UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA - FACET

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

BRUNO CHRISTIAN SILVA DOS SANTOS

CADERNO DIDÁTICO DE GEOMETRIA: UMA PROPOSTA PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Porto Velho,
2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA - FACET

BRUNO CHRISTIAN SILVA DOS SANTOS

CADERNO DIDÁTICO DE GEOMETRIA: UMA PROPOSTA PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Rondônia como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Marizete Nink de Carvalho

Porto Velho,
2026

Catalogação da Publicação na Fonte
Fundação Universidade Federal de Rondônia - UNIR

S237c Santos, Bruno Christian Silva Dos.

Caderno didático de geometria: uma proposta para os anos finais do ensino fundamental / Bruno Christian Silva Dos Santos. - Porto Velho, RO, 2026.

71f.: il.

Orientação: Profa. Dra. Marizete Nink de Carvalho.

Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Faculdade de Ciências Exatas e da Terra. Fundação Universidade Federal de Rondônia.

1. Geometria. 2. Caderno. 3. Atividades exploratórias. I. Carvalho, Marizete Nink de. II. Título.

Biblioteca Central CDU 510

Bibliotecário(a) Naiara Raíssa da Silva Passos CRB-11/891

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

ATA Nº 79

ATA DA SEPTUAGÉSIMA NONA SESSÃO DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO PROFMAT/UNIR, CAMPUS PORTO VELHO.

MESTRANDO: **BRUNO CHRISTIAN SILVA DOS SANTOS**
INÍCIO DO CURSO: março/2023

Aos cinco dias do mês de maio de dois mil e vinte e seis, às quinze horas, de forma remota, via Google Meet, foi realizada a sessão de defesa de dissertação do mestrando Bruno Christian Silva dos Santos, como requisito obrigatório estabelecido no Regimento Interno do PROFMAT/UNIR. A Comissão Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa, foi composta pelos membros: Profa. Dra. Marizete Nink de Carvalho (Presidente) - UNIR, Prof. Dr. Tomás Daniel Menendez Rodriguez (membro interno) e a Profa. Dra. Thaís Guinami Pereira Alves (membra externa) - IFRO, sob a presidência da primeira, julgou o trabalho intitulado "CADERNO DIDÁTICO DE GEOMETRIA: UMA PROPOSTA PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL". Após a defesa apresentada pelo mestrando e arguições pela Comissão, o trabalho foi considerado “APROVADO” e, em razão das recomendações dos membros da Comissão, a Senhora Presidente se comprometeu a orientar a sequência do processo da elaboração da versão final com a inclusão das recomendações realizadas. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão e, para constar, foi lavrada a presente ATA, que vai assinada digitalmente pelos membros da Comissão Examinadora e o Mestrando.

Documento assinado eletronicamente por **MARIZETE NINK DE CARVALHO**, **Presidente da Comissão**, em 04/05/2026, às 17:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **TOMAS DANIEL MENENDEZ RODRIGUEZ**, **Membro da Comissão**, em 04/05/2026, às 17:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Thaís Guinami Pereira Alves**, **Usuário Externo**, em 11/05/2026, às 17:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Bruno Christian Silva dos Santos**, **Usuário Externo**, em 11/05/2026, às 18:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Processo nº 23118.006665/2026-52 SEI nº 2616922

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de concluir esta etapa maravilhosa da minha caminhada, Ele tem me abençoado muito com saúde, sabedoria, trabalho, livramentos, e tem cuidado da minha família, meus filhos Daniel e Miguel, minha esposa Livia, minha mãe Cida, irmãos, eles são minha base e rede de apoio abençoada por Deus. Agradeço também as pessoas maravilhosas que Deus colocou em minha trajetória, meus colegas de turma Renan Garcia e Vitor Sousa, colegas de trabalho e amigos na cidade de Humaitá AM como a senhora Antônia do Rosário grande amiga que me acolheu junto com sua família, meu grande amigo Professor Mestre, egresso do Profmat Carlos Henrique Gonçalves Lopes, que também foi um importante apoiador nessa trajetória. Obrigado aos Professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Rondônia pelo grande apoio, incentivo e empenho em todas as aulas. E minha Orientadora Professora Doutora Marizete Nink de Carvalho como sempre uma grande profissional, muito técnica em suas sugestões e orientações que, abençoada e com sabedoria conduziu todo o processo de construção deste trabalho passando todas as coordenadas.

"A beleza da matemática só se mostra aos seguidores mais pacientes."(Mirzakhani, 2014)

Resumo

Esta dissertação apresenta a elaboração de um caderno didático voltado ao ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. O estudo investiga os desafios contemporâneos do ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, caracterizado historicamente por abordagens fragmentadas e pela passividade do estudante, analisando dados do Ideb, artigos e dissertações que evidenciam a fragilidade na consolidação dos conceitos geométricos, justificando a necessidade da elaboração de metodologias que promovam aprendizado mais significativo. Teórica e metodológicamente fundamentado no tripé de Elon Lages Lime e nas estratégias de resolução de problemas de George Polya, a pesquisa propõe uma sequência didática com atividades exploratórias e a resolução de problemas, buscando promover a construção de conceitos geométricos de forma significativa, integrando Geometria e Álgebra, tornando o aprendizado mais dinâmico. O material foi estruturado para favorecer a investigação, a argumentação e o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, articulando teoria e prática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa bibliográfica cujo objetivo principal é oferecer subsídios didáticos que possam ser utilizados por professores na abordagem da Geometria. Conclui-se que a elaboração de recursos pedagógicos com foco em atividades exploratórias e resolução de problemas constitui uma estratégia promissora para o ensino de Geometria, contribuindo para a formação crítica e reflexiva dos estudantes.

Palavras-chave: Geometria. Caderno. Atividades Exploratórias.

Abstract

This dissertation presents the development of a didactic workbook aimed at the teaching of Geometry in the final years of Elementary Education. The study investigates contemporary challenges related to Geometry teaching, historically marked by fragmented approaches and student passivity, based on the analysis of Ideb data, academic articles, and dissertations that highlight weaknesses in the consolidation of geometric concepts. In this context, the research justifies the need for teaching methodologies capable of promoting more meaningful learning. The study is theoretically and methodologically grounded on Elon Lages Lima's educational tripod and on George Polya's problem-solving strategies. It proposes a didactic sequence composed of exploratory activities and problem-solving situations, seeking to promote the meaningful construction of geometric concepts through the integration of Geometry and Algebra, making the learning process more dynamic and participatory. The material was structured to encourage investigation, argumentation, and the development of students' autonomy, articulating theory and practice. This research is characterized as a qualitative bibliographic study whose main objective is to provide didactic support for teachers in the teaching of Geometry. The results indicate that the development of pedagogical resources focused on exploratory activities and problem solving constitutes a promising strategy for Geometry teaching, contributing to students' critical and reflective education.

Keywords: Geometry. Teaching Manual. Exploratory Activities.

Lista de Ilustrações

Lista de Símbolos

α	Letra grega alfa
β	Letra grega beta
Γ	Letra grega gamma
Δ	Letra grega Delta
Λ	Letra grega Lambda
ζ	Letra grega minúscula zeta
π	Letra grega pi
$\in$	Pertence
$\|$	Paralelo
$\perp$	Perpendicular
$\equiv$	Congruente
$\iff$	Equivale
$\sim$	Semelhante
$\angle$	Ângulo
$\approx$	Aproximação

Sumário

1 Introdução

A Geometria desempenha um papel importante no desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, pois possibilita a compreensão de conceitos sobre espaço e forma, além de favorecer a modelagem de situações do mundo real. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018, p. 271), “a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.” No entanto, o ensino desse campo da Matemática enfrenta diversos desafios, como a excessiva abstração presente, por exemplo, na geometria de posição, e a ausência de conexões com aplicações dinâmicas e práticas em sala de aula.

Nesse contexto, a presente pesquisa de mestrado profissional tem como objetivo elaborar um caderno didático voltado ao ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. O trabalho consiste na produção de um caderno didático estruturado a partir da organização sistemática dos objetos de conhecimento, incluindo definições, exercícios resolvidos, exercícios propostos e as atividades exploratórias. Na construção foram adotados os seguintes objetivos norteadores: apresentar definições de forma sucinta; estabelecer conexões entre as unidades temáticas Álgebra e Geometria; propor exercícios resolvidos com explicitação de estratégias; e oferecer atividades exploratórias que retomem o estudo ativo da Geometria. A intenção é oferecer aos professores um recurso pedagógico que favoreça a aprendizagem significativa e o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos e de estratégias de resolução de problemas.

De natureza qualitativa, a pesquisa se fundamenta em materiais didáticos como a coleção Realidade e Tecnologia de Souza (2018), coleção Poliedro Malanga (2017), coleção Superação Teixeira (2024), Curso Moderno Sangiorgi (1967), Iezzi (2022), além das contribuições teóricas de Polya (1977), Carvalho (2014), Lorenzato (1995), Libâneo (2006), Lima (1999), Nacarato (2005), Brasil (2018), Bicudo e Garnica (2001), Santos (2018) e Henrique (2019). Nos interessa averiguar como estes e outros autores enxergam e abordam o ensino de Geometria, não restringindo o fato à quantidade de aulas, ou número de atividades propostas, mas convergendo para um modelo onde o fazer de forma diferente, na perspectiva de abranger diferentes modos e maneiras e assim poder oferecer um conjunto ampliado de possibilidades tecnológicas ou não, como forma de tornar a essência do ensino prático e menos formal.

O estudo contempla objetos de conhecimento relevantes, tais como: a Lei angular de Tales; problemas envolvendo casos de semelhança no triângulo retângulo, isósceles e equilátero; semelhança em triângulos e polígonos; além de cálculos de áreas e perímetros de figuras planas. Cada capítulo contém uma seção sobre "Conexão com a Álgebra" onde é feita a relação entre as temáticas Álgebra e Geometria, com o objetivo de explicitar a combinação entre propriedades geométricas e o pensamento algébrico na solução de problemas.

A dissertação está organizada em capítulos, sendo o capítulo composto por esta introdução, com a contextualização do tema, a justificativa, os objetivos e a relevância da pesquisa. O segundo capítulo é dedicado ao referencial teórico-metodológico, no qual são apresentadas e discutidas algumas, dentre as principais obras e contribuições de autores que fundamentam a proposta, bem como os aspectos metodológicos adotados. Além disso, são apresentados os principais conceitos matemáticos abordados no caderno. O terceiro capítulo evidencia que, apesar da relevância da Geometria no currículo, seu ensino ainda é marcado por fragilidades históricas e metodológicas, exigindo abordagens mais integradas, investigativas e contextualizadas conforme orientações da BNCC. O quarto capítulo descreve o produto educacional, constituído pelo caderno didático de Geometria, detalhando sua organização, os conteúdos selecionados e os tipos de atividades propostas. Por fim, no quinto capítulo apontamos as considerações finais, destacando as contribuições da pesquisa para o ensino de Geometria e apontando possibilidades de continuidade e aprofundamento em trabalhos futuros.

2 Referencial Teórico-Metodológico

A presente pesquisa se fundamenta nas contribuições de diferentes autores e documentos oficiais que orientam o ensino da Matemática, com ênfase na importância das atividades exploratórias, da resolução de problemas e das construções geométricas para o desenvolvimento do pensamento matemático. Segundo Lorenzato (2006), a aprendizagem da Geometria deve partir de experiências concretas e visuais, possibilitando que os alunos desenvolvam a intuição de espaço e forma antes da formalização dos conceitos matemáticos. Nesse sentido, a abordagem desta pesquisa busca integrar recursos tecnológicos, atividades dinâmicas e práticas que potencializem a aprendizagem. No que tange ao aspecto prático, e tendo como ideal – ainda que nem sempre possível – é importante que o ensino ofereça ideias que ajudem a criar modelos ou alternativas para organizar os conteúdos programáticos.

A literatura aponta que grande parte das dificuldades no aprendizado da matemática decorre não apenas da natureza abstrata da disciplina, mas também de práticas pedagógicas que ainda privilegiam a memorização de procedimentos, em detrimento da compreensão conceitual, da investigação e da resolução de problemas. Como afirma Dante (2018), "o aluno não aprende Matemática apenas ouvindo explicações; ele necessita vivenciar situações, experimentar, descobrir e refletir sobre o que faz". Essa crítica, recorrente entre educadores e pesquisadores, evidencia a necessidade de estratégias mais significativas que promovam a autonomia intelectual dos estudantes.

No campo específico da Geometria, as dificuldades se acentuam. Importantes estudos acadêmicos como Pereira (2001) e Rodrigues (2016), indicam que os alunos chegam aos anos finais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio com pouca familiaridade de noções básicas de forma, medida, orientação espacial e propriedades geométricas. De forma semelhante, Lorenzato (1995) observa o obstáculo ao afirmar que "sem a Geometria, perde-se a primeira oportunidade de desenvolver o pensamento espacial que a criança possui naturalmente". Tais observações continuam atuais e dialogam diretamente com o cenário vivido pelas escolas, como afirma Wolfart (2025) que os resultados analisados em sua pesquisa mostram que estudantes ainda apresentam dificuldades em associar conteúdos matemáticos em a situações do seu dia a dia, bem como aplicá-los na prática, relacionando unidades de medidas, sistema métrico de comprimento e volume.

Essas problemáticas revelam a urgência de metodologias que recuperem o sentido do ensino da Geometria como campo de investigação, visualização e construção. Conforme indicam Duval (2011) e Hiele (1986), o desenvolvimento do pensamento geométrico depende de múltiplos registros de representação, de atividades que fomentem a construção progressiva de níveis de raciocínio e de experiências que permitam ao estudante transitar entre observação, manipulação, conjectura e validação. As dificuldades constatadas entre os alunos, portanto, não são resultado apenas de "falta de estudo", mas de uma ausência estrutural de abordagens que valorizem a intuição inicial, o uso de figuras, as manipulações concretas e as representações interligadas — elementos essenciais para que a Geometria seja compreendida como um campo vivo e significativo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais Secretaria de Educação Fundamental (1998) destacam a relevância de explorar as relações métricas e de proporcionalidade em figuras geométricas, favorecendo a construção de um raciocínio matemático mais estruturado. Assim, esta investigação pretende articular conceitos geométricos com aplicações reais, como o perímetro do terreno para cercar e forma da praça semicircular, bem como o comprimento real da motoniveladora usando a definição de escala, promovendo uma aprendizagem significativa por meio de exercício exploratório.

D'Ambrosio (1996) enfatiza que o ensino de Matemática deve considerar sua aplicabilidade em diferentes contextos, permitindo que os alunos compreendam sua importância além do ambiente escolar. Nesse sentido, a pesquisa se justifica pela necessidade de oferecer aos alunos experiências de aprendizagem que relacionem propriedades de objetos matemáticos a problemas concretos de geometria, tornando-os mais acessíveis e relevantes.

Na prática, se pudéssemos trazer para a sala de aula situações reais vividas pelos alunos em suas casas, teríamos um ensino mais significativo. A organização dos espaços da residência, a disposição dos móveis, o cálculo de áreas e medidas para reformas ou construções, bem como a observação das formas presentes nos objetos do dia a dia, poderiam ser explorados como problemas geométricos. Assim, a Geometria deixaria de ser apenas um conteúdo abstrato e passaria a dialogar com as necessidades concretas, aproximando-se das experiências familiares e cotidianas dos estudantes.

A elaboração de uma sequência didática estruturada em uma apostila — ou caderno de atividades — apresenta potenciais reconhecidos no ensino de Matemática, pois permite articular conteúdos, estratégias e representações de maneira progressiva e coerente. Materiais desse tipo favorecem a autonomia do estudante, possibilitam revisitar ideias centrais ao longo do percurso e oferecem ao professor uma ferramenta organizada de mediação pedagógica. Lorenzato (2006) destaca o papel formativo desses materiais ao apontar que sua utilização contribui para sistematizar o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o mais acessível e significativo tanto para alunos quanto para docentes.

> Um bom material didático ensina não somente conteúdos, mas também uma forma de pensar, pois conduz o aluno a caminhos de descoberta, exploração e sistematização de ideias, desafiando-o a relacionar o que aprende com situações novas. (Lorenzato, 2006, p. 21).

Essa forma de organização alinha-se com as propostas curriculares atuais. A BNCC, ao tratar da unidade temática Geometria, reforça que os estudantes devem desenvolver habilidades de observação e raciocínio dedutivo. O documento enfatiza que:

> “nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. ” (Brasil, 2018, p. 272).

Além disso, a BNCC recomenda que o ensino desse eixo deve se apoiar em recursos didáticos diversificados, capazes de favorecer a exploração prática e a contextualização dos conteúdos.

> “[...] recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.” (Brasil, 2018, p. 298).

Esse princípio converge com pesquisas que destacam o papel das atividades exploratórias na aprendizagem. Em diversas dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) como Wolfart (2025) e Ribeiro (2025) sobre o uso do GeoGebra no ensino de Geometria, evidencia-se que ambientes de exploração — tanto no papel quanto em softwares — permitem ao aluno agir sobre a figura, testar hipóteses, visualizar transformações e desenvolver intuições fundamentais para a compreensão conceitual.

A ênfase em problemas, investigações e estratégias heurísticas encontra respaldo profundo em Polya (1977). Seu clássico *How to Solve It* fundamenta uma visão de aprendizagem ativa na qual o estudante protagoniza a busca por caminhos de solução. Em uma passagem, ele afirma:

> “O estudo da Heurística tem objetivos "práticos": melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática.” (Polya, 1977, p. 87).

Essa perspectiva contribuiu significativamente para o desenho desta proposta, na medida em que a apostila busca não apenas apresentar respostas, mas mostrar estratégias, comparar abordagens, justificar procedimentos e estimular o raciocínio crítico, conforme as heurísticas de Pólya: compreender o problema, traçar um plano, executá-lo e revisar a solução. A literatura da área também reforça que sequências didáticas com investigação, ampliam a metacognição do estudante. Como afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 305)“. As investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação de testes de conjecturas e a procura de demonstração de generalizações. ”

No contexto do PROFMAT, vários trabalhos de Geometria como Negrini (2026) evidenciam que a combinação de atividades exploratórias com problemas desafiadores — sobretudo quando apoiada no uso do GeoGebra — contribui para desenvolver intuições, confirmar hipóteses e visualizar relações não triviais entre as figuras. Essas pesquisas apontam que, ao manipular construções, arrastar vértices e observar invariantes, o aluno compreende mais profundamente conceitos como paralelismo, perpendicularidade, proporcionalidade, áreas e semelhança.

2.1 Objetivos

Com base nos desafios apresentados e no referencial que fundamenta esta pesquisa, definiram-se os objetivos que direcionam a elaboração do "Caderno de Geometria Plana". O objetivo geral é elaborar um caderno didático voltado ao ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. Para concretizar essa proposta, propõe-se os seguintes objetivos específicos:

1. Apresentar definições de forma sucinta, priorizando a clareza conceitual para o estudante;

2. Estabelecer conexões entre as unidades temáticas Álgebra e Geometria, demonstrando a integração necessária entre esses campos;

3. Propor exercícios resolvidos com explicitação de estratégias, utilizando as heurísticas de Polya para fomentar a autonomia;

4. Oferecer atividades exploratórias (manuais e no software GeoGebra) que resgatem o caráter investigativo do ensino de Geometria;

Desse modo, uma sequência didática em formato de caderno tem potencial para integrar múltiplas dimensões: explicações sucintas, exercícios resolvidos, desafios graduados, exercícios exploratórios e momentos de investigação, conexão entre Álgebra e Geometria. Assim, constitui-se como um ambiente de aprendizagem intencional, capaz de apoiar estudantes que apresentam dificuldades e, ao mesmo tempo, favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico recomendado pela BNCC.

O produto educacional desenvolvido — o Caderno de Geometria para os Anos Finais do Ensino Fundamental — nasce da necessidade de oferecer aos estudantes um percurso estruturado, acessível e pedagogicamente coerente com os principais tópicos da Geometria escolar. Essa organização em forma de “passeio” tem a intenção de guiar o aluno de maneira gradual e significativa por conteúdos essenciais como ponto, reta e plano, ângulos, curvas fechadas simples, polígonos, triângulos, semelhança, congruência, círculo, perímetros e áreas. Cada capítulo foi pensado para conectar conceitos, procedimentos e aplicações, permitindo ao estudante compreender a Geometria como um grande sistema de relações, e não como um conjunto isolado de fórmulas a decorar.

Essa preocupação com a significação dos conteúdos se alinha às reflexões de Libâneo (2006), para quem o ensino não pode restringir-se à simples ordenação lógica dos conteúdos. Em suas palavras:

> Não basta a seleção e organização lógica dos conteúdos para transmiti-los. Antes, os próprios conteúdos devem incluir elementos da vivência prática dos alunos para torná-los mais significativos, mais vivos, mais vitais, de modo que eles possam assimilá-los ativa e conscientemente. (Libâneo, 2006, p. 128).

Esse princípio está presente na concepção deste caderno, que procura articular cada tópico geométrico a situações reais, problemas contextualizados, investigações e interpretações ligadas à experiência cotidiana dos alunos. A Geometria, assim, deixa de ser apenas um capítulo do livro didático e passa a ser uma forma de olhar, explicar e agir sobre o mundo.

A estrutura do material também foi fortemente inspirada no tripé formativo proposto por Elon Lages Lima — referência amplamente citada em materiais didáticos, cursos de formação e documentos do PROFMAT. Para Lima (1999), a aprendizagem matemática sólida exige um trabalho equilibrado entre três dimensões fundamentais. Em seu texto clássico, encontramos o seguinte trecho:

> A fim de familiarizar gradativamente os alunos com o método matemático, dotá-los de habilidades para lidar desembaraçadamente com os mecanismos do cálculo e dar-lhes condições para mais tarde saberem utilizar seus conhecimentos em situações da vida real, o ensino da Matemática deve abranger três componentes fundamentais, que chamaremos de Conceituação, Manipulação e Aplicações. (Lima, 1999, p. 1)

Esses três pilares — Conceituação, Manipulação e Aplicações — serviram como guia para o desenvolvimento das seções de cada capítulo do caderno. Assim:

Conceituação aparece nas definições, propriedades e explicações iniciais;

Manipulação se manifesta nas construções geométricas, nos exemplos resolvidos, nas tarefas passo a passo e no uso de esquemas e figuras, bem como na integração do pensamento algébrico com as propriedades geométricas;

Aplicações surgem nos problemas contextualizados, desafios, situações reais e investigações que estimulam o raciocínio crítico. Por vezes há exercícios exploratórios antes mesmo dos conceitos e propriedades formalmente apresentados.

O processo de elaboração do material incorporou ainda atividades provenientes de diversas fontes de qualidade reconhecida. Exercícios e problemas das coleções Poliedro, Superação, Realidade e Tecnologia, Contexto e Aplicações, entre outros livros didáticos do Ensino Fundamental, serviram de referência para a formulação de conjuntos de atividades progressivas, adaptadas aos objetivos do produto. As tarefas exploratórias, por sua vez, foram inspiradas em materiais de apoio de professores, experiências documentadas em dissertações do PROFMAT e propostas de uso de softwares como GeoGebra, amplamente utilizados em pesquisas sobre visualização geométrica como Ribeiro (2025) e Wolfart (2025).

Além disso, buscou-se integrar as necessidades reais dos alunos, conectando-as às estratégias de resolução de problemas fundamentadas em Polya (1977), que consistem em quatro etapas:

1) Compreensão;

2) Elaboração de um plano;

3) Execução do plano;

4) Verificação.

Compreensão: etapa em que se busca entender o problema, identificando os dados fornecidos, o que se deseja encontrar e as relações envolvidas.

Elaboração do Plano: consiste na definição de estratégias para resolver o problema, escolhendo métodos, propriedades, teoremas ou procedimentos adequados.

Execução do Plano: momento em que as estratégias escolhidas são aplicadas, realizando cálculos, construções ou argumentações necessárias para obter a solução.

Verificação: etapa destinada à análise da solução obtida, verificando sua coerência, validade e adequação ao problema proposto.

Ademais, cada capítulo apresenta momentos em que o estudante é convidado a interpretar, conjecturar, testar e revisar procedimentos — reforçando, portanto, uma abordagem ativa e investigativa, coerente com as recomendações da literatura contemporânea e com a BNCC.

Assim, o Caderno de Geometria se constitui como um protótipo estruturado de sequência didática, que pode ser utilizado por professores como apoio em suas aulas, como material de reforço, recuperação ou aprofundamento, ou ainda como base para retomadas de conteúdos em transições de série. Apesar de não aplicado neste estudo, trata-se de um produto construído com aplicação didática, fortemente amparado na teoria e profundamente alinhado às demandas da escola básica.

2.2 Fundamentação Teórica

2.2.1 Elementos Primitivos

Primeiro começamos com uma ideia simples sobre o que é Geometria, segundo (Iezzi, 2022) "A Geometria tem por objetivo estudar objetos e elementos da natureza a fim de estabelecer relações entre os formatos deles e as figuras geométricas correspondentes."

Precisamos dos elementos mais básicos em geometria, que são Ponto, Reta e Plano. Como são os elementos mais básicos, não existem outros conceitos mais simples para defini-los. Portanto, eles são aceitos intuitivamente, baseando-se no conhecimento empírico conforme Sangiorgi (1967).

O **Ponto** é adimensional, sem comprimento, largura ou altura.

Toda **Reta** é um conjunto cujos elementos são Pontos.

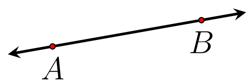

Figura 2.1 – Reta $\overleftrightarrow{AB}$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Sangiorgi (1967)

Todo **Plano** é um conjunto cujos elementos são pontos.

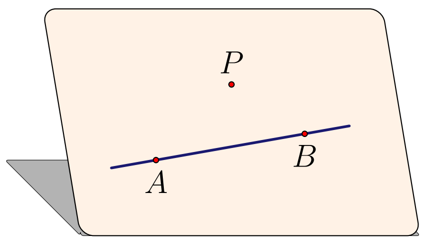

Figura 2.2 – Reta $\overleftrightarrow{AB}$, com P fora de $\overleftrightarrow{AB}$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Dolce e Pompeo (2013)

Pontos que pertencem à mesma reta são chamados **Pontos Colineares**.

Observação: o **ponto** denotado por uma marca no papel, sem movimentar a ponta da caneta.

Assim como em Gonçalves (2024), para o andamento dos estudos em Geometria é essencial que sejam admitidos alguns **axiomas**:

Axioma 2.1. *(Incidência) Por dois pontos distintos passa uma e somente uma reta.*

Axioma 2.2. *(Paralelas) Dados uma reta r e um ponto P, que não pertence a r, existe uma e somente uma reta paralela a r que passa por P*

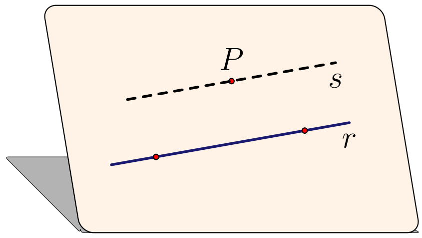

Figura 2.3 – Reta r, com P fora de r e $s \parallel r$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Dolce e Pompeo (2013)

Definição 2.1. *(Semirreta) A Semirreta $\overrightarrow{AB}$, têm origem no ponto A e passa por B.*

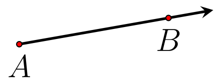

Figura 2.4 – Semirreta $\overrightarrow{AB}$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Dolce e Pompeo (2013)

Definição 2.2. *(Segmento) O Segmento $\overline{AB}$, tem origem no ponto A e fim no ponto B.*

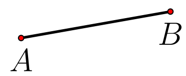

Figura 2.5 – Segmento de reta $\overline{AB}$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Dolce e Pompeo (2013)

Para definir a medida de um segmento, precisamos estabelecer a correspondência entre uma unidade de medida fixada em uma reta numerada e os números reais, conceito que apoia-se em Sangiorgi (1967):

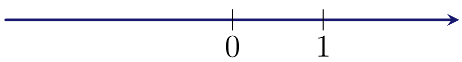

Figura 2.6 – Unidade de Medida de um Segmento

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Sangiorgi (1967)

Como os pontos, aos quais associamos a 0 e 1, foram escolhidos arbitrariamente, fica associado a eles uma unidade sobre a reta (poderia ser cm, mm, ...) permitindo associar pontos correspondentes aos restantes números reais. Dessa forma, fica definida uma correspondência entre os números reais e os pontos da reta com qualquer unidade.

- O número real correspondente a cada ponto é denominado abscissa do ponto.

- o ponto correspondente ao 0 é denominado origem do sistema (abscissa nula).

Desse modo, considere a reta r dos pontos correspondentes fixados 0 e 1. Sejam A e B dois pontos de r cujas abscissas são, respectivamente, x e y números reais com $x < y$:

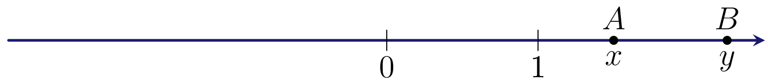

Figura 2.7 – Medida de um Segmento

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Sangiorgi (1967)

Definição 2.3. *(Medida de um Segmento) Chama-se medida do segmento $\overline{AB}$ ao número real não-negativo $y - x$, indicado por $m(\overline{AB}) = y - x$.*

Definição 2.4. *(Segmentos Congruentes) Dois segmentos são congruentes quando possuem a mesma medida.*

Em símbolos: $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \iff m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$

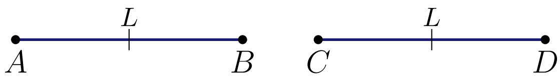

Figura 2.8 – Segmentos Congruentes ($\overline{AB} \equiv \overline{CD}$)

Apoiando-se em Iezzi (2022), define-se retas concorrentes e as rescpectivas ilustrações:

Definição 2.5. *(Retas Concorrentes) Duas retas coplanares que possuem um único ponto em comum são retas* ***concorrentes***

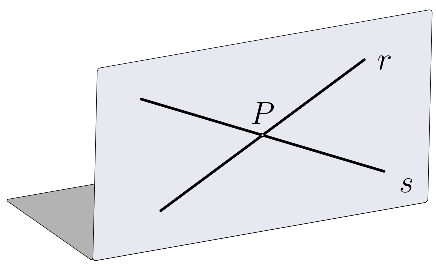

Figura 2.9 – Retas Concorrentes

2.2.2 Ângulos

As definições e figuras geométricas sobre **ângulos** e retas são fundamentadas em Iezzi (2022), Dolce e Pompeo (2013) e Neto (2013)

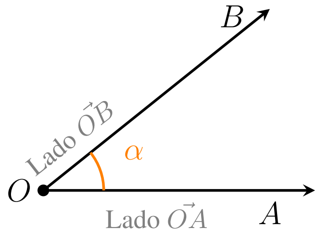

Figura 2.10 – Definição de Ângulo: união de duas semirretas de mesma origem.

Definição 2.6. *(Ângulo) É a região do plano delimitada por duas semirretas de mesma origem.*

Em símbolo: $A\widehat{O}B$

Definição 2.7. *(Ângulos Congruentes) Dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma medida.*

Em símbolos: $A\widehat{B}C \equiv D\widehat{E}F$.

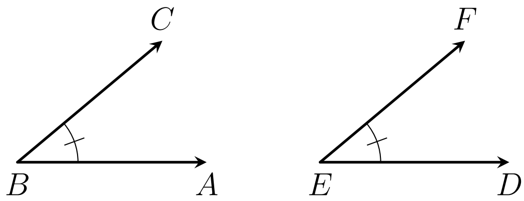

Figura 2.11 – Ângulos Congruentes: mesma medida e marcação idêntica.

Definição 2.8. *(Ângulos Adjacentes) Dois ângulos são adjacentes quando têm em comum o vértice e um dos lados e não há pontos em comum pertencentes às regiões delimitadas por eles.*

$A\widehat{O}B$ *é adjacente a* $B\widehat{O}C$

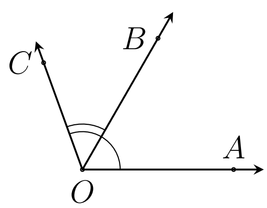

Figura 2.12 – Ângulos Adjacentes

Definição 2.9. *(Retas Perpendiculares) Duas Retas Concorrentes que formam 4 ângulos iguais.*

Em símbolo: $r \perp s$.

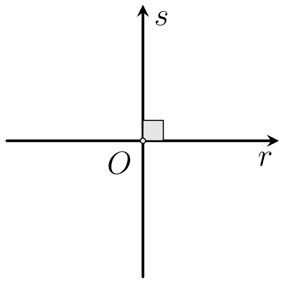

Figura 2.13 – Retas Perpendiculares formando ângulos retos.

Definição 2.10. *(Bissetriz) A bissetriz de um ângulo é a semirreta de origem no vértice do ângulo, que o divide em dois ângulos congruentes.*

Em símbolos: $\overrightarrow{BD}$ *é bissetriz de* $A\widehat{B}C \iff A\widehat{B}D \equiv D\widehat{B}C \iff m(A\widehat{B}D) = \frac{1}{2}m(A\widehat{B}C)$

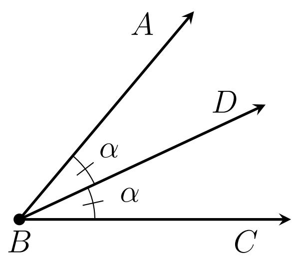

Figura 2.14 – Bissetriz $\overrightarrow{BD}$ dividindo o ângulo $A\widehat{B}C$ em dois ângulos congruentes.

Definição 2.11. *(Ângulo Raso) é formado por duas semirretas opostas.*

Em símbolos: $m(A\widehat{B}C) = 180°$ *quando as semirretas* $\overrightarrow{BA}$ *e* $\overrightarrow{BC}$ *são opostas.*

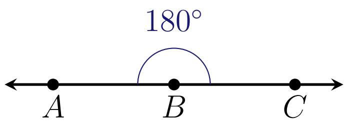

Figura 2.15 – Ângulo Raso formado por semirretas opostas.

Definição 2.12. *(Ângulos Complementares) Dois Ângulos dizem-se complementares quando a soma de suas medidas é igual a* $90°$.

Em símbolos: α *e* β *são complementares* $\iff m(\alpha) + m(\beta) = 90°$.

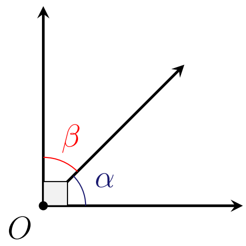

Figura 2.16 – Ângulos Complementares cuja soma das medidas resulta em $90°$.

Definição 2.13. *(Ângulos Suplementares) Dois Ângulos dizem-se suplementares quando a soma de suas medidas é igual a* $180°$

Em símbolos: α *e* β *são suplementares* $\iff m(\alpha) + m(\beta) = 180°$.

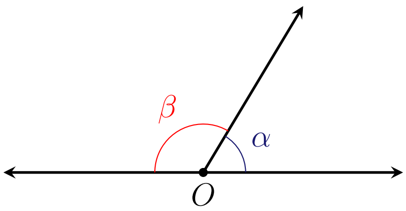

Figura 2.17 – Ângulos Suplementares cuja soma resulta em $180°$.

Definição 2.14. *(Ângulos Opostos pelo Vértice) Ângulos não adjacentes na concorrência de duas retas.*

Em símbolos: $\angle\alpha$ *e* $\angle\beta$ *são OPV* $\iff \alpha \equiv \beta \iff m(\alpha) = m(\beta)$.

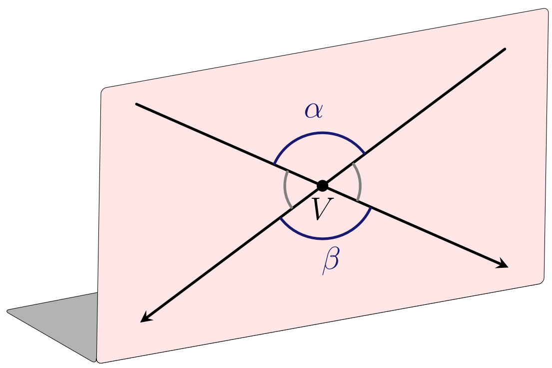

Figura 2.18 – Ângulos Opostos pelo Vértice (OPV) são congruentes.

Definição 2.15. *(Mediatriz) A mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a esse segmento que passa pelo seu ponto médio.*

Seja o segmento $\overline{AB}$ *com ponto médio* M*. A reta* m *é a mediatriz de* $\overline{AB}$ *quando:*

$$m \perp \overline{AB} \quad \text{e} \quad M \in m$$

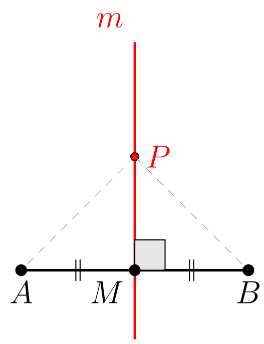

Figura 2.19 – Mediatriz m do segmento $\overline{AB}$, destacando o ângulo reto e o ponto médio M.

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Braga (1997)

Definição 2.16. *(Retas Paralelas) Duas retas em um mesmo plano e sem um ponto em comum são retas* ***paralelas****.*

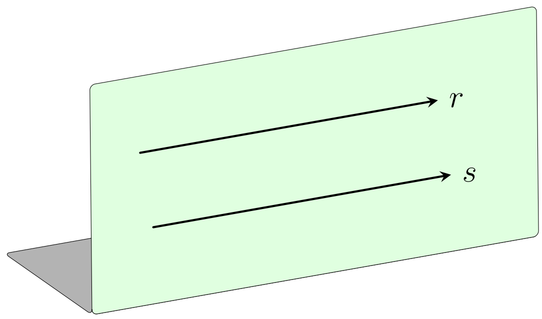

Figura 2.20 – Representação das retas paralelas r e s.

Definição 2.17. *(Feixe de Retas Paralelas) é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.*

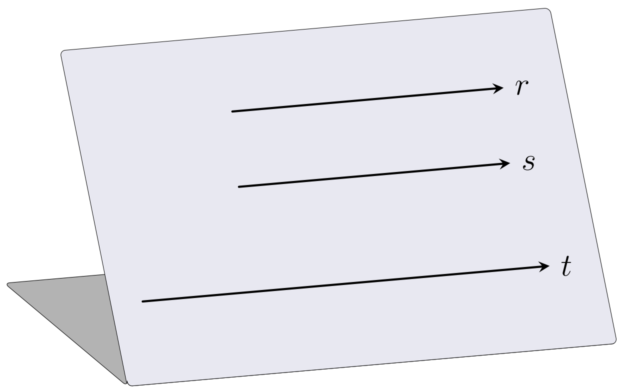

Figura 2.21 – Feixe de retas paralelas r, s e t.

Definição 2.18. *(Reta transversal) é uma reta que intercepta um feixe de retas paralelas.*

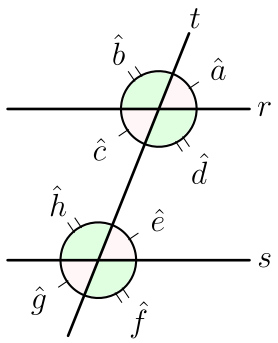

Figura 2.22 – Representação das retas paralelas r e s intersectadas pela transversal t.

Definição 2.19. *(Ângulos Correspondentes) Estão do mesmo lado da transversal, um na região interna e outro na externa, ocupando a mesma posição relativa em cada interseção. Eles são congruentes*

Em símbolos: $\hat{a} \equiv \hat{e}$ *e* $\hat{b} \equiv \hat{f}$ $\hat{d} \equiv \hat{h}$ *e* $\hat{c} \equiv \hat{g}$

Definição 2.20. *(Ângulos Alternos) Estão em lados opostos da transversal e não são adjacentes.*

- *Alternos Internos (entre as retas* r *e* s*):* $\hat{c} \equiv \hat{e}$ *e* $\hat{d} \equiv \hat{f}$
- *Alternos Externos (fora da região entre* r *e* s*):* $\hat{a} \equiv \hat{g}$ *e* $\hat{b} \equiv \hat{h}$

Definição 2.21. *(Ângulos Colaterais) Estão do mesmo lado da transversal. Diferente dos anteriores, eles não são congruentes, mas sim suplementares, ou seja, a soma de suas medidas é* 180°.

- *Colaterais Internos:* $m(\hat{d}) + m(\hat{e}) = 180°$ *e* $m(\hat{c}) + m(\hat{f}) = 180°$
- *Colaterais Externos:* $m(\hat{a}) + m(\hat{h}) = 180°$ *e* $m(\hat{b}) + m(\hat{g}) = 180°$

2.2.3 Triângulos e Polígonos

As definições, ilustrações geométricas e teoremas apresentados nesta e nas demais seções foram sistematizados com base em Iezzi (2022), Dolce e Pompeo (2013), Neto (2013) e Teixeira (2024).

Definição 2.22. *(Triângulo) Triângulo é a figura geométrica plana formada por três pontos não colineares e pelos segmentos de reta que unem esses pontos dois a dois.*

Um triângulo de vértices A*,* B *e* C *é denotado por* $\triangle ABC$*. Seus lados são os segmentos* $\overline{AB}$*,* $\overline{BC}$ *e* $\overline{AC}$*.*

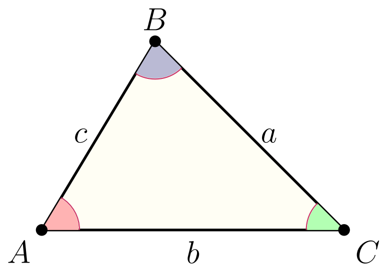

Figura 2.23 – Triângulo $\triangle ABC$ e os seus elementos: vértices, lados e ângulos internos.

Teorema 2.1. *(Condição de Existência de Triângulos) Para que três segmentos de reta possam formar um triângulo, a medida de qualquer um dos lados deve ser sempre menor que a soma, e maior que a diferença, das medidas dos outros dois lados.*

Para um triângulo de lados a, b e c, as condições de existência são dadas pelas seguintes desigualdades:

$$a < b + c \text{ e } a > |b - c|$$

$$b < a + c \text{ e } b > |a - c|$$

$$c < a + b \text{ e } c > |a - b|$$

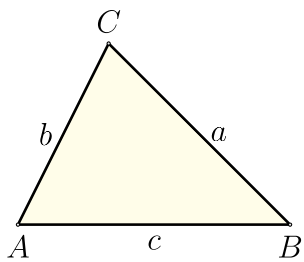

Figura 2.24 – Condição de Existência de Triângulos

Teorema 2.2. *(Soma dos Ângulos Internos) Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos seus ângulos internos é igual a* $180°$ *(um ângulo raso).*

Seja um triângulo $\triangle ABC$ *com ângulos internos* $\hat{A}$, $\hat{B}$ *e* $\hat{C}$*, então:*

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$$

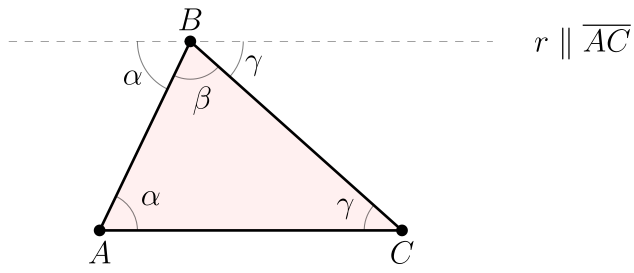

Figura 2.25 – Ideia de demonstração visual da Soma dos Ângulos Internos via retas paralelas e ângulos alternos internos.

Definição 2.23. *(Triângulo Isósceles) Um triângulo é classificado como **isósceles** quando possui, pelo menos, dois lados com medidas iguais (congruentes). O lado com medida distinta é geralmente chamado de **base**, e o ângulo oposto à base é o ângulo do vértice.*

Notação:

- ***Lados congruentes:*** *$AB \equiv AC$ (medidas iguais a a).*
- ***Base:*** *Segmento BC (medida b).*
- ***Ângulos da base:*** *$\hat{B}$ e $\hat{C}$ (em um triângulo isósceles, os ângulos da base são sempre congruentes).*

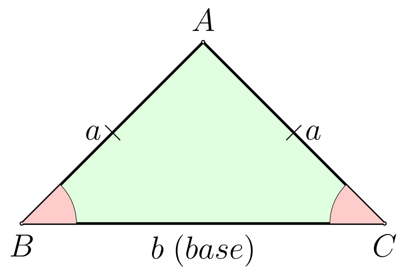

Figura 2.26 – Representação de um triângulo isósceles ABC de base BC.

Definição 2.24. *(Triângulo Equilátero) Um triângulo é classificado como **equilátero** quando possui os três lados com medidas iguais (congruentes). Como consequência dessa igualdade dos lados, todos os seus ângulos internos também são congruentes, medindo $60°$ cada.*

- ***Lados congruentes:*** *$AB \equiv BC \equiv AC$ (medida l).*
- ***Ângulos internos:*** *$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$.*
- ***Regularidade:*** *Por possuir lados e ângulos congruentes, o triângulo equilátero é um polígono regular.*

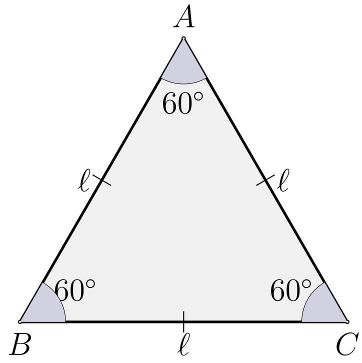

Figura 2.27 – Representação de um triângulo equilátero ABC.

Definição 2.25. *(Triângulo Retângulo) Um triângulo é classificado como* ***retângulo*** *quando possui um ângulo interno reto, ou seja, um ângulo que mede exatamente* $90°$*. Os lados que formam o ângulo reto são denominados* ***catetos*** *e o lado oposto ao ângulo reto, que é sempre o maior lado da figura, é chamado de* ***hipotenusa****.*

Notação:

- ***Ângulo Reto:*** $\hat{A} = 90°$ *(representado pelo símbolo).*
- ***Catetos:*** *Segmentos* AB *e* AC *(medidas* b *e* c*).*
- ***Hipotenusa:*** *Segmento* BC *(medida* a*).*
- ***Relação Fundamental:*** *Obedece ao Teorema de Pitágoras (*$a^2 = b^2 + c^2$*).*

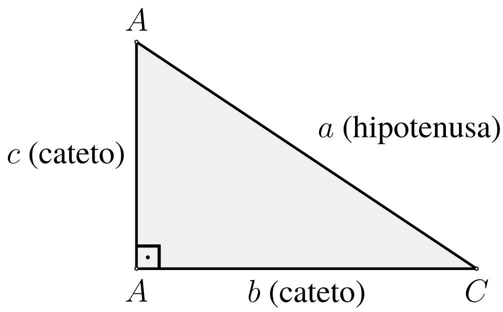

Figura 2.28 – Representação de um triângulo retângulo ABC com ângulo reto em A.

Teorema 2.3. *(Ângulo Externo) Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Observação: Seja α_{ext} *o ângulo externo ao vértice* C *do triângulo* $\triangle ABC$*. Se* α *e* β *são os ângulos internos nos vértices* A *e* B*, respectivamente, então:*

Notação: $\gamma = \alpha + \beta$

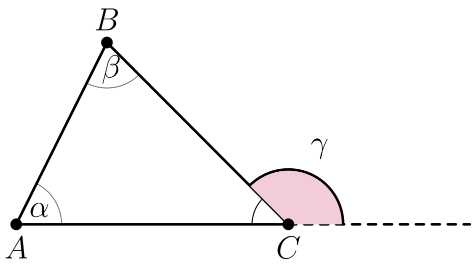

Figura 2.29 – Teorema do Ângulo Externo: γ é a soma dos ângulos internos remotos ($\alpha + \beta$).

Definição 2.26. *(Polígono) Dados n pontos distintos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ($n \geq 3$), chamamos de polígono a união dos segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_nP_1}$, tais que dois segmentos consecutivos não sejam colineares e não se interceptem, exceto em suas extremidades.*

Observação: Um polígono com n vértices é denotado por $P_1P_2 \ldots P_n$. Seus elementos principais são os Vértices (pontos P_i), os Lados (segmentos $\overline{P_iP_{i+1}}$) e os Ângulos Internos.

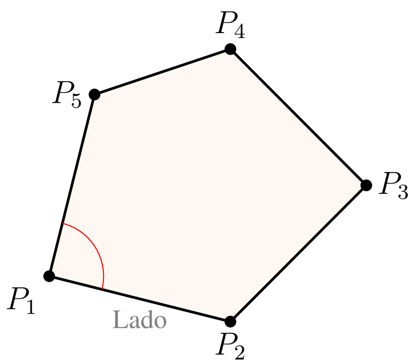

Figura 2.30 – Polígono de cinco lados (Pentágono) e seus elementos.

Definição 2.27. *(Polígono convexo) Um polígono é convexo quando todo segmento com extremidades em pontos do polígono permanece inteiramente contido nele.*

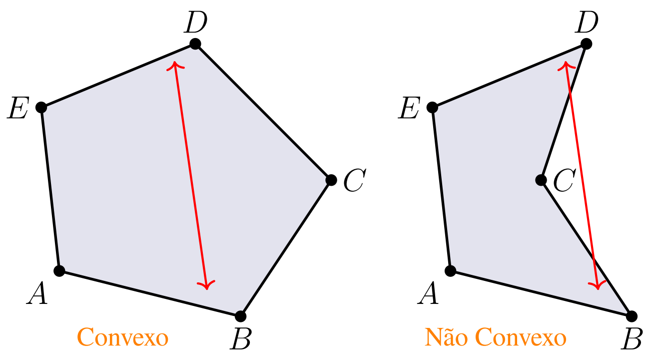

Figura 2.31 – Polígono Convexo e não convexo.

Definição 2.28. *(Polígono Regular) Um polígono convexo é chamado de regular quando possui todos os seus lados congruentes entre si (equilátero) e todos os seus ângulos internos congruentes entre si (equiângulo).*

Observação: Para um polígono regular de n lados, a medida de cada ângulo interno (a_i) é dada por:

$$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

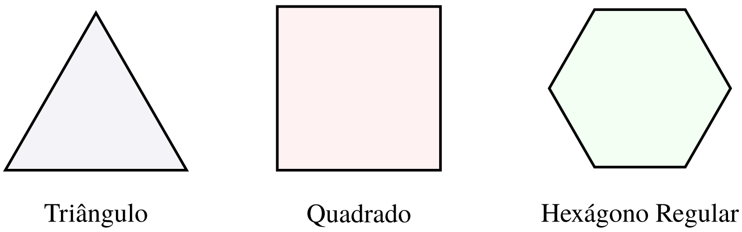

Figura 2.32 – Exemplos de polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular.

Teorema 2.4. *(Número de Diagonais) O número de diagonais d de um polígono convexo de n lados ($n \geq 3$) é dado pela relação entre o número de vértices e as conexões possíveis que não formam lados.*

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

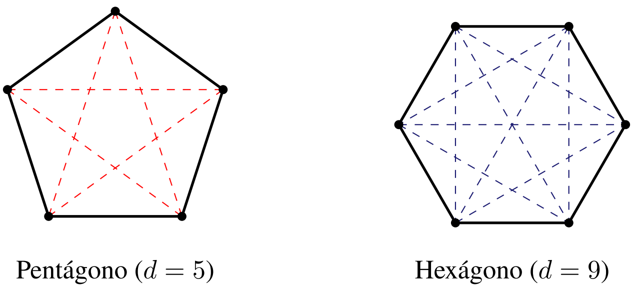

Figura 2.33 – Diagonais de um pentágono e de um hexágono representadas pelas linhas tracejadas.

2.2.4 Congruência e Semelhança

Teorema 2.5. *(Teorema de Tales) Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, então as medidas dos segmentos determinados sobre a primeira transversal são proporcionais às medidas dos segmentos correspondentes determinados sobre a segunda transversal.*

Sejam as retas paralelas $r \parallel s \parallel t$ cortadas pelas transversais u e v. Se os pontos de interseção determinam os segmentos A, B, C em u e A', B', C' em v, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

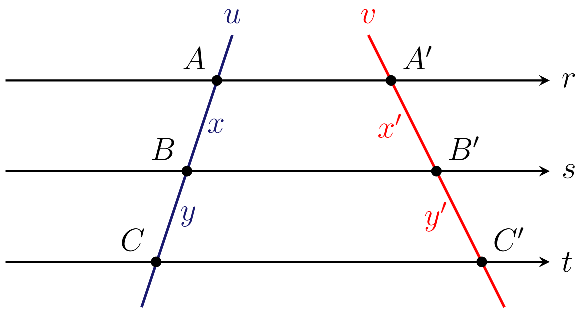

Figura 2.34 – Teorema de Tales: a proporcionalidade entre os segmentos $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$.

Teorema 2.6. *(Base Paralela de um Triângulo) Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intercepta os outros dois lados em pontos distintos, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.*

Seja o triângulo $\triangle ABC$. Se uma reta r é paralela ao lado $\overline{BC}$ e intercepta $\overline{AB}$ em D e $\overline{AC}$ em E, então os segmentos determinados são proporcionais:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \quad e \quad \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

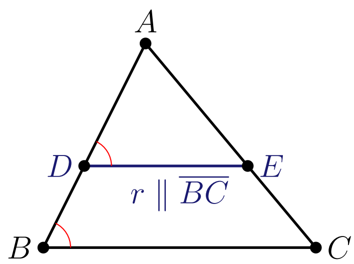

Figura 2.35 – Teorema da Base Paralela: o segmento $\overline{DE}$ determina o triângulo $\triangle ADE$ semelhante a $\triangle ABC$.

Teorema 2.7. *(Teorema da Base Média) O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e sua medida é igual à metade da medida desse terceiro lado.*

Seja o triângulo $\triangle ABC$. Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e N é o ponto médio de $\overline{AC}$, então:

$$\overline{MN} \parallel \overline{BC} \quad e \quad MN = \frac{BC}{2}$$

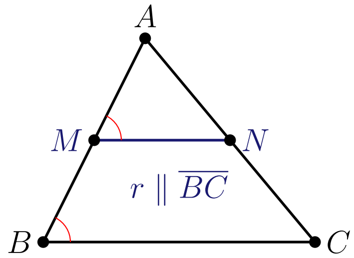

Figura 2.36 – Teorema da Base Média: o segmento $\overline{MN}$ determina o triângulo $\triangle AMN$ semelhante a $\triangle ABC$.

Teorema 2.8. *(Casos de Congruência) Dois triângulos são congruentes quando satisfazem um dos seguintes critérios de correspondência entre seus elementos:*

- ***LAL*** *(Lado, Ângulo, Lado): Dois lados congruentes e o ângulo compreendido entre eles também congruente.*
- ***ALA*** *(Ângulo, Lado, Ângulo): Dois ângulos congruentes e o lado compreendido entre eles também congruente.*
- ***LLL*** *(Lado, Lado, Lado): Os três lados respectivamente congruentes.*
- ***LAAo*** *(Lado, Ângulo, Ângulo Oposto): Um lado, um ângulo adjacente a esse lado e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.*

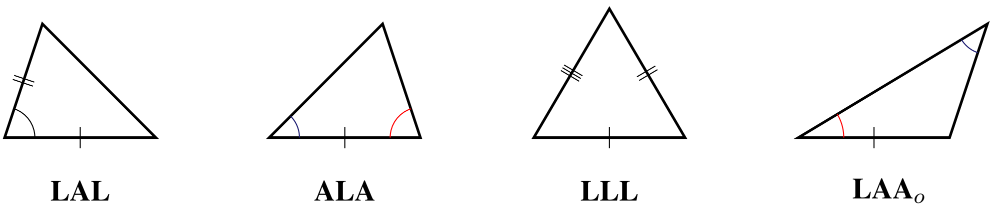

Figura 2.37 – Representação visual dos critérios mínimos de congruência de triângulos.

Definição 2.29. *(Semelhança de Triângulos) Dois triângulos são semelhantes quando possuem os três ângulos correspondentes congruentes e os lados homólogos (lados opostos a ângulos congruentes) proporcionais.*

Se $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, então existe uma constante k (razão de semelhança) tal que:

$$\hat{A} \equiv \hat{A}', \quad \hat{B} \equiv \hat{B}', \quad \hat{C} \equiv \hat{C}' \quad e \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Critérios:

- ***AA*** *(Ângulo-Ângulo): Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.*

- ***LAL*** *(Lado-Ângulo-Lado): Se dois triângulos possuem dois lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes.*
- ***LLL*** *(Lado-Lado-Lado): Se os três lados de um triângulo são proporcionais aos três lados de outro triângulo.*

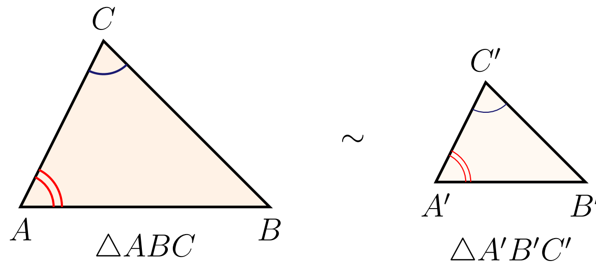

Figura 2.38 – Exemplo do caso AA: a igualdade de dois ângulos garante a proporcionalidade dos lados.

2.2.5 Pitágoras e Relações Métricas

Teorema 2.9. *(Teorema de Pitágoras) Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Seja um triângulo retângulo com hipotenusa a (lado oposto ao ângulo reto) e catetos b e c. Então:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

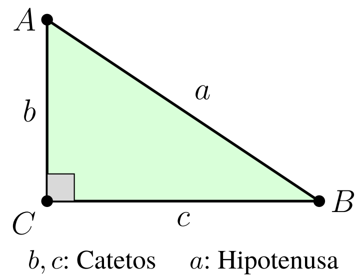

Figura 2.39 – Representação de um triângulo retângulo e seus elementos para o Teorema de Pitágoras.

Teorema 2.10. *(Relações Métricas no Triângulo Retângulo) Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide o triângulo em dois outros triângulos semelhantes entre si e ao triângulo original. Dessa semelhança, extraímos relações entre os catetos, a hipotenusa, a altura e as projeções dos catetos.*

Seja o $\triangle ABC$ retângulo em A. Consideramos:

- a: *Hipotenusa;*
- b, c: *Catetos;*
- h: *Altura relativa à hipotenusa;*
- m: *Projeção do cateto* c *sobre a hipotenusa;*
- n: *Projeção do cateto* b *sobre a hipotenusa.*

As principais relações são:

- $c^2 = a \cdot m$ *e* $b^2 = a \cdot n$ *(O quadrado de um cateto é o produto da hipotenusa pela sua projeção);*
- $h^2 = m \cdot n$ *(O quadrado da altura é o produto das projeções);*
- $a \cdot h = b \cdot c$ *(O produto da hipotenusa pela altura é igual ao produto dos catetos).*

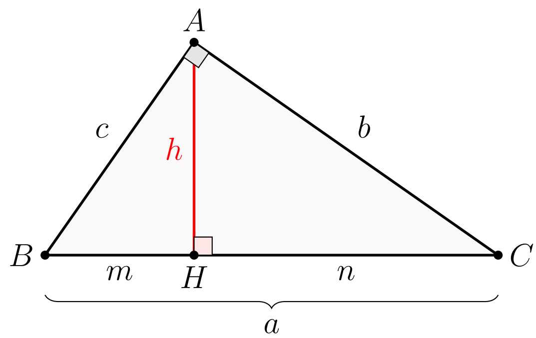

Figura 2.40 – Relações métricas no triângulo retângulo: catetos, hipotenusa, altura e projeções.

2.2.6 Circunferência e Círculo

Definição 2.30. *(Círculo) Dado um ponto* O *de um plano e uma distância* $R > 0$*, o círculo é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância ao ponto* O *é menor ou igual a* R*.*

Um círculo de centro O *e raio* R *é denotado por* $C(O, R)$*. Os elementos principais são:*

- *Raio* (R)*: Segmento que une o centro a qualquer ponto da extremidade.*
- *Diâmetro* (D)*: O dobro do raio* $(D = 2R)$*, sendo a maior corda possível.*
- *Circunferência* (C)*: O contorno ou perímetro do círculo.*

Teorema 2.11. *(Perímetro e Área) A razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro é a constante irracional* π *(*$\approx 3,14$*).*

Perímetro (Comprimento): $C = 2 \cdot \pi \cdot R$

Área: $A = \pi \cdot R^2$

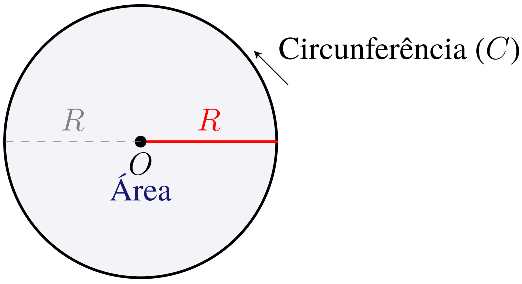

Figura 2.41 – Representação do círculo de centro O e raio R, destacando a área interna e o contorno.

Definição 2.31. *(Ângulo Central) É o ângulo cujo vértice é o centro* O *de uma circunferência e cujos lados são raios dessa circunferência.*

Notação: Se A *e* B *são pontos da circunferência, a medida do ângulo central* $A\hat{O}B$ *é igual à medida do arco* AB*.*

$$m(A\hat{O}B) = m(\widehat{AB})$$

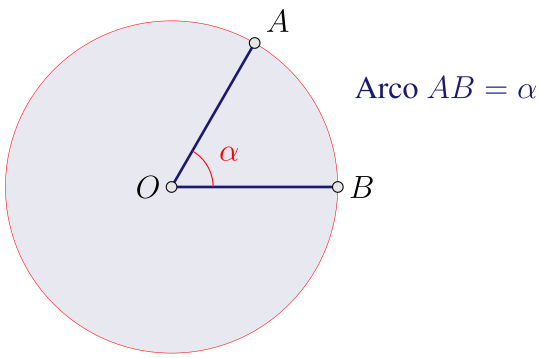

Figura 2.42 – Ângulo central e seu arco correspondente.

Teorema 2.12. *(Ângulo Inscrito) A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do ângulo central correspondente (ou metade da medida do arco interceptado).*

Notação: Seja $A\hat{P}B$ *um ângulo com vértice* P *na circunferência. Então:*

$$m(A\hat{P}B) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = \frac{m(A\hat{O}B)}{2}$$

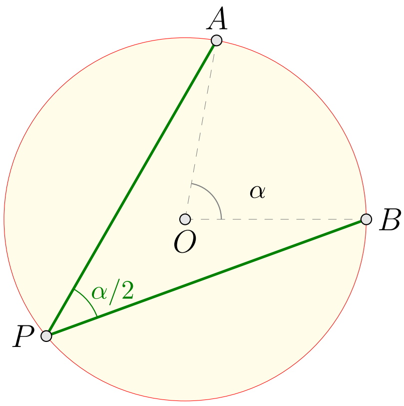

Figura 2.43 – Teorema do ângulo inscrito: a relação de metade em relação ao centro.

2.2.7 Áreas

Definição 2.32. *(Área do Retângulo) A área de um retângulo é o produto da medida da sua base pela medida da sua altura.*

Observação: Seja um retângulo de base b e altura h, sua área A é dada por:

$$A = b \cdot h$$

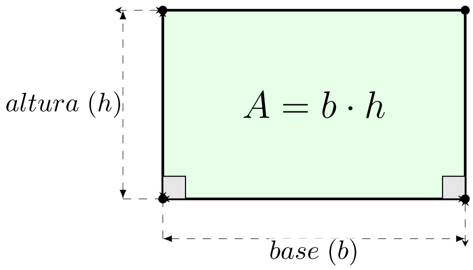

Figura 2.44 – Representação de um retângulo evidenciando o cálculo da superfície interna.

Definição 2.33. *(Área do Quadrado) A área de um quadrado é o quadrado da medida do seu lado.*

Observação: Seja um quadrado de lado l, sua área A é dada por:

$$A = l \cdot l = l^2$$

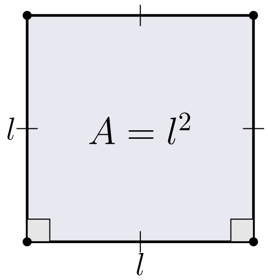

Figura 2.45 – O quadrado como polígono regular de quatro lados e sua respectiva área.

Definição 2.34. *(Área do Paralelogramo) A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida da sua base pela medida da sua altura relativa a essa base.*

Seja um paralelogramo de base b e altura h, sua área A é dada por:

$$A = b \cdot h$$

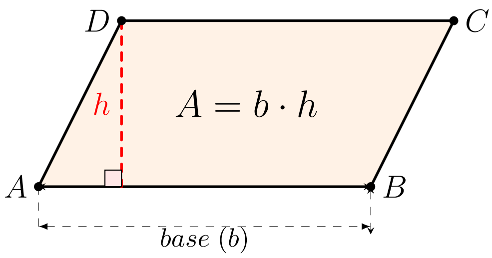

Figura 2.46 – Área do paralelogramo em função da base b e da altura perpendicular h.

Teorema 2.13. *(Área do Triângulo) A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da sua base pela medida da sua altura relativa a essa base.*

Seja um triângulo de base b e altura h, sua área A é dada por:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

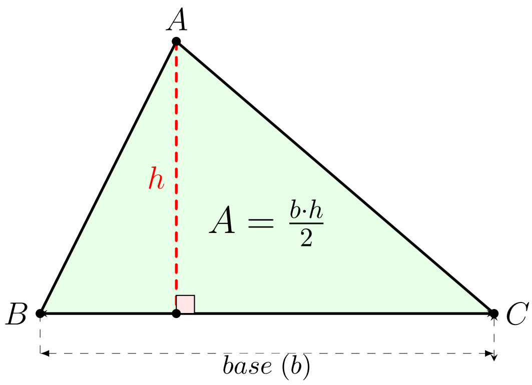

Figura 2.47 – Área do triângulo como a metade da área de um paralelogramo de mesma base e altura.

Teorema 2.14. *(Área do Trapézio) A área de um trapézio é igual ao produto da média aritmética das medidas de suas bases pela medida de sua altura.*

Seja um trapézio de bases B (maior) e b (menor), e altura h:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

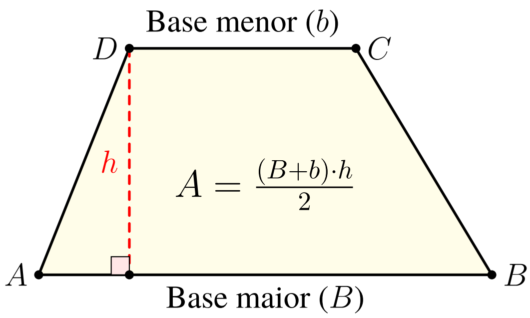

Figura 2.48 – Área do trapézio: bases paralelas B e b e pela distância perpendicular h.

3 Ensino de Geometria na Educação Básica: Desafios e Perspectivas Contemporâneas

O ensino de Matemática na Educação Básica brasileira tem sido objeto recorrente de debates, avaliações e pesquisas, uma vez que os índices de aprendizagem revelam fragilidades persistentes na consolidação de conceitos fundamentais. A tabela abaixo refere-se aos resultados obtidos nos últimos anos pelo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica em Brasil, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (2026), obtidos com as avaliações do SAEB:

Tabela 3.1 – Comparativo do Ideb e Metas entre Redes Privada e Pública (2011-2023)

Ano	**2011**		**2013**		**2015**		**2017**		**2019**		**2021**		**2023**	
Dependência	Ideb	Meta	Ideb	Meta	Ideb	Meta	Ideb	Meta	Ideb	Meta	Ideb	Meta	Ideb	Meta
Privada	6,5	6,6	6,7	6,8	6,8	7,0	7,1	7,2	7,1	7,4	7,1	7,5	7,2	-
Pública	4,7	4,4	4,9	4,7	5,3	5,0	5,5	5,2	5,7	5,5	5,5	5,8	5,7	-

Observa-se que as metas foram superadas de 2011 a 2019, mas houve queda significativa em 2021. A pandemia de Covid-19 impactou de forma notável os índice desse período. Outro aspecto relevante é a disparidade entre os resultados das escola públicas e das instituições privadas, evidenciando desigualdades estruturais no sistema educacional brasileiro.

A Geometria constitui um dos cinco pilares fundamentais do currículo de Matemática da Educação Básica atual. Entretanto, apesar de sua relevância, pesquisas indicam que seu ensino ainda ocorre de forma fragmentada, esporádica e, muitas vezes, desconectada da realidade dos estudantes. Como afirma Caldeira (2009, p. 147) "Existem, além disso, aqueles professores que ainda reforçam a ideia de que a Geometria está em estado de abandono ao darem maior ênfase para conteúdos aritméticos e algébricos por não dominarem tais conceitos geométricos. Essa ausência ou abordagem superficial compromete o desenvolvimento da visualização espacial, da argumentação e do raciocínio dedutivo.

Além disso, estudos mostram que as dificuldades dos alunos não derivam apenas de falta de conteúdos exploratórios, mas de como a Geometria é apresentada e dos objetivos atribuídos ao seu ensino, que muitas vezes se restringem à preparação para avaliações escolares.

> A prática pedagógica presente nas aulas de matemática reserva ao aluno um papel passivo: a ele cabe apenas ouvir e registrar o que o professor expõe; efetuar exercícios semelhantes ao resolvido na lousa pelo mestre; memorizar regras, das quais nem sempre entende o significado, para a resolução de questões que não despertam seu interesse e que, em geral admitem uma única solução:

> responder corretamente questões propostas nas provas. (Pavanelo, 1994, p. 7, apud Carvalho, 2014, p. 15).

A BNCC reforça a importância da Geometria ao atribuir-lhe papel essencial na formação dos estudantes. Conforme o documento:

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. (Brasil, 2018, p. 271)

Diferentes documentos oficiais e autores convergem, portanto, para a necessidade de uma abordagem mais profunda, sistemática e conectada às experiências dos estudantes. Nacarato e Passos (2003) destaca que a Geometria deve favorecer a exploração, a observação e a construção de significados, fortalecendo a autonomia intelectual dos alunos.

Outro ponto relevante refere-se à natureza intrinsecamente interdisciplinar da Geometria. É impossível ensiná-la de forma plena sem recorrer à Álgebra e às Grandezas e Medidas. Bicudo e Garnica (2001) observam que “a Geometria revela suas potencialidades quando dialoga com outras áreas da Matemática, em especial a Álgebra, que lhe fornece linguagem e generalizações”. Essa integração aparece com clareza em tópicos como cálculo de áreas, semelhança de triângulos, transformações geométricas, análises de proporcionalidades e relações métricas no triângulo retângulo.

Do mesmo modo, o campo de Grandezas e Medidas está profundamente conectado à Geometria. Segundo Lorenzato (1995), “a medição é a ponte natural entre o mundo físico e a Matemática”, e ignorá-la dentro da Geometria significa perder a dimensão aplicada da disciplina. Em dissertação recente do PROFMAT, Mendonça (2023) A aplicação de materiais concretos e grandezas reais no ensino da Matemática é uma maneira atrativa e motivadora de ensinar geometria, estimulando a compreensão e o pensamento geométrico.

A BNCC também evidencia essa interdependência entre áreas, indicando que os estudantes devem ser capazes de articular procedimentos algébricos, geométricos e métricos em situações de resolução de problemas "Espera-se que os alunos mobilizem conceitos geométricos, algébricos e de grandezas e medidas de forma integrada, aplicando-os na resolução de problemas relevantes e na interpretação de fenômenos cotidianos."(Brasil, 2018, p. 259)

Essa articulação — Geometria, Álgebra e Medidas — não é apenas natural, mas necessária para integração entre os objetos das diferentes áreas da Matemática.Como observa Lorenzato

> A Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz. (Lorenzato, 1995, p. 6)

Dessa forma, as pesquisas convergem para a ideia de que o ensino da Geometria precisa ser:

contextualizado;

integrado a outras áreas da Matemática;

exploratório e investigativo;

conectado à experiência do aluno;

sustentado por atividades que favoreçam visualização, argumentação e resolução de problemas.

Somente assim cumpre sua função formativa plena, como indicado pela BNCC e pelos principais estudos brasileiros contemporâneos sobre o tema.

4 Apresentação do Produto Educacional

Neste capítulo apresentamos o produto educacional intitulado *Caderno de Geometria Plana*, organizado em seis capítulos que contemplam temas essenciais da Geometria dos Anos Finais do Ensino Fundamental. A proposta foi concebida como uma sequência didática estruturada e progressiva, na qual cada capítulo apresenta as seguintes seções:

- **Definições e Conceitos;**
- **Exercícios Resolvidos;**
- **Exercícios Exploratórios;**
- **Exercícios Propostos.**

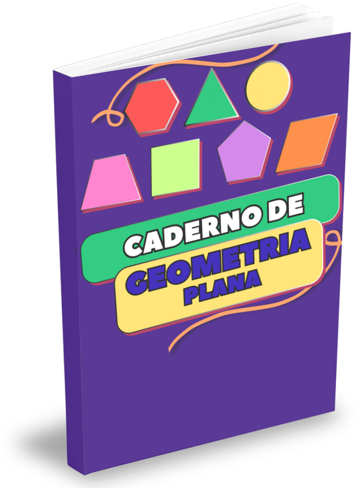

Figura 4.1 – Capa do Caderno de Geometria Plana

Fonte: Elaborado pelo autor no software Canva (2026).

Essa organização busca promover uma aprendizagem gradual, em que o estudante tem inicialmente contato com os conceitos fundamentais, observa estratégias de resolução por meio de exemplos comentados, explora propriedades geométricas por meio de construções e investigações, e, por fim, consolida o conhecimento em exercícios mais desafiadores.

O Capítulo 1 trata dos elementos primitivos da Geometria Plana: ponto, reta, plano, semirreta, segmento de reta, medida de segmento, retas concorrentes, paralelas, coplanares e curva fechada simples. A abordagem inicial privilegia a construção conceitual desses objetos geométricos, permitindo ao estudante compreender a Geometria como um sistema de relações entre formas e posições no plano, e não apenas como um conjunto de definições isoladas.

Na maioria dos capítulos há uma seção intitulada *Conexão com a Álgebra*, posicionada antes dos exercícios exploratórios. A justificativa para essa escolha reside no fato de que muitos problemas geométricos exigem a articulação entre propriedades geométricas e procedimentos algébricos, especialmente na determinação de medidas desconhecidas por meio de equações. Assim, essa integração é tratada de forma explícita, iniciando-se no primeiro capítulo com o tópico *Pensamento Algébrico na Geometria*, no qual se exploram relações entre medidas de segmentos e segmentos congruentes. Essa proposta reforça a ideia de que a separação entre Geometria e Álgebra é apenas didática, e que, na resolução de problemas, ambas atuam de maneira complementar.

Os exercícios exploratórios são posicionados entre os resolvidos e os propostos, permitindo que o estudante utilize os conhecimentos iniciais de forma mais livre e investigativa. Nesses exercícios, predominam construções geométricas, como a elaboração de curvas fechadas simples, a manipulação de segmentos e atividades usando o software Geogebra, com o objetivo de consolidar propriedades básicas e desenvolver a visualização geométrica.

4.1 Descrição e Organização dos Exercícios

A seguir, serão apresentados alguns dos exercícios que compõem o Caderno de Geometria Plana, evidenciando as potencialidades pedagógicas e habilidades da Brasil (2018) relacionadas a cada um, de modo a orientar os professores quanto às possibilidades de aplicação em sala de aula.

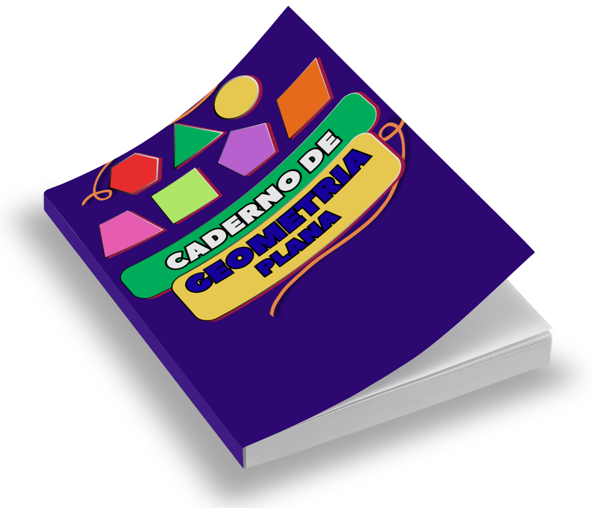

Figura 4.2 – Capa do Caderno de Geometria Plana (3D)

Fonte: Elaborado pelo autor no software Canva (2026).

4.2 Capítulo 1 – Geometria Plana

Exercício Exploratório 5

Construa, em uma folha quadriculada, três conjuntos de pontos distintos e, a partir deles, trace diferentes segmentos de reta ligando pares de pontos. Em seguida:

a) Identifique quais segmentos são congruentes;

b) Verifique quais retas obtidas são concorrentes e quais são paralelas;

c) Desenhe uma curva fechada simples que passe por pelo menos quatro dos pontos marcados.

Potencialidades pedagógicas: Esse exercício favorece a compreensão intuitiva dos conceitos primitivos da Geometria, estimulando a observação, a comparação e a experimentação. A atividade permite que o estudante construa significados para as noções de congruência de segmentos, paralelismo e concorrência, além de introduzir a ideia de curva fechada simples de forma concreta e visual. Ao explorar livremente as construções, o aluno desenvolve autonomia investigativa e inicia a transição entre a manipulação concreta e a abstração conceitual.

Em seguida, ainda no Capítulo 1, são apresentados exercícios propostos que exigem maior domínio das propriedades iniciais. Tais exercícios consolidam o vocabulário geométrico e exigem raciocínio mais sistematizado.

Habilidades:

(EF06MA22): Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

(EF06MA23): Construir algoritmos para resolver situações-problema que envolvam polígonos, circunferências e construções geométricas.

(EF04MA18): Reconhecer e itinerários e trajetos, em representações gráficas, como mapas e malhas quadriculadas, retas paralelas e perpendiculares.

(EF06MA16): Classificar figuras planas quadriláteras de acordo com seus lados e ângulos, identificando características de paralelismo e perpendicularismo de seus lados.

Exercício Proposto 7

Em um plano, considere os pontos A, B e C colineares, com $AB = 3x+2$ e $BC = x+6$. Sabendo que AB é congruente a BC, determine a medida de cada segmento.

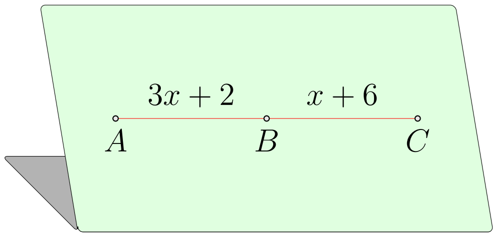

Figura 4.3 – Segmento $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Sangiorgi (1967)

Potencialidades pedagógicas: Este exercício explicita a conexão entre Geometria e Álgebra, pois exige que o estudante utilize a propriedade geométrica de congruência de segmentos para formular e resolver uma equação algébrica. Tal articulação contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico em contextos geométricos, reforçando a compreensão de que medidas desconhecidas podem ser determinadas por meio de relações matemáticas.

Habilidades:

(EF07MA18): Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

(EF06MA24): Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume, sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais.

(EF09MA06): Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis

Exercício Proposto 18

Em uma reta r, marque os pontos A, B e C nessa ordem, de modo que $AB = 2x - 1$ e $AC = 5x + 2$. Sabendo que $BC = 3x + 3$, determine o valor de x e as medidas dos segmentos.

Potencialidades pedagógicas: O problema exige que o estudante relacione a adição de segmentos colineares com a construção de uma equação algébrica, reforçando a ideia de que propriedades geométricas podem ser expressas simbolicamente. Essa abordagem fortalece a compreensão estrutural das relações métricas em uma reta.

Habilidades:

(EF07MA18): Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

(EF06MA24): Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume, sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

(EF09MA06): Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. (Nota: Aplica-se à compreensão da relação entre as medidas dos segmentos).

Na seção dedicada aos ângulos, ainda no Capítulo 1, são apresentadas definições essenciais para os anos finais do Ensino Fundamental, seguidas de exercícios resolvidos e exploratórios que envolvem construções com transferidor ou dobraduras.

Exercício Exploratório 13 (Ângulos)

Com uso da régua e compasso construa dois ângulos adjacentes cujas medidas somem $180°$. Em seguida:

a) Classifique cada ângulo quanto à sua medida;

b) Verifique, por medição, se eles são suplementares;

c) Repita a construção alterando as medidas e registre suas conclusões.

Potencialidades pedagógicas: A atividade promove a compreensão das relações entre ângulos por meio da experimentação e da medição, favorecendo a construção ativa dos conceitos de ângulos suplementares e classificação quanto à medida. O uso de instrumentos e a verificação empírica contribuem para o desenvolvimento da precisão e do pensamento geométrico.

Habilidades:

(EF08MA15): Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

(EF07MA23): Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica. (Nota: O conceito de ângulos adjacentes suplementares é a base para o estudo de ângulos em retas paralelas).

(EF06MA25): Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada a figuras geométricas e medir a abertura de ângulos, utilizando transferidor e/ou tecnologias digitais.

Exercício Proposto 20 (Ângulos e Álgebra)

Dois ângulos suplementares têm medidas expressas por $2x + 10$ e $3x - 20$. Determine a medida de cada ângulo.

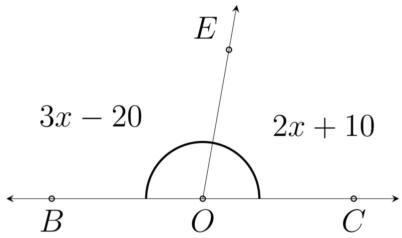

Figura 4.4 – Ângulos Suplementares $2x + 10$ e $3x - 20$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Sangiorgi (1967)

Potencialidades pedagógicas: O exercício exige a articulação entre a propriedade geométrica de ângulos suplementares e a resolução de equações, consolidando a integração entre Geometria e Álgebra e fortalecendo a interpretação simbólica de relações geométricas.

Habilidades:

(EF07MA18): Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

(EF07MA23): Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica. (Nota: Esta habilidade fundamenta o conceito de ângulos suplementares em contextos de retas e transversais).

(EF08MA15): Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. (Nota: Relaciona-se à verificação das medidas angulares encontradas).

4.3 Capítulo 2 – Triângulos

No Capítulo 2 são estudados os triângulos, figuras centrais na Geometria Plana. Os exercícios exploratórios priorizam construções baseadas na condição de existência e nas classificações dos triângulos.

Exercício Exploratório 1:

Construa triângulos com as seguintes medidas de lados:

a) 3 cm, 4 cm e 5 cm;

b) 2 cm, 3 cm e 6 cm;

c) 5 cm, 5 cm e 5 cm.

Analise quais construções são possíveis e classifique os triângulos obtidos.

Potencialidades pedagógicas: Esse exercício permite investigar empiricamente a condição de existência dos triângulos, além de explorar classificações quanto aos lados. A manipulação concreta favorece a compreensão das desigualdades triangulares e desenvolve a argumentação geométrica.

Habilidades:

(EF07MA24): Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(EF06MA18): Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.

(EF09MA15): Descrever, por meio de um fluxograma, o algoritmo para a construção de um polígono regular quando se conhece a medida do seu lado. (Nota: Esta habilidade aplica-se à sistematização do processo de construção do triângulo equilátero).

Exercício Exploratório 5

No Geogebra onstrua uma semirreta AB e um ponto C externo à semirreta. Em seguida construam o triângulo ABC e um ponto D (ver figura). O ângulo $\angle CBD$ é chamado ângulo externo do triângulo ABC.

a) Meça as medidas dos ângulos BAC e ACB e adicionem os valores obtidos. Depois meçam o ângulo DBC. O que vocês observam?

b) Mova livremente um ou mais pontos a fim de modificar a construção. Adicionem novamente os valores dos ângulos $\angle$ BAC e $\angle$ACB e comparem com o ângulo DBC. Isso sempre vai acontecer? Por quê?

c) Qual relação existe entre os ângulos externos? Apresentem, pelo menos, duas observações com justificativas.

Potencialidades Pedagógicas

A principal potencialidade pedagógica desta atividade reside na transição do pensamento empírico para o dedutivo, permitindo que o aluno descubra o Teorema do Ângulo Externo por meio da investigação direta. Ao manipular os vértices no ambiente dinâmico do GeoGebra, o estudante observa que, embora as medidas individuais variem, a relação de igualdade entre a soma dos ângulos internos não adjacentes e o ângulo externo permanece constante. Esse processo de busca por invariantes geométricas fortalece a compreensão da propriedade, substituindo a simples memorização de fórmulas pela percepção da necessidade lógica do fato geométrico.

Além disso, a exploração promove o desenvolvimento da argumentação matemática e do rigor formal. Ao ser instigado a justificar o porquê de tal relação sempre ocorrer e a investigar a soma dos ângulos externos, o aluno é conduzido a conectar conceitos prévios — como ângulos suplementares e a soma dos ângulos internos de um triângulo ($180°$). Assim, a ferramenta digital atua como um laboratório de experimentação que fundamenta a posterior formalização teórica, essencial para o amadurecimento do raciocínio geométrico.

Habilidades:

(EF07MA24): Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(EF08MA14): Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos. (Nota: Esta habilidade envolve a base lógica para demonstrações que utilizam a soma dos ângulos internos).

(EF09MA11): Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica. (Nota: Refere-se à exploração de relações angulares em figuras planas).

(EF07MA29): Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de ângulos de triângulos e de polígonos convexos regulares, como a soma dos ângulos internos, a medida de cada ângulo interno e a medida de cada ângulo externo.

Exercício Proposto 22 (Triângulos e Álgebra)

Em um triângulo isósceles, os lados congruentes medem $2x + 3$ e a base mede $3x - 2$. Sabendo que o perímetro é 32 cm, determine as medidas dos lados.

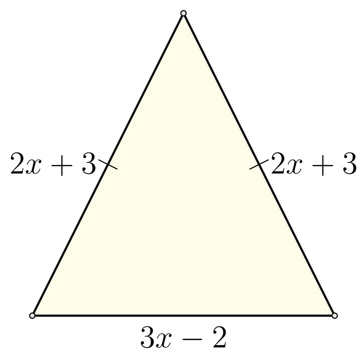

Figura 4.5 – Triângulo Isósceles $2p = 32cm$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Teixeira (2024)

Potencialidades pedagógicas: O problema integra propriedades de classificação de triângulos com modelagem algébrica, estimulando a construção de equações a partir de relações geométricas e fortalecendo o raciocínio dedutivo.

Habilidades:

(EF07MA04): Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

(EF07MA18): Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

(EF07MA24): Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(EF06MA24): Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume, sem uso de fórmulas.

4.4 Capítulo 3 – Polígonos

No Capítulo 3 são estudados os polígonos. As definições abordam propriedades como número de lados, diagonais e ângulos internos. Os exercícios exploratórios incentivam a construção de diferentes polígonos e a observação de regularidades.

Exercício Exploratório 6

Construa polígonos com 3, 4, 5 e 6 lados em papel quadriculado. Conte o número de diagonais de cada um e registre um padrão que relacione o número de lados ao número de diagonais.

Potencialidades pedagógicas: A atividade promove a descoberta de padrões e a formulação de conjecturas, favorecendo a generalização algébrica posterior da fórmula do número de diagonais de um polígono.

Exercício Exploratório 5 Geogebra Utilize a ferramenta "Polígono Regular"para construir, lado a lado, polígonos que compartilham um vértice comum, tentando preencher o plano sem deixar buracos (como um piso). Verifique as seguintes proposições sobre quais polígonos "encaixam"perfeitamente ao redor de um ponto:

(   ) É possível preencher o plano perfeitamente usando apenas triângulos equiláteros.

(   ) Três hexágonos regulares se encontram em um vértice e preenchem os $360°$ sem sobreposição.

( ) O pentágono regular é uma excelente forma para criar mosaicos sem folgas.

( ) Para que um polígono regular preencha o plano, a medida do seu ângulo interno deve ser um divisor de $360°$.

( ) É possível formar um mosaico combinando quadrados e octógonos regulares.

( ) Um polígono regular com 7 lados (heptágono) consegue preencher o plano sozinho.

Potencialidades Pedagógicas: Esta atividade promove a investigação ativa ao utilizar o GeoGebra como laboratório de experimentação geométrica. Ao tentar "ladrilhar"o plano, o aluno é levado a conectar propriedades de polígonos regulares com a soma dos ângulos ao redor de um ponto, desenvolvendo a percepção de que a viabilidade de um mosaico depende de condições algébricas específicas (divisibilidade de $360°$ pelo ângulo interno). A dinâmica de "tentativa e erro"no software favorece a formulação de conjecturas e a verificação imediata, tornando a abstração sobre ângulos internos muito mais concreta.Além disso, o exercício estimula o raciocínio lógico-dedutivo ao confrontar o aluno com formas que "falham"no preenchimento, como o pentágono e o heptágono. Isso permite discutir o conceito de pavimentação regular e semirregular, incentivando a argumentação matemática e a sistematização de conceitos como congruência de ângulos e a rigidez das formas poligonais.

Habilidades

(EF07MA27): Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

(EF08MA15): Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

Exercício Proposto 12 (Polígonos e Álgebra)

O número de diagonais de um polígono convexo é dado por

$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Determine o número de lados de um polígono que possui 20 diagonais.

Potencialidades pedagógicas: Este exercício exige interpretação de fórmula, modelagem algébrica e resolução de equação do segundo grau, evidenciando a forte integração entre Geometria e Álgebra.

Habilidades:

(EF09MA09): Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

(EF08MA11): Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.

(EF06MA18): Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.

4.5 Capítulo 4 – Congruência e Semelhança

No Capítulo 4 são abordados os casos de congruência e semelhança, com ênfase em triângulos e construções geométricas. Inicialmente, apresenta-se o exercício resolvido sobre escala:

Exercício Resolvido 3 (Escala)

O modelo de motoniveladora possui $Escala\ 1:24$ com $50cm$ de comprimento. Com essas informações, é possível encontrar o comprimento real da motoniveladora?

Figura 4.6 – Motoniveladora em Escala

Fonte: Mundo em Miniaturas (Mini Mundi, 2026)

Potencialidades pedagógicas: estimula o raciocínio de proporção numérica, a conversão entre unidades de medida (centímetros para metros) e a interpretação de grandezas em escala. Contextualiza a matemática no cotidiano, desenvolve o pensamento crítico ao exigir a verificação da coerência do resultado e promove a modelagem de situações reais.

Habilidades:

(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas (ou EF07MA09, dependendo da ênfase no uso da associação entre razão e fração).

(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano

Exercício Exploratório 1 (Congruência)

Construa dois triângulos conhecendo dois lados e o ângulo compreendido entre eles. Compare as figuras obtidas e verifique se são congruentes.

Potencialidades pedagógicas: A construção evidencia experimentalmente um dos casos de congruência de triângulos, promovendo compreensão significativa antes da formalização teórica.

Habilidades:

(EF08MA14): Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

(EF09MA12): Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. (Nota: A congruência é um caso particular de semelhança com razão igual a 1).

(EF07MA24): Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Exercício Exploratório 6

GeoGebra Construa um quadrado ABCD e façaa uma investigaçãa sobre a razão entre os lados, os perímetros e as áreas, quando ampliamos ou reduzimos a figura.

Habilidades:

(EF06MA29): Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

(EF09MA13): Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (Nota: Esta habilidade correlaciona-se ao fornecer a base teórica para a compreensão da semelhança que rege as ampliações poligonais).

(EF05MA18): Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

Exercício Proposto 7 (Semelhança e Álgebra)

Dois triângulos semelhantes possuem lados correspondentes medindo x e $2x + 4$. Se a razão de semelhança é 3, determine o valor de x.

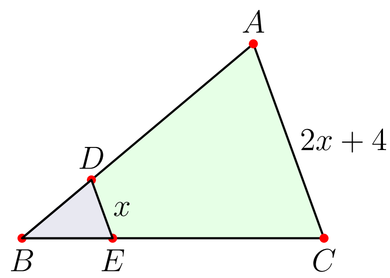

Figura 4.7 – Triângulos Semelhantes $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Fonte: Elaborado pelo autorcom base em Iezzi et al. (2016)

Potencialidades pedagógicas: O problema exige a compreensão do conceito de semelhança associado à proporcionalidade e à resolução de equações, reforçando a conexão entre representações geométricas e algébricas.

Habilidades:

(EF09MA12): Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

(EF09MA14): Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

(EF07MA17): Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

4.6 Capítulo 5 – Circunferência e Círculo

No Capítulo 5 são estudadas a circunferência e o círculo, com foco em elementos, arcos e relações métricas.

Exercício Exploratório 1 (Circunferência)

Construa uma circunferência de raio 4 cm e marque três pontos distintos sobre ela. Ligue-os formando triângulos e observe as posições relativas ao centro.

Potencialidades pedagógicas: A atividade favorece a compreensão visual das relações entre centro, raio e pontos da circunferência, além de estimular a investigação de propriedades geométricas associadas.

Habilidades:

(EF07MA22): Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

(EF07MA24): Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(EF09MA11): Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.

Exercício Exploratório 3: (Circunferência)

Com o auxílio de objetos redondos (copos, vasilhas, latas, até sólidos confeccionados) medir a circunferência e o diâmetro e calcular as respectivas razões, tabulando os resultados.

Potencialidades Pedagógicas:

A atividade proposta apresenta significativa potencialidade didática ao promover uma abordagem experimental e investigativa do conceito de razão entre a medida do comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Ao utilizar objetos do cotidiano, o estudante estabelece conexões entre a Geometria e o mundo real, percebendo a presença de formas circulares em diferentes contextos. A medição, a organização dos dados em tabela e o cálculo das razões favorecem o desenvolvimento do pensamento investigativo, da precisão na coleta de medidas e da análise de regularidades numéricas.

Além disso, a constatação empírica de que as razões obtidas se aproximam de um valor constante contribui para a construção significativa da noção do número π, não como uma fórmula previamente dada, mas como um resultado observado experimentalmente. Tal abordagem fortalece a compreensão conceitual, articula Geometria com a temática de Grandezas e Medidas e estimula habilidades de interpretação, generalização e validação de resultados, essenciais ao desenvolvimento do pensamento matemático nos anos finais do Ensino Fundamental.

Habilidades:

(EF07MA33): Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

(EF09MA01): Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). (Nota: Esta habilidade é pertinente pois a razão encontrada, π, é um número irracional).

(EF06MA24): Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais

Exercício Proposto 2 (Circunferência e Álgebra)

O comprimento de uma circunferência é dado por

$$C = 2\pi r.$$

Se o comprimento mede 10π, determine o raio.

Potencialidades pedagógicas: O exercício articula a fórmula geométrica com a resolução de equação simples, consolidando a interpretação algébrica de grandezas geométricas.

Habilidades:

(EF07MA33): Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

(EF08MA19): Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

(EF09MA14): Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. (Nota: Esta habilidade aplica-se ao contexto de relações métricas e proporcionalidade em figuras circulares).

(EF07MA11): Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

4.7 Capítulo 6 – Perímetro e Área

Por fim, no Capítulo 6 são estudados perímetro e área, conteúdos diretamente relacionados à temática Grandezas e Medidas.

Exercício Exploratório 1:

Investigando o Retângulo de Área Fixa: No GeoGebra, crie um controle deslizante b para a base e defina a altura como $h = 36/b$. Isso garantirá que a área do retângulo seja sempre 36 u.a. Mova o controle deslizante e observe a alteração no perímetro.

a) Qual é a medida da base e da altura quando o perímetro é o menor possível?

b) Que figura geométrica especial é formada nesse momento de perímetro mínimo?

Potencialidades Pedagógicas:

Esta atividade utiliza a manipulação dinâmica para introduzir um problema clássico de otimização: a relação entre perímetro e área. Ao fixar a área e permitir que o aluno varie as dimensões, o GeoGebra transforma uma função racional ($h = 36/b$) em uma experiência visual, onde o estudante percebe que o perímetro não é constante para uma mesma área. O exercício rompe com a concepção equivocada de que figuras com áreas iguais possuem perímetros iguais, promovendo a investigação sobre qual configuração geométrica é a mais "eficiente"em termos de contorno.A prática conduz o aluno à descoberta de que, entre todos os retângulos de mesma área, o quadrado é o que apresenta o menor perímetro. Essa conclusão favorece o desenvolvimento do pensamento funcional e da análise de variação de grandezas, preparando o estudante para conceitos mais complexos de máximos e mínimos, além de reforçar a identificação de propriedades específicas dos quadriláteros.

Habilidades:

(EF05MA20): Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.

(EF06MA29): Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

(EF06MA20): Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

Exercício Exploratório 2 (Área)

Construa retângulos com diferentes medidas de lados, mantendo a área constante igual a 24 unidades quadradas. Registre as dimensões encontradas.

Potencialidades pedagógicas: A atividade permite explorar a noção de área como produto de medidas e compreender que diferentes dimensões podem gerar a mesma área, favorecendo a percepção de regularidades e relações funcionais.

Habilidades

(EF05MA20): Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.

(EF06MA24): Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

(EF07MA17): Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

Exercício Proposto 16 (Perímetro, Área e Álgebra)

Um retângulo possui perímetro 30 cm. Sabendo que um dos lados mede x e o outro mede $15 - x$, determine a área do retângulo em função de x.

Potencialidades pedagógicas: O exercício promove a integração entre Geometria, Álgebra e Grandezas e Medidas, permitindo ao estudante modelar uma situação geométrica por meio de expressão algébrica e interpretar resultados.

Habilidades:

(EF07MA13): Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA31): Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.

(EF08MA11): Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes. (Nota: Esta habilidade aplica-se ao processo de generalização para a construção da função de área).

(EF09MA06): Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

5 Considerações Finais

O presente trabalho buscou responder às demandas evidenciadas Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), pelos resultados do Ideb e por artigos e dissertações, que revelam fragilidades persistentes na consolidação de conceitos geométricos fundamentais. Diante desse cenário de ensino muitas vezes fragmentado e abstrato, esta pesquisa propôs a elaboração de um caderno didático voltado para os anos finais do ensino fundamental e pautado na investigação, estabelecendo objetivos específicos que visaram resgatar o caráter experimental e integrado do estudo da Geometria.

Dessa forma, verifica-se que os objetivos específicos propostos inicialmente foram satisfeitos por meio da organização do produto em seções que privilegiam a conceituação, a manipulação e as aplicações. Esses elementos convergem para oferecer aos professores um recurso pedagógico que favoreça a aprendizagem significativa e o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas em Geometria Plana. A presença de exercícios resolvidoss evidenciando a compreensão, a elaboração do plano, a execução do plano e a verificação da solução, e exploratórios estimula tanto a investigação quanto a consolidação do conhecimento, contribuindo para o desenvolvimento integrado do pensamento geométrico, algébrico e métrico.

Em termos da pesquisa, é necessário reconhecer a fragilidade decorrente da não aplicação do produto educacional, por diversos motivos que impediram sua implementação no contexto escolar. No entanto, mesmo sem a validação prática em sala de aula, considera-se que o "Caderno de Geometria Plana" se apresenta como uma proposta didática estruturada, capaz de articular conceitos, construções e resolução de problemas.

Espera-se que, em futuras pesquisas, seja possível aplicar e avaliar o impacto desse caderno em contextos reais de ensino, ampliando sua relevância e fortalecendo a formação matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

Referências

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. *Filosofia da Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRAGA, T. *Desenho linear geométrico: problemas de desenho linear geométrico*. 14. ed. São Paulo: Ícone, 1997. ISBN 85-274-0497-4.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Brasil, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Resultados do Saeb*. 2026. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/resultados>.

CALDEIRA, A. M. A. Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio. *Editora Unesp*, 2009.

CARVALHO, M. N. d. *AS POTENCIALIDADES DO USO DA LOUSA DIGITAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA*. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Rondônia, 2014. Citação de Pavanello (1994), p. 7 apud Carvalho (2014).

DANTE, L. R. *Didática da Matemática*. 3. ed.. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. ISBN 978-85-357-1686-3.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: PROEM, 2011. v. 1. Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. ISBN 9788586326714.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: Da Teoria à Prática*. Campinas: Papirus, 1996.

GONÇALVES, N. P. *A geometria plana e a álgebra na construção de tópicos da geometria analítica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2024. 136 f. : il. color. Orientador(a): Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro.

HENRIQUE, M. P. *Caderno de Atividades Sobre Conceitos Geométricos em Ambientes de Geometria Dinâmica*. 1. ed.. ed. [S.l.]: Editora UFRJ, 2019.

HIELE, P. M. V. *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press, 1986.

IEZZI, G. *Matemática e Realidade*. São Paulo: Saraiva, 2022.

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3. Ensino Médio. ISBN 978-85-472-0539-3.

LIBâNEO, J. C. *Didática*. 5. ed.. ed. São Paulo: Cortez Editora, 2006.

LIMA, E. L. O professor de matemática. *Sociedade Brasileira de Matemática*, 1999.

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas elementares*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017. (Coleção PROFMAT, 5). Edição especial em homenagem a Elon Lages Lima. ISBN 978-85-85818-74-6.

LORENZATO, J. *Educação Infantil e Percepção Matemática*. 2. ed.. ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. *Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. Campinas: Autores Associados, 1995.

MALANGA, H. C. C. *Pré-Vestibular Matemática*. 1. ed.. ed. [S.l.]: Editora POLIEDRO, 2017.

MENDONçA, S. B. d. S. d. *O uso de materiais concretos como recurso à visualização, manipulação e construção de conceitos de sólidos geométricos*. 142 f. p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Seropédica, 2023. Orientadora: Aline Mauricio Barbosa.

Mini Mundi. *Miniatura Motoniveladora Volvo G940*. 2026. <https://minimundi.com.br>. Acessado em: 19 mai. 2026.

MIRZAKHANI, M. *Quotes on Mathematical Research and Persistence*. 2014. Epígrafe. Matemática iraniana, primeira mulher a ganhar a Medalha Fields (1977–2017).

NACARATO, A. M. *Geometria no Ensino Fundamental: reflexão e prática*. Campinas: Autores Associados, 2005.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. *A Geometria nas Séries Iniciais: repensando a prática*. Campinas: Autores Associados, 2003.

NEGRINI, R. *Aprendizagem significativa em matemática mediada pelo GeoGebra: articulações entre geometria e álgebra*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, SC, 2026. 154 f.: il. Orientador: Vítor José Petry.

NETO, A. C. M. *Geometria*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013. (Coleção PROFMAT). ISBN 978-85-8337-013-0.

PEREIRA, R. d. O. *A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Educação)) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. 2. ed.. ed. [S.l.]: Universidade Stanford, 1977. v. 1. 1 p.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Tendências em Educação Matemática).

RIBEIRO, N. S. *Um passeio por alguns tópicos da geometria plana com a utilização do GeoGebra*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2025.

RODRIGUES, J. G. L. *Por que alunos do ensino médio apresentam baixo desempenho em Geometria Plana?* Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática)) — Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

SANGIORGI, O. *Matemática Curso Moderno*. V Congresso de Ensino de Matemática: Companhia Editora Nacional, 1967.

SANTOS, A. E. dos. *Semelhança de triângulos e suas aplicações*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Universidade Federal do Cariri (UFCA), Juazeiro do Norte, 2018. Orientação: Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Júnior.

SECRETARIA DE EDUCAçãO FUNDAMENTAL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1998.

SOUZA, J. R. d. *Matematica Realidade e Tecnologia: 6º Ano*. 1. ed.. ed. [S.l.]: Editora FTD, 2018.

TEIXEIRA, L. A. *Superação Matemática 8ºAno*. 1. ed.. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2024.

WOLFART, D. *Aprendizagem significativa de geometria: uma experiência com o uso do GeoGebra em uma escola do campo*. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)) — Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2025.

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstração do Teorema de Pitágoras

Teorema A.1. *Teorema de Pitágoras: Se um triângulo é retângulo, então a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*

Quadrado externo de lado $(a + b)$.

Área Total: $A_T = (a + b)^2$.

Composição: 4 triângulos retângulos e 1 quadrado interno de lado c.

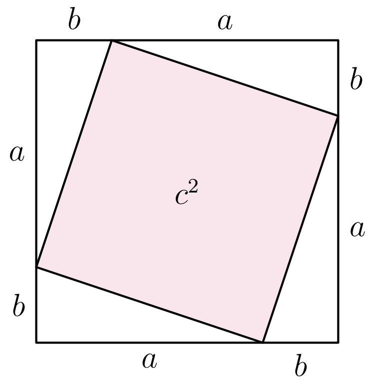

Figura A.1 – Quadrado externo de lado $(a + b)$

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Lima et al. (2017)

Demonstração

Construção e Áreas:

Igualdade das áreas:

$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{2}\right)$

Expansão algébrica:

$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

Simplificação final:

$a^2 + b^2 = c^2$

APÊNDICE B – Demonstração da Lei Angular de Tales

Teorema B.1. *Lei Angular de Tales: A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a* $180°$.

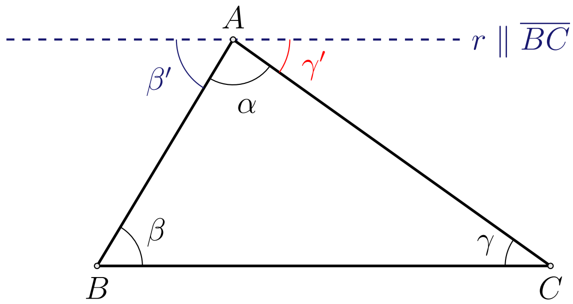

Figura B.1 – Demonstração da soma dos ângulos internos via retas paralelas.

Fonte: elaborado pelo autor com base em Iezzi et al. (2016)

Demonstração:

Seja o triângulo $\triangle ABC$ *com ângulos internos* α, β *e* γ.

Pelo vértice A*, traçamos uma reta* r *paralela ao lado* $\overline{BC}$.

As retas que contêm os lados $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$ *funcionam como transversais que cortam as paralelas* r *e* $\overleftrightarrow{BC}$.

Pela propriedade de retas paralelas cortadas por transversais:O ângulo β' *é alterno interno ao ângulo* β*, logo* $\beta' = \beta$.

O ângulo γ' *é alterno interno ao ângulo* γ*, logo* $\gamma' = \gamma$*.Observando o vértice* A*, notamos que os ângulos* β'*,* α *e* γ' *formam juntos um ângulo raso sobre a reta* r*:*

$$\beta' + \alpha + \gamma' = 180°$$

Substituindo as igualdades obtidas no passo 3:

$$\beta + \alpha + \gamma = 180°$$

Como queríamos demonstrar, a soma dos ângulos internos do triângulo é $180°$.

APÊNDICE C – Demonstração do Teorema do Ângulo Externo:

Teorema C.1. *Teorema do Ângulo Externo Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

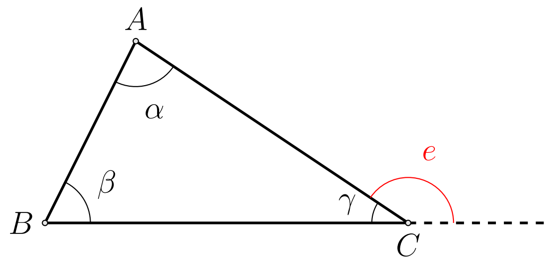

Figura C.1 – O ângulo externo e e os ângulos internos não adjacentes α e β.

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Iezzi (2022)

Demonstração:

Sejam α, β e γ as medidas dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ nos vértices A, B e C, respectivamente. Seja e a medida do ângulo externo adjacente a γ.

Pela propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Como o ângulo externo e e o ângulo interno γ são suplementares (formam um ângulo raso sobre a reta que contém o lado BC), temos:

$$e + \gamma = 180^\circ$$

Igualando as duas expressões, já que ambas valem 180°:

$$e + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$$

Subtraindo γ de ambos os lados da igualdade, obtemos:

$$e = \alpha + \beta$$

Portanto, a medida do ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes. C.Q.D.

APÊNDICE D – Demonstração do Teorema de Tales

Teorema D.1. *Teorema de Tales: Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, então as medidas dos segmentos determinados sobre a primeira transversal são proporcionais às medidas dos segmentos correspondentes determinados sobre a segunda transversal.*

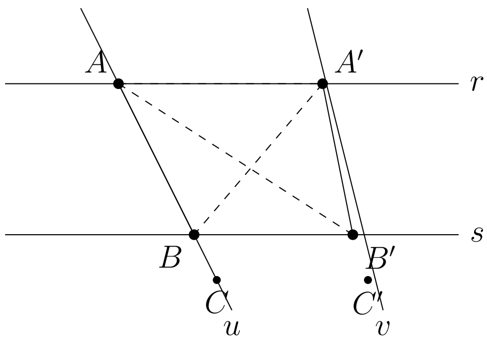

Figura D.1 – Paralelas r e s cortadas por duas transversais.

Demonstração:*Consideremos as paralelas r e s cortadas pelas transversais u e v nos pontos A, B e A', B'. Para demonstrar a proporcionalidade, fixamos um terceiro ponto C em u e C' em v sobre uma terceira paralela t (não desenhada para simplificar, mas análoga).*

Observe os triângulos $\triangle ABB'$ e $\triangle AA'B$. Ambos possuem a mesma base sobre a transversal (segmentos AB e $A'B'$) se considerarmos a projeção, mas a forma mais direta é comparar as áreas:

Os triângulos $\triangle AA'B'$ e $\triangle AA'B$ possuem a mesma base AA' (sobre a reta r).

Como as retas r e s são paralelas, a altura de ambos os triângulos em relação à base AA' é a mesma (a distância entre as paralelas).

Portanto, Área($\triangle AA'B$) = Área($\triangle AA'B'$).

Ao estendermos esse raciocínio para um terceiro ponto C, estabelecemos que a razão entre as áreas dos triângulos formados pelos segmentos das transversais é igual à razão entre os próprios segmentos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\textit{Área}(\triangle AA'B)}{\textit{Área}(\triangle BB'C)} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

APÊNDICE E – Demonstração do Teorema da Base Paralela de um Triângulo

Teorema E.1. *Base Paralela de um Triângulo: Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intercepta os outros dois lados em pontos distintos, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.*

Seja o triângulo $\triangle ABC$. Se uma reta r é paralela ao lado $\overline{BC}$ e intercepta $\overline{AB}$ em D e $\overline{AC}$ em E, então os segmentos determinados são proporcionais:

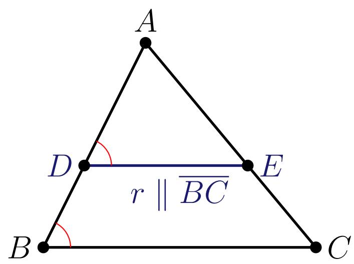

Figura E.1 – Teorema da Base Paralela: o segmento $\overline{DE}$ e o triângulo $\triangle ADE$ semelhante a $\triangle ABC$.

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Iezzi (2022)

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \quad e \quad \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Demonstração:*Para que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ os ângulos correspondentes devem ser congruentes e os lados correspondentes devem ser proporcionais.*

1. Congruência dos Ângulos:Como a reta DE é paralela ao lado BC ($\overline{DE} \parallel \overline{BC}$), as retas que contêm os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ funcionam como transversais.

- $\angle ADE \cong \angle ABC$ *(ângulos correspondentes);*
- $\angle AED \cong \angle ACB$ *(ângulos correspondentes);*
- $\angle DAE \cong \angle BAC$ *(ângulo comum aos dois triângulos).Logo, pelo critério AA (Ângulo-Ângulo), os triângulos já são semelhantes.*

2. Proporcionalidade dos Lados:

Pela aplicação direta do Teorema de Tales nas paralelas $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, temos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Para provar a proporção do terceiro lado ($\frac{DE}{BC}$), traçamos uma paralela a $\overline{AB}$ passando por E, que intercepta $\overline{BC}$ em um ponto F. O quadrilátero $BDEF$ será um paralelogramo, logo $DE = BF$.

Aplicando Tales novamente para o lado $\overline{AC}$, obtemos a igualdade das três razões:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Portanto, o triângulo $\triangle ADE$ é semelhante ao triângulo $\triangle ABC$. ***C.Q.D.***

APÊNDICE F – Demonstração do Teorema do Ângulo Inscrito

Teorema F.1. *Ângulo Inscrito: A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.*

Demonstração (Caso em que o centro O pertence a um dos lados):

Seja a circunferência de centro O. Considere o ângulo inscrito $\angle APB$ tal que o lado $\overline{PB}$ passe pelo centro O (ou seja, $\overline{PB}$ contém o diâmetro).

Traçamos o raio $\overline{OA}$.

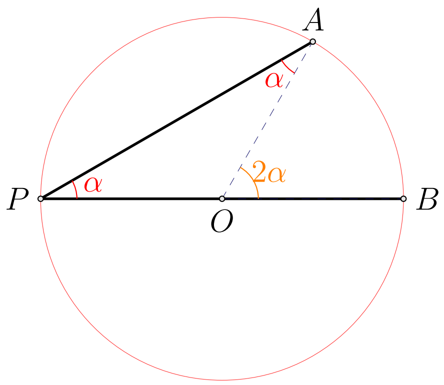

Figura F.1 – Ângulo inscrito α e ângulo central 2α.

Note que o triângulo $\triangle APO$ é isósceles, pois $\overline{OA} = \overline{OP} = R$ (raio).

Sendo isósceles, os ângulos da base são iguais: $m(A\widehat{P}O) = m(P\widehat{A}O) = \alpha$.

O ângulo central $A\widehat{O}B$ é um ângulo externo ao triângulo $\triangle APO$ em relação ao vértice O.

Pelo Teorema do Ângulo Externo (que demonstramos anteriormente), a medida do ângulo externo é a soma dos internos não adjacentes:

$$m(A\widehat{O}B) = m(A\widehat{P}O) + m(P\widehat{A}O) = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

Como α é a medida do ângulo inscrito $\angle APB$, temos:

$$m(A\widehat{P}B) = \frac{m(A\widehat{O}B)}{2}$$