

JOÃO CARLOS DOS SANTOS PIMENTEL

Construção de Maquetes como Estratégia no Ensino da Matemática

Vitória

2026

JOÃO CARLOS DOS SANTOS PIMENTEL

Construção de Maquetes como Estratégia no Ensino da Matemática

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. FLORÊNCIO FERREIRA GUIMARÃES FILHO

Vitória
2026

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

P644c Pimentel, João Carlos dos Santos, 1979-
Construção de Maquetes como Estratégia no Ensino da
Matemática / João Carlos dos Santos Pimentel. - 2026.
139 f. : il.

Orientador: Florêncio Ferreira Guimarães Filho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de
Ciências Exatas.

1. Maquetes. 2. Construção. 3. Proporção. I. Guimarães Filho,
Florêncio Ferreira. II. Universidade Federal do Espírito Santo.
Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Construção de Maquetes como Estratégia no Ensino da Matemática”

João Carlos dos Santos Pimentel

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 19/06/2026 por:

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho
Orientador – UFES

Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Membro interno – UFES

Prof. Dr. Mehran Sabeti
Membro externo – UFV





folha_de_assinaturas_João_Carlos_dos_Santos_Pimentel

Data e Hora de Criação: 24/06/2026 às 09:39:26

Documentos que originaram esse envelope:

- folha_de_assinaturas_João_Carlos_dos_Santos_Pimentel.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 7afdf10c093228d8dd9bd4387f98f1baa07ffd3ebba5808474293989ff9a6e6d

[SHA512]: 88d6b90234fd18efa004b08c59836133df1a247c158a69f2cf03da2ba557b9c5409d5eff41449b5f322cb0f7f9de2af9f0c3051765d5bc496389af650ca97c71

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - Valmecir Antonio dos Santos Bayer (bayervalmecir@gmail.com)

Data/Hora: 24/06/2026 - 22:58:47, IP: 187.36.202.109, Geolocalização: [-20.285748, -40.294390]

[SHA256]: 45de5dedb63fd59647b510e1aa3552a37ddf1bd543a7f2c193d460ecccf35665

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



ASSINADO - Florêncio Ferreira Guimarães Filho (florencio.guimaraes@ufes.br)

Data/Hora: 24/06/2026 - 21:23:01, IP: 187.36.128.231

[SHA256]: 5eb266b08ac29c7a097be0d68a9ac92683d04a0816518013bbdbf11eff63671d

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



ASSINADO - Mehran Sabeti (mehran@ufv.br)

Data/Hora: 24/06/2026 - 09:54:08, IP: 191.185.79.155, Geolocalização: [-19.858238, -43.963065]

[SHA256]: 3653b498e878f5f54cbac2e7d7b381650d5d61a2e3d5acc1364581a1366769fe

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

Histórico de eventos registrados neste envelope

24/06/2026 22:58:47 - Envelope finalizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.202.109

24/06/2026 22:58:47 - Assinatura realizada por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.202.109

24/06/2026 21:23:01 - Assinatura realizada por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.128.231

24/06/2026 21:22:55 - Envelope visualizado por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.128.231

24/06/2026 09:54:08 - Assinatura realizada por mehran@ufv.br, IP 191.185.79.155

24/06/2026 09:53:59 - Envelope visualizado por mehran@ufv.br, IP 191.185.79.155

24/06/2026 09:40:11 - Envelope registrado na Blockchain por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.109

24/06/2026 09:40:10 - Envelope encaminhado para assinaturas por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.109

24/06/2026 09:39:26 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.109

Toda honra e toda glória desse trabalho pertence a Deus.

Agradecimentos

A Deus, por me conceder sabedoria, força e perseverança para superar os desafios encontrados ao longo desta jornada, por iluminar constantemente meus caminhos e, nos momentos de maior dificuldade, por me carregar em seus braços.

Ao meu pai, Edison Ribeiro Pimentel (*in memoriam*), por ser exemplo de caráter, dedicação e honestidade. Seus conselhos e ensinamentos permanecem vivos em minha memória e continuam inspirando minha caminhada, mesmo que, em muitos momentos de sua vida, eu ainda não tivesse maturidade suficiente para compreendê-los plenamente.

À minha esposa, **Aline Maria Castor Gomes Pimentel**, por todo amor, companheirismo, paciência e apoio incondicional. Seu incentivo diário e sua presença constante foram fundamentais para que eu pudesse concluir esta etapa tão importante da minha vida.

Ao professor **Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho**, minha profunda gratidão pela orientação segura, pela generosidade em compartilhar conhecimentos, pela paciência, pelas valiosas contribuições acadêmicas e pelo incentivo constante ao longo desta pesquisa. Sua dedicação à educação e à Matemática foi fonte de inspiração e aprendizado, contribuindo de maneira decisiva para minha formação acadêmica e profissional.

Aos professores Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer, Dr. Moacir Rosado Filho, Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo e Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim, pelos ensinamentos, orientações e contribuições acadêmicas que enriqueceram minha formação e colaboraram para a realização deste trabalho.

“Entrega o teu caminho ao Senhor; confia nele, e ele tudo fará.”

Salmos 37:5

Resumo

Esta dissertação apresenta uma sequência didática para o ensino de escala, razão, proporção, semelhança, relações métricas no triângulo retângulo, trigonometria e áreas, utilizando a construção de maquetes do ambiente escolar como recurso pedagógico central. A proposta integra rigor matemático — por meio de definições, axiomas, demonstrações, critérios de semelhança e da fórmula de Herão — às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e aos descritores do Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES), especialmente aqueles relacionados à Geometria e às grandezas e medidas. A sequência didática é organizada em vinte aulas progressivas, alinhadas à habilidade EM13MAT301 e aos descritores D049_M, D051_M, D057_M, D058_M, D119_M e D129_M. Os resultados indicam que a elaboração de maquetes favorece a aprendizagem ativa, a compreensão conceitual e o desenvolvimento do raciocínio geométrico, além de contribuir para o desempenho dos estudantes em avaliações externas. Conclui-se que a abordagem proposta promove um ensino contextualizado, interdisciplinar e significativo da Geometria.

Palavras-chave: Geometria; Escala; Proporção; Semelhança; Maquetes; BNCC; PAEBES.

Abstract

This dissertation presents a didactic sequence for teaching scale, ratio, proportion, similarity, metric relations in right triangles, trigonometry, and areas, using the construction of school environment models as the central pedagogical resource. The proposal integrates mathematical rigor — through definitions, axioms, demonstrations, similarity criteria, and Heron's formula — with the guidelines of the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC) and the descriptors of the Espírito Santo Basic Education Assessment Program (PAEBES), especially those related to Geometry and measurement concepts. The didactic sequence is organized into twenty progressive lessons aligned with the competency EM13MAT301 and the descriptors D049_M, D051_M, D057_M, D058_M, D119_M, and D129_M. The results indicate that the construction of models promotes active learning, conceptual understanding, and the development of geometric reasoning, in addition to contributing to students' performance in large-scale assessments. It is concluded that the proposed approach promotes a contextualized, interdisciplinary, and meaningful teaching of Geometry.

Keywords: Geometry; Scale; Proportion; Similarity; Models; BNCC; PAEBES.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de ampliação e redução de uma figura em malha quadriculada.	27
Figura 2 – Representação geométrica da Demonstração do Caso 1: $f(x) < ax$. . .	37
Figura 3 – Representação geométrica da demonstração do Caso 2: $f(x) > ax$. . .	38
Figura 4 – Representação esquemática da definição de grandezas diretamente proporcionais segundo Antônio Trajano.	39
Figura 5 – Esquema ilustrativo de grandezas inversamente proporcionais segundo a abordagem de Trajano.	42
Figura 6 – Representação de ponto, reta e plano no espaço.	43
Figura 7 – Representação do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta f	43
Figura 8 – Representação de pontos coincidentes ($A \equiv B$).	44
Figura 9 – Comparação do segmento $\overline{AB}$ com o segmento unitário.	44
Figura 10 – Quadrado de lado $\overline{AB}$ e diagonal $\overline{AC}$	45
Figura 11 – Segmentos congruentes $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com medida de 7 unidades.	46
Figura 12 – Comparação entre segmentos — $AB > CD$, pois 5 un > 3 un.	46
Figura 13 – Adição de segmentos — $\overline{AD}$ é obtido pela justaposição dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$	47
Figura 14 – Retas paralelas $a \parallel b \parallel c$ interceptadas por duas transversais r e s	48
Figura 15 – Construção auxiliar com retas paralelas a r passando por A_1 e B_1	49
Figura 16 – Retas paralelas a , b e c intersectadas por duas retas transversais r e s , ilustrando o Teorema de Tales.	50
Figura 17 – Configuração geométrica de retas paralelas e segmentos correspondentes. .	51
Figura 18 – Representação da correspondência entre os segmentos nas retas r e s , evidenciando a proporcionalidade.	52
Figura 19 – Representação da bissetriz interna de um triângulo.	53
Figura 20 – Representação geométrica do Teorema da Bissetriz Interna.	54
Figura 21 – Representação da bissetriz externa de um triângulo, evidenciando a proporcionalidade dos segmentos formados.	54
Figura 22 – Representação geométrica do Teorema da Bissetriz Externa.	55
Figura 23 – Triângulos semelhantes: correspondência entre ângulos e lados homólogos. .	56
Figura 24 – Representação geométrica do Teorema Fundamental da Semelhança. . .	56
Figura 25 – Construção auxiliar utilizada na demonstração do Teorema Fundamental da Semelhança.	57
Figura 26 – Ilustração do critério AA de semelhança: dois ângulos correspondentes congruentes implicam a semelhança entre os triângulos.	58

Figura 27 – Construção auxiliar utilizada na demonstração do critério AA de semelhança entre triângulos.	58
Figura 28 – Ilustração do critério LAL de semelhança entre triângulos.	59
Figura 29 – Construção auxiliar utilizada na demonstração do critério LAL de semelhança entre triângulos.	60
Figura 30 – Ilustração do critério LLL de semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$	61
Figura 31 – Construção auxiliar utilizada na demonstração do critério LLL de semelhança entre triângulos.	61
Figura 32 – Triângulo retângulo $\triangle ABC$ com altura relativa à hipotenusa e suas projeções.	62
Figura 33 – Triângulos $\triangle ABC$, $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$: triângulos retângulos semelhantes.	63
Figura 34 – Triângulos $\triangle ABC$, $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$ rotacionados no plano, evidenciando a correspondência entre os lados homólogos.	64
Figura 35 – Triângulo retângulo utilizado na representação do Teorema de Pitágoras.	66
Figura 36 – Representação geométrica do Teorema de Pitágoras: a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.	67
Figura 37 – Representação da soma das áreas de dois quadrados de lados b e c	68
Figura 38 – Construção geométrica associada ao Teorema de Pitágoras: os quadrados de lados b e c e o quadrado de lado a , construído sobre a hipotenusa.	68
Figura 39 – Comparação entre duas pizzas menores e uma pizza maior.	69
Figura 40 – Relação entre os diâmetros das pizzas e o ângulo α	70
Figura 41 – Representação geométrica do Caso 1, com $\alpha < 90^\circ$	71
Figura 42 – Representação geométrica do Caso 2, com $\alpha = 90^\circ$	73
Figura 43 – Representação geométrica do Caso 3, com $\alpha > 90^\circ$	74
Figura 44 – Relação entre os lados e ângulos de um triângulo retângulo.	77
Figura 45 – Triângulos formados por um feixe de retas paralelas e duas semirretas transversais.	78
Figura 46 – Identificação dos lados de um triângulo retângulo em relação ao ângulo α	80
Figura 47 – Ciclo trigonométrico e interpretação geométrica das razões seno, cosseno e tangente.	81
Figura 48 – Interpretação geométrica da tangente no ciclo trigonométrico.	82
Figura 49 – Exemplos de regiões não sobrepostas.	84
Figura 50 – Exemplo de regiões sobrepostas.	85
Figura 51 – Soma das áreas de duas regiões planas: $A(F) = A(G) + A(H)$	86
Figura 52 – Polígonos congruentes tem áreas equivalentes.	87
Figura 53 – Se $G \subset F$, então $A(G) \leq A(F)$	87
Figura 54 – Quadrado de lado 1 u e área 1 u ²	88
Figura 55 – Retângulo de base b e altura h	89

Figura 56 – Retângulo de base b e altura h subdividido em unidades de comprimento $1 u$.	89
Figura 57 – Retângulo de dimensões racionais.	90
Figura 58 – Justaposição horizontal de n retângulos congruentes.	90
Figura 59 – Expansão do retângulo racional em um retângulo de dimensões naturais.	91
Figura 60 – Construção de retângulos de bases $b, 2b, 3b, \dots, nb$, evidenciando a proporcionalidade entre a base e a área.	93
Figura 61 – Construção de retângulos de alturas $h, 2h, 3h, \dots, nh$, evidenciando a proporcionalidade entre a altura e a área.	95
Figura 62 – Demonstração da área do retângulo de base $6u$ e altura $4u$.	97
Figura 63 – Demonstração da área do paralelogramo por decomposição em um retângulo de base $(b + c)$ e altura h .	99
Figura 64 – Demonstração da área do triângulo pela construção de um paralelogramo.	100
Figura 65 – Demonstração da área do trapézio pela construção de um paralelogramo.	100
Figura 66 – Demonstração da fórmula da área do losango em função de suas diagonais.	101
Figura 67 – Apótemas de polígonos regulares obtidos por decomposição em triângulos isósceles.	102
Figura 68 – Triângulo equilátero $\triangle ABC$ com altura $\overline{BH} = h$.	103
Figura 69 – Triângulo ABC com altura $\overline{BH}$ relativa ao lado de maior comprimento $\overline{AC}$, utilizado na demonstração da Fórmula de Herão.	104
Figura 70 – Polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência de raio unitário.	109
Figura 71 – Triângulos semelhantes com ângulos correspondentes α, β, γ , evidenciando a proporcionalidade entre seus lados e a relação entre suas áreas.	111
Figura 72 – Triângulos semelhantes com alturas relativas às bases correspondentes.	112
Figura 73 – Razão entre as áreas de triângulos semelhantes em função do quadrado da razão de semelhança.	113
Figura 74 – Triângulo obtusângulo: altura h relativa a $\overline{BC}$ e ângulo β em B .	132

Lista de tabelas

Tabela 1 – Padrões de Desempenho em Matemática	19
Tabela 2 – Proficiência Média da Escola e da Rede Estadual em Matemática (2022–2024)	20
Tabela 3 – Descritores do PAEBES relacionados à construção de maquetes e seus percentuais de acerto (2022–2024).	25
Tabela 4 – Distribuição entre meninos e meninas com fator multiplicativo	28
Tabela 5 – Articulação entre conteúdos matemáticos, habilidades da BNCC e descritores do PAEBES	116
Tabela 6 – Descritores da Matriz de Referência do PAEBES – Matemática (Parte 1).	134
Tabela 7 – Descritores da Matriz de Referência do PAEBES – Matemática (Parte 2).	135
Tabela 8 – Descritores da Matriz de Referência do PAEBES – Matemática (Parte 3).	136
Tabela 9 – Habilidades da BNCC utilizadas na sequência didática (Parte 1). . . .	137
Tabela 10 – Habilidades da BNCC utilizadas na sequência didática (Parte 2). . . .	138

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	O PAEBES, SEUS DESCRITORES E OS PADRÕES DE DESEMPENHO	18
2.1	Comparativo de Proficiências (2022-2024)	20
3	A CONSTRUÇÃO DE MAQUETES COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DA MATEMÁTICA	22
3.1	Fundamentação Pedagógica da Atividade	22
3.2	Exemplo de Atividade Prática	23
3.3	Descritores do PAEBES relacionados a Construção de Maquete	24
4	CONTEÚDOS ESPECÍFICOS	26
4.1	Escala	26
4.2	Razão	27
4.3	Proporcionalidade	28
4.3.1	Grandezas Diretamente Proporcionais	35
4.3.2	Grandezas Inversamente Proporcionais	40
4.4	Segmento de reta	42
4.5	O Teorema de Tales	47
4.6	Semelhança de Triângulos	55
4.6.1	Casos de Semelhança	58
4.7	Relações Métricas no triângulo Retângulo	62
4.8	Razão entre as medidas dos lados do triângulo retângulo	76
4.8.1	Interpretação das razões trigonométricas no ciclo trigonométrico	80
4.8.2	Relação entre seno, cosseno e tangente	82
4.9	Área de Figuras Planas	83
4.9.1	Polígonos Regulares	101
4.9.2	Cálculo da altura de um triângulo equilátero	102
4.9.3	Área de um triângulo qualquer.	103
4.10	A Relação entre Semelhança e Áreas	111
5	SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ESCALA, RAZÃO, PROPORÇÃO, SEMELHANÇA E GRANDEZAS NA CONSTRUÇÃO DE MAQUETES	115
5.1	Organização Geral da Sequência Didática	115
5.2	Sequência Didática	116

5.3	Análise Pedagógica da Sequência Didática	128
6	CONCLUSÃO	130
	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DE HERÃO PARA TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO	132
	APÊNDICE B – MATRIZ DE REFERÊNCIA DO PAEBES – MA- TEMÁTICA (PERCENTUAIS 2022–2024)	134
	APÊNDICE C – HABILIDADES DA BNCC RELACIONADAS AO ENSINO DE MATEMÁTICA	137
	REFERÊNCIAS	139

1 Introdução

A avaliação educacional é ferramenta fundamental para o diagnóstico e a proposição de melhorias no processo de ensino-aprendizagem. No âmbito da educação básica, o PAEBES – Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo – se destaca como um importante instrumento de acompanhamento e diagnóstico do rendimento dos estudantes da rede estadual, promovendo a análise do desempenho em disciplinas-chave como a Matemática.

A disciplina de Matemática, por sua vez, se desdobra em habilidades essenciais para a formação integral dos alunos, sendo que seus conteúdos e competências são especificados por um conjunto de descritores padronizados. Esses descritores detalham o que os alunos devem saber em cada nível, servindo como um guia para o currículo e para avaliações específicas. A compreensão da relação entre esses descritores e os resultados obtidos no PAEBES permite uma análise aprofundada das lacunas de aprendizagem em cada área do conhecimento matemático.

No Capítulo 2, faremos uma breve análise dos resultados do PAEBES dos anos de 2022, 2023 e 2024, observando os descritores relacionados ao conteúdo que iremos utilizar no desenvolvimento da construção da maquete da Escola.

Para tentar sanar algumas das lacunas de aprendizagem, verificadas nas avaliações do PAEBES, propomos desenvolver o estudo de escala, proporção, semelhança e área para aplicar no desenvolvimento da construção de maquetes. Assim, os alunos podem aprender de maneira mais atrativa, colocando em prática situações e procedimentos que os motivem no engajamento da aprendizagem, relacionando teoria e prática no decorrer do processo produtivo da construção da maquete, aprimorando as habilidades e competências dos descritores relacionados ao conteúdo proposto.

No Capítulo 3, apresentamos a construção de maquetes como uma estratégia para o ensino da Matemática, destacando sua fundamentação pedagógica, um exemplo de atividade prática e a relação entre os conteúdos mobilizados nessa proposta, os descritores do PAEBES e as competências previstas pela BNCC. Nesse contexto, evidencia-se como a construção de maquetes favorece a aprendizagem significativa e contextualizada, promovendo a articulação entre teoria e prática e contribuindo para o desenvolvimento das habilidades matemáticas avaliadas pelo PAEBES.

No Capítulo 4, iremos fazer uma fundamentação teórica dos conteúdos que iremos utilizar no desenvolvimento da construção da maquete da Escola. No desenvolvimento do trabalho, adotaremos para o conceito de maquete a ideia de uma representação tridimensional em escala reduzida de uma edificação, no caso a edificação da EEFFM

Major Alfredo Pedro Rabaioli.

No Capítulo 5 iremos organizar o conteúdo numa sequência didática que vise melhorar as competências e habilidades, promovendo a compreensão dos discentes ao aplicarem conceitos geométricos.

A BNCC prevê que: “No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade.” (Brasil, 2018)

Além da elaboração do produto educacional, a proposta foi desenvolvida na disciplina Eletiva, com alunos do Ensino Médio, possibilitando a vivência das atividades descritas e a construção da maquete da escola. Dessa forma, a dissertação não se limita à apresentação de uma sequência didática, mas contempla também a experiência de sua implementação em contexto real de ensino.

2 O PAEBES, seus descritores e os padrões de desempenho

Neste capítulo são apresentados os principais aspectos do Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES), com ênfase nos descritores de avaliação, na Teoria de Resposta ao Item (TRI) e nos padrões de desempenho utilizados para interpretar os resultados dos estudantes. Também é realizada uma análise comparativa das proficiências médias em Matemática da rede estadual e da escola investigada no período de 2022 a 2024, buscando evidenciar o contexto educacional em que se insere a proposta desenvolvida nesta dissertação.

A avaliação educacional tem se consolidado como um instrumento estratégico para o monitoramento e a melhoria da qualidade do ensino no Brasil. Nesse cenário, o **Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES)** emerge como uma política pública de grande relevância, ao permitir o acompanhamento sistemático da aprendizagem dos estudantes da rede estadual. O programa busca produzir informações que auxiliem escolas, professores e gestores na tomada de decisão, fortalecendo as práticas pedagógicas e subsidiando a formulação de políticas educacionais.

No âmbito desse programa, destacam-se dois elementos fundamentais: os **descritores de avaliação** e a **classificação dos estudantes em padrões de desempenho**. Os descritores representam habilidades específicas que articulam conteúdos e operações cognitivas, funcionando como referência para a elaboração das provas. Já os padrões de desempenho permitem interpretar os resultados obtidos pelos alunos a partir da aplicação da **Teoria de Resposta ao Item (TRI)**, método estatístico que garante maior precisão e equidade na mensuração das aprendizagens.

Os descritores exercem papel central no PAEBES, uma vez que organizam a avaliação em torno de competências específicas. No caso da Matemática, eles distribuem-se em cinco grandes eixos:

- Números e Operações;
- Álgebra e Funções;
- Geometria;
- Grandezas e Medidas;
- Probabilidade e Estatística.

Essa estrutura possibilita avaliar de forma abrangente, contemplando desde o domínio de cálculos básicos até a interpretação de gráficos e a resolução de problemas complexos. Assim, os descritores não apenas sistematizam o currículo, mas também permitem uma análise detalhada do nível de aprendizagem dos estudantes em cada área de conhecimento. (Espírito Santo, 2024).

Para mensurar o desempenho dos estudantes, o PAEBES adota a Teoria de Resposta ao Item (TRI). Essa metodologia considera não apenas a quantidade de acertos, mas também a dificuldade dos itens e o padrão de respostas fornecido por cada aluno.

A TRI supera as limitações de modelos tradicionais de correção, que apenas contabilizam acertos, ao estimar a proficiência dos estudantes de maneira mais justa e precisa. Desse modo, dois estudantes com o mesmo número de acertos podem ter classificações diferentes, caso tenham respondido corretamente a questões de graus distintos de complexidade (ANDRADE; VALLE, 2000).

Com base nos resultados da TRI, os estudantes são posicionados em uma escala de proficiência, interpretada por meio dos **padrões de desempenho**. Esses padrões indicam em qual nível de desenvolvimento cognitivo o aluno se encontra, permitindo a elaboração de diagnósticos pedagógicos e ações de intervenção.

Tabela 1 – Padrões de Desempenho em Matemática

Etapa Escolar	Abaixo do Básico	Básico	Proficiente	Avançado
5º ano do EF	até 175	176 a 225	226 a 275	≥ 276
9º ano do EF	até 225	226 a 300	301 a 350	≥ 351
3ª série do EM	até 275	276 a 325	326 a 375	≥ 376

Fonte: PAEBES-2024.

No PAEBES, os padrões de desempenho são geralmente organizados em quatro níveis:

1. **Abaixo do Básico** – O estudante demonstra dificuldades significativas para desenvolver as habilidades esperadas para o ano escolar avaliado. Indica a necessidade de intervenções pedagógicas urgentes.
2. **Básico** – O aluno apresenta um desempenho mínimo esperado, demonstrando parcial domínio das habilidades. Ainda há pontos a melhorar, mas é um indicativo de que o estudante está no caminho do aprendizado adequado.
3. **Proficiente** – O estudante alcançou os objetivos de aprendizagem esperados para o ano de escolaridade. Demonstra bom domínio dos conteúdos e habilidades avaliados.

4. **Avançado** – O aluno apresenta desempenho acima do esperado, com alto grau de domínio das competências avaliadas. Costuma resolver questões com maior complexidade e profundidade .

Essa classificação vai além de uma simples hierarquização dos resultados. Os padrões funcionam como instrumento pedagógico que orienta o trabalho do docente e da gestão escolar, permitindo identificar fragilidades e planejar estratégias de ensino mais eficazes (INEP, 2024).

O PAEBES representa um marco na avaliação educacional do Espírito Santo, ao articular descritores, TRI e padrões de desempenho em um mesmo processo. Os descritores asseguram a coerência entre currículo e avaliação, a TRI confere precisão estatística aos resultados e os padrões de desempenho traduzem os dados em informações pedagógicas significativas.

Dessa forma, o PAEBES transcende a simples classificação dos estudantes, configurando-se como um instrumento estratégico para a melhoria da qualidade da educação. Ao fornecer diagnósticos consistentes, o programa orienta práticas pedagógicas e políticas públicas voltadas para a promoção de uma aprendizagem mais equitativa e eficaz.

2.1 Comparativo de Proficiências (2022-2024)

A análise da proficiência média em Matemática no PAEBES ao longo dos anos de 2022, 2023 e 2024 possibilita compreender a evolução do desempenho dos estudantes, tanto no âmbito da rede estadual quanto em uma escola específica. A Tabela 2 apresenta os resultados comparativos entre a rede estadual e a escola, diferenciando os desempenhos dos estudantes do Ensino Médio integral e do ensino médio regular.

Tabela 2 – Proficiência Média da Escola e da Rede Estadual em Matemática (2022–2024)

Categoria	2024		2023		2022	
	Integral	Médio	Integral	Médio	Integral	Médio
Rede Estadual	291	281	280	275	278	275
Escola	267	251	276	263	267	246

Fonte: Dados do PAEBES (2022–2024).

Os resultados evidenciam uma trajetória de crescimento na rede estadual, sobretudo no ensino médio integral, que passou de 278 pontos em 2022 para 291 em 2024. No ensino médio regular, a evolução foi de 275 para 281 pontos no mesmo período, indicando avanços consistentes.

Na escola analisada, os desempenhos também apresentaram crescimento, ainda que com oscilações. No ensino médio integral, a proficiência variou de 267 pontos em 2022 para 276 em 2023, recuando para 267 em 2024, o que sugere necessidade de maior investigação sobre fatores que impactaram essa estagnação. Já no ensino médio regular, a evolução foi mais consistente, saindo de 246 pontos em 2022 para 263 em 2023 e recuando para 251 em 2024.

De modo geral, a rede estadual mantém desempenho superior e ao da escola em todos os anos analisados, evidenciando a necessidade de estratégias pedagógicas específicas para aproximar os resultados escolares da média da rede. Ainda assim, observa-se que a escola acompanhou parcialmente a tendência de crescimento geral, com ganhos mais claros no ensino médio regular.

3 A Construção de Maquetes como Estratégia de Ensino da Matemática

Neste capítulo discute-se a construção de maquetes como uma estratégia para o ensino da Matemática no Ensino Médio. Inicialmente, são apresentados os fundamentos pedagógicos da proposta, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), destacando as potencialidades da atividade para promover uma aprendizagem ativa, significativa e contextualizada. Em seguida, é descrito um exemplo de atividade prática envolvendo a construção de uma maquete da escola, evidenciando os conteúdos matemáticos e as habilidades mobilizadas. Por fim, são analisados os descritores do Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES) relacionados à proposta, buscando explicitar a articulação entre a prática pedagógica desenvolvida e as competências avaliadas pelo sistema estadual.

3.1 Fundamentação Pedagógica da Atividade

No cenário educacional atual, a **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)** propõe a adoção de metodologias que favoreçam a aprendizagem significativa, ativa e contextualizada. Entre os princípios norteadores, destaca-se a interdisciplinaridade, entendida como a integração de saberes em torno de situações concretas. Conforme o documento, “*a Matemática deve contribuir para a formação de cidadãos críticos, capazes de utilizar os conhecimentos matemáticos em diferentes contextos, de modo a interpretar e intervir na realidade*” (Brasil, 2018).

Nesse sentido, a construção de maquetes emerge como uma prática pedagógica que articula teoria e prática, favorecendo a mobilização de conceitos matemáticos e a aproximação entre o conteúdo escolar e o cotidiano dos estudantes. A atividade, além de exercitar habilidades cognitivas, promove a criatividade, a autonomia e o trabalho colaborativo, alinhando-se às competências gerais previstas pela BNCC.

A elaboração de maquetes envolve a aplicação de múltiplos conteúdos matemáticos. Entre eles, destaca-se a Geometria Plana, uma vez que o estudante realiza medições, interpreta formas, calcula áreas e estabelece relações entre figuras geométricas presentes na representação dos espaços. Outro conceito central é a proporcionalidade, sobretudo na construção de escalas, fundamental para a representação fiel de espaços reais em miniaturas. Esse aspecto conecta-se à Competência Específica de Matemática 2, que orienta o estudante a “utilizar conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas para interpretar, representar e intervir na realidade, estabelecendo relações entre diferentes

áreas do conhecimento” (Brasil, 2018).

Além disso, o trabalho com maquetes exige a mobilização de **grandezas e medidas**, estimulando a precisão no cálculo de comprimentos e áreas, possibilitando a compreensão da Matemática como ciência aplicada à resolução de problemas concretos. A BNCC enfatiza que os estudantes devem participar ativamente do processo de construção do conhecimento, explorando problemas reais e situações significativas. Essa diretriz aparece na **Competência Específica de Matemática 3**, que destaca a importância de “*compreender e utilizar a Matemática em situações do cotidiano, ampliando a capacidade de raciocínio lógico, crítico e criativo*” (Brasil, 2018).

A construção de maquetes se enquadra nesse princípio ao permitir que os alunos sejam protagonistas da aprendizagem. A atividade demanda planejamento, organização, tomada de decisões e resolução de problemas, promovendo a autonomia intelectual e o engajamento.

Do ponto de vista da contextualização, a prática dialoga com saberes de outras áreas. A construção de uma maquete da cidade, por exemplo, envolve conhecimentos de **Geografia** (organização espacial), **História** (ocupação do território) e **Artes** (estética e design), reforçando o princípio da interdisciplinaridade: “*o conhecimento matemático deve ser articulado a outras áreas, de modo a contribuir para a compreensão e a intervenção no mundo*” (Brasil, 2018).

3.2 Exemplo de Atividade Prática

A seguir, apresenta-se um exemplo de atividade prática envolvendo a construção de maquete, que pode ser desenvolvida no Ensino Médio em consonância com as competências e habilidades da BNCC.

A atividade proposta consiste na construção de uma maquete da escola, contemplando ambientes internos (salas, quadra, biblioteca) e externos (pátio, jardins, rampas de acessibilidade). Os estudantes deverão realizar a medição dos espaços reais, definir uma escala e representar proporcionalmente essas medidas na maquete. Além disso, poderão analisar a inclinação de rampas e discutir possíveis melhorias no espaço escolar.

Essa prática está relacionada a diferentes habilidades da BNCC, como [EM13MAT201](#), que envolve a realização de medições e cálculos de grandezas em situações reais; [EM13MAT314](#), que trata de problemas envolvendo grandezas determinadas por razões; [EM13MAT308](#), que contempla a aplicação de semelhança, relações métricas e trigonometria na resolução de problemas envolvendo triângulos; e [EM13MAT307](#) e [EM13MAT309](#), que abordam o cálculo de áreas e sua aplicação em situações reais, como a estimativa de materiais.

Os conteúdos matemáticos mobilizados incluem **grandezas e medidas** (comprimentos e áreas), **proporcionalidade e escala**, e **trigonometria aplicada** (cálculo de inclinação de rampas).

A construção de maquetes configura-se, assim, como um recurso pedagógico inovador e alinhado às diretrizes da BNCC. Ao mobilizar conteúdos matemáticos como geometria, grandezas, medidas, escalas e proporcionalidade, essa atividade promove competências específicas da Matemática, ao mesmo tempo em que reforça valores como colaboração, autonomia e responsabilidade cidadã.

A atividade exemplificada — a construção da maquete da escola — evidencia como a Matemática pode ser aplicada de forma ativa, contextualizada e interdisciplinar, aproximando o conhecimento acadêmico da realidade do estudante e fortalecendo a sua formação integral.

3.3 Descritores do PAEBES relacionados a Construção de Maquete

A análise dos resultados do **PAEBES** (Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo) revela que diversos descritores de Matemática avaliados no 3º ano do Ensino Médio estão diretamente relacionados aos conteúdos e competências trabalhados na atividade de construção de maquetes.

Os descritores selecionados a seguir abordam temas como **proporcionalidade**, **relações métricas**, **trigonometria**, **área**, e **grandezas**, todos fundamentais para a compreensão e execução da atividade proposta.

Tabela 3 – Descritores do PAEBES relacionados à construção de maquetes e seus percentuais de acerto (2022–2024).

Código	Descrição da Habilidade	Unidade Te- mática	2022	2023	2024
D119	Identificar triângulos semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.	Geometria	20%	–	35%
D049	Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.	Geometria	33%	–	32%
D051	Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).	Geometria	26%	24%	35%
D057	Utilizar o perímetro de uma figura bidimensional na resolução de problema.	Grandezas e Medidas	34%	–	36%
D058	Utilizar área de figuras bidimensionais na resolução de problema.	Grandezas e Medidas	53%	71%	39%
D129	Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido.	Grandezas e Medidas	27%	25%	10%
D039	Utilizar proporcionalidade entre duas grandezas na resolução de problema.	Álgebra	–	53%	41%

Fonte: Elaboração própria (2025), com base nos relatórios do PAEBES 2022, 2023 e 2024.

A Tabela 3 evidencia a estreita relação entre a prática de construção de maquetes e as habilidades avaliadas pelo PAEBES. Os descritores de **Geometria** (D119_M, D049_M e D051_M) abordam diretamente conceitos de semelhança, relações métricas e trigonometria — fundamentais para a elaboração de modelos proporcionais e o cálculo de inclinações, distâncias e alturas. Já os descritores de **Grandezas e Medidas** (D057_M, D058_M e D129_M) consolidam o raciocínio sobre medidas, e áreas, aplicados de modo prático na modelagem. Por fim, o descritor **D039_M**, pertencente à Álgebra, reforça o uso da proporcionalidade entre grandezas, essencial para o conceito de escala.

Esses resultados demonstram que as habilidades mobilizadas pela atividade de maquete são coerentes com as dimensões avaliadas pelo PAEBES e as competências da BNCC. Assim, a construção de maquetes consolida-se como uma estratégia didática que promove o raciocínio geométrico, a compreensão da proporcionalidade e a aplicação de medidas.

Ao articular teoria e prática, a construção de maquetes permite que o estudante veja, meça, compare e calcule, integrando conteúdos que, isolados, perderiam sentido. Essa abordagem favorece a aprendizagem ativa e significativa, ao mesmo tempo em que contribui para o desenvolvimento das competências e habilidades que fundamentam tanto a BNCC quanto a matriz avaliativa do PAEBES.

4 Conteúdos específicos

Neste capítulo são apresentados os principais conteúdos matemáticos que fundamentam a proposta desenvolvida nesta dissertação. Inicialmente, são discutidos conceitos relacionados à proporcionalidade, às razões e proporções, e ao Teorema Fundamental da Proporcionalidade Direta, que desempenha papel estruturante na organização dos resultados posteriores. Em seguida, são abordados temas da Geometria Plana, como o Teorema de Tales, a semelhança de triângulos, as relações métricas no triângulo retângulo, a trigonometria e as áreas de figuras planas. Além da apresentação dos conteúdos, são desenvolvidas definições, proposições, teoremas e demonstrações de resultados clássicos da Geometria, evidenciando as conexões existentes entre os diferentes conceitos e sua relevância para a construção da maquete da escola.

4.1 Escala

O estudo de **escala** constitui um dos conteúdos relevantes da Matemática escolar, especialmente no Ensino Fundamental e Médio, por permitir a compreensão e a representação proporcional de objetos, espaços e fenômenos do mundo real em diferentes dimensões. A escala pode ser entendida como a **relação de proporcionalidade** entre as medidas reais de um objeto e as medidas utilizadas em sua representação gráfica, como em plantas baixas, mapas, maquetes ou desenhos técnicos ([Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo, 2020](#)).

Formalmente, a escala é expressa por meio de uma razão entre duas grandezas de mesma unidade, isto é,

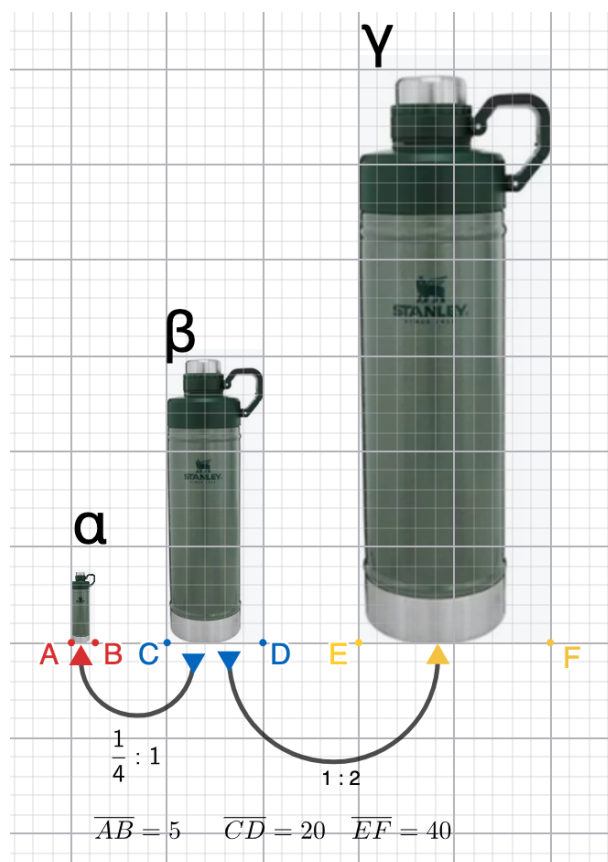
$$\text{Escala} = \frac{\text{medida no desenho}}{\text{medida real}}$$

Essa relação pode representar:

- **Reduções**, quando a medida do desenho é menor que a real;
- **Ampliações**, quando o desenho é maior que a medida real;
- **Representações em tamanho natural**, quando a razão é igual a 1:1.

O trabalho com escalas contribui para o desenvolvimento do **raciocínio proporcional** e possui aplicações práticas no cotidiano, como a leitura de mapas, interpretação de plantas arquitetônicas, planejamento urbano, construção de maquetes e análise de imagens em diferentes mídias.

Figura 1 – Representação de ampliação e redução de uma figura em malha quadriculada.



Fonte: Elaboração própria (2025).

No âmbito interdisciplinar, destaca-se a contribuição do estudo de escala para o ensino da **Geografia no 2º ano do Ensino Fundamental**, especialmente no *Campo Temático/Categoria: Conhecimento, Tempo e Espaço*, dentro do *Objeto de Conhecimento: Cartografia*, conforme o Currículo do Espírito Santo ([Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo, 2020](#)).

4.2 Razão

A **razão** representa a comparação entre duas grandezas da mesma espécie, indicando quantas vezes uma está contida na outra, ou podemos dizer que é o quociente entre dois números. Por exemplo, se em uma sala há 12 meninos e 8 meninas, a razão entre meninos e meninas é:

$$\text{Razão} = \frac{12}{8} = \frac{12 : 4}{8 : 4} = \frac{3}{2}$$

Desta forma dizemos que a razão é de 3:2 (leia 3 para 2), se tivermos outra sala com 15 meninos e 10 meninas, teremos a mesma razão, no entanto a quantidade de meninos

entre as salas é diferente, sendo assim, a razão é uma medida relativa, e não absoluta.

$$\text{Razão} = \frac{15}{10} = \frac{15 : 5}{10 : 5} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 4.2.1. Uma sala de aula tem um total de 77 alunos. A razão entre meninos e meninas é de 4:3. Quantos meninos há na sala?

Solução do Exemplo 4.2.1. Fazendo uma tabela com algumas possibilidades cuja razão entre meninos e meninas seja de 4:3.

Tabela 4 – Distribuição entre meninos e meninas com fator multiplicativo

Meninos	Meninas	Total	Fator multiplicativo
4	3	7	1
8	6	14	2
12	9	21	3
16	12	28	4
...	...	...	...
$4n$	$3n$	$7n$	n

Fonte: Elaboração própria.

Com base na tabela, pode ser escrito que a quantidade de meninos vezes o fator multiplicativo mais a quantidade de meninas vezes o mesmo fator multiplicativo será igual ao total de alunos da sala. Ter-se-á que:

$$\begin{aligned} 4n + 3n &= 77 \\ 7n &= 77 \\ n &= \frac{77}{7} \\ n &= 11 \end{aligned}$$

No dia a dia, usamos a razão muitas vezes sem perceber. No trajeto casa/escola, nos deparamos com várias placas com limite de velocidade, como 60 Km/h, que é a razão entre a distância percorrida em um intervalo de tempo. Podemos citar outras como: a relação entre a distância e o volume de combustível gasto(consumo Médio); a relação entre massa e o volume de um corpo (densidade); encontramos também em taxas e índices financeiros, relações demográficas ou estatísticos.

4.3 Proporcionalidade

Vimos no exemplo acima, que em uma turma com 20 alunos, sendo 12 meninos e 8 meninas, tem a mesma razão 3:2, da turma com 25 alunos, sendo 15 meninos e 10 meninas. Quando acontece tal fato, dissemos que as duas razões formam uma proporção.

Definição 4.3.1. Duas razões com termos não nulos, $a : b$ e $c : d$, formam uma proporção quando as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Representamos essa proporção como:

$$a : b = c : d$$

e lemos: “ a está para b assim como c está para d ”.

Chamamos a e d de extremos, b e c de meios.

Exemplo A da Definição 4.3.1. Se temos as razões $\frac{3}{2}$ e $\frac{6}{4}$, observamos que formam uma proporção, pois resulta no mesmo quociente.

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = 1,5$$

Dados duas razões $a : b$ e $c : d$ com termos não nulos e proporcionais, temos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd \Rightarrow ad = bc$$

A resolução de problemas envolvendo proporcionalidade pode ser realizada por diferentes métodos, os quais variam conforme o contexto apresentado e os objetivos da análise. De maneira geral, destacam-se três métodos principais:

1. **Regra de três:** método prático baseado na multiplicação em xis ($a \cdot d = b \cdot c$), utilizado para verificar se duas razões são proporcionais e determinar o valor desconhecido de uma delas. É amplamente empregada em situações envolvendo grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.
2. **Redução à unidade:** consiste em calcular o valor correspondente a uma única unidade de medida, e em seguida multiplicar ou dividir para encontrar o valor desejado.
3. **Fator de aumento ou de redução:** método em que se aplica um número (fator) para ampliar ou reduzir proporcionalmente uma medida, preservando a forma original. Esse procedimento é fundamental em atividades que envolvem escalas, desenhos técnicos e construção de maquetes.

Para ilustrar vamos resolver o mesmo problema usando os 3 métodos.

Exemplo B da Definição 4.3.1. Suponha que a escala adotada para representar a escola seja 1 : 50. Isso significa que cada unidade na maquete corresponde a 50 unidades no tamanho real. Deseja-se representar na maquete uma parede cuja altura real é de 3,0 m.

Solução do Exemplo B (Regra de três).

$$1 \text{ cm (na maquete)} \longleftrightarrow 50 \text{ cm (reais)}$$

$$\begin{aligned} x &\longleftrightarrow 300 \text{ cm} \\ \Rightarrow \frac{x}{1} &= \frac{300}{50} \Rightarrow x = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

Portanto, a altura da parede na maquete deve ser de **6 cm**.

Solução do Exemplo B (**Redução à unidade**).

Primeiro, calcula-se quanto vale uma unidade real na maquete:

$$\frac{1}{50} = 0,02$$

Logo, $300 \text{ cm} \times 0,02 = 6 \text{ cm}$.

Solução do Exemplo B (**Fator de aumento ou redução**).

O fator de escala é $f = \frac{1}{50}$. Assim, aplica-se:

$$\text{Medida reduzida} = f \times \text{Medida real} = \frac{1}{50} \times 300 = 6 \text{ cm}$$

Em todos os métodos, obtém-se o mesmo resultado, confirmando que a altura representada na maquete deve ser de **6 cm**. Essa equivalência reforça a importância da compreensão da proporcionalidade e da escala na elaboração de modelos tridimensionais, conceitos diretamente relacionados ao descritor **D039_M** do PAEBES e à habilidade **EM13MAT314** da BNCC.

Definição 4.3.2. A **terceira proporcional** entre a e b é o número x que verifica a proporção, sendo a e b diferentes de zero.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Exemplo da Definição 4.3.2. A terceira proporcional dos números 3 e 6 é o valor x tal que $\frac{3}{6}$ e $\frac{6}{x}$.

$$\begin{array}{ccc} 3 & & 6 \\ \text{---} & \nearrow & \text{---} \\ 6 & \searrow & x \end{array} \Rightarrow 3 \cdot x = 6 \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{36}{3} = 12$$

Definição 4.3.3. A **quarta proporcional** entre a , b e c é o número x que verifica a proporção, sendo a , b e c diferentes de zero.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Exemplo da Definição 4.3.3. A quarta proporcional dos números 3, 6 e 9 é o valor x tal que $\frac{3}{6}$ e $\frac{9}{x}$.

$$\begin{array}{ccc} 3 & & 9 \\ \text{---} & \searrow \swarrow & \text{---} \\ 6 & \swarrow \searrow & x \end{array} \Rightarrow 3 \cdot x = 6 \cdot 9 \Rightarrow x = \frac{54}{3} = 18$$

Definição 4.3.4. A **média geométrica** entre a e b é o número x que verifica a proporção, sendo a e b números reais positivos.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

$$\begin{array}{ccc} a & & x \\ \text{---} & \searrow \swarrow & \text{---} \\ x & \swarrow \searrow & b \end{array} \Rightarrow x \cdot x = a \cdot b \Rightarrow x^2 = a \cdot b \Rightarrow x = \sqrt{a \cdot b}$$

Proposição 4.3.1. Se (a, b, x, y) formam uma proporção, isto é, $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, então as razões $\frac{a+b}{b}$ e $\frac{x+y}{y}$ também são proporcionais.

Em outras palavras, se duas frações são equivalentes, as frações obtidas ao somar o numerador e o denominador de cada uma mantêm a equivalência.

Essa propriedade é frequentemente denominada “**adição dos antecedentes e consequentes**” em uma proporção.

Demonstração da Proposição 4.3.1.

Temos a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}.$$

Somando 1 a cada lado da igualdade, temos:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{x}{y} + 1 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{x}{y} + \frac{y}{y} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}.$$

Portanto, $(a+b, b, x+y, y)$ também é uma proporção. □

Exemplo da Proposição 4.3.1.

Como $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, temos:

$$\frac{3+4}{4} = \frac{7}{4} \quad \text{e} \quad \frac{6+8}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4},$$

logo, as novas razões também são equivalentes.

O Exemplo 4.2.1 ilustra diretamente a Proposição 4.3.1. De fato, a partir da proporção

$$\frac{m}{f} = \frac{4}{3},$$

onde m representa o número de meninos e f o número de meninas. Além disso, tem-se

$$m + f = 77.$$

Observa-se que

$$\frac{m + f}{f} = \frac{77}{f}.$$

Por outro lado, aplicando a adição dos antecedentes e consequentes à proporção

$$\frac{m}{f} = \frac{4}{3},$$

obtemos

$$\frac{m + f}{f} = \frac{4 + 3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Logo,

$$\frac{77}{f} = \frac{7}{3},$$

o que implica

$$f = 33.$$

Consequentemente,

$$m = 77 - 33 = 44.$$

Portanto, há 44 meninos na sala de aula.

Proposição 4.3.2. De modo análogo, se (a, b, x, y) formam uma proporção,

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y},$$

então as razões $\frac{a-b}{b}$ e $\frac{x-y}{y}$ também são proporcionais, desde que $a > b$ e $x > y$.

Demonstração da Proposição 4.3.2.

Temos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, subtraindo 1 a cada lado da igualdade teremos:

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{x}{y} - 1 \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{x}{y} - \frac{y}{y} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{x-y}{y}.$$

Portanto, $(a-b, b, x-y, y)$ também é uma proporção. □

Exemplo da Proposição 4.3.2.

Como $\frac{6}{4} = \frac{9}{6}$, temos:

$$\frac{6-4}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{9-6}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

portanto, a proporção também se mantém válida.

Proposição 4.3.3. Se (a, b, x, y) formam uma proporção, isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y},$$

então vale também que:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{a+x}{b+y}.$$

Essa propriedade afirma que, quando duas razões são equivalentes, a razão obtida somando os antecedentes e os consequentes dessas razões também mantém a proporcionalidade. Em termos práticos, isso significa que é possível combinar duas proporções equivalentes e ainda obter uma nova razão proporcional às anteriores.

Demonstração da Proposição 4.3.3.

Temos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, multiplicando by a cada lado da igualdade teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot by = \frac{x}{y} \cdot by \Rightarrow ay = bx \Rightarrow$$

Somando xy a ambos os membros da igualdade.

$$ay + xy = bx + xy \Rightarrow y(a + x) = x(b + y) \Rightarrow$$

Dividindo agora por $y(b + y)$

$$\frac{y(a + x)}{y(b + y)} = \frac{x(b + y)}{y(b + y)} \Rightarrow \frac{(a + x)}{(b + y)} = \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

□

Exemplo da Proposição 4.3.3. Sabemos que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Aplicando a propriedade, temos:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2+4}{3+6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Logo, a proporção permanece válida.

Essa propriedade é útil em diversos contextos de resolução de problemas que envolvem grandezas proporcionais, como cálculos de escalas, semelhança de triângulos e relações métricas. No ensino de Matemática, sua aplicação pode ser explorada em atividades práticas — por exemplo, na **construção de maquetes** — para verificar a coerência entre medidas reduzidas e medidas reais, fortalecendo a compreensão do descritor **D039_M** do PAEBES e da habilidade **EM13MAT314** da BNCC.

Proposição 4.3.4. Se (a, b, x, y) formam uma proporção, isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y},$$

então também é verdadeira a proporção

$$\frac{a^2}{a \cdot b} = \frac{x^2}{x \cdot y}.$$

Essa propriedade demonstra que, ao elevar os antecedentes e consequentes ao quadrado, mantém-se a relação de proporcionalidade. Em outras palavras, se duas razões são equivalentes, as razões formadas pelos produtos dos seus termos e pelos seus quadrados também permanecem proporcionais.

Demonstração da Proposição 4.3.4.

Temos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, Multiplicando 1 a cada lado da igualdade teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{x}{y} \cdot 1 \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{a} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{x} \Rightarrow \frac{aa}{ba} = \frac{xx}{yx} \Rightarrow \frac{a^2}{ba} = \frac{x^2}{yx}$$

□

Exemplo da Proposição 4.3.4. Sabendo que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, temos:

$$\frac{2^2}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} \quad \text{e} \quad \frac{4^2}{4 \cdot 6} = \frac{16}{24} = \frac{4}{6}.$$

Logo, a proporção é preservada.

Essa propriedade reforça a estabilidade da relação proporcional mesmo quando os termos são manipulados de forma multiplicativa. Do ponto de vista didático, ela é especialmente útil para o estudo de progressões geométricas e para o entendimento de escalas e semelhanças em atividades práticas, como a **construção de maquetes**, diretamente relacionada ao descritor **D039_M** do PAEBES e à habilidade **EM13MAT314** da BNCC.

Segundo Lima (2011, p. 107), “a proporcionalidade é a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos, e seu uso universal data de milênios.”

Observando a proporção entre duas grandezas, podemos encontrar as seguintes situações:

- i) Diretamente proporcionais; e
- ii) Inversamente proporcionais.

4.3.1 Grandezas Diretamente Proporcionais

Definição 4.3.5. Dizemos que duas grandezas x e y são *diretamente proporcionais* quando existe uma função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $y = f(x)$ e que satisfaz as seguintes condições:

- 1) A função f é crescente;
- 2) Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x > 0$, vale

$$f(nx) = nf(x).$$

Lema 1. Se uma função f satisfaz a propriedade $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x > 0$, então essa propriedade se estende a todo número racional positivo. Mais precisamente, para todo número racional

$$r = \frac{p}{q}, \quad \text{com } p, q \in \mathbb{N},$$

vale

$$f(rx) = rf(x).$$

Demonstração do Lema 1.

Seja $r = \frac{p}{q}$. Então,

$$rx = \frac{p}{q}x \Rightarrow qrx = px \Rightarrow f(qrx) = f(px).$$

Pela hipótese, como $p, q \in \mathbb{N}$, temos

$$f(qrx) = qf(rx) \quad \text{e} \quad f(px) = pf(x).$$

Logo,

$$qf(rx) = pf(x) \Rightarrow f(rx) = \frac{p}{q}f(x).$$

Como $r = \frac{p}{q}$, segue que

$$f(rx) = rf(x),$$

como queríamos provar. □

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). Seja $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma proporcionalidade direta, então:

- 1) Existe uma constante real positiva a tal que

$$f(x) = ax, \quad \forall x > 0.$$

2) Para quaisquer $x, y > 0$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Neste caso, dizemos que a função f é uma proporcionalidade direta, e $f(1) = a$.

Demonstração do Teorema 1. Vamos mostrar que:

$$\exists a > 0 \text{ tal que } f(x) = ax, \quad \forall x > 0.$$

Suponha, por absurdo, que existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \neq ax.$$

1º Caso: $f(x) < ax$.

Como $a > 0$, temos

$$\frac{f(x)}{a} < x.$$

Existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{f(x)}{a} < r < x.$$

Multiplicando por a , obtemos

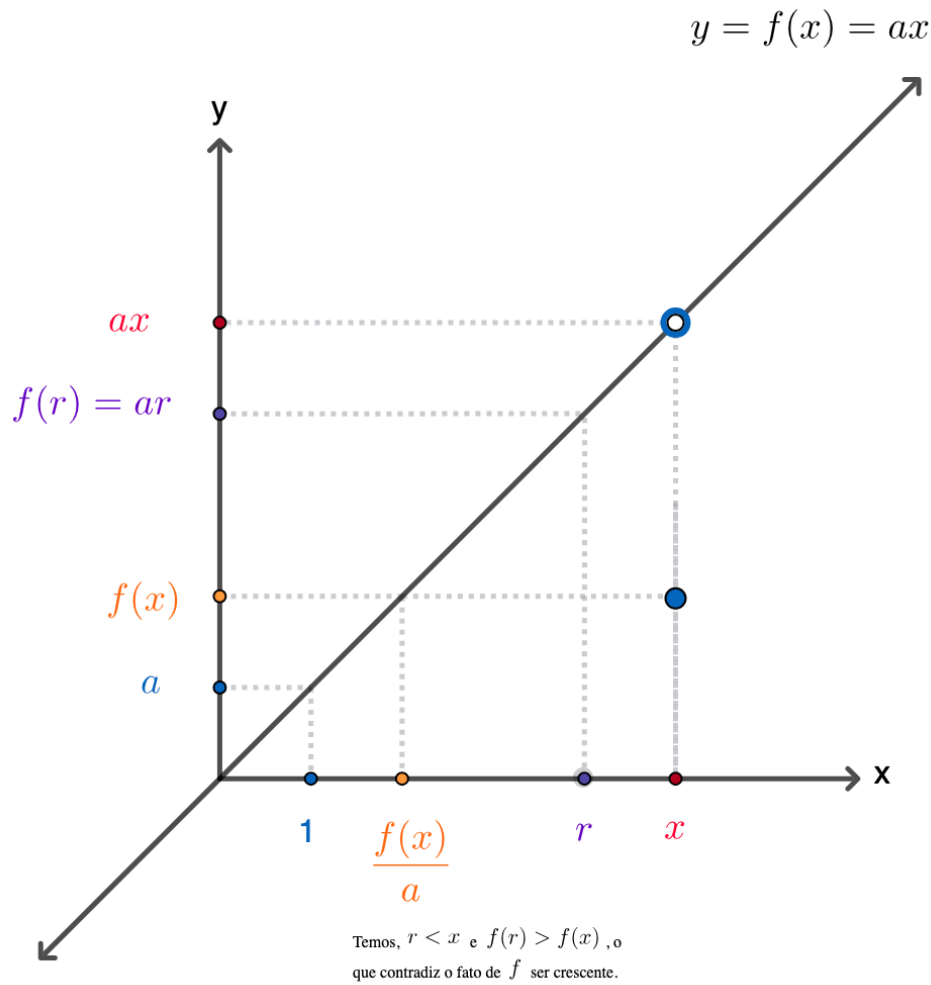
$$f(x) < ar < ax.$$

Porém,

$$f(r) = \underbrace{f(r \cdot 1)}_{\text{Usando o Lema 1}} = r \cdot f(1) = r \cdot a = a \cdot r > f(x)$$

Assim, obtivemos $r < x$ e $f(r) > f(x)$, o que é um absurdo, pois f é crescente.

Figura 2 – Representação geométrica da Demonstração do Caso 1: $f(x) < ax$.



Fonte: Elaboração própria.

2º Caso: $f(x) > ax$.

Como $a > 0$, temos

$$\frac{f(x)}{a} > x.$$

Existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x < r < \frac{f(x)}{a}.$$

Multiplicando por a , obtemos

$$ax < ar < f(x).$$

Porém,

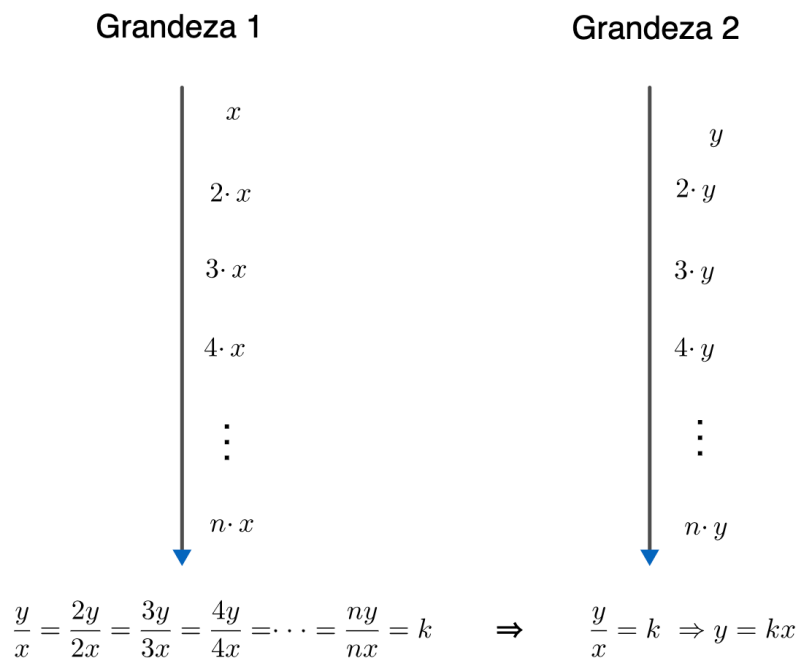
$$f(r) = \underbrace{f(r \cdot 1)}_{\text{Usando o Lema 1}} = r \cdot f(1) = r \cdot a = a \cdot r < f(x)$$

No Ensino Fundamental e Médio, tais definições e suas respectivas demonstrações apresentam elevado grau de abstração, o que pode dificultar a compreensão por parte dos estudantes. Nesse contexto, a abordagem proposta por Antônio Trajano mostra-se mais acessível e pedagogicamente aplicável.

Assim, para grandezas diretamente proporcionais, adota-se a seguinte linguagem equivalente, evitando o conceito de função.

Definição 4.3.6. Diz-se que duas grandezas são diretamente proporcionais quando se correspondem de tal modo que, ao multiplicar uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra também fica multiplicada pelo mesmo número.

Figura 4 – Representação esquemática da definição de grandezas diretamente proporcionais segundo Antônio Trajano.



Fonte: Elaboração própria.

A Figura 4 ilustra a ideia central da definição proposta por Trajano: ao multiplicar uma quantidade x por um número natural n , obtém-se $n \cdot x$, e a quantidade correspondente y também é multiplicada pelo mesmo número, resultando em $n \cdot y$.

Observa-se que a razão entre as grandezas permanece constante:

$$\frac{y}{x} = \frac{2y}{2x} = \frac{3y}{3x} = \dots = \frac{ny}{nx} = k,$$

o que implica

$$\frac{y}{x} = k \quad \Rightarrow \quad y = kx.$$

Essa abordagem evidencia de forma intuitiva a noção de proporcionalidade, tornando-a mais acessível aos estudantes da Educação Básica.

4.3.2 Grandezas Inversamente Proporcionais

Definição 4.3.7. Dizemos que duas grandezas x e y são *inversamente proporcionais* quando existe uma função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $y = f(x)$ e que satisfaz as seguintes condições:

- 1) A função f é decrescente;
- 2) Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x > 0$, vale

$$f(nx) = \frac{1}{n}f(x).$$

Neste caso dizemos que f é uma proporcionalidade inversa.

Teorema 2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade Inversa). Seja $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma proporcionalidade inversa. Então:

- 1) Existe uma constante real positiva a tal que

$$f(x) = \frac{a}{x}, \quad \forall x > 0.$$

- 2) Para quaisquer $x, y > 0$,

$$x f(x) = y f(y).$$

Demonstração do Teorema 2. Vamos mostrar que

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

é uma proporcionalidade direta. Pela [Definição 4.3.5](#), basta mostrar que:

- 1) a função g é crescente;

De fato, se $x_1 < x_2$, então, como f é decrescente, temos

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Logo,

$$\frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)},$$

ou seja,

$$g(x_1) < g(x_2).$$

Portanto, g é crescente.

2) $g(nx) = ng(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$.

Temos

$$g(nx) = \frac{1}{f(nx)}.$$

Pela hipótese, $f(nx) = \frac{1}{n}f(x)$, então

$$g(nx) = \frac{1}{\frac{1}{n}f(x)} = \frac{n}{f(x)} = n \cdot \frac{1}{f(x)} = ng(x).$$

$$g(nx) = ng(x)$$

Concluimos que g é uma proporcionalidade direta. Assim, Pelo [Teorema 1](#) existe uma constante $b > 0$ tal que

$$g(x) = bx.$$

Como $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, temos

$$g(1) = \frac{1}{f(1)} = b \quad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{1}{b} = a.$$

Portanto,

$$g(x) = bx \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = bx \Rightarrow f(x) = \frac{1}{bx} = \frac{a}{x}.$$

Concluimos que

$$f(x) = \frac{a}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Temos:

$$xf(x) = x \cdot \frac{a}{x} = a$$

$$yf(y) = y \cdot \frac{a}{y} = a$$

Logo,

$$xf(x) = yf(y) = a, \quad \text{para todo } x, y > 0.$$

Assim, encerramos a demonstração do Teorema 2. □

Quando duas grandezas são inversamente proporcionais, o produto

$$x \cdot f(x) = a$$

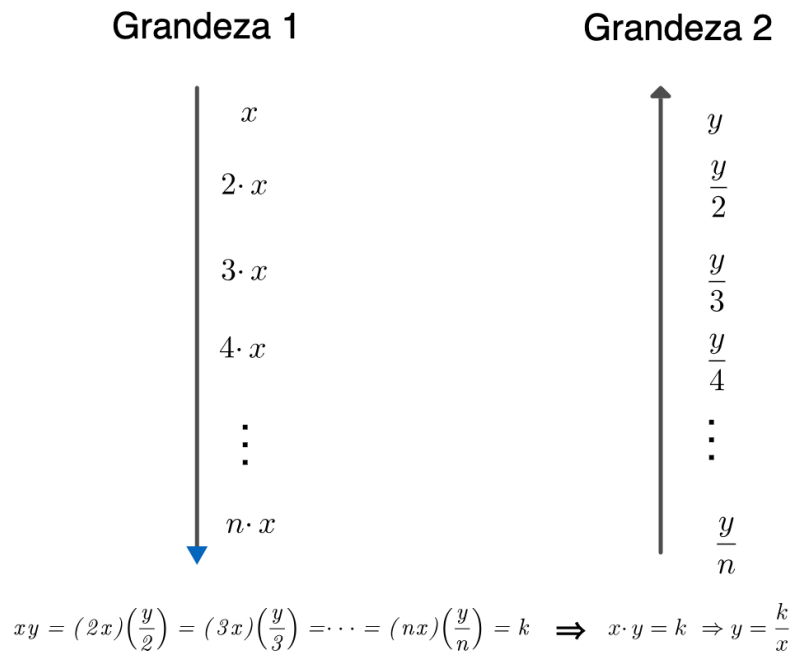
é constante. Esse valor é denominado *constante de proporcionalidade inversa*.

De modo análogo ao caso das grandezas diretamente proporcionais, adota-se aqui a abordagem proposta por Antônio Trajano, por apresentar uma linguagem mais acessível ao contexto da Educação Básica.

Assim, para grandezas inversamente proporcionais, utiliza-se a seguinte definição.

Definição 4.3.8. Diz-se que duas grandezas são inversamente proporcionais quando se correspondem de tal modo que, ao multiplicar uma quantidade de uma delas por um número Natural maior que zero, a quantidade correspondente da outra fica dividida pelo mesmo número.

Figura 5 – Esquema ilustrativo de grandezas inversamente proporcionais segundo a abordagem de Trajano.



Fonte: Elaboração própria.

Em termos algébricos, duas grandezas x e y são inversamente proporcionais quando existe uma constante real positiva k tal que

$$x \cdot y = k,$$

ou, equivalentemente,

$$y = \frac{k}{x}.$$

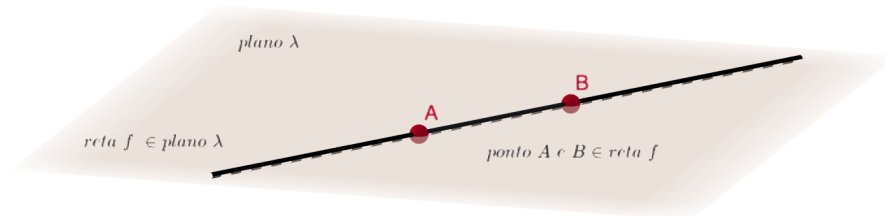
4.4 Segmento de reta

Ponto, reta e plano são conceitos primitivos e não precisam de definição. A notação será feita conforme segue:

- **Ponto** — letras latinas maiúsculas: $A, B, C, \dots$

- **Reta** — letras latinas minúsculas: $a, b, c, \dots$
- **Plano** — letras gregas minúsculas: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Figura 6 – Representação de ponto, reta e plano no espaço.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Definição 4.4.1. Sejam dois pontos distintos A e B . A reunião do conjunto formado por esses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles constitui o **segmento de reta AB** .

Figura 7 – Representação do segmento AB sobre a reta f .



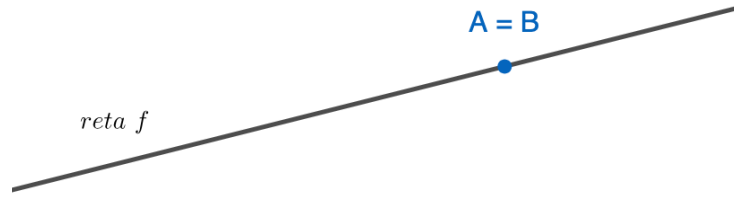
Fonte: Elaboração própria (2025).

Na reta f representada na Figura 7, os pontos A e B determinam o **segmento de reta AB** , que é a porção da reta compreendida entre esses dois pontos. Dessa forma, podemos dizer que o segmento AB é *parte finita* da reta f , possuindo **extremidades** bem definidas em A e B .

Segundo Lima (2011), o comprimento é apresentado como a medida de um segmento de reta, fundamentada na comparação com uma unidade previamente escolhida.

Definição 4.4.2. À medida de um segmento dá-se o nome de comprimento do segmento e indicaremos por $\overline{AB}$.

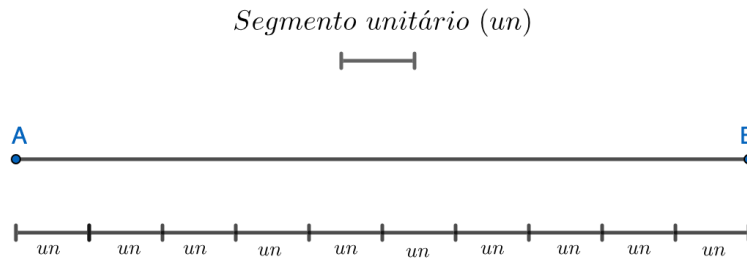
Se os pontos A e B coincidem ($A = B$), dizemos que o segmento $\overline{AB}$ é um **segmento nulo**.

Figura 8 – Representação de pontos coincidentes ($A \equiv B$).

Fonte: Elaboração própria (2025).

Dois pontos são chamados de **coincidentes** quando ocupam exatamente a mesma posição no plano ou no espaço. Na Figura 8, os pontos A e B representam a mesma localização, isto é, $A \equiv B$. Essa notação indica que não há distância entre eles, o que implica que o **segmento** $\overline{AB}$ é **nulo**, possuindo medida igual a zero.

Um **segmento de reta** é determinado por dois pontos distintos A e B . O comprimento desse segmento é obtido comparando-o com um segmento considerado unidade, repetindo-o quantas vezes for necessário para coincidir com o segmento dado. Essa abordagem permite medir segmentos de maneira precisa, estabelecendo uma base para a comparação de diferentes segmentos.

Figura 9 – Comparação do segmento $\overline{AB}$ com o segmento unitário.

Fonte: Elaboração própria (2025).

Na Figura 9, o segmento $\overline{AB}$ é comparado com um **segmento unitário**, representado pela abreviação “un”. Essa comparação permite determinar quantas vezes o segmento unitário cabe no segmento $\overline{AB}$. Sendo assim, podemos dizer que o comprimento do segmento $\overline{AB}$ será o número expresso pela razão entre sua medida e a unidade escolhida.

Considere dois segmentos de reta, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, com $\overline{CD} = u$. Se existem $n - 1$ pontos $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, sobre o segmento $\overline{AB}$, tais que

$$\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots = \overline{A_{n-2}A_{n-1}} = \overline{A_{n-1}B} = u,$$

dizemos que a razão entre os comprimentos dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é o número inteiro positivo n , e escrevemos

$$\overline{AB} = n \cdot u.$$

Definição 4.4.3. Dizemos que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são **comensuráveis**, quando existem inteiros p e q tais que

$$\overline{AC} = \frac{p}{q} \overline{AB}.$$

Exemplo da Definição 4.4.3. Considere os segmentos $\overline{AB} = 6$ cm e $\overline{AC} = 9$ cm. Então,

$$\overline{AC} = \frac{9}{6} \overline{AB} = \frac{3}{2} \overline{AB}.$$

Definição 4.4.4. Dizemos que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são **incomensuráveis** quando não existem inteiros p e q , com $q \neq 0$, tais que

$$\overline{AC} = \frac{p}{q} \overline{AB}.$$

Exemplo da Definição 4.4.4. Considere um quadrado de lado $\overline{AB}$ e diagonal $\overline{AC}$. Pelo **Teorema 11** (Teorema de Pitágoras), cuja demonstração será apresentada posteriormente, tem-se que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = 2 \overline{AB}^2.$$

Logo,

$$\overline{AC} = \sqrt{2} \overline{AB}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \sqrt{2}.$$

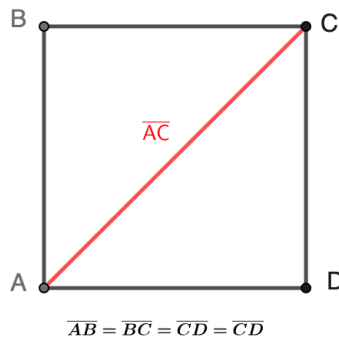
Como $\sqrt{2}$ é irracional, não pode ser escrito como $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Assim, não existem inteiros p e q tais que

$$\overline{AC} = \frac{p}{q} \overline{AB},$$

o que implica que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são incomensuráveis.

Figura 10 – Quadrado de lado $\overline{AB}$ e diagonal $\overline{AC}$.



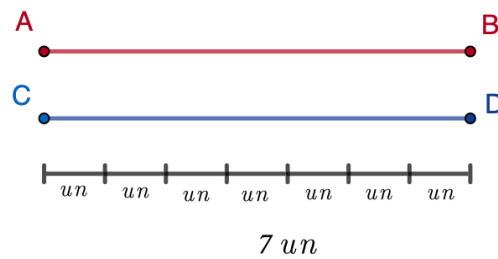
Fonte: Elaboração própria.

A medida de um segmento (não nulo) é um número real positivo associado ao segmento, de forma tal que:

- 1º) **Segmentos congruentes** têm medidas **iguais** e, reciprocamente, segmentos que têm medidas **iguais** são **congruentes**.

$$AB \equiv CD \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

Figura 11 – Segmentos congruentes $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com medida de 7 unidades.

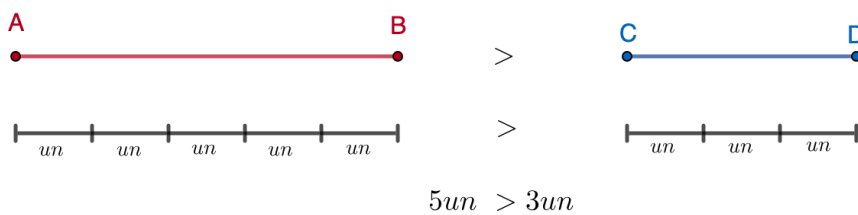


Fonte: Elaboração própria (2025).

- 2º) Se um segmento é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.

$$AB > CD \Leftrightarrow \overline{AB} > \overline{CD}$$

Figura 12 – Comparação entre segmentos — $AB > CD$, pois $5\text{ un} > 3\text{ un}$.

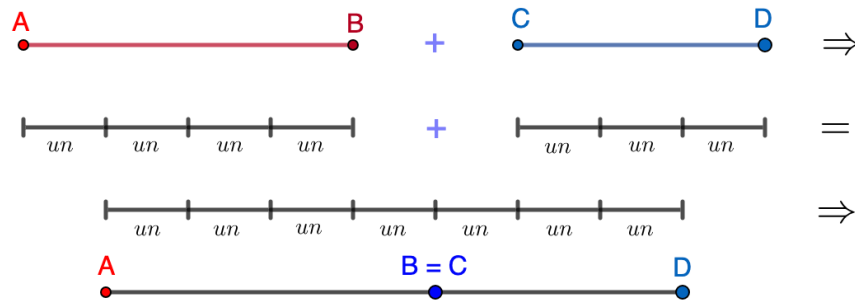


Fonte: Elaboração própria (2025).

- 3º) A um **segmento soma** está associada uma medida igual à soma das medidas dos segmentos parcelas.

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{CD}$$

Figura 13 – Adição de segmentos — $\overline{AD}$ é obtido pela justaposição dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



Fonte: Elaboração própria (2025).

O comprimento de um segmento possui 3 propriedades, são:

1. **Positividade:** Todo segmento possui comprimento maior ou igual a zero, sendo nulo apenas quando os extremos coincidem.
2. **Simetria:** A ordem dos extremos não altera o comprimento; isto é, $\overline{AB}$ tem o mesmo comprimento que $\overline{BA}$.
3. **Desigualdade triangular:** Para três pontos A, B, C , o comprimento do segmento direto entre A e C é sempre menor ou igual à soma dos comprimentos $\overline{AB} + \overline{BC}$.

4.5 O Teorema de Tales

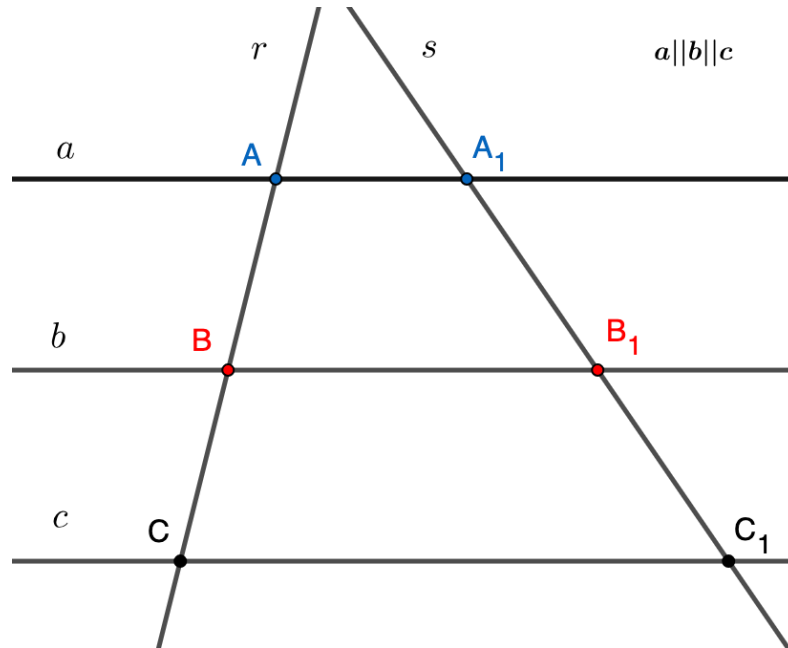
O Teorema de Tales constitui um dos pilares da geometria elementar, uma vez que fornece base para o teorema fundamental da semelhança, estabelece a ligação entre a álgebra e a geometria ao articular razões e proporções com relações geométricas e, além disso, serve como ferramenta central na demonstração de resultados clássicos, como o teorema das bissetrizes, o teorema da base média e propriedades associadas à semelhança de figuras.

Antes da formulação do teorema, é necessário compreender:

- **Razão entre segmentos:** para segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, com comprimentos m e n , define-se a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}$;
- **Paralelismo:** duas retas no plano são paralelas quando não possuem ponto em comum.
- **Transversais:** retas que intersectam um feixe de paralelas, determinando segmentos.

Teorema 3. Se um feixe de retas paralelas intercepta uma transversal, dividindo-a em segmentos congruentes, então qualquer outra transversal que intercepte esse mesmo feixe também será dividida em segmentos congruentes.

Figura 14 – Retas paralelas $a \parallel b \parallel c$ interceptadas por duas transversais r e s .



Fonte: Elaboração própria.

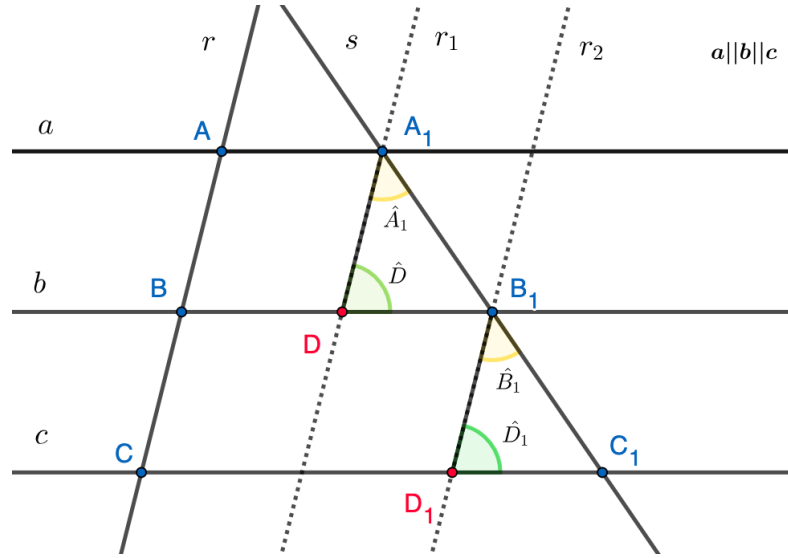
$$\begin{array}{ccc} \text{Hipótese} & & \text{Tese} \\ \overline{AB} = \overline{BC} & \Rightarrow & \overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} \end{array}$$

Demonstração do Teorema 3. Sejam $a \parallel b \parallel c$ retas paralelas cortadas pelas transversais r e s . Suponha que, na transversal r , tenhamos

$$\overline{AB} = \overline{BC}.$$

Traçamos duas retas paralelas à reta r , uma passando por A_1 e outra por B_1 , interceptando as retas b e c nos pontos D e D_1 , respectivamente.

Figura 15 – Construção auxiliar com retas paralelas a r passando por A_1 e B_1 .



Fonte: Elaboração própria.

Observemos que os quadriláteros $ABDA_1$ e BCD_1B_1 são paralelogramos. Logo, lados opostos são congruentes, isto é,

$$\overline{AB} = \overline{A_1D} \quad \text{e} \quad \overline{BC} = \overline{B_1D_1}.$$

Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, segue que

$$\overline{A_1D} = \overline{B_1D_1}.$$

Além disso, como as retas são paralelas, temos igualdade de ângulos correspondentes:

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_1} \quad \text{e} \quad \widehat{D} = \widehat{D_1}.$$

Assim, os triângulos $\triangle A_1DB_1$ e $\triangle B_1D_1C_1$ possuem:

$$\begin{cases} \overline{A_1D} = \overline{B_1D_1} \\ \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \\ \widehat{D} = \widehat{D_1} \end{cases}$$

Portanto, são congruentes pelo caso ALA.

Concluimos então que

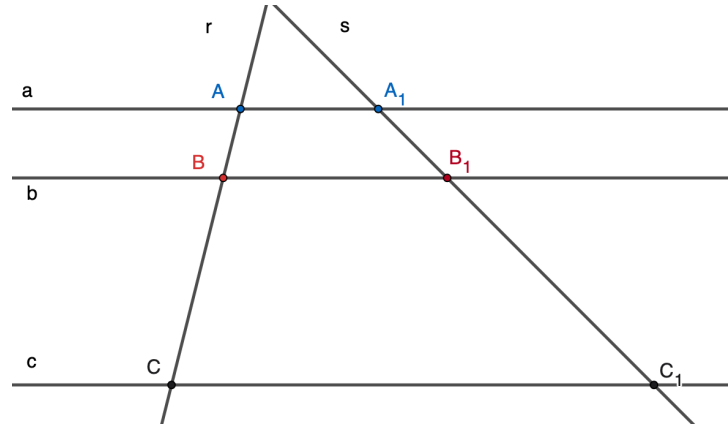
$$\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1}.$$

Logo, se uma transversal é dividida em segmentos iguais por retas paralelas, qualquer outra transversal também ficará dividida em segmentos iguais.

□

Teorema 4 (Teorema de Tales). Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Figura 16 – Retas paralelas a , b e c intersectadas por duas retas transversais r e s , ilustrando o Teorema de Tales.



Fonte: Elaboração própria.

Hipótese

$a \parallel b \parallel c$, r e s transversais

$\{A, B, C\} \in r$, $\{A_1, B_1, C_1\} \in s$

$\{A, A_1\} \in a$, $\{B, B_1\} \in b$, $\{C, C_1\} \in c$

Tese

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}$$

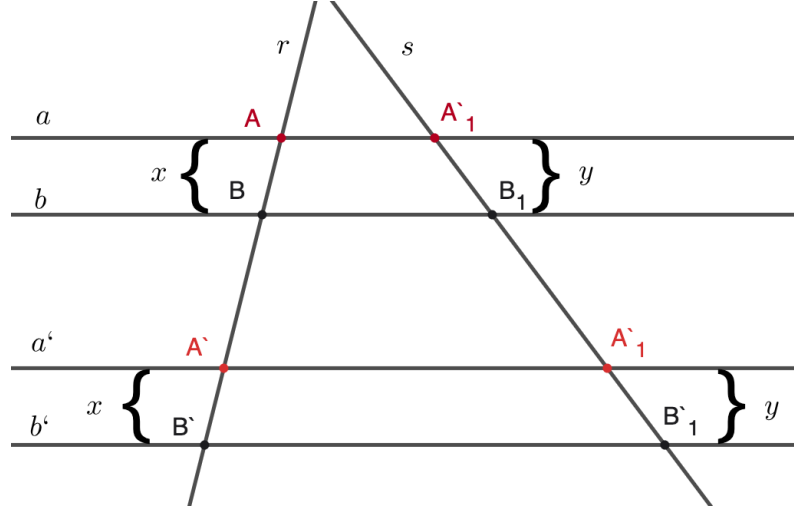
Pelo **Teorema 3**, podemos supor que os segmentos têm o mesmo ponto inicial ou seja, podemos designá-los por $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, como na Figura 16.

Demonstração do Teorema 4.

Pelo **Teorema 3**, dois segmentos da reta r de mesmo comprimento correspondem a dois segmentos da reta s de mesmo comprimento. Em símbolos:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow \overline{A_1B_1} = \overline{A'_1B'_1}.$$

Figura 17 – Configuração geométrica de retas paralelas e segmentos correspondentes.



Fonte: Elaboração própria.

Dado um número real $x > 0$, escolha pontos $A, B \in r$ tais que

$$x = \overline{AB}.$$

Seja

$$y = \overline{A_1B_1}, \quad \text{com } A_1, B_1 \in s.$$

Pelo [Teorema 3](#), o valor de y não depende da escolha dos pontos $A, B \in r$ tais que $\overline{AB} = x$.

Definimos a função

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x = \overline{AB} \mapsto y = \overline{A_1B_1}.$$

Vamos mostrar que f é uma proporcionalidade, conforme a [Definição 4.3.5](#).

1) **f é crescente.**

De fato, sejam $x < x'$ em $\mathbb{R}_+$. Então existem pontos $A, B, C \in r$ tais que

$$x = \overline{AB} \quad \text{e} \quad x' = \overline{AC}.$$

Logo,

$$\overline{AB} < \overline{AC}.$$

Assim, $B \in AC$. Pelo paralelismo das retas do feixe, isso implica que

$$B_1 \in \overline{A_1C_1} \quad \Rightarrow \quad \overline{A_1B_1} < \overline{A_1C_1}.$$

Pela definição de f , temos:

$$\overline{A_1B_1} = f(x) \quad \text{e} \quad \overline{A_1C_1} = f(x').$$

Portanto,

$$f(x) < f(x').$$

2) **Vale que** $f(nx) = nf(x)$.

Sejam $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Existem pontos $A, B \in r$ tais que

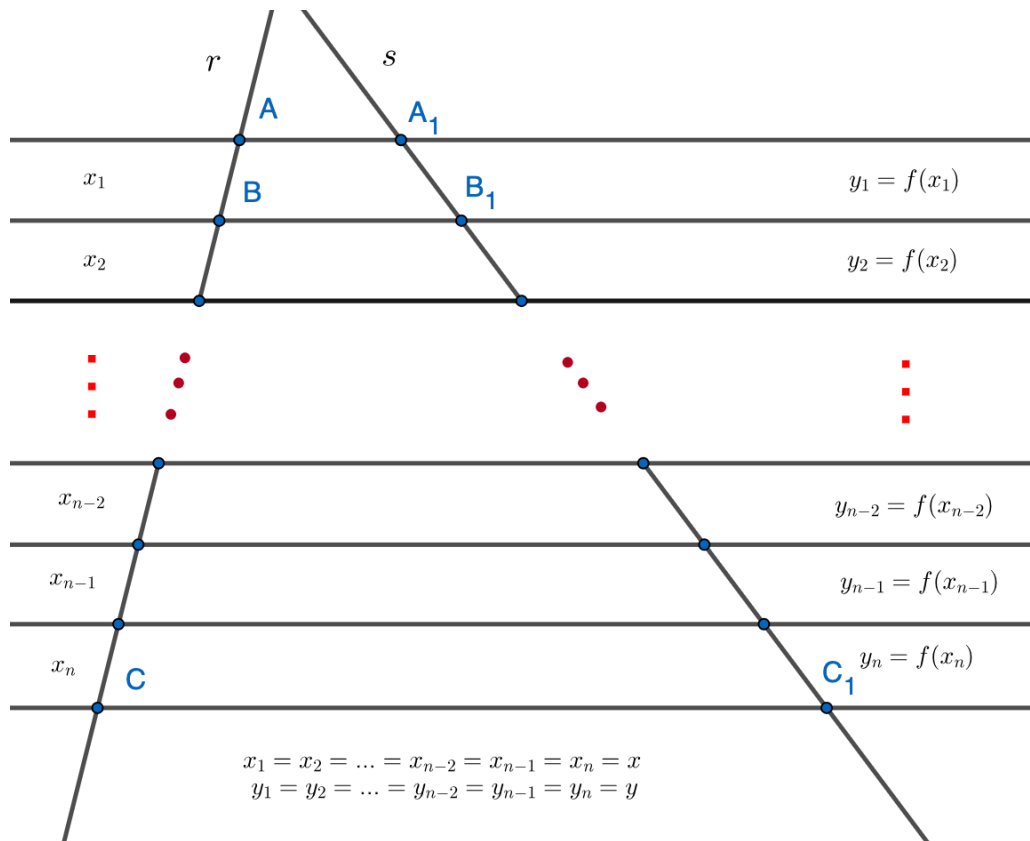
$$x = \overline{AB}.$$

Marque um ponto $C \in r$ tal que

$$\overline{AC} = n \cdot \overline{AB} = nx.$$

Dividindo o segmento $\overline{AC}$ em n partes iguais, obtemos n segmentos de comprimento x .

Figura 18 – Representação da correspondência entre os segmentos nas retas r e s , evidenciando a proporcionalidade.



Fonte: Elaboração própria.

Pelo **Teorema 3**, o segmento $\overline{A_1C_1}$ fica dividido em n segmentos de mesmo comprimento, cada um igual a

$$y = \overline{A_1B_1}.$$

Assim,

$$f(nx) = f(\overline{AC}) = \overline{A_1C_1} = n \cdot \overline{A_1B_1} = nf(x).$$

Portanto, f é uma proporcionalidade.

Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, existe uma constante $a > 0$ tal que

$$\frac{f(x)}{x} = a, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Assim, sendo $x = \overline{AB}$ e $y = f(x) = \overline{A_1B_1}$, temos:

$$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = a,$$

isto é, a razão é constante.

Dados três pontos arbitrários $A, B, C \in r$, segue que

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AC}}.$$

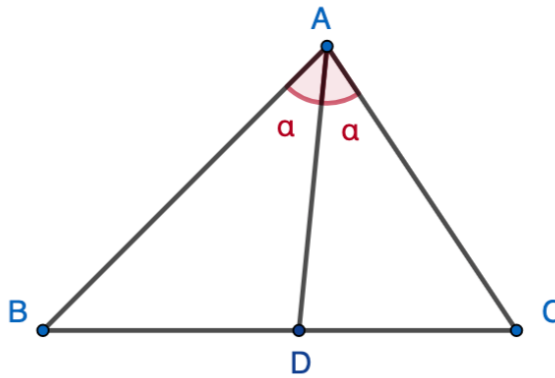
Portanto,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1B_1}}.$$

□

Teorema 5 (Teorema da Bissetriz Interna). A bissetriz interna de um dos ângulos de um triângulo qualquer intersecta o lado oposto ao ângulo em um ponto que divide o lado oposto em dois segmentos proporcionais aos outros dois lados.

Figura 19 – Representação da bissetriz interna de um triângulo.

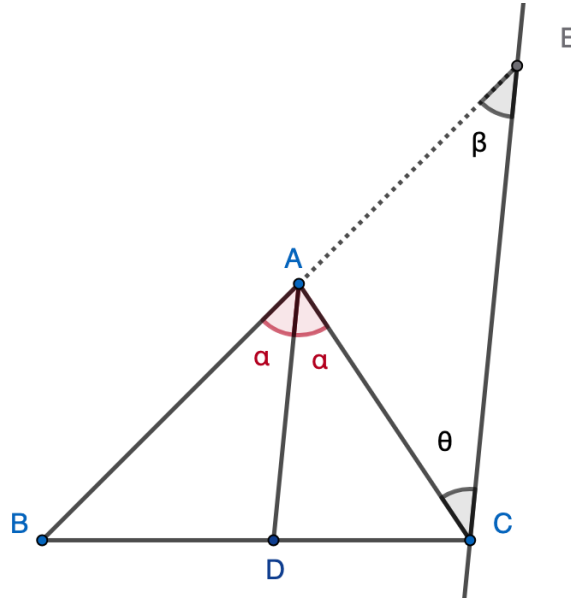


Fonte: Elaboração própria.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hipótese:} \\ \overline{AD} \text{ é a bissetriz do } \widehat{BAC} \in \triangle ABC \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tese:} \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} \end{array} \right.$$

Demonstração do Teorema 5. Se uma reta r paralela à bissetriz AD , passando pelo ponto C e prolongue o segmento $\overline{BA}$ até intersectar r no ponto E .

Figura 20 – Representação geométrica do Teorema da Bissetriz Interna.



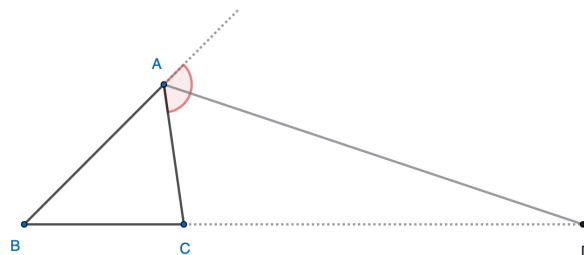
Fonte: Elaboração própria.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \widehat{ACE} = \theta \equiv \alpha &= \widehat{DAC} \text{ (alternos internos)} \\
 \widehat{AEC} = \beta \equiv \alpha &= \widehat{BAD} \text{ (correspondentes)}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta \equiv \beta \\
 & \triangle CAE \text{ (isósceles)} \Rightarrow \overline{AC} \equiv \overline{AE} \xrightarrow{\text{Pelo Teorema de Tales}} \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \\
 & \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 6 (Teorema da Bissetriz Externa). Se uma bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intersecta a reta que contém o lado oposto externamente em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Figura 21 – Representação da bissetriz externa de um triângulo, evidenciando a proporcionalidade dos segmentos formados.



Fonte: Elaboração própria.

Hipótese

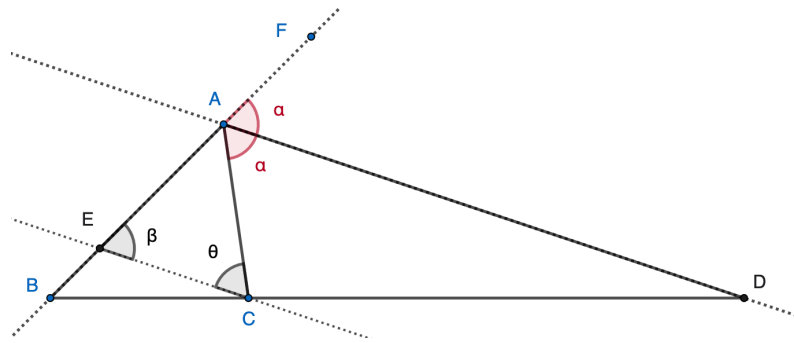
Tese

$$\overline{AD} \text{ é a bissetriz do ângulo externo do } \triangle ABC \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$$

Demonstração do Teorema 6. Seja AD , bissetriz do vértice A , tal que D pertence à reta suporte do lado BC e F pertence à reta suporte BA .

Trace uma reta r paralela à bissetriz AD , passando pelo ponto C .

Figura 22 – Representação geométrica do Teorema da Bissetriz Externa.



Fonte: Elaboração própria (2025).

$$\left\{ \begin{array}{l} C\hat{A}D \equiv D\hat{A}F = \alpha, \text{ por definição da bissetriz} \\ \beta = C\hat{E}A \equiv D\hat{A}F = \alpha \text{ (ângulos correspondentes)} \\ \theta = A\hat{C}E \equiv C\hat{A}D = \alpha \text{ (ângulos alternos internos)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Por transitividade}} \beta \equiv \theta,$$

Logo, o triângulo $\triangle AEC$ é isósceles, portanto $\overline{EA} \equiv \overline{AC}$.

$$\overline{EA} \equiv \overline{AC} \xrightarrow{\text{Pelo Teorema de Tales}} \frac{\overline{BA}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$

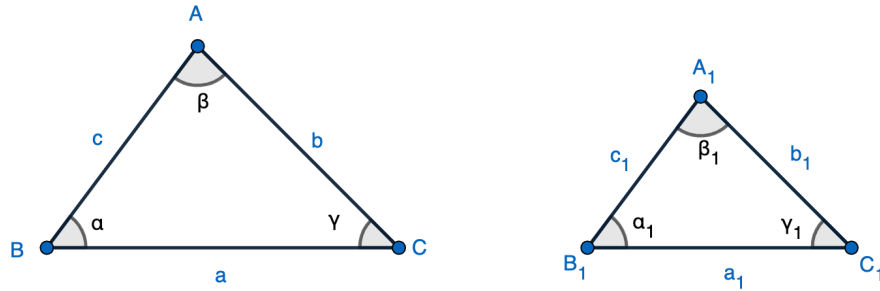
$$\Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}.$$

□

4.6 Semelhança de Triângulos

Definição 4.6.1. Dois triângulos são semelhantes quando possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Figura 23 – Triângulos semelhantes: correspondência entre ângulos e lados homólogos.



Fonte: Elaboração própria.

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \iff \begin{cases} \alpha = \alpha_1 \\ \beta = \beta_1 \\ \gamma = \gamma_1 \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

Dizemos que dois lados são homólogos quando cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

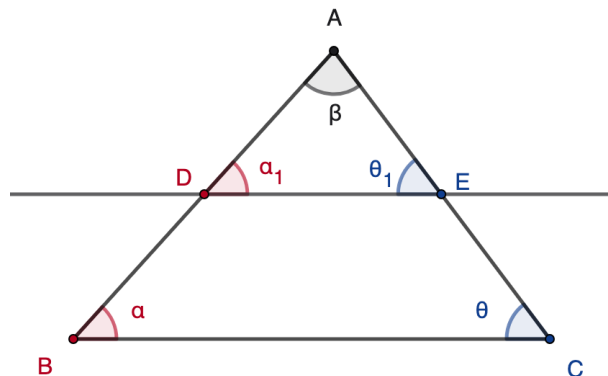
O símbolo ($\sim$) significa **semelhante**.

Se k a razão entre os lados homólogos, $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$, então k é chamado de *razão de semelhança dos triângulos*, caso $k = 1$, os triângulos são congruentes.

Assim todos os triângulos congruentes são semelhantes.

Teorema 7 (Teorema da Fundamental da Semelhança). Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intersecta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao triângulo original.

Figura 24 – Representação geométrica do Teorema Fundamental da Semelhança.



Fonte: Elaboração própria.

Hipótese**Tese**

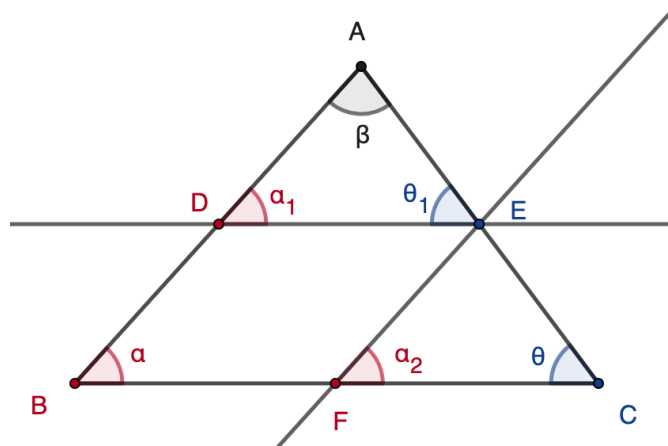
$$\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Demonstração do Teorema 7. Seja $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, então temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \equiv \alpha_1 \text{ e } \theta \equiv \theta_1, \text{ ângulos correspondentes;} \\ \beta \text{ é ângulo comum aos } \triangle ABC \text{ e } \triangle ADE; \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \text{ pelo Teorema de Tales.} \end{array} \right.$$

Traçando uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$ passando pelo ponto E , temos o ponto F pertencente a $\overline{BC}$.

Figura 25 – Construção auxiliar utilizada na demonstração do Teorema Fundamental da Semelhança.



Fonte: Elaboração própria.

Pelo paralelogramo $EDBF$, tem-se $\overline{DE} = \overline{BF}$.

Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Como $\overline{DE} = \overline{BF}$, temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

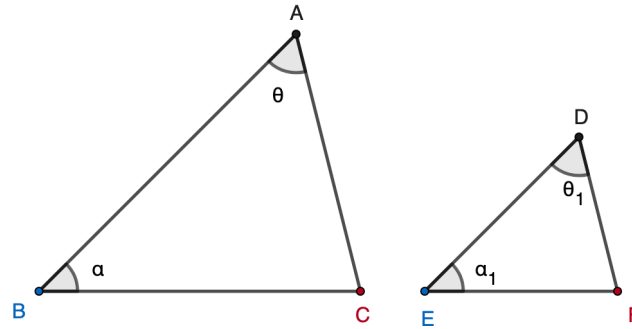
Logo, $\triangle ACB \sim \triangle ADE$.

□

4.6.1 Casos de Semelhança

Teorema 8 (Critério AA de semelhança). Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.

Figura 26 – Ilustração do critério AA de semelhança: dois ângulos correspondentes congruentes implicam a semelhança entre os triângulos.



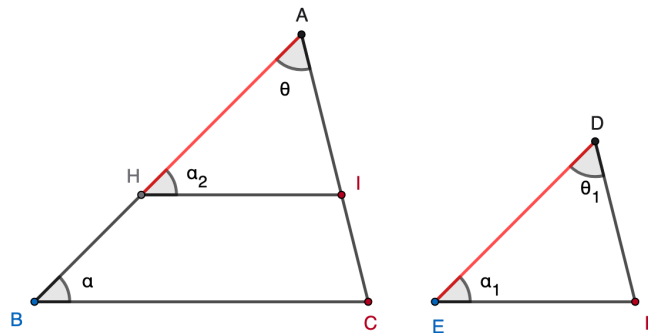
Fonte: Elaboração própria.

<i>Hipótese</i>	<i>Tese</i>
$\left\{ \begin{array}{l} \triangle ABC, \triangle DEF \\ \theta = \theta_1, \alpha = \alpha_1 \end{array} \right\}$	$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$

Demonstração do Teorema 8. Vamos supor que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, não são congruentes e que $\overline{AB} > \overline{DE}$.

Seja $H \in AB$ tal que $\overline{AH} = \overline{DE}$. Trace uma paralela à reta BC passando por H , encontrando $I \in AC$.

Figura 27 – Construção auxiliar utilizada na demonstração do critério AA de semelhança entre triângulos.



Fonte: Elaboração própria.

Então, $\alpha_2 \equiv \alpha$ (ângulos correspondentes) e, por hipótese, $\alpha \equiv \alpha_1$. Portanto, $\alpha_2 \equiv \alpha_1$.

Assim, temos que

$$\theta \equiv \theta_1, \quad \overline{AH} = \overline{DE} \quad \text{e} \quad \alpha_2 \equiv \alpha_1.$$

Pelo caso ALA, os triângulos $\triangle AHI$ e $\triangle DEF$ são congruentes. Portanto,

$$\overline{AI} = \overline{DF}.$$

Pelo do **Teorema 7** (Teorema Fundamental da Semelhança), segue que

$$\triangle ABC \sim \triangle AHI.$$

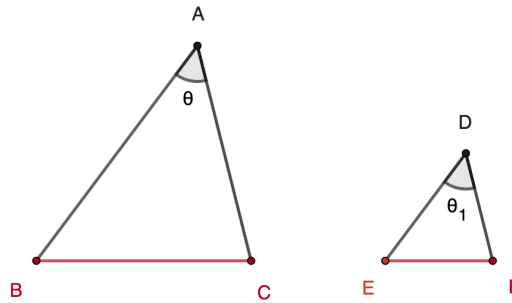
Como $\triangle AHI \equiv \triangle DEF$, pela transitividade, concluímos que

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

□

Teorema 9 (Critério LAL de semelhança). Se dois lados de um triângulo estão em proporção com dois lados de outro triângulo e os ângulos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Figura 28 – Ilustração do critério LAL de semelhança entre triângulos.



Fonte: Elaboração própria.

<i>Hipótese</i>	<i>Tese</i>
$\left\{ \theta \equiv \theta_1, \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \right\}$	$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$

Demonstração do Teorema 9. Vamos supor que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, não são congruentes e que $\overline{AB} > \overline{DE}$.

Temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} > 1,$$

logo,

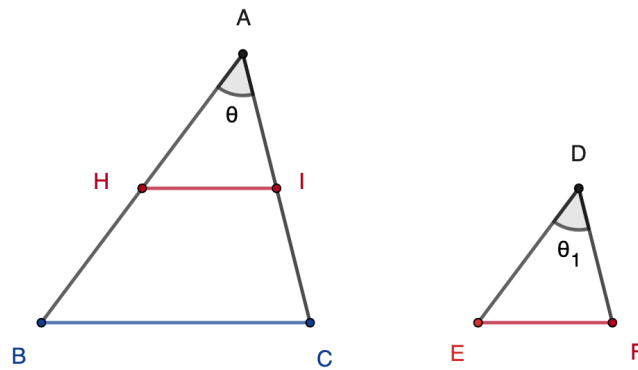
$$\overline{AC} > \overline{DF}.$$

Sejam $H \in AB$ e $I \in AC$ tais que

$$\overline{AH} = \overline{DE} \quad \text{e} \quad \overline{AI} = \overline{DF}.$$

Trace a reta $\overline{HI}$, de modo que AHI forme um triângulo.

Figura 29 – Construção auxiliar utilizada na demonstração do critério LAL de semelhança entre triângulos.



Fonte: Elaboração própria.

Assim, temos $\overline{AH} = \overline{DE}$, $\theta \equiv \theta_1$ (por hipótese) e $\overline{AI} = \overline{DF}$. Pelo caso LAL, os triângulos $\triangle AHI$ e $\triangle DEF$ são congruentes. Portanto,

$$\overline{HI} = \overline{EF}.$$

Por hipótese,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

Como $\overline{ED} = \overline{AH}$ e $\overline{DF} = \overline{AI}$, segue que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AI}}.$$

Pela recíproca do Teorema de Tales, temos que $\overline{HI} \parallel \overline{BC}$.

Pelo **Teorema 7 (Teorema Fundamental da Semelhança)**, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AHI$ são semelhantes.

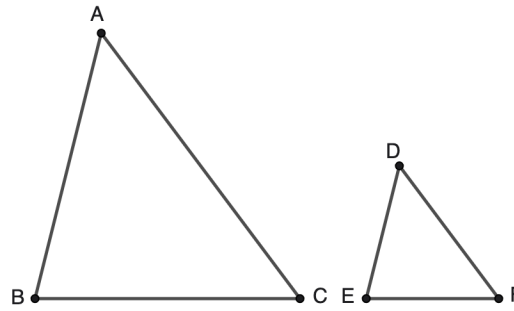
Como $\triangle AHI \equiv \triangle DEF$, temos que

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

□

Teorema 10 (Critério LLL de semelhança). Se os três lados de um triângulo estão em proporção com os três lados de outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.

Figura 30 – Ilustração do critério LLL de semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$.



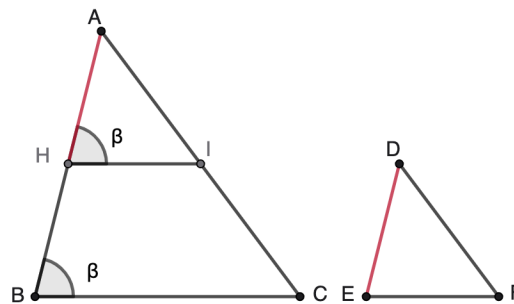
Fonte: Elaboração própria.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hipótese} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = K \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF \quad \text{Tese}$$

Demonstração do Teorema 10. Vamos supor que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, não são congruentes e que $\overline{AB} > \overline{DE}$.

Seja $H \in AB$ tal que $\overline{AH} = \overline{DE}$. Trace uma paralela à reta BC passando por H , encontrando $I \in AC$.

Figura 31 – Construção auxiliar utilizada na demonstração do critério LLL de semelhança entre triângulos.



Fonte: Elaboração própria.

Pelo **Teorema 7 (Teorema Fundamental da Semelhança)**, os triângulos

$\triangle ABC$ e $\triangle AHI$ são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{HI}} = \lambda.$$

Por hipótese, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$$

Como $\overline{DE} = \overline{AH}$, segue que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \lambda.$$

Logo,

$$\overline{DF} = \overline{AI} \quad \text{e} \quad \overline{EF} = \overline{HI}.$$

Portanto, pelo caso LLL de congruência, os triângulos $\triangle AHI$ e $\triangle DEF$ são congruentes. Assim,

$$\triangle DEF \sim \triangle AHI.$$

Portanto,

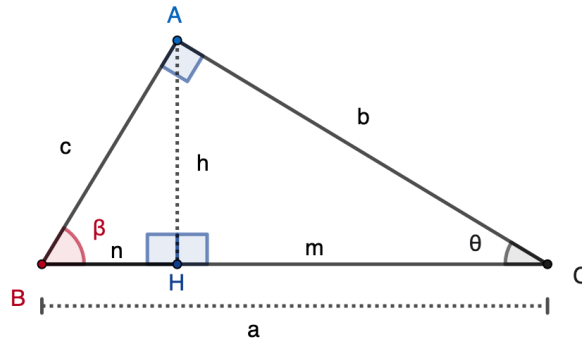
$$\triangle DEF \sim \triangle ABC.$$

□

4.7 Relações Métricas no triângulo Retângulo

Considere o triângulo $\triangle ABC$, retângulo em A . Trace uma perpendicular à reta BC passando por A , encontrando $H \in \overline{BC}$. Vamos caracterizar os seguintes elementos de $\triangle ABC$:

Figura 32 – Triângulo retângulo $\triangle ABC$ com altura relativa à hipotenusa e suas projeções.

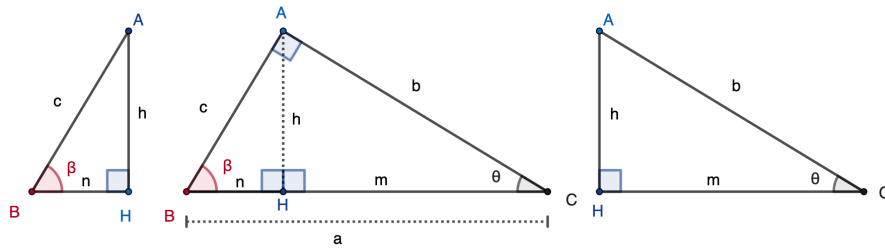


Fonte: Elaboração própria.

$\overline{BC}$ de medida a , chama-se *hipotenusa*;
 $\overline{AC}$ de medida b , chama-se *cateto*;
 $\overline{AB}$ de medida c , chama-se *cateto*;
 $\overline{BH}$ de medida n , chama-se *projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa*;
 $\overline{CH}$ de medida m , chama-se *projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa*;
 $\overline{AH}$ de medida h , chama-se *altura do triângulo em relação à base $\overline{BC}$, ou relativa à hipotenusa*.

A altura $\overline{AH}$, relativa ao lado $\overline{BC}$, decompõe o triângulo $\triangle ABC$ nos triângulos $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$, os quais são semelhantes ao $\triangle ABC$ pelo critério AA de semelhança. Como mostra Figura 33.

Figura 33 – Triângulos $\triangle ABC$, $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$: triângulos retângulos semelhantes.



Fonte: Elaboração própria.

De fato, temos:

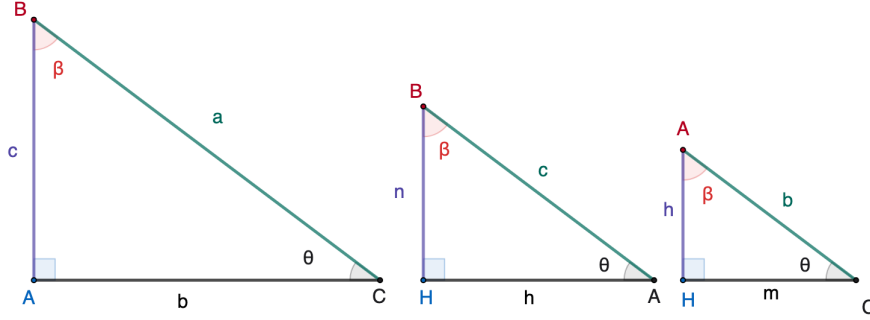
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \quad \triangle HBA \\ 90^\circ = \hat{A} \equiv \hat{H} = 90^\circ \\ \beta = \hat{B} \equiv \hat{B} = \beta \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{AA}} \triangle ABC \sim \triangle HBA$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \quad \triangle HAC \\ 90^\circ = \hat{A} \equiv \hat{H} = 90^\circ \\ \theta = \hat{C} \equiv \hat{C} = \theta \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{AA}} \triangle ABC \sim \triangle HAC$$

$$\text{Como: } \triangle ABC \sim \triangle HBA \text{ e } \triangle ABC \sim \triangle HAC \xRightarrow{\text{Transitividade}} \triangle HBA \sim \triangle HAC$$

Já que os triângulos são semelhantes, podemos deduzir algumas relações e, para isso, iremos rotacionar os triângulos no plano, de modo que fiquem na mesma posição, facilitando a identificação das razões entre os lados homólogos, como mostra a Figura 34.

Figura 34 – Triângulos $\triangle ABC$, $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$ rotacionados no plano, evidenciando a correspondência entre os lados homólogos.



Fonte: Elaboração própria.

$$\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{n} = \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \\ \frac{c}{n} = \frac{b}{h} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot n \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h \end{array} \right.$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{h} = \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{h} = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h \\ \frac{c}{h} = \frac{b}{m} \Rightarrow c \cdot m = b \cdot h \\ \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \end{array} \right.$$

$$\triangle HBA \sim \triangle HAC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{h} = \frac{c}{b} = \frac{h}{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{h} = \frac{c}{b} \Rightarrow b \cdot n = c \cdot h \\ \frac{n}{h} = \frac{h}{m} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \\ \frac{c}{b} = \frac{h}{m} \Rightarrow c \cdot m = b \cdot h \end{array} \right.$$

Excluindo as relações redundantes, obtemos seis relações distintas, que podem ser organizadas em quatro grupos:

- | | |
|----------------|---------------|
| (1) $c^2 = an$ | (4) $bc = ah$ |
| (2) $b^2 = am$ | (5) $ch = bn$ |
| (3) $h^2 = mn$ | (6) $bh = cm$ |

1^a) Cada cateto é *média geométrica* entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 = a \cdot n \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot n} \\ \text{e} \\ b^2 = a \cdot m \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot m} \end{array} \right.$$

2^a) A altura relativa à hipotenusa é *média geométrica* entre as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

$$\left\{ \begin{array}{l} h^2 = m \cdot n \Rightarrow h = \sqrt{m \cdot n} \end{array} \right.$$

3^a) O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

$$b \cdot c = a \cdot h$$

4^a) O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa.

$$\left\{ \begin{array}{l} c \cdot h = b \cdot n \\ \text{e} \\ b \cdot h = c \cdot m \end{array} \right.$$

As equações (4), (5) e (6), pertencentes aos grupos 3 e 4, não são independentes, pois resultam do produto de duas das três primeiras relações, sendo a terceira utilizada para completar a dedução.

De fato, a partir das equações (1) e (2), temos:

$$c^2 b^2 = (an)(am).$$

Como $h^2 = nm$, segue que:

$$c^2 b^2 = a^2 h^2.$$

Logo,

$$bc = ah \tag{4}$$

De modo análogo, a partir das equações (1) e (3), temos:

$$c^2 h^2 = (an)(mn).$$

Como $b^2 = am$, segue que:

$$c^2 h^2 = n^2 b^2.$$

Logo,

$$ch = bn \tag{5}$$

Analogamente, a partir das equações (2) e (3), temos:

$$b^2 h^2 = (am)(mn).$$

Como $c^2 = an$, segue que:

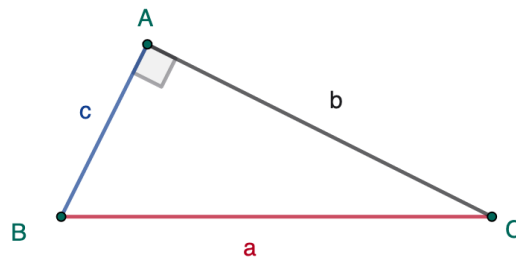
$$b^2 h^2 = m^2 c^2.$$

Portanto,

$$bh = cm \tag{6}$$

Teorema 11 (Teorema de Pitágoras). Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Figura 35 – Triângulo retângulo utilizado na representação do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaboração própria.

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{4.1}$$

Na Figura 35 a representa a medida da hipotenusa e b e c representam as medidas dos catetos.

Demonstração do Teorema 11.

Somando, membro a membro, as equações (1) e (2), obtemos:

$$b^2 + c^2 = am + an.$$

Colocando a em evidência no segundo membro, temos:

$$b^2 + c^2 = a(m + n).$$

Como $m + n = a$, segue que:

$$b^2 + c^2 = a \cdot a = a^2.$$

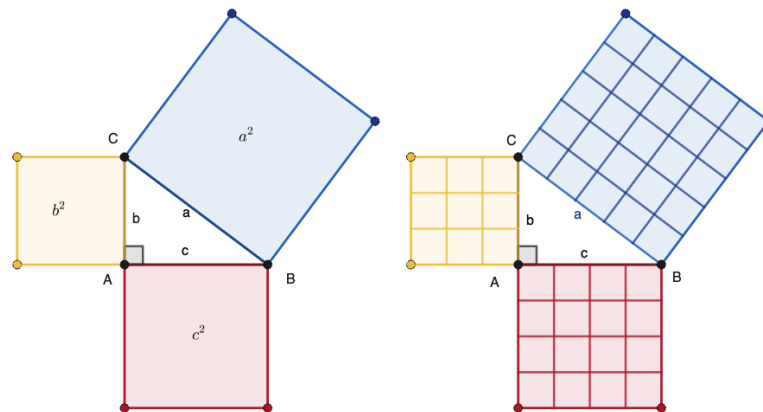
Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

□

Podemos demonstrar o teorema de Pitágoras pela simples construção de quadrados feitos com as medidas dos lados do triângulo, como demonstra a Figura 36.

Figura 36 – Representação geométrica do Teorema de Pitágoras: a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.



Fonte: Elaboração própria.

Exemplo 4.7.1 do Teorema 11. Uma fábrica de produzir quadrados.

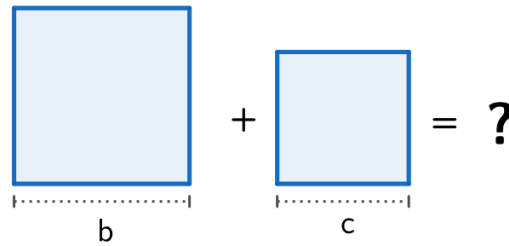
Imagine uma “fábrica geométrica” capaz de transformar dois quadrados em um único quadrado equivalente em área.

Considere dois quadrados de lados b e c , conforme ilustrado na Figura 37. A área total recebida pela fábrica é dada por

$$b^2 + c^2.$$

A questão que se coloca é a seguinte: é possível construir um único quadrado cuja área seja exatamente igual a essa soma?

Figura 37 – Representação da soma das áreas de dois quadrados de lados b e c .



Fonte: Elaboração própria.

O Teorema de Pitágoras garante que essa transformação é possível.

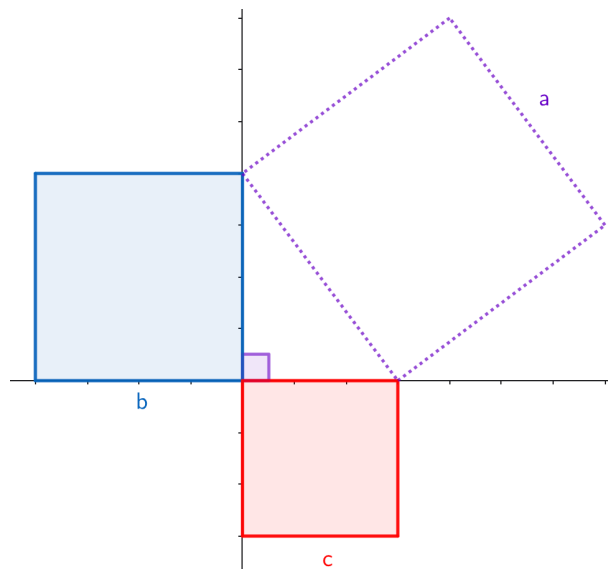
Para compreender esse processo, trace duas retas perpendiculares, correspondentes aos eixos coordenados, dividindo o plano em quatro quadrantes.

No segundo e no quarto quadrantes, construa quadrados de lados b e c , respectivamente, cujos vértices coincidam com a origem e de modo que dois de seus lados estejam apoiados sobre os eixos.

Observe que os lados desses quadrados formam naturalmente um ângulo reto na origem, determinando os catetos de um triângulo retângulo.

Constrói-se, então, um quadrado sobre a hipotenusa desse triângulo.

Figura 38 – Construção geométrica associada ao Teorema de Pitágoras: os quadrados de lados b e c e o quadrado de lado a , construído sobre a hipotenusa.



Fonte: Elaboração própria.

Conforme ilustrado na Figura 38, o lado a do quadrado maior é a hipotenusa e os

lados b e c dos quadrados menores são catetos.

Pelo teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Logo a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores.

Assim, o Teorema de Pitágoras pode ser interpretado como um resultado geométrico associado à adição de áreas.

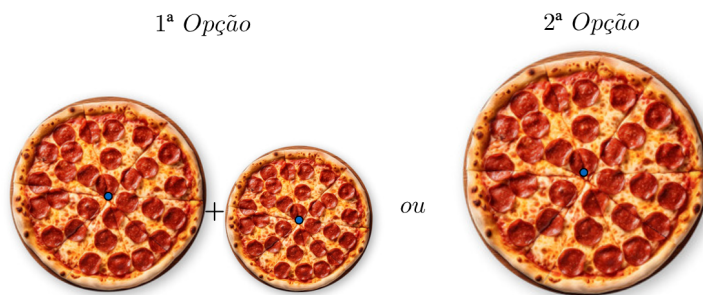
Exemplo 4.7.2 do Teorema 11. A escolha da pizza.

Uma pizzeria oferece duas opções pelo mesmo preço, sabendo-se que a espessura é a mesma.

- duas pizzas menores, de raios r_1 e r_2 ;
- uma única pizza maior, de raio R .

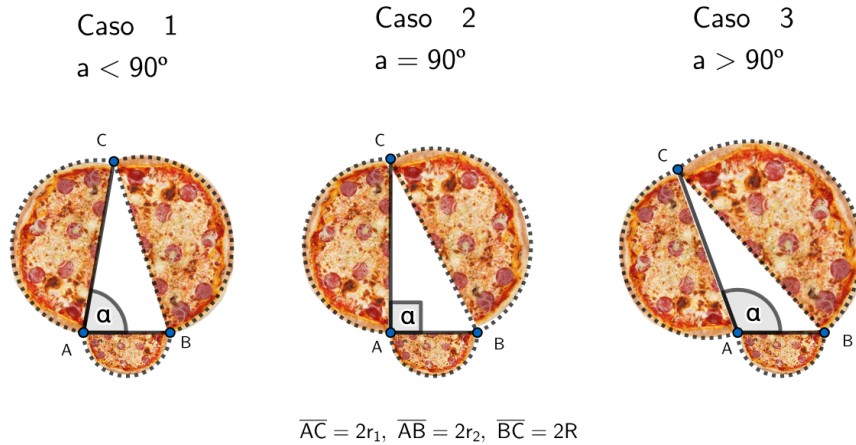
João comprou a 1ª opção e Florência a 2ª opção. Após a chegada do pedido, começaram a discutir quem teria escolhido a melhor opção.

Figura 39 – Comparação entre duas pizzas menores e uma pizza maior.



Fonte: Elaboração própria.

Para resolver o problema, consideraram-se as metades de cada pizza, associando seus diâmetros aos lados de triângulos, conforme representado na Figura 40. A partir dessa construção, podem ser formados três triângulos que permitem comparar geometricamente as áreas das pizzas.

Figura 40 – Relação entre os diâmetros das pizzas e o ângulo α .

Fonte: Elaboração própria.

A construção geométrica apresentada fornece uma interpretação visual do problema, permitindo comparar as áreas das pizzas a partir da relação entre seus diâmetros. Entretanto, para justificar rigorosamente qual opção é mais vantajosa, é necessário analisar algebricamente as relações obtidas em cada configuração do triângulo $\triangle ACB$.

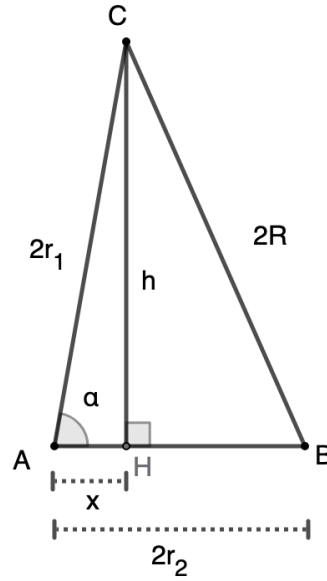
Considere:

$$\overline{AC} = 2r_1, \quad \overline{AB} = 2r_2, \quad \text{e} \quad \overline{BC} = 2R.$$

A análise do triângulo $\triangle ABC$ permite distinguir três situações, determinadas pela medida do ângulo α .

Caso 1: $\alpha < 90^\circ$

Figura 41 – Representação geométrica do Caso 1, com $\alpha < 90^\circ$.



Fonte: Elaboração própria.

Nesse caso, o triângulo $\triangle ABC$ é acutângulo. Considere $H \in \overline{AB}$ o pé da altura relativa ao vértice C , de modo que $\overline{CH} = h$.

Seja ainda

$$\overline{AH} = x.$$

Como $\overline{AC} = 2r_1$, temos

$$\overline{HB} = 2r_2 - x.$$

Aplicando o Teorema 11 no triângulo retângulo $\triangle ACH$, obtemos

$$(2r_1)^2 = h^2 + x^2.$$

Logo,

$$4r_1^2 = h^2 + x^2. \quad (1)$$

Aplicando novamente o Teorema 11, agora no triângulo retângulo $\triangle BHC$, temos

$$(2R)^2 = h^2 + (2r_2 - x)^2.$$

Logo,

$$4R^2 = h^2 + (2r_2 - x)^2. \quad (2)$$

Subtraindo a equação (1) da equação (2), segue que

$$4R^2 - 4r_1^2 = [h^2 + (2r_2 - x)^2] - [h^2 + x^2].$$

Assim,

$$4R^2 - 4r_1^2 = (2r_2 - x)^2 - x^2.$$

Desenvolvendo o quadrado,

$$4R^2 - 4r_1^2 = 4r_2^2 - 4r_2x + x^2 - x^2.$$

Portanto,

$$4R^2 - 4r_1^2 = 4r_2^2 - 4r_2x.$$

Dividindo ambos os membros por 4, obtemos

$$R^2 - r_1^2 = r_2^2 - r_2x.$$

Logo,

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 - r_2x.$$

Como $r_2 > 0$ e $x > 0$, temos

$$r_2x > 0.$$

Consequentemente,

$$R^2 < r_1^2 + r_2^2.$$

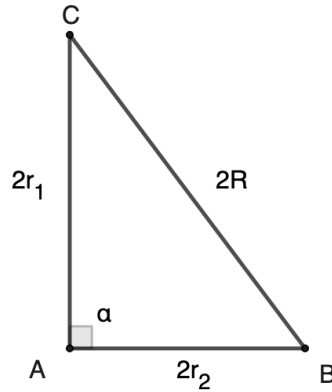
Multiplicando ambos os membros por π , segue que

$$\pi R^2 < \pi r_1^2 + \pi r_2^2.$$

Portanto, a área da pizza maior é menor que a soma das áreas das duas pizzas menores. Assim, **as duas pizzas menores são mais vantajosas.**

Caso 2: $\alpha = 90^\circ$

Figura 42 – Representação geométrica do Caso 2, com $\alpha = 90^\circ$.



Fonte: Elaboração própria.

Nesse caso, o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em A .

Pelo [Teorema 11](#), aplicado ao triângulo retângulo $\triangle ABC$, temos

$$(2R)^2 = (2r_1)^2 + (2r_2)^2.$$

Logo,

$$4R^2 = 4r_1^2 + 4r_2^2.$$

Dividindo ambos os membros por 4, obtemos

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Multiplicando ambos os membros por π , segue que

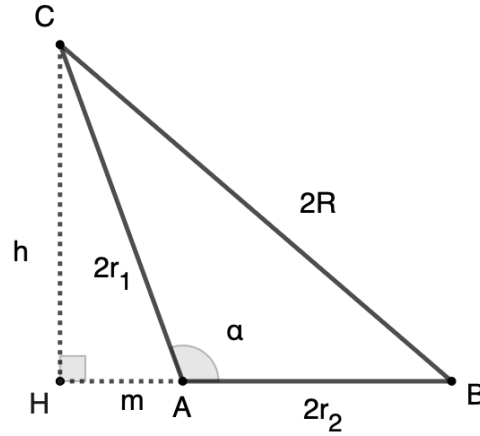
$$\pi R^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2.$$

Como πR^2 representa a área da pizza maior, enquanto $\pi r_1^2 + \pi r_2^2$ representa a soma das áreas das duas pizzas menores, conclui-se que as áreas são iguais.

Portanto, **as opções são equivalentes.**

Caso 3: $\alpha > 90^\circ$

Figura 43 – Representação geométrica do Caso 3, com $\alpha > 90^\circ$.



Fonte: Elaboração própria.

Nesse caso, o triângulo $\triangle ABC$ é obtusângulo em A . Considere H o pé da altura traçada a partir do vértice B sobre a reta que contém $\overline{AC}$, de modo que

$$\overline{CH} = h.$$

Como o ângulo α é obtuso, o ponto H pertence ao prolongamento de $\overline{AC}$, ficando fora do segmento $\overline{AC}$. Assim, considere

$$\overline{AH} = m.$$

Como

$$\overline{AB} = 2r_2,$$

temos

$$\overline{HB} = 2r_2 + m.$$

Além disso,

$$\overline{AC} = 2r_1 \quad \text{e} \quad \overline{BC} = 2R.$$

Aplicando o [Teorema 11](#) ao triângulo retângulo $\triangle AHC$, obtemos

$$(2r_1)^2 = h^2 + m^2.$$

Logo,

$$h^2 = (2r_1)^2 - m^2. \quad (1)$$

Aplicando novamente o [Teorema 11](#), agora ao triângulo retângulo $\triangle BHC$, temos

$$(2R)^2 = h^2 + (2r_2 + m)^2. \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), segue que

$$(2R)^2 = (2r_1)^2 - m^2 + (2r_2 + m)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado, temos

$$(2R)^2 = (2r_1)^2 - m^2 + 4r_2^2 + 4r_2m + m^2.$$

Assim,

$$(2R)^2 = (2r_1)^2 + 4r_2^2 + 4r_2m.$$

$$4R^2 = 4r_1^2 + 4r_2^2 + 4r_2m.$$

Dividindo ambos os membros por 4, resulta

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_2m.$$

Como $r_2 > 0$ e $m > 0$, temos

$$r_2m > 0.$$

Portanto,

$$R^2 > r_1^2 + r_2^2.$$

Multiplicando ambos os membros por π , segue que

$$\pi R^2 > \pi r_1^2 + \pi r_2^2.$$

Logo, a área da pizza maior é maior que a soma das áreas das duas pizzas menores. Assim, **a pizza maior é mais vantajosa.**

Assim, a escolha mais vantajosa depende do ângulo formado pelos segmentos associados aos diâmetros das pizzas, estabelecendo uma conexão entre a geometria dos triângulos e a comparação de áreas.

4.8 Razão entre as medidas dos lados do triângulo retângulo

Comumente chamadas de **razões trigonométricas do triângulo retângulo**, essas relações revelam uma correspondência entre os ângulos agudos e a razão entre os lados, expressando um valor numérico que depende apenas da amplitude do ângulo, e não do tamanho do triângulo. Essa propriedade decorre da **semelhança de triângulos retângulos**, uma vez que triângulos semelhantes mantêm constantes as razões entre lados correspondentes.

Os lados que formam o ângulo reto de um triângulo retângulo são denominados **catetos**, enquanto o lado oposto ao ângulo reto é a **hipotenusa**. Cada cateto pode receber duas denominações diferentes, dependendo do ângulo agudo considerado:

Num triângulo retângulo chama-se **cateto oposto** a um ângulo agudo, o lado do triângulo que não é lado do ângulo em questão.

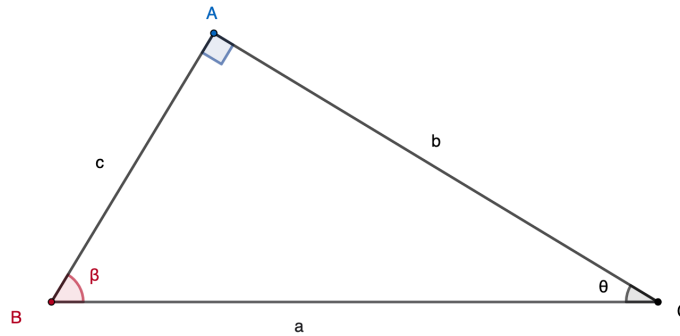
Num triângulo retângulo chama-se **cateto adjacente** a um ângulo agudo o cateto que faz parte do ângulo em questão.

Assim, para um mesmo triângulo retângulo, um cateto pode ser **oposto** a um dos ângulos agudos e **adjacente** ao outro, evidenciando a relação de dependência entre a posição do lado e o ângulo de referência.

No triângulo retângulo ABC da Figura 44, abaixo:

$$\begin{array}{l} \overline{AC} \text{ de medida } b \left\{ \begin{array}{l} \text{cateto oposto ao ângulo } \beta, \\ \text{cateto adjacente ao ângulo } \theta. \end{array} \right. \\ \overline{AB} \text{ de medida } c \left\{ \begin{array}{l} \text{cateto oposto ao ângulo } \theta, \\ \text{cateto adjacente ao ângulo } \beta. \end{array} \right. \end{array}$$

Figura 44 – Relação entre os lados e ângulos de um triângulo retângulo.



Fonte: Elaboração própria.

Num triângulo retângulo, chama-se **seno** de um ângulo agudo do triângulo retângulo a razão entre o comprimento do cateto oposto a esse ângulo e o comprimento da hipotenusa.

Indicação: $\text{sen } \theta$, lê-se “seno do ângulo θ ” ou “seno de θ ”.

Para o triângulo retângulo ABC , da Figura 44, temos:

$$\begin{aligned}\text{sen } \beta &= \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \\ \text{sen } \theta &= \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}\end{aligned}$$

Num triângulo retângulo, chama-se **cosseno** de um ângulo agudo do triângulo retângulo a razão entre o comprimento do cateto adjacente a esse ângulo e o comprimento da hipotenusa.

Indicação: $\cos \theta$, lê-se “cosseno do ângulo θ ” ou “cosseno de θ ”.

De modo análogo, para o cosseno dos ângulos agudos do triângulo retângulo ABC , da Figura 44, temos:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \\ \cos \theta &= \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}\end{aligned}$$

Num triângulo retângulo, chama-se **tangente** de um ângulo agudo do triângulo retângulo a razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento do cateto adjacente do mesmo ângulo.

Indicação: $\text{tg } \theta$, lê-se “tangente do ângulo θ ” ou “tangente de θ ”.

Para a tangente dos ângulos agudos do triângulo retângulo ABC , Figura 44, temos:

$$\tan \beta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \beta} = \frac{b}{c}$$

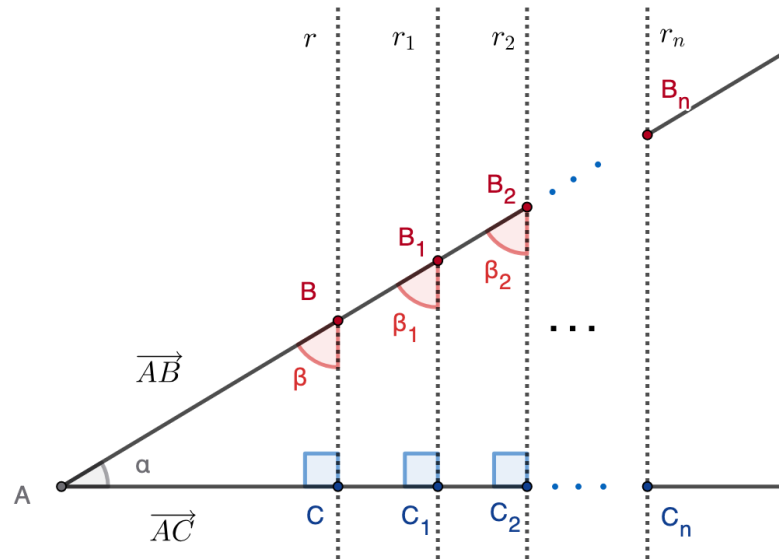
$$\tan \theta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta} = \frac{c}{b}$$

As razões trigonométricas não dependem do triângulo retângulo escolhido, mas apenas do ângulo considerado.

De fato, todos os triângulos retângulos que possuem um mesmo ângulo agudo α são semelhantes pelo caso AA, o que garante que as razões entre seus lados correspondentes são constantes.

Tomando duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não coincidentes, com origem em A , e as retas não coincidentes r, r_1 e r_2 , perpendiculares à semirreta $\overrightarrow{AC}$ nos pontos C, C_1 e C_2 e paralelas entre si, formam-se os triângulos ABC, AB_1C_1 e AB_2C_2 , que são semelhantes pelo caso AA, como na Figura 45.

Figura 45 – Triângulos formados por um feixe de retas paralelas e duas semirretas transversais.



Fonte: Elaboração própria.

$$\begin{cases} \alpha \text{ ângulo comum;} \\ \widehat{ACB} \equiv \widehat{AC_1B_1} \equiv \widehat{AC_2B_2} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{AA}} \triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2$$

Como os triângulos considerados são semelhantes, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}.$$

Tomando o ângulo α como referência, podemos obter as razões trigonométricas:

Cosseno,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}}$$

Logo,

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}}.$$

Seno,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}}$$

Logo,

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}}.$$

Tangente,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}}$$

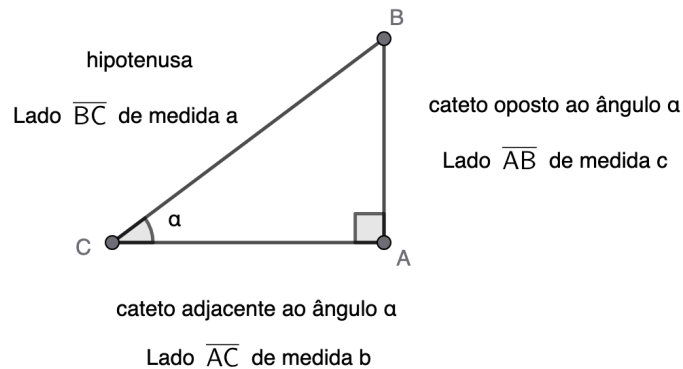
Logo,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}.$$

A **relação fundamental da trigonometria** pode ser obtida a partir do **Teorema de Pitágoras**. Sendo a , b e c os lados de um triângulo retângulo, com hipotenusa de medida a , e α o ângulo agudo formado pela hipotenusa e o cateto b , temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Figura 46 – Identificação dos lados de um triângulo retângulo em relação ao ângulo α .



Fonte: Elaboração própria.

Dividindo a igualdade por a^2 , obtemos:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{a}{a}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

Substituindo $\frac{b}{a}$ por $\cos \alpha$ e $\frac{c}{a}$ por $\sin \alpha$, temos:

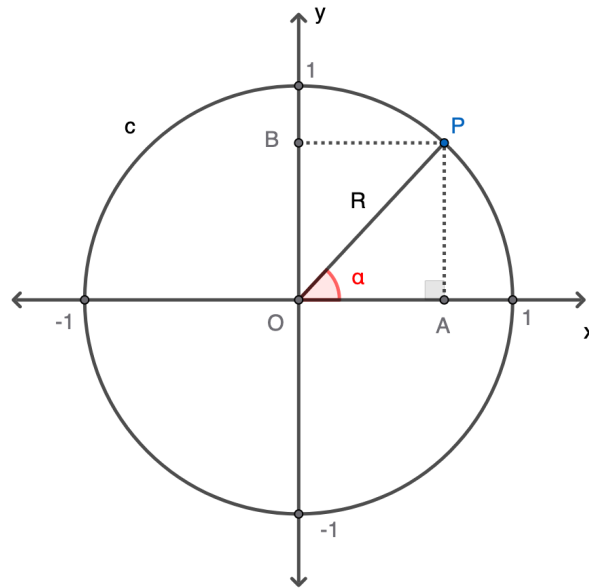
$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

4.8.1 Interpretação das razões trigonométricas no ciclo trigonométrico

Embora as razões trigonométricas tenham sido inicialmente definidas a partir das relações entre os lados de um triângulo retângulo, é possível interpretá-las geometricamente de forma mais ampla por meio do ciclo trigonométrico.

Considere uma circunferência de raio unitário, centrada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Essa circunferência é denominada *circunferência trigonométrica* ou *ciclo trigonométrico*. Seja P um ponto da circunferência, determinado por um ângulo α , medido a partir do eixo horizontal positivo, no sentido anti-horário.

Figura 47 – Ciclo trigonométrico e interpretação geométrica das razões seno, cosseno e tangente.



Fonte: Elaboração própria.

Observando a Figura 47, considere o triângulo $\triangle AOP$, retângulo em A .

Nesse triângulo, o segmento $\overline{OP}$ corresponde ao raio da circunferência trigonométrica, logo,

$$\overline{OP} = R = 1.$$

Assim, podemos interpretar as razões trigonométricas do ângulo α em termos dos comprimentos dos segmentos envolvidos.

De fato, temos:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}.$$

Como $\overline{OP} = 1$, segue que:

$$\cos \alpha = \overline{OA}.$$

De maneira análoga, para o seno, temos:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}.$$

Como $\overline{OP} = 1$, obtemos:

$$\sin \alpha = \overline{AP}.$$

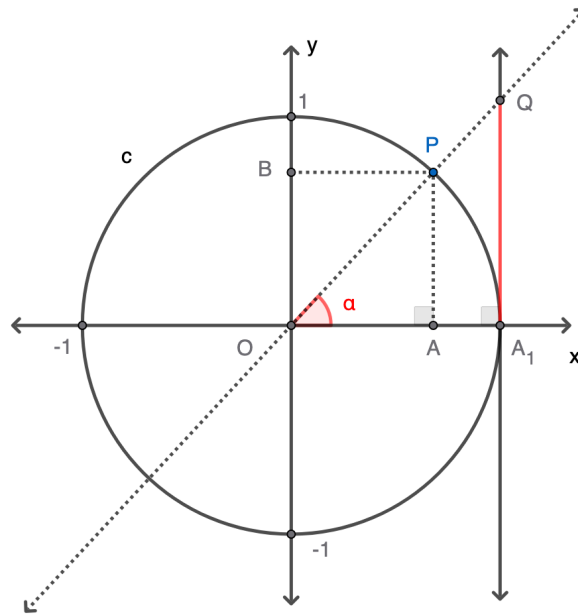
Dessa forma, o cosseno de α corresponde à projeção do ponto P sobre o eixo horizontal, enquanto o seno corresponde à sua projeção sobre o eixo vertical.

Observando a Figura 48, consideremos a reta tangente à circunferência trigonométrica no ponto $A_1 = (1, 0)$, isto é, a reta vertical de equação $x = 1$.

Seja Q o ponto de interseção entre essa reta e a semirreta de origem em O que forma um ângulo α com o eixo horizontal positivo, no sentido anti-horário.

Dessa forma, o ponto Q pertence simultaneamente à reta tangente e à semirreta $\overrightarrow{OP}$, sendo, portanto, um prolongamento do segmento $\overline{OP}$.

Figura 48 – Interpretação geométrica da tangente no ciclo trigonométrico.



Fonte: Elaboração própria.

Conclui-se que a tangente do ângulo α é igual à medida do segmento $\overline{A_1Q}$, isto é,

$$\tan \alpha = \overline{A_1Q}.$$

4.8.2 Relação entre seno, cosseno e tangente

Consideremos os triângulos $\triangle AOP$ e $\triangle A_1OQ$.

Observa-se que os triângulos $\triangle AOP$ e $\triangle A_1OQ$ são semelhantes, pois possuem um ângulo comum em O e ambos são retângulos, sendo o triângulo $\triangle AOP$ retângulo em A e o triângulo $\triangle A_1OQ$ retângulo em A_1 .

Assim, pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A_1Q}}{\overline{A_1O}}.$$

Como $\overline{A_1O} = 1$, segue que:

$$\overline{A_1Q} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}.$$

Logo,

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}.$$

Como anteriormente obtivemos que $\sin \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}$ e $\cos \alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}$, concluímos que:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{com } \cos \alpha \neq 0.$$

4.9 Área de Figuras Planas

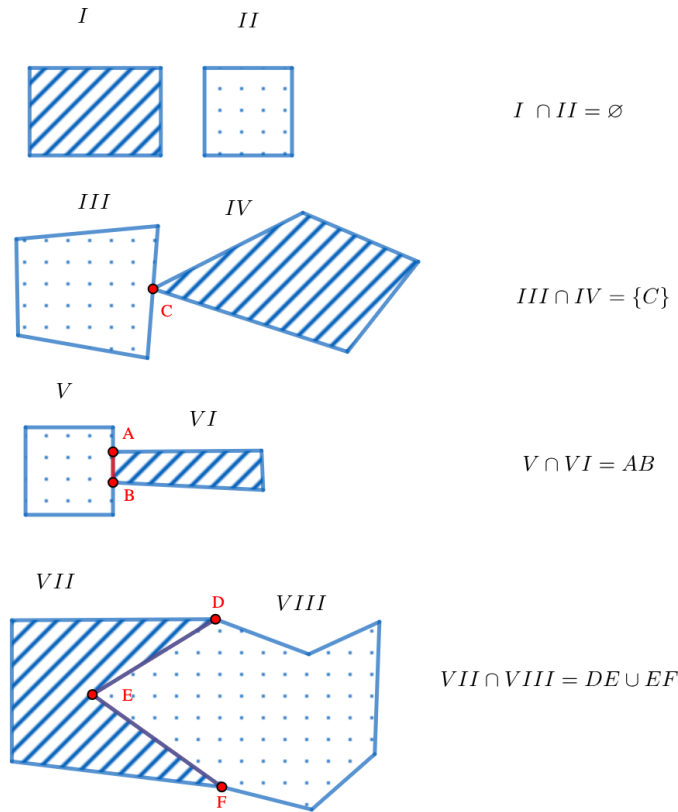
O conceito de área é uma das noções fundamentais da Geometria Plana. Em termos gerais, a área de uma figura plana pode ser entendida como a medida da extensão de superfície que essa figura ocupa ou a região delimitada por uma figura plana.

A área é tratada como uma **grandeza de medida** que associamos um valor real positivo a cada figura plana, que atende a certas condições.

Antes de enunciar os axiomas da área, é importante esclarecer alguns conceitos fundamentais que serão utilizados, em especial as noções de regiões sobrepostas e de região degenerada.

Duas regiões planas são ditas **não sobrepostas** quando não possuem pontos interiores em comum. Nessa situação, a interseção entre as regiões é vazia ou composta apenas por pontos de fronteira.

Figura 49 – Exemplos de regiões não sobrepostas.



Fonte: Elaboração própria.

A Figura 49 ilustra diferentes situações de regiões não sobrepostas.

Nos casos I e II, as regiões são disjuntas, isto é, não possuem nenhum ponto em comum, de modo que

$$I \cap II = \emptyset.$$

Nos casos III e IV, as regiões possuem apenas um ponto em comum, pertencente à fronteira, o ponto C , isto é,

$$III \cap IV = \{C\}.$$

Nos casos V e VI, as regiões compartilham apenas um segmento de reta de fronteira, dado por $\overline{AB}$, isto é,

$$V \cap VI = AB.$$

Por fim, nos casos VII e VIII, as regiões possuem em comum apenas segmentos de suas fronteiras, dados por $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$, isto é,

$$VII \cap VIII = DE \cup EF.$$

Em todos esses casos, embora exista interseção entre as regiões, ela não contém pontos interiores, o que caracteriza regiões não sobrepostas.

Duas regiões planas são ditas **sobrepostas** quando possuem pontos interiores em comum, isto é, quando existe uma região do plano que pertence simultaneamente a ambas.

A Figura 50 ilustra uma situação de sobreposição entre duas regiões.

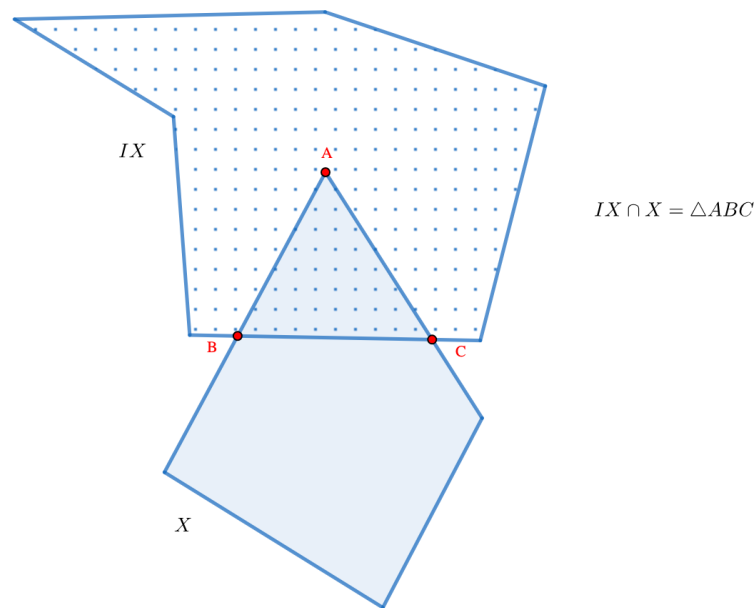
Nesse caso, as regiões IX e X possuem uma região triangular em comum, determinada pelos pontos A , B e C , de modo que

$$IX \cap X = \triangle ABC.$$

Observa-se que, diferentemente dos casos anteriores, a interseção entre as regiões não se limita à fronteira, mas contém uma região com área positiva.

Essa situação caracteriza a sobreposição de regiões, sendo fundamental distingui-la dos casos em que a interseção ocorre apenas em pontos ou segmentos de reta.

Figura 50 – Exemplo de regiões sobrepostas.



Fonte: Elaboração própria.

Uma **região degenerada** é aquela cuja área é nula, isto é, que não possui extensão bidimensional.

Em particular, conjuntos formados apenas por pontos ou segmentos de reta podem ser considerados degenerados, dizemos que tem área zero.

Essa situação pode ser observada na Figura 49. Nos casos em que a interseção entre duas regiões ocorre apenas em um ponto ou em um segmento de reta, como nos casos III, IV, V e VI, tem-se que essa interseção não possui área positiva, sendo, portanto, um conjunto degenerado.

Por exemplo, quando

$$III \cap IV = \{C\},$$

a interseção consiste apenas em um ponto, cuja área é nula.

De maneira análoga, quando

$$V \cap VI = AB,$$

a interseção é um segmento de reta, que também possui área nula.

Assim, embora tais interseções existam, elas não formam regiões planas com área positiva, sendo classificadas como degeneradas.

Dado uma figura F , a área de F é um número real positivo, indicado por $A(F)$ que satisfaz os seguintes axiomas.

Axioma 1 (Positividade da Área). A toda região delimitada por uma figura plana, corresponde um número maior do que zero. O número a que se refere este axioma é chamado de **área da região**.

$$A(F) > 0$$

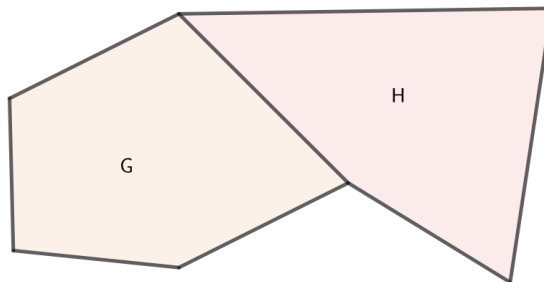
Esse axioma garante que a medida de área é sempre positiva para qualquer região poligonal não degenerada, estabelecendo a base conceitual para a definição de área como uma grandeza mensurável associada a uma figura plana.

Axioma 2 (Aditividade da Área). Se uma figura F é decomposta em duas partes G e H , sem sobreposição, então:

$$A(F) = A(G) + A(H)$$

Figura 51 – Soma das áreas de duas regiões planas:

$$A(F) = A(G) + A(H).$$



Fonte: Elaboração própria.

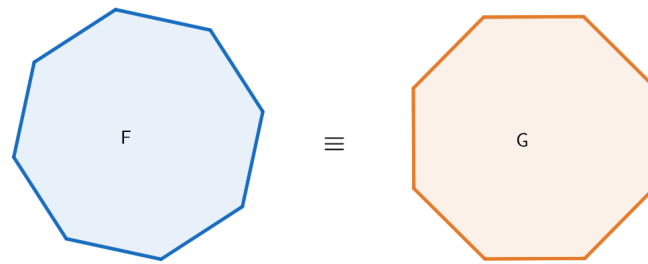
Esse princípio expressa a **aditividade da medida de área**, isto é, a área total de uma figura é igual à soma das áreas de suas partes, desde que não haja sobreposição entre

elas. Trata-se de um dos fundamentos da teoria das áreas, estabelecendo uma propriedade essencial para o cálculo de áreas de regiões compostas.

Axioma 3 (Congruência das Áreas). Se duas figuras planas F e G são congruentes, então:

$$A(F) = A(G)$$

Figura 52 – Polígonos congruentes tem áreas equivalentes.

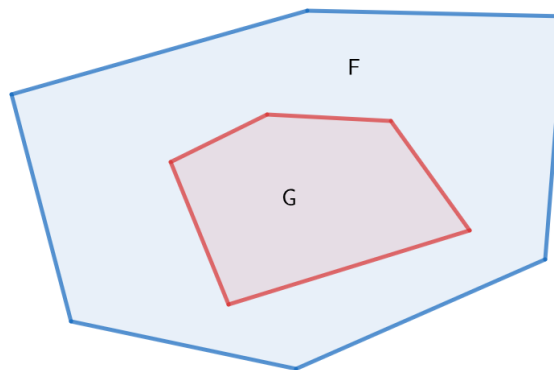


Fonte: Elaboração própria.

Esse axioma estabelece que figuras congruentes possuem a **mesma área**, uma vez que a congruência implica coincidência exata de forma e dimensões. Assim, qualquer deslocamento rígido (translação, rotação ou reflexão) não altera a medida da área da figura.

Corolário 1 (Monotonicidade da Área). Se uma região está contida em outra, então sua área é menor ou igual à área da outra.

Figura 53 – Se $G \subset F$, então $A(G) \leq A(F)$.



Fonte: Elaboração própria, com base em Lima (2006).

Demonstração do Corolário 1.

Sejam G e F regiões planas tais que

$$G \subset F.$$

Conforme ilustrado na Figura 53, a região F pode ser decomposta na união da região G com a parte restante de F , isto é,

$$F = G \cup (F \setminus G).$$

Além disso, essa união é disjunta. Assim, pela propriedade da aditividade da área, temos:

$$A(F) = A(G) + A(F \setminus G).$$

Como a área de uma região plana é sempre não negativa, segue que

$$A(F \setminus G) \geq 0.$$

Portanto,

$$A(F) \geq A(G).$$

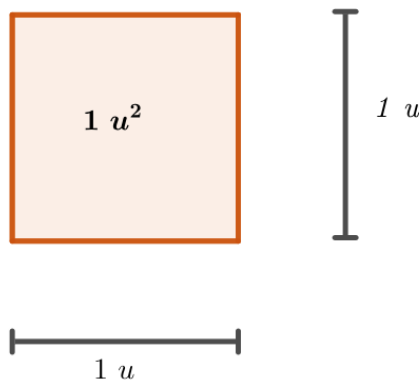
Logo,

$$A(G) \leq A(F).$$

□

Definição 4.9.1. O quadrado é um quadrilátero de lados congruentes e ângulos internos retos e a área do quadrado de lado unitário é definida como $1u^2$.

Figura 54 – Quadrado de lado $1u$ e área $1u^2$.

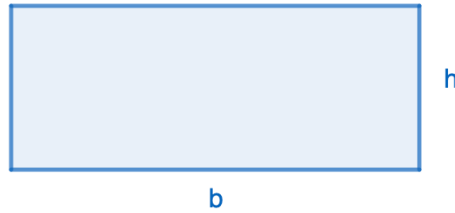


Fonte: Elaboração própria.

Essa definição estabelece a **unidade padrão de medida de área**, denominada *unidade de área* (u^2). Qualquer outra área será comparada a essa unidade, servindo de base para todas as medições de superfícies planas.

Teorema 12 (Área do Retângulo). A área de um retângulo de base b e altura h é dada por

$$A = b \cdot h. \quad (4.2)$$

Figura 55 – Retângulo de base b e altura h .

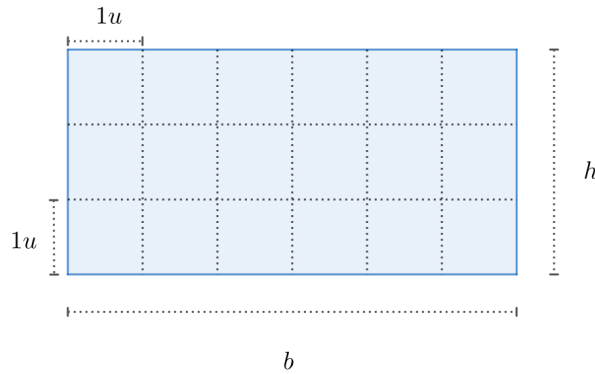
Fonte: Elaboração própria.

Demonstração do Teorema 12. Vamos dividir em casos 4 casos, indicaremos por $A(b, h)$ a área de um retângulo de base b e altura h .

Caso 1: $b \in \mathbb{N}$ e $h \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, considere um retângulo cuja base b e altura h sejam números naturais positivos.

Tomando como unidade de área o quadrado de lado $1u$, traçamos retas paralelas à base e à altura do retângulo, distanciadas de $1u$ entre si, subdividindo a base em b segmentos unitários e a altura em h segmentos unitários, conforme ilustrado na Figura 56.

Figura 56 – Retângulo de base b e altura h subdividido em unidades de comprimento $1u$.

Fonte: Elaboração própria (2025).

Desse modo, o retângulo fica decomposto em pequenos quadrados unitários congruentes.

Cada quadrado unitário possui lados medindo $1u$. Portanto, sua área é dada por

$$A(1, 1) = 1u \cdot 1u = 1u^2.$$

Como existem $b \cdot h$ desses quadrados formando o retângulo original, pela aditividade da área, segue que

$$A(b, h) = b \cdot h.$$

Portanto, quando a base e a altura são números naturais positivos, a área do retângulo é dada por

$$A = b \cdot h.$$

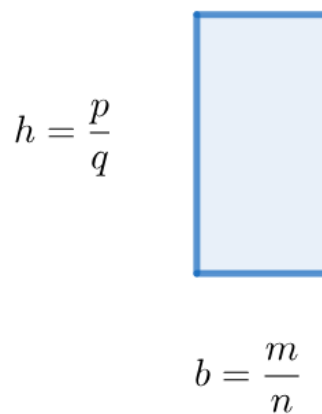
Caso 2: b racional e h racional.

Considere um retângulo cuja base b e altura h sejam números racionais positivos.

Existem números naturais m , n , p e q , com $n, q \neq 0$, tais que

$$b = \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad h = \frac{p}{q}.$$

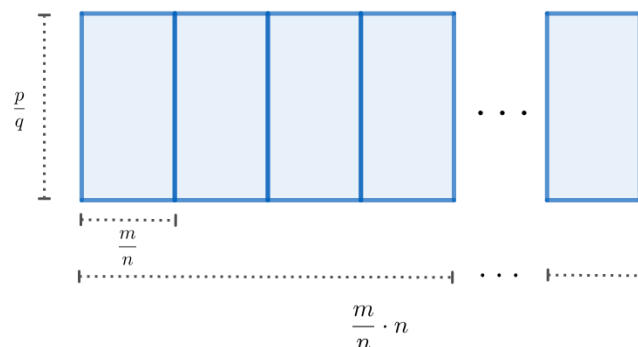
Figura 57 – Retângulo de dimensões racionais.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Agora, consideremos a justaposição horizontal de n retângulos congruentes ao retângulo original, conforme ilustrado na Figura 58.

Figura 58 – Justaposição horizontal de n retângulos congruentes.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Como cada retângulo possui base $\frac{m}{n}$, obtemos um novo retângulo cuja base mede

$$n \cdot \frac{m}{n} = m$$

e cuja altura permanece igual a

$$\frac{p}{q}.$$

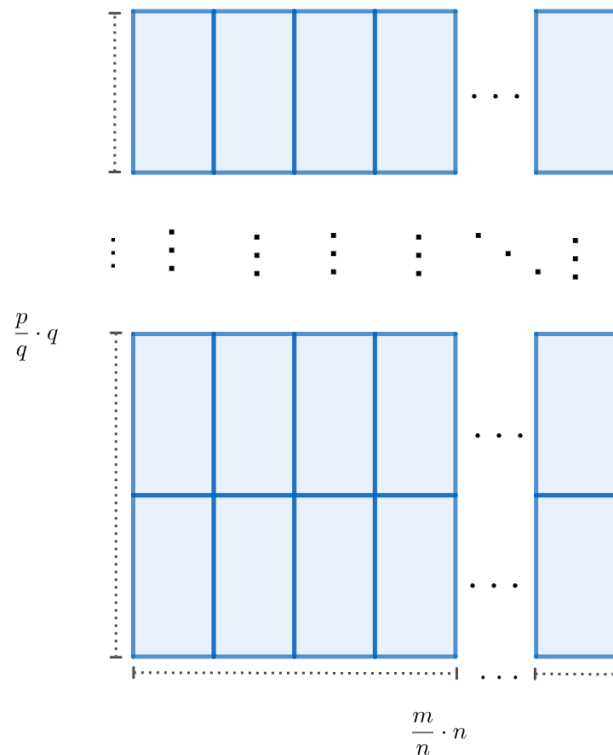
Em seguida, realizamos a justaposição vertical de q retângulos congruentes ao retângulo obtido anteriormente.

Como cada um possui altura $\frac{p}{q}$, obtemos um novo retângulo cuja altura mede

$$q \cdot \frac{p}{q} = p.$$

Portanto, obtemos um retângulo de base m e altura p , ambas naturais, conforme ilustrado na Figura 59.

Figura 59 – Expansão do retângulo racional em um retângulo de dimensões naturais.



Fonte: Elaboração própria (2025).

Pelo Caso 1, a área desse novo retângulo é dada por

$$A(m, p) = m \cdot p.$$

Como esse retângulo foi formado pela justaposição de $n \cdot q$ retângulos congruentes ao retângulo original, segue, pela aditividade da área, que

$$nq \cdot A\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) = m \cdot p.$$

Logo,

$$A\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}.$$

Portanto,

$$A\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}.$$

Assim,

$$A(b, h) = b \cdot h.$$

Caso 3: $b \in \mathbb{R}_+$ e $h = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$.

Considere um retângulo de altura fixa $h = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ e base variável $b \in \mathbb{R}_+$.

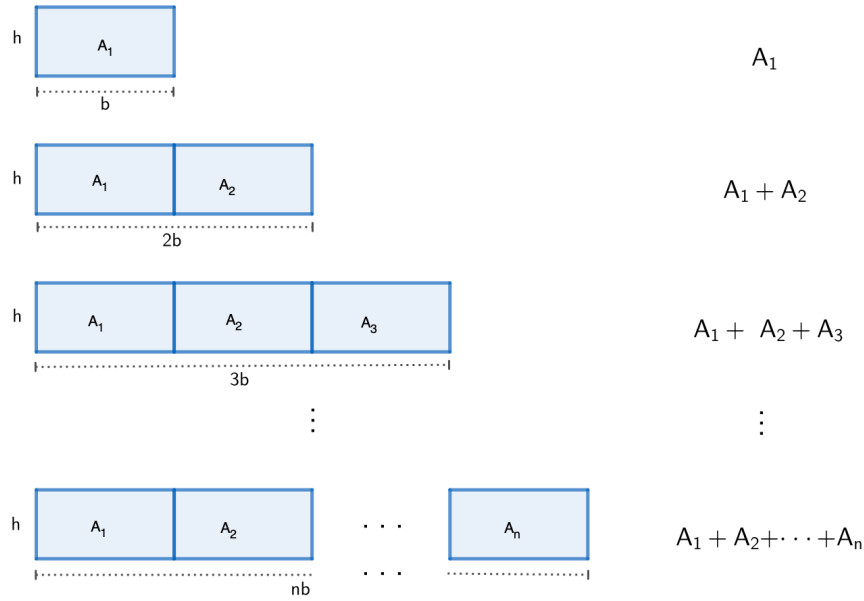
Indicaremos por $A(b, h)$ a área do retângulo de base b e altura h .

Pelo Caso 2, sabemos que a área de um retângulo de base racional positiva e altura racional positiva é dada por

$$A = b \cdot h.$$

Agora, consideremos sucessivas justaposições horizontais de retângulos congruentes de base b e altura h , conforme ilustrado na Figura 60.

Figura 60 – Construção de retângulos de bases $b, 2b, 3b, \dots, nb$, evidenciando a proporcionalidade entre a base e a área.



Fonte: Elaboração própria.

Cada novo retângulo é obtido pela justaposição horizontal de mais um retângulo congruente ao primeiro.

Assim:

$$\begin{aligned}
 A(2b, h) &= A_1 + A_2 = 2A_1 \\
 A(3b, h) &= A_1 + A_2 + A_3 = 3A_1 \\
 &\vdots \\
 A(nb, h) &= A_1 + A_2 + \dots + A_n = nA_1
 \end{aligned}$$

Como todos os retângulos são congruentes, temos

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = A(b, h).$$

Logo,

$$A(nb, h) = nA(b, h),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, se $b_1 < b_2$, então o retângulo de base b_1 e altura h fica contido no retângulo de base b_2 e mesma altura h . Pelo [Corolário 1](#) (Monotonicidade da Área), segue que

$$A(b_1, h) \leq A(b_2, h)$$

Como os retângulos não coincidem, a região excedente possui área positiva. Logo,

$$A(b_1, h) < A(b_2, h)$$

Portanto, a função $A(b, h)$ é crescente em relação à base b .

Como $A(b, h)$ é crescente em relação à base b e satisfaz

$$A(nx, h) = nA(x, h)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}_+$, segue, pela [Definição 4.3.5](#), que $A(b, h)$ é uma proporcionalidade direta em relação à base b .

Assim, pelo [Teorema Fundamental da Proporcionalidade](#), existe uma constante de proporcionalidade λ tal que

$$\frac{A(b, h)}{b} = \lambda, \quad b \in \mathbb{R}_+.$$

Equivalentemente,

$$A(b, h) = \lambda b.$$

Para determinar essa constante, tomemos $b = 1$. Nesse caso, o retângulo possui base 1 e altura h .

Como 1 e $h = \frac{p}{q}$ são números racionais positivos, pelo Caso 2, temos:

$$A(1, h) = 1 \cdot h = h$$

Mas,

$$A(1, h) = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

Logo,

$$\lambda = h.$$

Substituindo em $A(b, h) = \lambda b$, obtemos:

$$A(b, h) = hb.$$

Portanto, para toda base real positiva b e altura racional positiva h , a área do retângulo é dada por

$$A = b \cdot h.$$

Caso 4: $b \in \mathbb{R}_+$ e $h \in \mathbb{R}_+$

Considere um retângulo de base fixa b , com $b \in \mathbb{R}_+$, e altura variável $h \in \mathbb{R}_+$.

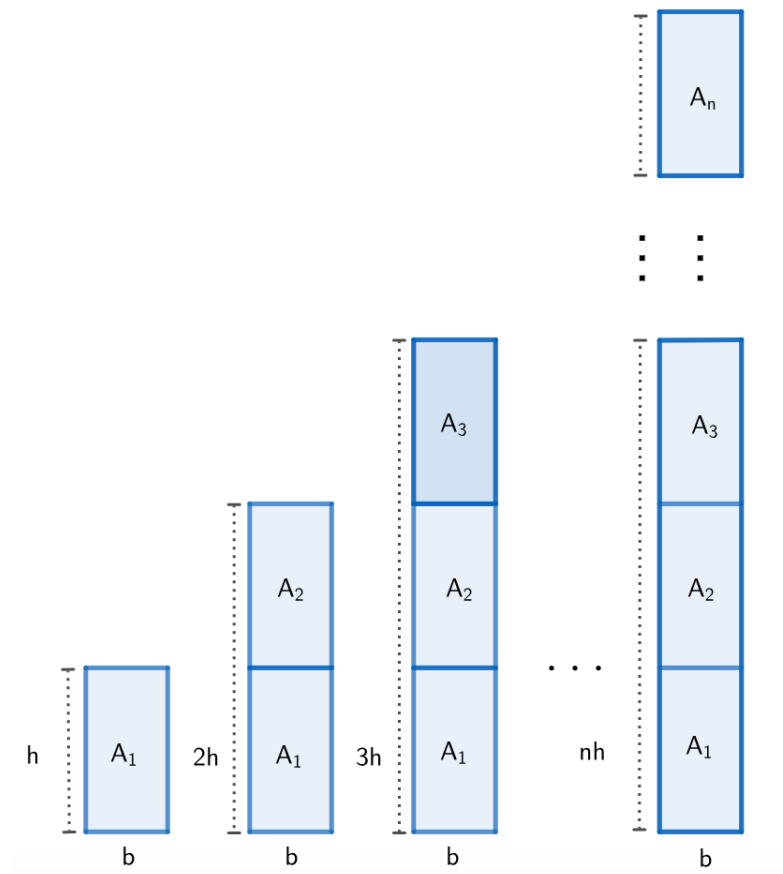
Indicaremos por $A(b, h)$ a área do retângulo de base b e altura h .

Pelo Caso 2, sabemos que a área de um retângulo de base real positiva e altura racional positiva é dada por

$$A = b \cdot h.$$

Agora, consideremos sucessivas justaposições verticais de retângulos congruentes de base b e altura h , conforme ilustrado na Figura 61.

Figura 61 – Construção de retângulos de alturas $h, 2h, 3h, \dots, nh$, evidenciando a proporcionalidade entre a altura e a área.



Fonte: Elaboração própria.

Cada novo retângulo é obtido pela justaposição vertical de mais um retângulo congruente ao primeiro.

Assim:

$$\begin{aligned} A(b, 2h) &= A_1 + A_2 = 2A_1, \\ A(b, 3h) &= A_1 + A_2 + A_3 = 3A_1 \\ &\vdots \\ A(b, nh) &= A_1 + A_2 + \cdots + A_n = nA_1 \end{aligned}$$

Como todos os retângulos são congruentes, temos

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A(b, h)$$

Logo,

$$A(b, nh) = nA(b, h)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, se $h_1 < h_2$, então o retângulo de altura h_1 e base b fica contido no retângulo de altura h_2 e mesma base b . Pelo [Corolário 1](#) (Monotonicidade da Área), segue que

$$A(b, h_1) \leq A(b, h_2)$$

Como os retângulos não coincidem, a região excedente possui área positiva. Logo,

$$A(b, h_1) < A(b, h_2)$$

Portanto, a função $A(b, h)$ é crescente em relação à altura h .

Como A é crescente e satisfaz

$$A(b, ny) = nA(b, y)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $y \in \mathbb{R}_+$, segue, pela [Definição 4.3.5](#), que $A(b, h)$ é uma proporcionalidade direta em relação à altura h .

Assim, pelo [Teorema Fundamental da Proporcionalidade](#), existe uma constante de proporcionalidade λ tal que

$$\frac{A(b, h)}{h} = \lambda, \quad h \in \mathbb{R}_+.$$

Equivalentemente,

$$A(b, h) = \lambda h.$$

Para determinar essa constante, tomemos $h = 1$. Nesse caso, o retângulo possui altura 1 e base b .

Como 1 é racional positivo e $b \in \mathbb{R}_+$, pelo Caso 2, temos:

$$A(b, 1) = b \cdot 1 = b$$

Mas,

$$A(b, 1) = \lambda \cdot 1 = \lambda.$$

Logo,

$$\lambda = b.$$

Substituindo em $A(h) = \lambda h$, obtemos:

$$A(b, h) = bh.$$

Portanto, para toda base real positiva b e altura real positiva h , a área do retângulo é dada por

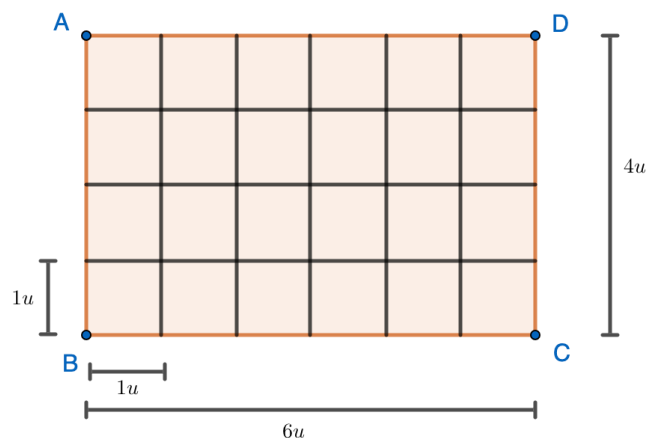
$$A = b \cdot h.$$

□

Exemplo do Teorema 12. Qual é a área de um retângulo de base $6u$ e altura $4u$?

Traçando retas paralelas à base e à altura, podemos decompor o retângulo em 24 quadrados unitários.

Figura 62 – Demonstração da área do retângulo de base $6u$ e altura $4u$.



Fonte: Elaboração própria.

Exemplo do Teorema 12.

Qual é a área de um retângulo de base $\sqrt{2}u$ e altura πu ?

Pelo Teorema 12, a área do retângulo é dada pelo produto da base pela altura. Assim,

$$A = \sqrt{2} \cdot \pi.$$

Logo,

$$A = \pi\sqrt{2}u^2.$$

Teorema 13 (Área do quadrado). A área de um quadrado de lado l é dada por:

$$A = l^2 \tag{4.3}$$

Demonstração do Teorema 13. Um quadrado é um caso particular de retângulo cujos lados têm a mesma medida, isto é, base l e altura l .

Pelo Teorema 12, segue que

$$A = l \cdot l = l^2.$$

□

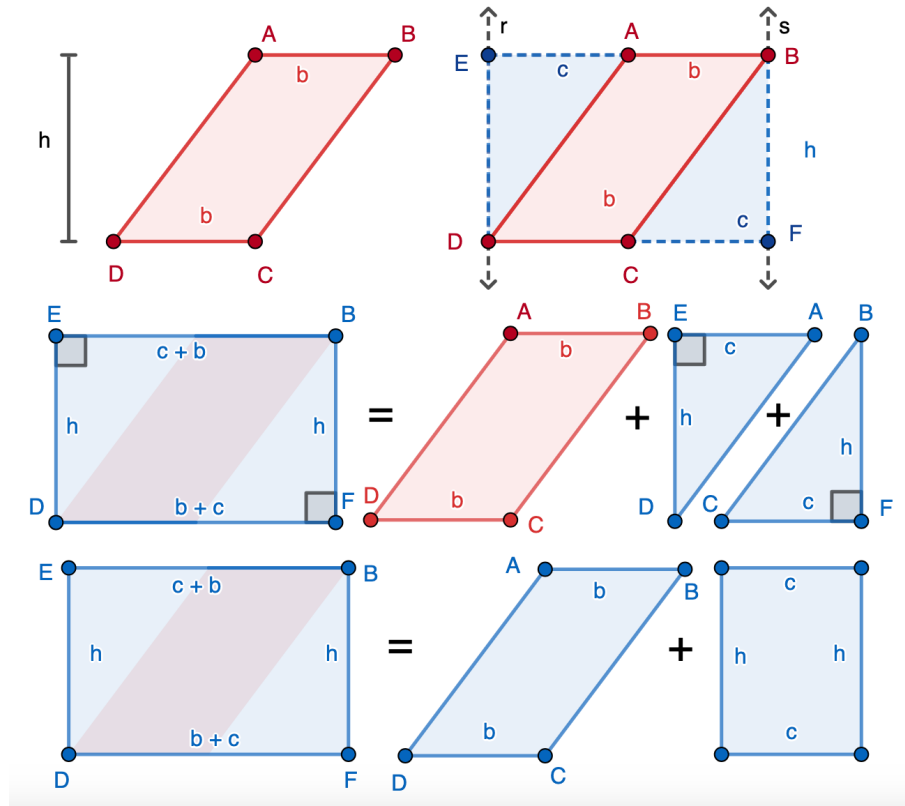
Teorema 14 (Área do Paralelogramo). A área de um paralelogramo é dada por

$$A = b \cdot h,$$

onde b é a base e h a altura relativa.

Demonstração do Teorema 14. Traçando duas retas r e s perpendiculares à base $\overline{DC}$, sendo a reta r passante pelo ponto D e a reta s pelo ponto C , e prolongando o segmento $\overline{BA}$ até encontrar r , bem como o prolongamento de $\overline{DC}$ até encontrar s , obtemos um retângulo de base $(b + c)$ e altura h , como mostra a Figura 63.

Figura 63 – Demonstração da área do paralelogramo por decomposição em um retângulo de base $(b + c)$ e altura h .



Fonte: Desenho original elaborado pelo Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho em aula (2024).

Observa-se que os triângulos $\triangle DEA$ e $\triangle BFC$ são congruentes (pelo critério LAL), pois:

$$\begin{cases} \overline{ED} = \overline{FB} = h \\ \widehat{DEA} = \widehat{BFC} = 90^\circ \\ \overline{EA} = \overline{FC} = c \end{cases}$$

Logo, da última igualdade da Figura 63.

$$\begin{aligned} A_{\text{retângulo } EBFD} &= A_{\text{paralelogramo}} + A_{\text{retângulo } c \times h} \\ \Rightarrow A_{\text{paralelogramo}} &= A_{\text{retângulo } EBFD} - A_{\text{retângulo } c \times h} \\ \Rightarrow A_{\text{paralelogramo}} &= (b + c) \cdot h - c \cdot h \\ \Rightarrow A_{\text{paralelogramo}} &= b \cdot h + c \cdot h - c \cdot h \\ A_{\text{paralelogramo}} &= b \cdot h \end{aligned}$$

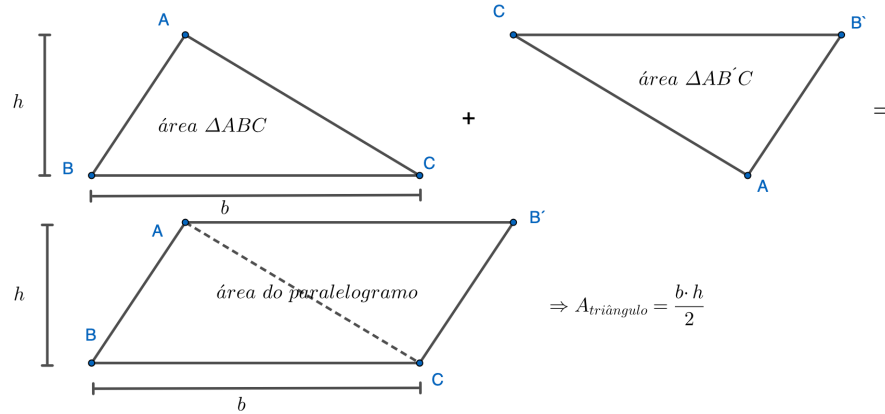
□

Teorema 15 (Área do Triângulo). A área de um triângulo é dada por

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Demonstração do Teorema 15. Considere um paralelogramo formado pela duplicação do triângulo em torno de um lado. Pela fórmula anterior, a área do paralelogramo é $b \cdot h$. Como o triângulo representa metade do paralelogramo, como mostra a Figura 64.

Figura 64 – Demonstração da área do triângulo pela construção de um paralelogramo.



Fonte: Elaboração própria.

□

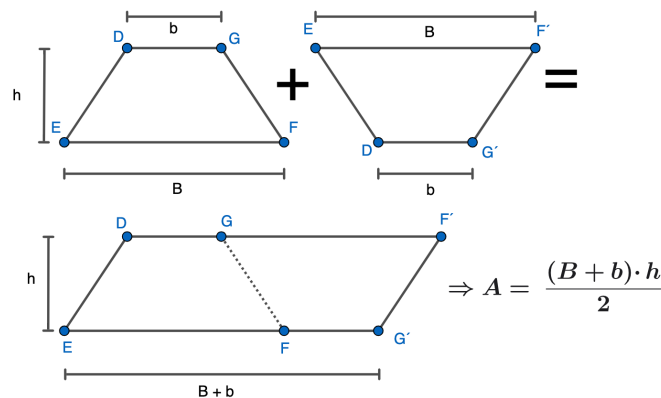
Teorema 16 (Área do Trapézio). A área de um trapézio de bases B e b e altura h é

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}.$$

Demonstração do Teorema 16.

O trapézio pode ser duplicado e rearranjado em um paralelogramo de base $B + b$ e altura h . Portanto, a área do trapézio é a metade da área desse paralelogramo, como mostra a Figura 65.

Figura 65 – Demonstração da área do trapézio pela construção de um paralelogramo.



Fonte: Elaboração própria.

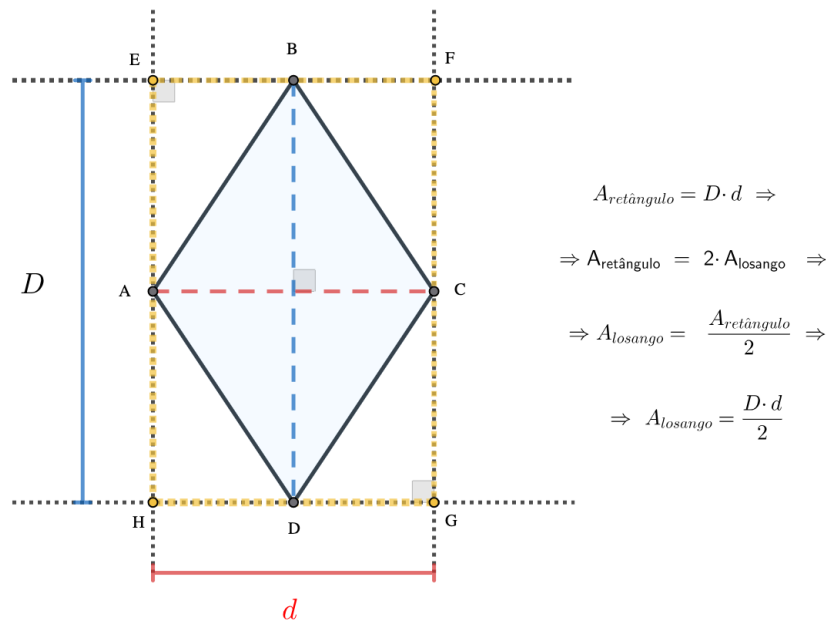
□

Teorema 17 (Área do Losango). A área de um losango é igual à metade do produto de suas diagonais.

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Demonstração do Teorema 17. O losango pode ser inscrito em uma retângulo de lados h e b congruentes as diagonais D e d do losango. Portanto a área do losango é a metade da área desse paralelogramo, como mostra a Figura 66.

Figura 66 – Demonstração da fórmula da área do losango em função de suas diagonais.



Fonte: Elaboração própria.

□

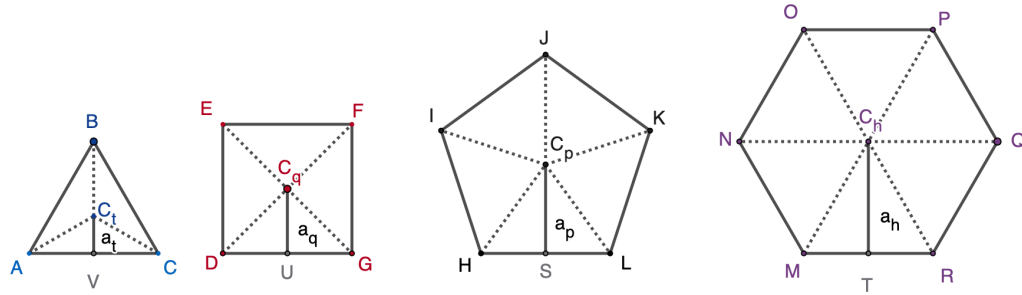
4.9.1 Polígonos Regulares

Para polígonos regulares, precisamos primeiro definir:

Definição 4.9.2. O apótema é a distância do centro de um polígono regular até o ponto médio de um de seus lados.

Definição 4.9.3. Um **polígono inscrito** é um polígono cujos vértices estão todos localizados sobre os pontos de uma circunferência.

Figura 67 – Apótemas de polígonos regulares obtidos por decomposição em triângulos isósceles.



Fonte: Elaboração própria.

Teorema 18 (Área de uma Polígono Regular). Seja P o perímetro de um polígono regular e a o apótema, então sua área é dada por

$$A = \frac{P \cdot a}{2}.$$

Demonstração do Teorema 18. Um polígono regular de lado l pode ser decomposto em n triângulos isósceles congruentes, todos com altura igual ao apótema a .

A área de cada triângulo é dada por

$$A = \frac{l \cdot a}{2},$$

em que l representa a medida do lado do polígono.

Como o polígono é formado por n desses triângulos, sua área total é

$$A = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}.$$

Sabendo que o perímetro do polígono é $P = n \cdot l$, obtemos

$$A = \frac{P \cdot a}{2}.$$

□

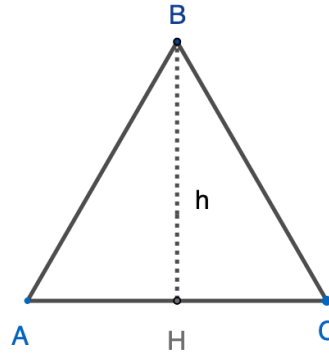
4.9.2 Cálculo da altura de um triângulo equilátero

Para encontrar o valor da altura de um triângulo equilátero $\triangle ABC$, basta aplicar o [Teorema de Pitágoras](#).

Aplicando o **Teorema de Pitágoras** ao triângulo retângulo $\triangle BHC$, temos:

$$(\overline{BC})^2 = \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 + (\overline{BH})^2.$$

Figura 68 – Triângulo equilátero $\triangle ABC$ com altura $\overline{BH} = h$.



Fonte: Elaboração própria.

Substituindo $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC} = l$ e $\overline{BH} = h$, obtemos:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Simplificando:

$$h^2 = \frac{3 \cdot l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Assim, a área do triângulo equilátero é:

$$A_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \left(\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

4.9.3 Área de um triângulo qualquer.

Teorema 19 (Herão). Se $\triangle ABC$ é um triângulo de lados a , b , c e semiperímetro p , então sua área é dada por:

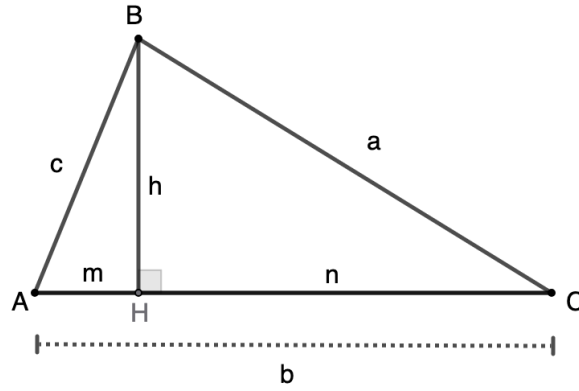
$$A_{\triangle ABC} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)},$$

onde

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Demonstração do Teorema 19. Traçando a altura do $\triangle ABC$ pelo maior lado, conforme representado na Figura 69.

Figura 69 – Triângulo ABC com altura $\overline{BH}$ relativa ao lado de maior comprimento $\overline{AC}$, utilizado na demonstração da Fórmula de Herão.



Fonte: Elaboração própria.

Seja $\triangle ABC$ um triângulo de lados

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{AC} = b, \quad \overline{AB} = c.$$

Considere a altura $\overline{BH} = h$, relativa ao lado $\overline{AC}$, com $H \in \overline{AC}$. Denotemos

$$\overline{AH} = m \quad \text{e} \quad \overline{HC} = n.$$

Assim,

$$b = m + n. \tag{4.4}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos $\triangle ABH$ e $\triangle BCH$, temos:

$$c^2 = h^2 + m^2, \tag{4.5}$$

$$a^2 = h^2 + n^2. \tag{4.6}$$

Subtraindo (4.5) de (4.6), obtemos:

$$a^2 - c^2 = n^2 - m^2.$$

Como $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$ e, por (4.4), $n + m = b$, segue que:

$$a^2 - c^2 = (n - m)b.$$

Logo,

$$n - m = \frac{a^2 - c^2}{b}.$$

Temos, portanto, o sistema:

$$\begin{cases} n + m = b, \\ n - m = \frac{a^2 - c^2}{b}. \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtemos:

$$2n = b + \frac{a^2 - c^2}{b} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{b}.$$

Assim,

$$n = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}.$$

Como $m = b - n$, temos:

$$m = b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} = \frac{2b^2 - a^2 - b^2 + c^2}{2b}.$$

Logo,

$$m = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2b}. \quad (4.7)$$

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\triangle ABH$, temos:

$$c^2 = h^2 + m^2.$$

Portanto,

$$h^2 = c^2 - m^2.$$

Substituindo o valor de m , dado em (4.7), obtemos:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2b} \right)^2.$$

Assim,

$$h^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 - a^2 + c^2)^2}{4b^2}.$$

Escrevendo $4b^2c^2 = (2bc)^2$, temos:

$$h^2 = \frac{(2bc)^2 - (b^2 - a^2 + c^2)^2}{4b^2}.$$

Aplicando a diferença de quadrados, segue que:

$$h^2 = \frac{[2bc - (b^2 - a^2 + c^2)][2bc + (b^2 - a^2 + c^2)]}{4b^2}.$$

Organizando os fatores, obtemos:

$$h^2 = \frac{[a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2]}{4b^2}.$$

Novamente, pela diferença de quadrados:

$$h^2 = \frac{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a + b + c)}{4b^2}.$$

Como o semiperímetro do triângulo é dado por

$$p = \frac{a + b + c}{2},$$

temos:

$$a + b + c = 2p,$$

$$a + b - c = 2(p - c),$$

$$a - b + c = 2(p - b),$$

$$b + c - a = 2(p - a).$$

Substituindo essas expressões, obtemos:

$$h^2 = \frac{2(p - b) \cdot 2(p - c) \cdot 2(p - a) \cdot 2p}{4b^2}.$$

Logo,

$$h^2 = \frac{16p(p - a)(p - b)(p - c)}{4b^2}.$$

Portanto,

$$h^2 = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{b^2}.$$

Como $h > 0$, segue que:

$$h = \frac{2}{b} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

A área do triângulo $\triangle ABC$ é:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Substituindo o valor de h , temos:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{b} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Assim,

$$A_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Portanto, fica demonstrada a Fórmula de Herão:

$$A_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

com

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

□

Observação. A Fórmula de Herão também pode ser utilizada de uma maneira mais prática e operacional.

Dado um triângulo de lados a , b e c , procede-se da seguinte forma:

- soma-se as medidas dos três lados:

$$a+b+c;$$

- multiplica-se esse resultado por:

$$(a+b-c),$$

isto é, pela soma de dois lados subtraída do terceiro;

- multiplica-se ainda por:

$$(a-b+c),$$

isto é, pela soma de dois lados subtraída do outro lado;

- multiplica-se também por:

$$(-a+b+c),$$

isto é, pela soma de dois lados subtraída do primeiro lado;

- extrai-se a raiz quadrada do produto obtido;
- por fim, divide-se o resultado por 4.

Assim, a área do triângulo pode ser calculada diretamente por:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{4}.$$

Exemplo 1 do Teorema 19. Considere agora um triângulo de lados 13, 14 e 15. Pela Fórmula de Herão,

$$A_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{(13+14+15)(13+14-15)(13-14+15)(-13+14+15)}}{4}.$$

Efetuada as operações, obtemos:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{(42)(12)(14)(16)}}{4}.$$

Calculando o produto:

$$42 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 = 112896.$$

Logo,

$$A_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{112896}}{4}.$$

Como

$$\sqrt{112896} = 336,$$

segue que

$$A_{\triangle ABC} = \frac{336}{4}.$$

Portanto,

$$\boxed{A_{\triangle ABC} = 84}.$$

Assim, a área do triângulo de lados 13, 14 e 15 é igual a 84 unidades de área.

Teorema 20 (Área do Círculo).

A área de um círculo de raio r é dada por

$$A = \pi r^2.$$

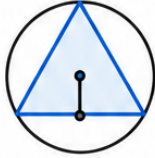
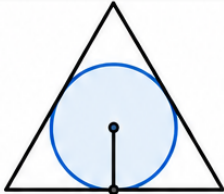
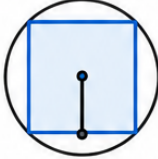
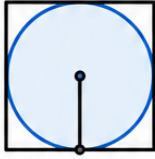
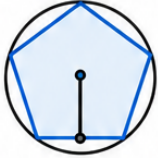
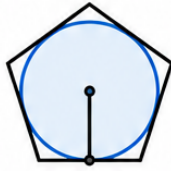
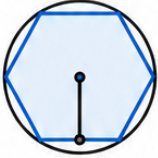
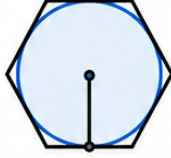
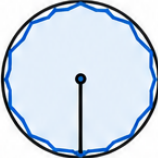
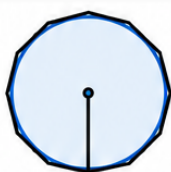
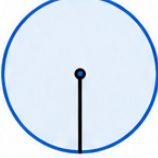
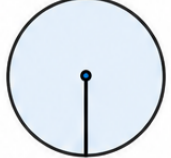
Demonstração do Teorema 20.

Inicialmente, recordemos que o comprimento de uma circunferência de raio r é dado por

$$C = 2\pi r.$$

Considere polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência de raio r , conforme ilustrado na Figura 70.

Figura 70 – Polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência de raio unitário.

n (número de lados)	<i>Inscrito</i>	<i>Circunscrito</i>
3 (triângulo)	$A \simeq 1,3u^2$ $P \simeq 5,20$ 	$A \simeq 5,2u^2$ $P \simeq 10,40$ 
4 (quadrado)	$A = 2u^2$ $P \simeq 5,66$ 	$A = 4u^2$ $P = 8,0$ 
5 (pentágono)	$A \simeq 2,4u^2$ $P \simeq 5,88$ 	$A \simeq 3,6u^2$ $P \simeq 7,27$ 
6 (hexágono)	$A \simeq 2,6u^2$ $P \simeq 6,00$ 	$A \simeq 3,5u^2$ $P \simeq 6,93$ 
⋮	⋮	⋮
n (n lados)	$A \simeq A_n^{(ins)}$ $P \simeq P_n^{(ins)}$ 	$A \simeq A_n^{(circ)}$ $P \simeq P_n^{(circ)}$ 
∞ (tende à circunferência)	$A \rightarrow \pi$ $P \rightarrow 2\pi$ 	$A \rightarrow \pi$ $P \rightarrow 2\pi$ 

A = área P = perímetro u = raio unitário ($u = 1$)

Fonte: Elaboração própria.

Sejam $P_n^{(\text{ins})}$ e $P_n^{(\text{circ})}$ os perímetros dos polígonos regulares inscrito e circunscrito de n lados, respectivamente. Então,

$$P_n^{(\text{ins})} < 2\pi r < P_n^{(\text{circ})}.$$

À medida que o número de lados cresce indefinidamente, os perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos aproximam-se do comprimento da circunferência, isto é,

$$P_n^{(\text{ins})} \longrightarrow 2\pi r \quad \text{e} \quad P_n^{(\text{circ})} \longrightarrow 2\pi r.$$

De modo análogo, a área do círculo pode ser compreendida como o limite das áreas dos polígonos regulares inscritos.

Considere um polígono regular inscrito de n lados. Esse polígono pode ser decomposto em n triângulos isósceles congruentes, todos com vértice no centro da circunferência.

Se b_n representa a medida da base de cada triângulo e a_n a medida da altura correspondente, então a área do polígono inscrito é dada por

$$A_n = n \cdot \frac{b_n a_n}{2}.$$

Como o perímetro do polígono é

$$P_n = n b_n,$$

segue que

$$A_n = \frac{P_n a_n}{2}.$$

Quando o número de lados aumenta indefinidamente, o perímetro P_n tende ao comprimento da circunferência e a altura a_n tende ao raio r . Assim,

$$P_n \longrightarrow 2\pi r \quad \text{e} \quad a_n \longrightarrow r.$$

Portanto,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n a_n}{2} = \frac{(2\pi r) \cdot r}{2}.$$

Logo,

$$A = \pi r^2.$$

Essa interpretação geométrica pode ser visualizada pelo método de exaustão apresentado na Figura 70, em que os polígonos regulares inscritos e circunscritos aproximam-se progressivamente da circunferência à medida que o número de lados aumenta.

□

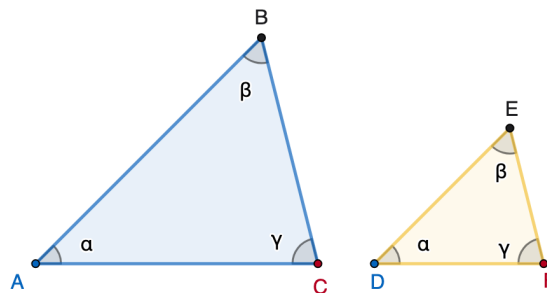
4.10 A Relação entre Semelhança e Áreas

A semelhança de figuras é um dos conceitos mais importantes da geometria, pois estabelece a ideia de preservação de forma, mesmo quando há alteração de tamanho. Segundo Lima (2011), em sua obra *Medida e Forma em Geometria*, a noção de semelhança está profundamente relacionada ao princípio da proporcionalidade, uma vez que figuras semelhantes apresentam lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes. De modo complementar, Neto (2012), em *Geometria*, destaca que esse conceito constitui um dos fundamentos essenciais para compreender as relações existentes entre medidas lineares, de área e de volume nas figuras geométricas.

Quando dois triângulos são semelhantes, existe uma razão de proporcionalidade k entre seus lados correspondentes. Essa razão, chamada **razão de semelhança**, estabelece não apenas a relação entre comprimentos, mas também entre áreas. Ou seja, se os lados de um triângulo são ampliados ou reduzidos segundo um mesmo fator k , sua área não cresce ou diminui na mesma proporção, mas sim segundo o **quadrado dessa razão**.

Teorema 21 (Razão entre Áreas de Triângulos Semelhantes). Se dois triângulos são semelhantes, então a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança entre seus lados correspondentes.

Figura 71 – Triângulos semelhantes com ângulos correspondentes α, β, γ , evidenciando a proporcionalidade entre seus lados e a relação entre suas áreas.



Fonte: Elaboração própria.

Demonstração do Teorema 21.

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos semelhantes, com razão de semelhança k . Assim, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k.$$

Tomando os lados $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ como bases, segue que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k,$$

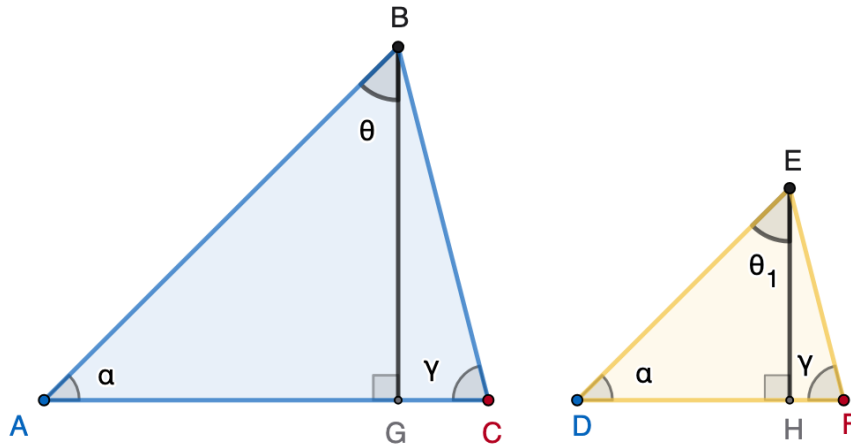
ou seja,

$$\overline{AC} = k \cdot \overline{DF}.$$

Trace as alturas relativas a essas bases, isto é, os segmentos $\overline{BG}$ e $\overline{EH}$, com $G \in \overline{AC}$ e $H \in \overline{DF}$, tais que:

$$\overline{BG} \perp \overline{AC} \quad \text{e} \quad \overline{EH} \perp \overline{DF}.$$

Figura 72 – Triângulos semelhantes com alturas relativas às bases correspondentes.



Fonte: Elaboração própria.

Considere os triângulos retângulos $\triangle ABG$ e $\triangle DEH$. Como $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, temos:

$$\hat{A}BG = \hat{D}EH.$$

Além disso,

$$\hat{A}GB = \hat{D}HE = 90^\circ.$$

Logo, pelo critério AA, concluímos que:

$$\triangle ABG \sim \triangle DEH.$$

Portanto, seus lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = k.$$

Assim,

$$\overline{BG} = k \cdot \overline{EH}.$$

Como $\overline{BG}$ e $\overline{EH}$ representam as alturas relativas às bases $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$, respectivamente, conclui-se que as alturas também estão na razão de semelhança k .

A área de um triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (\text{base}) \cdot (\text{altura}).$$

Logo:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BG}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{DF} \cdot \overline{EH}}.$$

Substituindo

$$\overline{AC} = k \cdot \overline{DF} \quad \text{e} \quad \overline{BG} = k \cdot \overline{EH},$$

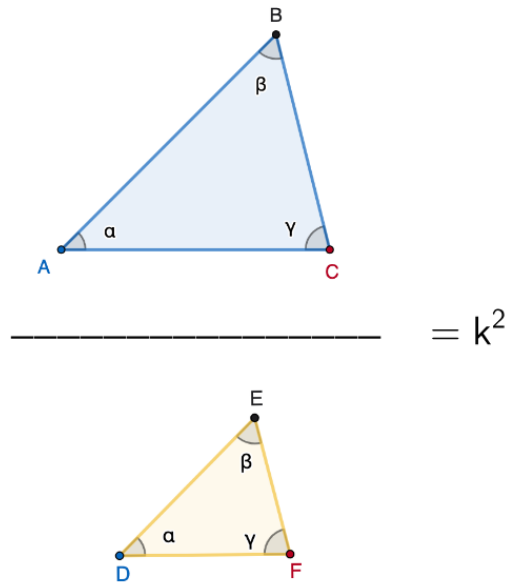
obtemos:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = \frac{(k \cdot \overline{DF})(k \cdot \overline{EH})}{\overline{DF} \cdot \overline{EH}} = k^2.$$

Portanto:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = k^2.$$

Figura 73 – Razão entre as áreas de triângulos semelhantes em função do quadrado da razão de semelhança.



Fonte: Elaboração própria.

□

Definição 4.10.1. (Polígonos Semelhantes). Dois polígonos são semelhantes quando possuem o mesmo número de lados, ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

Em outras palavras, dados dois polígonos

$$A_1A_2A_3 \dots A_n \quad \text{e} \quad B_1B_2B_3 \dots B_n,$$

dizemos que são semelhantes quando:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1, \hat{A}_2 = \hat{B}_2, \dots, \hat{A}_n = \hat{B}_n,$$

e existe uma constante positiva k , denominada razão de semelhança, tal que:

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = \dots = \frac{\overline{A_nA_1}}{\overline{B_nB_1}} = k.$$

Teorema 22 (Razão de Polígonos Semelhantes). Dois polígonos semelhantes têm áreas proporcionais ao quadrado da razão de semelhança de seus lados correspondentes.

Demonstração do Teorema 22. Divide-se cada polígono em triângulos a partir de um vértice comum. Como cada triângulo decomposto em um polígono corresponde a um triângulo semelhante no outro polígono, pelo Teorema 21 cada par de triângulos terá áreas em razão k^2 . Somando-se as áreas correspondentes, conclui-se que a razão entre as áreas totais dos polígonos também é k^2 . $\square$

5 Sequência Didática para o Ensino de Escala, Razão, Proporção, Semelhança e Grandezas na Construção de Maquetes

Neste capítulo é apresentada a sequência didática elaborada para o ensino de conceitos relacionados à medida, razão, proporção, proporcionalidade, escala, semelhança de triângulos, relações métricas, trigonometria e áreas, tendo como contexto a construção de uma maquete da escola. Inicialmente, são descritas as atividades propostas, organizadas em vinte aulas, evidenciando os objetivos, os conteúdos matemáticos mobilizados e as metodologias adotadas. Em seguida, é realizada uma análise pedagógica da sequência didática, destacando as conexões entre os diferentes conteúdos e sua articulação com os princípios da aprendizagem significativa. Cabe destacar que a proposta não se limitou à elaboração do produto educacional, tendo sido desenvolvida em disciplina Eletiva do Ensino Médio, possibilitando a construção da maquete da escola e a vivência das atividades descritas ao longo deste capítulo.

A construção de maquetes constitui uma estratégia pedagógica que favorece a aprendizagem ativa e contextualizada, permitindo ao estudante aplicar conceitos e conteúdos matemáticos como razão e proporção, escala, semelhança, relações métricas no triângulo retângulo, trigonometria, cálculo de áreas volume, em situações reais do cotidiano.

Apresentamos uma sequência didática estruturada em 20 aulas, a ser trabalhada no 1º, 2º e 3º anos do ensino médio e tem como objetivo colocar em prática conceitos e conteúdos da disciplina de matemática, dando sentido ao estudo da geometria que terá como culminância a construção da maquete da escola.

5.1 Organização Geral da Sequência Didática

A sequência foi estruturada de forma progressiva, de modo que cada aula introduz conceitos necessários à etapa subsequente da construção da maquete. A Tabela 5 sintetiza as relações entre conteúdos, habilidades da BNCC e descritores avaliados pelo PAEBES.

Tabela 5 – Articulação entre conteúdos matemáticos, habilidades da BNCC e descritores do PAEBES

Conteúdos Matemáticos	Habilidades BNCC	Descritores PAEBES
Escala, redução e ampliação	EM13MAT103, EM13MAT307	D057, D058
Razão e proporção	EM13MAT103	D039
Grandezas diretamente e inversamente proporcionais	EM13MAT103, EM13MAT314	D039
Teorema de Tales	EM13MAT103, EM13MAT308	D039
Semelhança de figuras planas	EM13MAT201, EM13MAT308, EM13MAT402	D049, D119
Relações métricas no triângulo retângulo	EM13MAT308	D049, D119
Trigonometria no triângulo retângulo	EM13MAT308	D051
Cálculo de áreas, volume e decomposição	EM13MAT201, EM13MAT307, EM13MAT309, EM13MAT402, EM13MAT504, EM13MAT506	D057, D058, D111, D129
Modelagem geométrica tridimensional	EM13MAT201, EM13MAT309, EM13MAT504	D111, D129

Fonte: Elaboração própria (2025).

Material Utilizado: Quadro, pincel, impressoras 3D e a laser, madeirite, cola de madeira, régua, paquímetro, papel milimetrado, esquadro, trena, parafusadeira, parafuso, prego, martelo, tinta e aerografo.

5.2 Sequência Didática

A sequência didática proposta é composta por vinte aulas, com duração de 140 minutos cada, desenvolvidas no âmbito de uma disciplina eletiva ofertada ao longo de um semestre letivo. Essa disciplina conta com dois encontros semanais de 50 minutos, organizados em blocos contínuos, totalizando o tempo necessário para o desenvolvimento das atividades previstas.

A organização em aulas de maior duração justifica-se pela natureza da proposta, que envolve não apenas a abordagem conceitual dos conteúdos matemáticos, mas também a realização de atividades práticas, medições no ambiente escolar, uso de tecnologias digitais e construção de modelos físicos. Dessa forma, cada aula contempla momentos de introdução, desenvolvimento, sistematização e aplicação dos conhecimentos.

Destaca-se que o uso de tecnologias digitais não se configura como um objetivo em si, mas como um instrumento de apoio à aprendizagem, contribuindo para a visualização, precisão e organização das construções realizadas pelos estudantes.

Aula 1 – Medição de grandezas (comprimento)

Esta aula tem como objetivo introduzir o conceito de medida, com ênfase na medição de grandezas lineares (comprimento), estabelecendo base para comparações e representações futuras.

Inicialmente, o professor apresenta a trena como instrumento de medição, destacando seu funcionamento e a importância da precisão na leitura das medidas. Em seguida, os estudantes são orientados a realizar medições de objetos da sala de aula, como portas, janelas, quadro e mobiliário, com o objetivo de desenvolver familiaridade e domínio no uso do instrumento.

Após essa etapa inicial, e uma vez observado o domínio básico da utilização da trena, os estudantes são conduzidos a uma atividade mais ampla, na qual realizam a medição das dimensões externas da escola, especialmente a frente e a lateral da edificação. Os dados obtidos são registrados de forma organizada, visando sua utilização nas aulas subsequentes.

A metodologia adotada baseia-se na aprendizagem ativa, com ênfase na experimentação e na coleta de dados reais.

A avaliação ocorre de forma formativa, considerando o uso adequado da trena, a precisão das medições e a organização dos registros.

Como resultado esperado, os estudantes deverão compreender a medição de comprimentos como etapa fundamental para a análise de relações entre grandezas e para a construção de representações em escala.

Aula 2 – Razão entre grandezas

O objetivo desta aula é introduzir o conceito de razão como o quociente entre duas grandezas de mesma natureza, a partir de situações reais previamente vivenciadas pelos estudantes.

Inicialmente, o professor retoma as medidas obtidas na aula anterior, em especial as dimensões da frente e da lateral da escola, promovendo uma discussão sobre a comparação entre essas grandezas. A partir desse contexto, introduz-se o conceito de razão, destacando sua interpretação como uma divisão entre duas quantidades.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes são orientados a calcular a razão entre a medida da frente e a medida da lateral da escola, expressando-a na forma de fração e interpretando seu significado. Essa relação passa a ser compreendida como uma forma de representar proporcionalmente as dimensões da edificação.

A metodologia fundamenta-se na construção do conceito a partir de uma situação concreta e significativa.

A avaliação considera a capacidade de expressar corretamente a razão, interpretar seu significado e estabelecer conexões com a situação proposta.

Como resultado esperado, os estudantes deverão compreender a razão como ferramenta de comparação entre grandezas, estabelecendo um vínculo direto com a futura representação da planta da escola.

Aula 3 – Proporção

Esta aula tem como objetivo desenvolver o conceito de proporção como uma igualdade entre duas razões, a partir das relações estabelecidas entre as medidas do ambiente escolar.

Inicialmente, o professor retoma a razão obtida na aula anterior entre a frente e a lateral da escola, promovendo uma discussão sobre o significado dessa relação e sua importância para a comparação entre grandezas.

Em seguida, propõe-se uma situação em que essas medidas precisam ser representadas em outro suporte, introduzindo a necessidade de manter a relação proporcional entre as dimensões. A partir dessa problemática, formaliza-se o conceito de proporção como uma igualdade entre duas razões, destacando que a preservação da forma depende da manutenção dessas relações.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes são orientados a elaborar esboços em papel milimetrado, representando, de forma proporcional, elementos previamente medidos, tais como a frente e a lateral da escola, bem como objetos da sala de aula, como portas, janelas, o quadro e o comprimento da parede em que ele está fixado. Para isso, devem escolher uma relação de redução e aplicá-la de maneira consistente, garantindo a proporcionalidade entre as medidas reais e as representadas.

Durante a atividade, os estudantes verificam a equivalência entre razões e utilizam a multiplicação cruzada como estratégia para validar as proporções construídas.

A metodologia adotada valoriza a transição do concreto para o representacional, articulando medições reais com sua representação gráfica.

A avaliação considera a capacidade dos estudantes de construir representações proporcionais, manter a coerência entre as medidas e justificar as relações estabelecidas.

Como resultado esperado, os estudantes deverão compreender a proporção como ferramenta essencial para a representação proporcional de grandezas, estabelecendo base direta para o estudo da escala.

Aula 4 – Proporcionalidade direta aplicada à planta baixa

Esta aula tem como objetivo compreender a proporcionalidade direta como uma relação entre grandezas e aplicá-la na análise e construção de representações em planta baixa.

Inicialmente, o professor retoma as medidas da frente e da lateral da escola, obtidas nas aulas anteriores, e a razão estabelecida entre essas grandezas. Em seguida, apresenta aos estudantes uma planta baixa da escola (ou de um modelo simplificado), promovendo uma análise comparativa entre as dimensões reais e as dimensões representadas.

A partir dessa comparação, os estudantes são conduzidos a investigar se a razão entre a frente e a lateral da planta baixa é equivalente à razão entre as medidas reais, identificando, assim, a presença de uma relação de proporcionalidade direta. Nesse momento, destaca-se a existência de um fator de proporcionalidade, que relaciona as medidas reais com suas representações.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes são orientados a aplicar essa relação para determinar as dimensões, na planta baixa, de elementos previamente medidos, como portas, janelas, quadro e paredes. Em seguida, devem representar esses elementos em papel milimetrado, respeitando as proporções estabelecidas.

Durante a atividade, os estudantes podem utilizar estratégias como a regra de três simples para realizar os cálculos, compreendendo-a como um procedimento associado à proporcionalidade.

A metodologia adotada baseia-se na resolução de problemas e na análise comparativa entre diferentes representações.

A avaliação considera a capacidade dos estudantes de reconhecer a proporcionalidade entre as medidas, identificar o fator de proporcionalidade e representar corretamente os elementos na planta baixa.

Como resultado esperado, os estudantes deverão compreender a proporcionalidade direta como fundamento da representação em escala, sendo capazes de transitar entre medidas reais e suas representações.

Aula 5 – Escala: formalização e aplicação na planta baixa

Esta aula tem como objetivo formalizar o conceito de escala como uma aplicação da proporcionalidade direta, consolidando a relação entre medidas reais e suas representações na planta baixa.

Inicialmente, o professor retoma a atividade desenvolvida na aula anterior, na qual os estudantes compararam as dimensões reais da escola com aquelas apresentadas na planta baixa, identificando a existência de uma relação proporcional entre elas. A partir

dessa retomada, destaca-se que essa relação pode ser expressa por meio de uma razão constante, introduzindo-se formalmente o conceito de escala.

Em seguida, define-se escala como a razão entre a medida representada na planta e a medida real correspondente, evidenciando o papel do fator de proporcionalidade como elemento central nessa relação.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes são orientados a determinar explicitamente a escala utilizada na planta baixa analisada, bem como a verificar sua consistência em diferentes elementos da construção. Posteriormente, aplicam essa escala para calcular e representar, de forma proporcional, dimensões de elementos como portas, janelas, quadro e paredes, consolidando a correspondência entre o real e o representado.

A metodologia adotada enfatiza a sistematização do conhecimento a partir de experiências previamente vivenciadas, promovendo uma aprendizagem significativa e contextualizada.

A avaliação considera a capacidade dos estudantes de identificar corretamente a escala, aplicar o fator de proporcionalidade de forma consistente e interpretar a relação entre as medidas reais e representadas.

Como resultado esperado, os estudantes deverão compreender a escala como instrumento fundamental para a representação de espaços reais, sendo capazes de utilizá-la na construção e análise de plantas baixas.

Aula 6 – Introdução à representação digital da planta baixa

Esta aula tem como objetivo introduzir o uso de um software de representação gráfica como ferramenta para a construção da planta baixa, mantendo o foco na aplicação do conceito de escala.

Inicialmente, o professor retoma a planta baixa trabalhada na aula anterior, destacando a importância da precisão na representação das medidas e a necessidade de utilizar ferramentas que permitam maior exatidão nos desenhos.

Em seguida, apresenta-se o software a ser utilizado, explorando sua interface e as principais ferramentas necessárias para a construção de representações geométricas, como inserção de segmentos, definição de medidas e organização do espaço de trabalho.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes, organizados em grupos, são orientados a reproduzir, no ambiente digital, representações planas de elementos previamente medidos e desenhados em papel milimetrado, como portas, janelas, o quadro e paredes. Essas representações devem respeitar as dimensões obtidas por meio da escala definida anteriormente.

Destaca-se que, por se tratar de um software utilizado para o corte em impressora

a laser, os desenhos devem ser construídos como figuras planas, com medidas precisas e coerentes com a representação da planta baixa.

Nesse momento, o foco não está na complexidade do desenho, mas na compreensão da relação entre medida real, escala e representação digital, bem como na preparação adequada dos elementos que serão utilizados na construção da maquete.

Ao longo da atividade, o professor orienta os estudantes a inserir medidas proporcionais, reforçando o uso do fator de proporcionalidade definido anteriormente.

A metodologia adotada integra tecnologia e matemática, priorizando o uso do software como instrumento de apoio à aprendizagem, e não como um fim em si mesmo.

A avaliação considera a participação dos estudantes, a capacidade de utilizar as ferramentas básicas do software e a coerência entre as medidas representadas e a escala estabelecida.

Como resultado esperado, os estudantes deverão desenvolver autonomia inicial no uso da ferramenta digital, sendo capazes de representar medidas proporcionais de forma precisa, consolidando a articulação entre escala e representação.

Aula 7 – Definição da escala da maquete e preparação dos elementos estruturais

Esta aula tem como objetivo consolidar o conceito de escala por meio da definição da escala da maquete e da preparação dos elementos estruturais para sua futura construção.

Inicialmente, o professor retoma as discussões realizadas nas aulas anteriores sobre proporcionalidade e escala, destacando a necessidade de estabelecer uma escala única e coerente para toda a maquete da escola.

A partir das medidas reais da frente e da lateral da escola, os estudantes são orientados a analisar diferentes possibilidades de escala, considerando critérios como viabilidade de construção, dimensões finais da maquete e limitações dos materiais disponíveis. Em seguida, definem coletivamente uma escala adequada para o projeto.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes, organizados em grupos, aplicam a escala definida para calcular as dimensões proporcionais de elementos estruturais acessíveis, como paredes externas, portas e janelas. Com base nesses cálculos, iniciam a construção de representações digitais no software, organizando os desenhos como figuras planas destinadas ao corte em impressora a laser, respeitando as medidas e proporções estabelecidas.

Entretanto, embora os elementos já estejam preparados para o corte, essa etapa ainda não é realizada. O professor destaca que, antes de iniciar a construção física da maquete, é necessário determinar a quantidade de material (madeirite) que será utilizada.

Nesse contexto, evidencia-se que o cálculo dessa quantidade depende da determinação da área das superfícies que compõem a estrutura da maquete. Contudo, observa-se que

nem todas as medidas necessárias estão disponíveis diretamente, especialmente aquelas relacionadas a estruturas de difícil acesso, como a altura da caixa d'água da escola.

A partir dessa limitação, o professor conduz uma problematização, levando os estudantes a reconhecer que será necessário desenvolver novas estratégias para determinar essas medidas. Assim, introduz-se a necessidade do estudo de conteúdos como o Teorema de Tales, a semelhança de triângulos e as razões trigonométricas, que permitirão calcular medidas inacessíveis e, posteriormente, possibilitarão o cálculo das áreas necessárias para a estimativa de material.

A metodologia adotada baseia-se na aprendizagem por problematização, na qual os estudantes identificam lacunas no processo e reconhecem a necessidade de novos conhecimentos para avançar no projeto.

A avaliação considera a capacidade de definir a escala da maquete, aplicar corretamente o fator de proporcionalidade, elaborar representações coerentes e compreender a necessidade de novos conteúdos matemáticos para a continuidade do trabalho.

Como resultado esperado, os estudantes deverão ser capazes de definir a escala da maquete, preparar os elementos estruturais em escala e reconhecer a importância do estudo de novos conceitos matemáticos para a determinação de medidas inacessíveis e posterior cálculo de áreas.

Aula 8 – Teorema de Tales

Esta aula tem como objetivo introduzir o Teorema de Tales como ferramenta para a compreensão de relações de proporcionalidade entre segmentos, a partir de situações concretas.

Inicialmente, o professor retoma a problematização apresentada na aula anterior, destacando a necessidade de determinar medidas que não podem ser obtidas diretamente, como a altura de determinadas estruturas da escola.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes, organizados em grupos, são orientados a construir, no ambiente escolar, configurações que representem o Teorema de Tales, utilizando materiais como barbante, fita adesiva ou régua para representar retas paralelas e transversais.

A partir dessas construções, os estudantes medem os segmentos formados e verificam, na prática, que as razões entre os segmentos correspondentes permanecem constantes.

Durante a atividade, o professor conduz a formalização do teorema.

A metodologia adotada baseia-se na aprendizagem por experimentação.

A avaliação considera a compreensão das relações proporcionais.

Como resultado esperado, os estudantes deverão reconhecer o Teorema de Tales como base para a semelhança.

Aula 9 e 10 – Semelhança de triângulos

Estas aulas têm como objetivo desenvolver o conceito de semelhança de triângulos e aplicá-lo na determinação de medidas inacessíveis, a partir de uma atividade experimental no ambiente escolar.

Inicialmente, o professor retoma a problematização apresentada nas aulas anteriores, destacando a necessidade de determinar a altura de estruturas elevadas, como a caixa d'água da escola, cuja medição direta não é viável.

Como etapa inicial, os estudantes realizam um experimento prático: medem a altura de um aluno e o comprimento de sua sombra no pátio da escola. Em seguida, registram essas medidas e constroem, em papel milimetrado, um triângulo representando essa situação, ligando os extremos correspondentes à altura e à sombra.

Posteriormente, repetem o procedimento com outro aluno ou objeto de altura conhecida, construindo um segundo triângulo nas mesmas condições.

Na sequência, os estudantes utilizam um transferidor para medir os ângulos internos dos triângulos construídos, verificando que possuem os mesmos ângulos correspondentes. A partir dessa observação, o professor introduz o conceito de semelhança de triângulos, destacando o critério AA (ângulo-ângulo).

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes utilizam a proporcionalidade entre os lados dos triângulos semelhantes para estabelecer relações matemáticas e calcular medidas desconhecidas. Em seguida, aplicam esse procedimento para determinar a altura de uma estrutura maior, como a caixa d'água da escola, utilizando a medida de sua sombra.

A metodologia adotada baseia-se na aprendizagem experimental e investigativa, partindo da observação e validação empírica para a formalização do conceito matemático.

A avaliação considera a capacidade de construir corretamente os triângulos, identificar a semelhança por meio dos ângulos, estabelecer proporções e resolver os cálculos de forma adequada.

Como resultado esperado, os estudantes deverão ser capazes de compreender e aplicar a semelhança de triângulos na determinação de medidas inacessíveis, reconhecendo sua importância como ferramenta para a resolução de problemas reais.

Aula 11 – Relações métricas no triângulo retângulo

Esta aula tem como objetivo apresentar as relações métricas no triângulo retângulo como consequência da semelhança de triângulos, consolidando e aprofundando os conceitos

desenvolvidos anteriormente.

Inicialmente, o professor retoma a atividade da aula anterior, na qual foram construídos triângulos a partir da medição de sombras, destacando que, ao considerar um triângulo retângulo e traçar a altura relativa à hipotenusa, obtêm-se dois novos triângulos menores. Assim, passam a existir três triângulos: o original e os dois formados pela projeção da altura.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes são orientados a representar essa construção em papel milimetrado, identificando os três triângulos formados. Em seguida, utilizando um transferidor, medem os ângulos internos dos triângulos menores e do triângulo original, verificando que possuem ângulos correspondentes iguais.

A partir dessa verificação, concluem que os triângulos são semelhantes, estabelecendo uma conexão direta com os conceitos estudados nas aulas anteriores.

Com base nessa semelhança, os estudantes são conduzidos a identificar e estabelecer as relações métricas entre os elementos do triângulo retângulo, como:

- relação entre a altura e as projeções dos catetos;
- relações entre os catetos e a hipotenusa;
- proporções entre os lados.

Durante a atividade, enfatiza-se que essas relações podem ser obtidas diretamente a partir da semelhança de triângulos, reforçando a continuidade conceitual da sequência didática.

A metodologia adotada baseia-se na aprendizagem investigativa, na qual os estudantes verificam propriedades geométricas por meio de construções e medições, antes da formalização matemática.

A avaliação considera a capacidade dos estudantes de identificar a semelhança entre os triângulos, compreender a origem das relações métricas e aplicá-las corretamente.

Como resultado esperado, os estudantes deverão compreender que as relações métricas no triângulo retângulo são decorrentes da semelhança de triângulos, ampliando suas estratégias para resolução de problemas geométricos.

Aula 13 – Razões trigonométricas

Esta aula tem como objetivo utilizar as razões trigonométricas no triângulo retângulo para determinar medidas inacessíveis, comparando os resultados obtidos com aqueles previamente encontrados por meio da semelhança de triângulos.

Inicialmente, o professor retoma a atividade desenvolvida nas aulas anteriores, na qual foi determinada a altura da caixa d'água da escola utilizando semelhança de triângulos. A partir dessa retomada, propõe-se a investigação de um novo método para obtenção dessa mesma medida, com base nas razões trigonométricas.

Em seguida, introduzem-se as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), destacando sua interpretação como relações entre os lados de um triângulo retângulo associadas a um ângulo.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes, organizados em grupos, realizam um experimento no ambiente escolar para determinar novamente a altura da caixa d'água. Para isso, utilizam uma bússola ou aplicativo de medição angular para determinar o ângulo de elevação entre o ponto de observação e o topo da estrutura.

Além da medida do ângulo, os estudantes determinam a distância horizontal até a base da estrutura. Com esses dados, constroem um triângulo retângulo e utilizam as razões trigonométricas, especialmente a tangente, para calcular a altura da caixa d'água.

Após a obtenção dos resultados, os estudantes comparam os valores encontrados por meio da trigonometria com aqueles obtidos anteriormente por semelhança de triângulos, analisando possíveis diferenças e discutindo a precisão dos métodos.

Em seguida, propõe-se um novo desafio: determinar a altura da cobertura da quadra da escola, cuja estrutura não permite a formação de sombras adequadas para aplicação da semelhança. Considerando que a cobertura possui formato aproximado de uma semicircunferência, os estudantes utilizam a trigonometria como ferramenta principal para estimar sua altura, a partir da medição de ângulos e distâncias.

A metodologia adotada baseia-se na experimentação, modelagem matemática e comparação de estratégias, permitindo que os estudantes compreendam diferentes abordagens para a resolução de um mesmo problema.

A avaliação considera a capacidade de aplicar corretamente as razões trigonométricas, organizar os dados coletados, interpretar os resultados e comparar diferentes métodos de resolução.

Como resultado esperado, os estudantes deverão ser capazes de utilizar as razões trigonométricas para determinar medidas inacessíveis, compreendendo suas vantagens e limitações em relação à semelhança de triângulos.

Aula 14 – Consolidação: comparação de estratégias para medidas inacessíveis

Esta aula tem como objetivo consolidar os conhecimentos desenvolvidos nas aulas anteriores, comparando diferentes estratégias matemáticas utilizadas na determinação de medidas inacessíveis.

Inicialmente, o professor retoma as atividades realizadas, destacando que a altura da caixa d'água da escola foi determinada por dois métodos distintos: por meio da semelhança de triângulos e por meio das razões trigonométricas.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes são organizados em grupos e orientados a comparar os resultados obtidos pelos dois métodos, analisando possíveis diferenças e discutindo fatores que influenciam a precisão das medições, como erros experimentais, imprecisão nos instrumentos e condições do ambiente.

Em seguida, os estudantes resolvem novos problemas envolvendo medidas inacessíveis, sendo incentivados a escolher o método mais adequado (semelhança ou trigonometria), justificando sua escolha. A metodologia adotada baseia-se na comparação de estratégias e na reflexão sobre os processos de resolução.

A avaliação considera a capacidade dos estudantes de interpretar resultados, comparar métodos e justificar suas escolhas.

Como resultado esperado, os estudantes deverão compreender que diferentes ferramentas matemáticas podem ser utilizadas para resolver um mesmo problema, sendo capazes de selecionar a estratégia mais adequada em cada situação.

Aula 15 e 16 – Cálculo de áreas e estimativa de material

Estas aulas têm como objetivo desenvolver o cálculo de áreas de figuras planas, aplicando esse conhecimento na estimativa da quantidade de material necessária para a construção da maquete.

Inicialmente, o professor retoma o processo desenvolvido nas aulas anteriores, destacando que, neste momento, os estudantes já possuem as dimensões necessárias da estrutura da escola, incluindo medidas obtidas diretamente e aquelas determinadas por meio da semelhança de triângulos e das razões trigonométricas. A partir dessa retomada, discute-se a necessidade de calcular a área das superfícies que compõem a maquete, com o objetivo de estimar a quantidade de material (madeirite) que será utilizada.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes, organizados em grupos, são orientados a identificar e decompor as superfícies da estrutura em figuras planas conhecidas, como retângulos, triângulos e, quando necessário, formas compostas. Em seguida, aplicam as fórmulas de cálculo de área para determinar a área de cada parte da estrutura.

Nos casos em que as figuras não se apresentam de forma simples, os estudantes utilizam estratégias de decomposição ou recorrem a métodos como a fórmula de Herão, quando pertinente.

Após o cálculo das áreas individuais, os estudantes realizam a soma das superfícies para obter a área total de material necessária, discutindo possíveis perdas no processo de

corte e ajustes práticos.

A metodologia adotada baseia-se na resolução de problemas e na modelagem matemática, promovendo a aplicação integrada dos conceitos desenvolvidos ao longo da sequência didática.

A avaliação considera a capacidade dos estudantes de identificar corretamente as figuras envolvidas, aplicar as fórmulas de área, organizar os cálculos e interpretar os resultados no contexto da construção da maquete.

Como resultado esperado, os estudantes deverão ser capazes de calcular áreas de superfícies planas, estimar a quantidade de material necessária e compreender a importância desses cálculos na viabilização do projeto.

Aula 16 a 20 – Construção da maquete

Estas aulas têm como objetivo integrar todos os conhecimentos desenvolvidos ao longo da sequência didática, culminando na construção da maquete da escola em escala.

Inicialmente, o professor retoma o percurso realizado, destacando que os estudantes já dispõem das medidas reais e proporcionais da estrutura da escola, incluindo dimensões obtidas diretamente e aquelas determinadas por meio da semelhança de triângulos e das razões trigonométricas, bem como da estimativa da quantidade de material necessária.

Na etapa de desenvolvimento, os estudantes, organizados em grupos, iniciam o processo de construção da maquete. A partir dos desenhos previamente elaborados no software, realizam o corte das peças em madeirite, utilizando impressora a laser ou equipamento equivalente.

Após o corte, os estudantes organizam as peças, identificando cada elemento estrutural (paredes, aberturas, encaixes, entre outros), e iniciam o processo de montagem da maquete, respeitando as proporções estabelecidas pela escala definida. Durante essa etapa, são realizadas atividades de ajuste, alinhamento e verificação das estruturas, garantindo a coerência entre o modelo construído e as dimensões planejadas.

A metodologia adotada baseia-se na aprendizagem por projetos, promovendo o trabalho colaborativo, a autonomia dos estudantes e a aplicação integrada dos conceitos matemáticos.

A avaliação ocorre de forma processual, considerando o envolvimento dos estudantes, a organização do trabalho em grupo, a precisão na construção das peças e a qualidade do produto final.

Como resultado esperado, os estudantes deverão ser capazes de construir uma maquete da escola em escala, evidenciando a aplicação integrada dos conceitos de medida, razão, proporção, proporcionalidade, escala, semelhança de triângulos, relações métricas,

razões trigonométricas e cálculo de áreas.

5.3 Análise Pedagógica da Sequência Didática

A sequência didática proposta foi estruturada de modo a promover a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos por meio de sua articulação com situações reais do ambiente escolar. Sua organização segue uma progressão lógica, partindo da experiência concreta para a formalização conceitual e, posteriormente, para a aplicação integrada dos conhecimentos na construção de um produto final.

Inicialmente, as aulas são orientadas pela exploração de grandezas mensuráveis no espaço escolar, como comprimentos de portas, janelas e dimensões externas da edificação. Essa abordagem favorece a aproximação dos estudantes com o objeto de estudo, permitindo que o conhecimento matemático emergja a partir de uma necessidade concreta. Nesse contexto, a medição assume papel fundamental como ponto de partida para o desenvolvimento das ideias de razão, proporção e proporcionalidade.

A construção dos conceitos de razão e proporção ocorre a partir da comparação entre medidas reais, possibilitando que os estudantes compreendam tais conceitos não apenas de forma algorítmica, mas como ferramentas para interpretar relações entre grandezas. Esse processo é ampliado com a introdução da proporcionalidade direta, estabelecendo as bases necessárias para a formalização do conceito de escala.

A escala, por sua vez, é trabalhada como um elemento central na representação de espaços, permitindo a transição entre o real e o representado. A utilização da planta baixa da escola como objeto de estudo fortalece essa compreensão, ao evidenciar a necessidade de manter relações proporcionais para garantir a fidelidade da representação.

A inserção do uso de tecnologias digitais, por meio de software de representação gráfica, amplia as possibilidades de visualização e construção geométrica, além de estabelecer uma conexão direta com a etapa prática de construção da maquete. Nesse sentido, a tecnologia é utilizada como ferramenta pedagógica, e não como um fim em si mesma.

A sequência avança ao introduzir uma situação-problema autêntica: a necessidade de determinar medidas inacessíveis, como a altura da caixa d'água da escola. Essa problematização desempenha papel central na organização didática, pois justifica a introdução de novos conteúdos matemáticos.

Nesse contexto, o Teorema de Tales é apresentado como uma primeira ferramenta para compreender relações de proporcionalidade entre segmentos. Em seguida, o conceito de semelhança de triângulos é desenvolvido por meio de experimentação, utilizando situações reais envolvendo sombras. Essa abordagem favorece a construção do conhecimento a partir da observação, da verificação e da validação empírica, antes da formalização teórica.

As relações métricas no triângulo retângulo são introduzidas como consequência da semelhança, reforçando a continuidade conceitual da sequência. Essa escolha evita a fragmentação do conteúdo e contribui para uma compreensão mais integrada da matemática.

A introdução das razões trigonométricas ocorre a partir da necessidade de ampliar as estratégias de resolução de problemas envolvendo medidas inacessíveis. A comparação entre os resultados obtidos por semelhança e por trigonometria possibilita aos estudantes compreender que diferentes ferramentas matemáticas podem ser utilizadas para resolver um mesmo problema, promovendo o desenvolvimento do pensamento crítico.

Na etapa final da sequência, o cálculo de áreas surge como uma necessidade prática para a estimativa da quantidade de material necessária para a construção da maquete. Essa abordagem confere significado ao estudo de áreas, uma vez que o conteúdo é mobilizado para resolver um problema real.

A construção da maquete constitui o momento de síntese da sequência didática, no qual os estudantes aplicam, de forma integrada, os conceitos de medida, razão, proporção, proporcionalidade, escala, semelhança de triângulos, relações métricas, trigonometria e cálculo de áreas. Esse processo evidencia a articulação entre teoria e prática, característica fundamental de uma aprendizagem significativa.

Do ponto de vista pedagógico, a sequência fundamenta-se em princípios como a aprendizagem ativa, a resolução de problemas, a modelagem matemática e o trabalho colaborativo. Os estudantes assumem papel protagonista no processo de construção do conhecimento, sendo constantemente desafiados a investigar, comparar, interpretar e aplicar conceitos matemáticos em diferentes contextos.

Além disso, a proposta apresenta forte alinhamento com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao promover o desenvolvimento de habilidades relacionadas à resolução de problemas, à modelagem e à utilização de diferentes representações matemáticas. Da mesma forma, dialoga com os descritores do PAEBES, ao contemplar conteúdos frequentemente avaliados em larga escala, como razão, proporção, escala, semelhança e trigonometria.

Dessa forma, a sequência didática não apenas contribui para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, mas também favorece o desenvolvimento de competências essenciais para a formação dos estudantes, como autonomia, pensamento crítico e capacidade de resolver problemas em situações reais.

Em síntese, a proposta apresenta-se como uma estratégia pedagógica coerente, contextualizada e fundamentada, evidenciando o potencial da integração entre teoria e prática no ensino da matemática.

6 Conclusão

Este trabalho começou a ser idealizado nas aulas de Geometria ministradas pelo professor Florêncio, no segundo semestre do PROFMAT. O objetivo central é propor uma sequência didática, apresentada no Capítulo 5, para ser inicialmente desenvolvida na disciplina eletiva ofertada pelos professores de Matemática da rede estadual de ensino, podendo também ser aplicada nas aulas regulares de Matemática do Ensino Médio. Essa proposta integra teoria matemática, práticas pedagógicas ativas e referenciais educacionais contemporâneos.

No Capítulo 2, apresentam-se os resultados da avaliação do PAEBES, que evidenciam fragilidades na aprendizagem matemática tanto na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Major Pedro Rabaiolli quanto na rede estadual como um todo. Esses resultados motivaram a busca por didáticas inovadoras e pela compreensão aprofundada do funcionamento dessa avaliação, de modo a estruturar uma sequência didática alinhada às competências avaliadas em nível nacional e regional. Tal alinhamento contribui para uma prática docente mais significativa e coerente com as demandas das avaliações externas.

O Capítulo 3 aborda a construção de maquetes como estratégia de ensino da Matemática, evidenciando seu potencial para promover uma aprendizagem ativa e contextualizada. Em articulação com os fundamentos teóricos apresentados no Capítulo 4, destaca-se a integração entre teoria e prática, mobilizando conteúdos como escala, proporcionalidade, semelhança, áreas, volumes e trigonometria, em consonância com as orientações da BNCC e os descritores do PAEBES. Dessa forma, o capítulo reforça a relevância das maquetes como recurso pedagógico capaz de aproximar o conhecimento matemático da realidade dos estudantes.

A construção de maquetes é apresentada como uma estratégia eficaz para o ensino da Matemática, articulando conteúdos, competências e habilidades previstas na BNCC e contempladas na avaliação do PAEBES, ao mesmo tempo em que orienta o estudante pelas etapas necessárias para elaborar um modelo reduzido de uma edificação, demonstrando um pouco das inúmeras aplicabilidade dos conteúdos matemáticos.

Os resultados obtidos por meio da construção de maquetes evidenciam que esse recurso favorece a aprendizagem ativa, a participação estudantil e a mobilização de múltiplas habilidades, como visualização espacial, raciocínio proporcional, interpretação de escalas e análise geométrica de situações reais. A atividade prática contribui para superar dificuldades recorrentes no estudo da Geometria, ao estabelecer conexões concretas entre teoria e prática e promover uma compreensão mais profunda dos conceitos.

A sequência didática proposta está alinhada a habilidades da BNCC, como

[EM13MAT301](#), [EM13MAT308](#) e [EM13MAT309](#), relacionadas, respectivamente, às relações métricas, à semelhança e ao cálculo de áreas e volumes. Outras habilidades mobilizadas na proposta podem ser consultadas no Apêndice [C](#).

Além disso, a proposta encontra-se em consonância com descritores do PAEBES, como [D039](#), [D119](#), [D049](#), [D051](#), [D058](#) e [D129](#), evidenciando a articulação entre o currículo nacional e as avaliações externas.

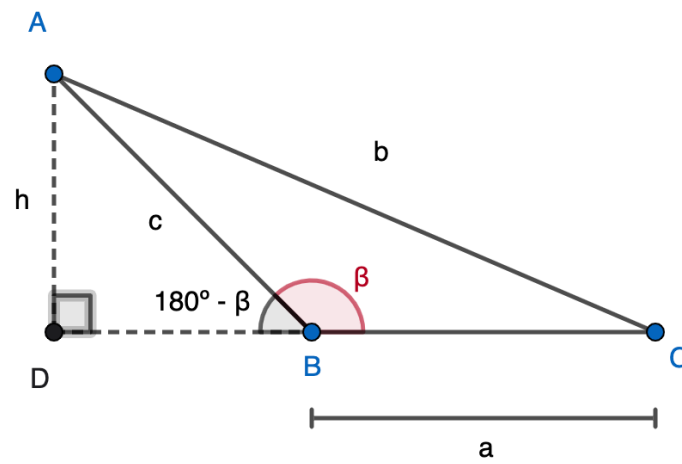
Cada etapa da construção da maquete mobiliza diferentes habilidades e descritores, permitindo ao estudante transitar entre representações geométricas, algébricas e numéricas, em um processo de aprendizagem significativo e contextualizado.

Cabe destacar que a proposta apresentada nesta dissertação não permaneceu apenas no âmbito teórico. A sequência didática foi desenvolvida em disciplina Eletiva do Ensino Médio, possibilitando a construção da maquete da escola e evidenciando a viabilidade da utilização dessa estratégia para a articulação de diferentes conteúdos matemáticos em torno de uma atividade significativa e contextualizada. Dessa forma, o produto educacional proposto ultrapassa a condição de uma simples sugestão metodológica, constituindo-se em uma experiência efetivamente desenvolvida em contexto real de ensino.

Conclui-se que a sequência didática proposta é viável, coerente e pedagogicamente eficaz, potencializando o ensino de Geometria de forma contextualizada e interdisciplinar. Ao aproximar os estudantes do espaço escolar que habitam, transformando-o em objeto de estudo matemático, a proposta reforça a relevância social da Matemática e estimula o desenvolvimento de competências fundamentais para a formação cidadã.

APÊNDICE A – Demonstração da Fórmula de Herão para triângulo obtusângulo

Figura 74 – Triângulo obtusângulo: altura h relativa a $\overline{BC}$ e ângulo β em B .



Fonte: Elaboração própria.

No triângulo $\triangle ABC$ tomamos as notações

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{AB} = c, \quad \overline{AC} = b,$$

sendo h a altura relativa a $\overline{BC}$. Como β é obtuso, vale

$$\cos \beta = -\cos(180^\circ - \beta).$$

Pelo Teorema do Cosseno em $\triangle ABC$,

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ -2ac \cos \beta &= -b^2 + a^2 + c^2 \\ \Rightarrow -\cos \beta &= \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac}. \end{aligned} \tag{1}$$

No triângulo retângulo $\triangle ADB$,

$$\overline{BD} = \text{proj}_{\overline{BC}}(\overline{BA}), \quad \overline{AD} = h, \quad \overline{AB} = c,$$

e

$$\cos(180^\circ - \beta) = \frac{\overline{BD}}{c} \Rightarrow -\cos \beta = \frac{\overline{BD}}{c}. \tag{2}$$

Igualando (1) e (2), obtemos

$$\frac{\overline{BD}}{c} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2a}. \quad (3)$$

Pelo Teorema de Pitágoras em $\triangle ADB$,

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (\overline{BD})^2 \\ \Rightarrow h^2 &= c^2 - (\overline{BD})^2 \\ &= c^2 - \left(\frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2a} \right)^2 \\ &= \frac{(2ac)^2 - (-b^2 + a^2 + c^2)^2}{4a^2} \\ &= \frac{(2ac - (-b^2 + a^2 + c^2))(2ac + (-b^2 + a^2 + c^2))}{4a^2} \\ &= \frac{((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2)}{4a^2} \\ &= \frac{(a+c-b)(a+c+b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Como o semiperímetro é $p = \frac{a+b+c}{2}$, temos

$$a+c = 2p-b, \quad a+b = 2p-c, \quad b+c = 2p-a.$$

Substituindo em (4),

$$h^2 = \frac{(2p-2b)(2p)(2p-2c)(2p-2a)}{4a^2} = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2}.$$

Logo,

$$h = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

□

APÊNDICE B – Matriz De Referência do PAEBES – Matemática (Percentuais 2022–2024)

A seguir são apresentados os descritores da Matriz de Referência do PAEBES para Matemática (3º ano do Ensino Médio), acompanhados dos percentuais de acerto obtidos nos anos de 2022, 2023 e 2024. Espaços em branco indicam que o descritor não foi avaliado no respectivo ano.

Tabela 6 – Descritores da Matriz de Referência do PAEBES – Matemática (Parte 1).

Código	Descrição da Habilidade	Unidade Temática	2022	2023	2024
D009_M	Corresponder pontos da reta numérica a números racionais.	III Números	22%	53%	78%
D033_M	Identificar a localização de números irracionais na reta numérica.	III Números	37%	48%	33%
D038_M	Utilizar porcentagem na resolução de problemas.	III Números	44%	58%	31%
D039_M	Utilizar proporcionalidade entre duas grandezas na resolução de problema.	IV Álgebra		53%	41%
D042_M	Utilizar o princípio multiplicativo de contagem na resolução de problema.	III Números	40%	60%	61%
D043_M	Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.	I Geometria	38%	57%	50%
D049_M	Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.	I Geometria	33%		32%
D051_M	Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).	I Geometria	26%	24%	35%

Fonte: Elaboração própria (2025), com base nos relatórios do PAEBES 2022, 2023 e 2024.

Tabela 7 – Descritores da Matriz de Referência do PAEBES – Matemática (Parte 2).

Código	Descrição da Habilidade	Unidade Temática	2022	2023	2024
D057_M	Utilizar o perímetro de uma figura bidimensional na resolução de problema.	II Grandezas e Medidas	34%		36%
D058_M	Utilizar área de figuras bidimensionais na resolução de problema.	II Grandezas e Medidas	53%	71%	39%
D063_M	Corresponder listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam.	V Probabilidade e Estatística			79%
D064_M	Utilizar informações apresentadas em tabelas ou gráficos na resolução de problemas.	V Probabilidade e Estatística	44%	67%	34%
D065_M	Resolver problema envolvendo noções de probabilidade.	V Probabilidade e Estatística	49%	47%	54%
D066_M	Utilizar medidas de tendência central na resolução de problemas.	V Probabilidade e Estatística	53%	55%	38%
D071_M	Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.	IV Álgebra	18%	25%	28%
D074_M	Corresponder as representações algébrica e gráfica de uma função exponencial.	IV Álgebra	17%	17%	19%
D078_M	Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico.	IV Álgebra	17%	16%	19%
D082_M	Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.	IV Álgebra		31%	30%
D085_M	Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.	I Geometria	16%	24%	28%
D086_M	Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.	IV Álgebra	40%	30%	33%
D087_M	Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.	IV Álgebra	32%	17%	31%
D088_M	Utilizar função exponencial na resolução de problemas.	IV Álgebra	25%	27%	23%

Fonte: Elaboração própria (2025), com base nos relatórios do PAEBES 2022, 2023 e 2024.

Tabela 8 – Descritores da Matriz de Referência do PAEBES – Matemática (Parte 3).

Código	Descrição da Habilidade	Unidade Temática	2022	2023	2024
D096_M	Utilizar propriedades de progressões aritméticas na resolução de problemas.	IV Álgebra	35%	57%	23%
D097_M	Utilizar propriedades de progressões geométricas na resolução de problemas.	IV Álgebra	45%	28%	32%
D111_M	Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.	I Geometria		33%	30%
D119_M	Identificar triângulos semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.	I Geometria	20%		35%
D124_M	Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.	I Geometria	19%	35%	45%
D125_M	Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.	I Geometria	39%	35%	14%
D126_M	Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.	IV Álgebra	16%	31%	24%
D127_M	Relacionar a determinação do ponto de intersecção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.	I Geometria	43%	46%	35%
D128_M	Relacionar as representações algébricas e gráficas de uma circunferência.	I Geometria	11%	11%	43%
D129_M	Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido.	II Grandezas e Medidas	27%	25%	10%
D131_M	Resolver problema envolvendo sistema linear.	IV Álgebra	41%	28%	38%
D132_M	Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.	IV Álgebra	38%	35%	36%
D133_M	Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo de uma função do 2º grau.	IV Álgebra	21%	23%	22%
D145_M	Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes.	IV Álgebra	10%	23%	21%

Fonte: Elaboração própria (2025), com base nos relatórios do PAEBES 2022, 2023 e 2024.

APÊNDICE C – Habilidades da BNCC relacionadas ao ensino de Matemática

Tabela 9 – Habilidades da BNCC utilizadas na sequência didática (Parte 1).

Código	Descrição
EM13MAT102	Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
EM13MAT103	Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
EM13MAT201	Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
EM13MAT301	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT302	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT307	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT308	Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
EM13MAT309	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT313	Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 10 – Habilidades da BNCC utilizadas na sequência didática (Parte 2).

Código	Descrição
EM13MAT314	Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
EM13MAT401	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
EM13MAT402	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
EM13MAT504	Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
EM13MAT506	Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Fonte: Elaboração própria.

Referências

ANDRADE, D. F. de; VALLE, R. da C. Introdução à teoria da resposta ao item. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 22, n. 18, p. 5–36, 2000. Disponível em: <https://publicacoes.fcc.org.br/ae/article/view/2250>. Citado na página 19.

Brasil. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Acesso em: 09 set. 2025. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf. Citado 3 vezes nas páginas 17, 22 e 23.

Espírito Santo. *Relatório Técnico do PAEBES 2024*. Juiz de Fora, 2024. Citado na página 19.

INEP. *Oficinas definem padrões de desempenho da avaliação*. 2024. Acesso em: 09 set. 2025. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/saeb/oficinas-definem-padroes-de-desempenho-da-avaliacao>. Citado na página 20.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011. (Coleção do Professor de Matemática). Citado 3 vezes nas páginas 34, 43 e 111.

NETO, A. C. M. *Geometria*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção ProfMAT). Citado na página 111.

Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo. *Currículo do Espírito Santo: Ensino Médio*. Vitória: SEDU-ES, 2020. Acesso em: 09 set. 2025. Disponível em: <https://www.educacao.es.gov.br>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.