

Gabriela Pereira Rizzi

# **Classificação dos Frisos na Educação Básica**

Vitória

2026

Gabriela Pereira Rizzi

## **Classificação dos Frisos na Educação Básica**

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



**PROFMAT**

Orientador: Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho

Vitória

2026

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

R627c Rizzi, Gabriela Pereira, 1998-  
Classificação dos frisos na educação básica / Gabriela Pereira  
Rizzi. - 2026.  
52 f. : il.

Orientador: Florêncio Ferreira Guimarães Filho.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Frisos. 2. Isometria. 3. Simetria. 4. Translação. I. Guimarães Filho, Florêncio Ferreira. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

---



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

**Centro de Ciências Exatas**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT**

# **“CLASSIFICAÇÃO DOS FRISOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA”**

**Gabriela Pereira Rizzi**

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 21/05/2026 por:

---

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho  
Orientador – UFES

---

Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer  
Membro interno – UFES

---

Prof. Dr. Mehran Sabeti  
Membro externo – UFV





### folha\_de\_assinaturas\_Gabriela\_Pereira\_Rizzi

Data e Hora de Criação: 25/05/2026 às 07:43:35

Documentos que originaram esse envelope:

- folha\_de\_assinaturas\_Gabriela\_Pereira\_Rizzi.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



### Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 3cdb2c57834b4545309f51b6f1ab72afb53847a5efd9baf8193b50d2aba12622

[SHA512]: f0fd3e03d6a516e0e03ba0da3e24c00ae549b077ff46bb1879a5260c10a3d143e7accc133f372b4b731b82d6108dc4106e9d69e9add96b9e39eeb3e8e5a6daca

### Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



#### ASSINADO - Valmecir Antonio dos Santos Bayer (bayervalmecir@gmail.com)

Data/Hora: 25/05/2026 - 20:58:58, IP: 200.251.60.226

[SHA256]: 0bdb1fa62e159a3ba3ffdc57fb4c5292911577ab93a55b108b38e27b7caba00

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



#### ASSINADO - Florêncio Ferreira Guimarães Filho (florencio.guimaraes@ufes.br)

Data/Hora: 25/05/2026 - 12:13:48, IP: 187.36.128.231

[SHA256]: 7164241e89ae4e77e90ee76e66db8f496898dd21858cd7443768f77d370029dd

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



#### ASSINADO - Mehran Sabeti (mehran@ufv.br)

Data/Hora: 27/05/2026 - 08:08:31, IP: 191.185.79.155, Geolocalização: [-19.858021, -43.963483]

[SHA256]: 2b5feb1abc85a6a4e7a99ec080635d1d9a0fdcd9ae57e9a1f088d09a7a8bd07f

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

### Histórico de eventos registrados neste envelope

27/05/2026 08:08:31 - Envelope finalizado por mehran@ufv.br, IP 191.185.79.155

27/05/2026 08:08:31 - Assinatura realizada por mehran@ufv.br, IP 191.185.79.155

27/05/2026 08:08:17 - Envelope visualizado por mehran@ufv.br, IP 191.185.79.155

25/05/2026 20:58:58 - Assinatura realizada por bayervalmecir@gmail.com, IP 200.251.60.226

25/05/2026 20:58:35 - Envelope visualizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 172.253.216.56

25/05/2026 12:13:48 - Assinatura realizada por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.128.231

25/05/2026 12:13:42 - Envelope visualizado por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.128.231

25/05/2026 07:45:06 - Envelope registrado na Blockchain por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.104

25/05/2026 07:45:05 - Envelope encaminhado para assinaturas por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.104

25/05/2026 07:43:36 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.104



ITI  
Instituto Nacional de  
Tecnologia da Informação

Documento assinado digitalmente em conformidade com o padrão ICP-Brasil e validado segundo as diretrizes do Instituto Nacional de Tecnologia da Informação (ITI), em atendimento à Medida Provisória nº 2.200-2/2001 e à Lei nº 14.063/2020.



Os registros de assinatura presentes nesse documento pertencem única e exclusivamente a esse envelope.

Documento final gerado e certificado por **Universidade Federal do Espírito Santo**

*Dedico esse trabalho a mim mesma (e para minha mãe), que mesmo apaixonada pela Matemática, detesto escrever trabalhos sobre ela.*

# Agradecimentos

Quando eu iniciei esse trabalho, eu havia escrito um agradecimento. Mas agora no final, eu tive que redigitar.

Primeiramente o agradecimento é para Deus, por todas as vezes que rezei e Ele com certeza me ouviu.

Agradeço também ao meu marido, Daniel Barbosa Castro, pelo apoio em todos os anos em que me dediquei ao mestrado, pela compreensão, paciência e carinho nos momentos mais críticos. Sem você eu não aguentaria metade das situações da vida.

Aos meus pais, Ediana Pereira Rizzi e Marcelo Rizzi, que me deram incentivo desde sempre aos meus estudos, sempre estiveram lá quando eu precisava e sempre foram os meus maiores torcedores. Estou me formando por vocês dois, com **toda certeza**.

Um obrigada especial também aos meus colegas de curso, em principal à Debora e Laís, que por 2 anos estivemos toda quinta-feira juntas, sempre nos ajudando e vencendo por todos os empecilhos juntas, sem jamais soltar a mão uma da outra. Mesmo depois de finalizada as aulas vocês continuaram presentes e me deram todo o apoio. O mestrado não teria sido tão agradável sem vocês duas.

Obrigada, professor Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, por ser o que me dizia com uma confiança que nem eu tinha “eu sabia que você conseguiria”, desde os meus 18 anos! (Se não até um pouquinho antes disso). Eu não deveria pensar em outro orientador que não fosse o senhor.

E posso citar várias outras pessoas que ao longo dessa caminhada escutaram minhas reclamações, me incentivaram e também brigaram comigo para meu próprio bem: Gisele, Cassiano, Wanderson, Michel, Rennan, vários professores que passaram pela minha vida, entre tantos outros não menos importantes.

Obrigada!

# Resumo

O presente texto trata principalmente sobre o Grupo de Frisos e suas 7 classificações. Para abordar este assunto, iremos apresentar definições de algumas transformações geométricas como: translações, reflexões, reflexão com deslizamento e rotações, com exemplos e suas devidas demonstrações. Além disso, será trabalhado o assunto de forma que podemos apresentá-lo na Educação Básica de Ensino.

**Palavras-chave:** Frisos, Isometria, Simetria, Translação, Reflexão.

# Abstract

This text deals mainly with the Frieze Group and its 7 classifications. To address this subject, we will present definitions of some geometric transformations such as: translations, reflections, reflection with sliding and rotations, with examples and their appropriate demonstrations. Furthermore, the subject will be worked on so that we can present it in Basic Education.

**Keywords:** Friezes, Isometry, Symmetry, Translation, Reflection.

# Lista de ilustrações

Figura 1	–	12
Figura 2	–	12
Figura 3	–	13
Figura 4	–	13
Figura 5	–	14
Figura 6	–	20
Figura 7	–	20
Figura 8	–	21
Figura 9	–	22
Figura 10	–	23
Figura 11	–	23
Figura 12	–	23
Figura 13	–	25
Figura 14	–	26
Figura 15	–	26
Figura 16	–	27
Figura 17	–	28
Figura 18	–	28
Figura 19	–	29
Figura 20	–	30
Figura 21	–	30
Figura 22	–	30
Figura 23	–	32
Figura 24	–	32
Figura 25	–	32
Figura 26	–	33
Figura 27	–	33
Figura 28	–	34
Figura 29	–	34
Figura 30	–	34
Figura 31	–	35
Figura 32	–	35
Figura 33	–	36
Figura 34	–	36
Figura 35	–	36
Figura 36	–	37

Figura 37 – . . . . .	37
Figura 38 – . . . . .	37
Figura 39 – . . . . .	38
Figura 40 – . . . . .	38
Figura 41 – . . . . .	38
Figura 42 – . . . . .	39
Figura 43 – . . . . .	39
Figura 44 – . . . . .	39
Figura 45 – . . . . .	40
Figura 46 – . . . . .	40
Figura 47 – . . . . .	41
Figura 48 – . . . . .	42
Figura 49 – . . . . .	42
Figura 50 – . . . . .	42
Figura 51 – . . . . .	42
Figura 52 – . . . . .	43
Figura 53 – . . . . .	43
Figura 54 – . . . . .	43
Figura 55 – . . . . .	44
Figura 56 – . . . . .	44
Figura 57 – . . . . .	44
Figura 58 – . . . . .	45
Figura 59 – . . . . .	47
Figura 60 – . . . . .	48
Figura 61 – . . . . .	49
Figura 62 – . . . . .	49
Figura 63 – . . . . .	50
Figura 64 – . . . . .	51

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÕES E TEOREMAS NECESSÁRIOS</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Definições e Teoremas</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>GRUPO DE FRISOS</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Translação</b>	<b>27</b>
<b>3.2</b>	<b>Reflexão</b>	<b>27</b>
3.2.1	Reflexão Vertical	27
3.2.2	Reflexão Horizontal	28
3.2.3	Reflexão Deslizante	29
<b>3.3</b>	<b>Rotação</b>	<b>29</b>
<b>3.4</b>	<b>Subconjuntos de Frisos</b>	<b>31</b>
3.4.1	Translação ( $T_L$ )	32
3.4.2	Translação, Reflexão Vertical ( $T_L, \mathfrak{R}_V$ )	32
3.4.3	Translação, Reflexão Horizontal ( $T_L, \mathfrak{R}_h$ )	32
3.4.4	Translação, Reflexão Deslizante ( $T_L, S_g$ )	33
3.4.5	Translação, Rotação ( $T_L, \mathfrak{R}_h \mathfrak{R}_V$ )	34
3.4.6	Translação, Reflexão Deslizante, Rotação ( $T_L, S_g, \mathfrak{R}_h \mathfrak{R}_V$ )	35
3.4.7	Translação, Reflexão Horizontal, Reflexão Vertical ( $T_L, \mathfrak{R}_h, \mathfrak{R}_V$ )	36
3.4.8	Translação, Reflexão Deslizante, Reflexão Horizontal ( $T_L, S_g, \mathfrak{R}_h$ )	37
3.4.9	Translação, Reflexão Deslizante, Reflexão Vertical ( $T_L, S_g, \mathfrak{R}_V$ )	39
3.4.10	Translação, Reflexão Deslizante, Reflexão Horizontal, Reflexão Vertical ( $T_L, S_g, \mathfrak{R}_h, \mathfrak{R}_V$ )	40
<b>3.5</b>	<b>O Teorema da Classificação</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>RECURSOS TECNOLÓGICOS E ATIVIDADES APLICÁVEIS EM SALA DE AULA</b>	<b>46</b>
<b>4.1</b>	<b>Recurso Tecnológico</b>	<b>46</b>
<b>4.2</b>	<b>Atividades Aplicáveis em Sala de Aula e/ou Escola</b>	<b>46</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>51</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>52</b>

# 1 Introdução

Vamos observar situações em que há a presença de Frisos (Figuras 1, 2, 3, 4) e discutir sobre o que elas apresentam em comum:

Figura 1



Fonte: Google

Figura 2



Fonte: Google

Figura 3



Fonte: Google

Figura 4



Ohn Yu Shin



Tori Ero



Rachel Mccaslin



Mike Odum

Fonte: Google

Podemos observar que apesar das figuras se mostrarem em diferentes situações (tapete, grade, arquitetura, pinturas) elas possuem a repetição de um mesmo padrão, uma simetria (igualdade de tamanho, forma ou posição entre partes de um todo, como se fossem um reflexo uma da outra em relação a uma linha ou ponto central), de maneira que podemos imaginar ser infinita.

A história do Friso abrange diversas culturas e períodos, evoluindo de uma faixa horizontal decorativa no antigo Egito e na Mesopotâmia para os elementos escultóricos icônicos da arquitetura grega clássica. Os gregos desenvolveram seu uso em ordens arquitetônicas como a Dórica e a Jônica, utilizando relevos para narrar mitologia, história e eventos cívicos. Os romanos deram continuidade a essa tradição, que foi posteriormente revivida durante o Renascimento italiano, onde o termo se expandiu para descrever qualquer faixa decorativa horizontal em paredes e outros elementos arquitetônicos.

Figura 5



Fonte: Google

Frisos também foram usados em decorações por vários milênios por sua natureza de possuir repetições nas civilizações suméria, egípcia e maia do mundo antigo. Seria falso, no entanto, fingir que os antigos matemáticos desenvolveram a tecnologia por trás da arte. O estudo matemático formal da ladrilhagem (imagens aplicadas em unidades individuais de maneira repetitiva e organizada para cobrir uma superfície) é relativamente recente, tendo começado não mais do que dois séculos atrás. [1]

Na Educação Básica, podemos introduzir a definição de Frisos nas seguintes habilidades da BNCC:

[EF07MA19] realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro;

[EF07MA20] reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem;

[EF07MA21] reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros;

[EF08MA18] reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométrica (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica;

[EM13MAT105] utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e

analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outros).

Neste trabalho usaremos [1] como referência principal.

No segundo capítulo a seguir, vamos apresentar algumas definições e teoremas necessários para o desenvolvimento do projeto principal.

No terceiro capítulo, iremos demonstrar a existência de 7 classificações para o Grupo de Frisos, com várias figuras para melhorar a nossa experiência e exemplificação.

No quarto e penúltimo capítulo, traremos algumas ideias tecnológicas e atividades para o desenvolvimento do aluno em sala de aula, e até para o uso no dia a dia.

E por fim, a conclusão do trabalho poderá ser encontrado no capítulo 5.

## 2 Definições e Teoremas Necessários

Neste capítulo, vamos apresentar algumas definições necessárias para o estudo do Grupo de Frisos.

Já deixaremos admitido que o leitor possui noções básicas de Geometria Euclidiana Plana e Álgebra Linear. Para mais informações, consulte [2] e [3].

### 2.1 Definições e Teoremas

#### Definição 2.1.1.

Sejam  $\mathbf{G}$  um conjunto não-vazio e  $\star$  uma operação binária de  $\mathbf{G}$ , isto é,

$$\begin{aligned} \star: \mathbf{G} \times \mathbf{G} &\rightarrow \mathbf{G} \\ (x,y) &\rightarrow x\star y \end{aligned}$$

Dizemos que  $(\mathbf{G},\star)$  é um *grupo* em relação a esta operação binária  $\star$  se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

1. *Associativa*:  $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ ;
2. *Existência do Elemento Neutro*: existe  $e$  que pertence a  $\mathbf{G}$  tal que  $a \star e = a = e \star a$  para todo  $a$  que pertence a  $\mathbf{G}$ ;
3. *Existência de Elemento Inverso*: para todo  $a$  que pertence a  $\mathbf{G}$ , existe  $a'$  que também pertence a  $\mathbf{G}$  tal que  $a \star a' = e = a' \star a$ .

#### Proposição 2.1.2.

Propriedades elementares de um grupo  $(\mathbf{G},\star)$ :

- i. O elemento neutro é único;
- ii. Cada elemento do grupo possui um único elemento inverso;
- iii. Quaisquer que sejam  $a,b \in \mathbf{G}$ , têm-se:
  - $(a')' = a$
  - $(a \star b)' = b' \star a'$

iv. Se  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{G}$ , então  $(a_1 \star \dots \star a_n)' = a_n' \star \dots \star a_1'$

v. Quaisquer que sejam  $a, b, c \in \mathbf{G}$ , temos:

- $a \star b = a \star c \Rightarrow b = c$
- $b \star a = c \star a \Rightarrow b = c$

**Exemplo 2.1.3.** *Grupo Aditivo dos Inteiros*

Sejam  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , logo temos respectivamente com os itens anteriores:

- i.  $a + 0 = a = 0 + a$
- ii.  $a + (-a) = 0 = (-a) + a$
- iii.  $-(-a) = a$   
e  
 $-(a + b) = (-b) + (-a)$
- iv.  $-(a + b + c) = (-c) + (-b) + (-a)$
- v.  $a + b = a + c \rightarrow (-a) + a + b = (-a) + a + c \rightarrow 0 + b = 0 + c \rightarrow b = c$

Portanto  $(\mathbb{Z}, +)$  é um Grupo Aditivo.

**Definição 2.1.4.**

Dado um conjunto de pontos  $S$ , uma *transformação* no plano euclidiano leva cada ponto  $P \in S$  em outro ponto  $Q$  do mesmo plano, alterando sua posição, tamanho ou forma. As transformações que mais utilizaremos serão as translações, reflexões e rotações.

**Definição 2.1.5.**

Dados  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ , a *distância* entre  $A$  e  $B$  é denotada por  $AB$  e dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Definição 2.1.6.**

Chama-se *matriz* de ordem  $m$  por  $n$  a um quadro de  $m \times n$  elementos dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cada elemento da matriz está identificada por dois índices:  $i$  e  $j$ .

$A = [a_{ij}]$  onde  $i$  representa a posição "linha" e  $j$  representa a posição "coluna".

### Definição 2.1.7.

A soma de duas Matrizes de mesma ordem  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$  é uma matriz  $m \times n$  cujos elementos são a soma dos elementos correspondentes de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Isto é,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

*Exemplo:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 7 & 8 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 6 & 4 & 12 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 13 & 12 & 0 \\ 7 & 1 & 14 \end{bmatrix}$$

**Propriedades:** Dadas as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  de mesma ordem  $m \times n$ , temos:

1.  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$  (comutatividade)
2.  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$  (associatividade)
3.  $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ , onde  $\mathbf{0}$  denota a matriz nula  $m \times n$ .

### Definição 2.1.8.

A multiplicação de duas Matrizes ocorre somente se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda, isto é, só ocorrerá a multiplicação se as matrizes forem da forma  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times l}$ . Além disso, a matriz resultado  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  será de ordem  $m \times l$ .

O elemento  $c_{ij}$  é obtido multiplicando os elementos da  $i$ -ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da  $j$ -ésima coluna da segunda matriz, e somando-se esses produtos.

*Exemplo:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

*Exemplo:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 7 & 8 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 6 & 4 & 12 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 + 18 - 35 & 0 + 12 + 0 & 16 + 36 - 45 \\ 7 + 48 - 84 & 0 + 32 + 0 & 56 + 96 - 108 \\ 0 + 6 + 35 & 0 + 4 + 0 & 0 + 12 + 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 12 & 7 \\ -29 & 32 & 44 \\ 41 & 4 & 57 \end{bmatrix}$$

### Definição 2.1.9.

Uma *isometria* do plano é uma transformação  $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva distância, ou seja, dados  $P, Q \in \mathbb{R}^2$  se  $P' = \alpha(P)$  e  $Q' = \alpha(Q)$ , então  $d(P', Q') = d(P, Q)$

O próprio significado da palavra já a define: ISO: "mesma" e METRIA: "medida".

Um exemplo de isometria é dada pela *translação*: o movimento de deslocar um ponto a outro mantendo direção e sentido, sem girar. Assim, dados  $P(x_P, y_P)$  e  $Q(x_Q, y_Q)$  e transladarmos ambos os pontos, teremos uma Isometria como desmonstrado a seguir:

$$\begin{aligned} d(P', Q') &= \sqrt{[(x_P + a) - (x_Q + a)]^2 + [(y_P + b) - (y_Q + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = d(P, Q) \end{aligned}$$

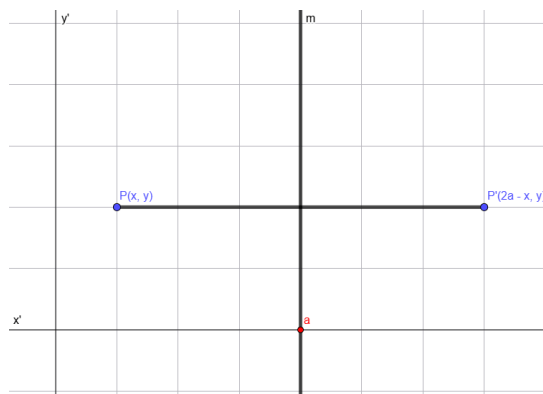
### Definição 2.1.10.

Uma *Rotação* em torno de um ponto C de um ângulo  $\theta$  é uma transformação no plano  $\rho_{C, \theta}$  que deixa o ponto C fixo e leva um ponto P no ponto P', de modo que  $\overline{CP'} = \overline{CP}$  e o ângulo entre  $\overline{CP'}$  e  $\overline{CP}$  é igual a  $\theta$ . Dizemos então que  $\rho_{C, \theta}$  tem centro C e direção  $\theta$ .

**Definição 2.1.11.**

A *Reflexão*  $\mathfrak{R}_m$  no plano em relação a uma reta  $m$ , chamada reta mediatriz vertical, é uma transformação tal que, dado qualquer ponto  $P = (x, y)$  no plano esse ponto é refletido da mesma forma e tamanho do lado oposto da reta  $m$ , mantendo a mesma distância em relação ao eixo de reflexão. Assim,  $(x, y) \rightarrow (2a - x, y)$ , sendo  $a$  o ponto de encontro da reta mediatriz  $m$  com o eixo  $x$ .

Figura 6



Fonte: Criação da própria autora

*Demonstração.* É de fácil percepção que:

$$d(P) = \sqrt{(a - x)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{((2a - x) - a)^2 + (y - y)^2} = d(P'), \text{ sendo } P' = (2a - x, y) \text{ o ponto de Reflexão de } P \text{ em relação a reta } m.$$

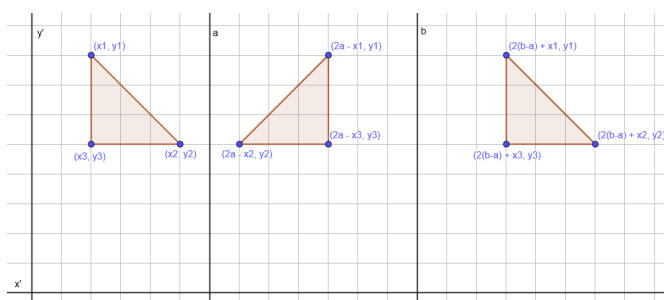
**Definição 2.1.12.**

A transformação identidade  $\iota$  é tal que  $\iota(P) = P$ , para qualquer ponto  $P$ .

**Proposição 2.1.13.**

Se  $a$  e  $b$  são retas verticais, distintas e paralelas no plano, então  $\mathfrak{R}_b \circ \mathfrak{R}_a$  é uma *Translação Horizontal*.

Figura 7



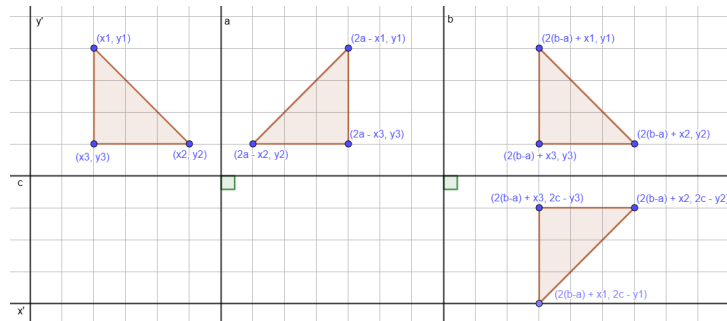
Fonte: Criação da própria autora

De fato, dado um conjunto de pontos  $S$  no plano que formam uma figura, uma reta  $a$  paralela ao eixo  $y$ , a Reflexão  $\mathfrak{R}_a$  faz com que cada ponto do conjunto  $S$ :  $(x, y) \rightarrow (2a - x, y)$  em torno da reta  $a$ . O novo conjunto de pontos  $S'$  criado pela Reflexão sofre uma Reflexão em torno da reta  $b$ , onde  $(2a - x, y) \rightarrow (2b - (2a - x), y) = (2(b - a) + x, y)$ . Logo  $\mathfrak{R}_b \circ \mathfrak{R}_a$  é uma Translação Horizontal onde  $(x, y) \rightarrow (2(b - a) + x, y)$ , ou seja, uma Translação de razão  $2(b - a)$ .

**Proposição 2.1.14.**

Se  $a$  e  $b$  são retas distintas e perpendiculares á reta  $c$  no plano, então  $\mathfrak{R}_c \circ \mathfrak{R}_b \circ \mathfrak{R}_a$  é uma Reflexão com Deslizamento de eixo  $c$ , onde  $\mathfrak{R}_c$  é uma Reflexão Horizontal e  $\mathfrak{R}_b \circ \mathfrak{R}_a$  é uma Translação.

Figura 8



Fonte: Criação da própria autora

**Teorema 2.1.15.**

O conjunto de todas as simetrias de um conjunto de pontos, com a operação composição, forma um grupo.

*Demonstração:* Seja  $s$  um conjunto de pontos.

O conjunto de simetrias para  $s$  é não-vazio, pois  $\iota$  é uma simetria para  $s$ , já que  $\iota(s) = s$ . Suponha que  $\alpha$  e  $\beta$  sejam simetrias para  $s$ . Então:

$$\beta \circ \alpha(s) = \beta(\alpha(s)) = \beta(s) = s$$

portanto, o conjunto de simetrias é fechado para essa operação.

Pela definição 2.1.10,  $\alpha$  é uma isometria, logo possui inversa  $\alpha^{-1}$ . Então:

$$\alpha^{-1}(s) = \alpha^{-1}(\alpha(s)) = \alpha^{-1} \circ \alpha(s) = \iota(s) = s$$

logo  $\alpha^{-1}$  é uma simetria e então o conjunto de simetrias também possui a propriedade inversa.

Portanto o conjunto de todas as simetrias de um conjunto de pontos forma um grupo.

Se o conjunto de pontos considerado nesse teorema for o conjunto de todos os pontos, então as simetrias são exatamente as mesmas que as isometrias. ■

E, portanto, temos o seguinte teorema:

**Teorema 2.1.16.**

O conjunto de todas as isometrias com a operação da composição, forma um grupo, denotado por  $\mathcal{I}$ .

*Demonstração:* análogo ao do Teorema anterior. ■

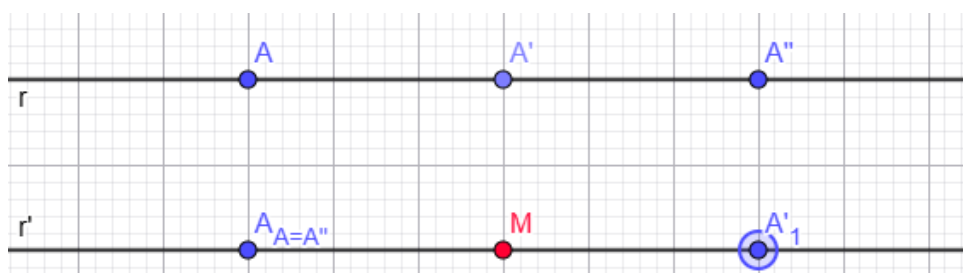
**Teorema 2.1.17.**

Sejam  $S, T : r \rightarrow s$  isometrias. Se existirem pontos  $A \neq B$  em  $r$  tais que  $S(A) = T(A)$  e  $S(B) = T(B)$  então  $S = T$ , isto é,  $S(X) = T(X)$  para qualquer  $X \in r$ .

**Teorema 2.1.18.**

Se  $T : r \rightarrow r$  é uma isometria, então  $T$  é a função identidade ou uma translação ou uma reflexão em torno de um ponto de  $r$ .

Figura 9



Fonte: Criação da própria autora

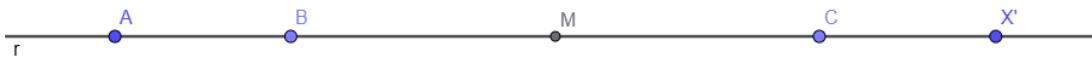
*Demonstração:* se  $T$  não é função identidade, existe  $A \in r$  tal que  $A' = T(A) \neq A$ . Seja  $A'' = T(A')$ . Como  $T$  é uma isometria, tem-se  $d(A', A'') = d(A, A') > 0$ . Há duas possibilidades: ou  $A'' \neq A$  ou  $A'' = A$ . No primeiro caso,  $A'$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AA''}$ , logo  $T$  coincide com a translação  $T_{\overline{AA'}}$  nos pontos distintos  $A$  e  $A'$ , portanto  $T = T_{\overline{AA'}}$ , em virtude do Teorema 2.1.21. No segundo caso, se chamarmos de  $M$  o ponto médio do segmento  $\overline{AA'}$  veremos que:  $d(T(M), A') = d(M, A) = d(M, A') = d(T(M), A'') = d(T(M), A)$ , logo  $T(M)$  é o ponto médio de  $\overline{AA'}$ , ou seja,  $T(M) = M$ . Assim  $T$  coincide, nos dois pontos distintos  $A$  e  $M$ , com a reflexão  $\mathfrak{R}_M$  em torno do ponto  $M$ . ■

**Teorema 2.1.19.**

Uma translação é uma isometria.

*Demonstração:* tomemos dois pontos distintos  $A, B$  sobre a reta  $r$ . A translação  $T_{A,B}:r \rightarrow r$  é a função que faz corresponder a cada ponto  $X \in r$  o ponto  $X' = T_{A,B}(X)$  tal que  $\overline{XX'} = \overline{AB}$  e, além disso, o sentido do percurso de  $X$  para  $X'$  é o mesmo de  $A$  para  $B$ . Em termos matemáticos, dizer que  $d(X,X') = d(A,B)$  e que os sentidos de percurso  $A \rightarrow B$  e  $X \rightarrow X'$  coincidem, equivale a afirmar que o ponto médio  $M$  do segmento  $\overline{AX'}$  é também ponto médio do segmento  $\overline{BX}$ .

Figura 10



Para provar que toda translação é uma isometria, observamos inicialmente que se  $T_{A,B}(X) = X'$  e  $T_{A,B}(Y) = Y'$ , então  $d(X,X') = d(Y,Y') = d(A,B)$ . Dados  $X,Y \in r$ , para mostrar que se tem  $d(X',Y') = d(X,Y)$ , consideremos dois casos expressos pelas figuras abaixo:

Figura 11



Figura 12



No primeiro caso, os segmentos  $\overline{XX'}$  e  $\overline{YY'}$  não têm pontos interiores em comum e, no segundo, têm. Então valem, respectivamente, as relações:

$$d(X', Y') = d(X', Y) + d(Y, Y') = d(X', Y) + d(X, X') = d(X, Y)$$

ou

$$d(X', Y') = d(Y, Y') - d(X', Y) = d(X, X') - d(X', Y) = d(X, Y)$$

Em qualquer caso,  $d(X', Y') = d(X, Y)$ . ■

Dessa forma, é possível concluir, com base nos Teoremas apresentados acima, que o Grupo de Frisos configura-se como um **Grupo** propriamente dito, uma vez que o conjunto de todas as isometrias, sob a operação de composição, constitui um grupo (conforme estabelece o Teorema 2.1.16). Além disso, os Frisos têm seus geradores constituídos pela composição de Translações e Reflexões, que são isometrias. A demonstração detalhada de que os Frisos são formados por translações e reflexões será apresentada nos próximos capítulos.

Repare que provamos que a Translação e Reflexão na reta é isométrico. Entretanto, para não estender demais o trabalho, deixaremos uma referência [2] para o mesmo poder consultar que outros tipos de Translações e Reflexões (não somente entre pontos e retas) também são isométricos.

### 3 Grupo de Frisos

Uma *Faixa Plana* é uma região limitada por duas retas paralelas.

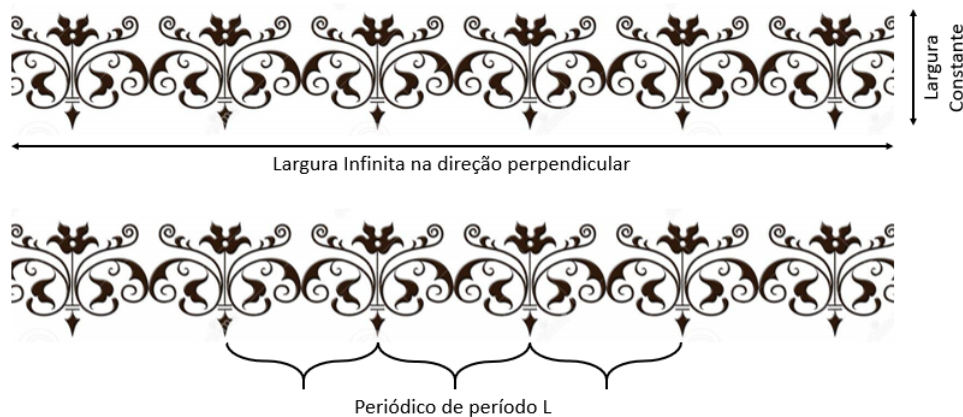
Um *Friso* é uma figura contida numa faixa plana satisfazendo:

- i. um friso tem largura constante, e é infinitamente longo na direção perpendicular à direção da largura;
- ii. o friso é periódico, isto significa que existe uma distância mínima  $L > 0$  tal que a translação do friso de uma distância  $L$ , ao longo da direção da faixa o deixará fixo.

Vamos tentar compreender melhor usando imagens como a seguir:

*Obs.: Todas as figuras sem uma fonte especificada, foram de criação da própria autora.*

Figura 13



*Obs.: deixaremos como exemplo imagens em que a direção horizontal seja a infinita apenas por comodidade do espaço destinado.*

Para esclarecimento, utilizaremos dois conceitos novos sobre os frisos:

1. **PARTE ORIGINAL:** é a parte do friso em que observamos não ter sofrido ainda nenhuma transformação, nenhuma simetria. Essa parte tem tamanho menor ou igual a  $L$ .
2. **PARTE TRANSLADADA:** é a parte do friso que observamos ser a que se repete periodicamente e possui tamanho  $L$ . Além disso, diferentemente de uma parte periódica qualquer (pois podemos escolher mais de uma parte periódica para definirmos), a parte transladada é aquela que exige conter a imagem original e as suas isometrias.

Nos Frisos, podemos ter mais de uma Parte Original definida, assim como mais de uma Parte Transladada, porém possuirão as mesmas regras e se diferenciarão da Parte Periódica qualquer.

Segue exemplo sobre o significado dos novos conceitos enunciados a cima em forma de figura:

Figura 14

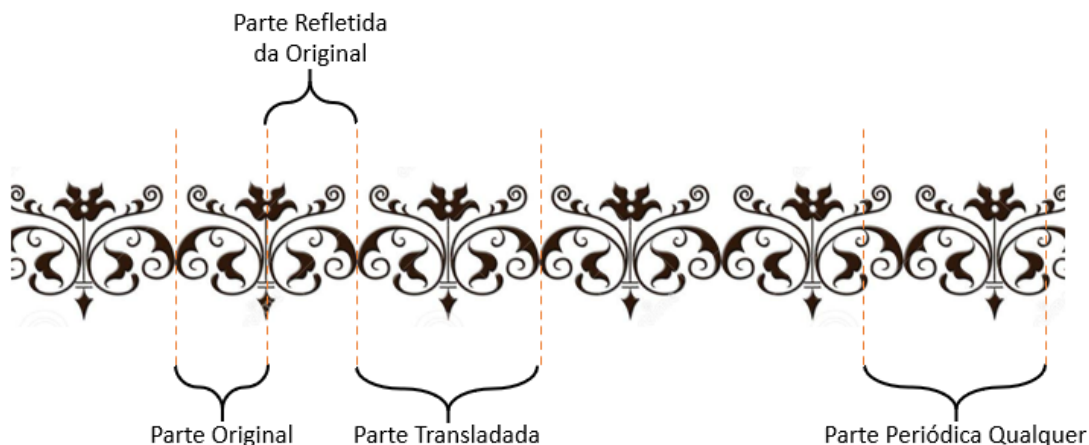
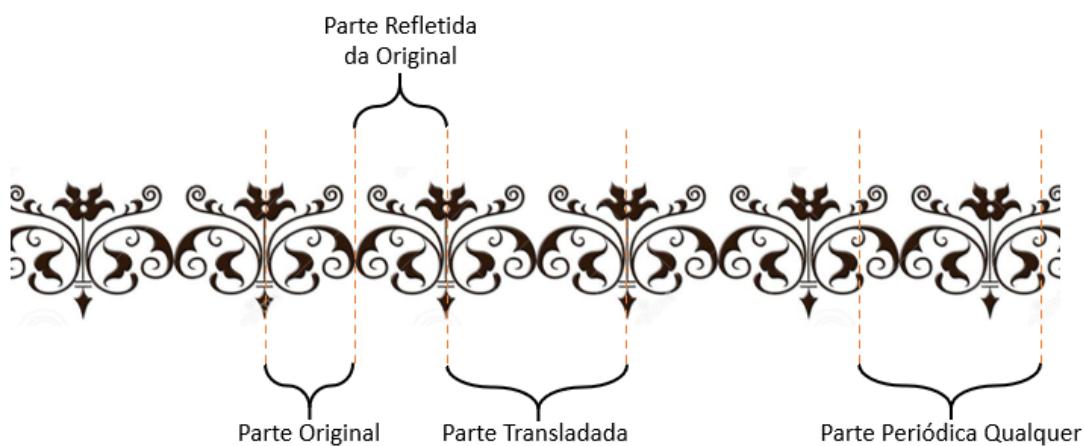


Figura 15



Nas Figuras 14 e 15 acima podemos observar a **Parte Original** escolhida sendo aquela menor que o período, onde observamos que ela não possui nenhum tipo de transformação ou simetria, é uma parte singular. Já a **Parte Transladada** observamos ser aquela que possui a Parte Original também, só que agora unida com uma imagem isométrica da Parte Original, nesse caso sua reflexão vertical. Diferentemente da **Parte Periódica Qualquer** destacada, que apesar de possuir a parte original, não observamos a reflexão vertical contida no friso se recortarmos apenas essa parte. Ou seja, com uma parte periódica qualquer isolada, não conseguiríamos classificar o friso de acordo com suas isometrias.

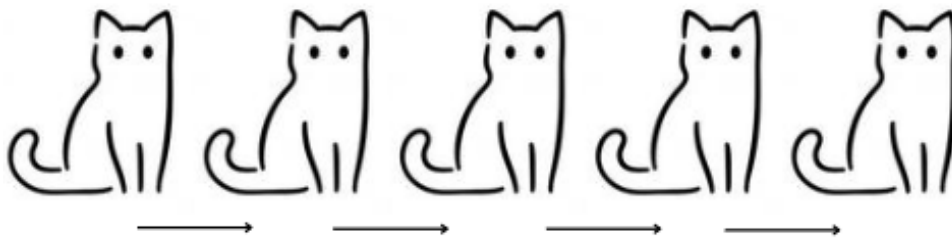
A partir de agora, iremos mostrar alguns geradores de frisos, que nada mais são que isometrias que deixam nosso friso invariante, ou seja, significa aplicar uma transformação

geométrica a um padrão repetitivo de modo que, após essa operação, a figura final pareça exatamente igual à original, ocupando a mesma posição no plano. Tais geradores já foram enunciados e definidos no capítulo anterior. Portanto, as descrições dos geradores a seguir terão cunho mais didático para o ensino no fundamental e médio.

## 3.1 Translação

Já deixamos evidente na definição que em todos os frisos irão possuir a translação, denotada por  $T_L$ . Segue imagem de um friso onde somente a transformação da translação é aplicada:

Figura 16



Mas não definimos a escrita da translação em forma de um gerador matricial, que nos ajudará a resolver questões de frisos de forma mais algébrica. Isto é, dado um ponto  $P = (x, y)$  que iremos identificar por  $(x, y, 1)$ , ao multiplicarmos com o gerador matricial da translação abaixo, encontraremos de forma algébrica seu novo ponto. Assim temos:

$$T_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T_L \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + L \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \simeq (x + L, y)$$

e a composição de  $n$  operações  $T_L$  para gerar o friso nos dá:

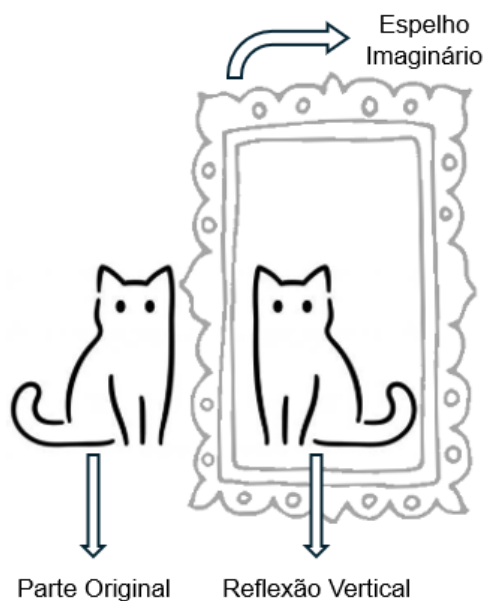
$$T_L \circ T_L \circ \dots \circ T_L = T_{nL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & nL \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 3.2 Reflexão

### 3.2.1 Reflexão Vertical

A reflexão vertical, denotada por  $\mathfrak{R}_V$ , didaticamente falando, é quando colocamos um espelho imaginário ao lado da nossa parte original, como representada a seguir:

Figura 17



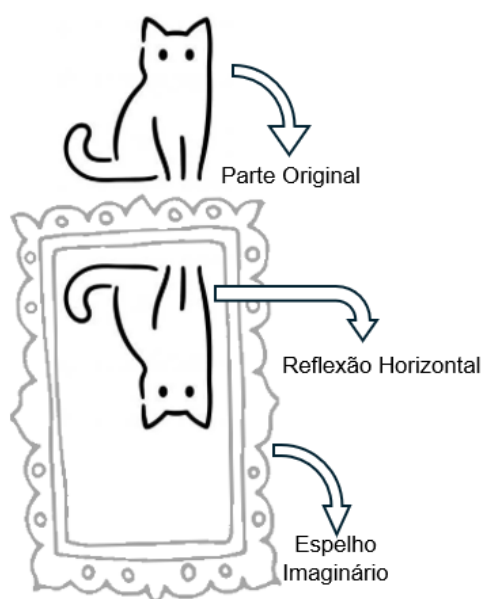
Algebricamente, a reflexão vertical pode ter como matriz geradora:

$$\mathfrak{R}_V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 Reflexão Horizontal

Já a reflexão horizontal, denotada por  $\mathfrak{R}_h$  é quando colocamos um espelho embaixo da parte original como na imagem a seguir:

Figura 18



Representado algebricamente pela matriz geradora:

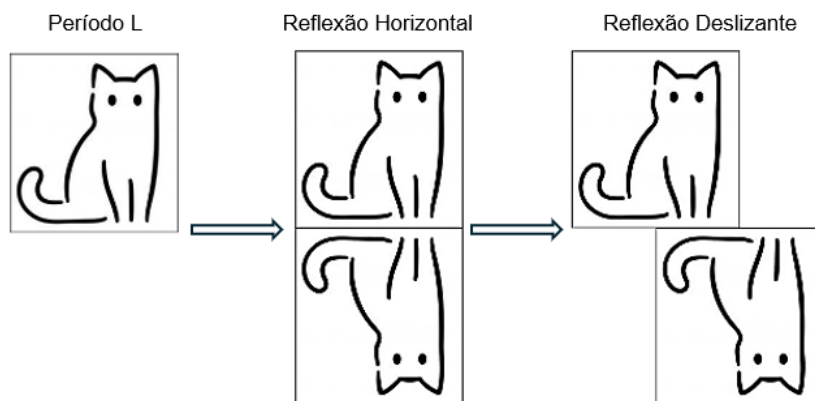
$$\mathfrak{R}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

### 3.2.3 Reflexão Deslizante

Teremos por notação a sigla  $S_g$ . A reflexão deslizante foi criada na verdade com a composição da reflexão horizontal com uma translação de meio período, ou seja,  $S_g = T_{L/2} \circ \mathfrak{R}_h$ .

Didaticamente falando, podemos entender que a reflexão deslizante é quando inicialmente fazemos a reflexão horizontal na parte original já definido o período L, e depois iremos transladar horizontalmente apenas a parte refletida à distância de metade do período L definido. Sendo assim, o passo a passo segue abaixo:

Figura 19



Algebricamente, a  $S_g$  é a composição da metade de um período de translação com uma reflexão horizontal, logo:

$$T_{L/2} \circ \mathfrak{R}_h = S_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 3.3 Rotação

A rotação que trabalharemos será apenas a rotação de  $180^\circ$ , que nada mais é que a composição  $\mathfrak{R}_h \circ \mathfrak{R}_V$ . Como utilizaremos com frequência essa notação de composição, omitiremos o “ $\circ$ ” e a nossa rotação será a partir de então denotada apenas por  $\mathfrak{R}_h\mathfrak{R}_V$ .

De forma prática, nós iremos fazer a reflexão vertical da parte original já ensinada anteriormente e essa parte originada pela  $\mathfrak{R}_V$ , faremos nela a reflexão horizontal, gerando

assim nossa rotação de  $180^\circ$ . Fazer o inverso das reflexões gerará o mesmo resultado, como mostrado nas imagens a seguir:

Figura 20

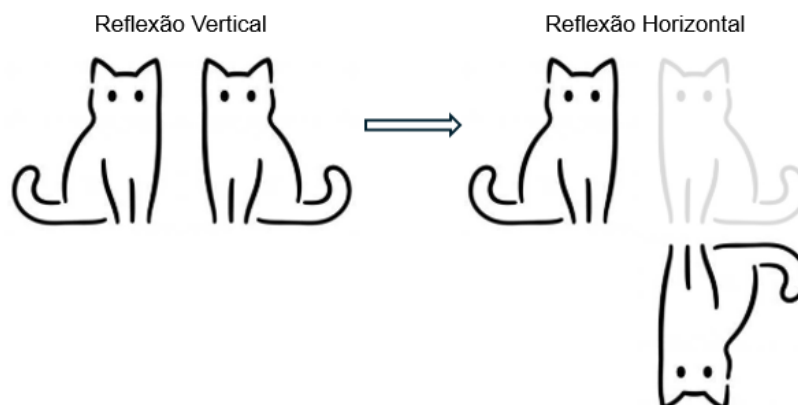
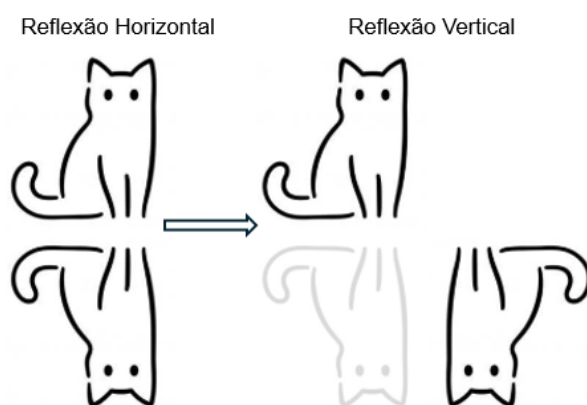


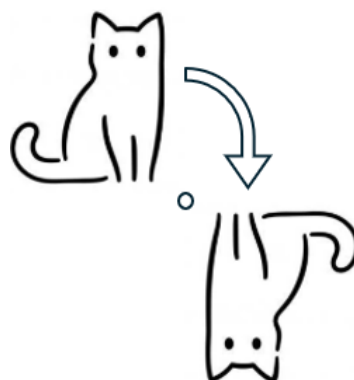
Figura 21



A rotação também possui como definição uma figura que gira em torno de um ponto fixo, chamado de centro de rotação. A rotação em  $180^\circ$  pode ser feito como a seguir:

Figura 22

Rotação por um Ponto Fixo



Na forma matricial, teremos:

$$\mathfrak{R}_h \mathfrak{R}_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

### 3.4 Subconjuntos de Frisos

Após explicarmos cada um dos geradores de frisos, vamos montar os possíveis subgrupos existentes, deixando claro que:

1. a translação se encontra em todos os subgrupos por ser necessária devido a definição de um friso.
2. Qualquer conjunto pode conter zero, um ou dois dos três geradores  $\mathfrak{R}_h$ ,  $\mathfrak{R}_V$ ,  $\mathfrak{R}_h \mathfrak{R}_V$ . Se a lista contiver dois, automaticamente conterá o terceiro, e queremos evitar um “pleonasma matemático” nessa listagem.

Seguindo as observações acima, encontramos a seguinte listagem:

1.  $T_L$
2.  $T_L, \mathfrak{R}_V$
3.  $T_L, \mathfrak{R}_h$
4.  $T_L, S_g$
5.  $T_L, \mathfrak{R}_h \mathfrak{R}_V$
6.  $T_L, S_g, \mathfrak{R}_h \mathfrak{R}_V$
7.  $T_L, \mathfrak{R}_h, \mathfrak{R}_V$
8.  $T_L, S_g, \mathfrak{R}_h$
9.  $T_L, S_g, \mathfrak{R}_V$
10.  $T_L, S_g, \mathfrak{R}_h, \mathfrak{R}_V$

Portanto, conseguimos localizar esses 10 conjuntos que se enquadram nas definições de frisos que fomos construindo ao longo do trabalho. Agora vamos, um por um, montar cada friso de acordo com cada subconjunto listado. Dessa forma iremos demonstrar como construir um friso com diferentes conjuntos de geradores e por consequência, ensinar a identificá-los em uma imagem pré-estabelecida.

Tomaremos por Parte Original a imagem a seguir:

Figura 23



### 3.4.1 Translação ( $T_L$ )

Como mostrado anteriormente, a Translação é a transformação mais importante, pois ela se encontra em todos os Frisos. Pela sua definição, a figura de um Friso que possui somente a translação como gerador seria:

Figura 24



### 3.4.2 Translação, Reflexão Vertical ( $T_L, \mathfrak{R}_V$ )

Esse gerador pode ser criado imaginando um espelho vertical ao lado da nossa parte original como ensinado no subcapítulo 3.2.1, criando a Reflexão Vertical e assim transladar a figura total criada infinitas vezes, como demonstrado a seguir:

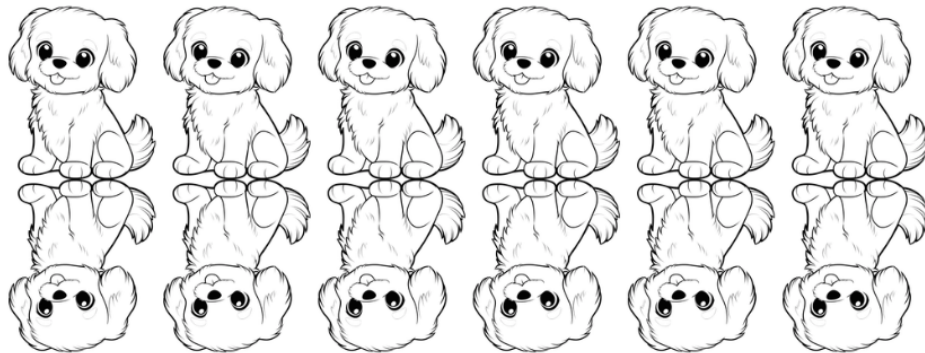
Figura 25



### 3.4.3 Translação, Reflexão Horizontal ( $T_L, \mathfrak{R}_h$ )

Agora esse gerador pode ser criado imaginando um espelho na horizontal da nossa parte original como descrito no subcapítulo 3.2.2, criando a Reflexão Horizontal e assim transladar a figura total criada infinitas vezes, como mostrado a seguir:

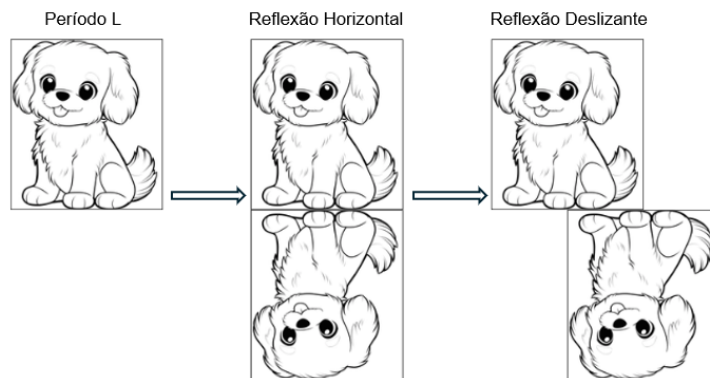
Figura 26



### 3.4.4 Translação, Reflexão Deslizante ( $T_L, S_g$ )

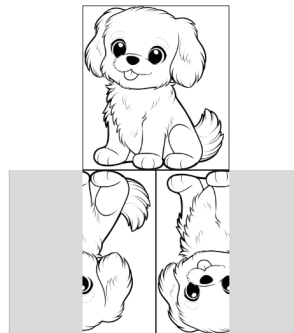
Para a criação desse Friso, é preciso saber a definição da Reflexão Deslizante como sendo a composição entre a Reflexão Horizontal e a Translação em meio período ( $T_{L/2} \circ \mathfrak{R}_h$ ). Assim para criar esse Friso, teremos essas duas etapas que foram apresentadas no subcapítulo 3.2.3. Para lembrar como é feita uma Reflexão Deslizante, iremos mostrá-la novamente com a nossa Parte Original pré-definida. O contorno ao redor da Parte Original apresentado serve apenas para deixar em evidência o período L definido.

Figura 27



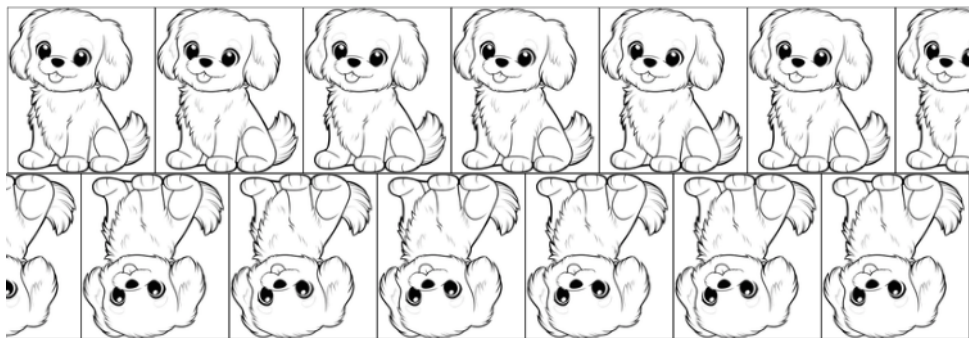
Agora para representar  $T_L, S_g$  em um friso, devemos lembrar que ele é periódico de distância L. Note que o período que definimos é da mesma largura que nossa Parte Original. Assim a parte do “rabo” do nosso cachorrinho fica de fora do nosso período estabelecido. O que acontece é que esse “rabo” volta para dentro da parte periódica como mostrado na figura abaixo:

Figura 28



Só que quando colocamos tal figura em um Friso, ou seja, incluindo infinitas translações, essas metades se completam, e a figura não fica cortada ou estranha quando olhamos para a infinitude do Friso.

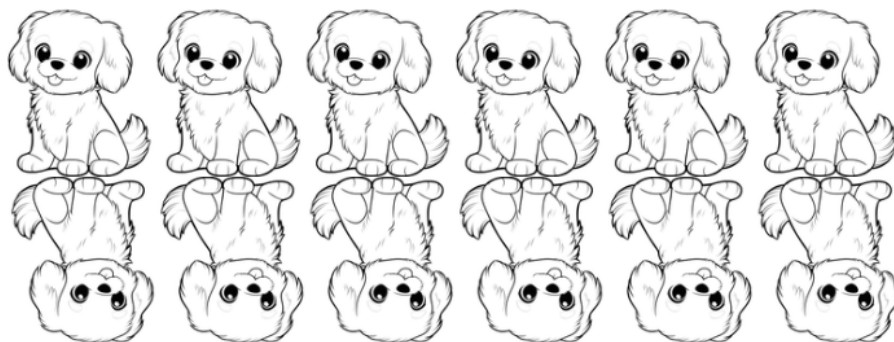
Figura 29



### 3.4.5 Translação, Rotação ( $T_L, \mathfrak{R}_h \mathfrak{R}_V$ )

O gerador Rotação foi definido e ensinado anteriormente no subcapítulo 3.3 como sendo a composição da Reflexão Horizontal com a Reflexão Vertical ( $\mathfrak{R}_h \circ \mathfrak{R}_V$ ). Portanto segue a demonstração de um Friso que possui os geradores da Translação e Rotação:

Figura 30



### 3.4.6 Translação, Reflexão Deslizante, Rotação ( $T_L, S_g, \mathcal{R}_h \mathcal{R}_V$ )

A partir de agora, nós temos pelo menos 3 geradores de Frisos, o que nos faz tomar cuidados que anteriormente não tinham sido explorados. Deixaremos para fazer o gerador da Translação sempre como finalizador das etapas enunciadas, por conta da definição de Friso ser uma figura periódica e infinita.

Portanto para esse Friso específico teremos que realizar a Reflexão Deslizante que já conhecemos o processo, e a partir da figura gerada pela Reflexão Deslizante iremos realizar a Rotação. A ordem em que realizamos as transformações não irá alterar o resultado final, como demonstrado a seguir:

Figura 31

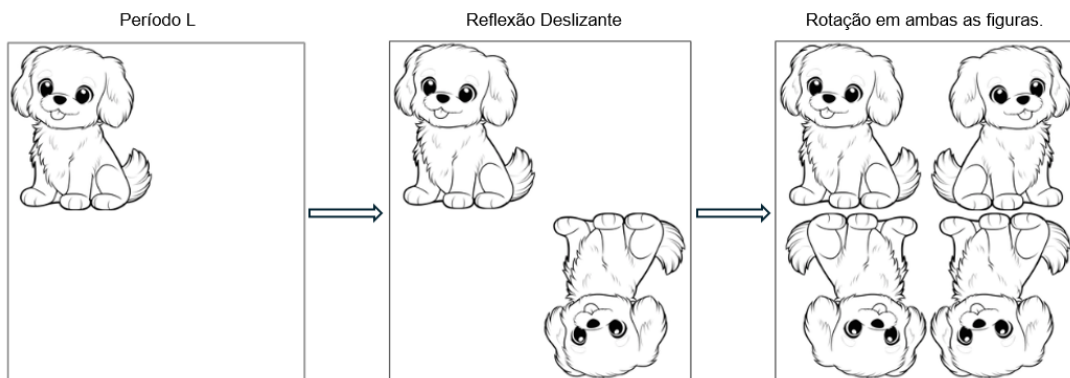
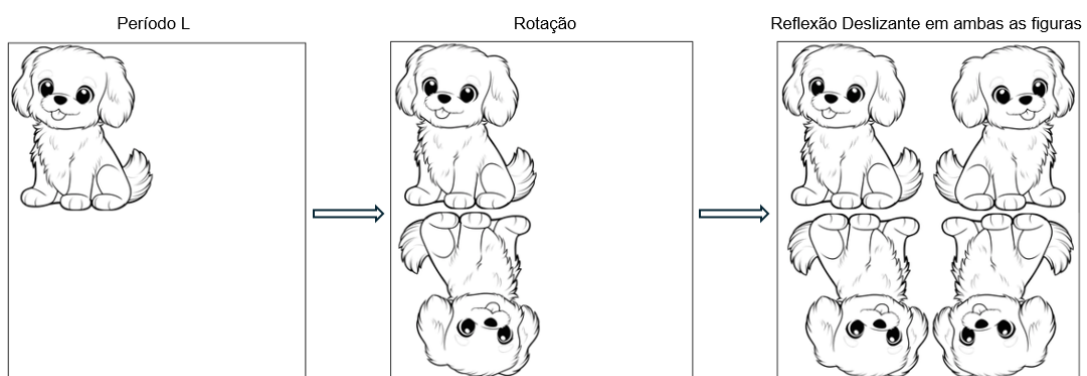
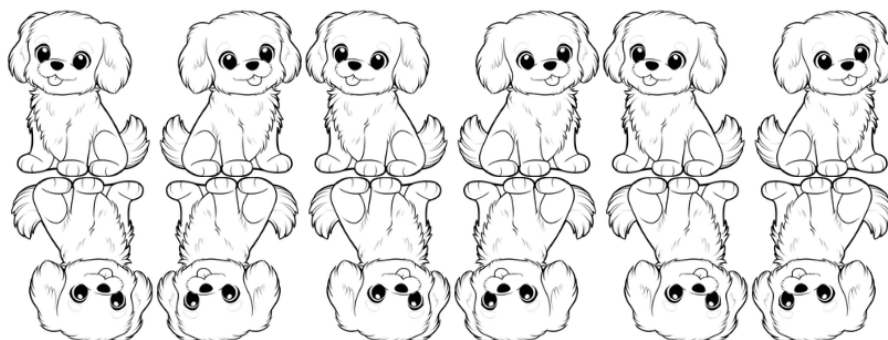


Figura 32



Modelo de Friso com os geradores  $T_L, S_g, \mathcal{R}_h, \mathcal{R}_V$ :

Figura 33



### 3.4.7 Translação, Reflexão Horizontal, Reflexão Vertical ( $T_L, \mathcal{R}_h, \mathcal{R}_V$ )

Novamente e com os próximos subconjuntos, iremos deixar o gerador da Translação para finalizar e demonstrar que a ordem dos geradores não irá alterar o resultado final.

Figura 34

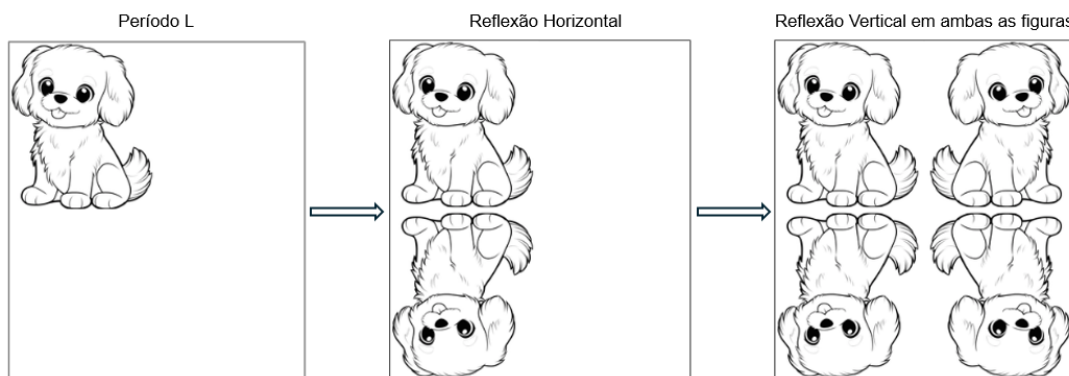
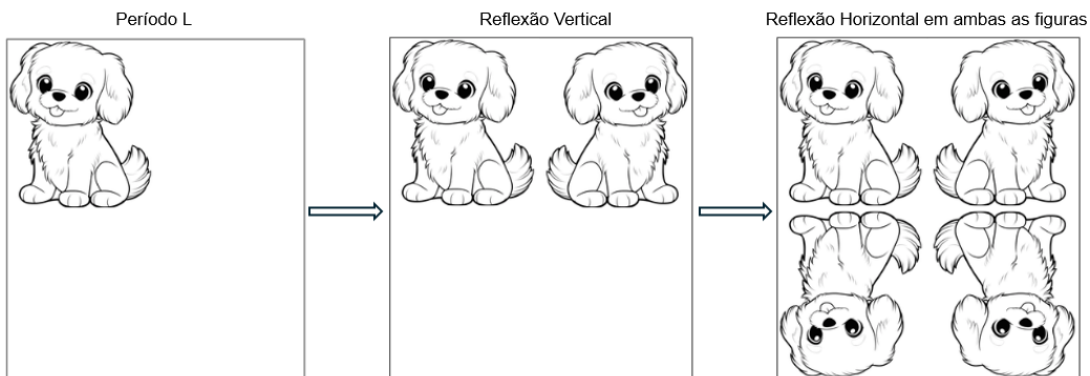
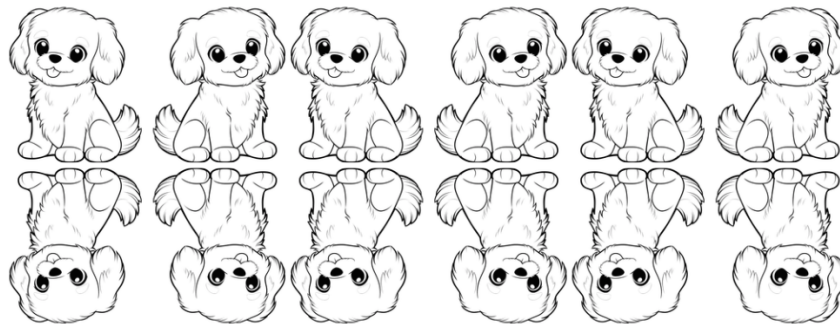


Figura 35



Modelo de Friso com todos os geradores  $T_L, \mathcal{R}_h, \mathcal{R}_V$

Figura 36



### 3.4.8 Translação, Reflexão Deslizante, Reflexão Horizontal ( $T_L, S_g, \mathcal{R}_h$ )

Nas figuras abaixo que demonstram a formação da Parte Transladada podemos reparar um pequeno detalhe inicial: iniciamos definindo qual seria o Período L, porém ao final das transformações o Período correto é apenas a metade daquele pré-definido anteriormente. Essa estranheza é explicada algebricamente mais a frente.

Figura 37

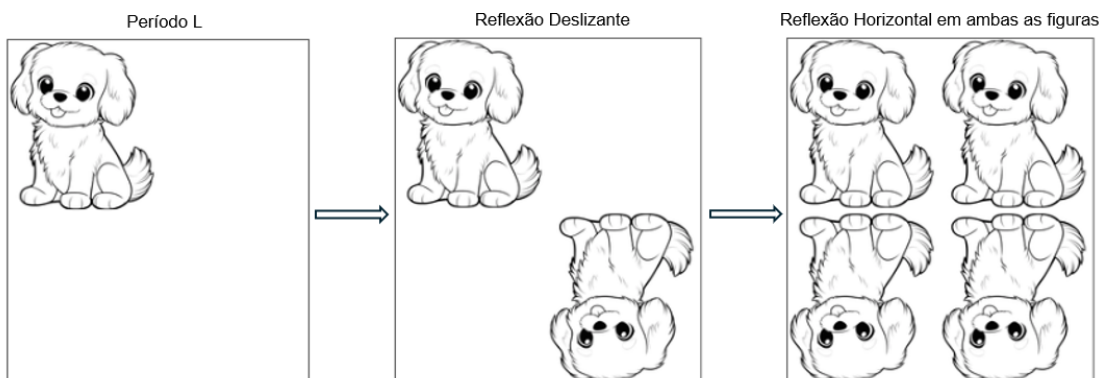
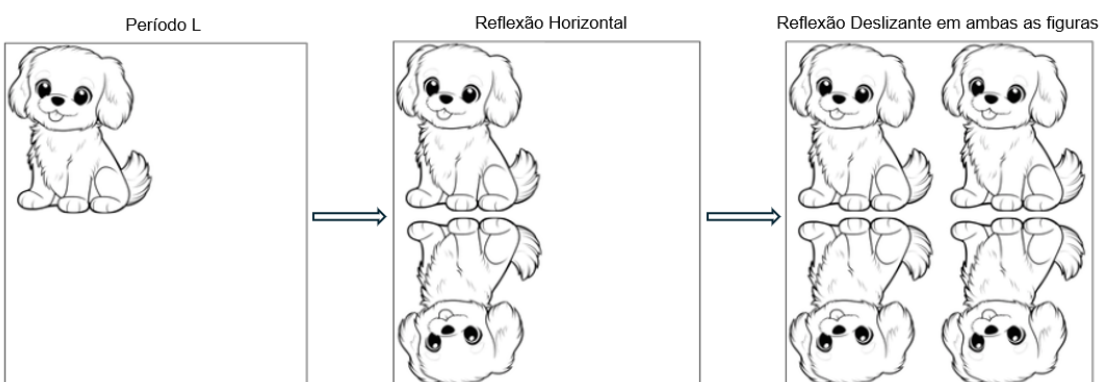


Figura 38



Podemos ter uma melhor visualização da problemática dessa Parte Translada quando reduzimos o tamanho do Período L, como demonstrado a seguir:

Figura 39

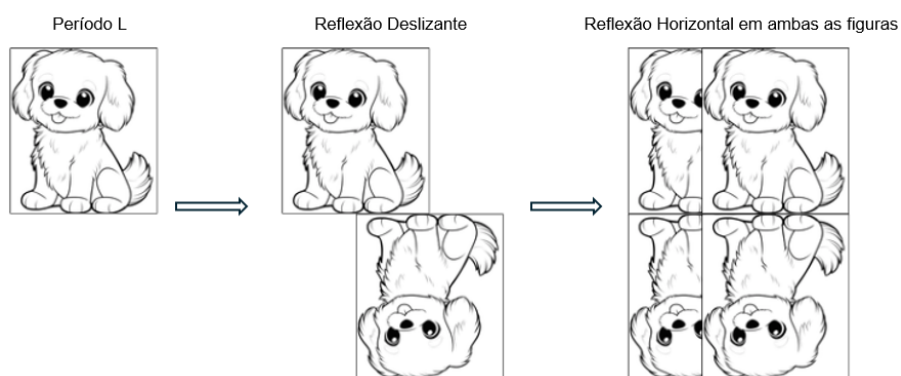
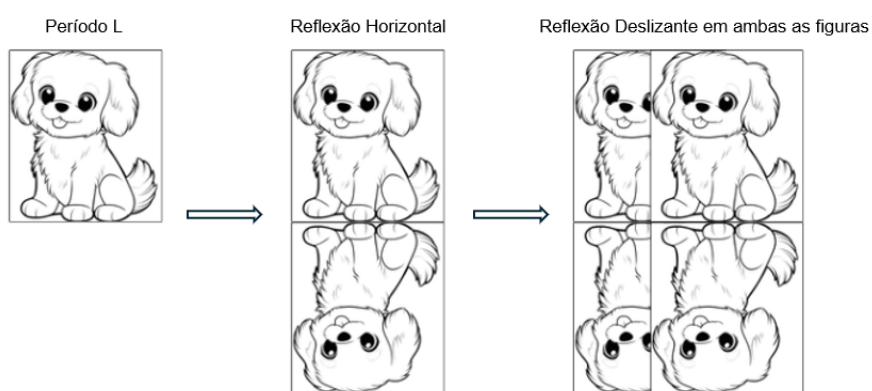


Figura 40



Observe como ficaria os dois modelos em forma de Friso (de período maior e menor), ou seja, com todos os geradores  $T_L, S_g, \mathfrak{R}_h$  aplicados.

Figura 41

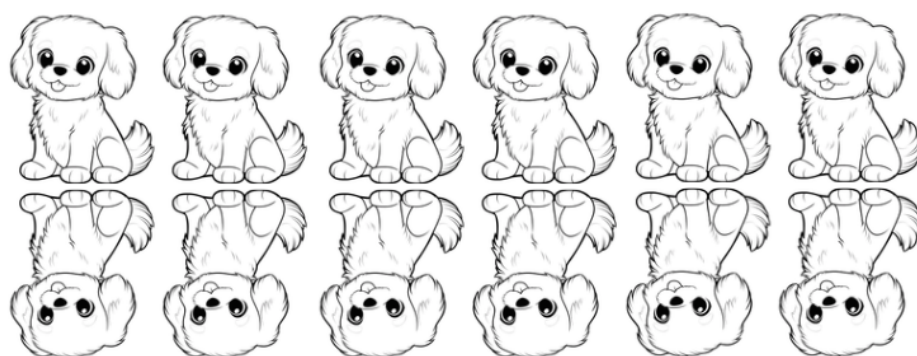
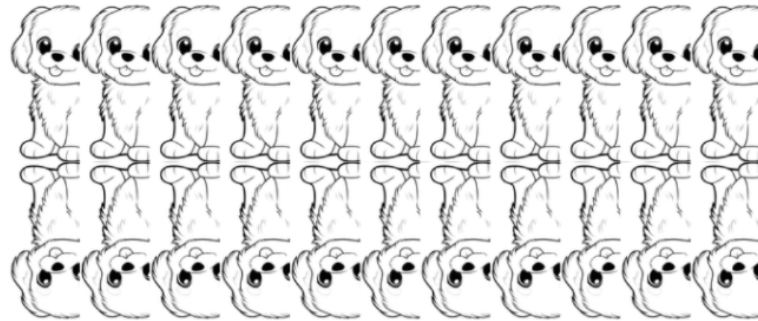


Figura 42



Nas Figuras 41 e 42, foram feitas a partir dos mesmo geradores. Porém os Frisos não conseguem manter a Parte Original completa como foi definida anteriormente, como na Figura 42 ou até mesmo a Parte Transladada não deixa claro os geradores utilizados como na Figura 41, parecendo ter sido feito somente uma Reflexão Horizontal. Portanto, há um problema na composição desses geradores unidos. Veremos o desenvolvimento da justificativa posteriormente.

### 3.4.9 Translação, Reflexão Deslizante, Reflexão Vertical ( $T_L, S_g, \mathfrak{R}_V$ )

Continuando com a construção dos subconjuntos de Frisos, temos a Parte Translada composta pela Reflexão Deslizante e a Reflexão Vertical:

Figura 43

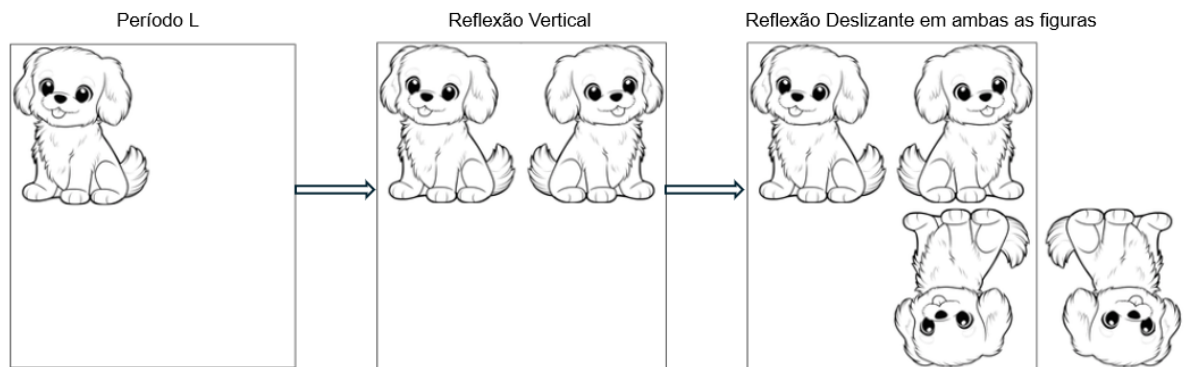
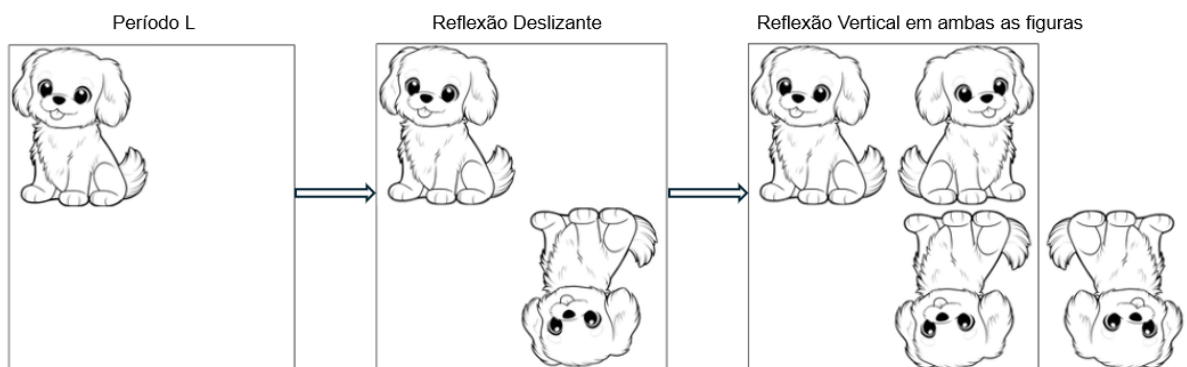
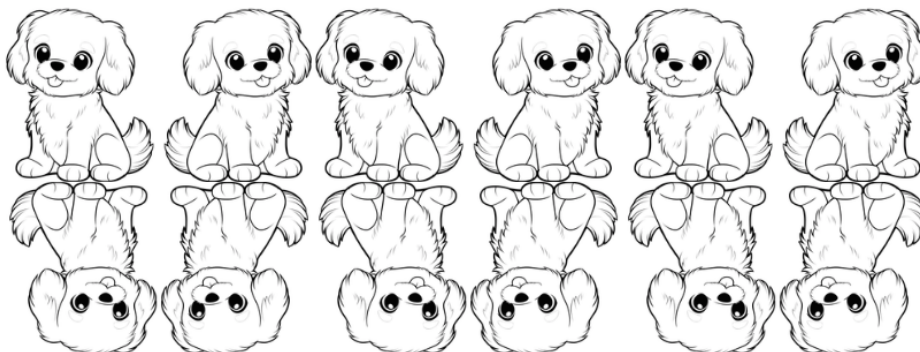


Figura 44



Então o Friso composto pelos geradores  $T_L, S_g, \mathfrak{R}_V$ , mesmo que uma figura fique de “fora” do Período L é:

Figura 45

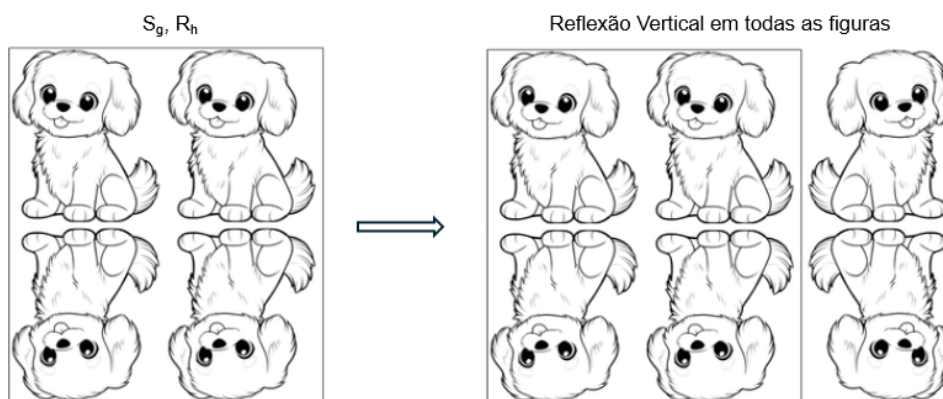


Se observarmos o Friso criado acima, podemos notar uma semelhança no Friso criado no subconjunto 3.4.6. Veremos a justificativa desse acontecimento posteriormente.

### 3.4.10 Translação, Reflexão Deslizante, Reflexão Horizontal, Reflexão Vertical ( $T_L, S_g, \mathfrak{R}_h, \mathfrak{R}_V$ )

Para evitarmos a repetição do trabalho, podemos observar que os geradores utilizados nessa subseção é igual aos geradores da subseção 3.4.8 acrescido do gerador  $\mathfrak{R}_V$ . Portanto a Parte Transladada será a seguinte:

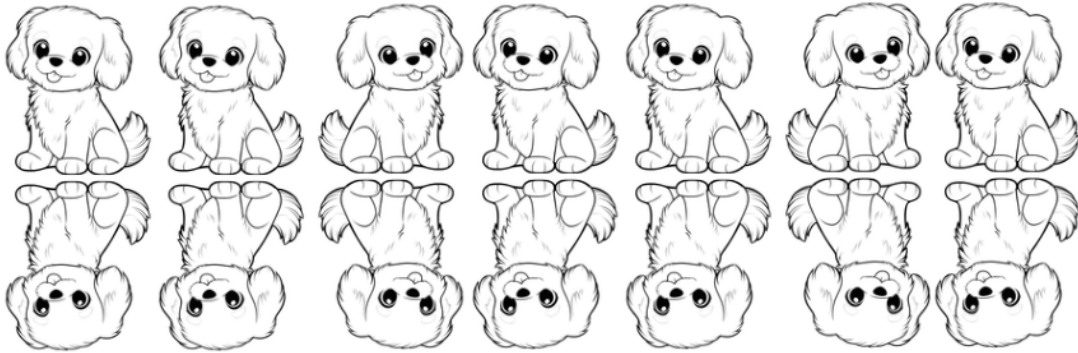
Figura 46



E se observarmos o Friso formado por essa Parte Transladada que construímos com os geradores  $S_g, \mathfrak{R}_h, \mathfrak{R}_V$ , podemos notar que há algo de estranho em como esse Friso foi criado, muito diferente dos demais em que há uma simetria padrão. Também há uma parte incomum dos demais Frisos que quando realizamos uma transformação em 1 figura, o resultado gera 2 figuras. Quando há uma transformação em 2 figuras, o resultado nos gera 4 figuras, pois as transformações são feitas em todas as figuras presentes. Logo é de se deduzir que se estamos fazendo uma transformações em 4 figuras, o resultado nos

daria 8 figuras. O que de fato acontece! Porém, parece para nós apenas 6 figuras, pois 2 delas estão sobrepostas a outras duas o que nos faz ter a sensação de ter apenas 6 figuras. No próximo subcapítulo iremos explicar há razão por trás dessa estranheza. O Período L também fica totalmente fora da definição exigida para um Friso.

Figura 47



### 3.5 O Teorema da Classificação

Depois de tudo que estudamos, podemos enunciar o teorema mais importante sobre o Grupo de Frisos que é o Teorema da Classificação:

**Teorema 3.5.1.** *Classificação de Grupos de Frisos*

O grupo de simetria de qualquer Friso é um entre os seguintes sete grupos:

1.  $T_L$
2.  $T_L, \mathcal{R}_V$
3.  $T_L, \mathcal{R}_h$
4.  $T_L, S_g$
5.  $T_L, \mathcal{R}_h \mathcal{R}_V$
6.  $T_L, S_g, \mathcal{R}_h \mathcal{R}_V$
7.  $T_L, \mathcal{R}_h, \mathcal{R}_V$

Cada um destes grupos é descrito por seu conjunto de geradores e estão apresentados na mesma ordem dos Frisos nas figuras abaixo.

Figura 48

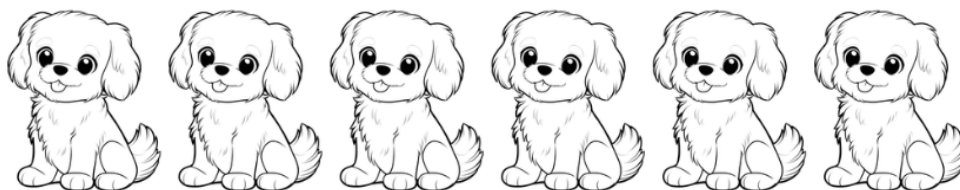


Figura 49



Figura 50

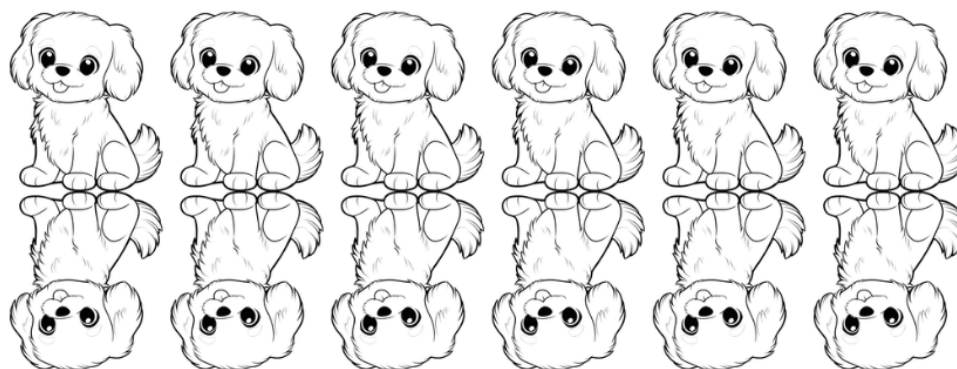


Figura 51

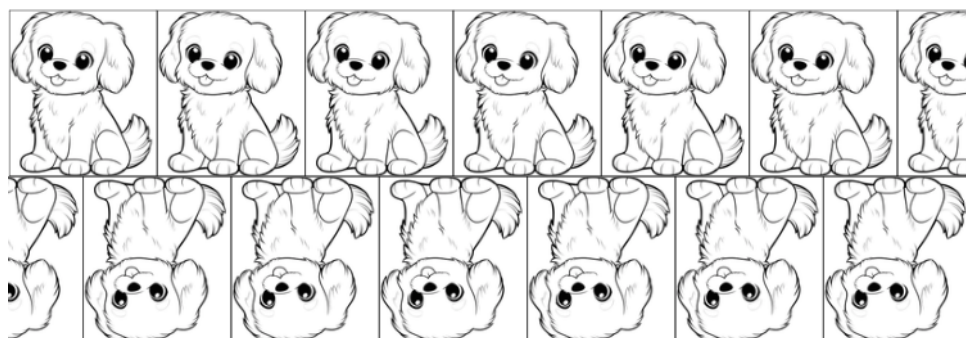


Figura 52

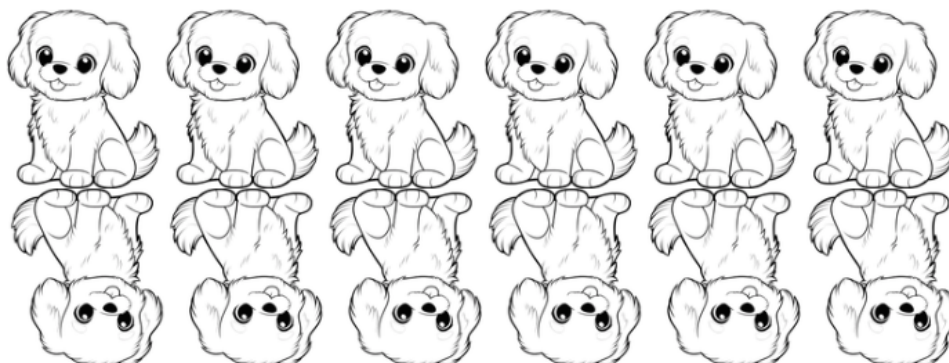


Figura 53

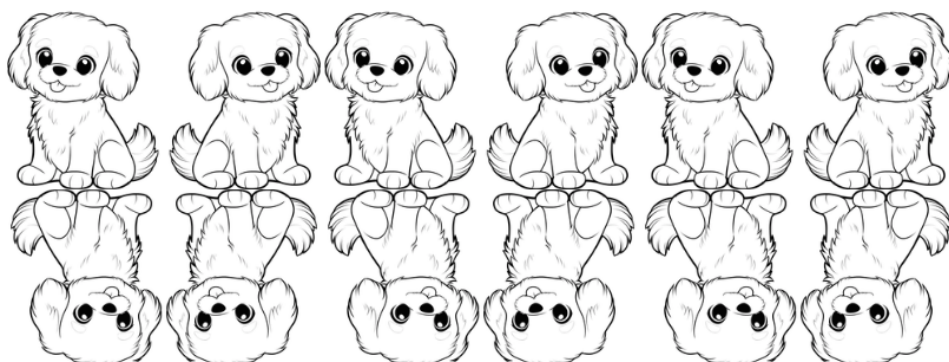
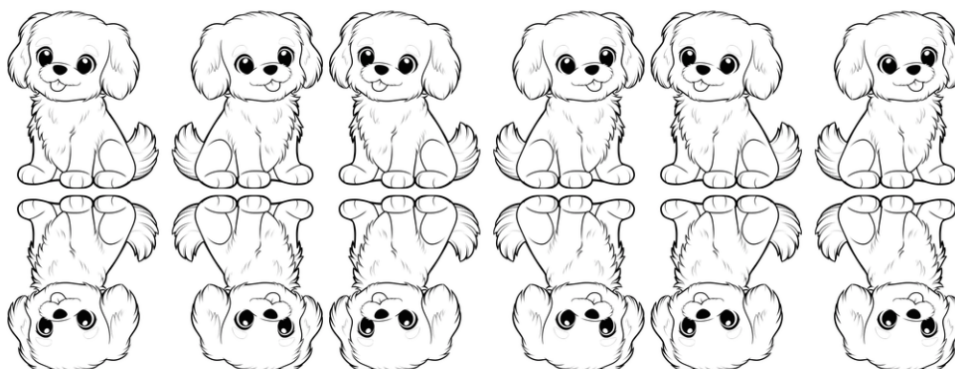


Figura 54



*Demonstração:* sendo  $L$  o período do friso, todos os grupos contêm múltiplas translações por ser infinito, logo a lista precisa conter  $T_L$ . Já enunciados e explicados anteriormente, as únicas possibilidades para os outros geradores do grupo de simetria serão as transformações lineares denotadas por  $\mathfrak{R}_h, \mathfrak{R}_V, \mathfrak{R}_h\mathfrak{R}_V$  e  $S_g$ . Lembrando que se um grupo de simetria conter dois entre  $\mathfrak{R}_h, \mathfrak{R}_V, \mathfrak{R}_h\mathfrak{R}_V$ , então conterá os três.

A lista de todas as possíveis combinações de geradores consiste, portanto, nos sete dado no enunciado do teorema, assim como de:

8.  $T_L, S_g, \mathfrak{R}_h$
9.  $T_L, S_g, \mathfrak{R}_V$

10.  $T_L, S_g, \mathfrak{R}_h, \mathfrak{R}_V$

Representado respectivamente pelas figuras:

Figura 55

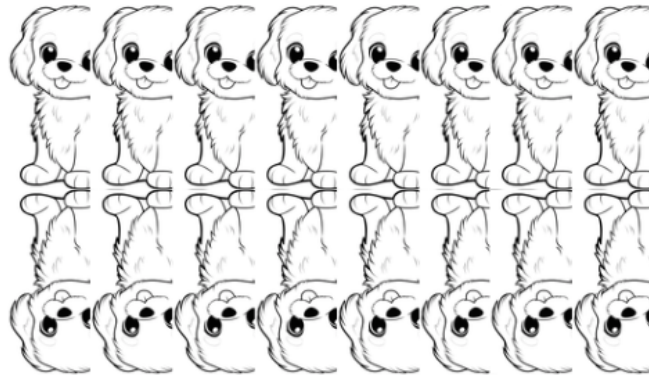


Figura 56

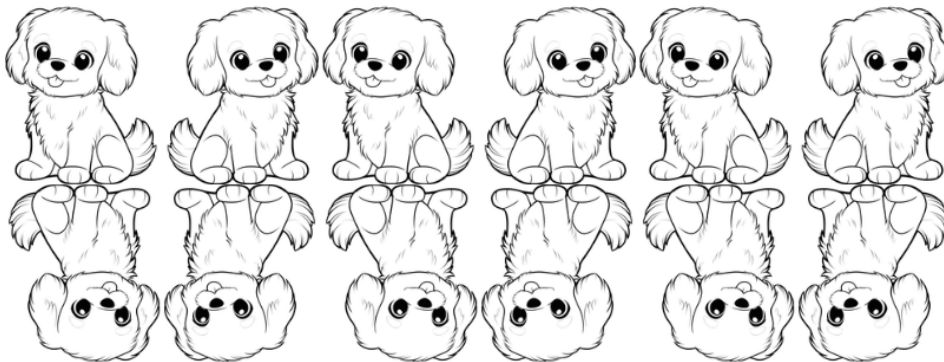
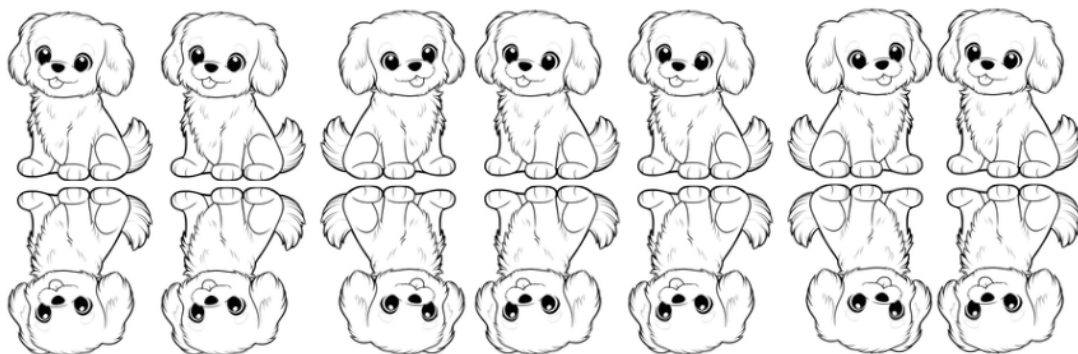


Figura 57



Se observamos pelas figuras 48 a 54, pode ser notado que estes cumprem com a definição de friso pré-estabelecida.

Já na figura 55, podemos observar que seu período se tornou  $L/2$ . A figura 55 corresponde ao caso 8, que contém os geradores  $S_g = T_{L/2} \circ \mathfrak{R}_h$  e  $\mathfrak{R}_h$  fazendo com que:

$$(T_{L/2} \circ \mathfrak{R}_h) \circ \mathfrak{R}_h = T_{L/2} \circ (\mathfrak{R}_h^2) = T_{L/2}$$

onde  $\mathfrak{R}_h^2 = \text{Identidade}$ .

Isso contradiz o fato de que o friso é periódico com período  $L$ , e portanto o caso 8 deve ser descartado.

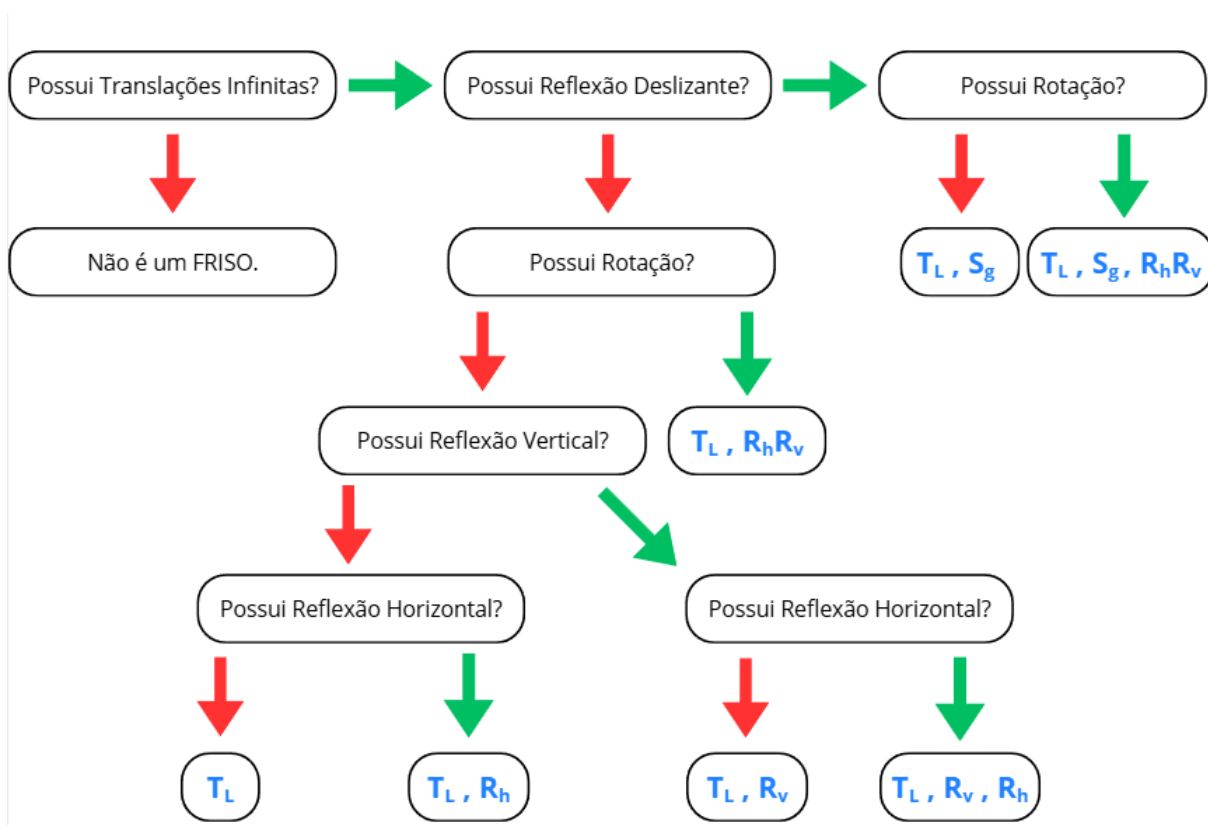
Para o caso 9 basta observarmos que as figuras 53 e 56 são idênticas, o que faz com que o caso 9 seja redundante.

Para finalizar, o caso 10 contém os mesmo geradores  $S_g$  e  $\mathfrak{R}_h$ , o que o fará ser eliminado pela mesma razão do caso 8. Podemos reafirmar o motivo pela figura 57 que é totalmente fora da simetria que estimamos para uma figura ser considerada um Friso.

Portanto, o grupo de simetrias de qualquer friso deve estar entre os 7 casos listados, sem redundâncias e dentro das definições impostas.

A partir dos resultados obtidos, criamos um organograma para facilitar a descoberta da classificação de um friso, segue abaixo:

Figura 58



## 4 Recursos Tecnológicos e Atividades Aplicáveis em Sala de Aula

### 4.1 Recurso Tecnológico

Temos a consciência de que as tecnologias se encontram presentes em quase todas as áreas sociais e profissionais da vida. Sabendo disso, e deixando claro que essa parte ficará inicialmente somente no âmbito das ideias, irei trazer um possível recurso tecnológico voltado unicamente para a criação de frisos que poderia ser usado tanto em sala de aula para aprendizagem quanto para algumas áreas profissionais.

Tendo como base este site:

<https://www.atractor.pt/simetria/matematica/materiais/frisos.htm>

Poderíamos complementar esse trabalho que o autor desse site fez da seguinte maneira:

1. criação de um aplicativo que possa ser logado com a conta pessoal de cada usuário, onde os trabalhos feitos ficariam salvos na conta deste usuário;
2. o usuário iria baixar no aplicativo a sua própria versão de “Parte Original” que definimos anteriormente e a partir dela, escolheria 1 dentre as sete classificações dos frisos;
3. o aplicativo por si só, a partir da escolha da classificação mostraria como o friso surgiria (passo a passo) e criaria o friso onde o usuário poderia baixar a figura gerada por ele e usá-lo da maneira que preferir.

Esse recurso traria para uma aula diferentes experiências que ajudaria o aluno e o professor(a) a sair do cotidiano da utilização de quadro e caderno. Além disso, com um celular e esse aplicativo, o aluno poderia de forma prática, reconhecer as diferentes classificações dos frisos, para assim utilizar esse conceito matemático no seu dia a dia.

### 4.2 Atividades Aplicáveis em Sala de Aula e/ou Escola

O presente trabalho, ainda em sua fase inicial do desenvolvimento foi apresentado para uma turma de 7º ano do turno vespertino em uma escola Estadual na Serra. O objetivo era para saber se o trabalho estava escrito e pudesse ser apresentado de forma que alunos do Ensino Fundamental 2 tivessem completa compreensão.

Inicialmente, foi apresentada as transformações geométricas que são utilizadas nos Frisos, como a Translação, Reflexões e a Rotação que se encaixa perfeitamente com as habilidades exigidas no currículo do 7º ano. A partir desse ponto, foi apresentado o que era a Parte Original, a Parte Translada, os 10 subconjuntos de Frisos e o porquê de somente 7 subconjuntos serem classificados dentro da definição de Friso, tal como a ordem do trabalho foi escrito, foi na mesma ordem apresentado.

Seguem fotos da apresentação, que ocorreu em 2 aulas seguidas de 50 min cada. Algumas das interações com os alunos era no intuito de apresentar um Friso e os mesmos conseguirem identificar onde se encontrava exatamente a Parte Transladada, para a partir dela, encontrar quais eram seus geradores. O mais interessante foi notar a participação e animação de todos, inclusive de alunos público alvo da Educação Especial. Ou seja, é um tema que pode ser abordado para todos e que não precisa de tantas adaptações, pois pode ser tratado de maneira manipulável e visual.

Figura 59

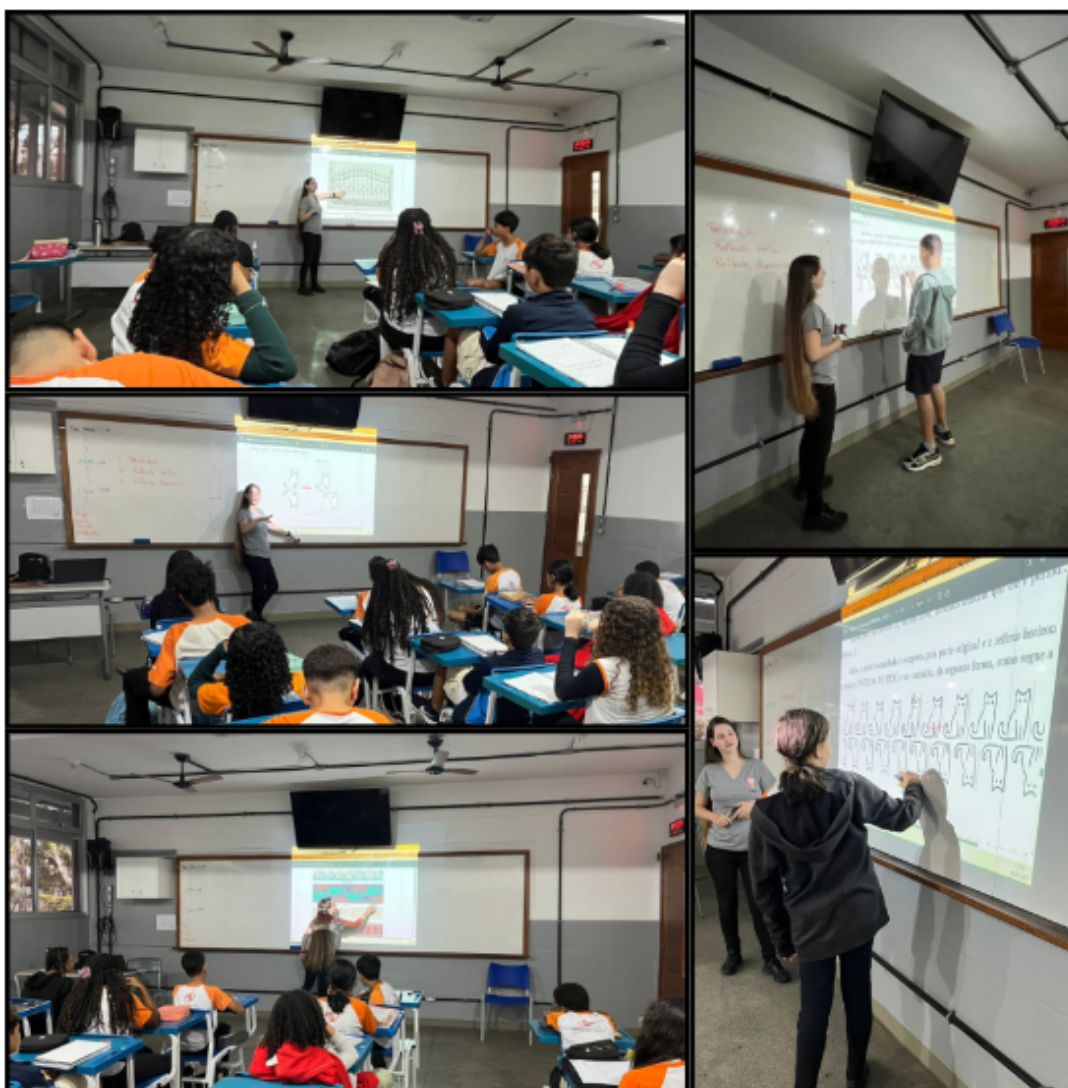
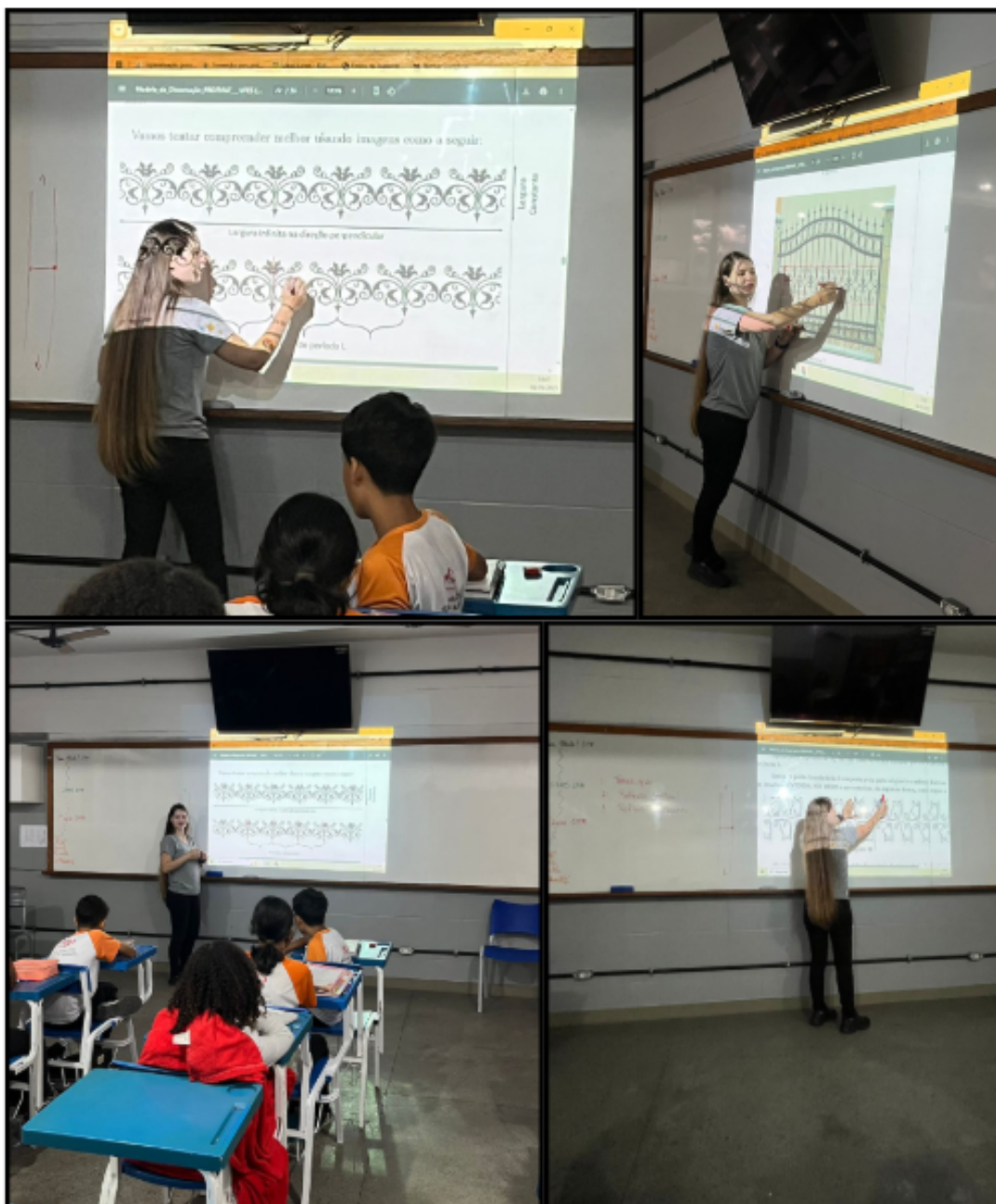


Figura 60



*OBS.: A ordem das fotos pode não se encontrar em ordem cronológica.*

Após a explicação do conteúdo, interação com os alunos, exemplificações e de tirar todas as dúvidas foi realizado um trabalho com eles, onde eu dividi 5 grupos com 7 alunos em cada um. Entreguei 7 folhas de papel quadriculado (para facilitar) para cada grupo e a proposta era que todo o grupo decidisse qual seria a Parte Original e cada integrante escolhesse uma classificação de Friso para criar a partir do desenho escolhi como Parte Original. O trabalho foi realizado em duas aulas seguidas de 50 minutos e rendeu bons resultados. Com certeza nem todos os trabalhos estão 100% pois quis deixá-los

independentes na criação para entender até que nível entenderam e os pontos que sentiram maior dificuldade.

Seguem alguns trabalhos realizados:

*OBS.: alguns sobrenomes foram riscados por mim para proteger as identidades dos estudantes menores de idade.*

Figura 61

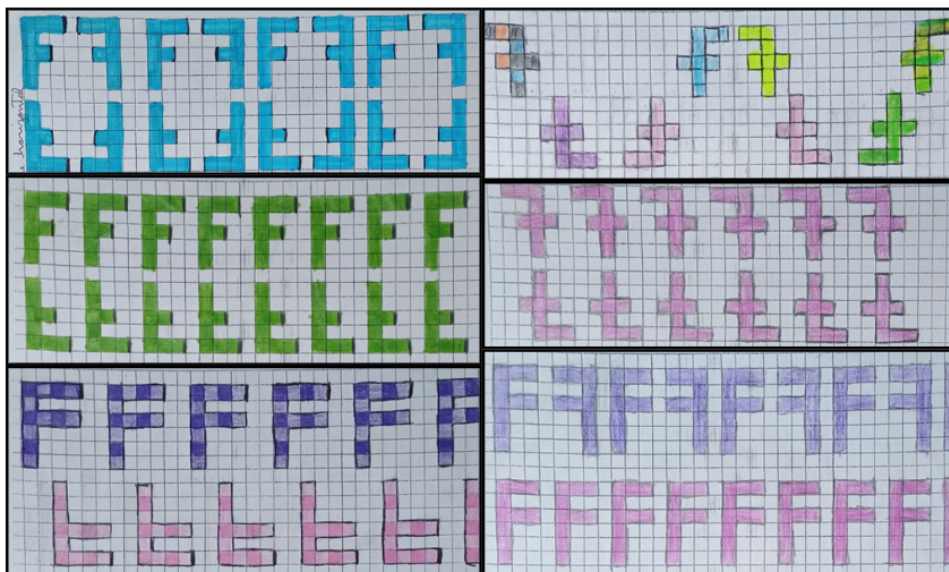


Figura 62

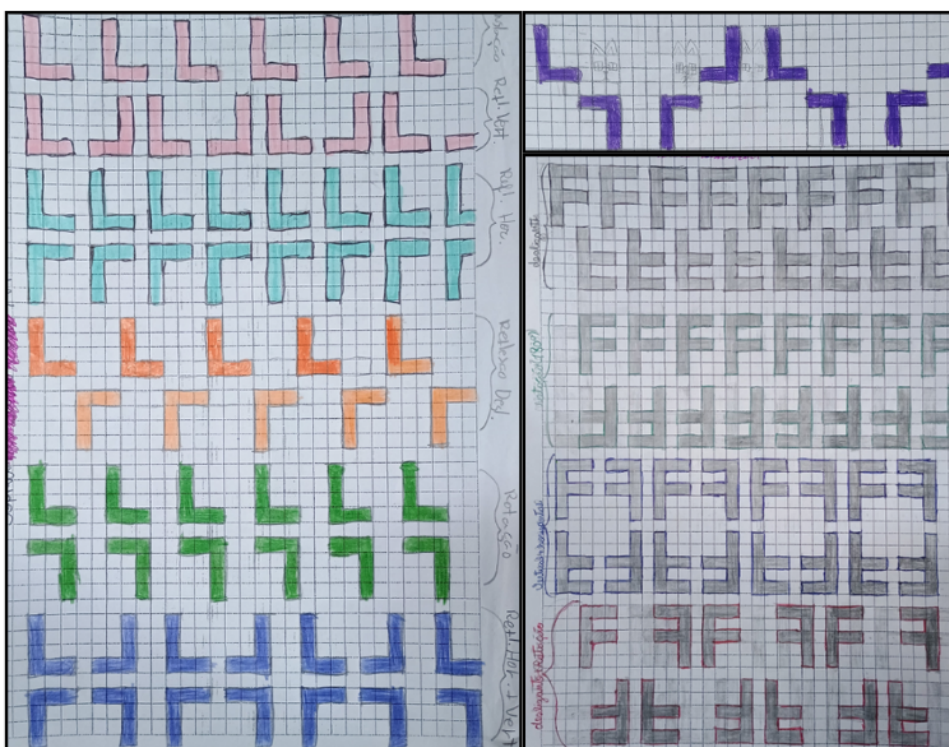
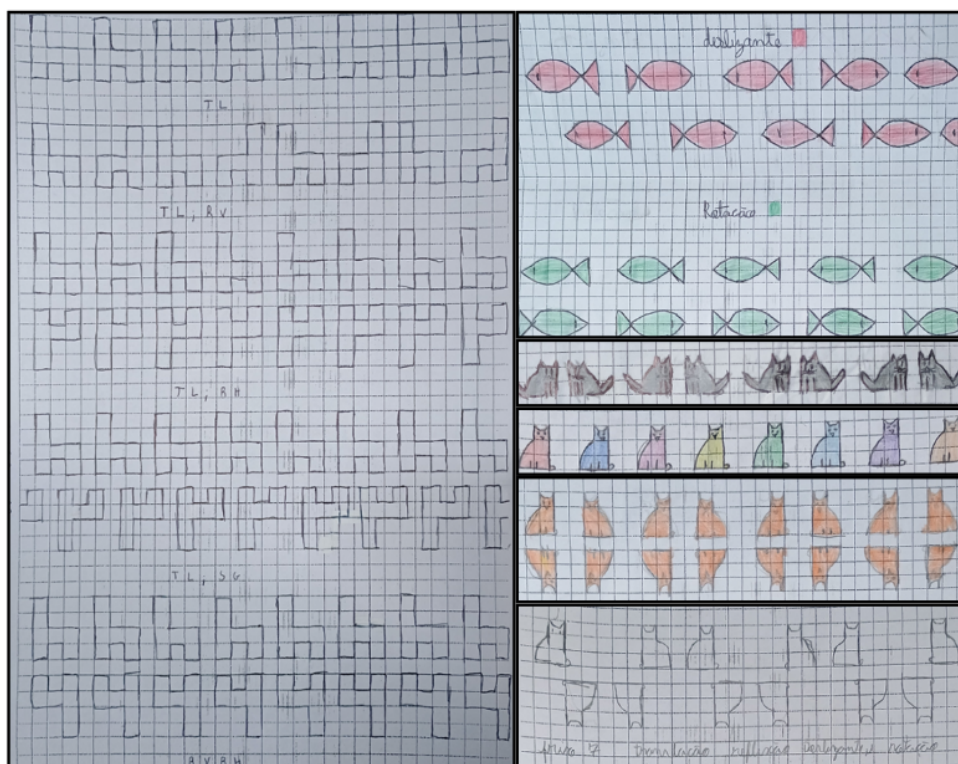


Figura 63

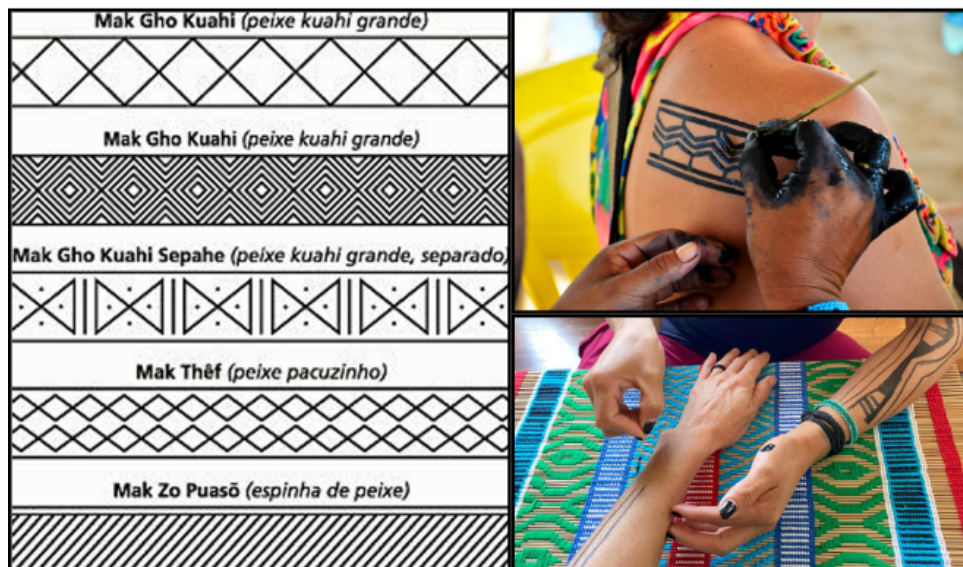


## 5 Conclusão

Podemos concluir que o trabalho realizado pode ser utilizado e ensinado em sala de aula de forma teórica e prática, tendo em vista a interdisciplinaridade, principalmente com as matérias de Arte e História e atividades extra curriculares como é exigido conter no nosso currículo escolar.

Também pode ser utilizado para as atividades de ERER, ou em atividade por exemplo no Dia do Indígena que ocorre no dia 19 de abril. Pois muitas pinturas corporais e artesanatos realizadas por indígenas são figuras de Frisos. Segue alguns exemplos:

Figura 64



Fonte: Google

E assim o Grupo de Frisos, muito mais do que um conteúdo Matemático, ele é um tema histórico, rico em várias culturas e épocas, e que vale a pena ser estudado e desenvolvido nas nossas escolas.

# Referências

- [1] ROUSSEAU, Christiane. SAINT-AUBIN, Yvan. Matemática e Atualidade Volume 1. Edição 2. SBM, 2021.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. Edição 11. SBM, 2012.
- [3] ARAUJO, Thelmo de. Álgebra Linear: Teoria e Aplicações. Edição 1. SBM, 2017.
- [4] LIMA, Elon Lages. Isometrias. Edição 2. SBM, 2007.