\circ.$$

É importante destacar que o seno e o coosseno não dependem do semicírculo empregado para definí-los. Tal independência decorre do fato de que o triângulo PCD é sempre retângulo em D . Consequentemente, qualquer triângulo retângulo que possua um ângulo de medida α será semelhante a PCD , pelo caso AA . Assim, as razões entre os lados correspondentes, que definem tais razões trigonométricas, permanecem invariáveis para todos os triângulos semelhantes, independentemente do semicírculo considerado.

Dessa forma, o seno do ângulo α (ou de seu suplemento $180^\circ - \alpha$) corresponde à razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α (lado \overline{CD}) e a medida da hipotenusa (lado \overline{PC}). O coosseno de α é dado pela razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo α (lado \overline{PD}) e a medida da hipotenusa, enquanto o coosseno do suplemento de α é o oposto do coosseno do próprio ângulo α .

A proposição abaixo é válida para todo ângulo α , mas para este estudo vamos nos restringir a ângulos entre 0° e 180° .

Proposição 9. (*Relação fundamental da trigonometria*) *Para qualquer ângulo α compreendido entre 0° e 180° , as razões trigonométricas seno e coosseno associadas a esse ângulo satisfazem a relação*

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Demonstração. Considere a Figura 21. Seja C um ponto do semicírculo de centro P e diâmetro \overline{AB} , e seja D a projeção ortogonal de C sobre \overline{AB} . Assim, o triângulo CDP é retângulo em D .

Pela definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo CDP , temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{CD}{PC} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{PD}{PC}.$$

Elevando ambos os membros de cada igualdade ao quadrado, obtemos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \left(\frac{CD}{PC}\right)^2 \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}^2 \alpha = \left(\frac{PD}{PC}\right)^2.$$

Como o triângulo CDP é retângulo, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$CD^2 + PD^2 = PC^2.$$

Substituindo essa relação na soma dos quadrados das razões, resulta:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = \left(\frac{CD}{PC}\right)^2 + \left(\frac{PD}{PC}\right)^2 = \frac{CD^2 + PD^2}{PC^2} = \frac{PC^2}{PC^2} = 1.$$

Portanto, para qualquer ângulo α entre 0° e 180° , verifica-se que

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1.$$

□

Antes de apresentarmos os próximos resultados, é necessário definir os conceitos de círculo inscrito e círculo circunscrito em um triângulo, pois ambos serão fundamentais nas demonstrações que se seguem.

Definição 10. Em um triângulo ABC , chama-se **círculo inscrito** aquele que é tangente aos três lados do triângulo, enquanto o **círculo circunscrito** é aquele que passa pelos vértices A , B e C do triângulo.

O Teorema a seguir nos trás uma generalização do Teorema de Pitágoras, permitindo relacionar os lados e ângulos de qualquer triângulo, mesmo quando ele não é retângulo. Esse resultado é fundamental para o estudo das relações métricas e para a resolução de triângulos em situações mais gerais. A seguir, enunciamos e demonstramos esse importante resultado.

Teorema 4. (Lei dos Cossenos) Seja ABC um triângulo qualquer, tal que $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, então

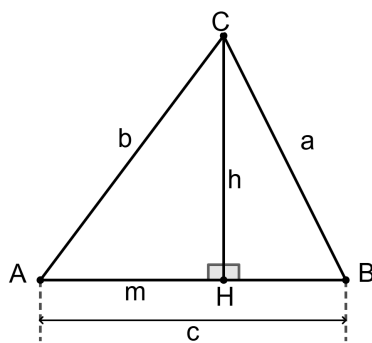
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}.$$

Demonstração. Demonstraremos apenas para o ângulo \widehat{A} , as demais são análogas. Dividiremos em três casos.

1º caso: **O triângulo é acutângulo.**

Seja ABC um triângulo acutângulo e $CH = h$ a altura relativa ao lado \overline{AB} . Considere $AH = m$, conforme vemos na Figura 22.

Figura 22: Lei dos Cossenos: 1º caso.



Fonte: Autor (2025).

No triângulo retângulo BCH , temos

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2. \quad (1)$$

No triângulo retângulo ACH , temos

$$h^2 = b^2 - m^2. \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) e organizando os termos, obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm. \quad (3)$$

Ainda no triângulo retângulo ACH , temos

$$\cos \widehat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cos \widehat{A}. \quad (6)$$

E, por fim, substituindo (6) em (3), obtemos

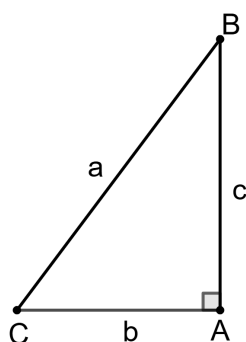
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}.$$

2º caso: **O triângulo é retângulo.** Seja ABC um triângulo retângulo em A , como na Figura 23.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Figura 23: Lei dos Cossenos: 2º caso.



Fonte: Autor (2025).

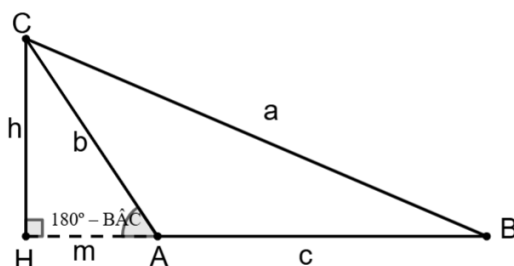
Note que $\cos 90^\circ = 0$, desse modo, $2bc \cos \hat{A} = 0$ e, portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

3º caso: **O triângulo é obtusângulo.**

Seja ABC um triângulo obtusângulo em A , no qual $CH = h$ é a altura relativa ao lado \overline{AB} , como na Figura 24.

Figura 24: Lei dos Cossenos: 3º Caso.



Fonte: Autor (2025).

No triângulo retângulo BCH , temos:

$$a^2 = h^2 + (c + m)^2. \quad (4)$$

No triângulo retângulo ACH , temos

$$h^2 = b^2 - m^2. \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4), temos

$$a^2 = b^2 + 2cm. \quad (6)$$

Ainda no triângulo ACH , temos $\cos(180^\circ - \hat{A}) = \frac{m}{b}$. Como $\cos \hat{A} = -\cos(180^\circ - \hat{A})$, temos

$$-\cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = -b \cos \hat{A}. \quad (10)$$

Finalmente, substituindo (10) em (6), obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}.$$

□

O teorema a seguir estabelece uma importante relação entre os lados e os ângulos de um triângulo, mostrando que o quociente entre o comprimento de um lado e o seno do ângulo oposto permanece constante. Essa propriedade, conhecida como Lei dos Senos, é amplamente utilizada na resolução de triângulos e em diversas aplicações geométricas.

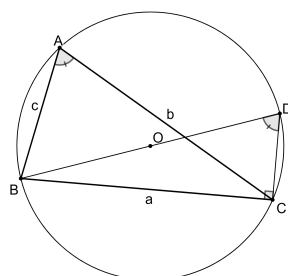
Teorema 5. (Lei dos Senos) *Sejam ABC um triângulo qualquer, tal que $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ e r_O a medida do raio do círculo que o circunscreve, então*

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} = 2r_O.$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em três casos:

1^o caso: **O triângulo é acutângulo.** Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito em um círculo de raio r_O . Seja ainda $BD = 2r_O$ um diâmetro, assim $\widehat{A} = \widehat{D}$ pois são inscritos no mesmo arco, além disso, $B\widehat{C}D$ é reto, pois é inscrito na semicircunferência, conforme vemos na Figura 25.

Figura 25: Lei dos senos: 1^o caso.



Fonte: Autor (2025).

Observe que,

$$\text{sen } \widehat{A} = \text{sen } \widehat{D} = \frac{a}{2r_O}.$$

Logo,

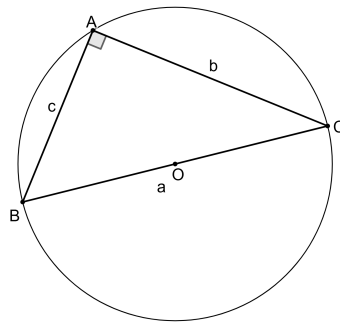
$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = 2r_O.$$

De maneira totalmente análoga podemos provar que

$$\frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = 2r_O \text{ e } \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} = 2r_O.$$

2º caso: **O triângulo é retângulo.**

Figura 26: Lei dos senos: 2º caso.



Fonte: Autor (2025).

Seja ABC um triângulo retângulo inscrito em um círculo de raio r_O , conforme Figura 26.

Note que \overline{BC} é um diâmetro. Assim,

$$\text{sen } \widehat{B} = \frac{b}{2r_O} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = 2r_O,$$

e, analogamente,

$$\frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} = 2r_O.$$

Além disso,

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = 2r_O.$$

Como $\widehat{A} = 90^\circ$, tem-se $\text{sen } \widehat{A} = 1$, de modo que

$$\frac{a}{1} = 2r_O \Rightarrow a = 2r_O,$$

o que confirma a relação.

3º caso: **O triângulo é obtusângulo.** Seja ABC um triângulo obtusângulo em A inscrito em um círculo de raio r_O . Seja ainda \overline{BD} um diâmetro, como ilustrado na Figura 27.

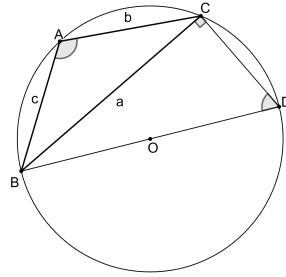
Note que os ângulos \widehat{A} e \widehat{D} são suplementares, pois determinam arcos replementares (soma das suas medidas é 360°), assim $\text{sen } \widehat{A} = \text{sen } \widehat{D}$. Além disso, $B\widehat{C}D$ é reto, pois está inscrito na semicircunferência. Desse modo, temos

$$\text{sen } \widehat{D} = \text{sen } \widehat{A} = \frac{a}{2r_O}.$$

Portanto,

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = 2r_O.$$

Figura 27: Lei dos senos: 3º caso.



Fonte: Autor (2025).

Os ângulos \widehat{B} e \widehat{C} são agudos e recaem no 1º caso.

□

A seguir, apresentamos uma importante condição que relaciona as medidas dos lados de um triângulo e determina quando três segmentos podem formar essa figura: a desigualdade triangular.

Proposição 10. (*Desigualdade triangular*) *Os números reais positivos a , b e c são medidas dos lados de um triângulo se, e somente se, forem satisfeitas, simultaneamente, as desigualdades:*

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

Demonstração. Seja ABC um triângulo, tal que, $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Como os pontos A , B e C não são colineares (por definição de triângulo), o ângulo \widehat{C} oposto ao lado c é um ângulo interno do triângulo e, portanto:

$$0^\circ < \widehat{C} < 180^\circ.$$

Pela lei dos Cossenos,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}.$$

Como $-1 \leq \cos \widehat{C} \leq 1$, temos $-2ab \cos \widehat{C} \leq 2ab$, e portanto

$$c^2 < a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros (com $a, b, c > 0$), obtemos

$$c < a + b,$$

isto é,

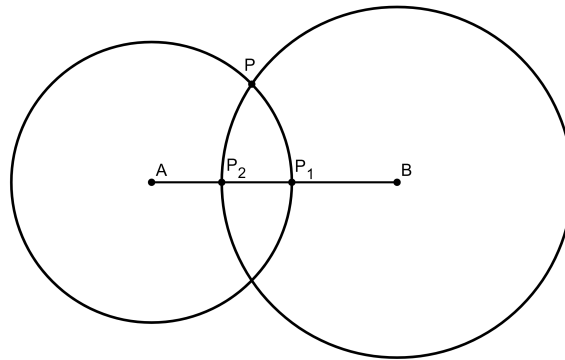
$$a + b > c.$$

As demonstrações para as outras desigualdades são completamente análogas. Reciprocamente, considere os números reais positivos a , b e c , tais que

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

Vamos mostrar que existe um triângulo cujos lados medem a , b e c . Sem perda de generalidade, considere c o maior número, caso haja um, ou seja $c = a + v$ e $c = b + w$ com $v, w \in \mathbb{R}_+$. Sejam \overline{AB} um segmento de comprimento c , sobre o qual marcamos o ponto P_1 , tal que $AP_1 = b$, como na Figura 28, desse modo, $P_1B = w$.

Figura 28: Desigualdade triangular



Fonte: Autor (2025).

Por hipótese, $a + b > c$, assim, $a > c - b$. Mas $c = b + w$ isso implica que $b = c - w$. Desse modo,

$$a > b + w - b \Rightarrow a > w.$$

Além disso, $c \geq a$, logo, existe um ponto P_2 entre A e P_1 (ou o próprio A caso $c = a$), tal que $BP_2 = a$. Tracemos o círculo α de centro A e raio $AP_1 = b$, note que o ponto P_2 é interno a α ($AP_2 < AP_1$). Em contrapartida, o ponto B não é interno ($AP_1 \leq AB$), assim, a circunferência β de centro B e raio a intersecta α em um ponto P . Como $PB = a$, $PA = b$ e $AB = c$, os lados do triângulo APB têm as medidas procuradas. \square

Todas as equações e propriedades que envolvem elementos de um triângulo, pressupõem que os comprimentos dos lados a , b e c satisfazem a condição de existência de um triângulo. Isso significa que os comprimentos devem ser positivos e obedecer à desigualdade triangular assegurando, assim, que todas as relações apresentadas ao longo do trabalho correspondem a triângulos geometricamente válidos.

4 Relacionador triangular

Nesta seção introduzimos o conceito de relacionador triangular, um invariante associado a cada vértice de um triângulo que, além de sintetizar a Lei dos Cossenos em forma algébrica, possibilita a formulação de expressões unificadas para diversos elementos da geometria plana. Inicialmente, apresentamos sua definição e propriedades básicas, como a soma dos relacionadores e suas relações com os lados do triângulo. Em seguida, destacamos interpretações trigonométricas e geométricas, mostrando que o relacionador pode ser expresso como produto escalar e também como medida de projeções ortogonais. Casos particulares (triângulos retângulos, isósceles e equiláteros) são discutidos, assim como aplicações que envolvem semelhança de triângulos e deslocamento de vértices.

4.1 Definição e propriedades básicas

O conceito de relacionador triangular e outros inerentes a ele foram discutidos em um resumo expandido apresentado e publicado no II Encontro Mineiro do Profmat, em novembro de 2024 (ALVES, 2025). O evento, de caráter científico e formativo, promoveu a troca de experiências entre docentes, discentes e egressos do mestrado, incentivando a divulgação e o aprimoramento de pesquisas na área.

Na ocasião, o professor Dr. Luís Felipe G. Fonseca sugeriu estabelecer uma conexão entre a equação da área de um triângulo obtida por meio do relacionador triangular e a fórmula clássica de Herão, tema que será retomado na seção 6.4. Esse contexto reforça o papel do relacionador triangular como uma ferramenta capaz de reescrever expressões matemáticas, simplificar demonstrações e evidenciar relações entre elementos do triângulo que, de outra forma, seriam de tratamento mais complexo. Assim, apresentamos a sua definição a seguir.

Definição 11. *Dado um triângulo ABC qualquer, cujos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} medem, respectivamente, c , a e b , chamamos de relacionador triangular de ABC em relação ao vértice C o número real R_C^{ABC} , tal que*

$$R_C^{ABC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Analogamente, os relacionadores triangulares referentes aos vértices B e A são, respectivamente,

$$R_B^{ABC} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \quad e \quad R_A^{ABC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Cada relacionador triangular associa a um vértice uma combinação específica dos lados do triângulo. A proposição a seguir evidencia uma propriedade geral desses

valores: a soma dos três relacionadores depende apenas das medidas dos lados, resultando em uma expressão simétrica e independente do vértice considerado.

Proposição 11. *Seja ABC um triângulo, tal que $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, então*

$$R_C^{ABC} + R_B^{ABC} + R_A^{ABC} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Demonstração. Note que, por definição,

$$\begin{aligned} R_C^{ABC} + R_B^{ABC} + R_A^{ABC} &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \end{aligned}$$

□

A partir das expressões que definem os relacionadores triangulares, é possível estabelecer relações simples entre eles e as medidas dos lados do triângulo. Essas igualdades revelam uma forte simetria nas fórmulas como vemos a seguir.

Proposição 12. *Seja ABC um triângulo, tal que $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, então*

$$R_A^{ABC} + R_B^{ABC} = c^2, \quad R_B^{ABC} + R_C^{ABC} = a^2, \quad R_A^{ABC} + R_C^{ABC} = b^2.$$

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para um dos casos, os demais são análogos.

$$R_A^{ABC} + R_B^{ABC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{2c^2}{2} = c^2.$$

□

Observa-se que o relacionador triangular também pode ser expresso em função de um ângulo interno do triângulo. Essa relação decorre diretamente da Lei dos Cossenos e mostra que cada relacionador pode ser interpretado como o produto entre as medidas de dois lados adjacentes multiplicado pelo cosseno do ângulo compreendido entre eles.

Proposição 13. *Seja ABC um triângulo, tal que $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, então*

$$R_C^{ABC} = ab \cos \widehat{C}.$$

Demonstração. Pela Lei dos cossenos, temos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}. \quad (7)$$

Além disso,

$$R_C^{ABC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}. \quad (8)$$

Substituindo (7) em (8), temos:

$$\begin{aligned} R_C^{ABC} &= \frac{a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C})}{2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos \widehat{C}}{2} \\ &= ab \cos \widehat{C}. \end{aligned}$$

□

Vale salientar que é análogo demonstrar que

$$R_B^{ABC} = ac \cos \widehat{B} \text{ e } R_A^{ABC} = bc \cos \widehat{A}.$$

A expressão do relacionador triangular em função do cosseno de um ângulo interno permite atribuir a ele uma interpretação geométrica. Dessa forma, o valor do relacionador indica diretamente o tipo de ângulo associado ao vértice, revelando se ele é agudo, reto ou obtuso.

O corolário a seguir explicita essa correspondência.

Corolário 1. *Seja X um vértice de um triângulo ABC , então R_X^{ABC} é:*

1. *positivo se, e somente se, o ângulo \widehat{X} for agudo.*
2. *zero se, e somente se, o ângulo \widehat{X} for reto.*
3. *negativo se, e somente se, o ângulo \widehat{X} for obtuso.*

Demonstração. Sabemos que $0^\circ < \widehat{X} < 180^\circ$, assim,

1. $\cos \widehat{X} > 0$, se, e somente se, $0^\circ < \widehat{X} < 90^\circ$, desse modo

$$R_X^{ABC} = 2ab \cos \widehat{X} > 0.$$

2. $\cos \widehat{X} = 0$, se, e somente se, $\widehat{X} = 90^\circ$, desse modo

$$R_X^{ABC} = 2ab \cos 90^\circ = 0.$$

3. $\cos \widehat{X} < 0$, se, e somente se, $90^\circ < \widehat{X} < 180^\circ$, desse modo

$$R_X^{ABC} = 2ab \cos \widehat{X} < 0.$$

□

Observe que dadas as medidas dos três lados de um triângulo podemos classificá-lo quanto ao ângulo calculando o relacionador triangular referente ao vértice oposto ao maior lado.

Exemplo 1. *Seja ABC um triângulo, cujos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} medem, respectivamente, 5 cm, $\sqrt{34}$ cm e $\sqrt{5}$ cm. Classifique o triângulo ABC quanto as medidas dos seus ângulos.*

Resposta: *Note que $\sqrt{5} < \sqrt{25} < \sqrt{34}$, logo, \overline{BC} é o lado de maior comprimento, então vamos calcular o relacionador triangular em relação ao vértice A , assim*

$$R_A^{ABC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{(\sqrt{5})^2 + 5^2 - (\sqrt{34})^2}{2} = \frac{5 + 25 - 34}{2} = -2.$$

Como $R_A^{ABC} = -2 < 0$, pelo Corolário 1, o ângulo \widehat{A} é obtuso, portanto, o triângulo ABC é obtusângulo.

Levando em consideração o triângulo ABC da definição 11, apresentamos casos particulares do relacionador triangular.

1º caso: ABC é retângulo.

Sem perda de generalidade, considere reto o ângulo \widehat{C} . Como já vimos $R_C^{ABC} = 0$, vamos analisar o relacionador triangular em relação aos vértices A e B . Sabemos que

$$R_A^{ABC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

e

$$R_B^{ABC} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = c^2 - b^2$ e $b^2 = c^2 - a^2$, desse modo

$$R_A^{ABC} = \frac{b^2 + c^2 - (c^2 - b^2)}{2} = \frac{b^2 + c^2 - c^2 + b^2}{2} = b^2$$

e

$$R_B^{ABC} = \frac{a^2 + c^2 - (c^2 - a^2)}{2} = \frac{a^2 + c^2 - c^2 + a^2}{2} = a^2.$$

2º caso: ABC é isósceles.

Sem perda de generalidade, considere $AC = CB = a$, assim

$$R_C^{ABC} = \frac{a^2 + a^2 - c^2}{2} = \frac{2a^2 - c^2}{2}$$

e

$$R_A^{ABC} = \frac{a^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{c^2}{2} = R_B^{ABC}.$$

3º caso: ABC é equilátero.

Pelo caso anterior é fácil notar que sendo a a medida do lado do triângulo

$$R_A^{ABC} = R_B^{ABC} = R_C^{ABC} = \frac{a^2}{2}.$$

4.2 Interpretações geométricas e analíticas

Para além das relações algébricas apresentadas, o relacionador triangular admite interpretações que ampliam sua compreensão geométrica e analítica. Geometricamente, ele pode ser entendido como medida associada a projeções ortogonais de lados de um triângulo sobre outros, fornecendo uma forma unificada de calcular comprimentos que surgem em construções clássicas.

Analicamente, o relacionador pode ser identificado com o produto escalar entre vetores que representam lados do triângulo, o que o conecta diretamente à linguagem da geometria analítica. Essas interpretações revelam a versatilidade do conceito, situando-o como ponte entre a geometria euclidiana elementar e abordagens mais gerais da matemática.

O resultado a seguir estabelece uma importante interpretação geométrica do relacionador triangular, associando-o a uma situação de perpendicularidade. Ao considerar uma reta perpendicular a um dos lados do triângulo, verifica-se que o valor do relacionador referente ao vértice oposto permanece constante, independentemente da posição do vértice sobre essa reta, e pode ser expresso em função da projeção ortogonal de um ponto sobre o lado considerado.

Proposição 14. *Considere uma reta r , perpendicular ao segmento \overline{BC} no ponto H , tal que $BC = a$ e $CH = m$. O relacionador triangular referente ao vértice C de todos os triângulos cujos vértices são C , B e um ponto A qualquer da reta r , são iguais. Além disso*

$$R_C^{ABC} = am.$$

Demonstração. Seja A um ponto qualquer da reta r . Considere que $AB = c$, $AC = b$ e $AH = h$. No triângulo AHC , pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$h = \sqrt{b^2 - m^2}.$$

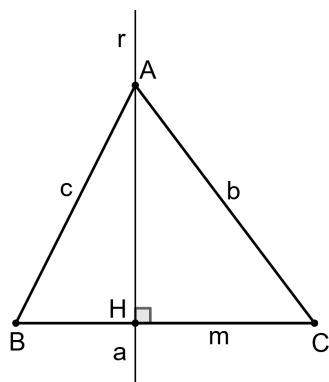
Por outro lado, no triângulo AHB , temos

$$h = \sqrt{c^2 - (a - m)^2},$$

ou seja,

$$\sqrt{b^2 - m^2} = \sqrt{c^2 - (a - m)^2}.$$

Figura 29: Relacionador triangular e projeção ortogonal entre lados do triângulo.



Fonte: Autor (2025).

Note que os radicais são positivos, pois são os quadrados das diferenças das medidas das hipotenusas e dos catetos. Assim

$$\begin{aligned} b^2 - m^2 &= c^2 - (a - m)^2 \\ &= c^2 - a^2 + 2am - m^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$am = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = R_C^{ABC}.$$

□

A proposição 15, a seguir, é apresentada apenas como uma curiosidade, pois a geometria analítica vetorial não faz parte do escopo deste trabalho, de modo que não exploraremos a teoria acerca desse assunto. Convém, porém, apresentar antes a definição de produto interno ou escalar.

Definição 12. (CAVALCANTE, 2015) *Dados dois vetores não nulos \vec{v}_1 e \vec{v}_2 no plano, definimos o produto escalar entre eles como o número real ou escalar, que é igual ao produto de suas normas pelo cosseno do ângulo por eles compreendido.*

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos \theta,$$

em que $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ é o ângulo compreendido por \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .

Obs.: Entenda-se por norma como sendo o comprimento dos vetores.

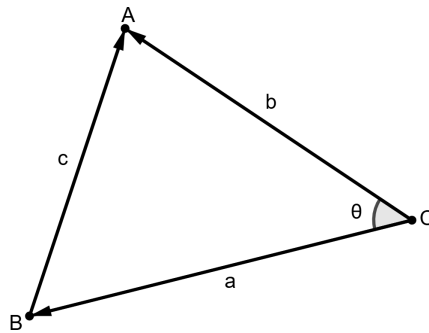
O estudo vetorial do triângulo permite reinterpretar o relacionador triangular em termos algébricos, evidenciando sua relação direta com o produto interno de vetores. Essa correspondência fornece uma conexão elegante entre a Geometria Euclidiana

e a Álgebra Vetorial, permitindo expressar propriedades geométricas de maneira analítica e generalizável.

A proposição a seguir formaliza essa equivalência, mostrando que o valor numérico do relacionador triangular coincide com o produto interno dos vetores que definem o triângulo, tomando como referência o vértice comum a eles.

Proposição 15. *O produto interno de dois vetores não colineares corresponde, numericamente, ao valor do relacionador triangular do triângulo formado por esses vetores, considerando como referência o vértice na origem comum dos vetores.*

Figura 30: O relacionador triangular e o produto interno de vetores no plano



Fonte: Autor (2025).

Demonstração. Sejam \vec{CA} e \vec{CB} vetores no plano e θ o ângulo entre eles. As medidas dos lados do triângulo ABC formado pelos vetores são $\|\vec{CA}\| = b$, $\|\vec{CB}\| = a$, e $\|\vec{CA} - \vec{CB}\| = c$, como mostra a Figura 30. Pela lei dos cossenos, segue que

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \theta \\ &\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = ab \cos \theta. \end{aligned}$$

Por outro lado,

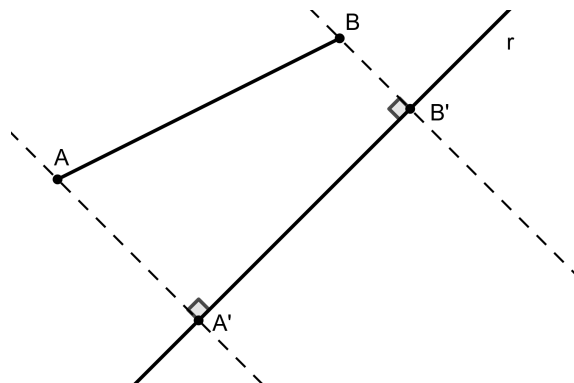
$$R_C^{ABC} = \|\vec{CB}\| \cdot \|\vec{CA}\| \cdot \cos \theta = \vec{CB} \cdot \vec{CA}.$$

□

Para compreender as relações métricas que envolvem a projeção de um lado de um triângulo sobre outro, é necessário, inicialmente, definir o conceito de projeção ortogonal de um segmento de reta sobre uma reta qualquer. Essa definição servirá de base para o entendimento das propriedades que serão apresentadas a seguir.

Definição 13. Sejam \overline{AB} um segmento de reta e r uma reta no plano, conforme vemos na Figura 31. Denotemos por A' e B' os pontos de interseção de r com as retas perpendiculares a r que passam, respectivamente, por A e B . O segmento $\overline{A'B'}$ é chamado de **projeção ortogonal** de \overline{AB} sobre r .

Figura 31: Projeção ortogonal do segmento \overline{AB} sobre a reta r



Fonte: Autor (2025).

Agora que definimos a projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta, podemos aplicá-la ao contexto do triângulo para determinar a projeção de um de seus lados sobre o outro.

O resultado a seguir estabelece uma relação direta entre essa projeção e o relacionador triangular correspondente, mostrando que o comprimento projetado pode ser expresso de forma simples em função desse relacionador.

Proposição 16. Seja ABC um triângulo, sendo H o pé da altura em relação ao vértice A e $CH = m$ a projeção ortogonal do lado \overline{CA} sobre a reta suporte do lado \overline{CB} , sendo $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, a medida da projeção ortogonal de \overline{CA} sobre a reta suporte de \overline{CB} é dada por

$$m = \frac{|R_C^{ABC}|}{a}.$$

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em dois casos:

1º caso: **O ângulo \widehat{C} não é obtuso.**

É válido que

$$R_C^{ABC} = ab \cos \widehat{C},$$

ou seja,

$$\cos \widehat{C} = \frac{R_C^{ABC}}{ab}. \quad (9)$$

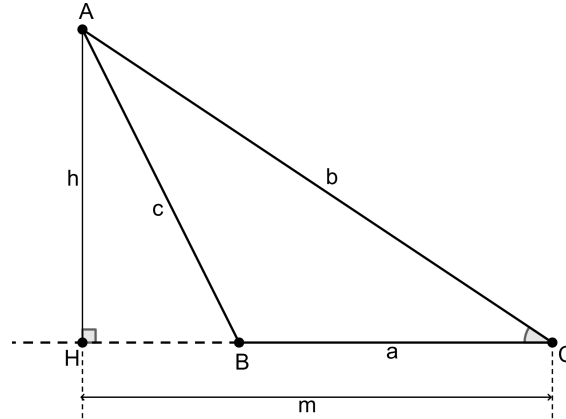
Além disso, note que

$$\cos \widehat{C} = \frac{m}{b}. \quad (10)$$

Substituindo (9) em (10), obtemos

$$m = b \frac{R_C^{ABC}}{ab} = \frac{R_C^{ABC}}{a}.$$

Figura 32: Projeção ortogonal do lado \overline{CA} sobre o lado \overline{CB} (1º caso)



Fonte: Autor (2025).

2º caso: O ângulo \widehat{C} é obtuso.

Note que

$$\cos(180^\circ - \widehat{BCA}) = \frac{m}{b}.$$

Isolando m e aplicando a relação entre o cosseno dos suplementares, temos

$$\begin{aligned} m &= b \cos(180^\circ - \widehat{BCA}) \\ &= -b \cos \widehat{BCA}. \end{aligned}$$

Mas $\cos \widehat{BCA} = \frac{R_C^{ABC}}{ab}$, desse modo

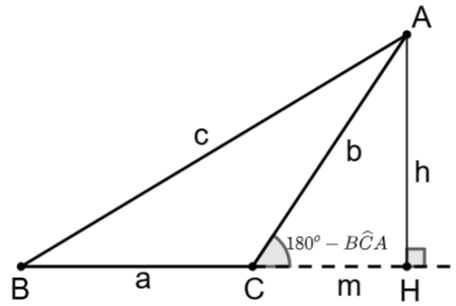
$$\begin{aligned} m &= -b \frac{R_C^{ABC}}{ab} \\ &= -\frac{R_C^{ABC}}{a}. \end{aligned}$$

No caso em que \widehat{C} é obtuso, já vimos que $R_C^{ABC} < 0$, portanto, para ambos os casos, tem-se

$$m = \frac{|R_C^{ABC}|}{a}.$$

□

Figura 33: Projeção ortogonal do lado \overline{CA} sobre o lado \overline{CB} (2º caso)

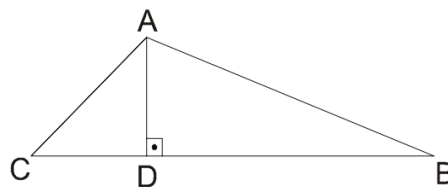


Fonte: Autor (2025).

As demonstrações para os demais casos segue de forma análoga. Assim como foi demonstrado para a projeção ortogonal do lado \overline{AB} sobre a reta suporte do lado \overline{BC} , o mesmo raciocínio pode ser aplicado, por exemplo, à projeção de \overline{BC} sobre a reta suporte de \overline{AB} , resultando no quociente entre módulo do relacionador triangular referente ao vértice comum ao lado projetado e o lado que receberá a projeção pela medida do lado que recebe a projeção. Desse modo, a medida n da projeção do lado \overline{BC} sobre a reta suporte do lado \overline{AB} seria dada por

$$n = \frac{|R_B^{ABC}|}{c}.$$

Exemplo 2. (FUVEST, 2006) Na figura abaixo, tem-se $AC = 3$, $AB = 4$ e $CB = 6$. O valor de CD é



Fonte: (FUVEST, 2006).

- (a) $\frac{17}{12}$ (b) $\frac{19}{12}$ (c) $\frac{23}{12}$ (d) $\frac{25}{12}$ (e) $\frac{29}{12}$

Resposta: Observe que CD é a medida da projeção ortogonal do lado \overline{CA} sobre a reta suporte do lado \overline{CB} . Assim, temos que calcular o relacionador triangular referente ao vértice C :

$$R_C^{ABC} = \frac{3^2 + 6^2 - 4^2}{2} = \frac{29}{2}.$$

Assim,

$$CD = \frac{\frac{29}{2}}{6} = \frac{29}{12}.$$

Portanto, a alternativa correta é letra (e).

A partir das relações estabelecidas entre o relacionador triangular e as projeções ortogonais, é possível deduzir propriedades métricas de proporcionalidade entre os lados de um triângulo e suas respectivas projeções.

O resultado a seguir mostra que as projeções ortogonais de dois lados sobre as retas suportes uma da outra conservam a razão existente entre os próprios lados.

Corolário 2. *Sejam ABC um triângulo com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$ e m e n as medidas das projeções ortogonais, respectivamente, do lado \overline{AB} sobre a reta suporte do lado \overline{BC} e do lado \overline{BC} sobre a reta suporte do lado \overline{AB} , se o ângulo \widehat{B} não for reto, então*

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{a}.$$

Demonstração. Note que $m = \frac{R_B^{ABC}}{a}$ e $n = \frac{R_B^{ABC}}{c}$ assim, temos

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{R_B^{ABC}}{a}}{\frac{R_B^{ABC}}{c}} = \frac{c}{a}.$$

□

Em relação às projeções ortogonais, podemos apresentar alguns casos particulares. Considere um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, vamos determinar a medida m da projeção ortogonal do lado \overline{AB} sobre a reta suporte do lado \overline{BC} , nos seguintes casos:

1º caso: ABC é **retângulo** A

Como o triângulo ABC é retângulo em A , segue que $R_B^{ABC} = c^2$, assim

$$m = \frac{R_B^{ABC}}{a} = \frac{c^2}{a}.$$

2º caso: ABC é **isósceles** com $AB = AC$

Como o triângulo ABC é isósceles com $AB = AC$, segue que $R_B^{ABC} = \frac{a^2}{2}$, assim

$$m = \frac{R_B^{ABC}}{a} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}.$$

4.3 Semelhança e deslocamento de vértices

Nesta subseção apresentamos resultados que estendem o uso do relacionador triangular para além das situações já exploradas. Primeiramente, analisamos o comportamento do relacionador em triângulos semelhantes, mostrando que ele se transforma de maneira quadrática em relação à razão de semelhança.

Em seguida, discutimos como o deslocamento de um vértice ao longo da reta suporte de um lado modifica o valor do relacionador correspondente, revelando a previsibilidade dessa variação.

Ao analisarmos triângulos semelhantes, é natural investigar como o relacionador triangular se comporta sob transformações de ampliação ou redução. Como as medidas lineares variam proporcionalmente e o relacionador envolve o quadrado dos lados, espera-se que ele se altere de acordo com o quadrado da razão de semelhança.

O resultado a seguir confirma essa relação.

Proposição 17. *Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos semelhantes, cuja razão de semelhança é k . Seja X um vértice do triângulo ABC correspondente ao vértice X' do triângulo $A'B'C'$. Nessas condições*

$$R_X^{ABC} = k^2 R_{X'}^{A'B'C'}.$$

Demonstração. Sejam $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ e $A'B' = c'$, $B'C' = a'$, $C'A' = b'$. Sem perda de generalidade, considere $X = C$, assim $X' = C'$. Desse modo, $a = ka'$, $b = kb'$ e $c = kc'$, assim

$$R_C^{ABC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{(ka')^2 + (kb')^2 - (kc')^2}{2} = k^2 \cdot \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{2} = k^2 R_{C'}^{A'B'C'}.$$

□

O deslocamento de um vértice de um triângulo ao longo de uma semirreta que contém um de seus lados permite analisar como o relacionador triangular varia em função dessa mudança de posição.

O resultado a seguir mostra que essa variação ocorre de forma linear, dependendo apenas da razão entre a nova distância percorrida e a medida original do lado considerado.

Proposição 18. *Sejam \overrightarrow{BC} uma semirreta e \overline{BA} um segmento não paralelo a \overline{BC} . Considere $C' \neq B$ um ponto qualquer pertencente à semirreta \overrightarrow{BC} , sendo $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ e $CC' = k$. Nessas condições, temos*

1^o caso: Se o ponto C está entre B e C' , então

$$R_B^{ABC'} = \frac{(a+k)}{a} \cdot R_B^{ABC}.$$

2^o caso: Se o ponto C' está entre B e C , então

$$R_B^{ABC'} = \frac{(a-k)}{a} \cdot R_B^{ABC}.$$

Demonstração. Seja m a medida da projeção ortogonal do segmento \overline{BA} sobre a reta suporte do segmento \overline{BC} , conforme ilustrado nas Figuras 34a e 34b, que representam, respectivamente, cada um dos casos analisados.

1º caso: Note que $|R_B^{ABC'}| = m(a+k)$ e $|R_B^{ABC}| = ma$. Por conseguinte, verifica-se que

$$\frac{|R_B^{ABC'}|}{|R_B^{ABC}|} = \frac{m(a+k)}{ma}.$$

Observe que $R_B^{ABC'}$ e R_B^{ABC} possuem o mesmo sinal, pois estão associados ao mesmo ângulo. Dessa forma, os módulos podem ser descartados, obtendo-se o resultado desejado:

$$R_B^{ABC'} = \frac{(a+k)}{a} \cdot R_B^{ABC}.$$

2º caso: Nesse caso, temos que

$$|R_B^{ABC'}| = m(a-k)$$

e

$$|R_B^{ABC}| = ma,$$

assim sendo, temos

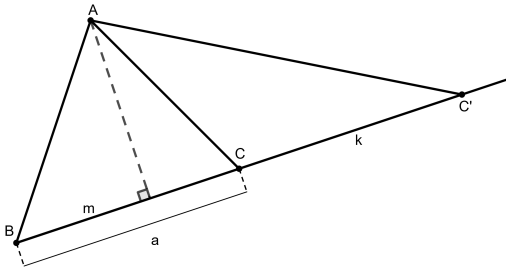
$$\frac{|R_B^{ABC'}|}{|R_B^{ABC}|} = \frac{m(a-k)}{ma}.$$

Portanto,

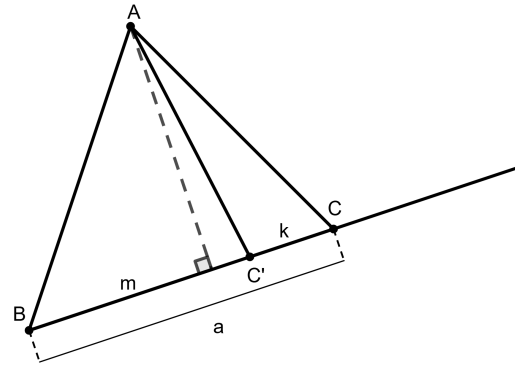
$$R_B^{ABC'} = \frac{(a-k)}{a} \cdot R_B^{ABC}.$$

Figura 34: Deslocamentos do ponto C' sobre a reta suporte do lado \overline{BC} .

(a) Ponto C entre os pontos B e C' .



(b) ponto C' entre os pontos B e C .



Fonte: Autor (2025).

Conclui-se, portanto, que em ambos os casos analisados a relação obtida entre $R_B^{ABC'}$ e R_B^{ABC} se mantém válida, diferindo apenas pelo sinal do termo aditivo. Assim, verifica-se que o resultado demonstrado é coerente para qualquer posição relativa do ponto, confirmando a generalidade da expressão estabelecida.

□

5 Altura e relações trigonométricas no triângulo

Nesta seção serão desenvolvidas expressões envolvendo a altura e os ângulos de um triângulo a partir do relacionador triangular. Inicialmente, apresenta-se uma equação para o cálculo da altura relativa a um vértice em função das medidas dos lados e do relacionador correspondente, o que permite também deduzir novas expressões para a área do triângulo.

Em seguida, é tratado o ortocentro, destacando-se a demonstração de sua existência e a obtenção de equações que determinam as distâncias de cada vértice a esse ponto notável. Por fim, retomam-se as razões trigonométricas, já definidas anteriormente, mas agora expressas em função dos lados e do relacionador.

Entre as aplicações do relacionador triangular, destaca-se sua relação com a altura do triângulo. A expressão a seguir estabelece uma forma alternativa de calcular a medida da altura em função dos lados e do relacionador, evidenciando mais uma conexão entre esse conceito e os elementos métricos fundamentais do triângulo.

Proposição 19. *Seja h_A a medida da altura de um triângulo ABC em relação ao vértice A , tal que $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. A medida h_A é dada por:*

$$h_A = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{a}.$$

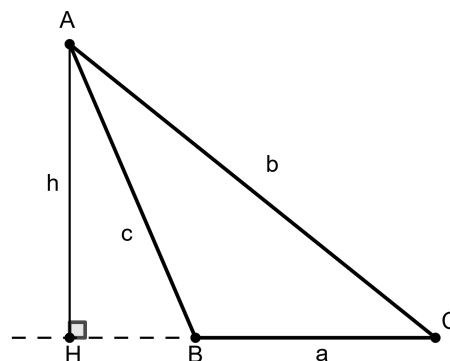
Em relação aos demais vértices, temos as expressões correspondentes

$$h_B = \frac{\sqrt{(bc)^2 - (R_A^{ABC})^2}}{b} \text{ e } h_C = \frac{\sqrt{(ca)^2 - (R_B^{ABC})^2}}{c}.$$

Demonstração. Faremos a demonstração apenas em relação ao vértice A , uma vez que, as demonstrações para os demais casos são análogas.

Seja H o pé da altura relativa ao vértice A , como na Figura 35. Considere

Figura 35: Altura \overline{AH} do triângulo ABC



Fonte: Autor (2025).

$CH = m$. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$h_A^2 + m^2 = b^2 \Rightarrow h = \sqrt{b^2 - m^2}.$$

Mas $m = \frac{|R_C^{ABC}|}{a}$, assim

$$\begin{aligned} h_A &= \sqrt{b^2 - \left(\frac{|R_C^{ABC}|}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{b^2 - \frac{(R_C^{ABC})^2}{a^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{a}. \end{aligned}$$

□

Como a área do triângulo é dada pela metade do produto entre a medida de um lado pela altura correspondente é imediato perceber que a área do triângulo ABC pode ser dada por

$$A_{ABC} = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{2} \quad (11)$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= \frac{\sqrt{(ac)^2 - (R_B^{ABC})^2}}{2}, \\ A_{ABC} &= \frac{\sqrt{(bc)^2 - (R_A^{ABC})^2}}{2}. \end{aligned}$$

Caso particular: Se o triângulo ABC for retângulo em A , segue que $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$, além disso $R_C^{ABC} = b^2$ e desse modo

$$\begin{aligned} h_A &= \frac{\sqrt{(ab)^2 - (b^2)^2}}{a} \\ &= \frac{\sqrt{b^2(a^2 - b^2)}}{a} \\ &= \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \\ &= \frac{bc}{a}. \end{aligned}$$

Entre os elementos notáveis de um triângulo, destaca-se o ponto de interseção das retas que contêm suas alturas. Esse ponto é de grande importância na geometria, pois reúne as perpendiculares traçadas a partir de cada vértice em relação ao lado oposto, revelando uma propriedade de concorrência que caracteriza um dos centros notáveis do triângulo. A proposição a seguir formaliza esse resultado.

Proposição 20. *As retas suportes das alturas de um triângulo se intersectam em um único ponto, esse ponto é chamado ortocentro.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer tal que $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Considere H_A , H_B e H_C os pés das alturas referentes aos vértices A , B , e C , respectivamente. Digamos que ABC seja retângulo, sem perda de generalidade, considere o ângulo \widehat{A} reto. Assim, $A = H_C = H_B$, portanto, não há o que demonstrar. Caso ABC não seja retângulo, temos que:

$$\begin{aligned} AZ &= \frac{R_A^{ABC}}{c}, & ZB &= \frac{R_B^{ABC}}{c}, & BX &= \frac{R_B^{ABC}}{a}, \\ XC &= \frac{R_C^{ABC}}{a}, & CY &= \frac{R_C^{ABC}}{b}, & YA &= \frac{R_A^{ABC}}{b}. \end{aligned}$$

Note que,

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{\frac{R_A^{ABC}}{c}}{\frac{R_B^{ABC}}{c}} \cdot \frac{\frac{R_B^{ABC}}{a}}{\frac{R_C^{ABC}}{a}} \cdot \frac{\frac{R_C^{ABC}}{b}}{\frac{R_A^{ABC}}{b}} = \frac{R_A^{ABC}}{R_B^{ABC}} \cdot \frac{R_B^{ABC}}{R_C^{ABC}} \cdot \frac{R_C^{ABC}}{R_A^{ABC}} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, as alturas se interseccionam em um único ponto. \square

Após estabelecer a concorrência das alturas e a definição do ortocentro, é possível relacionar esse ponto notável ao conceito de relacionador triangular. O resultado a seguir mostra que a distância entre o vértice e o ortocentro pode ser expressa de forma simples em função do relacionador associado e da altura correspondente ao mesmo vértice, evidenciando mais uma aplicação métrica do relacionador triangular.

Proposição 21. *Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$ as medidas dos lados de um triângulo ABC de ortocentro O e altura $AH = h$. A medida s do segmento \overline{AO} é dada por*

$$s = \frac{|R_A^{ABC}|}{h}.$$

Demonstração. Caso o ângulo \widehat{A} seja reto, é trivial notar que a proposição é verdadeira. Caso contrário, considere $\overline{CH_C}$ uma altura do triângulo ABC , como apresentada na Figura 36.

Desse modo

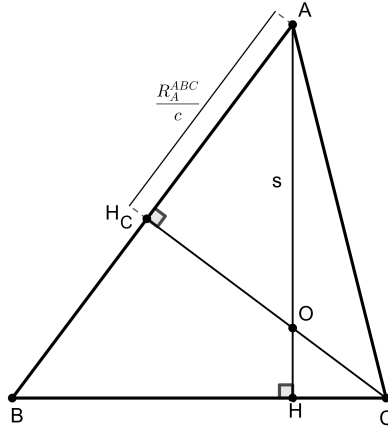
$$AH_C = \frac{|R_A^{ABC}|}{c}.$$

Pelo caso AA, os triângulos AHB e AH_CO são semelhantes, desse modo

$$\frac{s}{\frac{|R_A^{ABC}|}{c}} = \frac{c}{h}$$

$$\Rightarrow s = \frac{|R_A^{ABC}|}{h}.$$

Figura 36: Distância entre o vértice A e o ortocentro O de um triângulo ABC



Fonte: Autor (2025).

Conclui-se, portanto, que a relação estabelecida se mantém verdadeira em todas as configurações do triângulo ABC , comprovando a proposição. □

Sendo h_B e h_C as medidas das alturas referentes aos vértices B e C , respectivamente, de um triângulo ABC de ortocentro O é análogo demonstrar que

$$s_A = \frac{|R_B^{ABC}|}{h_B}, \text{ em que } s_A = BO \text{ e } s_B = \frac{|R_C^{ABC}|}{h_C}, \text{ em que } s_C = CO.$$

Com a expressão do cosseno em função do relacionador triangular (vide Proposição 16, onde se obtém $\cos \hat{C} = \frac{R_C^{ABC}}{ab}$), podemos deduzir fórmulas análogas para o seno e para a tangente do ângulo \hat{C} .

Proposição 22. *Seja ABC um triângulo com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Então,*

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{R_C^{ABC}}, \quad \text{para } \hat{C} \neq 90^\circ.$$

Demonstração. Da relação estabelecida anteriormente, tem-se

$$\cos \hat{C} = \frac{R_C^{ABC}}{ab}.$$

Pela relação fundamental da trigonometria,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 \widehat{C} &= 1 - \cos^2 \widehat{C} = 1 - \left(\frac{R_C^{ABC}}{ab} \right)^2 \\ &= \frac{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}{(ab)^2}.\end{aligned}$$

Como $0^\circ < \widehat{C} < 180^\circ$, concluímos $\operatorname{sen} \widehat{C} > 0$ e, portanto,

$$\operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{ab}. \quad (12)$$

Logo, para $\widehat{C} \neq 90^\circ$ (isto é, $R_C^{ABC} \neq 0$),

$$\operatorname{tg} \widehat{C} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{C}}{\cos \widehat{C}} = \frac{\frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{ab}}{\frac{R_C^{ABC}}{ab}} = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{R_C^{ABC}}.$$

□

6 Medida de uma ceviana de um triângulo

Nesta seção desenvolve-se uma equação para o cálculo da medida de uma ceviana em um triângulo em função de seus lados e do relacionador triangular. Tal resultado, que se mostra equivalente ao Teorema de Stewart, fornece uma base unificadora para a obtenção de expressões relativas a cevianas notáveis. A partir dele, serão tratados em subseções específicas três casos de destaque: a mediana, a bissetriz interna e a mediatriz interna. Para cada um deles, além das equações correspondentes, apresentam-se também propriedades clássicas relacionadas aos pontos notáveis que definem, como o baricentro, o incentro e o circuncentro, bem como a dedução de expressões para raios de círculos associados ao triângulo.

Os resultados obtidos até aqui permitem estabelecer uma relação geral entre o comprimento de uma ceviana e os elementos métricos do triângulo. A expressão a seguir fornece a medida de qualquer ceviana traçada a partir de um vértice em função dos lados do triângulo e do relacionador triangular correspondente, variando de acordo com a posição do ponto considerado sobre a reta suporte do lado oposto.

Teorema 6. *Seja ABC um triângulo em que os lados \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} possuem, respectivamente, comprimentos c , b e a . Considere um ponto D pertencente à reta suporte de \overline{BC} tal que $BD = m$ e defina $i = \frac{m}{a}$. Denotando por x o comprimento da ceviana \overline{AD} , tem-se:*

1^o caso: Se o ponto D pertence à semirreta \overrightarrow{BC} , então

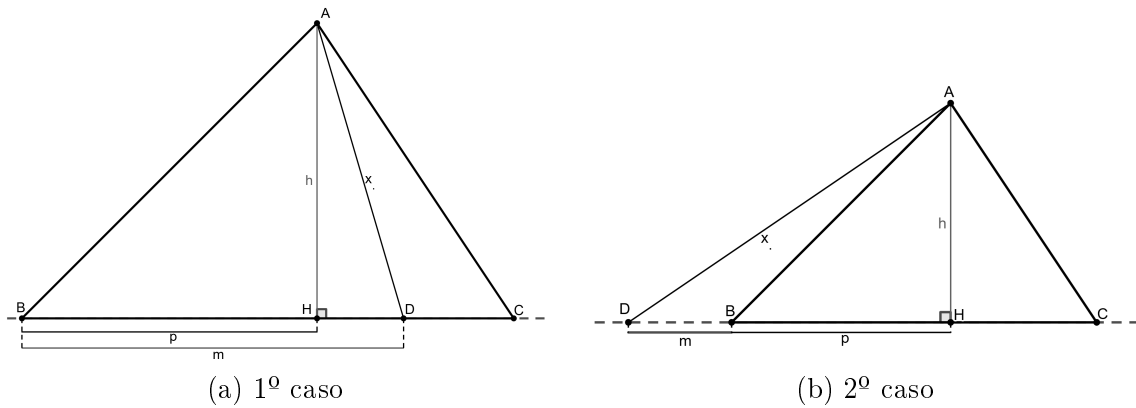
$$x = \sqrt{m^2 - 2iR_B^{ABC} + c^2};$$

2^o caso: Se o ponto D não pertence à semirreta \overrightarrow{BC} , então

$$x = \sqrt{m^2 + 2iR_B^{ABC} + c^2}.$$

Demonstração. Seja $AH = h$ uma altura do triângulo ABC e $BH = p$, conforme vemos nas Figuras 37 (a e b).

Figura 37: Medida de uma ceviana.



Fonte: Autor (2025).

1^o caso: **O ponto D pertence à semirreta \overrightarrow{BC} :**

Observe que se o ângulo \widehat{B} for agudo:

$$HD = m - p,$$

caso contrário,

$$HD = m + p.$$

Note que p é a medida da projeção ortogonal do lado \overline{AB} sobre a reta suporte do lado \overline{BC} , ou seja,

$$p = \frac{|R_B^{ABC}|}{a},$$

desse modo, se \widehat{B} é agudo, $R_B^{ABC} > 0$ e assim:

$$HD = m - \frac{R_B^{ABC}}{a},$$

por outro lado, se \widehat{B} não é agudo, $R_B^{ABC} \leq 0$ e assim:

$$\begin{aligned}
HD &= m + \frac{(-R_B^{ABC})}{a} \\
&= m - \frac{R_B^{ABC}}{a},
\end{aligned}$$

ou seja, $HD = m - \frac{R_B^{ABC}}{a}$, independente de \widehat{B} ser agudo ou não. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AHD , temos

$$x^2 = \left(m - \frac{R_B^{ABC}}{a}\right)^2 + h^2.$$

Mas, como

$$h = \frac{\sqrt{a^2c^2 - (R_B^{ABC})^2}}{a},$$

temos

$$x^2 = \frac{(ma - R_B^{ABC})^2}{a^2} + \frac{a^2c^2 - (R_B^{ABC})^2}{a^2},$$

que resulta em

$$x^2 = \frac{m^2a^2 - 2amR_B^{ABC} + a^2c^2}{a^2},$$

e, portanto,

$$x^2 = m^2 - \frac{2mR_B^{ABC}}{a} + c^2.$$

Como definimos $\frac{m}{a} = i$, segue o resultado

$$x = \sqrt{m^2 - 2iR_B^{ABC} + c^2}.$$

2º caso: O ponto D não pertence à semirreta \overrightarrow{BC} :

Observe que se o ângulo \widehat{B} for obtuso e o ponto D estiver entre H e B , temos:

$$HD = p - m,$$

mas se o ponto H estiver entre os pontos D e B , temos

$$HD = m - p.$$

Portanto, $HD^2 = (m - p)^2$.

Caso o ângulo \widehat{B} não seja obtuso, temos

$$HD = m + p.$$

Como no caso anterior, p é medida da projeção ortogonal do lado \overline{AB} sobre a reta suporte do lado \overline{BC} , ou seja,

$$p = \frac{|R_B^{ABC}|}{a},$$

desse modo, se \widehat{B} é obtuso, então $R_B^{ABC} < 0$ e assim:

$$\begin{aligned} HD^2 &= \left(m - \frac{(-R_B^{ABC})}{a} \right)^2 \\ &= \left(m + \frac{R_B^{ABC}}{a} \right)^2. \end{aligned}$$

por outro lado, se \widehat{B} não é obtuso, então $R_B^{ABC} \geq 0$ e assim:

$$HD^2 = \left(m + \frac{(R_B^{ABC})}{a} \right)^2,$$

ou seja, $HD^2 = \left(m + \frac{R_B^{ABC}}{a} \right)^2$, independente de \widehat{B} ser agudo ou não.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AHD , temos

$$x^2 = \left(m + \frac{R_B^{ABC}}{a} \right)^2 + h^2.$$

Mas, $h = \frac{\sqrt{a^2c^2 - (R_B^{ABC})^2}}{a}$, desse modo

$$x^2 = \frac{(ma + R_B^{ABC})^2}{a^2} + \frac{a^2c^2 - (R_B^{ABC})^2}{a^2},$$

o que resulta em

$$x^2 = \frac{m^2a^2 + 2amR_B^{ABC} + a^2c^2}{a^2},$$

e, portanto,

$$x^2 = m^2 + \frac{2mR_B^{ABC}}{a} + c^2.$$

Como definimos $\frac{m}{a} = i$, segue o resultado

$$x = \sqrt{m^2 + 2iR_B^{ABC} + c^2}.$$

□

O teorema a seguir, conhecido como Teorema de Stewart, é um clássico da geometria euclidiana plana e equivale ao teorema 6 previamente enunciado e demonstrado.

Apresentaremos sua formulação e demonstração considerando o caso em que a ceviana é interna ao triângulo.

Teorema 7. (Teorema de Stewart) *Seja ABC um triângulo cujos lados \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} medem, respectivamente, c , b e a . Se D é um ponto sobre o lado \overline{BC} , tal que $BD = m$, $CD = n$ e $AD = x$, então*

$$x = \sqrt{\frac{mb^2 - amn + nc^2}{a}}.$$

Demonstração. Pelo Teorema anterior (6), temos

$$x = \sqrt{m^2 - 2iR_B^{ABC} + c^2}.$$

Substituindo $i = \frac{m}{a}$ e $R_B^{ABC} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$, obtemos

$$x = \sqrt{\frac{am^2 - 2mR_B^{ABC} + ac^2}{a}} = \sqrt{\frac{am^2 - m(a^2 + c^2 - b^2) + ac^2}{a}}.$$

Reorganizando os termos e usando $a = m + n$, resulta

$$x = \sqrt{\frac{mb^2 - amn + nc^2}{a}}.$$

□

6.1 Medianas

As medianas de um triângulo constituem um dos exemplos mais importantes de cevianas, pois além de dividirem o triângulo em duas regiões de mesma área, relacionam-se diretamente com propriedades métricas e pontos notáveis. Nesta subseção apresentamos uma expressão para o cálculo da medida de uma mediana em função dos lados e do relacionador triangular, o que permite, entre outras consequências, a obtenção de resultados clássicos como o Teorema de Booth. Além disso, destacamos o papel do baricentro como ponto de concorrência das medianas e apresentamos uma relação entre as distâncias desse ponto aos vértices do triângulo e as medidas de seus lados.

As medianas constituem elementos notáveis de grande relevância na geometria do triângulo, pois relacionam as medidas dos lados ao ponto médio do lado oposto. Com base nas expressões já estabelecidas para o relacionador triangular, é possível determinar uma fórmula simples para o cálculo da mediana em função dos lados do triângulo e do relacionador correspondente.

Proposição 23. *Seja ABC um triângulo cujos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} medem, respectivamente, c , a e b . Se M é o ponto médio do lado \overline{BC} e $y = AM$ representa a medida da mediana relativa ao vértice A , então:*

$$y = \frac{\sqrt{4R_A^{ABC} + a^2}}{2}.$$

Demonstração. Do Teorema 6, que nos dá a medida de uma ceviana, temos

$$y = \sqrt{m^2 - 2iR_B^{ABC} + c^2},$$

em que $i = \frac{m}{a} = \frac{1}{2}$, além disso, $m = \frac{a}{2}$, e da proposição 12, temos que $c^2 = R_A^{ABC} + R_B^{ABC}$, desse modo

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - R_B^{ABC} + R_A^{ABC} + R_B^{ABC}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + R_A^{ABC}} \\ &= \sqrt{\frac{4R_A^{ABC} + a^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{4R_A^{ABC} + a^2}}{2}. \end{aligned}$$

□

Sendo y_B e y_C as medidas das medianas de um triângulo ABC relativas aos lados \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, é análogo demonstrar que

$$y_B = \frac{\sqrt{4R_B^{ABC} + b^2}}{2}, \quad y_C = \frac{\sqrt{4R_C^{ABC} + c^2}}{2}.$$

Caso particular: Se o triângulo ABC for retângulo em A , teremos $R_A^{ABC} = 0$, logo

$$y_A = \frac{\sqrt{a^2}}{2} = \frac{a}{2}.$$

Ou seja, a hipotenusa é o dobro da mediana a ela relativa. Além disso $R_B^{ABC} = c^2$ e $R_C^{ABC} = b^2$, assim

$$y_B = \frac{\sqrt{4c^2 + b^2}}{2}, \quad y_C = \frac{\sqrt{4b^2 + c^2}}{2}.$$

Teorema 8. (1º Teorema de Booth) *Seja ABC um triângulo com lados $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, cujas medianas correspondentes a esses lados medem, respectivamente, y_C , y_A e y_B . Então, vale a relação:*

$$y_A^2 + y_B^2 + y_C^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Demonstração. De acordo com a proposição 23, temos que

$$y_A = \frac{\sqrt{4R_A^{ABC} + a^2}}{2}, \quad y_B = \frac{\sqrt{4R_B^{ABC} + b^2}}{2}, \quad y_C = \frac{\sqrt{4R_C^{ABC} + c^2}}{2}.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} y_A^2 + y_B^2 + y_C^2 &= \frac{4R_A^{ABC} + a^2}{4} + \frac{4R_B^{ABC} + b^2}{4} + \frac{4R_C^{ABC} + c^2}{4} \\ &= \frac{4(R_A^{ABC} + R_B^{ABC} + R_C^{ABC}) + a^2 + b^2 + c^2}{4}. \end{aligned}$$

Como visto na proposição 11 a soma dos relacionadores é igual a metade da soma dos quadrados das medidas dos lados do triângulo e, dessa forma, temos

$$\frac{4\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right) + a^2 + b^2 + c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

□

Assim como ocorre com as alturas, as medianas não são traços independentes: elas se intersectam em um único ponto comum, cuja determinação revela uma importante propriedade de equilíbrio geométrico do triângulo.

Proposição 24. *As medianas de um triângulo se intersectam em um mesmo ponto chamado baricentro.*

Demonstração. Sejam M_A , M_B e M_C os pontos médios dos lados BC , AC e AB de um triângulo ABC , então

$$\frac{AY_C}{Y_CB} \cdot \frac{BY_A}{Y_AC} \cdot \frac{CY_B}{Y_BA} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

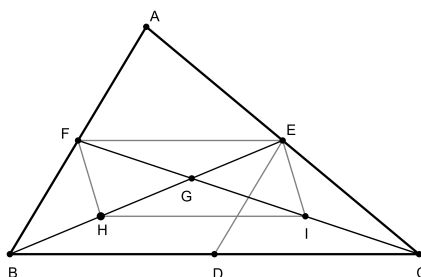
Portanto, pelo Teorema de Ceva, as medianas se intersectam em um mesmo ponto.

□

A partir da formulação apresentada por (LINARES, 2023), enunciamos e demonstramos a seguinte proposição.

Proposição 25. *A distância de um vértice de um triângulo ao seu baricentro é o dobro da distância do seu baricentro ao pé da mediana correspondente.*

Figura 38: Baricentro G do triângulo ABC



Fonte: Autor (2025).

Demonstração. Sejam ABC um triângulo, \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} suas medianas e G seu baricentro, conforme vemos na Figura 38. Assim, pela recíproca do Teorema de Tales o segmento \overline{EF} é paralelo ao segmento \overline{BC} , bem como os segmentos \overline{BF} e \overline{DE} , desse modo $BDEF$ é um paralelogramo, logo $EF = BD = DC = \frac{BC}{2}$. Sejam H e I pontos médios dos lados \overline{BG} e \overline{CG} , respectivamente. Novamente pelo Teorema de Tales, segue que o segmento \overline{HI} é paralelo ao segmento \overline{BC} , também pelo Teorema de Tales, o segmento \overline{HF} é paralelo à mediana \overline{AD} , que por sua vez é paralela ao segmento \overline{IE} , ou seja, \overline{HF} e \overline{IE} são paralelos, logo o quadrilátero $EFHI$ é um paralelogramo e suas diagonais \overline{HE} e \overline{FI} encontram-se nos seus pontos médios: $HG = GE$ e $FG = GI$. Conclui-se que $BG = 2GE$ e $CG = 2GF$. Analogamente demonstra-se que $AG = 2GD$.

□

Entre um apanhado de equações relacionadas à geometria euclidiana plana, (OSORIO, 2006), apresenta, sem demonstrar, o teorema que enunciamos e provamos a seguir.

Teorema 9. (2^o Teorema de Booth) Sejam ABC um triângulo e G seu baricentro. Considere $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AG = d_A$, $BG = d_B$ e $CG = d_C$, então, vale a equação:

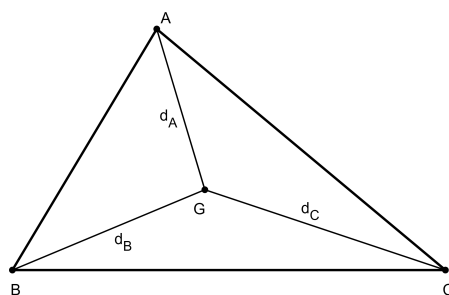
$$\frac{d_A^2 + d_B^2 + d_C^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{3}.$$

Demonstração. Na Figura 39, o ponto G representa o baricentro do triângulo ABC , isto é, o ponto de interseção de suas três medianas. Denotemos por m_A , m_B e m_C as medidas das medianas correspondentes aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente.

Assim, as distâncias do baricentro aos vértices do triângulo podem ser expressas por

$$d_A = \frac{2}{3} m_A, \quad d_B = \frac{2}{3} m_B, \quad d_C = \frac{2}{3} m_C.$$

Figura 39: 2º Teorema de Booth



Fonte: Autor (2025).

Note que

$$d_A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{4R_A^{ABC} + a^2}}{2} = \frac{\sqrt{4R_A^{ABC} + a^2}}{3}.$$

Analogamente,

$$d_B = \frac{\sqrt{4R_B^{ABC} + b^2}}{3}, \quad d_C = \frac{\sqrt{4R_C^{ABC} + c^2}}{3}.$$

Assim, temos

$$\frac{d_A^2 + d_B^2 + d_C^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{4R_A^{ABC} + a^2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4R_B^{ABC} + b^2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4R_C^{ABC} + c^2}}{3}\right)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Simplificando os quadrados, obtemos

$$\frac{d_A^2 + d_B^2 + d_C^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{4R_A^{ABC} + a^2 + 4R_B^{ABC} + b^2 + 4R_C^{ABC} + c^2}{9(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Como $R_A^{ABC} + R_B^{ABC} + R_C^{ABC} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$, segue que

$$\frac{d_A^2 + d_B^2 + d_C^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{4 \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + a^2 + b^2 + c^2}{9(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Finalmente, concluímos que

$$\frac{d_A^2 + d_B^2 + d_C^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{3}.$$

□

6.2 Bissetrizes internas

As bissetrizes internas de um triângulo constituem outro exemplo notável de cevianas, pois dividem os ângulos em duas partes iguais e se encontram em um ponto notável: o incentro. Nesta subseção, deduziremos uma expressão para a medida de

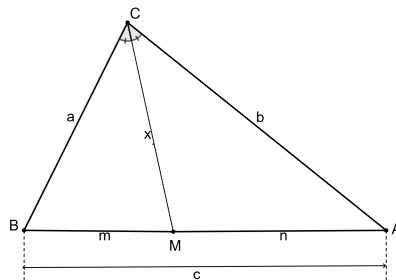
uma bissetriz em função dos lados do triângulo e do relacionador triangular, o que nos permite obter também fórmulas para as razões trigonométricas do ângulo metade. Em seguida, exploraremos propriedades clássicas como a concorrência das bissetrizes no incentro e sua relação com o raio da circunferência inscrita. Esses resultados evidenciam a relevância da bissetriz não apenas como elemento de simetria, mas também como elo entre relações métricas, trigonométricas e pontos notáveis do triângulo.

A partir do conceito de relacionador triangular, é possível expressar a medida da bissetriz de forma compacta e geral, obtendo uma relação que depende apenas dos lados do triângulo e do relacionador associado ao vértice considerado.

Proposição 26. *Seja ABC um triângulo e $CM = x$ a medida de uma bissetriz. Além disso, considere $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Então, vale a relação*

$$x = \frac{\sqrt{2ab(ab + R_C^{ABC})}}{a + b}.$$

Figura 40: Medida da bissetriz interna de um triângulo.



Fonte: Autor (2025).

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em dois casos:

1º caso: ($a = b$) Seja $BM = m$ e $MA = n$, como $a = b$, pelo Teorema da bissetriz interna é imediato perceber que $m = n = \frac{c}{2}$.

Com $a = b$, temos que

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2ab(ab + R_C^{ABC})}}{a + b} \\ &= \frac{\sqrt{2a^2(a^2 + \frac{2a^2 - c^2}{2})}}{2a} \\ &= \frac{\sqrt{2\frac{4a^2 + c^2}{2}}}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{4a^2 - c^2}}{2}.$$

Note que, pelo caso LLL os triângulos CBM e CAM são congruentes e assim os ângulos \widehat{CMB} e \widehat{CMA} têm a mesma medida e são suplementares, logo são retos. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCM , temos $x^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2$. Daí,

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 - \frac{c^2}{4} \\ &= \frac{4a^2 - c^2}{4}. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, segue o resultado

$$x = \frac{\sqrt{4a^2 - c^2}}{2}.$$

2º caso: ($a \neq b$) Seja $BM = m$ e $MA = n$. Pelo Teorema da bissetriz interna, temos

$$\frac{b}{n} = \frac{a}{m},$$

mas $n = c - m$, desse modo

$$\begin{aligned} \frac{b}{c - m} &= \frac{a}{m} \\ ac - ma &= bm. \end{aligned}$$

Donde

$$m = \frac{ac}{a + b}. \quad (13)$$

Veja que

$$\begin{aligned} n &= c - m \\ &= c - \frac{ac}{a + b} \\ &= \frac{c(a + b) - ac}{a + b}. \end{aligned}$$

e simplificando, obtemos

$$n = \frac{bc}{a + b}.$$

Agora, perceba que

$$\cos \widehat{ACM} = \frac{R_C^{ACM}}{bx} \text{ e } \cos \widehat{MCB} = \frac{R_C^{MCB}}{ax}.$$

Como \overline{CM} é bissetriz do triângulo ABC , temos

$$\cos \widehat{ACM} = \cos \widehat{MCB},$$

o que implica

$$\frac{R_C^{ACM}}{b} = \frac{R_C^{MCB}}{a} \Rightarrow aR_C^{ACM} = bR_C^{MCB}.$$

Substituindo as expressões de R_C^{ACM} e R_C^{MCB} , obtemos

$$a \left(\frac{x^2 + b^2 - \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2}{2} \right) = b \left(\frac{x^2 + a^2 - \left(\frac{ac}{a+b}\right)^2}{2} \right).$$

Após simplificações algébricas diretas, chega-se a

$$(a-b)x^2 = ab(a-b) - \frac{c^2 ab(a-b)}{(a+b)^2}.$$

Como $a \neq b$, dividimos ambos os lados por $(a-b)$ e obtemos

$$x^2 = \frac{ab((a+b)^2 - c^2)}{(a+b)^2}.$$

Por fim, concluímos que

$$x = \frac{\sqrt{2ab(ab + R_C^{ACB})}}{a+b}.$$

□

Sendo x_A e x_B as medidas das bissetrizes referentes aos vértice B e C , respectivamente, é análogo mostrar que

$$x_A = \frac{\sqrt{2bc(bc + R_A^{ACB})}}{b+c} \quad \text{e} \quad x_B = \frac{\sqrt{2ac(ac + R_B^{ACB})}}{a+c}.$$

Caso particular: Se o triângulo ABC for retângulo em C , então $R_C^{ABC} = 0$, dessa forma temos

$$x_C = \frac{\sqrt{2ab(ab)}}{a+b} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b} \tag{14}$$

Além disso, como $R_A^{ABC} = b^2$, temos

$$x_A = \frac{\sqrt{2bc(bc + b^2)}}{b+c} = b\sqrt{\frac{2c}{b+c}}.$$

De maneira análoga, conclui-se que

$$x_B = a\sqrt{\frac{2c}{a+c}}.$$

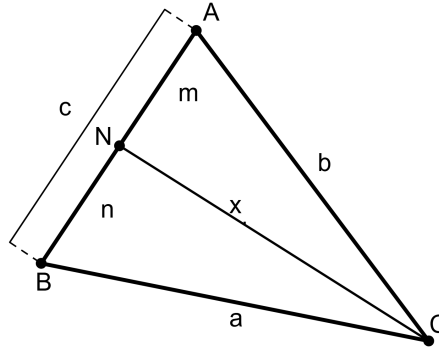
Dadas as medidas dos lados de um triângulo, a seguinte proposição estabelece as razões trigonométricas do ângulo metade em termos desses lados.

Proposição 27. *Seja ABC um triângulo, tal que $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, então valem as relações:*

$$1) \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \sqrt{\frac{ab+R_C^{ABC}}{2ab}}, \quad 2) \sin\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \sqrt{\frac{ab-R_C^{ABC}}{2ab}}, \quad 3) \operatorname{tg}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \sqrt{\frac{ab-R_C^{ABC}}{ab+R_C^{ABC}}}.$$

Demonstração. Seja \overline{CN} a bissetriz do triângulo ABC , como indicado na Figura 41.

Figura 41: Cosseno, seno e tangente do ângulo metade do triângulo.



Fonte: Autor (2025).

Sabemos que $AN = \frac{bc}{a+b}$ e que

$$x = \frac{\sqrt{2ab(ab + R_C^{ABC})}}{a + b}.$$

Assim, o relacionador do triângulo ACN é

$$R_C^{ACN} = \frac{b^2 + x^2 - \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2}{2}.$$

Substituindo a expressão de x e simplificando o numerador, obtemos

$$R_C^{ACN} = \frac{b(ab + R_C^{ABC})}{a + b}.$$

O cosseno do ângulo $\frac{\hat{C}}{2}$ é dado por

$$\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \frac{R_C^{ACN}}{bx} = \frac{ab + R_C^{ABC}}{\sqrt{2ab(ab + R_C^{ABC})}} = \sqrt{\frac{ab + R_C^{ABC}}{2ab}}.$$

Elevando ao quadrado e aplicando a relação fundamental da trigonometria (Proposição 9), segue que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \\ &= \frac{ab - R_C^{ABC}}{2ab}.\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \sqrt{\frac{ab - R_C^{ABC}}{2ab}}.$$

Como $\frac{\hat{C}}{2} < 90^\circ$ em qualquer triângulo, tanto o seno quanto o cosseno são positivos. Assim, a tangente resulta de sua razão:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}{\operatorname{cos}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{ab - R_C^{ABC}}{ab + R_C^{ABC}}}.$$

□

A partir das relações trigonométricas que conectam os lados e ângulos de um triângulo, podemos obter uma expressão direta para o cálculo da bissetriz interna em função das medidas dos lados adjacentes e do ângulo compreendido. Essa relação é apresentada no corolário a seguir.

Corolário 3. *Seja ABC um triângulo cujos lados $BC = a$ e $AC = b$ são adjacentes ao ângulo \hat{A} . A medida x da bissetriz interna correspondente a esse vértice é dada por:*

$$x = \frac{2ab \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{a + b}.$$

Demonstração. Sabemos que

$$x = \frac{\sqrt{2ab(ab + R_C^{ABC})}}{a + b}.$$

Equivalentemente, temos

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{(2ab)^2 \frac{(ab + R_C^{ABC})}{2ab}}}{a + b} \\ &= \frac{2ab \sqrt{\frac{(ab + R_C^{ABC})}{2ab}}}{a + b}.\end{aligned}$$

Mas com $\sqrt{\frac{(ab + R_C^{ABC})}{2ab}} = \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$, segue o resultado:

$$x = \frac{2ab \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}{a + b}.$$

□

As bissetrizes internas de um triângulo possuem uma propriedade de concorrência que define um ponto notável: o *incentro*, como mostramos a seguir. Esse ponto, situado na interseção das bissetrizes, será central para os resultados que seguem, pois caracteriza a posição a partir da qual se estabelecem propriedades métricas associadas ao círculo inscrito.

Proposição 28. *As bissetrizes internas de um triângulo se intersectam em um único ponto chamado incentro.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo tal que $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, cujas bissetrizes internas referentes aos vértices A , B e C são, respectivamente AM_A , BM_B e CM_C . Como vimos anteriormente, análogo a equação (6.2)

$$\begin{aligned} AM_C &= \frac{bc}{a+b}, & M_C B &= \frac{ac}{a+b}, \\ BM_A &= \frac{ac}{b+c}, & M_A C &= \frac{ab}{b+c}, \\ C_M B &= \frac{ab}{a+c}, & M_B A &= \frac{bc}{a+c}. \end{aligned}$$

Desse modo, segue que

$$\frac{AM_C}{M_C B} \cdot \frac{BM_A}{M_A C} \cdot \frac{CM_B}{M_B A} = \frac{\frac{bc}{a+b}}{\frac{ac}{a+b}} \cdot \frac{\frac{ac}{b+c}}{\frac{ab}{b+c}} \cdot \frac{\frac{ab}{a+c}}{\frac{bc}{a+c}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1.$$

Portanto, pelo teorema de Ceva as bissetrizes internas de intersectam no mesmo ponto. □

O incentro, ponto de concorrência das bissetrizes internas de um triângulo, está relacionado a importantes propriedades métricas. Uma delas descreve como ele divide cada bissetriz interna em dois segmentos cujas medidas mantêm proporção com o perímetro do triângulo e com os lados correspondentes. O resultado a seguir apresenta essa relação.

Proposição 29. *Seja ABC um triângulo com lados $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, de perímetro $p = a + b + c$, incentro I e bissetriz interna relativa ao vértice B medindo $BM = x$. Então, as medidas dos segmentos determinados pelo incentro sobre a bissetriz são dadas por:*

$$BI = \frac{a+c}{p} \cdot x \quad e \quad IM = \frac{b}{p} \cdot x.$$

Demonstração. A partir da equação (6.2), segue que

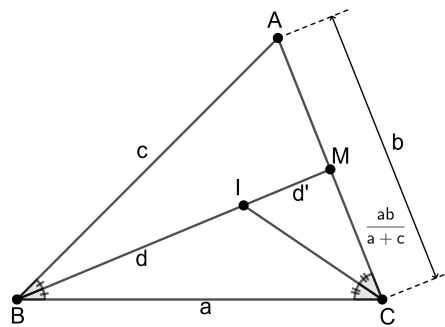
$$CM = \frac{ab}{a+c}.$$

Observe que o segmento CI é bissetriz interna do triângulo MCB , conforme vemos na Figura 42.

Pelo Teorema da bissetriz interna, temos

$$\begin{aligned} \frac{a}{d} &= \frac{\frac{ab}{a+c}}{x-d} \\ &= \frac{ab}{(x-d)(a+c)}. \end{aligned}$$

Figura 42: Distância de um vértice do triângulo ao seu incentro.



Fonte: Autor (2025).

Assim,

$$bd = (x-d)(a+c)$$

$$d(a+b+c) = x(a+c).$$

Daí, usando que $p = a + b + c$, obtemos

$$d = \frac{a+c}{p}x.$$

Agora, perceba que

$$\begin{aligned}
IM &= x - \frac{a+c}{p}x \\
&= \frac{(a+b+c)x - (a+c)x}{a+b+c} \\
&= \frac{ax + bx + cx - ax - cx}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$IM = d' = \frac{b}{p}x.$$

Conclui-se, portanto, que as relações obtidas satisfazem o enunciado, encerrando a demonstração. □

Observe que o incentro divide a bissetriz do ângulo \hat{B} na seguinte razão

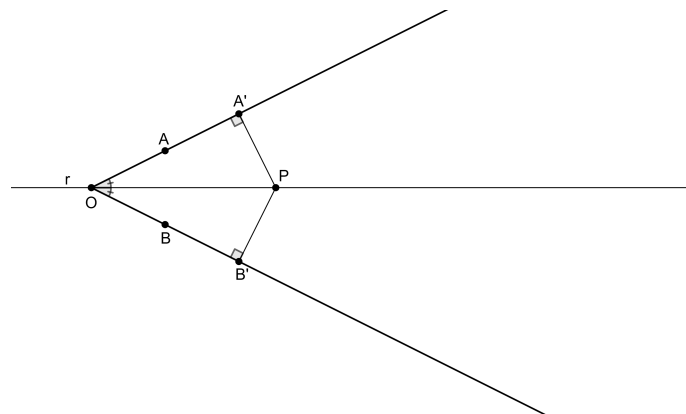
$$\frac{d}{d'} = \frac{\frac{a+c}{p}x}{\frac{b}{p}x} = \frac{a+c}{b}.$$

A bissetriz interna de um ângulo admite uma caracterização por meio de distâncias: seus pontos são exatamente aqueles equidistantes dos dois lados do ângulo. A proposição a seguir formaliza essa caracterização do lugar geométrico.

Proposição 30. *Sejam $A\hat{O}B$ um ângulo e seja r a sua bissetriz. Um ponto P pertence à reta r se, e somente se, a sua distância à semirreta \overrightarrow{OA} for igual à sua distância à semirreta \overrightarrow{OB} .*

Demonstração. Seja $A\hat{O}B$ um ângulo e P um ponto sobre sua bissetriz r , conforme vemos na Figura 43.

Figura 43: Ponto sobre a bissetriz.



Fonte: Autor (2025).

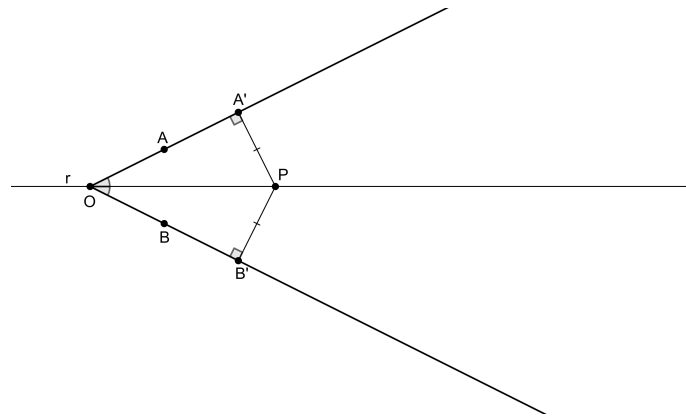
Queremos mostrar que a distância de P à semirreta \overrightarrow{OA} é igual à distância de P a \overrightarrow{OB}

Sejam A' e B' pontos sobre as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , respectivamente, tais que $\widehat{OA'P} = \widehat{OB'P} = 90^\circ$, como $\widehat{AOP} = \widehat{BOP}$, concluímos que $\widehat{OPA} = \widehat{OPB}$, logo, pelo caso ALA, os triângulos PAO e PBO são congruentes, pois compartilham o lado comum OP , portanto $PA = PB$, o que prova o resultado.

Considere agora P um ponto equidistante das semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , como mostrado na Figura 44.

Devemos mostrar que P pertence à bissetriz r do ângulo \widehat{AOB} .

Figura 44: Ponto equidistante de dois lados de um triângulo.



Fonte: Autor (2025).

Observe que os triângulos OAP e OBP são retângulos e compartilham a mesma hipotenusa. Além disso, por hipótese, os catetos \overline{AP} e \overline{BP} são congruentes. Aplicando o Teorema de Pitágoras, concluímos que os catetos \overline{OA} e \overline{OB} também possuem a mesma medida.

Dessa forma, pelo caso LLL, os triângulos OAP e OBP são congruentes. Em consequência, os ângulos \widehat{AOP} e \widehat{BOP} têm a mesma amplitude. Assim, a reta \overleftrightarrow{OP} é a bissetriz do ângulo \widehat{AOB} , o que conclui o resultado. \square

A proposição anterior (30) estabelece que qualquer ponto sobre a bissetriz de um ângulo é equidistante de seus lados.

Como o incentro é a interseção das bissetrizes internas de um triângulo, ele é equidistante dos três lados. Sendo assim, essa distância corresponde ao raio da circunferência inscrita.

O círculo inscrito em um triângulo está intimamente relacionado ao incentro, ponto de interseção das bissetrizes internas. A medida de seu raio é uma das principais grandezas associadas ao triângulo e pode ser expressa de diferentes formas em função de seus lados e ângulos.

A partir das relações estabelecidas com o relacionador triangular, é possível deduzir uma expressão simples para o raio do círculo inscrito, apresentada a seguir.

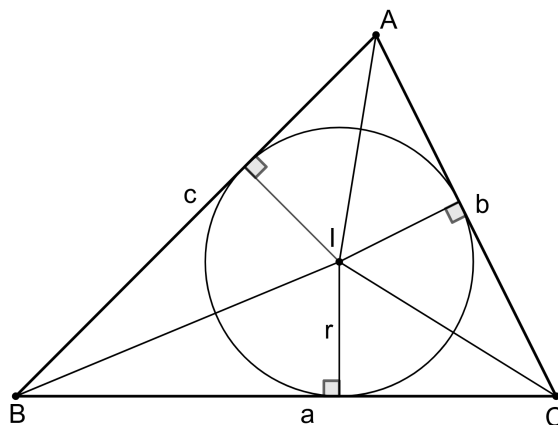
Proposição 31. (Raio do círculo inscrito em função do relacionador triangular) *Seja ABC um triângulo com lados $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, perímetro $p = a + b + c$, incentro I e raio do círculo inscrito r_I . Então:*

$$r_I = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{p}.$$

Demonstração. Observe que de acordo com o enunciado e a Figura 45, temos que

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= A_{CIB} + A_{AIC} + A_{BIA} \\ &= \frac{ar_I}{2} + \frac{br_I}{2} + \frac{cr_I}{2} \\ &= \frac{r_I}{2}(a + b + c) \\ &= \frac{r_I}{2} p. \end{aligned}$$

Figura 45: Medida do raio do círculo inscrito em um triângulo.



Fonte: Autor (2025).

Por outro lado, pela equação (11),

$$A_{ABC} = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{2},$$

de onde concluímos

$$r_I = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{p}.$$

Caso particular 1. Se o triângulo ABC for retângulo em C , então $R_C^{ABC} = 0$, e segue que

$$r_I = \frac{ab}{p}.$$

Caso particular 2: Se o triângulo ABC for isósceles, com $AC = AB$, então

$$R_C^{ABC} = \frac{a^2}{2}.$$

Logo, o raio da circunferência inscrita é

$$r_I = \frac{\sqrt{a^2b^2 - \frac{a^4}{4}}}{p} = \frac{\sqrt{\frac{4a^2b^2 - a^4}{4}}}{p} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2p}.$$

6.3 Mediatrizes e circuncentro

As mediatrizes dos lados de um triângulo possuem papel central na geometria, pois se encontram em um ponto notável denominado circuncentro, centro da circunferência circunscrita ao triângulo. Além da definição clássica, podemos considerar ainda as mediatrizes internas, segmentos contidos na região do triângulo que mantêm a propriedade de equidistância aos extremos do lado correspondente. Nesta subseção, apresentamos a caracterização das mediatrizes, sua relação com o circuncentro e deduções envolvendo o raio da circunferência circunscrita, estabelecendo também conexões entre este e o raio da circunferência inscrita.

Entre as cevianas notáveis associadas aos lados de um triângulo, destaca-se a mediatriz, cuja construção se baseia em princípios de simetria e perpendicularidade. Antes de utilizá-la em resultados posteriores, apresentamos sua definição formal.

Definição 14. *Seja AB um segmento cujo ponto médio é M . Chamamos de mediatriz do segmento \overline{AB} a reta r que passa por M e é perpendicular a AB .*

A mediatriz de um segmento pode ser caracterizada como o conjunto dos pontos que se encontram à mesma distância de suas extremidades. Essa propriedade expressa a simetria do segmento em relação à mediatriz e fundamenta diversas relações métricas na geometria plana.

Proposição 32. *Seja r a mediatriz de um segmento \overline{AB} . Um ponto P pertence à reta r se, e somente se, $AP = PB$.*

Demonstração. Considere o segmento \overline{AB} e um ponto P , tal que $AP = PB$. Se P pertence a \overline{AB} , então P é o seu ponto médio e, portanto, pertence à mediatriz. Por outro lado, se P não pertence ao segmento \overline{AB} , considere a reta r' que passa por P e pelo ponto médio M de \overline{AB} . Os triângulos AMP e BMP são congruentes pelo caso LLL, pois, $PA = PB$, por hipótese, $AM = MB$, pois M é ponto médio de \overline{AB} e \overline{PM} é um lado comum. Desse modo, os ângulos \widehat{PMA} e \widehat{PMB} são congruentes e complementares, logo são retos, assim r' é perpendicular a \overline{AB} e, portanto, é a própria mediatriz r .

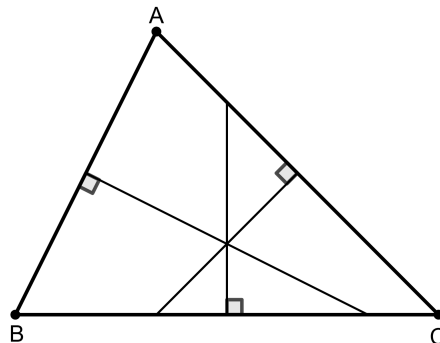
Reciprocamente, seja P um ponto da mediatriz de um segmento \overline{AB} . Se P pertence ao segmento \overline{AB} então ele é o ponto médio. Se P não pertence ao segmento AB , os triângulos AMP e BMP são congruentes pelo caso LAL, e portanto $AP = PB$. \square

A mediatriz de um lado é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de suas extremidades. No contexto de um triângulo, essa caracterização conduz a uma propriedade de concorrência: as três mediatrizes possuem um ponto comum, equidistante dos três vértices. A proposição a seguir formaliza essa propriedade e nomeia esse ponto de interseção como *circuncentro*.

Proposição 33. *As mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam em um mesmo ponto. Esse ponto é chamado circuncentro.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer, r , s e t , respectivamente, as mediatrizes dos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} , e O o ponto de interseção das retas r e s . Assim, temos que $OB = OC$, pois O pertence à reta r . Além disso $OC = OA$, pois O pertence à reta s , desse modo $OB = OA$, por transitividade, segue que O pertence à reta t . \square

Figura 46: Mediatrizes internas de um triângulo.



Fonte: Autor (2025).

A mediatriz interna de um triângulo pode ser compreendida como a porção da mediatriz de um lado que se encontra dentro da região delimitada pelo triângulo. Diferentemente da mediatriz completa, que é uma reta infinita, a mediatriz interna é apenas o segmento compreendido entre o ponto médio do lado e o ponto em que essa reta intercepta outro lado do triângulo. Essa construção permite estender o conceito clássico de mediatriz, normalmente associado ao circuncentro, para uma forma que se mantém inteiramente contida na figura. A seguir, enunciamos a proposição que garante a existência e unicidade desse segmento.

Proposição 34 (Existência e unicidade da mediatriz interna). *Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio de um de seus lados, digamos, \overline{BC} . Existe e é único*

um segmento da mediatriz de \overline{BC} contido no interior da região delimitada pelo triângulo ABC , denominado mediatriz interna relativa ao lado \overline{BC} .

Demonstração. Existência: Seja ABC um triângulo. Vamos mostrar a existência da mediatriz interna referente ao lado \overline{BC} , as demais são análogas. Seja M o ponto médio do segmento \overline{BC} . Vamos dividir em três casos:

1º caso: $\widehat{B} = \widehat{C}$: Nesse caso, o triângulo ABC é isósceles com $AB = AC$. Pelo caso LAL os triângulos AMB e AMC são congruentes. Desse modo, os ângulos \widehat{AMB} e \widehat{AMC} são congruentes e suplementares, logo são retos. Portanto \overline{AM} é uma mediatriz interna.

2º caso: $\widehat{B} < \widehat{C}$: Note que a bissetriz r e a reta suporte do lado \overline{AB} são concorrentes, em um ponto N , pois intersectam \overline{BC} sob ângulos diferentes. Seja \overline{AH} uma altura do triângulo ABC . Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \quad \text{e} \quad AH^2 + CH^2 = AC^2.$$

Mas $AB > AC$ implica $AB^2 > AC^2$ pois o lado \overline{AB} é oposto ao maior ângulo, assim

$$AH^2 + BH^2 > AH^2 + CH^2 \Rightarrow BH^2 > CH^2 \Rightarrow BH > CH$$

Desse modo, o ponto médio do lado \overline{BC} está entre B e H .

Pelo caso AA, os triângulos NBM e ABH são semelhantes e, como $BH > BM$, então $BA > BN$, logo o ponto N está entre B e A , portanto MN é uma mediatriz interna.

3º caso: $\widehat{B} > \widehat{C}$: Nesse caso, a demonstração é análoga ao caso anterior, pois $\widehat{C} < \widehat{B}$. Porém o ponto N estará sobre o lado \overline{AC} .

Unicidade: Sem perda de generalidade, considere o lado \overline{BC} como o referente a uma mediatriz interna de um triângulo ABC . O ponto médio M do segmento \overline{BC} é único (vide Teorema 2).

Suponha, por absurdo, que N e N' são pontos sobre o triângulo tais que \overline{MN} e $\overline{MN'}$ são mediatrizes internas. Se os pontos N e N' estiverem sobre o vértice A , não há o que mostrar.

Considere que os pontos N e N' estejam sobre um mesmo lado, \overline{AB} . Por exemplo, que N esteja entre B e N' . Note que, por definição \widehat{NHB} é reto, mas os ângulos \widehat{NHB} e $\widehat{N'HN}$ são complementares (somam 90°), o que é absurdo.

Se N e N' estiverem sobre o lado \overline{AB} , é análogo.

Suponha agora que N e N' estejam em lados diferentes.

Sem perda de generalidade, suponha N sobre AB e N' sobre AC . Sabemos que $\widehat{NHB} = \widehat{N'HC} = 90^\circ$, mas os ângulos \widehat{NHB} , $\widehat{NHN'}$ e $\widehat{N'HC}$ são suplementares (somam 180°), o que é absurdo. \square

A mediatriz interna de um triângulo é uma ceviana perpendicular ao lado oposto que não passa necessariamente pelo vértice correspondente à altura.

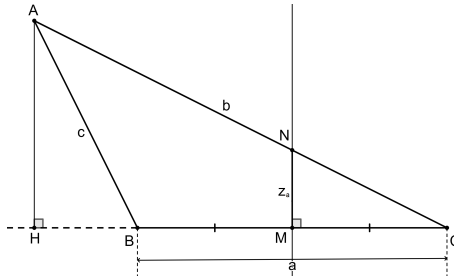
A relação que envolve a medida dessa ceviana e o relacionador triangular permite compreender como a perpendicularidade associada a um lado se relaciona com as demais medidas do triângulo. O resultado a seguir apresenta uma expressão que conecta esses elementos de forma direta.

Proposição 35. *Seja ABC um triângulo cuja mediatriz interna relativa ao lado \overline{BC} possui comprimento z_a . Admitindo, sem perda de generalidade, que $\widehat{B} > \widehat{C}$, e sendo a , b e c as medidas dos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} , respectivamente, tem-se:*

$$z_a = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{ab}{R_C^{ABC}}\right)^2 - 1}.$$

Demonstração. Seja AH a altura do triângulo ABC relativa ao lado \overline{BC} e seja M o ponto médio de \overline{BC} . A mediatriz de \overline{BC} encontra o lado \overline{AC} em N , já que $AC > AB$, conforme ilustrado na Figura 47.

Figura 47: Medida de uma mediatriz interna de um triângulo.



Fonte: Autor (2025).

Pelo caso AA, os triângulos AHC e NMC são semelhantes, de modo que

$$\frac{NM}{AH} = \frac{MC}{HC}.$$

Agora, observemos que

$$HC = \frac{|R_C^{ABC}|}{a},$$

pois HC é a projeção ortogonal do lado \overline{CA} sobre a reta suporte de \overline{BC} . Além disso,

$$AH = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{a}.$$

Substituindo essas expressões na proporção, obtemos:

$$\frac{z_a}{\frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{a}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{|R_C^{ABC}|}{a}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} z_a &= \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{|R_C^{ABC}|} \\ &= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{ab}{R_C^{ABC}}\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$

□

Uma observação a ser feita é que quando calcularmos a medida da mediatriz interna referente ao lado \overline{XY} , sendo X e Y vértices de um triângulo ABC (ou seja, $X, Y \in A, B, C$) devemos usar o relacionador triangular referente ao menor ângulo entre \hat{X} e \hat{Y} e as medidas dos lados sobre os quais estão as extremidades da mediatriz interna. Por exemplo, seja ABC um triângulo, sem perda de generalidade, considere $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$.

Considere ainda z_a, z_b e z_c as medidas das bissetrizes internas referentes aos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} , respectivamente. Então, valem as relações que podem ser provadas de forma análoga.

$$z_a = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{ac}{R_B^{ABC}} - 1}, \quad z_b = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{bc}{R_A^{ABC}} - 1}, \quad z_c = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{ab}{R_C^{ABC}} - 1}.$$

O círculo circunscrito a um triângulo está diretamente associado ao circuncentro, ponto equidistante de seus vértices. Assim como o raio do círculo inscrito pôde ser expresso em função do relacionador triangular, é possível obter uma expressão análoga para o raio do círculo circunscrito.

O resultado a seguir estabelece essa relação de forma geral.

Proposição 36. (Raio do círculo circunscrito em função do relacionador triangular) *Seja ABC um triângulo de circuncentro O , cujos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} medem, respectivamente, c , a e b . Então, a medida do raio do círculo circunscrito, $r_O = OA = OB = OC$, é dada por:*

$$r_O = \frac{abc}{2 \sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}.$$

Demonstração. De acordo com a equação (12), temos

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{ab}.$$

Aplicando a lei dos senos, segue que

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2r_O.$$

Ou seja,

$$r_O = \frac{c}{2 \operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{c}{2 \cdot \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{ab}} = \frac{abc}{2 \cdot \sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}.$$

□

Caso particular: Se o triângulo for isósceles, tal que $AB = AC$, temos que $R_C^{ABC} = \frac{a^2}{2}$ e $b = c$ assim

$$r_O = \frac{ab^2}{2 \cdot \sqrt{(ab)^2 - \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}} = \frac{ab^2}{2\sqrt{\frac{4a^2b^2 - a^4}{4}}} = \frac{ab^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

Mais particularmente, se ABC for equilátero de lado l , segue que

$$r_O = \frac{l^2}{\sqrt{4l^2 - l^2}} = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

As expressões obtidas para os raios dos círculos inscrito e circunscrito permitem estabelecer uma relação direta entre esses dois elementos notáveis. O produto de suas medidas revela uma dependência, evidenciando como o Relacionador Triangular possibilita compreender, de forma unificada, as relações entre os elementos do triângulo.

Proposição 37. *O produto entre a medida do raio r_I do círculo inscrito e a medida do raio r_O do círculo circunscrito a um triângulo de lados a , b e c é dado por:*

$$r_I \cdot r_O = \frac{abc}{2(a + b + c)}.$$

Demonstração. Sabendo as expressões de r_I e r_O , basta multiplicá-las para obter o resultado desejado.

$$r_I \cdot r_O = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{a + b + c} \cdot \frac{abc}{2 \cdot \sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}} = \frac{abc}{2 \cdot (a + b + c)}.$$

Como constatamos, o resultado é imediato.

□

6.4 Relações métricas e área do triângulo

A área de um triângulo pode ser expressa de diferentes maneiras a partir das medidas de seus lados e ângulos, sendo um dos elementos centrais da geometria plana.

Utilizando o relacionador triangular, obtemos uma fórmula direta que conecta a área às medidas dos lados, fórmula que se mostra equivalente à clássica expressão de Herão. Além disso, a mesma grandeza pode ser reescrita em termos de funções trigonométricas dos ângulos ou ainda a partir de relações envolvendo cevianas notáveis, como as bissetrizes.

Essas diferentes representações não apenas reforçam a consistência interna da teoria, mas também evidenciam a versatilidade do relacionador como ferramenta de unificação de resultados já conhecidos.

A Fórmula de Herão é uma das expressões mais conhecidas para o cálculo da área de um triângulo, permitindo determiná-la a partir das medidas de seus lados sem a necessidade de conhecer a altura. Diversas demonstrações dessa fórmula podem ser encontradas em (FERNANDES, 2021), que apresenta abordagens geométricas e algébricas para sua dedução.

A partir da relação da área expressa em função do relacionador triangular, também é possível demonstrar a equivalência entre essas expressões, evidenciando que ambas conduzem ao mesmo resultado por caminhos distintos.

Proposição 38. (Fórmula de Herão) *Sejam ABC um triângulo e $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$ as medidas dos seus lados. Se $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro de ABC , então*

$$A_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Demonstração. Dadas as medidas a , b e c dos lados de um triângulo, podemos determinar sua área conforme a equação (11):

$$A_{ABC} = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{2}.$$

Elevando ao quadrado e multiplicando por 16,

$$16A_{ABC}^2 = 4 \left[(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2 \right] = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Fatorando como diferença de quadrados,

$$16A_{ABC}^2 = \left(2ab + (a^2 + b^2 - c^2) \right) \left(2ab - (a^2 + b^2 - c^2) \right).$$

Reescrevendo cada fator,

$$\begin{aligned}2ab + (a^2 + b^2 - c^2) &= (a + b)^2 - c^2, \\2ab - (a^2 + b^2 - c^2) &= c^2 - (a - b)^2,\end{aligned}$$

de modo que

$$16A_{ABC}^2 = ((a + b)^2 - c^2) (c^2 - (a - b)^2).$$

Aplicando novamente diferença de quadrados,

$$\begin{aligned}(a + b)^2 - c^2 &= (a + b - c)(a + b + c), \\c^2 - (a - b)^2 &= (c - a + b)(c + a - b),\end{aligned}$$

logo

$$16A_{ABC}^2 = (a + b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a - b + c).$$

Como $s = \frac{a+b+c}{2}$, temos

$$16A_{ABC}^2 = 16s(s - a)(s - b)(s - c),$$

e, portanto,

$$A_{ABC} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}. \quad \square$$

A área de um triângulo também pode ser expressa em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido entre eles, resultando na forma trigonométrica clássica apresentada a seguir.

Proposição 39. *Seja ABC um triângulo, tal que $BC = a$ e $AC = b$, então*

$$A_{ABC} = \frac{ab}{2} \cdot \text{sen } \hat{C}.$$

Demonstração. Note que

$$A_{ABC} = \sqrt{\frac{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}{2}} = \frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}{ab}} = \frac{ab}{2} \text{sen } \hat{C}.$$

\square

A partir da relação trigonométrica que expressa o seno de um ângulo em função da metade da medida do ângulo, podemos reescrever a área do triângulo em uma forma equivalente, utilizando as razões seno e cosseno da metade do ângulo.

Proposição 40. *Seja ABC um triângulo, tal que $BC = a$ e $AC = b$, então*

$$A_{ABC} = ab \text{sen} \left(\frac{\hat{C}}{2} \right) \cos \left(\frac{\hat{C}}{2} \right).$$

Demonstração. Note que

$$ab \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = ab \sqrt{\frac{ab - R_C^{ABC}}{2ab}} \sqrt{\frac{ab + R_C^{ABC}}{2ab}} = \frac{\sqrt{(ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{2} = A_{ABC}.$$

□

A bissetriz interna de um triângulo não apenas divide o ângulo em duas partes congruentes, mas também estabelece uma relação de proporcionalidade entre as áreas dos triângulos formados por ela e os lados adjacentes. Essa propriedade é formalizada a seguir.

Proposição 41. *Seja ABC um triângulo cujos lados opostos aos vértices A , B e C medem, respectivamente, a , b e c . Se CD é a bissetriz interna relativa ao vértice C , então as áreas dos triângulos ACD e BCD satisfazem a relação*

$$\frac{A_{BCD}}{A_{ACD}} = \frac{a}{b}.$$

Demonstração. Seja $CD = x$, assim temos que

$$\frac{A_{DCB}}{A_{ACD}} = \frac{ax \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{4}\right) \cos\left(\frac{\hat{C}}{4}\right)}{bx \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{4}\right) \cos\left(\frac{\hat{C}}{4}\right)} = \frac{a}{b}.$$

□

Em síntese, a área de um triângulo admite múltiplas expressões equivalentes: pela fórmula de Herão, pelas relações trigonométricas clássicas ou por meio do relacionador triangular, que fornece uma forma unificada e simplificada. Essa variedade de representações não apenas amplia as possibilidades de cálculo, mas também revela diferentes conexões entre lados, ângulos e cevianas.

7 Exercícios resolvidos

Esta seção tem por finalidade reforçar a teoria apresentada ao longo do trabalho por meio da resolução de exercícios diretamente relacionados aos conceitos desenvolvidos, com ênfase nas propriedades dos triângulos planos e de seus elementos notáveis, como cevianas, áreas, ângulos e raios dos círculos inscrito e circunscrito. Em particular, destaca-se a aplicação do relacionador triangular, conceito introduzido e explorado ao longo deste trabalho, que se mostra fundamental na organização e resolução de diversas situações envolvendo relações métricas no interior do triângulo.

A maioria das questões foi elaborada pelo autor e apresenta caráter objetivo, com foco no cálculo de medidas e na aplicação direta dos resultados teóricos discutidos. Entre elas, também foram incluídos alguns problemas que exigem raciocínio mais elaborado e integração de conceitos. As questões 5 do (Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2023) e 6 do (Instituto Militar de Engenharia, 2009) foram incluídas por sua pertinência e conexão com os temas tratados, além de representarem o tipo de abordagem adotada em exames de elevada exigência matemática.

A seção está dividida em duas subseções: a primeira apresenta apenas os enunciados, permitindo que o leitor tente resolvê-los por conta própria; a segunda traz as soluções correspondentes, oferecendo uma referência para conferência e análise dos procedimentos adotados.

7.1 Exercícios

1. Seja ABC um triângulo tal que $AB = c = 10$, $BC = a = 17$ e $CA = b = 21$. Determine:

(a) o relacionador triangular referente ao vértice oposto ao maior lado, a partir do valor obtido, classifique o triângulo quanto a medida de seus ângulos.

(b) a medida da projeção ortogonal do lado \overline{BC} sobre \overline{AB} .

(c) o valor de W , sendo

$$W = \sqrt{(ac)^2 - R_B^{ABC}}.$$

(d) a área do triângulo ABC .

(e) as medidas das alturas.

(f) a distância do vértice B ao ortocentro do triângulo ABC .

(g) o seno, o cosseno e a tangente do ângulo \hat{B} .

(h) as medidas dos raios dos círculos circunscrito e inscrito ao triângulo ABC .

2. Seja ABC um triângulo, tal que $AC = 12$ cm, $AB = 4$ cm e $\hat{A} = 120^\circ$. Determine o comprimento da bissetriz do triângulo ABC referente ao vértice A .

3. Seja ABC um triângulo tal que $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm e $CA = 5$ cm. Sendo O o ortocentro de ABC , determine a área do triângulo AOB .

4. Seja ABC um triângulo, tal que $AB = 1$ cm, $BC = \sqrt{5}$ cm e $CA = 2\sqrt{2}$ cm. Determine o comprimento da projeção ortogonal do lado AC sobre a reta suporte do lado AB .

5. (ITA-2023) Considere um triângulo ABC tal que $AB = 4$, $AC = 5$ e $\hat{BAC} = 60^\circ$. Seja D um ponto no lado AB tal que $AD = 1$. Encontre o raio do círculo inscrito no triângulo BCD .

6. (IME-2010) Seja ABC um triângulo de lados $AB = 26$, $BC = 28$ e $AC = 18$. Considere o círculo de centro O inscrito nesse triângulo. A distância AO vale:

(a) $\frac{\sqrt{104}}{6}$. (b) $\frac{\sqrt{104}}{3}$. (c) $\frac{2\sqrt{104}}{3}$. (d) $\sqrt{104}$. (e) $3\sqrt{104}$.

7. Seja O o ortocentro de um triângulo isósceles ABC de base $BC = 6$. Sabendo que $CO = \sqrt{10}$, determine:

(a) A altura relativa ao vértice C .

(b) A altura relativa ao vértice A .

(c) A medida do lado AB .

8. Seja O o ortocentro de um triângulo ABC . Determine as medidas dos lados \overline{AB} e \overline{AC} sabendo que: $OB = 5$, $OC = 13$ e $BC = \sqrt{226}$.

9. Seja X o pé da bissetriz de um triângulo ABC relativa ao vértice A . Sabe-se que $AB = 6$, $BX = 5$ e $AX = \sqrt{109}$. Determine a medida do lado AC .

10. Considere o triângulo ABC com lados $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm e $CA = 7$ cm. Sejam r a reta bissetriz do ângulo \hat{BCA} e X o ponto de interseção da reta r com a reta perpendicular ao lado \overline{AB} que passa por B . Determine o comprimento do segmento \overline{BX} .

11. Sejam ABC um triângulo, tal que $AB = c = 12$, $BC = a = \sqrt{73}$, $CA = b = 5$ e r a reta perpendicular a AB que passa por B . Determine o comprimento do segmento $AD = d$, em que D é a interseção da bissetriz do ângulo \hat{A} com a reta r .

12. Em um triângulo retângulo cujo perímetro é 40 cm há um círculo inscrito de raio 8,5 cm. Sabendo que esse triângulo está inscrito em um círculo de raio 3 cm, determine as medidas de seus lados.

13. Sejam ABC um triângulo e \overline{AX} a sua bissetriz interna referente ao ângulo $B\hat{C}A$. Sabe-se que $AB = 5$ cm e $AC = 20$ cm. Além disso, a altura do triângulo ABX referente ao vértice X é $h = 2,4$ cm. Determine a área do triângulo ACX .
14. Em um triângulo retângulo a bissetriz interna referente ao ângulo reto mede $\sqrt{2}$ cm e um de seus catetos mede 6 cm. Determine as medidas do outro cateto e da hipotenusa.
15. Seja r uma reta perpendicular a um segmento \overline{BC} no ponto H , tal que $BH = 2$ cm e $HC = 4$ cm. Determine a que distância do ponto H deve estar um ponto A sobre a reta r para que a mediana do triângulo ABC relativa ao lado \overline{AC} meça 6,5 cm.
16. Seja ABC um triângulo acutângulo. Sabe-se que $AB = 2\sqrt{10}$ e que a projeção ortogonal do lado AB sobre o lado AC mede 2. Qual deve ser a medida do lado BC para que o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC meça 5?
17. Uma construtora está projetando uma ciclovia que passa por três pontos de referência: uma praça (A), um ponto de hidratação (C) e uma rotatória (D), que ficam alinhados nessa ordem. Sabe-se que a distância da praça ao ponto de hidratação é de 8 metros, e do ponto de hidratação até a rotatória é de 20 metros. Além disso, existe uma torre de observação (B) fora desse alinhamento. A torre está a 9 metros da praça e a 7 metros do ponto de hidratação. Qual é a distância da torre de observação até a rotatória?
18. Um lote urbano tem formato triangular. As duas frentes que se encontram na esquina B medem 15 m e 12 m. A partir dessa esquina será instalada uma faixa retilínea de 10 m até encostar na cerca do lado oposto, traçada de modo que os dois ângulos da esquina B fiquem iguais (isto é, a faixa corta ao meio o ângulo da esquina). Pretende-se instalar um poste em um ponto do terreno que fique à mesma distância das três laterais. Qual é essa distância?
19. A prefeitura de uma cidade está revitalizando uma antiga praça e, para o projeto de iluminação, é preciso calcular a quantidade de fiação necessária para contornar todo o espaço. A praça é delimitada por quatro canteiros que formam um quadrilátero, sendo que as diagonais se cruzam perpendicularmente no centro. Em uma das medições já realizadas, constatou-se que a lateral AB mede 25 m, enquanto a lateral AD mede 39 m. Também foram medidas as diagonais, obtendo-se $AC = 63$ m e $BD = 56$ m. Com base nessas informações, determine as medidas das laterais BC e CD , de modo que seja possível calcular o perímetro total da praça e, assim, planejar corretamente a instalação da rede elétrica.
20. André, Breno e Carlos moram em três casas que formam um triângulo no mapa. As distâncias são: $AB = 15$ km (André–Breno), $BC = 13$ km (Breno–Carlos) e

$AC = 14$ km (André–Carlos). Entre as casas de André e Carlos existe uma estrada retilínea, e exatamente no seu ponto médio há um poço. Qual é a distância do poço até a casa de Breno?

7.2 Soluções

1. (a) O vértice B é oposto ao maior lado, sendo assim

$$R_B^{ABC} = \frac{10^2 + 17^2 - 21^2}{2} = -26.$$

Como o relacionador obtido é negativo, então o triângulo é obtusângulo.

(b) Seja m a medida da projeção ortogonal do lado \overline{BC} sobre o lado \overline{AB} , assim

$$m = \frac{|-26|}{10} = \frac{13}{5}.$$

(c) Substituindo os valores na expressão dada, temos

$$W = \sqrt{10 \cdot 17 - (-26)^2} = 168.$$

(d) A área do triângulo é dada por

$$A_{ABC} = \frac{W}{2} = \frac{168}{2} = 84.$$

(e) Sejam h_A , h_B e h_C as medidas das alturas relativas aos vértices A , B e C , respectivamente. Assim, temos

$$\begin{aligned} h_A &= \frac{W}{a} = \frac{168}{17}, \\ h_B &= \frac{W}{b} = \frac{168}{21} = 8, \\ h_C &= \frac{W}{c} = \frac{168}{10} = \frac{84}{5}. \end{aligned}$$

(f) Seja s a distância do vértice B ao ortocentro. O valor de s é dado por

$$s = \frac{|-26|}{8} = \frac{13}{4}.$$

(g) Os valores de $\cos \hat{B}$, $\sin \hat{B}$ e $\operatorname{tg} \hat{B}$ são dados por:

$$\begin{aligned}\cos \hat{B} &= \frac{-26}{10 \cdot 17} = -\frac{13}{85}, \\ \text{sen } \hat{B} &= \frac{168}{10 \cdot 17} = \frac{84}{85}, \\ \text{tg } \hat{B} &= \frac{168}{-26} = -\frac{84}{13}.\end{aligned}$$

(h) Seja r_O a medida do raio circunscrito e r_I a medida do raio inscrito do triângulo ABC . Assim, temos

$$\begin{aligned}r_O &= \frac{abc}{2W} = \frac{17 \cdot 21 \cdot 10}{2 \cdot 168} = \frac{85}{8}, \\ r_I &= \frac{W}{a+b+c} = \frac{168}{17+21+10} = \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

2. Seja x a medida da bissetriz procurada. De acordo com o Corolário 3, temos

$$x = \frac{2bc \cos(\frac{\hat{A}}{2})}{b+c}$$

em que $AC = b = 12$ cm, $AB = c = 4$ cm, assim

$$x = \frac{2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ}{12+4} = \frac{12 \cdot 4}{12+4} = 3 \text{ cm.}$$

3. Seja $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$.

Vamos determinar o relacionador triangular de ABC referente aos vértices A e C . Assim, temos:

$$\begin{aligned}R_A^{ABC} &= \frac{25 + 36 - 49}{2} = 6, \\ R_C^{ABC} &= \frac{25 + 49 - 36}{2} = 19.\end{aligned}$$

A altura em relação ao vértice C , h , é dada por:

$$\begin{aligned}h &= \frac{\sqrt{(bc)^2 - (R_A^{ABC})^2}}{c} \\ &= \frac{\sqrt{(5 \cdot 6)^2 - 6^2}}{6} \\ &= 2\sqrt{6} \text{ cm.}\end{aligned}$$

A distância s do vértice C ao ortocentro é dada por:

$$\begin{aligned}
s &= \frac{R_C^{ABC}}{h} \\
&= \frac{19}{2\sqrt{6}} \\
&= \frac{19\sqrt{6}}{12} \text{ cm.}
\end{aligned}$$

A altura do triângulo AOB é dada por:

$$h - s = 2\sqrt{6} - \frac{19\sqrt{6}}{12} = \frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

Portanto, a área do triângulo AOB é

$$A_{AOB} = \frac{6 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{12}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{4} \text{ cm}^2.$$

4. A projeção ortogonal m de AC sobre AB é dada por:

$$m = \frac{R_A^{ABC}}{AB},$$

em que

$$R_A^{ABC} = \frac{1^2 + (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2} = 2.$$

Logo,

$$m = \frac{2}{1} = 2 \text{ cm.}$$

5. Note que

$$R_A^{ACD} = 5 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow R_A^{ACD} = \frac{5}{2}.$$

Ou seja

$$\frac{5^2 + 1^2 - (CD)^2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow CD = \sqrt{21}.$$

Por outro lado

$$R_A^{ABC} = 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow R_A^{ABC} = 10.$$

Ou seja

$$\frac{5^2 + 4^2 - (CB)^2}{2} = 10 \Rightarrow CB = \sqrt{21}.$$

Agora podemos calcular o relacionador triangular do triângulo BCD referente ao vértice D :

$$R_D^{BCD} = \frac{(\sqrt{21})^2 + 3^2 - (\sqrt{21})^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

O raio r_I do círculo inscrito no triângulo BCD é dado por:

$$r_I = \frac{\sqrt{(3 \cdot \sqrt{21})^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2}}{2\sqrt{21} + 3}.$$

Assim,

$$r_I = \frac{\sqrt{\frac{675}{4}}}{2\sqrt{21} + 3} = \frac{15\sqrt{3}}{4\sqrt{21} + 6}.$$

Racionalizando e simplificando, obtemos:

$$r_I = \frac{6\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{10}.$$

6. Vamos determinar a medida x da bissetriz referente ao vértice A . Temos que

$$R_C^{ABC} = \frac{18^2 + 26^2 - 28^2}{2} = 108.$$

A medida da bissetriz é dada por

$$x = \frac{\sqrt{2ab(ab + R_C^{ABC})}}{a + b}.$$

Sendo $a = BC = 28$ e $b = AC = 18$. Dessa forma, segue que

$$x = \frac{\sqrt{2 \cdot 26 \cdot 18(26 \cdot 18 + 108)}}{18 + 26} = \frac{36\sqrt{26}}{11}.$$

A distância $AO = d$ é dada por

$$d = \frac{18 + 26}{8 + 26 + 28} \cdot \frac{36\sqrt{26}}{11} = \sqrt{104}.$$

Portanto a alternativa correta é (d).

7. (a) Como ABC é isósceles, segue que $R_C^{ABC} = 18$.

Sendo h_C a altura referente ao vértice C , temos que

$$\frac{18}{h_C} = \sqrt{10} \Rightarrow h_C \sqrt{10} = 18 \Rightarrow h_C = \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}.$$

(b) Como ABC é isósceles, o pé da altura H_A relativa ao vértice A é ponto médio da base. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, segue que:

$$3^2 + OH_A^2 = CO^2 \Rightarrow 9 + OH_A^2 = 10 \Rightarrow OH_A = 1.$$

Note que os triângulos COH_A e AOH_C , em que H_C é o pé da altura relativa a C , são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo. Assim,

$$\frac{CO}{OH_A} = \frac{AO}{H_C} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{1} = \frac{AO}{\frac{9\sqrt{10}}{5}} = \frac{5 \cdot AO}{9\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{10} = \frac{5 \cdot AO}{9\sqrt{10}} \Rightarrow 9 \cdot 10 = 5 \cdot AO \Rightarrow AO = 18 \Rightarrow AO = 8.$$

Logo, a altura relativa ao vértice A é $AH_A = 9$.

(c) Como ABC é isósceles, segue que:

$$AB^2 = 3^2 + 9^2 = 9 + 81 = 90 \Rightarrow AB = 3\sqrt{10}.$$

8. Note que $R_C^{ABC} = R_B^{BOC}$, de modo que

$$R_B^{BOC} = \frac{5^2 + (\sqrt{226})^2 - 13^2}{2} = 41.$$

Sendo \overline{BH} a altura do triângulo referente ao vértice B , temos que

$$BO = \frac{R_C^{ABC}}{BH} = \frac{41}{BH}$$

$$5 = \frac{41}{BH} \Rightarrow BH = \frac{41}{5}.$$

Também é válido que $R_C^{BHC} = R_C^{ABC}$

$$R_C^{ABC} = \frac{13^2 + (\sqrt{226})^2 - 5^2}{2} = 185.$$

Assim,

$$\begin{aligned} BH &= \frac{\sqrt{(BC \cdot AC)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{AC} \\ \frac{41}{5} &= \frac{\sqrt{(\sqrt{226} \cdot AC)^2 - 185^2}}{AC} \\ \frac{1681}{25} &= \frac{226AC^2 - 34225}{AC^2}. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado e organizando, temos a equação

$$5650AC^2 - 1681AC^2 = 855625.$$

O que nos dá

$$AC = \sqrt{\frac{855625}{3969}} = \frac{925}{63}.$$

Para determinar o valor do lado AB , podemos usar o relacionamento triangular:

$$R_C^{ABC} = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2}.$$

Ou seja,

$$(\sqrt{226})^2 + AB^2 - \left(\frac{925}{63}\right)^2 = 82.$$

Logo,

$$AB = \sqrt{\frac{284089}{3969}} = \frac{533}{63}.$$

9. Sabemos que

$$\cos\left(\frac{B\hat{A}C}{2}\right) = \cos(B\hat{A}X) = \frac{R_A^{BAX}}{AB \cdot BX}$$

e

$$R_A^{BAX} = \frac{36 + 109 - 25}{2} = 60.$$

Assim

$$\cos(B\hat{A}X) = \frac{60}{6 \cdot \sqrt{109}} = \frac{10}{\sqrt{109}}.$$

Desse modo, temos:

$$\frac{2AB \cdot AC \cos\left(\frac{B\hat{A}C}{2}\right)}{AB + AC} = AX.$$

Ou seja,

$$\frac{2 \cdot 6 \cdot AC \cdot \frac{10}{\sqrt{109}}}{6 + AC} = \sqrt{109}.$$

Donde

$$AC = \frac{654}{11}.$$

10. Vamos determinar o relacionador do triângulo ABC em relação ao ângulo \hat{A}

$$R_A^{ABC} = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2} = 30.$$

Vamos calcular o valor da tangente do ângulo $B\hat{A}X$,

$$\operatorname{tg} B\hat{A}X = \sqrt{\frac{6 \cdot 7 - 30}{6 \cdot 7 + 30}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Note que

$$\operatorname{tg} B\hat{A}X = \frac{BX}{AB}.$$

Assim

$$\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{BX}{6}.$$

Logo,

$$BX = \sqrt{6} \text{ cm.}$$

11. Note que

$$R_A^{ABC} = \frac{12^2 + 5^2 - (\sqrt{73})^2}{2} = 48.$$

Podemos calcular o cosseno do ângulo $B\hat{A}D$

$$\begin{aligned} \cos B\hat{A}D &= \sqrt{\frac{bc + R_A^{ABC}}{2bc}} \\ &= \sqrt{\frac{5 \cdot 12 + 48}{2 \cdot 5 \cdot 12}} \\ &= \sqrt{\frac{108}{120}} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{10}. \end{aligned}$$

Mas, note que

$$\cos B\hat{A}D = \frac{c}{d}.$$

Assim,

$$\frac{12}{d} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Dessa forma,

$$d = \frac{120}{3\sqrt{10}} = 4\sqrt{10}.$$

12. Sejam a, b e c as medidas dos lados do triângulo, sendo c a medida da hipotenusa. Sendo r_O o raio do círculo circunscrito ao triângulo, temos

$$r_O = \frac{c}{2}.$$

Logo,

$$c = 17 \text{ cm.}$$

Como o triângulo é retângulo, a medida do raio r_I do círculo inscrito é dada por

$$r_I = \frac{ab}{a + b + c}.$$

Assim,

$$\frac{ab}{40} = 3 \Rightarrow ab = 120. \quad (\text{i})$$

Além disso, sabemos que

$$r_O r_I = \frac{abc}{2(a+b+c)}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{17 \cdot 120}{a+b+17} = 51 &\Rightarrow 51a + 51b + 867 = 2040 \Rightarrow a + b + 17 = 40 \Rightarrow a + b = 23 \\ &\Rightarrow b = 23 - a. \end{aligned} \quad (\text{ii})$$

Substituindo (ii) em (i):

$$a(23 - a) = 120$$

$$23a - a^2 = 120$$

$$a^2 - 23a + 120 = 0$$

$$\Delta = 49$$

$$a = \frac{23 \pm 7}{2}.$$

Logo,

$$a = 8 \quad \text{ou} \quad a = 15.$$

Como $a + b = 23$, segue que as medidas dos lados do triângulo são 8 cm, 15 cm e 17 cm.

13. Note que a área do triângulo ABX é dada por

$$A_{ABX} = \frac{5 \cdot 2,4}{2} = 6 \text{ cm}^2.$$

A bissetriz divide o triângulo em áreas proporcionais às medidas dos lados, assim

$$\frac{A_{ABX}}{A_{ACX}} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{6}{A_{ACX}} = \frac{5}{20}$$

Logo

$$A_{ACX} = 24 \text{ cm}^2.$$

14. Como o triângulo é retângulo, a medida x da bissetriz é dada por

$$x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

Sendo a e b as medidas dos catetos. Assim,

$$\frac{6a\sqrt{2}}{a+6} = \sqrt{2}.$$

Obtemos, portanto

$$a = \frac{6}{5}.$$

Sendo c a medida da hipotenusa, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 \\ &= 36 + \frac{36}{25} \\ &= \frac{936}{25}. \end{aligned}$$

Logo,

$$c = \frac{6\sqrt{26}}{5}$$

15. Independente do *ponto A sobre a reta r*, o relacionador triangular de ABC em relação a B é constante e dado por

$$R_B^{ABC} = 2 \cdot (2 + 4) = 12.$$

A medida da *mediana y relativa* ao lado $AC = b$ é dada por

$$y = \frac{\sqrt{4R_B^{ABC} + b^2}}{2}.$$

Assim,

$$\frac{\sqrt{4 \cdot 12 + b^2}}{2} = 6,5.$$

Efetuando-se os cálculos, obtemos

$$b = 11 \text{ cm.}$$

Logo, pelo Teorema de Pitágoras podemos determinar o valor de $AH = h$:

$$h^2 + 4^2 = 11^2 \Rightarrow h^2 = 121 - 16 \Rightarrow h = \sqrt{105} \text{ cm.}$$

16. Seja $AC = b$ e $BC = a$. Note que

$$R_A^{ABC} = 2b.$$

Usando a equação que nos fornece a medida do raio do círculo circunscrito ao triângulo, temos

$$\frac{2ab\sqrt{10}}{2\sqrt{40b^2 - 4b^2}} = 5 \Rightarrow \frac{2ab\sqrt{10}}{12b} = 5 \Rightarrow \frac{a\sqrt{10}}{6} = 5.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $\frac{6}{\sqrt{10}}$ e racionalizando, obtemos

$$a = 3\sqrt{10}.$$

17. Note que a praça, o ponto de hidratação e a torre formam o triângulo ABC e que a rotatória (ponto D) corresponde a um deslocamento do ponto C sobre a semirreta \overrightarrow{AC} . Podemos calcular o relacionador do vértice A :

$$R_A^{ABC} = \frac{9^2 + 8^2 - 7^2}{2} = 48.$$

Assim,

$$R_A^{ABD} = \frac{(8 + 20) \cdot 48}{8} = 168.$$

Desse modo

$$\frac{9^2 + 28^2 - BD^2}{2} = 168 \Rightarrow BD^2 = 529 \Rightarrow BD = 23.$$

18. Observe que a faixa é a bissetriz relativa a B . Pela fórmula da bissetriz, obtemos o relacionador triangular no vértice B :

$$\frac{\sqrt{2 \cdot 15 \cdot 12 (15 \cdot 12 + R_B^{ABC})}}{15 + 12} = 10.$$

Daí,

$$\frac{\sqrt{360 (180 + R_B^{ABC})}}{27} = 10 \Rightarrow \sqrt{360 (180 + R_B^{ABC})} = 270$$

e, elevando ao quadrado,

$$360 (180 + R_B^{ABC}) = 72900 \Rightarrow R_B^{ABC} = \frac{72900}{360} - 180 = \frac{45}{2}.$$

Pela definição do relacionador triangular,

$$R_B^{ABC} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, \quad \text{com } a = BC = 12, c = AB = 15, b = AC.$$

Logo,

$$\frac{12^2 + 15^2 - b^2}{2} = \frac{45}{2} \Rightarrow 144 + 225 - b^2 = 45 \Rightarrow b^2 = 324 \Rightarrow b = AC = 18.$$

A distância pedida é o raio r_I do círculo inscrito. Usando a expressão em termos do relacionador no vértice B ,

$$r_I = \frac{\sqrt{(ac)^2 - (R_B^{ABC})^2}}{a + b + c} = \frac{\sqrt{(12 \cdot 15)^2 - \left(\frac{45}{2}\right)^2}}{12 + 18 + 15}.$$

Assim,

$$r_I = \frac{\sqrt{32400 - \frac{2025}{4}}}{45} = \frac{\sqrt{\frac{127575}{4}}}{45} = \frac{\sqrt{127575}}{90}.$$

Como $127575 = 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7$, tem-se $\sqrt{127575} = 3^3 \cdot 5\sqrt{7} = 135\sqrt{7}$, e portanto

$$r_I = \frac{135\sqrt{7}}{90} = \frac{3}{2}\sqrt{7}.$$

Portanto, a distância procurada é $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ m.

19. Considere a praça delimitada pelos canteiros A, B, C, D , formando um quadrilátero cujas diagonais AC e BD se cruzam ortogonalmente em E . São dadas as medidas

$$AB = 25 \text{ m}, \quad AD = 39 \text{ m}, \quad AC = 63 \text{ m}, \quad BD = 56 \text{ m}.$$

No triângulo ABD , o relacionador no vértice A é

$$R_A^{ABD} = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2} = -495.$$

A altura relativa a BD resulta

$$AE = \frac{\sqrt{(AB \cdot AD)^2 - (R_A^{ABD})^2}}{BD} = \frac{\sqrt{(25 \cdot 39)^2 - (-495)^2}}{56} = 15.$$

Logo, $CE = AC - AE = 48$.

Pelo teorema de Pitágoras, em AEB e AED ,

$$BE = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20, \quad DE = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36,$$

confirmando $BE + DE = BD$.

Finalmente, em BEC e DEC , ambos retângulos,

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2} = \sqrt{20^2 + 48^2} = 52, \quad CD = \sqrt{DE^2 + CE^2} = \sqrt{36^2 + 48^2} = 60.$$

Portanto, $BC = 52$ m e $CD = 60$ m.

20. Modelamos o problema buscando a medida da mediana relativa ao vértice B , isto é, a distância do ponto médio de \overline{AC} até B .

No triângulo ABC , adotemos $a = BC = 13$, $b = AC = 14$ e $c = AB = 15$. Pelo relacionador no vértice B ,

$$R_B^{ABC} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2} = \frac{169 + 225 - 196}{2} = \frac{198}{2} = 99.$$

A medida da mediana relativa a B em termos do relacionador é

$$y_B = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 4R_B^{ABC}}.$$

Substituindo $b = 14$ e $R_B^{ABC} = 99$,

$$y_B = \frac{1}{2} \sqrt{14^2 + 4 \cdot 99} = \frac{1}{2} \sqrt{196 + 396} = \frac{1}{2} \sqrt{592} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{37} = 2\sqrt{37}.$$

Portanto, a distância procurada é $2\sqrt{37}$ km.

Referências Bibliográficas

ALVES, R. Um estudo dos triângulos: propriedades e relações fundamentais. In: *Anais do Encontro Mineiro do Profmat*. Florestal: Even3, 2025. Resumo expandido apresentado no II Encontro Mineiro do Profmat. ISBN 978-65-272-0853-2. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/ii-encontro-mineiro-do-profmat-309572/980084-um-estudo-dos-triangulos--propriedades-e-relacoes-fundamentais/>>.

ARAÚJO, G. O. d. *Cevianas e pontos associados a um triângulo: Uma abordagem com interface no ensino básico*. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, PB, 2014. Disponível em: <<https://revista.uepb.edu.br/REM/article/download/1171/899/3731>>.

Associação Nacional dos Professores de Matemática. *Entrevista com o Prof. Elon Lima*. 2016. Entrevistado: Elon Lima. Acesso em: 18 jul. 2024. Disponível em: <<https://anpmat.org.br/cafe-com-a-anpmat/entrevista-com-o-prof-elon-lima>>.

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. G.; SOUSA, P. de. *Prisma Matemática: geometria e trigonometria: Ensino Médio*. São Paulo: FTD, 2020.

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. d. *Prisma Matemática: geometria: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias*. São Paulo: FTD, 2020.

CAVALCANTE, L. M. *Geometria Analítica I*. 3. ed. Fortaleza: EdUECE, 2015. ISBN 978-85-7826-403-1.

COSTA, A. P. d. A geometria na educação básica: um panorama sobre o seu ensino no Brasil. *Revista Educação Matemática em Foco*, v. 9, p. 128–152, 2020.

DANTE, L. R.; VIANA, F. *Matemática em contextos, geometria plana e geometria espacial*. São Paulo: Ática, 2020.

DANTE, L. R.; VIANA, F. *Matemática em contextos, trigonometria e sistemas lineares*. São Paulo: Ática, 2020.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. Edição para aluno. Também disponível com ISBN 978-85-357-1687-0. ISBN 978-85-357-1686-3.

FERNANDES, T. A. *Fórmulas do tipo Heron*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, fevereiro 2021. Orientador: Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos.

FUVEST. *Prova da 1^a fase – FUVEST 2006*. 2006. Acessado em: 20 mar. 2025. Disponível em: <https://www.fuvest.br/wp-content/uploads/fuvest_2006_1fase_prova_V.pdf>.

GARBI, G. G. *CQD*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

Instituto Militar de Engenharia. *Prova Objetiva – Vestibular 2009/2010*. 2009. Acessado em 22 de abril de 2025. Disponível em: <https://www.ime.eb.mil.br/arquivos/Admissao/Vestibular_CFG/Provas_Anteriores/provas09_10/Objetiva_Final_Formato_A3_02-10.pdf>.

Instituto Tecnológico de Aeronáutica. *Prova de Matemática – 2^a Fase – Vestibular ITA 2023*. 2023. Acesso em: 22 abr. 2025. Disponível em: <https://www.vestibular.ita.br/provas/matematica_2023_2f.pdf>.

LEONARDO, F. M. de (Ed.). *Conexões: Matemática e suas Tecnologias: Geometria plana e espacial*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

LEONARDO, F. M. de (Ed.). *Conexões: Matemática e suas Tecnologias: Trigonometria*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

LINARES, J. L. *Baricentro: teoria, construções e problemas*. Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da USP, 2023. E-book. ISBN 978-65-87023-31-1.

MELLO, L. A. d. A teoria da transposição didática de chevallard, izquierdo e de mello (chim). 2019.

Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. 2017. Acesso em: 30 set. 2024. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>.

NETO, A. C. M. *Geometria*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

OSORIO, D. R. *Relaciones Métricas*. [S.l.]: Editorial Cuzcan, 2006.

SANTOS, A. R. S.; VIGLIONI, H. H. de B. *Geometria Euclidiana Plana*. [S.l.: s.n.], 2011. Versão 2011.1.

SILVA, J. C. da. *Os Teoremas de Menelau e Ceva*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, 2015.

SOUZA, J. R. d. *Matemática geom.* São Paulo: FTD, 2020.

SOUZA, J. R. d. *Matemática: sequências e trigonometria*. São Paulo: FTD, 2020.

TENÓRIO, J. L. d. M. *O ensino de Geometria em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica)) — Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2019.