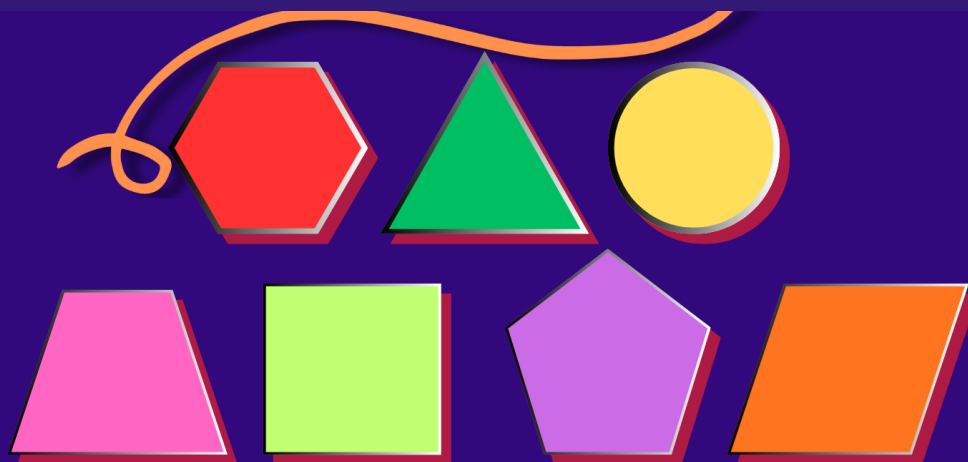


Prθfmat UNIR



**CADERNO
DIDÁTICO DE**

**GEOMETRIA
PLANA**

Bruno Christian Silva dos Santos

Orientadora: Prof^a. Dra. Marizete Nink de Carvalho

Porto Velho – RO
2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA - FACET
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

BRUNO CHRISTIAN SILVA DOS SANTOS

CADERNO DIDÁTICO DE GEOMETRIA PLANA

Produto educacional desenvolvido como parte dos requisitos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal de Rondônia.

Orientadora: Prof^a. Dra. Marizete Nink de Carvalho

Porto Velho – RO
2026

Sumário

1 Geometria Plana	5
1.1 Ponto, Reta e Plano	5
1.2 Curva Fechada Simples	6
1.3 Segmentos	10
1.4 Segmentos Congruentes	11
1.5 Conexão com a Álgebra	12
1.6 Ângulos	15
1.7 Ângulos Opostos Pelo Vértice	18
1.8 Ângulos Alternos	18
1.9 Ângulos: Conexão com a Álgebra	20
1.10 Construção Geométrica	24
1.11 Exercícios Exploratórios	25
1.12 Exercícios Propostos	27
2 Triângulos	31
2.1 Classificação de Triângulos	32
2.2 Condição de Existência	33
2.3 Existência: Conexão com a Álgebra	34
2.4 Teorema Angular de Tales	35
2.5 TAT: Conexão com Álgebra	36
2.6 Teorema do Ângulo Externo	37
2.7 Exercícios Exploratórios	39
2.8 Exercícios Propostos	40
3 Polígonos	43
3.1 Polígonos Convexos	43
3.2 Polígonos Regulares	46
3.3 Soma dos Ângulos Internos	47
3.4 Número de Diagonais	48
3.5 Exercícios Exploratórios	50
3.6 Exercícios Propostos	52
4 Congruência e Semelhança	54
4.1 Teorema de Tales	54
4.2 Semelhança de Figuras Planas	56
4.3 Semelhança de Triângulos	58
4.4 Teorema de Pitágoras e Aplicações	60
4.5 Relações Métricas no Triângulo Retângulo	63
4.6 Congruência de Triângulos	65

4.7	Exercícios Exploratórios	67
4.8	Exercícios Propostos	68
5	Circunferência e Círculo	70
5.1	Elementos Básicos	70
5.2	Ângulo Inscrito	71
5.3	Potência de Ponto	72
5.4	Exercícios Exploratórios	75
5.5	Exercícios Propostos	76
6	Perímetro e Área	79
6.1	Perímetro de uma figura plana	79
6.2	Área de uma figura plana	81
6.3	Exercícios Exploratórios	85
6.4	Exercícios Propostos	87

Introdução

Este caderno didático foi elaborado como um produto educacional voltado para alunos do Ensino Fundamental e Médio, integrando os conteúdos da unidade temática Geometria do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental. Ele tem como objetivo auxiliar na prática docente por meio de atividades contextualizadas e experimentos com demonstrações de propriedades geométricas, promovendo a aprendizagem significativa, o desenvolvimento do raciocínio matemático e das habilidades relacionadas ao espaço e à forma.

Para isso, faremos um estudo sobre alguns conteúdos de Geometria dos anos finais do ensino fundamental, apresentando as definições, propriedades, exercícios resolvidos, exercícios exploratórios e exercícios propostos. São eles:

- Elementos Primitivos;
- Ângulos;
- Triângulos;
- Polígonos;
- Teorema Angular de Tales;
- Problemas sobre o cálculo de perímetro;
- Problemas sobre cálculo de área;
- Casos de Semelhança no triângulo Retângulo, Isóceles e Equilátero;
- Semelhança com Triângulos e Quadriláteros;
- Congruência de Triângulos.

As atividades foram selecionadas de acordo com os conteúdos definidos. As definições iniciais foram baseadas no livro didático Sangiorgi (1967), as demais definições e exercícios foram adaptados de Matemática Realidade e Tecnologia Souza (2018) e da Coleção Telaris Matemática Dante (2018), Caderno do Futuro Passos e Silva (2013), Coleção Contexto e Aplicações Iezzi (2022), Coleção Fundamentos de Matemática Elementar Dolce e Pompeo (2013), Coleção Superação Teixeira (2024) e Desenho Geométrico Braga (1997). Para exercícios resolvidos e problemas propostos, também foram utilizadas questões de provas anteriores da banca IDECAN. Já para atividades exploratórias e ilustrações de propriedades, adotamos como referência o Caderno de Atividades sobre Conceitos Geométricos em Ambientes de Geometria Dinâmica Bissolotti e Titon (2011) e Caderno de Atividades no Geogebra Henrique (2019).

A organização do material é firmada no tripé da aprendizagem sólida em Matemática, proposto por Lima (1999), que constituem os três seguintes pilares:

- 1) Conceituação
- 2) Manipulação
- 3) Aplicações

Conceituação aparece nas definições, propriedades e explicações iniciais;

Manipulação se manifesta nas construções geométricas, nos exemplos resolvidos, nas tarefas passo a passo e no uso de esquemas e figuras, bem como na integração do pensamento algébrico com as propriedades geométricas;

Aplicações surgem nos problemas contextualizados, desafios, situações reais e investigações que estimulam o raciocínio crítico.

As soluções dos exercícios resolvidos são fundamentadas no método de Polya (1977) para resolução de problemas composto por quatro etapas:

- 1) Compreensão
- 2) Elaboração do Plano
- 3) Execução do Plano
- 4) Verificação

Compreensão: etapa em que se busca entender o problema, identificando os dados fornecidos, o que se deseja encontrar e as relações envolvidas.

Elaboração do Plano: consiste na definição de estratégias para resolver o problema, escolhendo métodos, propriedades, teoremas ou procedimentos adequados.

Execução do Plano: momento em que as estratégias escolhidas são aplicadas, realizando cálculos, construções ou argumentações necessárias para obter a solução.

Verificação: etapa destinada à análise da solução obtida, verificando sua coerência, validade e adequação ao problema proposto.

1 Geometria Plana

A Geometria é uma área da Matemática. Nela, ao invés de conjuntos de números, você estudará conjuntos de pontos.

Os conjuntos de pontos constituirão as figuras geométricas, para as quais também serão estabelecidas relações, operações, propriedades e sentenças matemáticas.

Para iniciarmos nosso estudo, precisamos partir dos elementos básicos da Geometria, que são: ponto, reta e plano. Em seguida, revisar os conceitos sobre a notação desses elementos, diferenciação entre retas, semirretas e segmentos, plano e semiplano.

1.1 Ponto, Reta e Plano

Os conceitos de Ponto, Reta e Plano são aceitos sem definição. Mas podemos tentar descrevê-los

Ponto

Usa-se letras A, B, C, \dots, P para representá-los.

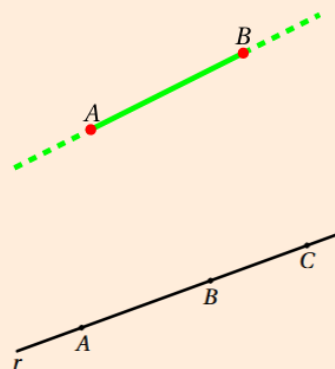
O ponto é adimensional, sem comprimento, largura ou altura, denotado por uma marca no papel, sem movimentar a ponta da caneta.

P

Reta

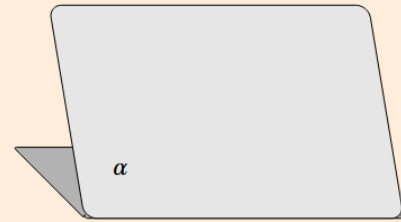
Reta é um conjunto cujos elementos são pontos, usamos letras minúsculas r, s, t, \dots do alfabeto para identificá-las.

Note que podemos marcar quantos pontos quisermos sobre uma reta r :

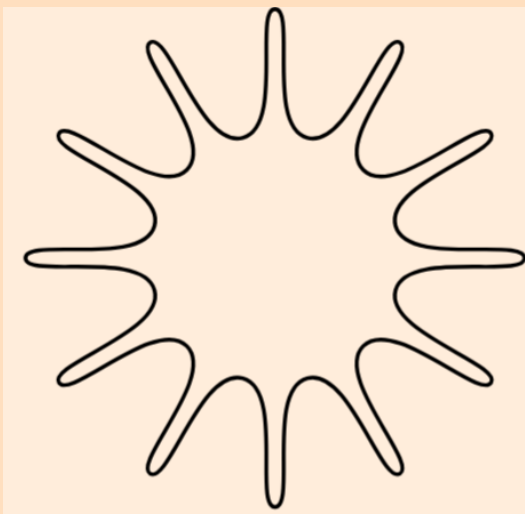


Plano α

Todo Plano é um conjunto cujos elementos são pontos, usamos letras minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ do alfabeto grego para identificá-los

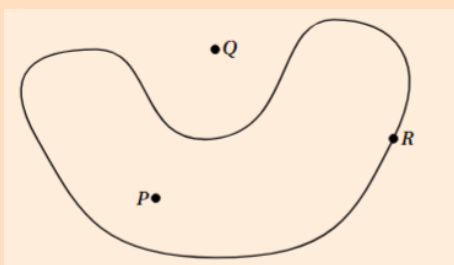


1.2 Curva Fechada Simples



As curvas fechadas simples determinam no plano (onde se encontram) três conjuntos, constituídos respectivamente pelos:

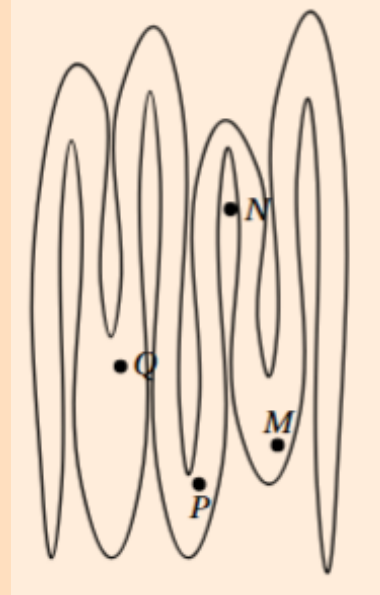
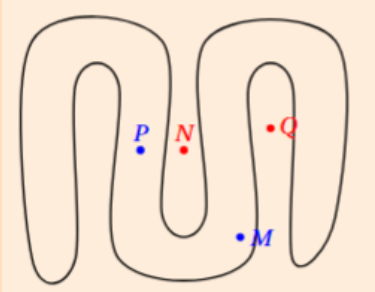
- pontos interiores à curva
- pontos da própria curva
- pontos exteriores à curva



- P é interior à curva
- R é ponto da própria curva
- Q é exterior à curva

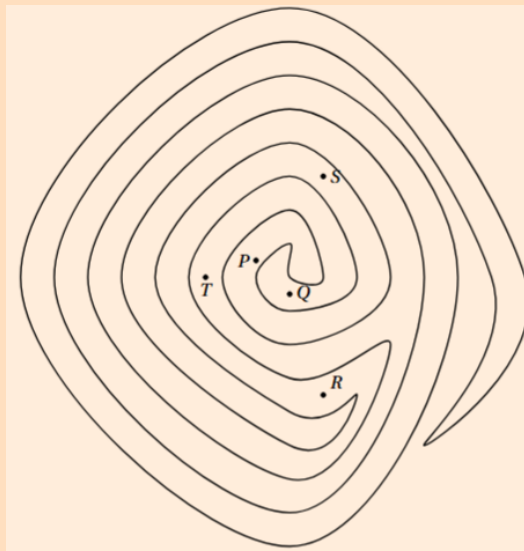
Curvas Fechadas Simples Côncavas

São curvas fechadas simples em forma de **onda**, formando cavidades, vale a pena explorar a verificação dos pontos interiores ou exteriores nessas curvas.



Entretanto, existem curvas que, visualmente, complicam a disposição dos pontos:

Exercício Resolvido 1) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) Consegue determinar quais pontos são interiores e exteriores?



Solução: Pontos Interiores e Exteriores

1. Compreensão: Temos uma curva fechada simples (não se cruza) e quatro pontos (P, Q, R, S, T). O objetivo é identificar quais estão na região limitada (interior) e quais estão na ilimitada (exterior).

2. Plano e Execução (Teorema de Jordan): Para determinar se um ponto está dentro ou fora, traçamos uma semirreta partindo do ponto em qualquer direção e contamos quantas vezes ela cruza a curva:

- Se o número de cruzamentos for ****ÍMPAR****, o ponto é **INTERIOR**.
- Se o número de cruzamentos for ****PAR****, o ponto é **EXTERIOR**.



Análise da Solução

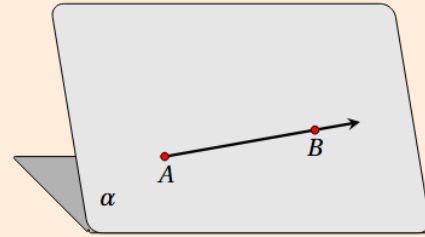
Análise dos Pontos:

- **Ponto Q:** Traçando uma semirreta para cima, cruzamos a curva 8 vezes (par). → **Exterior**.
- **Ponto P:** Traçando uma semirreta para a esquerda, cruzamos 7 vezes (ímpar). → **Interior**.
- **Ponto S:** Traçando uma semirreta para a direita, cruzamos 5 vezes (Ímpar). → **Interior**.
- **Ponto T:** Traçando uma semirreta para a esquerda, cruzamos 6 vezes (Par). → **Exterior**.
- **Ponto R:** Traçando uma semirreta para baixo, cruzamos 5 vezes (Ímpar). → **Interior**.

3. Verificação: Ao "pintar" a região interior começando por um ponto confirmado, notamos que R, S e P pertencem à mesma área sombreada, enquanto Q e T estão na área clara conectada ao infinito.

Semirreta

A Semirreta \overrightarrow{AB} , têm origem no ponto A e passa por B .



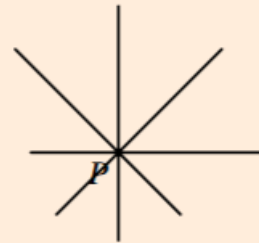
Exercício Resolvido 2) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) A partir de um ponto P construir 8 semirretas usando a régua.

Solução

1. Compreensão: O objetivo é construir 8 semirretas distintas com origem comum no ponto P .

2. Plano: Traçar 4 retas concorrentes em P . Cada reta fornecerá duas semirretas opostas.

3. Execução:



4. Verificação: As 4 retas se cruzam em P , resultando visualmente em 8 direções (semirretas) que partem do centro.

Retas Paralelas

Definição:

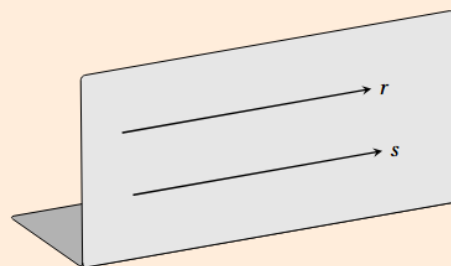
Duas retas são paralelas quando estão no mesmo plano e não possuem ponto em comum, ou seja, nunca se intersectam.

Indicamos por:

$$r \parallel s$$

Observação:

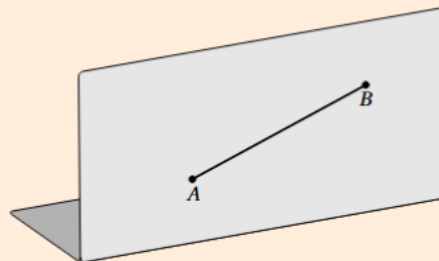
A distância entre elas é constante.



1.3 Segmentos

Segmento

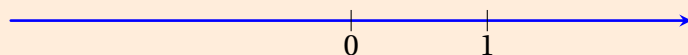
O Segmento \overline{AB} , tem origem no ponto A e fim no ponto B .



É sempre possível associar números a certas partes das figuras geométricas, a fim de melhor estudar suas propriedades. Tais números chamam-se medidas.

Para definir a medida de um segmento, precisamos estabelecer a correspondência entre uma unidade de medida fixada em uma reta numerada e os números reais

Segmento Unidade

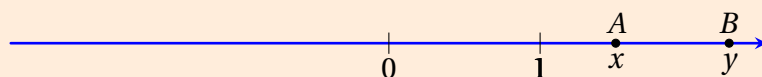


Como os pontos, aos quais associamos a 0 e 1, foram escolhidos arbitrariamente, fica associado a eles uma unidade sobre a reta (poderia ser cm , mm , ...) permitindo associar pontos correspondentes aos restantes números reais. Dessa forma, fica definida uma correspondência entre os números reais e os pontos da reta com qualquer unidade.

- O número real correspondente a cada ponto é denominado abscissa do ponto.
- o ponto correspondente ao 0 é denominado origem do sistema (abscissa nula).

Desse modo, considere a reta r dos pontos correspondentes fixados 0 e 1. Sejam A e B dois pontos de r cujas abscissas são, respectivamente, x e y números reais com $x < y$:

Medida $y - x$ de um Segmento

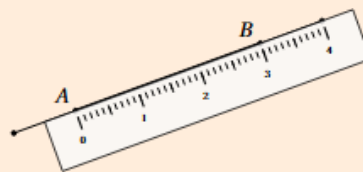


Medida de um Segmento

Chama-se medida do segmento \overline{AB} ao número real não-negativo, indicado por $m(\overline{AB}) = y - x$

Medida em centímetros

Por exemplo, dizemos que um segmento \overline{AB} mede 3 cm por que associamos o número real 3 da régua com o comprimento do segmento \overline{AB} , assim escrevemos $m(\overline{AB}) = 3\text{cm}$.

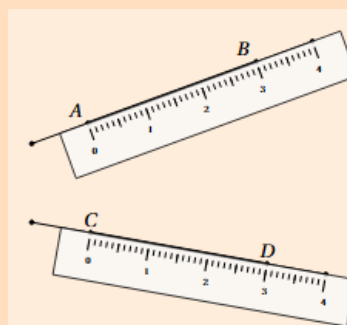


1.4 Segmentos Congruentes

Dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são congruentes quando têm a mesma medida:

Denota-se por $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$

$$m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$$

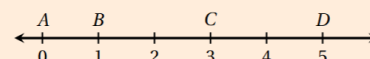


Precisamos dessa definição para conseguir resolver os problemas que integram Álgebra e Geometria futuramente.

O leitor pode Explorar de forma simples essa definição construindo segmentos em diferentes posições no plano usando a régua.

Segmento Unidade

Um segmento \overline{AB} é um segmento-unidade quando, $m(\overline{AB}) = 1$:



Dessa definição e da figura, podemos notar que:

Segmento Unidade

\overline{AB} mede uma unidade: $m(\overline{AB}) = 1$

E a medida de \overline{BD} ?

\overline{AC} mede 3 unidades: $m(\overline{AC}) = 3$

Explore fazendo o mesmo que em \overline{BC} .

Qual a medida de \overline{BC} ?

Solução: Basta a diferença entre C e B:
 $m(\overline{BC}) = C - B = 3 - 1 \Rightarrow m(\overline{BC}) = 2$

Adição de Segmentos

Da figura anterior, temos que o ponto B pertence ao segmento \overline{AC} , o que determina dois segmentos \overline{AB} e \overline{BC} satisfazendo a seguinte propriedade:

$$m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) = m(\overline{AC})$$

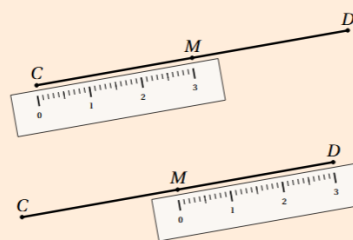
O que é verificado facilmente pelo que vimos anteriormente:

$$\begin{array}{rccrccr} m(\overline{AB}) & + & m(\overline{BC}) & = & m(\overline{AC}) \\ 1 & + & 2 & = & 3 \end{array}$$

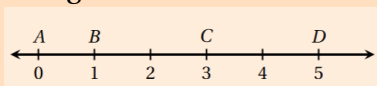
Ponto Médio de um Segmento

M é ponto médio de um segmento \overline{AB} quando $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$

ou seja: $m(\overline{AM}) = m(\overline{MB})$



Na figura:



Podemos afirmar que C é o ponto médio de \overline{BD} ?

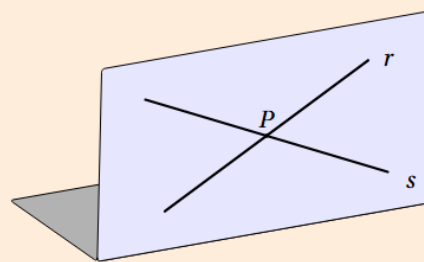
Solução: Sim, pois \overline{BC} é congruente a \overline{CD} .

Explore verificando se $m(\overline{BC}) = m(\overline{CD})$ conforme as definições.

Retas Concorrentes

Duas retas são concorrentes quando possuem um único ponto em comum.
 $r \cap s = \{P\}$

Lê-se:
"r intersecção com s é o ponto O"

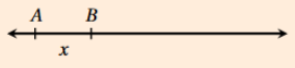
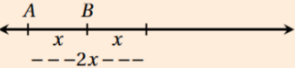
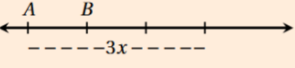
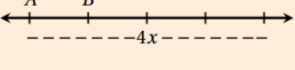


1.5 Conexão com a Álgebra

Iniciaremos a integração do pensamento algébrico com o geométrico por meio das medidas de segmentos:

Considere inicialmente um segmento de medida x e vamos completar os seguintes campos em linguagem algébrica:

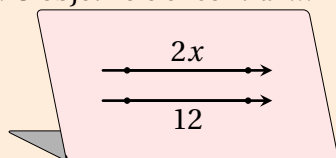
Segmento x

segmento \overline{AB}	x	
o dobro de \overline{AB}	$2x$	
o triplo de \overline{AB}	$3x$	
o quádruplo de \overline{AB}	$4x$	
a metade de \overline{AB}	$\frac{x}{2}$	
de \overline{AB}	$\frac{x}{3}$	
um quarto de \overline{AB}	$\frac{x}{4}$	
três meios de \overline{AB}	$\frac{3x}{2}$	
dois terços de \overline{AB}	$\frac{2x}{3}$	

Exercício Resolvido 3) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Sejam \overline{AB} e \overline{CD} congruentes, com $m(\overline{AB}) = 2x$ e $m(\overline{CD}) = 12$. Determine o valor de x .

Solução

1. Compreensão: Temos dois segmentos congruentes (medidas iguais). Um mede $2x$ e o outro 12. O objetivo é encontrar x .



2. Plano e Execução: Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, então $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$:

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x = 6$$

3. Verificação: Substituindo $x = 6$ em $2x$, obtemos $2(6) = 12$, confirmando a igualdade das medidas.

Exercício Resolvido 4) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) A diferença entre as medidas de dois segmentos colineares é 4 cm e o segmento menor mede $\frac{2}{3}$ do maior, mais 1 cm . Quais as medidas desses segmentos?

Solução

1. Compreensão: Temos dois segmentos, $S_{\text{maior}} = x$ e $S_{\text{menor}} = y$. Sabemos que $x - y = 4$ e que $y = \frac{2}{3}x + 1$.

2. Plano e Execução: Substituímos y na primeira equação:

$$x - \left(\frac{2}{3}x + 1\right) = 4$$

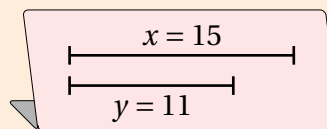
Cont. Solução

$$x - \frac{2}{3}x - 1 = 4$$

$$\frac{1}{3}x = 5 \implies x = 15 \text{ cm}$$

Para o segmento menor: $y = 15 - 4 = 11 \text{ cm}$.

3. Verificação: A diferença é $15 - 11 = 4$. Além disso, $\frac{2}{3}(15) + 1 = 10 + 1 = 11$. Os valores estão corretos.



Exercício Resolvido 5) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) A diferença entre as medidas de dois segmentos colineares é 5 cm e o segmento maior é o $\frac{4}{3}$ do menor. Quanto medem esses segmentos?

Solução: Segmentos Colineares

1. Compreensão: Temos dois segmentos de reta que estão sobre a mesma reta (colineares). Chamaremos o segmento maior de AB e o menor de CD . Dados do problema:

(I) Diferença: $m(\overline{AB}) - m(\overline{CD}) = 5$

(II) Relação: $m(\overline{AB}) = \frac{4}{3}m(\overline{CD})$

2. Plano e Execução: Substituímos a segunda equação na primeira:

$$\frac{4}{3}m(\overline{CD}) - m(\overline{CD}) = 5$$

Para resolver, subtraímos as frações (considerando $m(\overline{CD}) = \frac{3}{3}m(\overline{CD})$):

$$\frac{1}{3}m(\overline{CD}) = 5 \implies m(\overline{CD}) = 15 \text{ cm}$$

Agora, encontramos o valor de AB :

$$AB = 15 + 5 = 20 \text{ cm}$$



3. Verificação: A diferença é $20 - 15 = 5 \text{ cm}$ (Ok!). A razão é $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ (Ok!). Os segmentos medem **20 cm** e **15 cm**.

Solução 2

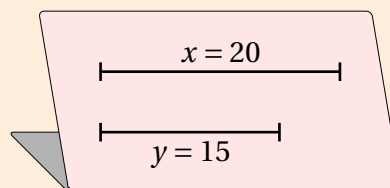
1. Compreensão: Temos dois segmentos, $S_{maior} = x$ e $S_{menor} = y$. Dados: $x - y = 5$ e $x = \frac{4}{3}y$.

2. Plano e Execução: Substituímos x na primeira equação:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}y - y &= 5 \\ \frac{1}{3}y &= 5 \implies y = 15 \text{ cm}\end{aligned}$$

Para o segmento maior: $x = 15 + 5 = 20$ cm.

3. Verificação: A diferença é $20 - 15 = 5$. O segmento maior 20 é exatamente $\frac{4}{3}$ de 15 ($15 \div 3 \times 4 = 20$).



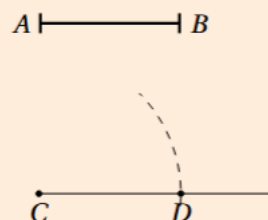
Exercício Resolvido 6) (BRAGA, 1997 – adaptado) Construa dois segmentos congruentes usando compasso e régua.

Solução

1. Compreensão: O objetivo é transportar a medida de um segmento dado AB para uma nova reta r , criando um segmento CD tal que $AB \cong CD$.

2. Plano e Execução:

1. Dado o segmento AB .
2. Trace uma reta r e marque um ponto C .
3. Com o compasso em A e abertura até B , transporte essa medida para a reta r , com a ponta seca em C , marcando o ponto D .



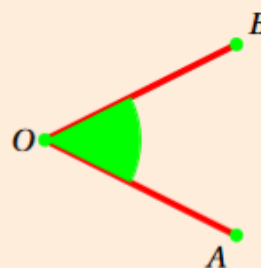
3. Verificação: A abertura do compasso garante que a distância entre as pontas permaneça constante, logo $dist(A, B) = dist(C, D)$.

1.6 Ângulos

Definição

Ângulo é a região do plano delimitada por duas semirretas de mesma origem Símbolo:

Ângulo $A\hat{O}B$

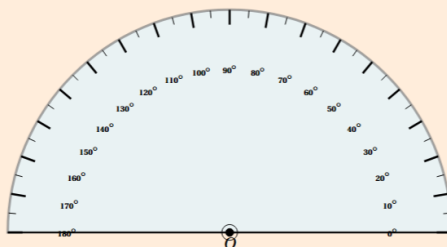


Medida de Ângulo: Assim como foi feito para os segmentos, é possível associar a cada ângulo um número real não-negativo, que é a sua medida, numa certa unidade. Indicação: $m(\widehat{A\hat{O}B})$ (lê-se: “medida do ângulo $A\hat{O}B$ ”).

Também, agora, escolhe-se um ângulo-unidade para determinar a medida de um ângulo qualquer. Geralmente é empregado o grau (1°) "um grau".

Transferidor

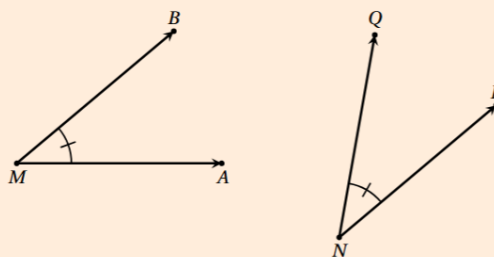
O instrumento comumente usado para medir ângulos é o **Transferidor**, em forma de semicírculo, graduado de 0° a 180° :



Ângulos Congruentes

Dois ângulos são congruentes se, e somente se, tem a mesma medida.

$$\widehat{AMB} \equiv \widehat{PNQ} \Leftrightarrow m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{PNQ})$$

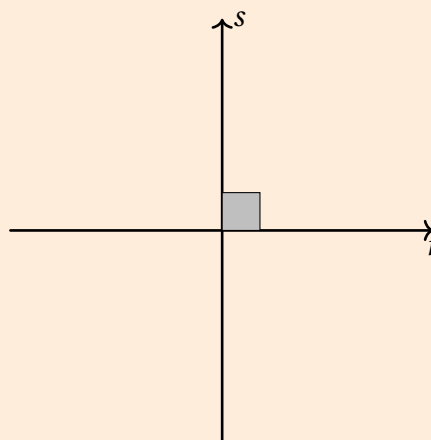


Vamos entender rapidamente o que são retas perpendiculares antes de definir ângulo reto:

Retas Perpendiculares

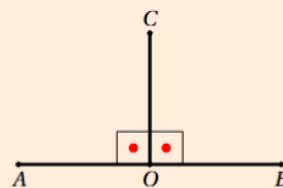
Definição: Duas Retas Concorrentes que formam 4 ângulos iguais.

Símbolo: $r \perp s$



Ângulo Reto:

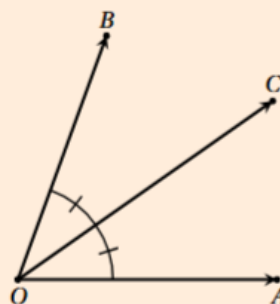
Duas Regiões iguais formadas por uma semirreta que origina-se por um ponto de outra

**Bissetriz de um Ângulo**

A bissetriz de um ângulo é a semirreta de origem no vértice do ângulo, que o divide em dois ângulos congruentes

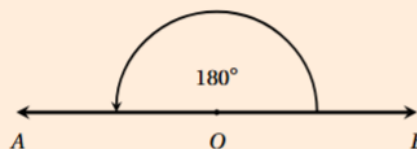
\overline{OC} é bissetriz de \widehat{AOB}

$\widehat{AOC} \equiv \widehat{COB}$

**Ângulo Raso**

Definição: ângulo raso é formado por duas semirretas opostas

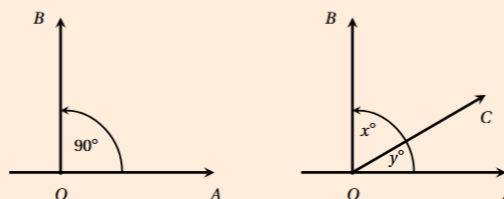
$\widehat{AOB} = 180^\circ$

**Ângulo Complementar**

Dois Ângulos dizem-se complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90°

$\widehat{AOC} + \widehat{COB} = 90^\circ$

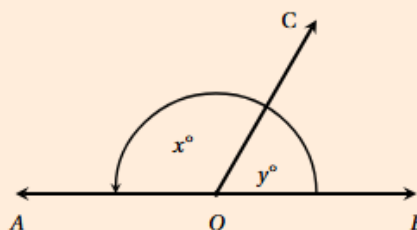
$\Rightarrow x + y = 90^\circ$

**Ângulo Suplementar**

Dois Ângulos dizem-se suplementares quando a soma de suas medidas é igual a 180°

$\widehat{BOC} + \widehat{AOC} = 180^\circ$

$x + y = 180^\circ$

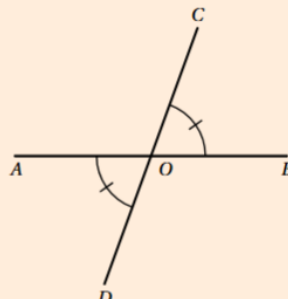


1.7 Ângulos Opostos Pelo Vértice

OPV

Ângulos opostos pelo vértice são congruentes

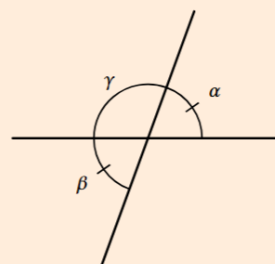
$$\widehat{BOC} = \widehat{AOC}$$



Demonstração

A demonstração da congruência de ângulos opostos pelo vértice baseia-se na propriedade dos **ângulos suplementares**.

Considere duas retas concorrentes que definem os ângulos α e β (opostos pelo vértice) e um ângulo adjacente γ .



Observe as relações de complementaridade:

1. α e γ formam um ângulo raso:

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \implies \alpha = 180^\circ - \gamma$$

2. β e γ também formam um ângulo raso (sobre a outra reta):

$$\beta + \gamma = 180^\circ \implies \beta = 180^\circ - \gamma$$

Como tanto α quanto β resultam da mesma subtração ($180^\circ - \gamma$), concluímos por transitividade que:

$$\alpha = \beta$$

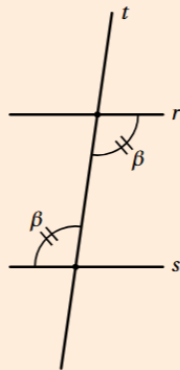
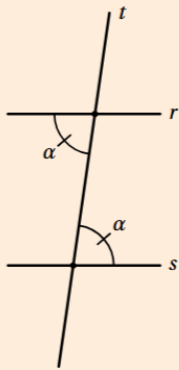
Conclusão: Ângulos opostos pelo vértice são congruentes porque são suplementares ao mesmo ângulo.

1.8 Ângulos Alternos

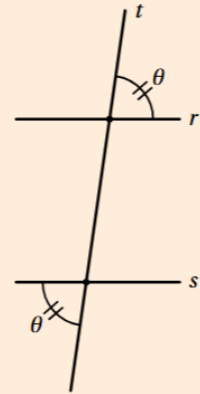
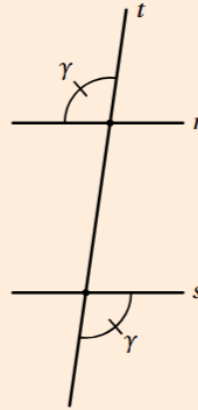
Considere duas retas r e s paralelas e uma transversal t

Alternos Internos e Externos

Alternos Internos Alternam-se na transversal, mas **internos** às paralelas e são congruentes:



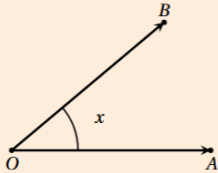
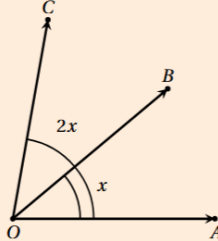
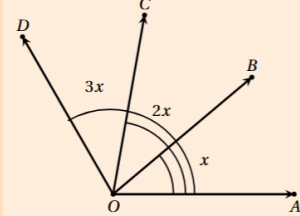
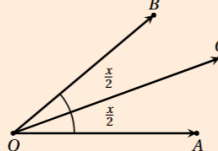
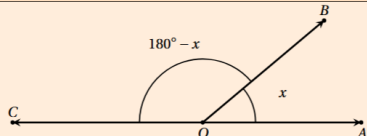
Alternos Externos Alternam-se na transversal, mas **externos** às paralelas e também são congruentes:



1.9 Ângulos: Conexão com a Álgebra

De maneira análoga ao que foi feito com os segmentos, podemos integrar propriedades de ângulos com o **pensamento algébrico**

Considere um ângulo de medida x e complete o quadro abaixo:

Ângulos	Medida	Figura
um ângulo congruente a x	x	
o dobro do ângulo	$2x$	
o triplo do ângulo		
metade do ângulo		
um terço do ângulo	$\frac{x}{3}$	
o complemento	$90^\circ - x$	
o suplemento		

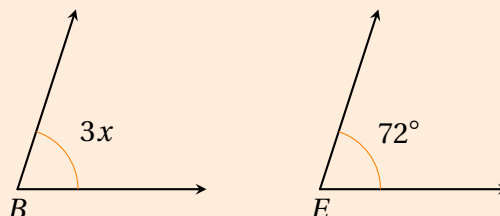
Exercício Resolvido 7) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Sejam $\widehat{ABC} = 3x$ e $\widehat{DEF} = 72^\circ$ dois ângulos congruentes, calcule o valor de x .

Solução

1. Compreensão: O problema afirma que os ângulos \widehat{ABC} e \widehat{DEF} são congruentes (\cong). Isso significa que suas medidas em graus são numericamente iguais. Dados: $m(\widehat{ABC}) = 3x$ e $m(\widehat{DEF}) = 72^\circ$.

2. Plano e Execução:

- Pela propriedade da congruência: $3x = 72^\circ$.
- Para encontrar x , dividimos 72 por 3:
- $x = \frac{72^\circ}{3}$
- $x = 24^\circ$.



3. Verificação: Substituindo $x = 24^\circ$ na expressão do primeiro ângulo: $3 \cdot 24^\circ = 72^\circ$. Como $72^\circ = 72^\circ$, os ângulos são de fato congruentes.

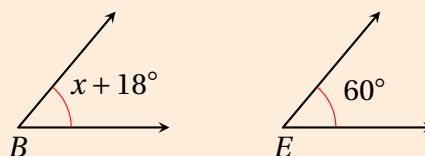
Exercício Resolvido 8) (IEZZI, 2022 – adaptado) Sejam $\widehat{ABC} = x + 18^\circ$ e $\widehat{DEF} = 60^\circ$ congruentes, determine o valor de x .

Solução

1. Compreensão: Dois ângulos são congruentes (\cong) quando possuem a mesma medida. O objetivo é encontrar o valor da incógnita x igualando as expressões dadas para os ângulos \widehat{ABC} e \widehat{DEF} .

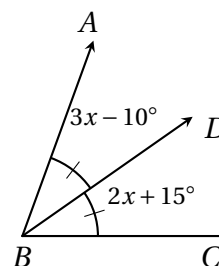
2. Plano e Execução:

- Pela definição de congruência:
 $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$.
- Montamos a equação: $x + 18^\circ = 60^\circ$.
- Isolamos x : $x = 60^\circ - 18^\circ = 42^\circ$.



3. Verificação: Substituindo $x = 42^\circ$ na primeira expressão, temos $42^\circ + 18^\circ = 60^\circ$. Como $60^\circ = 60^\circ$, a condição de congruência é satisfeita.

Exercício Resolvido 9) (IEZZI, 2022 – adaptado) Calcule o valor de x sabendo que \overline{BD} é a bissetriz do ângulo \widehat{ABC} .

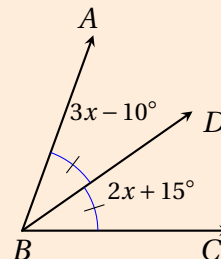


Solução

1. Compreensão: A semirreta BD é a bissetriz do ângulo \widehat{ABC} . Por definição, a bissetriz divide um ângulo em dois ângulos adjacentes e congruentes ($\widehat{ABD} \cong \widehat{DBC}$).

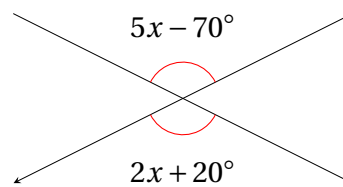
2. Plano e Execução:

- Igualamos as medidas: $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$.
- Montamos a equação: $3x - 10^\circ = 2x + 15^\circ$.
- Resolvemos para x :
- $3x - 2x = 15^\circ + 10^\circ$
- $x = 25^\circ$.



3. Verificação: Substituindo $x = 25^\circ$: $3(25) - 10 = 75 - 10 = 65^\circ$ e $2(25) + 15 = 50 + 15 = 65^\circ$. Como os valores são iguais, BD é de fato a bissetriz.

Exercício Resolvido 10) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que as retas r e s se interceptam no ponto V e os ângulos destacados são opostos pelo vértice.

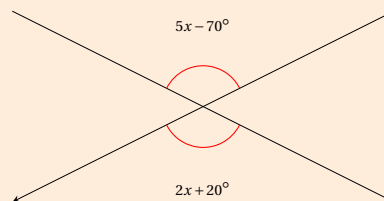


Solução: Ângulos Opostos pelo Vértice

1. Compreensão: Os ângulos destacados são Opostos pelo Vértice (OPV). Pela propriedade geométrica, ângulos nessa posição são sempre congruentes (possuem a mesma medida).

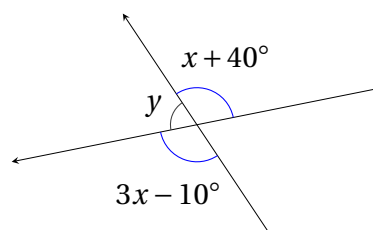
2. Plano e Execução:

- Igualamos as medidas: $5x - 70^\circ = 2x + 20^\circ$.
- Isolamos os termos com x :
- $5x - 2x = 20^\circ + 70^\circ$
- $3x = 90^\circ$
- $x = 30^\circ$.



3. Verificação: Substituindo $x = 30^\circ$: $5(30) - 70 = 80^\circ$ e $2(30) + 20 = 80^\circ$. A igualdade confirma que o valor de x está correto.

Exercício Resolvido 11) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Na figura a seguir, as retas são concorrentes no ponto V . Com base nas propriedades dos ângulos opostos pelo vértice e ângulos suplementares, determine os valores de x e y .

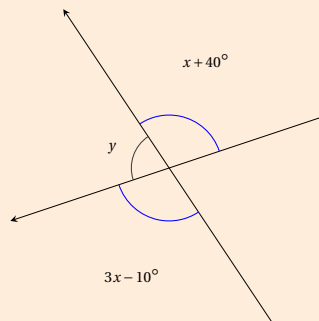


Solução: OPV e Ângulos Suplementares

1. Compreensão: Temos um par de ângulos OPV e uma relação de suplementaridade (soma 180°) entre ângulos adjacentes sobre uma mesma reta.

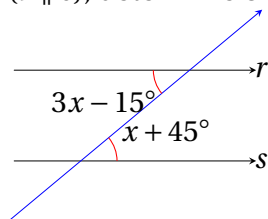
2. Plano e Execução:

- Primeiro, igualamos os ângulos OPV:
- $3x - 10^\circ = x + 40^\circ \Rightarrow 2x = 50^\circ \Rightarrow x = 25^\circ$.
- O valor de cada um desses ângulos é $25 + 40 = 65^\circ$.
- O ângulo y é suplementar a 65° :
- $y + 65^\circ = 180^\circ$
- $y = 115^\circ$.



3. Verificação: Somando os ângulos adjacentes: $65^\circ + 115^\circ = 180^\circ$. A soma plana foi verificada com sucesso.

Exercício Resolvido 12) (IEZZI, 2022 – adaptado) Sabendo que as retas r e s são paralelas ($r \parallel s$), determine o valor de x na figura abaixo:



Solução: Ângulos Alternos Internos

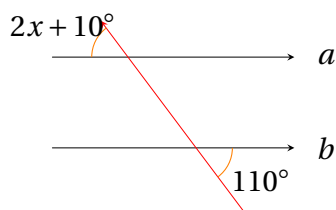
1. Compreensão: As retas r e s são paralelas. Os ângulos destacados estão na região interna (entre as retas) e em lados alternados da transversal. Logo, são **alternos internos**.

2. Plano e Execução: Pela propriedade das paralelas, ângulos alternos internos são congruentes:

$$3x - 15^\circ = x + 45^\circ \quad \Rightarrow \quad 3x - x = 45^\circ + 15^\circ \quad \Rightarrow \quad 2x = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad x = 30^\circ$$

3. Verificação: $3(30^\circ) - 15^\circ = 75^\circ$ e $30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$. Os valores coincidem, confirmando a congruência.

Exercício Resolvido 13) (IEZZI, 2022 – adaptado) Na figura abaixo, as retas a e b são paralelas. Determine o valor de x utilizando a propriedade dos ângulos alternos externos.



Solução: Ângulos Alternos Externos

1. Compreensão: Os ângulos estão na parte externa das retas paralelas e em lados opostos da transversal. São, portanto, **alternos externos**.

2. Plano e Execução: Ângulos alternos externos também são congruentes:

$$2x + 10^\circ = 110^\circ \Rightarrow 2x = 110^\circ - 10^\circ \Rightarrow 2x = 100^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$$

3. Verificação: Substituindo x : $2(50^\circ) + 10^\circ = 100^\circ + 10^\circ = 110^\circ$. A igualdade satisfaz a propriedade geométrica.

1.10 Construção Geométrica

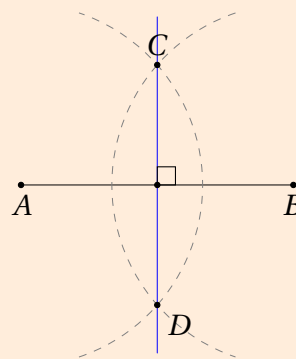
Para resolver muitos problemas em Geometria, precisaremos recorrer a construções geométricas importantes, como as retas perpendiculares e também a reta mediatriz de um segmento. A seguir veremos alguns exemplos dessas construções tão importante para a Geometria do Ensino Fundamental.

Exercício Resolvido 14) Dado um segmento \overline{AB} , construa a reta r perpendicular a este segmento, utilizando apenas régua não graduada e compasso.

Reta Perpendicular

1. Passo 1: Com o compasso, faça uma abertura maior que a metade do segmento AB . Com centro no ponto A , trace um arco de circunferência que cruze o segmento AB .
2. Passo 2: Mantendo a mesma abertura do compasso, coloque a ponta seca no ponto B e trace um segundo arco. Este arco deve interceptar o primeiro arco em dois pontos, C (acima de AB) e D (abaixo de AB).
3. Passo 3: Com a régua, trace a reta

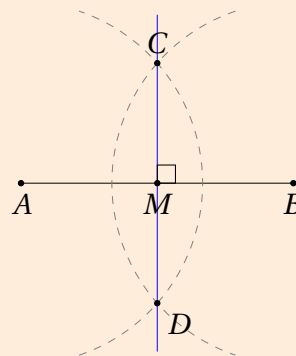
que passa pelos pontos de interseção C e D . A reta \overleftrightarrow{CD} é perpendicular ao segmento AB .



Reta Mediatrix

Procedimento:

1. Com o compasso em A e abertura maior que a metade de AB , trace um arco.
2. Mantendo a **mesma abertura**, coloque o compasso em B e trace outro arco que cruze o primeiro em dois pontos (C e D).
3. Com a régua, ligue os pontos C e D .



A reta CD é a mediatrix do segmento AB .

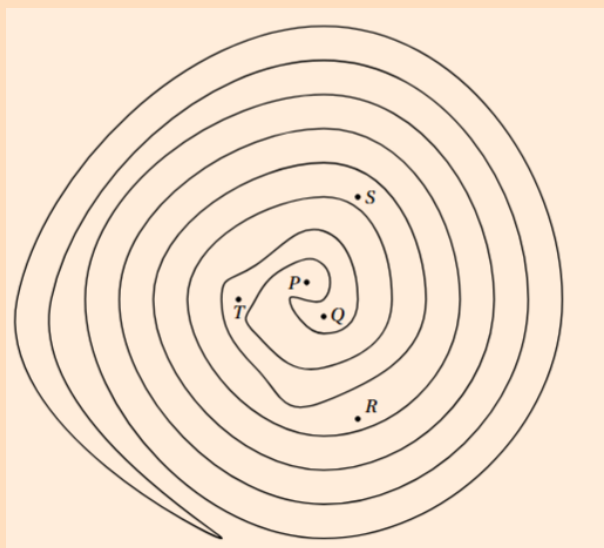
Por que funciona?

Pela construção, os pontos C e D são **equidistantes** das extremidades A e B ($AC = BC$ e $AD = BD$).

Como a mediatrix é o lugar geométrico dos pontos que equidistam das extremidade de um segmento, a reta que passa por C e D define exatamente essa linha de simetria, pois passa pelo ponto médio de AB e é perpendicular a esse segmento.

1.11 Exercícios Exploratórios

- 1) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) Determine quais pontos são interiores e quais são exteriores à curva:



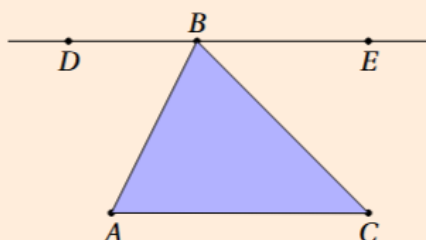
- 2) A partir de um ponto P construir 10 semirretas distintas usando a régua e nomeie-as.

GeoGebra

3) (HENRIQUE, 2019) Construa um triângulo ABC. Meça os ângulos internos do triângulo e adicione as medidas obtidas.

4) (HENRIQUE, 2019) Modifique o triângulo arrastando os vértices e verifique a soma dos ângulos internos. Formule uma conjectura a respeito da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

5) (HENRIQUE, 2019) Construa um triângulo ABC e uma reta paralela ao lado AC (ver figura), em seguida marque os pontos D e E.

Geogebra

- Qual é a relação entre os ângulos DBA e BAC? Por quê?
- Qual é a relação entre os ângulos CBE e BCA? Por quê?
- Qual é o valor da soma dos ângulos DBA, CBE e BCA? Por quê?

6) (IEZZI, 2022 – adaptado) Construa, em uma folha quadriculada, três conjuntos de pontos distintos e, a partir deles, trace diferentes segmentos de reta ligando pares de pontos. Em seguida:

- Identifique, caso existam, quais segmentos são congruentes;
- Verifique quais retas obtidas são concorrentes e quais são paralelas;
- Desenhe uma curva fechada simples que passe por pelo menos quatro dos pontos marcados.

7) (elaborado pelo autor) Construir 2 retas paralelas usando esquadro e régua.

8) (elaborado pelo autor) Construir 2 retas perpendiculares usando esquadro e régua.

9) (elaborado pelo autor) Construir 2 retas perpendiculares usando compasso e régua.

10) (BRAGA, 1997 – adaptado) Construir a reta mediatriz de um segmento usando esquadro e régua.

11) (BRAGA, 1997 – adaptado) Construir a reta mediatriz de um segmento usando compasso e régua.

12) (BRAGA, 1997 – adaptado) Construir 3 retas concorrentes duas a duas e construir as mediatrizes dos segmentos formados.

13) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) Com uso da régua e compasso construa dois ângulos adjacentes cujas medidas somem 180° . Em seguida:

1. Classifique cada ângulo quanto à sua medida;
2. Verifique, por medição, se eles são suplementares;
3. Repita a construção alterando as medidas e registre suas conclusões.

14) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) Construir 3 curvas fechadas simples, em forma de onda, de modo que cada uma tenha o triplo de concavidades da anterior.

15) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) Construir 2 curvas fechadas simples em forma de labirinto ou espiral para desafiar um colega a determinar pontos internos ou externos à curva.

16) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) Construa 3 retas que sejam concorrentes duas a duas.

17) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) Construa 4 retas concorrentes duas a duas.

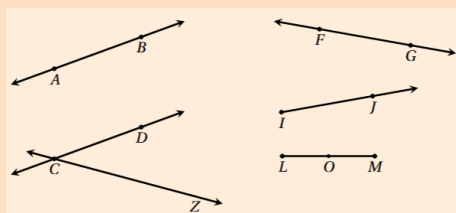
18) (DOLCE; POMPEO, 2013) Construir um segmento que mede 9 cm e marque seu ponto médio.

19) (DOLCE; POMPEO, 2013) Construa um segmento de 10 cm e o divida em 4 partes iguais.

20) (DOLCE; POMPEO, 2013) Construir uma reta e um ponto P fora dela e verifique quantas retas p.

1.12 Exercícios Propostos

1) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Sobre a figura, responda:



- a) Quais retas são paralelas?
- b) Quais retas são concorrentes?
- c) Quais das figuras são semirretas?
- d) Quais segmentos possuem ponto médio?

2) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Marque V para Verdadeiro e F para Falso:

- () três pontos sempre estão no mesmo plano.
- () sobre uma reta há infinitos pontos.
- () por um ponto é possível desenhar apenas 8 retas.
- () segmentos de reta possuem apenas o ponto inicial mas não um ponto final.
- () retas paralelas não possui ponto em comum.
- () semirreta possui um ponto inicial e não possui um ponto final.
- () um ponto determina uma única reta.
- () duas retas são concorrentes quando uma reta intersecta a outra reta.
- () o ponto médio divide uma semirreta em duas partes iguais.
- () um plano pode conter infinitos pontos.
- () duas retas paralelas podem estar num único plano.
- () dois pontos sobre uma reta determinam um segmento.
- () se duas retas se cruzam então elas são paralelas.
- () três pontos quaisquer sempre estão sobre a mesma reta.
- () uma semirreta possui infinitos pontos.

3) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) Dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são congruentes. Determine o valor de x se $m(\overline{AB}) = 3x$ e $m(\overline{CD}) = 18cm$.

4) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) Sejam dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} tais que:

$$m(\overline{AB}) = \frac{1}{2}m(\overline{CD}) \text{ e } m(\overline{AB}) + m(\overline{CD}) = 72cm.$$

Quais as medidas de \overline{AB} e \overline{CD} ?

5) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) Sejam dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} tais que:

$$m(\overline{AB}) = \frac{3}{5}m(\overline{CD}) \text{ e } m(\overline{AB}) + m(\overline{CD}) = 96cm.$$

Quais as medidas de \overline{AB} e \overline{CD} ?

6) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Em um plano, considere os pontos A , B e C colineares, com $m(\overline{AB}) = 3x + 2$ e $m(\overline{BC}) = x + 6$. Sabendo que \overline{AB} é congruente a \overline{BC} , determine a medida de cada segmento.

7) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) A diferença entre as medidas de dois segmentos \overline{MN} e \overline{PQ} é $7cm$ e o segmento maior mede $\frac{5}{4}$ do menor mais $2cm$. Qual a medida do segmento menor?

8) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Dois segmentos \overline{EF} e \overline{GH} são congruentes. Determine o valor de x se $m(\overline{EF}) = 4x$ e $m(\overline{GH}) = 28cm$.

9) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Sejam dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} tais que:

$$m(\overline{AB}) = \frac{1}{3}m(\overline{CD}) \text{ e } m(\overline{AB}) + m(\overline{CD}) = 64cm.$$

Quais são as medidas de \overline{AB} e \overline{CD} ?

10) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Sejam dois segmentos \overline{RS} e \overline{TU} tais que: $m(\overline{RS}) = \frac{2}{5}m(\overline{TU})$ e $m(\overline{RS}) + m(\overline{TU}) = 84\text{cm}$.

Quais são as medidas de \overline{RS} e \overline{TU} ?

11) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) A diferença entre as medidas de dois segmentos \overline{MN} e \overline{PQ} é 9cm e o segmento maior mede $\frac{3}{2}$ do menor. Qual é a medida do segmento menor?

12) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) O ponto B está entre A e C em uma mesma reta. Sabe-se que $m(\overline{AB}) = 2x + 3$ e $m(\overline{BC}) = x + 5$. Se $m(\overline{AC}) = 29\text{cm}$, determine o valor de x .

13) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) O ponto D está entre A e B em uma reta. Se $m(\overline{AD}) = 3x - 2$ e $m(\overline{DB}) = 2x + 4$, determine o valor de x sabendo que $m(\overline{AB}) = 32\text{cm}$.

14) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) O ponto M é o ponto médio do segmento \overline{AB} . Sabe-se que $m(\overline{AM}) = 2x + 3$ e $m(\overline{MB}) = x + 9$. Determine o valor de x .

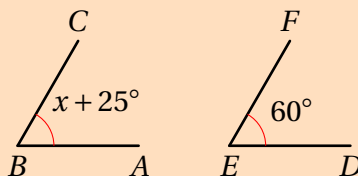
15) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) O ponto M é o ponto médio do segmento \overline{AB} . Se $m(\overline{AM}) = 3x - 4$ e $m(\overline{AB}) = 40\text{cm}$, determine o valor de x .

16) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) O ponto M é o ponto médio do segmento \overline{AB} . Se $m(\overline{AM}) = x + 6$ e $m(\overline{AB}) = 30\text{cm}$, determine o valor de x .

17) (SANGIORGI, 1967 – adaptado) O ponto M é o ponto médio do segmento \overline{AB} . Sabe-se que $m(\overline{AM}) = 2x + 1$ e $m(\overline{AB}) = 5x - 2$. Determine o valor de x .

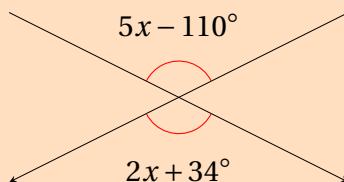
18) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) O complemento de um ângulo mede a quarta parte do suplemento desse ângulo. Determine esse ângulo.

19) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Sejam \widehat{ABC} e \widehat{DEF} congruentes, determine o valor de x .

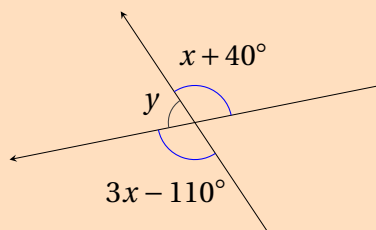


20) (IEZZI, 2022 – adaptado) Dois ângulos suplementares têm medidas expressas por $2x + 10^\circ$ e $3x - 20^\circ$. Determine a medida de cada ângulo.

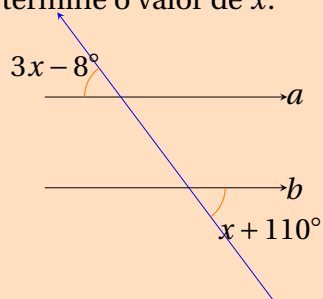
21) (IEZZI, 2022 – adaptado) Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que as retas r e s se interceptam no ponto V e os ângulos destacados são opostos pelo vértice.



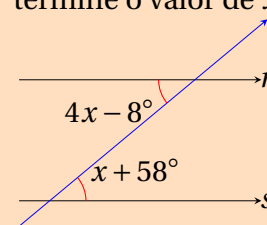
22) (IEZZI, 2022 – adaptado) Na figura a seguir, as retas são concorrentes no ponto V . Com base nas propriedades dos ângulos opostos pelo vértice e ângulos suplementares, determine os valores de x e y .



23) (IEZZI, 2022 – adaptado) Na figura abaixo, as retas a e b são paralelas. Determine o valor de x .



24) (IEZZI, 2022 – adaptado) Sabendo que as retas r e s são paralelas ($r \parallel s$), determine o valor de x na figura abaixo:

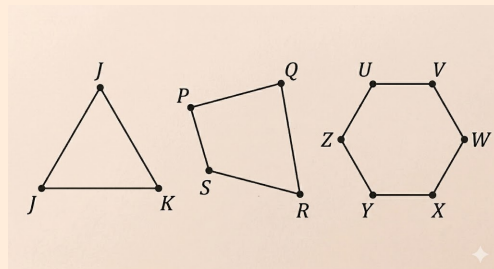


2 Triângulos

Primeiro precisamos falar das curvas fechadas especiais chamadas **Polígonos**:

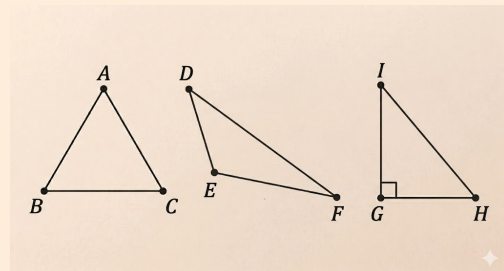
Polígonos

Figura geométrica plana fechada simples constituída por um conjunto de segmentos de retas consecutivos, de modo que dois deles, sucessivos, não sejam colineares.



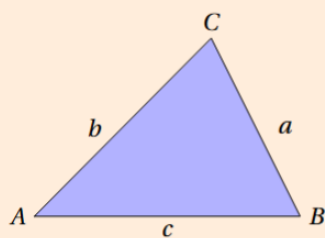
Triângulos

Triângulo é a figura geométrica plana formada por três pontos não colineares e pelos segmentos de reta que unem esses pontos dois a dois.



São os polígonos mais simples, são conhecidos como figuras rígidas e embora simples são figuras centrais no estudo da Geometria Plana.

Lados de um Triângulo Qualquer

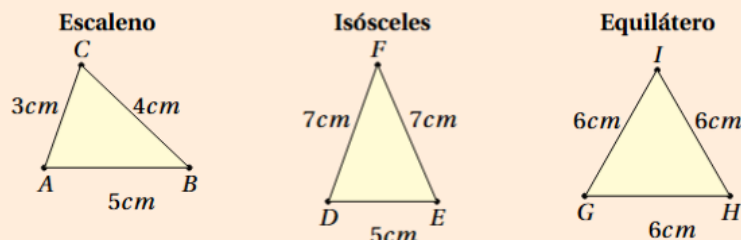


a é a medida do lado oposto ao vértice A ;
 b é a medida do lado oposto ao vértice B ;
 c é a medida do lado oposto ao vértice C ;

2.1 Classificação de Triângulos

Os Triângulos podem ser classificados quanto as medidas de seus **lados** e quanto as medidas de seus **Ângulos**:

Lados



Triângulos	Propriedade	Na figura
Escaleno	3 lados diferentes	$AB = 5cm$, $BC = 4cm$ e $AC = 3cm$
Isósceles	2 lados iguais	$DF \equiv EF = 7cm$ e $DE = 5cm$
Equilátero	3 lados iguais	$GH \equiv HI \equiv GI = 6cm$

Exercício Resolvido 1) (SOUZA, 2018 – adaptado) Construa e classifique os triângulos com as seguintes medidas de lados:

- a) 7cm, 7cm e 7cm. b) 5cm, 8cm e 5cm. c) 6cm, 10cm e 8cm.

Solução - Classificação por Lados

Classificamos os triângulos comparando as medidas de seus três lados:

- **Equilátero:** 3 lados iguais.
- **Isósceles:** pelo menos 2 lados iguais.

B) 5cm, 8cm e 5cm

- **Execução:** Há dois lados iguais a 5cm.
- **Verificação:** **Isósceles.**

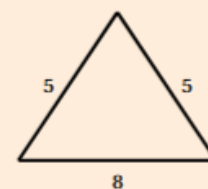
C) 6cm, 10cm e 8cm

- **Execução:** Todas as medidas são distintas.
- **Verificação:** **Escaleno.**

- **Escaleno:** todos os lados diferentes.

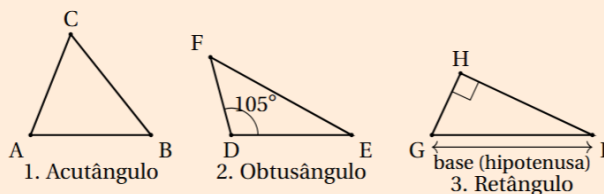
A) Lados: 7cm, 7cm e 7cm

- **Execução:** Todos os lados possuem a mesma medida.
- **Verificação:** **Equilátero.**



Exemplo B (Isósceles)

Classificação por Ângulos



Triângulos	Propriedade
Acutângulo	3 ângulos menores que 90°
Obtusângulo	1 ângulo maior que 90°
Retângulo	1 ângulo igual a 90°

Exercício Resolvido 2) (SOUZA, 2018 – adaptado) Classifique os triângulos com:

- ângulos: 30° , 60° e 80° .
- um ângulo de 110° .
- um ângulo simbolizado por \square .

Solução - Classificação por Ângulos

Para classificar um triângulo quanto aos ângulos, observamos se eles são menores, iguais ou maiores que o ângulo reto (90°).

A) Triângulo com ângulos: 40° , 60° , 80° .

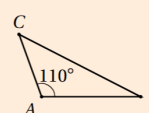
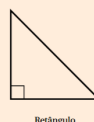
- Execução:** Todos os ângulos são menores que 90° .
- Verificação:** **Acutângulo.**

B) Triângulo com um ângulo de 110° .

- Execução:** O ângulo de 110° é maior que 90° (obtuso).
- Verificação:** **Obtusângulo.**

C) Triângulo com o símbolo \square em um dos vértices.

- Execução:** O símbolo indica um ângulo de exatos 90° .
- Verificação:** **Retângulo.**



2.2 Condição de Existência

definição

Em qualquer triângulo, a medida de cada lado é menor do que a soma e maior que a diferença das medidas dos outros dois lados

Exercício Resolvido 3) (SOUZA, 2018 – adaptado) Verifique se é possível construir um triângulo com segmentos medindo:

- A) 4cm, 5cm e 6cm. B) 5cm, 7cm e 13cm. C) 3cm, 5cm e 9cm

Solução - Condição de Existência

Para que um triângulo exista, a soma de dois lados deve ser sempre maior que o terceiro lado ($a + b > c$).

A) 4cm, 5cm e 6cm

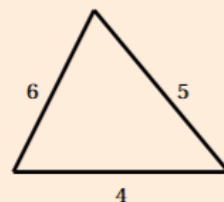
- *Plano:* Verificar o maior lado.
- *Execução:* $4 + 5 = 9$. Como $9 > 6$, a condição é satisfeita para todos os pares.
- *Verificação:* **Sim**, é possível.

B) 5cm, 7cm e 13cm

- *Plano:* Somar os dois menores lados.
- *Execução:* $5 + 7 = 12$. Note que $12 < 13$.
- *Verificação:* **Não** é possível, pois a soma dos menores é inferior ao maior lado.

C) 3cm, 5cm e 9cm

- *Plano:* Testar a desigualdade triangular.
- *Execução:* $3 + 5 = 8$. Como $8 < 9$, a regra é violada.
- *Verificação:* **Não** é possível construir o triângulo.



Exemplo A (Possível)

2.3 Existência: Conexão com a Álgebra

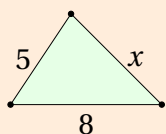
A transição da Geometria para a Álgebra ocorre quando deixamos de trabalhar com valores fixos e passamos a usar inequações para representar as relações entre os lados. A condição de existência ($|b - c| < a < b + c$) chamada de desigualdade triangular, gera um intervalo aberto, desse modo a Geometria não é apenas "desenho", mas uma estrutura lógica regida por intervalos numéricos.

Exercício Resolvido 4) (elaborado pelo autor) Sejam os segmentos com medidas 5, 8 e x , encontre os valores inteiros de x para que seja possível construir um triângulo.

Solução

Em qualquer triângulo, a medida de um lado deve ser menor que a soma dos outros dois e maior que o módulo da diferença:

$$|b - c| < a < b + c$$



Aplicando os valores 5 e 8:

$$1. x < 5 + 8 \Rightarrow x < 13 \quad 2. x > |8 - 5| \Rightarrow x > 3$$

Intervalo de x :

$$3 < x < 13$$

Valores Inteiros: Como o enunciado pede valores inteiros, x pode ser:

$$\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

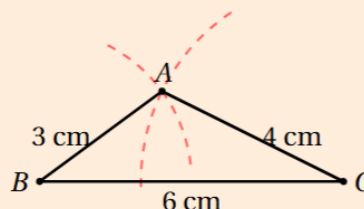
Exercício Resolvido 5) (BRAGA, 1997 – adaptado) Construir um triângulo com medidas 3cm, 4cm e 6cm usando compasso e régua.

Solução

1. Compreensão: Construir um triângulo ABC com lados $a = 6$ cm, $b = 4$ cm e $c = 3$ cm. Como $6 < 4 + 3$, a existência é garantida pela desigualdade triangular.

2. Plano e Execução:

1. Trace a base BC com 6 cm.
2. Com o compasso em B e abertura de 3 cm, trace um arco.
3. Com o compasso em C e abertura de 4 cm, trace outro arco.
4. A interseção dos arcos é o vértice A .

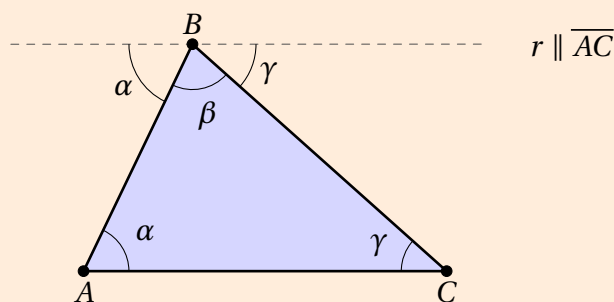


3. Verificação: Unindo os pontos, obtemos o triângulo cujas medidas foram transportadas com precisão pelo compasso a partir da régua graduada.

2.4 Teorema Angular de Tales

Teorema

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .



Demonstração visual do Teorema Angular de Tales

Reta Auxiliar: Traça-se uma reta r paralela à base \overline{AC} passando pelo vértice B . **Ângulos Alternos Internos:** Pela propriedade de retas paralelas cortadas por transversais (lados AB e BC), os ângulos internos α (em A) e γ (em C) são transportados para a reta superior como ângulos alternos internos congruentes. **Ângulo Raso:** No vértice B , os três ângulos (α , β e γ) encontram-se alinhados sobre a reta r , formando claramente um ângulo raso de 180° (uma semicircunferência ou meia volta).

Exercício Resolvido 6) (IEZZI, 2022 – adaptado) Dado um triângulo com ângulos internos 50° e 70° , qual a medida do terceiro ângulo interno?

Solução - Teorema Angular de Tales

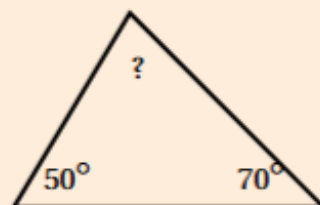
O Teorema Angular de Tales (TAT) afirma que a soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180° .

Exercício: Em um triângulo, dois ângulos medem 50° e 70° . Qual a medida do terceiro ângulo?

- *Compreensão:* Conhecemos dois ângulos (50° , 70°) e buscamos o terceiro para totalizar 180° .
- *Plano:* Somar os ângulos conhecidos e subtrair o resultado de 180° .

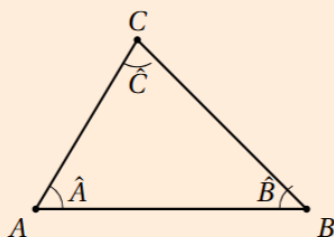
- *Execução:* $50^\circ + 70^\circ = 120^\circ$.
 $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

- *Verificação:* $50^\circ + 70^\circ + 60^\circ = 180^\circ$.
Correto.



2.5 TAT: Conexão com Álgebra

Teorema Angular de Tales



Soma dos Ângulos Internos

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

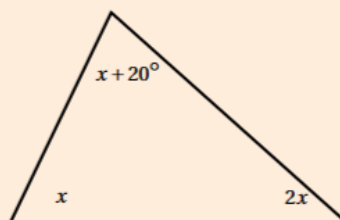
A Geometria e a Álgebra caminham juntas quando precisamos descobrir medidas que não estão explícitas. O Teorema Angular de Tales nos dá uma equação: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$. Quando os ângulos são expressões algébricas (como $2x$ ou $x + 10^\circ$), devemos solucionar equações do 1º grau para isolar a incógnita e, em seguida, determinar cada uma das medidas reais do triângulo.

Solução - Teorema de Tales e Equações

Problema: Em um triângulo, as medidas dos ângulos internos são x , $2x$ e $x + 20^\circ$. Determine o valor de cada ângulo.

- *Compreensão:* A soma dos três ângulos (x , $2x$ e $x + 20^\circ$) deve ser exatamente 180° .
- *Plano:* Montar a equação: $x + 2x + (x + 20^\circ) = 180^\circ$.
- *Execução:* $4x + 20^\circ = 180^\circ$
 $4x = 160^\circ$
 $x = 40^\circ$.

- *Verificação:* $\hat{A} = 40^\circ$
 $\hat{B} = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$
 $\hat{C} = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$
Soma: $40^\circ + 80^\circ + 60^\circ = 180^\circ$.



Exercício Resolvido 7) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Determine o valor de x em um triângulo com ângulos medindo $2x$, $3x$ e $4x$.

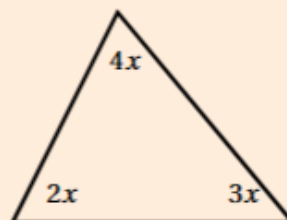
Solução - Teorema de Tales com Álgebra (I)

1. Compreensão: Os 3 ângulos internos são termos algébricos em x .

- *Plano:* A soma dos ângulos deve ser 180° . Montar a equação: $2x + 3x + 4x = 180^\circ$.

- *Execução:* $9x = 180^\circ$
 $x = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$.

- *Verificação:* Os ângulos são 40° , 60° e 80° . A soma resulta em 180° .



Exercício Resolvido 8) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Em um triângulo retângulo, um dos ângulos agudos mede o dobro do outro. Quais são as medidas?

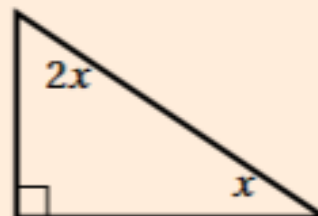
Solução - Teorema de Tales com Álgebra (II)

Compreensão: ângulo reto = 90° os demais são definidos pelo pensamento algébrico em x .

- *Compreensão:* Um ângulo é 90° . Chamaremos os outros de x e $2x$.

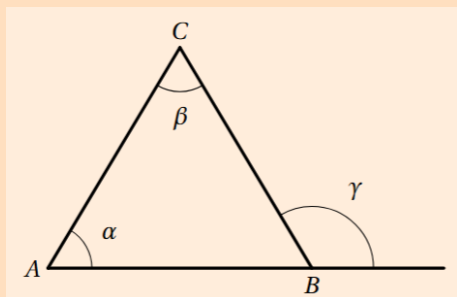
- *Execução:* $x + 2x + 90^\circ = 180^\circ$
 $3x = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow 3x = 90^\circ$
 $x = 30^\circ$.

- *Verificação:* Os ângulos são 90° , 30° e 60° .



2.6 Teorema do Ângulo Externo

Em todo triângulo, qualquer ângulo externo tem medida igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.



$$\gamma = \alpha + \beta$$

Exercício Resolvido 9) (IEZZI, 2022 – adaptado) Em um triângulo ABC , o ângulo externo no

vértice A mede 110° . Sabe-se que o ângulo interno \hat{C} mede 45° . Determinar a medida do ângulo interno \hat{B} .

Solução

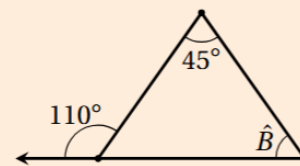
- 1. Compreensão:** o ângulo externo no vértice A mede 110° o ângulo interno \hat{C} mede 45° . O objetivo é determinar a medida do ângulo interno \hat{B} .
- 2. Plano:** Pelo Teorema do Ângulo Externo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

$$\text{Ext}_A = \hat{B} + \hat{C}$$

Solução (cont.)

3. Execução:

$$\begin{aligned} 110^\circ &= \hat{B} + 45^\circ \\ \hat{B} &= 110^\circ - 45^\circ \\ \hat{B} &= 65^\circ \end{aligned}$$



- 4. Verificação:** Somando os internos encontrados: $65^\circ + 45^\circ = 110^\circ$. Como o ângulo interno \hat{A} seria $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$, a soma total $70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$ confirma a consistência.

2.7 Exercícios Exploratórios

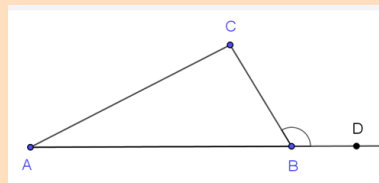
- 1) (SOUZA, 2018 – adaptado) Construa triângulos com as seguintes medidas de lados:
 1. 3 cm, 4 cm e 5 cm;
 2. 2 cm, 3 cm e 6 cm;
 3. 5 cm, 5 cm e 5 cm.

- 2) (BRAGA, 1997 – adaptado) Construir um triângulo com a base medindo 4cm e dois lados medindo 5cm, usando compasso e régua.

- 3) (SOUZA, 2018 – adaptado) Construir um triângulo com medidas 5cm, 12cm e 13cm, usando compasso e régua.

- 4) (SOUZA, 2018 – adaptado) Construir um triângulo com um ângulo medindo 120° , usando o transferidor.

- 5) (HENRIQUE, 2019) No **Geogebra** onstrua uma semirreta AB e um ponto C externo à semirreta. Em seguida construam o triângulo ABC e um ponto D (ver figura). O ângulo $\angle CBD$ é chamado ângulo externo do triângulo ABC.



- a) Meça as medidas dos ângulos BAC e ACB e adicionem os valores obtidos. Depois meçam o ângulo DBC. O que vocês observam?
- b) Mova livremente um ou mais pontos a fim de modificar a construção. Adicionem novamente os valores dos ângulos $\angle BAC$ e $\angle ACB$ e comparem com o ângulo DBC. Isso sempre vai acontecer? Por quê?
- c) Qual relação existe entre os ângulos externos? Apresentem, pelo menos, duas observações com justificativas.
- d) Qual é o valor da soma dos ângulos internos do triângulo ABC? Por quê?
- e) Essa constatação pode ser aplicada em outros triângulos? Expliquem.
- f) É possível estabelecer alguma relação entre os ângulos internos do triângulo? Se sim, qual?

6) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) É possível construir um triângulo com segmentos medindo 5cm, 7cm e 12cm?

7) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Sejam 6, 8 e x valores de medidas de segmentos, qual deve ser o valor de x para que seja possível construir um triângulo com tais segmentos?

8) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Deseja-se cercar um canteiro triangular utilizando três estacas de madeira cujos comprimentos são 7 metros, 10 metros e 18 metros. Com base na condição de existência de triângulos, é possível realizar essa construção? Justifique sua resposta.

9) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Um aluno possui três palitos de sorvete com medidas de 8 cm, 15 cm e um terceiro palito cuja medida ele esqueceu. Sabendo que foi possível construir um triângulo com esses três palitos, qual é o menor valor inteiro possível para a medida desse terceiro lado?

2.8 Exercícios Propostos

1) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Determine todos os possíveis valores inteiros para o perímetro de um triângulo cujos lados medem 4 cm e 9 cm.

2) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Um triângulo isósceles possui dois lados medindo 6 cm e 13 cm. É possível determinar qual desses valores corresponde à base do triângulo? Justifique sua resposta utilizando a condição de existência.

3) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Analise as medidas dos ângulos internos dos triângulos abaixo e classifique cada um deles quanto aos seus ângulos (Acutângulo, Retângulo ou Obtusângulo):

A) Triângulo com ângulos de 35° , 55° e 90° .

B) Triângulo com ângulos de 20° , 20° e 140° .

C) Triângulo com ângulos de 50° , 60° e 70° .

4) (IEZZI, 2022 – adaptado) Em um triângulo isósceles, o ângulo do vértice mede 70° . Determine o valor de cada um dos ângulos da base, apresentando a equação utilizada.

5) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Dadas as proposições sobre triângulos abaixo, classifique-os em Equilátero, Isósceles ou Escaleno:

A) Triângulo cujas medidas dos lados são todas iguais.

B) Triângulo que possui dois lados com 5 cm e um lado com 3 cm.

C) Triângulo cujos lados medem 4 cm, 6 cm e 8 cm.

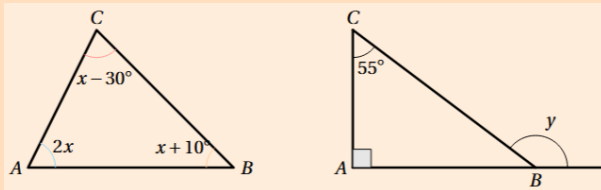
6) (HENRIQUE, 2019 – adaptado) [Desafio] É possível um triângulo ser, ao mesmo tempo, Equilátero e Isósceles? Justifique sua resposta com base na definição de que um triângulo isósceles deve possuir "pelo menos" dois lados iguais.

7) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) As medidas dos ângulos internos de um triângulo são dadas por $x + 10^\circ$, $2x - 30^\circ$ e $x + 20^\circ$. Calcule o valor de x e classifique este triângulo quanto aos seus ângulos.

8) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Um triângulo retângulo possui um ângulo agudo que mede o triplo do outro ângulo agudo. Determine a medida desses dois ângulos e classifique o triângulo quanto aos seus lados (Equilátero, Isósceles ou Escaleno).

9) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Em um triângulo equilátero, todos os ângulos internos são expressos pela mesma medida algébrica $5x - 10^\circ$. Determine o valor de x e verifique se a soma dos ângulos obedece ao Teorema de Tales.

10) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Determine os valores de x e y :



11) (elaborado pelo autor) Um triângulo possui ângulos que medem x , $x + 20^\circ$ e $x + 40^\circ$. Determine o valor de cada ângulo e classifique este triângulo simultaneamente quanto aos lados e quanto aos ângulos.

12) (elaborado pelo autor) O perímetro de um triângulo é a soma das medidas dos lados, de um triângulo equilátero é representado pela expressão algébrica $3x + 15$. Se a medida de cada lado do triângulo é 10 cm, qual é o valor de x ?

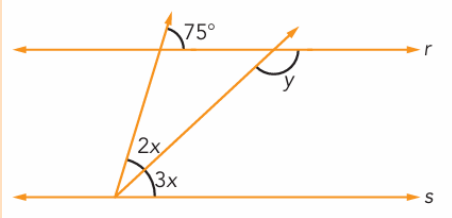
13) (elaborado pelo autor) Um triângulo isósceles possui dois lados medindo $2x - 5$ e um lado medindo $x + 10$. Sabendo que os dois lados de mesma medida são os que contêm a variável x , determine o valor de x para que o perímetro desse triângulo seja 40 cm.

14) (elaborado pelo autor) As medidas dos lados de um triângulo escaleno são expressas por x , $x + 2$ e $x + 4$. Se o perímetro do triângulo é 30 cm, determine o valor de x e as medidas de cada um dos lados.

15) (IEZZI, 2022 – adaptado) Em um triângulo isósceles, a base mede 8 cm e os lados congruentes (iguais) medem $3x - 2$ cada um. Se o perímetro total é 24 cm, calcule o valor de x e classifique o triângulo quanto aos seus ângulos após encontrar as medidas dos lados.

16) (elaborado pelo autor) [Desafio] Considere um triângulo com lados medindo x , 5 e 9. A) Quais são os possíveis valores inteiros para x para que o triângulo exista? B) Se o triângulo for isósceles, quais são os dois possíveis valores para x ?

17) (IEZZI, 2022 – adaptado) Sabendo que r é paralelo com s determine x e y .



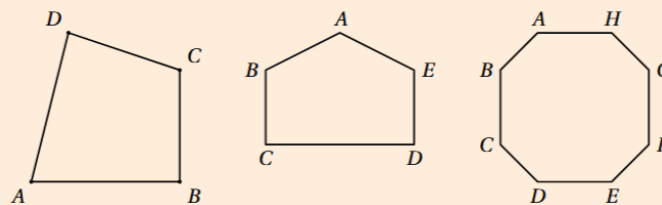
18) (elaborado pelo autor) Em um triângulo isósceles, os lados congruentes medem $2x + 1$ e a base mede $3x - 2$. Sabendo que o perímetro é 25 cm, determine as medidas dos lados.

3 Polígonos

3.1 Polígonos Convexos

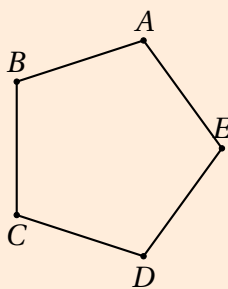
Polígono

É uma linha poligonal fechada, ou seja, uma curva fechada formada por segmentos de reta consecutivos e não colineares, podendo ser simples ou não simples. Note, a seguir, alguns polígonos.

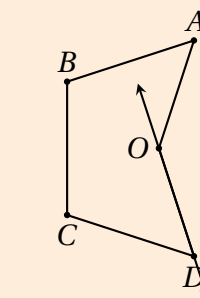
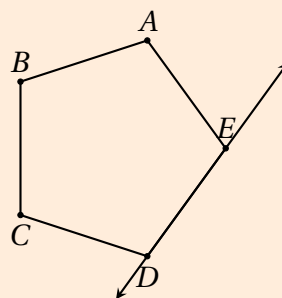


Polígonos Convexos

Um polígono contido em um plano é convexo se, ao traçarmos uma reta sobre cada lado desse polígono, o restante dele ficar no mesmo semiplano — isto é, em um dos dois semiplanos que a reta determina.



Convexo

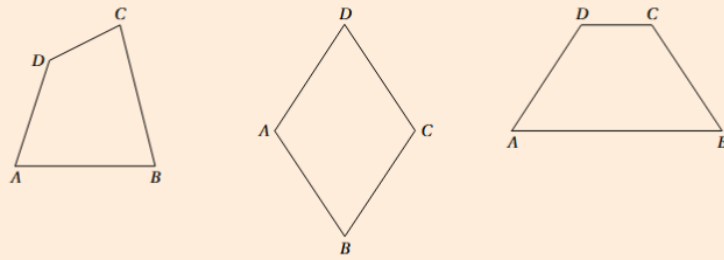


Não Convexo

QUADRILÁTEROS

Um quadrilátero é um polígono que possui exatamente quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos internos. A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer quadrilátero convexo é sempre igual a 360 graus.

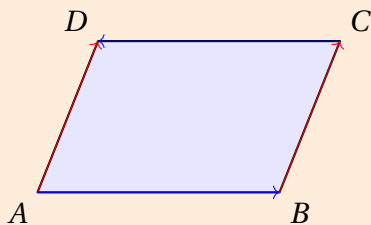
Quadrilátero



PARALELOGRAMOS

Um paralelogramo é um quadrilátero que possui os dois pares de lados opostos paralelos.

Paralelogramo



Paralelogramo

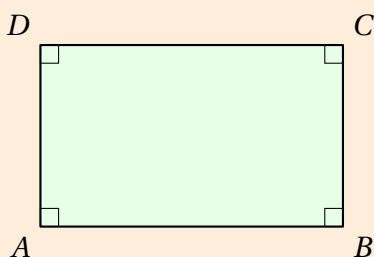
PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS:

1. Os lados opostos são congruentes (iguais).
2. Os ângulos opostos são congruentes.
3. As diagonais cruzam-se nos seus pontos médios.
4. Ângulos adjacentes são suplementares ($soma = 180^\circ$).

RETÂNGULOS

Um retângulo é um paralelogramo que possui os quatro ângulos internos congruentes (cada um medindo 90 graus).

Retângulo



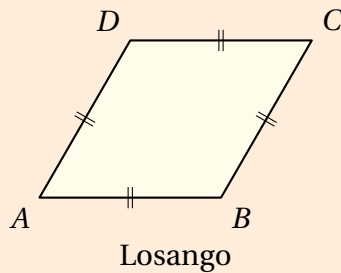
Retângulo

PROPRIEDADE ESPECÍFICA: Além de todas as propriedades dos paralelogramos, as diagonais de um retângulo são congruentes (possuem a mesma medida).

LOSANGOS

Um losango é um paralelogramo que possui os quatro lados congruentes (todos com a mesma medida).

Losango



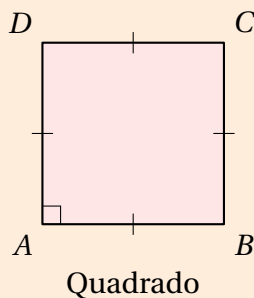
PROPRIEDADES ESPECÍFICAS:

1. Além das propriedades de todo paralelogramo, as diagonais de um losango são perpendiculares entre si.
2. As diagonais do losango também atuam como bissetrizes dos seus ângulos internos.

QUADRADOS

Um quadrado é um paralelogramo que possui os quatro lados congruentes (é um losango) e os quatro ângulos internos congruentes (é um retângulo).

Quadrado



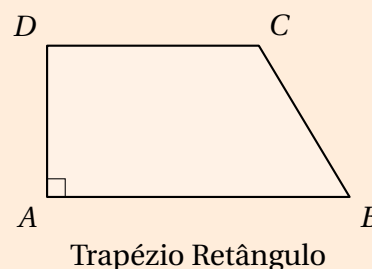
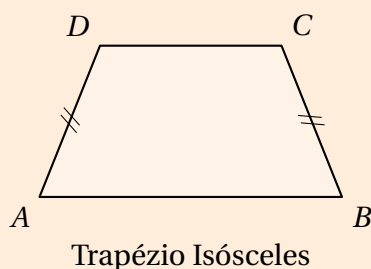
PROPRIEDADES COMBINADAS:

1. Possui quatro ângulos retos (90 graus).
2. Possui quatro lados de mesma medida.
3. Suas diagonais são congruentes, cruzam-se nos seus pontos médios e são perpendiculares entre si.

TRAPÉZIOS

Um trapézio é um quadrilátero que possui pelo menos um par de lados opostos paralelos, chamados de bases (base maior e base menor).

Trapézio

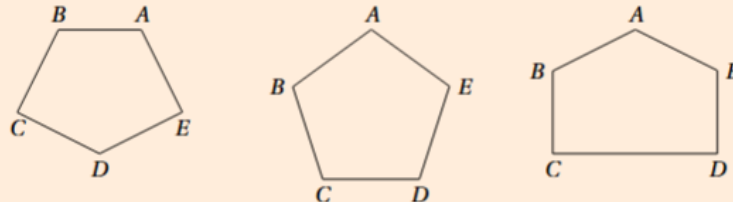


CLASSIFICAÇÃO:

1. TRAPÉZIO ISÓSCELES: Lados não paralelos congruentes.
2. TRAPÉZIO RETÂNGULO: Possui dois ângulos retos (90 graus).
3. TRAPÉZIO ESCALENO: Lados não paralelos com medidas diferentes entre si.

PENTÁGONOS

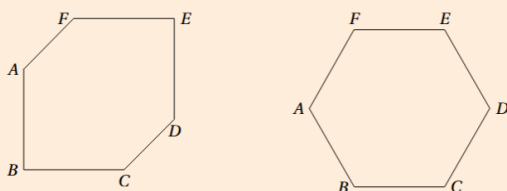
Um pentágono é um polígono que possui exatamente cinco lados, cinco vértices e cinco ângulos internos.

Pentágono**PROPRIEDADES GERAIS:**

1. A soma de seus ângulos internos é sempre 540 graus, calculada pela fórmula $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$.
2. Possui exatamente 5 diagonais.
3. Pode ser classificado como convexo (todos os ângulos menores que 180°) ou côncavo.

HEXÁGONOS

Um hexágono é um polígono que possui exatamente seis lados, seis vértices e seis ângulos internos.

Hexágono**PROPRIEDADES GERAIS:**

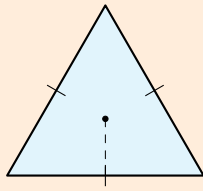
1. A soma de seus ângulos internos é sempre 720 graus.
2. Possui exatamente 9 diagonais.
3. Um hexágono regular é composto por seis triângulos equiláteros congruentes, mas um hexágono irregular pode assumir qualquer formato de seis lados.

3.2 Polígonos Regulares

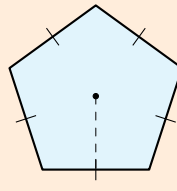
POLÍGONOS REGULARES Um polígono é chamado de REGULAR quando ele é, simultaneamente:

- EQUILÁTERO (todos os lados congruentes)
- EQUIÂNGULO (todos os ângulos internos congruentes).

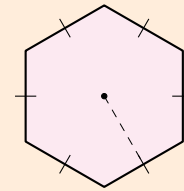
Polígonos Regulares



Triângulo Regular



Pentágono Regular



Hexágono Regular

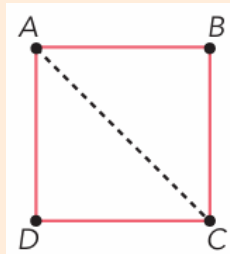
ELEMENTOS ESPECÍFICOS:

1. CENTRO: Ponto equidistante de todos os vértices.
2. APÓTEMA: Segmento que une o centro ao ponto médio de um dos lados (perpendicular ao lado).

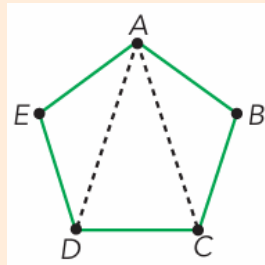
3.3 Soma dos Ângulos Internos

Para descobirmos a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo, podemos decompor o polígono em triângulos, já que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é conhecida (180°).

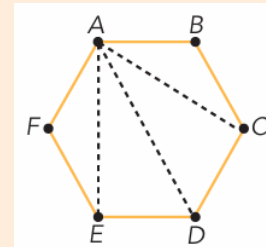
Triângulos internos



- 4 lados
- 2 triângulos
- $2 \times 180^\circ$



- 5 lados
- 3 triângulos
- $3 \times 180^\circ$



- 6 lados
- 4 triângulos
- $4 \times 180^\circ$

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Exercício Resolvido 1) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Determine a soma dos ângulos internos de um decágono convexo.

Soma dos Ângulos Internos

- **Passo 1 (Identificação):** Um decágono possui $n = 10$ lados.
- **Passo 2 (Fórmula):** A soma dos ângulos internos (S_i) é dada por $S_i = (n-2) \cdot 180^\circ$.
- **Passo 3 (Cálculo):** $S_i = (10-2) \cdot 180^\circ$
 $S_i = 8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.
- **Passo 4 (Verificação):** Como cada triângulo adicionado ao polígono (a partir do triângulo básico) soma 180° , e um decágono pode ser decomposto em 8 triângulos partindo de um único vértice, o resultado é consistente.

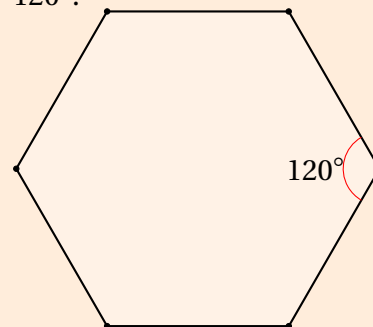
Resposta: A soma é 1440° .

Exercício Resolvido 2) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Calcule a medida de cada ângulo interno de um hexágono regular.

Ângulo Interno de Polígono Regular

Resolução:

- **Passo 1 (Dados):** Hexágono $\implies n = 6$.
- **Passo 2 (Fórmulas):** Primeiro achamos a soma total e dividimos pelo número de vértices: $a_i = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.
- **Passo 3 (Cálculo):** $S_i = (6-2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.
 $a_i = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$.
- **Passo 4 (Análise):** Em um hexágono regular, os ângulos internos são obtusos ($> 90^\circ$), o que é coerente com a geometria da figura.



3.4 Número de Diagonais

Número de Diagonais

Seja n o número de lados de um polígono, então seu número de diagonais D é dado por:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Exercício Resolvido 3) (IEZZI, 2022) A quantidade total de diagonais de três polígonos convexos é igual a 171. Sabe-se que o número de lados desses três polígonos é $n-3$, n e $n+3$.

Dentre eles, o que possui menor número de lados é um:

solução

1. Fórmula das diagonais:

Um polígono com n lados possui:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

2. Lados dos três polígonos:

Os números de lados são:

$$n-3, \quad n, \quad n+3$$

3. Soma das diagonais:

$$\frac{(n-3)(n-6)}{2} + \frac{n(n-3)}{2} + \frac{(n+3)(n)}{2} = 171$$

Multiplicamos tudo por 2:

$$(n-3)(n-6) + n(n-3) + (n+3)(n) = 342$$

4. Desenvolvendo:

$$(n-3)(n-6) = n^2 - 9n + 18$$

$$n(n-3) = n^2 - 3n$$

$$(n+3)(n) = n^2 + 3n$$

Somando:

$$n^2 - 9n + 18 + n^2 - 3n + n^2 + 3n = 342$$

$$3n^2 - 9n + 18 = 342$$

5. Resolver a equação:

$$3n^2 - 9n - 324 = 0 \Rightarrow n^2 - 3n - 108 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 + 4 \cdot 108 = 441 \Rightarrow n = \frac{3 \pm 21}{2}$$

$$\Rightarrow n = 12 \text{ (válido)}$$

6. Lados dos polígonos:

$$n-3 = 9, \quad n = 12, \quad n+3 = 15$$

7. Resposta final: O que tem menos lados é o:

eneágono

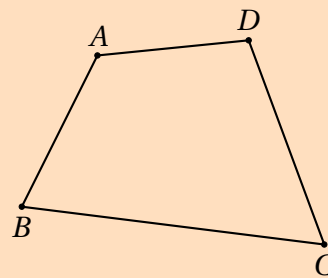
3.5 Exercícios Exploratórios

1) (PASSOS; SILVA, 2013 – adaptado) Desenhe um quadrilátero:

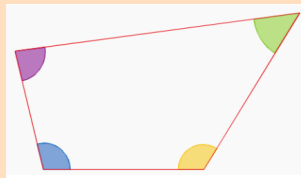
- qualquer;
- que seja paralelogramo;
- que seja trapézio;
- que não seja nem paralelogramo nem trapézio.

2) (PASSOS; SILVA, 2013 – adaptado) Considerando o quadrilátero ABCD abaixo, responda quantos(as) e quais são:

- os seus lados;
- os seus vértices;
- as suas diagonais;
- os seus ângulos internos.



3) (PASSOS; SILVA, 2013 – adaptado) Desenhe um quadrilátero qualquer em uma folha de papel sulfite. Pinte, recorte os ângulos e faça colagens para verificar a soma das medidas dos quatro ângulos internos.



4) (HENRIQUE, 2019 – adaptado) Investigando a Soma dos Ângulos Internos: No **GeoGebra**, utilize a ferramenta "Polígono" para criar um polígono convexo de n lados (comece com um quadrilátero). Use a ferramenta "Ângulo" para exibir todos os ângulos internos e, no campo de entrada, crie uma variável soma = + + + ... para monitorar o total.

- Mova os vértices e altere o formato do polígono. A soma dos ângulos internos se altera quando você muda a forma, mas mantém o número de lados?
- Adicione um novo vértice (tornando-o um pentágono). Qual é a nova soma observada?
- Generalize: para cada lado adicionado, quanto aumenta a soma dos ângulos internos?

5) (HENRIQUE, 2019) **Geogebra** Utilize a ferramenta "Polígono Regular" para construir, lado a lado, polígonos que compartilham um vértice comum, tentando preencher o plano sem deixar buracos (como um piso). Verifique as seguintes proposições sobre quais polígonos "encaixam" perfeitamente ao redor de um ponto:

- () É possível preencher o plano perfeitamente usando apenas triângulos equiláteros.
- () Três hexágonos regulares se encontram em um vértice e preenchem os 360° sem sobreposição.
- () O pentágono regular é uma excelente forma para criar mosaicos sem folgas.
- () Para que um polígono regular preencha o plano, a medida do seu ângulo interno deve ser um divisor de 360° .
- () É possível formar um mosaico combinando quadrados e octógonos regulares.
- () Um polígono regular com 7 lados (heptágono) consegue preencher o plano sozinho.

6) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Construa polígonos com 3, 4, 5 e 6 lados em papel quadriculado. Conte o número de diagonais de cada um e registre um padrão que relacione o número de lados ao número de diagonais.

7) (HENRIQUE, 2019) A fórmula construída na atividade anterior pode ser aplicada a todos os polígonos? Construam alguns polígonos e verifique!

- a) Qual(is) procedimento(s) você utilizou para concluir o raciocínio?
- b) Construa um polígono regular. Meça um ângulo interno do polígono construído. Meça o ângulo externo adjacente ao ângulo interno. Modifique o polígono construído.
- c) Quanto mede a soma dos dois ângulos construídos?
- d) A partir de suas observações sobre polígonos regulares, é possível determinar os demais ângulos externos? Expliquem.
- e) Quanto mede a soma dos ângulos externos do polígono regular que você construiu?
- f) Investigue se é possível determinar a soma dos ângulos externos de qualquer polígono regular.

8) (HENRIQUE, 2019) **GeoGebra**: Construa um quadrilátero.

- a) Meça os ângulos internos do quadrilátero.
- b) Mova livremente, modifiquem o quadrilátero.
- c) Ao modificar o quadrilátero é possível fazer alguma observação? Se sim, qual?
- d) Adicione os ângulos internos do polígono.
- e) Mova livremente modifique o quadrilátero.
- f) O que você observou? Essa constatação está relacionada a alguma propriedade já conhecida? Explique.

3.6 Exercícios Propostos

1) (elaborado pelo autor) Se um polígono regular possui um ângulo interno de 120° , qual é o nome desse polígono?

- a) Octógono
b) Pentágono
c) Hexágono
d) Quadrado

2) (elaborado pelo autor) Julgue as afirmações em verdadeiras ou falsas.

- () Todo retângulo é paralelogramo. () Todo paralelogramo é losango.
() Todo quadrado é retângulo. () Todo quadrado é losango.

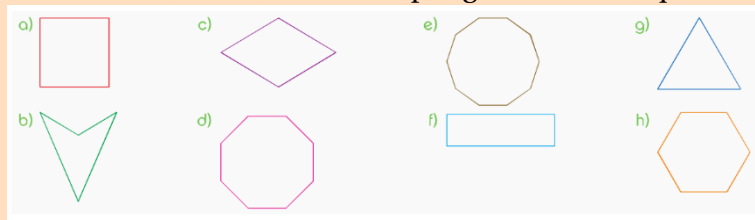
3) (PASSOS; SILVA, 2013) Assinale as alternativas cujas sentenças sejam verdadeiras.

- () Os paralelogramos possuem os lados opostos paralelos. () O quadrado é o único quadrilátero que possui os quatro lados congruentes.
() A soma dos ângulos internos do quadrado é igual a 180° . () O losango possui os quatro ângulos internos iguais a 90° .
() A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° . () Todo quadrado é também um retângulo.
() Quadrado é o paralelogramo que possui os quatro lados congruentes e cada um dos quatro ângulos internos têm 90° . () Todo retângulo é também um quadrado.

4) (PASSOS; SILVA, 2013) Assinale as alternativas cujas sentenças sejam verdadeiras.

- () Num trapézio retângulo os lados não paralelos são congruentes.
() Num trapézio isósceles as bases são congruentes.
() Os lados não paralelos de um trapézio isósceles são congruentes.
() Os quatro lados de um trapézio escaleno não são congruentes.

5) (PASSOS; SILVA, 2013) Dos polígonos abaixo, quais são polígonos regulares?



6) (PASSOS; SILVA, 2013) Os contornos das duas praças têm a forma de polígono regular. Qual deles tem maior perímetro?



7) (PASSOS; SILVA, 2013) Examine a sequência de polígonos regulares:



À medida que o número de lados vai aumentando, o polígono regular tende a ficar parecido com que figura geométrica?

8) (PASSOS; SILVA, 2013) Calcule:

- a soma das medidas dos ângulos internos de um heptágono convexo;
- o número de lados de um polígono convexo no qual $S_i = 1440^\circ$.

9) (PASSOS; SILVA, 2013) Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um:

- decágono;
- dodecágono;
- pentadecágono;
- icoságono.

10) (PASSOS; SILVA, 2013) Determine o número de diagonais dos seguintes polígonos convexos:

- dodecágono;
- icoságono.

11) (PASSOS; SILVA, 2013) Responda:

- De qual polígono convexo saem 5 diagonais de cada vértice?
- Qual é o total de diagonais desse polígono?

12) (PASSOS; SILVA, 2013) Determine o número de lados de um polígono que possui 20 diagonais.

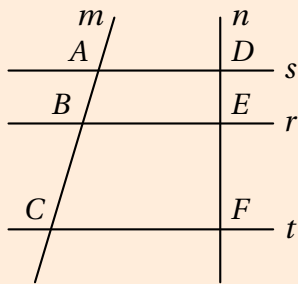
13) (PASSOS; SILVA, 2013) Qual o número de diagonais de Polígono de 12 lados?

4 Congruência e Semelhança

4.1 Teorema de Tales

Teorema de Tales

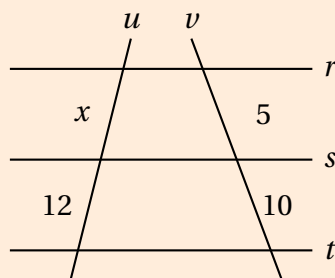
Considere um feixe de retas paralelas interceptadas por duas retas transversais. Os segmentos correspondentes determinados sobre as transversais são proporcionais. As retas m e n são transversais ao feixe de paralelas r , s e t .



$$\frac{AB}{CB} = \frac{DE}{EF}$$

Exercício Resolvido 1) (IEZZI, 2022 – adaptado) Determine o valor de x no feixe de retas paralelas r, s, t cortadas pelas transversais u e v , sabendo que os segmentos determinados em u são x e 12, e os segmentos correspondentes em v são 5 e 10.

Solução



1. Compreensão do Problema: O Teorema de Tales afirma que um feixe de retas paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais. Temos as medidas x e 12 em uma transversal e 5 e 10 na outra.

2. Plano de Resolução: Montaremos a proporção baseada na correspondência entre os segmentos:

$$\frac{x}{12} = \frac{5}{10}$$

Cont. Solução

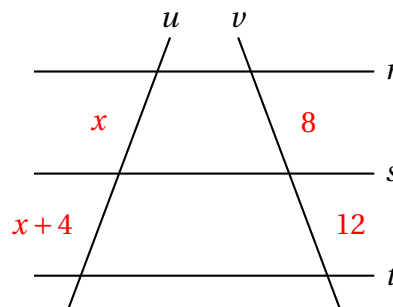
3. Execução: Simplificando a fração $\frac{5}{10}$ para $\frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{x}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{Multiplicando em cruz:} \quad \Rightarrow x = \frac{12}{2} \Rightarrow \mathbf{x = 6}$$

$$2x = 12$$

4. Verificação: Se $x = 6$, a razão na primeira transversal é $\frac{6}{12} = 0,5$. Na segunda transversal, a razão é $\frac{5}{10} = 0,5$. Como as razões são iguais, a solução está correta.

Exercício Resolvido 2) (SOUZA, 2018 – adaptado) No feixe de retas paralelas r, s, t intersectadas pelas transversais u e v , os segmentos determinados em u medem x e $x + 4$. Na transversal v , os segmentos correspondentes medem 8 e 12. Determine o valor de x aplicando a proporcionalidade.



Solução

1. Compreensão do Problema

Temos segmentos expressos de forma algébrica (x e $x + 4$) em uma transversal e valores numéricos (8 e 12) na outra. O Teorema de Tales estabelece que:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{8}{12}$$

3. Execução

Simplificando $\frac{8}{12}$ por 4, obtemos $\frac{2}{3}$:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$$

Multiplicando cruzado:

$$3 \cdot x = 2 \cdot (x + 4)$$

$$3x = 2x + 8$$

$$3x - 2x = 8$$

$$\mathbf{x = 8}$$

2. Plano de Resolução

Simplificaremos a razão numérica para facilitar os cálculos e utilizaremos a propriedade fundamental das proporções (produto dos meios igual ao produto dos extremos).

4. Verificação

Substituindo $x = 8$:

1º segmento: 8

2º segmento: $8 + 4 = 12$

Razão em u : $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Razão em v : $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

As razões são idênticas, validando o resultado.

4.2 Semelhança de Figuras Planas

Você já viu uma motoniveladora? Também conhecido como "patrol" é um tipo de trator usado para nivelar estradas e terrenos. Como é bem popular, é fácil encontrar uma modelo em escala, isto é, um brinquedo que é uma redução do tamanho real da máquina:

Motoniveladora



Escala 1 : 24 com 50cm de comprimento.
(Mini Mundi, 2026)

Questão Com essas informações, é possível encontrar o comprimento real da motoniveladora?



Pela definição de **Escala**, sim, é possível encontrar o comprimento real do trator:

Escala

é o quociente entre dois números reais não nulos, tomados na mesma unidade de medida, tais que:

$$E = \frac{\text{comprimento do modelo}}{\text{comprimento real}}$$

Exercício Resolvido 3) (elaborado pelo autor) O modelo de motoniveladora possui *Escala* 1 : 24 com 50cm de comprimento. Com essas informações, é possível encontrar o comprimento real da motoniveladora?

Solução: Escalas

1. Compreensão do Problema

O problema nos fornece a razão de semelhança (escala) de um modelo de motoniveladora: $k = 1 : 24$. Sabemos que o comprimento no modelo (c_m) é de 50 cm. O objetivo é determinar o comprimento real (C_r).

2. Estabelecimento de um Plano

A escala é a razão entre a medida do objeto no desenho (ou modelo) e a sua medida real:

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida no Modelo}}{\text{Medida Real}}$$

Portanto, usaremos a proporção:

$$\frac{1}{24} = \frac{50}{C_r}$$

Cont. Solução

3. Execução do Plano

Multiplicando em cruz para encontrar o valor de C_r :

$$1 \cdot C_r = 24 \cdot 50$$

$$C_r = 1200 \text{ cm}$$

Convertendo para metros (unidade mais adequada para o objeto real):

$$C_r = \frac{1200}{100} \Rightarrow C_r = 12 \text{ m}$$

4. Verificação e Retrospecto

Se o comprimento real é 12 m (1200 cm), a razão entre o modelo e o real é 50/1200. Simplificando por 50:

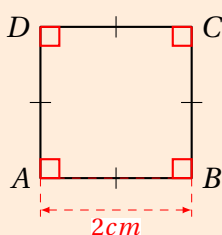
$$\frac{50 \div 50}{1200 \div 50} = \frac{1}{24}$$

O resultado é consistente com a escala 1 : 24 fornecida inicialmente.

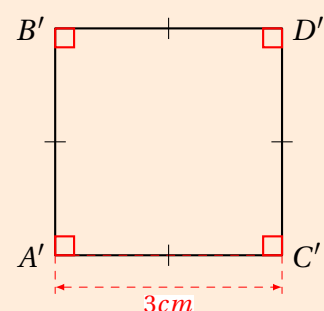
Concluimos que os comprimentos são **proporcionais**

Mas o que acontece com figuras geométricas planas? a transformação de uma figura geométrica por ampliação ou redução, conservando a forma original, produz uma figura **semelhante** a figura original.

Ampliando um Quadrado



Multiplicando os lados do quadrado por uma constante real positiva $k = 1,5$



Podemos notar que:

- Os ângulos internos foram preservados
- Os lados correspondentes agora são proporcionais

Conclusão da Ampliação

Ângulos:

$$A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C' \text{ e } D \equiv D'$$

Lados:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{AD}} = 1,5$$

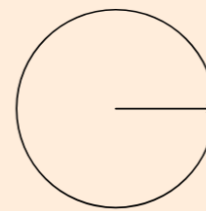
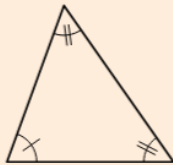
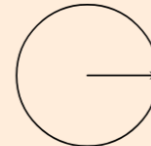
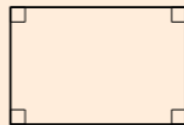
Conclusão: O quadrado $A'B'C'D'$ é uma **ampliação** do quadrado $ABCD$ e existe um valor positivo **constante** que amplia os lados (1,5)

Portanto, esses quadrados são **semelhantes**.

Semelhança de Figuras Planas

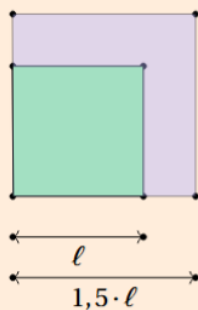
Duas figuras planas quaisquer são semelhantes se, e somente se, existem:

- uma isometria (translação, rotação ou reflexão)
- homotetia (ampliação ou redução) que transforma uma figura na outra.



Exercício Resolvido 4) (SOUZA, 2018) Um quadrado de lado 4 cm sofre uma ampliação com razão 1,5. Qual a área da nova figura?

Solução



A razão de ampliação afeta a área ao quadrado:

$$A' = (1,5)^2 \cdot A = 2,25 \cdot 16 = \boxed{36 \text{ cm}^2}$$

4.3 Semelhança de Triângulos

Definição: Semelhança de Triângulos

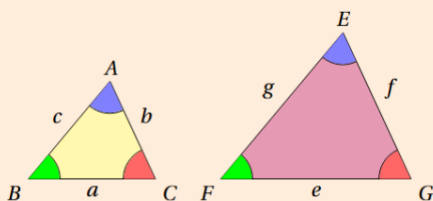
Dois triângulos são **semelhantes** quando possuem:

- seus ângulos correspondentes **congruentes** (mesma medida)
- comprimentos de seus lados correspondentes são **proporcionais**, ou seja, existe uma constante $k > 0$ tal que:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{EG} = k$$

Figura da Definição (Semelhança de Triângulos)

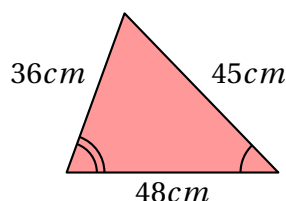
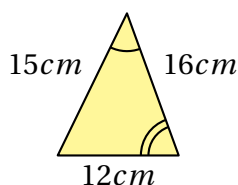
Nas figuras ao abaixo, os triângulos ABC e EFG são semelhantes porque:



$$\bullet \hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{G}$$

$$\bullet \frac{c}{g} = \frac{a}{e} = \frac{b}{f}$$

Exercício Resolvido 5) (IEZZI et al., 2016) Qual a razão de semelhança entre as medidas dos lados dos triângulos abaixo?



Solução

1. Compreensão: Dois triângulos semelhantes (Caso AA). Dados os lados correspondentes, o objetivo é calcular a razão de semelhança (k).

2. Plano: A razão k é a divisão entre medidas de lados homólogos (correspondentes): $k = \text{Lado}_{\text{maior}} / \text{Lado}_{\text{menor}}$.

3. Execução: Comparando os pares de lados:

- $48/16 = 3$
- $45/15 = 3$
- $36/12 = 3$

Portanto, a razão de semelhança é $k = 3$.

4. Verificação: A constância do resultado (3) em todos os pares confirma a proporcionalidade dos triângulos. A razão de ampliação é 3 e a de redução é $1/3$.

Exercício Resolvido 6) (IEZZI, 2022 – adaptado) um triângulo com lados 28 cm , 35 cm e 42 cm teve seu tamanho reduzido em 7 vezes. Quais as novas medidas dos lados semelhantes?

Solução

1. Compreensão: Triângulo original (lados $28, 35, 42 \text{ cm}$) sofre redução por fator 7. Objetivo: Medidas do novo triângulo semelhante.

2. Plano: Na semelhança, a razão entre lados homólogos é constante. Cada lado original (l) deve ser dividido pelo fator de redução ($k = 7$): $l' = l/7$.

3. Execução:

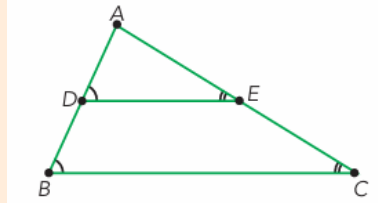
- $28 \div 7 = 4 \text{ cm}$
- $35 \div 7 = 5 \text{ cm}$
- $42 \div 7 = 6 \text{ cm}$

Novas medidas: $4, 5$ e 6 cm .

4. Verificação: A razão de semelhança é mantida em todos os pares correspondentes: $28/4 = 35/5 = 42/6 = 7$. A redução é proporcional.

Paralela no triângulo

Toda paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.



4.4 Teorema de Pitágoras e Aplicações

Teorema de Pitágoras

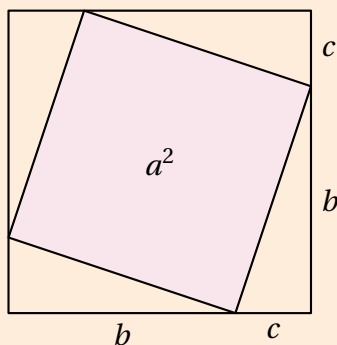
Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração:

Seja um quadrado externo de lado $(b + c)$.

Área Total: $A_T = (b + c)^2$.

Composição: 4 triângulos retângulos e 1 quadrado interno de lado a .

**Construção e Áreas:**

Igualdade das áreas:

$$(b + c)^2 = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{b \cdot c}{2}\right)$$

Expansão algébrica:

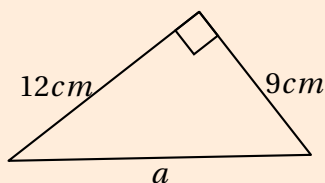
$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

Simplificação final:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Exercício Resolvido 7) (elaborado pelo autor) Calcule a medida da hipotenusa no triângulo a seguir:

Solução



Plano: $a^2 = b^2 + c^2$.

Execução: $a^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 81$
 $\Rightarrow a^2 = 225$

$a = \sqrt{225} \Rightarrow a = 15 \text{ cm}$

Compreensão: O triângulo é retângulo com catetos $b = 12 \text{ cm}$ e $c = 9 \text{ cm}$.

Verificação: A hipotenusa mede 15 cm.

Exercício Resolvido 8) (IEZZI et al., 2016) A diagonal de um retângulo mede 13 cm. Sabendo que os lados medem x cm e $x + 7$ cm, calcule o valor da soma das medidas dos lados desse retângulo.

solução

1. Dados:

- Lados: x e $x + 7$
- Diagonal: 13

2. Aplicando Pitágoras:

$$13^2 = x^2 + (x+7)^2 \Rightarrow 169 = x^2 + x^2 + 14x + 49$$

$$\Rightarrow 169 = 2x^2 + 14x + 49$$

3. Organizando:

$$2x^2 + 14x + 49 = 169 \Rightarrow 2x^2 + 14x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$$

4. Raízes da Equação:

$$\Delta = 49 + 240 = 289 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm 17}{2}$$

$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -12 \text{ (descarta)}$$

5. Soma dos lados (Perímetro):

Lados:

$$x = 5, \quad x + 7 = 12 \Rightarrow P = 2(5 + 12) = 2 \cdot 17 = \boxed{34}$$

Exercício Resolvido 9) (DANTE, 2018 – adaptado) Um triângulo retângulo tem hipotenusa igual a $2a$ e catetos medindo $a\sqrt{3}$ e 7cm. Calcule o comprimento da hipotenusa.

Solução

1. Dados do triângulo:

- Catetos: $a\sqrt{3}$ e 7
- Hipotenusa: $2a$

2. Teorema de Pitágoras:

$$(2a)^2 = (a\sqrt{3})^2 + 7^2 \Rightarrow 4a^2 = 3a^2 + 49$$

$$4a^2 - 3a^2 = 49 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$

3. Hipotenusa:

$$2a = 2 \cdot 7 = \boxed{14 \text{ cm}}$$

Exercício Resolvido 10) (IEZZI, 2022 – adaptado) Determine a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos 9 cm e 12 cm.

Solução

A hipotenusa é:

$$a = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$

Área é metade do produto da base pela altura:

$$A = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54 \Rightarrow 54 = \frac{15 \cdot h_a}{2} \Rightarrow h_a = \frac{108}{15} = \boxed{7,2 \text{ cm}}$$

Ternas Pitagóricas

Ternas pitagóricas são conjuntos de três números inteiros positivos que satisfazem o Teorema de Pitágoras:

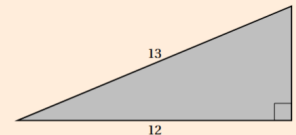
$$a^2 = b^2 + c^2$$

onde b e c são os catetos e a a hipotenusa.

Exemplos clássicos:

- $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + 16 = 25$
- $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow 25 + 144 = 169$
- $7^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow 49 + 576 = 625$
- $8^2 + 15^2 = 17^2 \Rightarrow 64 + 225 = 289$
- $12^2 + 35^2 = 37^2 \Rightarrow 144 + 1225 = 1369$

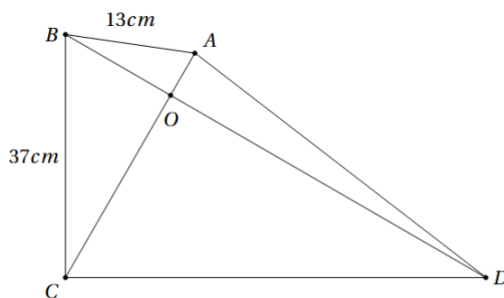
Esses triângulos são úteis na resolução de problemas geométricos e aparecem com frequência em questões envolvendo figuras com ângulos retos.



Triângulo pitagórico com lados 5, 12 e 13.

Vamos aplicar isso no próximo exemplo.

Exercício Resolvido 11) (IDECAN, 2025) A figura abaixo representa um quadrilátero com diagonais perpendiculares que se encontram no ponto O . A diagonal AC mede 40 cm, AB mede 13 cm e BC mede 37 cm.



A distância do ponto B ao O , em centímetros, é igual a:

- a) 10 b) 5 c) 8 d) 9 e) 2

Solução

Como As diagonais AC e BD são perpendiculares, então:

$$5^2 + \boxed{12}^2 = 13^2 \text{ e } \boxed{12}^2 + 35^2 = 37^2$$

$\triangle AOB$ e $\triangle BOC$ são triângulos Retângulos

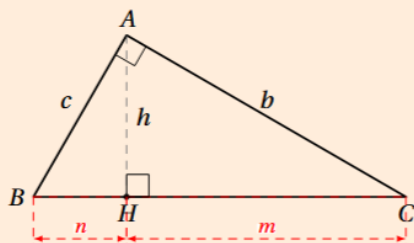
Mas para que seja $AC=40\text{cm}$, os catetos devem ser $OC=35\text{cm}$ e $OA=5\text{cm}$.

Logo, $AB=13\text{cm}$ e $BC=37\text{cm}$ são suas respectivas hipotenusas. E como vimos:

Assim concluímos que $\boxed{OB = 12\text{cm}}$
Sem a necessidade de fazer tantos cálculos.

4.5 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Projeções



b e c são catetos
 a é hipotenusa;
 h é altura relativa a a ;
 m é projeção de b ;
 n é projeção de c ;
 $a = m + n$ soma das projeções;

Seja a a hipotenusa e b, c os catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Altura relativa à hipotenusa

Se h é a altura relativa à hipotenusa a , e m, n as projeções dos catetos:

$$h^2 = m \cdot n$$

Cateto e projeção

Se b e c são os catetos, com projeções m e n sobre a hipotenusa:

$$b^2 = a \cdot m \quad \text{e} \quad c^2 = a \cdot n$$

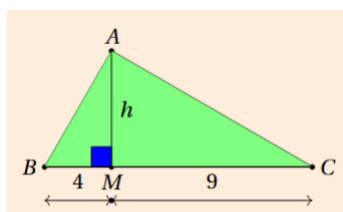
Catetos, Hipotenusa e Altura

O produto dos catetos é igual a altura pela hipotenusa:

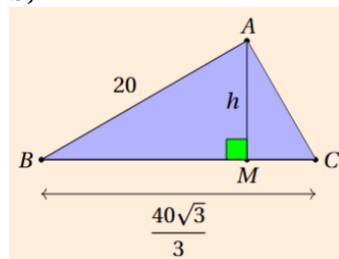
$$bc = ha$$

Exercício Resolvido 12) (DANTE, 2018 – adaptado) Determine a altura relativa a hipotenusa dos triângulos retângulos:

a)



b)



Solução a

A altura relativa à hipotenusa em um triângulo retângulo pode ser calculada por:

$$h^2 = m \cdot n$$

Onde $m = 4$ e $n = 9$:

$$h^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow h^2 = 36$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{36} = \boxed{6}$$

Solução b

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left(\frac{40\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 20^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{1600 \cdot 3}{9} = 400 + c^2 \Rightarrow \frac{1600}{3} - 400 = c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{1600 - 1200}{3} = \frac{400}{3} \Rightarrow c = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Agora usamos $bc = ah$:

$$20 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} = h \cdot \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

Cortando os denominadores e $\sqrt{3}$:

$$20 \cdot 20 = h \cdot 40 \Rightarrow h = \boxed{10}$$

Exercício Resolvido 13) (SOUZA, 2018 – adaptado) Calcule a altura de um triângulo equilátero de lado 10 cm.

Solução

A altura divide o triângulo em dois triângulos retângulos:

$$h^2 + 5^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 = 100 - 25 = 75 \Rightarrow h = \sqrt{75} = \boxed{5\sqrt{3} \text{ cm}}$$

Exercício Resolvido 14) (FGV, 2013) Um triângulo tem lados cujas medidas em centímetros são números inteiros. Um dos lados mede 12 cm e, dos outros dois, um deles mede o dobro do outro. O menor perímetro possível para esse triângulo é
(A) 21 cm. (B) 24 cm. (C) 27 cm. (D) 30 cm. (E) 33 cm.

Solução

Seja x o menor dos lados desconhecidos. Então, o outro lado é $2x$. Sabemos que o terceiro lado mede 12 cm.

Para formar um triângulo, a soma de dois lados deve ser maior que o terceiro:

$$x + 2x > 12 \Rightarrow 3x > 12 \Rightarrow x > 4$$

Também:

$$x + 12 > 2x \Rightarrow 12 > x \Rightarrow x < 12$$

$$2x + 12 > x \Rightarrow 12 > -x \quad (\text{sempre verdadeira})$$

Como x é inteiro, os possíveis valores de x são: $x = 5, 6, \dots, 11$. Queremos o **menor perímetro**: $x + 2x + 12 = 3x + 12$. O menor valor ocorre com $x = 5$:

$$\text{Perímetro} = 3 \cdot 5 + 12 = \boxed{27}$$

Exercício Resolvido 15) (elaborado pelo autor) Em um triângulo retângulo, a altura divide à hipotenusa dois segmentos de medidas 4 cm e 9 cm. Determine a medida da altura.

Solução

1. Compreensão

Determinar a altura relativa à hipotenusa. As projetados medem 4 cm e 9 cm.

2. Plano

Relação métrica da altura: $h^2 = mn$.

Cont. Solução

3. Execução

Substituindo os valores:

$$h^2 = 4 \cdot 9$$

$$h^2 = 36$$

$$h = 6 \text{ cm.}$$

4. VerificaçãoComo $6^2 = 36$ e $4 \cdot 9 = 36$, a relação métrica foi satisfeita.

$$h = 6 \text{ cm}$$

4.6 Congruência de Triângulos

Caso de Congruência: LAL

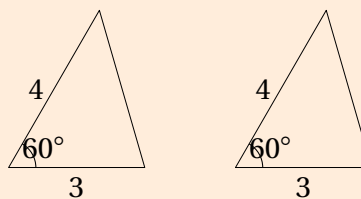
Definição:

Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por eles forem congruentes aos elementos correspondentes de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Exemplo Prático:

Verifique se os triângulos abaixo são congruentes sabendo que

$$AB = DE = 3, AC = DF = 4 \text{ e } \hat{A} = \hat{D} = 60^\circ.$$



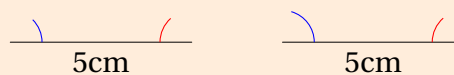
Caso de Congruência: ALA

Definição:

Se dois ângulos e o lado entre eles em um triângulo forem congruentes aos de outro, a congruência está garantida.

Aplicação:

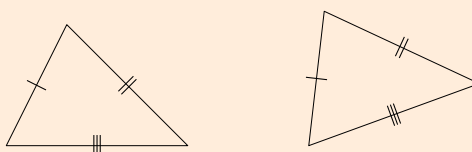
Útil para medir distâncias inacessíveis, como a largura de um rio, com um triângulo semelhante em terra firme.



Caso de Congruência: LLL

Propriedade de Rigidez:

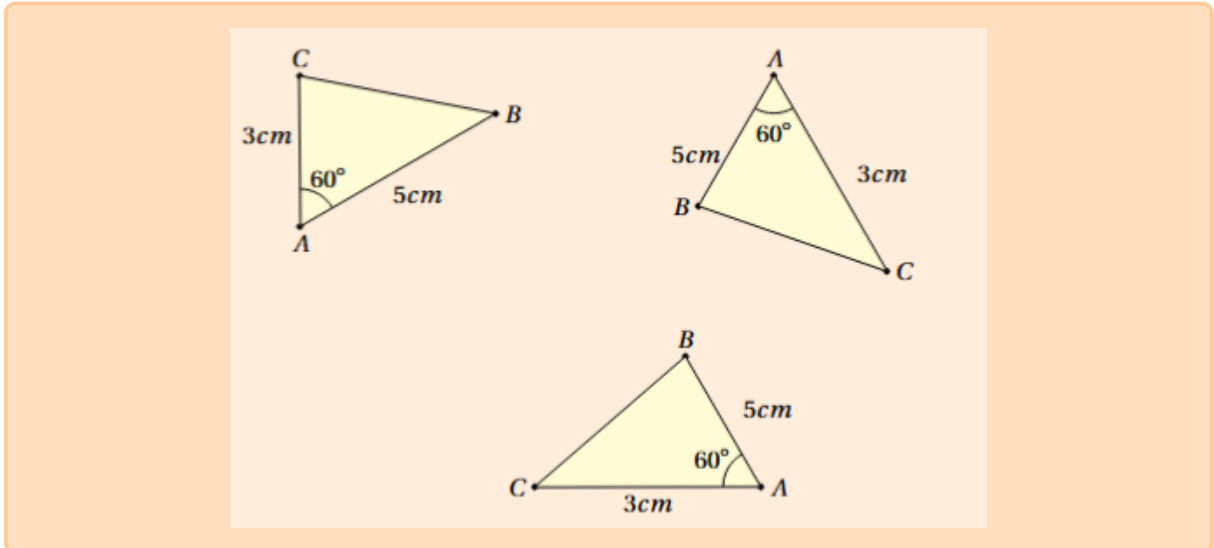
O caso LLL explica por que o triângulo é a única figura poligonal rígida. Se as medidas dos lados estão fixas, a forma (e os ângulos) não pode ser alterada.



1. CASO: Você e seus colegas de classe estão convidados a construir um triângulo do qual são conhecidos somente:

dois lados e o ângulo que esses lados formam.

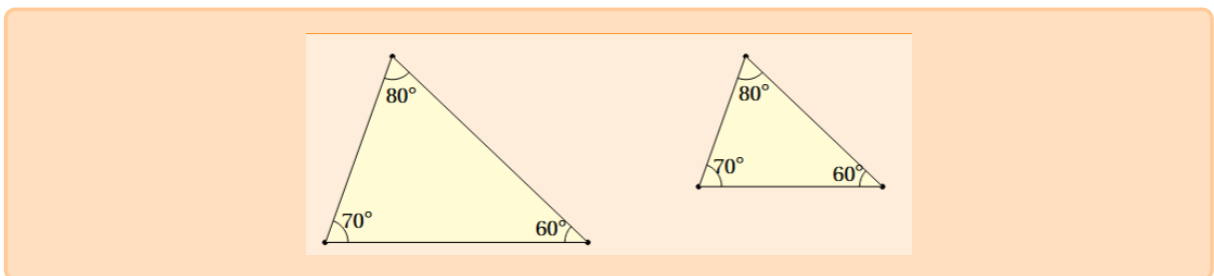
Será que o triângulo que você construiu é congruente aos triângulos abaixo, construídos pelos seus colegas de classe?



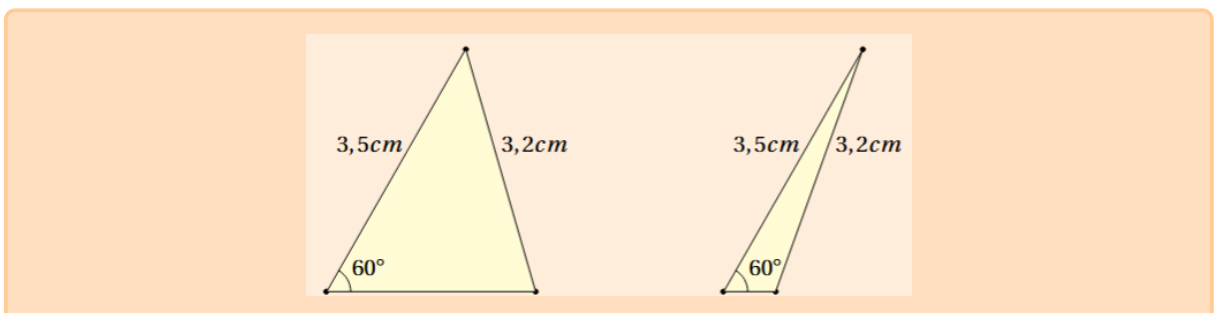
Triângulos construídos com dois lados medindo 3 cm e 5 cm e ângulo de 60° .

ATENÇÃO: Muito cuidado na "exploração" da CONGRUÊNCIA de dois triângulos, pois não basta três elementos quaisquer, tomados como correspondentes, serem congruentes. É necessário levar em conta a posição desses elementos, e que um deles, pelo menos, seja lado.

Por exemplo, não existe o caso A.A.A., pois você pode ter dois triângulos com os três ângulos respectivamente congruentes e que não sejam congruentes:



Também não existe o caso A.L.L. (ou L.L.A.), pois, apesar de possuírem os elementos correspondentes, congruentes nessa ordem, dois triângulos podem não ser congruentes, como os seguintes:



onde o ângulo congruente (60°) não é o formado pelos lados congruentes.

"Explore", por intermédio de exemplos, que também não existe o caso A.A.L. (ou L.A.A.).

4.7 Exercícios Exploratórios

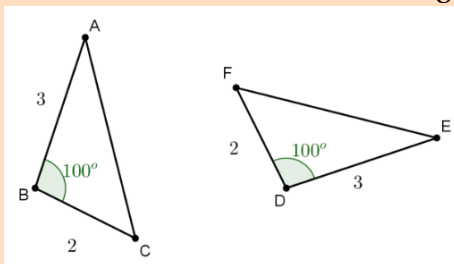
1) (SOUZA, 2018 – adaptado) Construa dois triângulos conhecendo dois lados e o ângulo compreendido entre eles. Compare as figuras obtidas e verifique se são congruentes.

2) (elaborado pelo autor) Construa dois retângulos semelhantes com a razão entre lados constante igual a 1,4

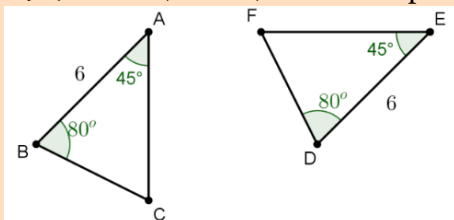
3) (elaborado pelo autor) Construa 3 coleções de triângulos semelhantes:

- a) Isóceles
- b) Equiláteros
- c) Retângulos

4) (PASSOS; SILVA, 2013 – adaptado) Os triângulos abaixo são congruentes pelo caso LAL. Determine os lados homólogos e os vértices correspondentes desta congruência.



5) (PASSOS; SILVA, 2013 – adaptado) Os triângulos ABC e DEF são congruentes?

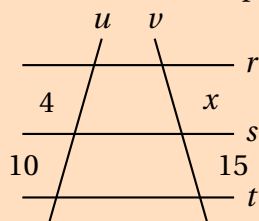


6) (HENRIQUE, 2019) **GeoGebra** Construa um quadrado ABCD e faça uma investigação sobre a razão entre os lados, os perímetros e as áreas, quando ampliamos ou reduzimos a figura.

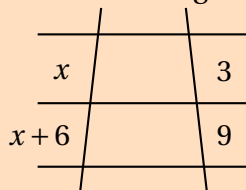
4.8 Exercícios Propostos

1) (IEZZI, 2022) No feixe de retas paralelas a, b, c interceptadas pelas transversais r e s , os segmentos determinados em r medem 9 e 12. Determine a medida x no segmento correspondente em s , sabendo que o outro segmento em s mede 16.

2) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que as retas r, s e t são paralelas.

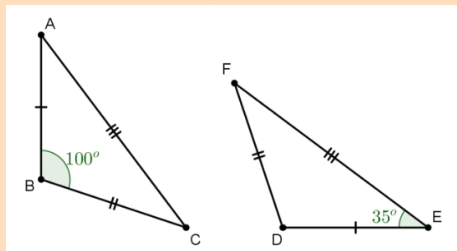


3) (IEZZI, 2022) Aplicando o Teorema de Tales no feixe de paralelas abaixo, encontre o valor da incógnita x .

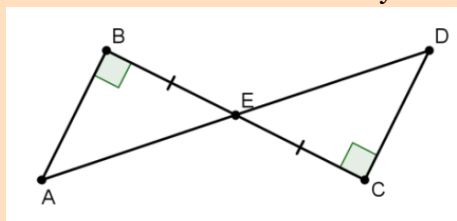


4) (SOUZA, 2018) Em um feixe de retas paralelas, as transversais u e v determinam segmentos tais que a razão entre os dois primeiros é $\frac{2}{5}$. Se na transversal v os segmentos correspondentes medem $x + 2$ e 20, determine o valor de x realizando a simplificação necessária.

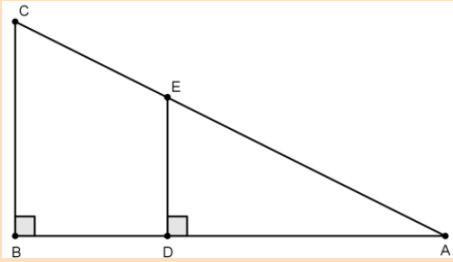
5) (IEZZI et al., 2016) Calcule os ângulos internos dos triângulos congruentes abaixo.



6) (IEZZI et al., 2016) Na figura, temos $AB = 30$, $DE = 50$, $AE = 3x - 1$ e $CD = 2y + 8$. Determine os valores de x e y .



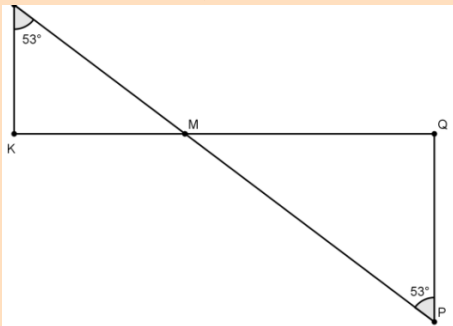
7) (IEZZI et al., 2016) Observe a figura abaixo e responda:



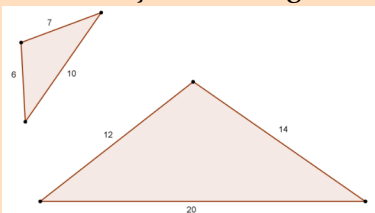
- a) Os triângulos ABC e ADE são semelhantes?
- b) Caso sejam semelhantes, quais são os lados homólogos?

8) (IEZZI et al., 2016) Dois triângulos semelhantes possuem lados correspondentes medindo x e $2x + 4$. Se a razão de semelhança é 3, determine o valor de x .

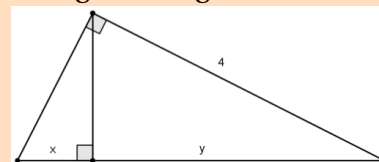
9) (IEZZI et al., 2016) Determine se os triângulos KLM e MPQ são semelhantes.



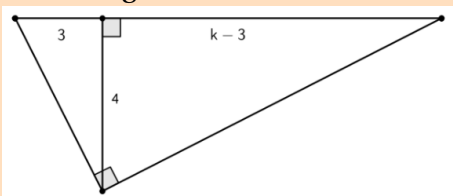
10) (IEZZI et al., 2016) Qual a razão de semelhança dos triângulos abaixo?



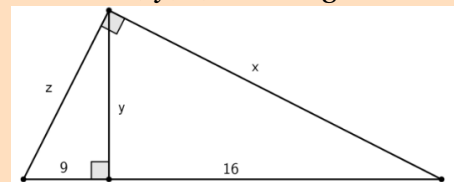
11) (IEZZI et al., 2016) Determine x e y no triângulo da figura abaixo, sendo $x + y = 5$.



12) (IEZZI et al., 2016) Determine o valor de k na figura abaixo.



13) (IEZZI et al., 2016) Determine os valores de x , y , z , no triângulo abaixo.



14) (MALANGA, 2017 – adaptado) A cópia de um quadro foi impressa, ficando com dimensões de 18 cm por 32 cm, 80% menores do que as do tamanho real. Quais as dimensões reais desse quadro?

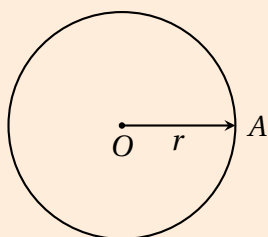
5 Circunferência e Círculo

5.1 Elementos Básicos

Círculo

Um **círculo** de centro O e raio r é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano cuja distância até O é menor ou igual a r .

Diferente da *circunferência* (que é apenas a "borda" ou o conjunto de pontos à distância exata r), o círculo compreende também a região interna.



Raio: $\overline{OA} = r$

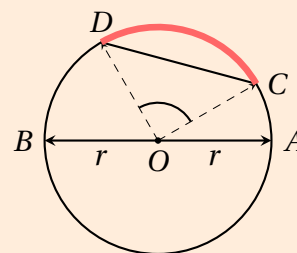
Diâmetro: $\overline{AB} = 2r$

Corda: \overline{CD}

Ângulo Central: $\angle COD$

Arco: \widehat{CD}

PERÍMETRO

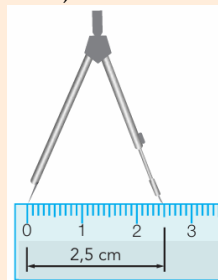


$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Exercício Resolvido 1) (BRAGA, 1997 – adaptado) Construir um círculo de raio igual a 2,5 cm, usando compasso e régua.

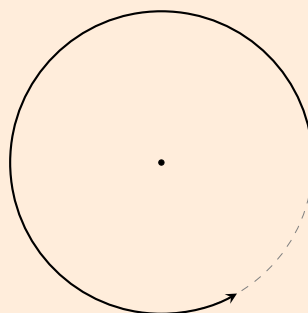
solução

1. **Definir o raio** usando a régua rente as pontas do compasso, faça uma abertura de 2,5cm.



2. **Posição** posicione a ponta seca onde você pretende colocar o centro do círculo no papel:

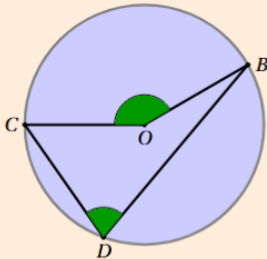
3. **Execução** faça o movimento de forma leve, inclinando o compasso na direção do movimento.



5.2 Ângulo Inscrito

Teorema do Ângulo Inscrito

Dizemos que um **ângulo é inscrito em uma circunferência** quando:



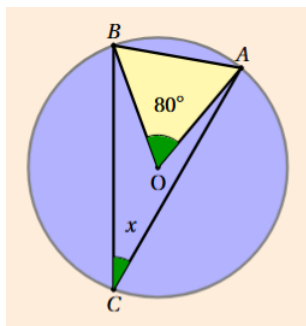
$$\widehat{BOC} = 2\widehat{BDC}$$

- seu **vértice pertence à circunferência**; e
- seus **lados contêm cordas** da circunferência.

Na figura, o ângulo \widehat{BDC} é um ângulo inscrito, pois:

- o ponto D , vértice do ângulo, pertence à circunferência;
- os lados \overline{DB} e \overline{DC} são cordas.

Exercício Resolvido 2) (IEZZI, 2022 – adaptado) Determine a medida do ângulo inscrito que sustenta um arco de 80° num círculo.



Solução

Um ângulo inscrito é metade do arco que o sustenta:

$$\alpha = \frac{80^\circ}{2} = \boxed{40^\circ}$$

Exercício Resolvido 3) (IEZZI, 2022 – adaptado) Em uma circunferência de centro O , um ângulo inscrito \widehat{APB} cuja medida do ângulo central correspondente é 80° . Determine a medida do ângulo \widehat{APB} .

solução

1. Compreensão ângulo central ($\widehat{AOB} = 80^\circ$).

2. Plano Pelo Teorema do Ângulo Inscrito:
 $\alpha = \frac{\theta}{2}$.

3. Execução do Plano Sabendo que $\theta = 80^\circ$, aplicamos a fórmula:

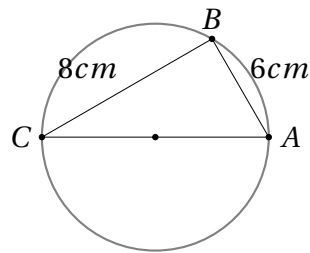
$$\text{med}(\angle APB) = \frac{80^\circ}{2}$$

$$\text{med}(\angle APB) = 40^\circ$$

4. Verificação 40° é exatamente a metade de 80° .

Exercício Resolvido 4) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Determine a medida do raio de uma circunferência na qual está inscrito um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 8

cm.



Solução

1. Compreensão: Triângulo retângulo inscrito em circunferência. Propriedade: a hipotenusa (a) é o diâmetro ($2R$). Dados: $b = 6$, $c = 8$.

2. Plano: 1º) Aplicar Pitágoras para achar a ; 2º) Calcular $R = a/2$.

3. Execução:

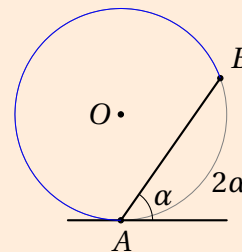
$$a^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow a = 10 \text{ cm}$$

$$R = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

4. Verificação: O triângulo (6, 8, 10) é semelhante ao terço pitagórico (3, 4, 5). O raio sendo metade da hipotenusa (10/2) valida a solução.

Ângulo de Segmento

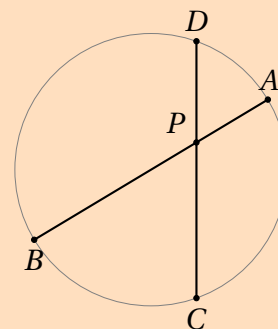
A medida de um ângulo de segmento é sempre igual à metade da medida do arco correspondente à sua corda.



5.3 Potência de Ponto

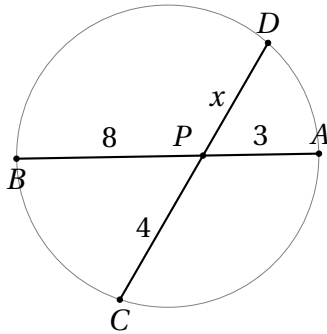
Quando duas cordas se cruzam, o produto das medidas dos segmentos de uma corda é igual ao produto das medidas dos segmentos da outra corda

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$



Exercício Resolvido 5) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Duas cordas \overline{AB} e \overline{CD} de uma circunferência interceptam-se em um ponto interno P . Sabendo que os segmentos determinados

na corda \overline{AB} medem $\overline{PA} = 3$ cm e $\overline{PB} = 8$ cm, e que na corda \overline{CD} um dos segmentos mede $\overline{PC} = 4$ cm, determine a medida do segmento \overline{PD} .



Solução

1. Compreensão: Relação métrica entre cordas concorrentes (Potência de Ponto).

Dados: $\overline{PA} = 3$, $\overline{PB} = 8$, $\overline{PC} = 4$. Objetivo: $\overline{PD} = x$.

2. Plano: Aplicar o Teorema das Cordas: o produto dos segmentos de uma corda é igual ao da outra ($\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$).

3. Execução:

$$3 \cdot 8 = 4 \cdot x$$

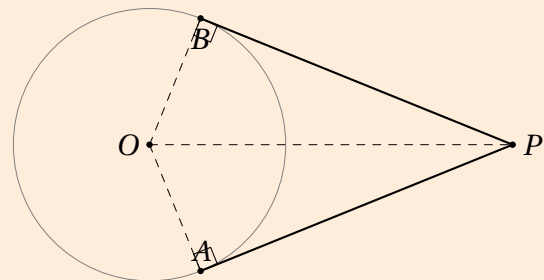
$$24 = 4x \Rightarrow x = \frac{24}{4}$$

$$x = 6 \text{ cm}$$

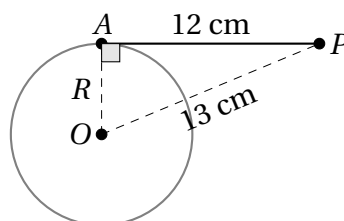
4. Verificação: A potência do ponto P é constante (24). Como $3 \times 8 = 24$ e $4 \times 6 = 24$, os produtos são idênticos e a relação de proporcionalidade é mantida.

Segmentos Tangentes

Os segmentos tangentes a uma circunferência partindo de um mesmo ponto externo são congruentes ($\overline{PA} = \overline{PB}$).



Exercício Resolvido 6) (elaborado pelo autor) De um ponto P externo a uma circunferência de centro O , traça-se um segmento tangente PA de medida 12 cm. Sabendo que a distância do ponto P ao centro O é de 13 cm, determine a medida do raio (R) dessa circunferência.



Solução

1. Compreensão: Reta tangente à circunferência. Dados: Segmento tangente $\overline{PA} = 12$, distância ao centro $\overline{PO} = 13$. Objetivo: Raio R .

3. Execução:

$$R^2 + 12^2 = 13^2$$

$$R^2 = 169 - 144 = 25$$

$$R = 5 \text{ cm}$$

2. Plano: Propriedade: O raio é perpendicular à tangente no ponto de contato ($\overline{OA} \perp \overline{PA}$). Aplicar Pitágoras no $\triangle OAP$: $R^2 + \overline{PA}^2 = \overline{PO}^2$.

4. Verificação: Os valores (5, 12, 13) formam um terno pitagórico primitivo. A relação $25 + 144 = 169$ valida o triângulo retângulo e o valor do raio.

5.4 Exercícios Exploratórios

1) (elaborado pelo autor) Construa uma circunferência de raio 4 cm e marque três pontos distintos sobre ela. Ligue-os formando triângulos e observe as posições relativas ao centro.

2) (BRAGA, 1997 – adaptado) Construir um círculo de raio igual a 3 cm, usando compasso e régua.

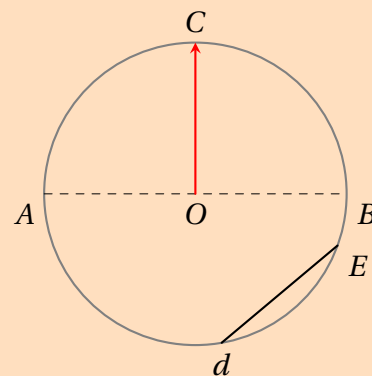
3) (elaborado pelo autor) Com o auxílio de objetos redondos (copos, vasilhas, latas, até sólidos confeccionados) medir a circunferência e o diâmetro e calcular as respectivas razões, tabulando os resultados.

4) (MALANGA, 2017 – adaptado) (V ou F) Analise as afirmações abaixo sobre os elementos de uma circunferência e de um círculo, assinalando V para verdadeiro e F para falso:

- a) () O diâmetro é a maior corda de uma circunferência e passa pelo seu centro.
- b) () O raio de uma circunferência é o dobro da medida do seu diâmetro.
- c) () Uma corda é qualquer segmento de reta que une dois pontos da circunferência.
- d) () Todo diâmetro é uma corda, mas nem toda corda é um diâmetro.

5) (elaborado pelo autor) Determine a medida do diâmetro de uma circunferência sabendo que o seu raio mede 12,5 cm.

6) (MALANGA, 2017 – adaptado) Observe a figura abaixo e identifique os elementos indicados pelos segmentos AB , OC e DE , sabendo que O é o centro da circunferência.



7) (elaborado pelo autor) Se uma corda AB de uma circunferência não passa pelo centro O e mede 8 cm, e o diâmetro dessa mesma circunferência mede 10 cm, qual é a maior medida possível para uma corda que pode ser desenhada nesta circunferência? Justifique sua resposta.

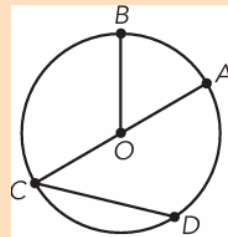
8) (HENRIQUE, 2019 – adaptado) No **GeoGebra**, construa um círculo definindo seu centro e raio=3 unidades.

- adicione 3 pontos A , B e C vinculados a circunferência, de modo que dois deles (A e B) formem um arco menor \widehat{AB}
- construa os segmentos \overline{AC} , \overline{BC} , \overline{OA} e \overline{OB}
- meça os Ângulos \widehat{ACB} e \widehat{AOB} com o comando para medir ângulos.
- insira a razão entre as medidas dos ângulos $\widehat{AOB}/\widehat{ACB}$ na janela de álgebra.
- desloque o ponto C sobre a circunferência e observe o que ocorre com a razão entre as medidas dos ângulos.

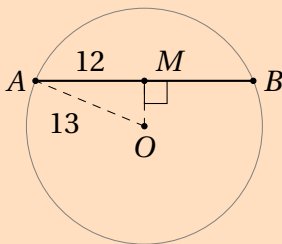
5.5 Exercícios Propostos

1) (IEZZI, 2022) Dos segmentos de retas no círculo, indique quais são:

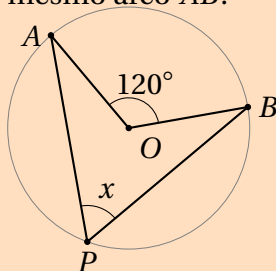
- Cordas
- Raios
- Diâmetro



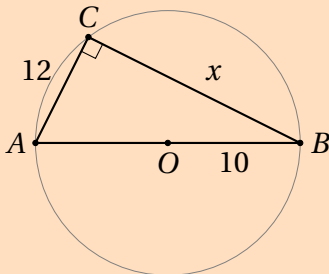
2) (IEZZI, 2022) Em uma circunferência de centro O e raio 13 cm, uma corda AB mede 24 cm, com ponto médio em M . Determine a distância do centro O até a corda AB .



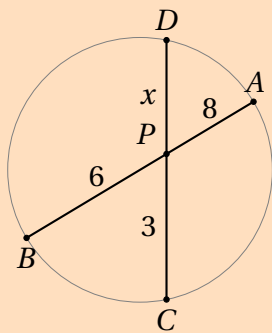
3) (IEZZI, 2022 – adaptado) Na circunferência de centro O abaixo, o ângulo central $\angle AOB$ mede 120° . Determine o valor do ângulo inscrito $\angle APB$ que subtende o mesmo arco AB .



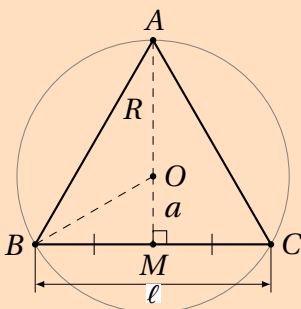
4) (IEZZI, 2022 – adaptado) Um triângulo ABC está inscrito em uma circunferência de tal forma que o lado AB coincide com o diâmetro. Sabendo que o raio da circunferência mede 10 cm e o lado AC mede 12 cm, determine a medida do lado BC .



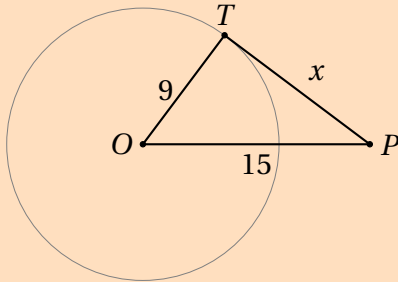
5) (IEZZI, 2022 – adaptado) Duas cordas AB e CD interceptam-se em um ponto P no interior de uma circunferência. Sabendo que os segmentos da corda AB medem $AP = 8$ cm e $PB = 6$ cm, e que um dos segmentos da corda CD mede $CP = 3$ cm, determine a medida do segmento PD .



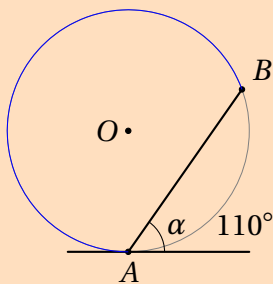
6) (IEZZI, 2022 – adaptado) Um triângulo equilátero está inscrito em uma circunferência de raio $R = 10\sqrt{3}$ cm. Determine a medida do lado l desse triângulo e a medida do seu apótema (distância do centro ao lado).



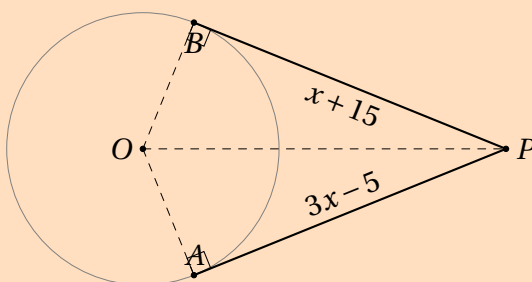
7) (IEZZI, 2022 – adaptado) De um ponto P externo a uma circunferência de centro O e raio $r = 9$ cm, traça-se uma reta tangente que toca a circunferência no ponto T . Sabendo que a distância do ponto P ao centro O é de 15 cm, determine o comprimento do segmento tangente PT .



8) (IEZZI, 2022 – adaptado) Na figura abaixo, a reta t é tangente à circunferência no ponto A . Sabendo que o arco menor AB mede 110° , determine a medida do ângulo de segmento α formado pela corda AB e a tangente t .



9) (IEZZI, 2022 – adaptado) De um ponto P externo a uma circunferência, traçam-se dois segmentos tangentes PA e PB , onde A e B são os pontos de tangência. Sabendo que $PA = 3x - 5$ e $PB = x + 15$, determine o valor de x e o comprimento dos segmentos tangentes.



6 Perímetro e Área

Neste capítulo faremos uma abordagem dos conceitos para cálculo de Perímetros e Áreas de figuras planas

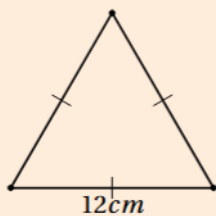
6.1 Perímetro de uma figura plana

PROPRIEDADE: PERÍMETRO DE POLÍGONOS REGULARES O perímetro (P) de um polígono regular de n lados, cada um medindo ℓ , é dado pelo produto do número de lados pela medida do lado.

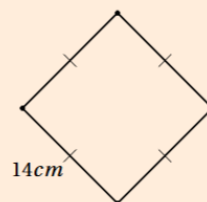
Fórmula:

$$P = n \times \ell$$

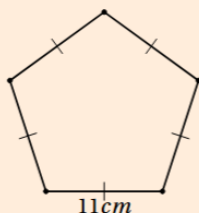
Perímetro



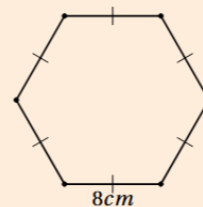
$$P = 3 \cdot 12 \Rightarrow P = 36cm$$



$$P = 4 \cdot 14 \Rightarrow P = 56cm$$



$$P = 5 \cdot 11 \Rightarrow P = 55cm$$



$$P = 6 \cdot 8 \Rightarrow P = 48cm$$

Exercício Resolvido 7) (DANTE, 2018 – adaptado) Qual o perímetro de um quadrado cuja diagonal mede 18cm?

solução

- 1. Compreensão** Dado: $d = 18$ cm. Objetivo: Perímetro ($P = 4l$).
2. Estratégia Usar $d = l\sqrt{2}$ para achar o lado e depois multiplicar por 4.
3. Execução $18 = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{18}{\sqrt{2}}$
- Racionalizando: $l = 9\sqrt{2}$ cm. $P = 4 \cdot (9\sqrt{2}) = 36\sqrt{2}$ cm.
4. Verificação Se $l = 9\sqrt{2}$, então $d = (9\sqrt{2})\sqrt{2} = 18$. Correto.

Exercício Resolvido 8) Um terreno retangular têm dimensões x e $2x + 1$ (em metros). Sabendo que seu perímetro é $74m$, qual é o valor da razão entre a largura e o comprimento?

solução

- 1. Compreensão** Dados: Lados x e $2x + 1$. Perímetro: $P = 74$ m.
 Objetivo: Razão = $\frac{\text{largura}}{\text{comprimento}}$.
- 2. Estratégia** Montar a equação do perímetro: $2(\text{base} + \text{altura}) = 74$. Resolver para x e calcular a razão.
- 3. Execução** $2(x + 2x + 1) = 74 \Rightarrow 3x + 1 = 37 \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12$ m. Lados: 12 e $2(12) + 1 = 25$. Razão: $\frac{12}{25} = 0,48$.
- 4. Verificação** Lados 12 e 25 : $2(12 + 25) = 2(37) = 74$. O perímetro confere com o enunciado.

Exercício Resolvido 9) (elaborado pelo autor) Uma praça semicircular, possui uma calçada interna no formato de um triângulo isósceles cuja base corresponde ao diâmetro da praça e seus vértices estão sobre a "borda" da praça. Se os lados desse triângulo medem $16\sqrt{2} m$ qual o perímetro da praça?

Solução

1. Compreensão:
 Praça semicircular; triângulo isósceles inscrito com base no diâmetro.
 Lados iguais: $16\sqrt{2}$.

2. Plano:
 Perceber que o triângulo é retângulo (Teorema de Tales).
 Aplicar Pitágoras para achar o diâmetro.

3. Execução:

$$(16\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2$$

$$512 = 2x^2$$

$$x^2 = 256$$

$$x = 16$$

Logo, o diâmetro vale:

$$d = 16 + 16 = 32$$

Raio:

$$r = 16$$

Perímetro da praça (semicírculo + diâmetro):

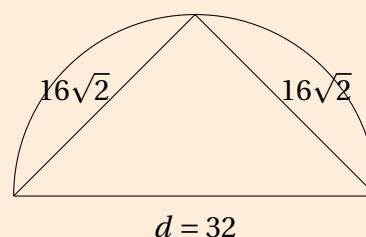
$$P = \pi r + 2r$$

$$P = 16\pi + 32$$

4. Verificação:

Triângulo retângulo com catetos iguais \Rightarrow coerente.

Perímetro combina arco + base.



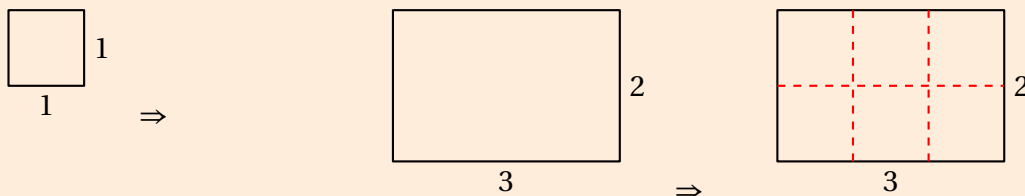
6.2 Área de uma figura plana

ÁREA DE UMA FIGURA PLANA

A área de uma superfície plana é a medida da sua extensão. Para medir essa extensão, comparamos a figura com uma unidade de medida padrão (geralmente um quadrado de lado 1).

Dizer que a área de um retângulo é 6 cm^2 significa que dentro dele cabem exatamente 6 quadrados de 1 cm de lado.

Ideia de Área em um Retângulo



Área do Retângulo

A área de um retângulo de base b e altura h é o produto dessas medidas:

$$A = b \times h$$

Exercício Resolvido 10) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Um pátio retangular possui comprimento igual a 30 m e largura igual a 20 m. Determine a área desse pátio.

Solução

1. Compreensão:

Retângulo com base 30 e altura 20.

2. Plano:

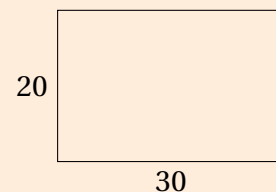
Usar a fórmula da área do retângulo.

3. Execução:

$$A = b \cdot h$$

$$A = 30 \cdot 20$$

$$A = 600$$



4. Verificação:

Unidade em m^2 e valor coerente.

Área do Quadrado

Como o quadrado é um retângulo de lados iguais (ℓ), sua área é o quadrado da medida de seu lado:

$$A = \ell^2$$

Exercício Resolvido 11) (elaborado pelo autor) Uma praça quadrada possui lado medindo 12 m. Determine a área dessa praça.

Solução

1. Compreensão:

Quadrado de lado 12.

2. Plano:

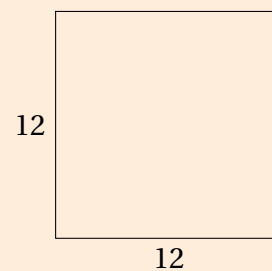
Aplicar a fórmula da área do quadrado.

3. Execução:

$$A = l^2$$

$$A = 12^2$$

$$A = 144$$



4. Verificação:

Unidade em m^2 e resultado consistente.

ÁREA DO TRIÂNGULO

A área de qualquer triângulo é igual à metade do produto da medida de sua base pela medida de sua altura relativa a essa base.

Fórmula:

$$A = \frac{(base \times altura)}{2}$$

Exercício Resolvido 12) (elaborado pelo autor) Um terreno triangular possui base medindo 10 m. Sabe-se que a altura desse triângulo forma, com a metade da base, um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 13 m. Determine a área do terreno.

Solução

1. Compreensão:

Base 10; metade 5.

Hipotenusa 13.

2. Plano:

Aplicar Pitágoras para achar a altura.

Depois usar a área do triângulo.

3. Execução:

$$13^2 = h^2 + 5^2$$

$$169 = h^2 + 25$$

$$h^2 = 144$$

$$h = 12$$

Área:

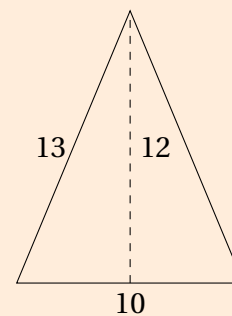
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{10 \cdot 12}{2}$$

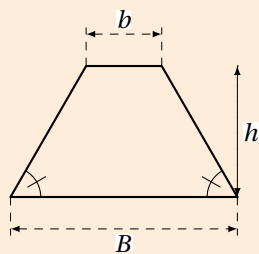
$$A = 60$$

4. Verificação:

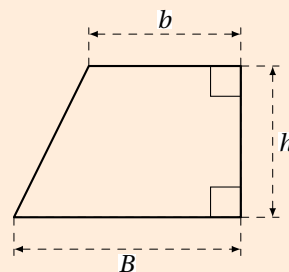
Altura coerente; área positiva, figura formada.



TRAPÉZIO



ISÓCELES



RETO

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Exercício Resolvido 13) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Um terreno em forma de trapézio possui bases medindo 10 m e 20 m. Sabendo que sua área é 150 m^2 , determine a altura desse trapézio.

Solução

1. Compreensão:

Bases 10 e 20; área 150.

2. Plano:

Usar a fórmula da área do trapézio e isolar h .

3. Execução:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$150 = \frac{(20 + 10) \cdot h}{2}$$

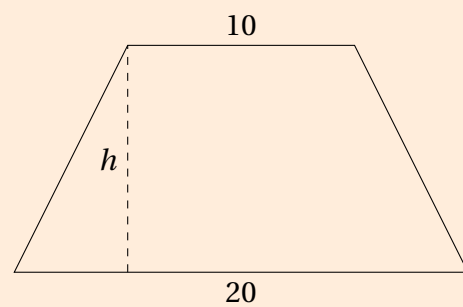
$$\Rightarrow 150 = \frac{30h}{2}$$

$$150 = 15h$$

$$h = 10$$

4. Verificação:

Substituindo, a área confere.



6.3 Exercícios Exploratórios

1) (HENRIQUE, 2019 – adaptado) Investigando o Retângulo de Área Fixa: No **GeoGebra**, crie um controle deslizante b para a base e defina a altura como $h = 36/b$. Isso garantirá que a área do retângulo seja sempre 36 u.a. Mova o controle deslizante e observe a alteração no perímetro.

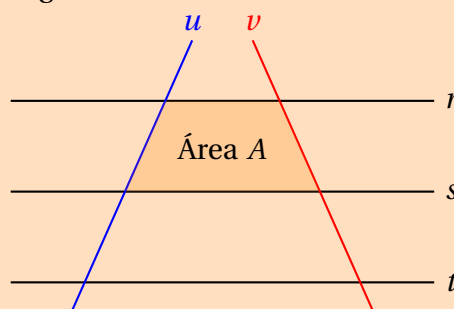
a) Qual é a medida da base e da altura quando o perímetro é o menor possível? b) Que figura geométrica especial é formada nesse momento de perímetro mínimo?

2) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Construa retângulos com diferentes medidas de lados, mantendo a área constante igual a 24 unidades quadradas. Registre as dimensões encontradas.

3) (HENRIQUE, 2019) Exploração de Propriedades (O Quadrado e suas Variações): Utilize a ferramenta "Polígono Regular" para construir um quadrado $ABCD$. Crie um ponto P sobre um dos lados e construa um triângulo interno. Com a ferramenta "Área", verifique as seguintes proposições, marcando (V) para verdadeiro e (F) para falso após manipular a figura:

- Se dobrarmos a medida do lado do quadrado, o seu perímetro também dobra.
- Se dobrarmos a medida do lado do quadrado, a sua área dobra.
- A área de um triângulo que possui a mesma base e a mesma altura do quadrado é exatamente a metade da área do quadrado.
- Ao mover um vértice do quadrado mantendo o perímetro constante, a área nunca se altera.
- De todos os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado é o que possui a maior área.
- Se o lado do quadrado aumenta em 1 unidade, o perímetro aumenta em 4 unidades.
- A razão entre a área de um quadrado e o seu perímetro é sempre constante, independentemente do tamanho do lado.

4) (HENRIQUE, 2019) Construa um feixe de retas paralelas r, s, t e duas transversais u, v . Forme trapézios entre as paralelas e utilize a ferramenta de área do **GeoGebra** para investigar a seguinte figura:



quest (HENRIQUE, 2019) Se você deslocar a transversal v para a direita, mantendo-a paralela à sua posição original, a razão entre as áreas dos trapézios formados entre as mesmas paralelas se altera? Justifique sua conclusão observando os valores no software **Geogebra**.

5) (HENRIQUE, 2019 – adaptado) Construa um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio 1. Crie um controle deslizante para n variando de 3 até 100.

a) O que acontece com o perímetro do polígono à medida que n aumenta? Ele se aproxima de qual valor conhecido?

b) O que acontece com a área do polígono? Compare o valor da área do polígono com $n = 100$ com o valor de π .

6) (HENRIQUE, 2019 – adaptado) Construa um polígono irregular qualquer no **GeoGebra**. Escolha um vértice fixo e trace diagonais partindo dele para todos os outros vértices não adjacentes, dividindo o polígono em triângulos.

a) Se o polígono tem n lados, em quantos triângulos ele foi dividido?

b) Use a ferramenta "Área" para medir a área de cada triângulo individual e a área total do polígono. A soma das áreas dos triângulos é igual à área do polígono original?

c) Se você mover o vértice fixo, as áreas dos triângulos mudam? E a soma total?

6.4 Exercícios Propostos

1) (elaborado pelo autor) Qual a área de um triângulo cuja base mede 50 cm e a altura mede 72 cm?

2) (elaborado pelo autor) Qual a área de um triângulo cuja base mede 12,5 cm e a altura mede 27,2 cm?

3) (elaborado pelo autor) Qual a medida da altura de um triângulo cuja base mede 18 cm e sua área é de 486 cm^2 ?

4) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Um agricultor possui um terreno em formato triangular com lados medindo 30 m, 40 m e 50 m. Ele deseja cercá-lo com arame, cujo preço é de R\$ 12,00 por metro. Além disso, há um custo fixo de R\$ 150,00 para a instalação da cerca. Qual será o custo total para cercar esse terreno?

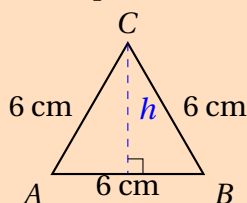
5) (elaborado pelo autor) Calcule o perímetro e a área de um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 8 cm.

6) (IDECAN, 2025) Um triângulo isósceles possui base medindo 10 cm e seus lados congruentes (iguais) medem 13 cm cada. Determine:

a) A altura desse triângulo em relação à base.

b) O perímetro e a área da figura.

7) (IEZZI, 2022 – adaptado) Observe o triângulo equilátero na figura abaixo, cujo lado mede 6 cm. Sabendo que a sua altura h é aproximadamente 5,2 cm, determine o valor do seu perímetro e de sua área.



8) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) A área de um triângulo retângulo é de 24 m^2 . Se um dos catetos mede 6 m, determine o perímetro total deste triângulo.

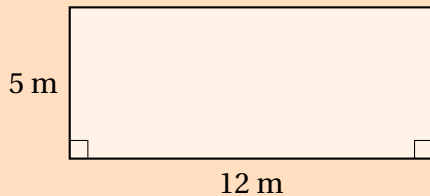
9) (IDECAN, 2025) Um retângulo possui um perímetro de 30 cm. Sabendo que a sua base mede 9 cm, determine:

(I) A medida da sua altura.

(II) A área total desse retângulo.

10) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Sabe-se que, para cercar todo o terreno retangular com uma volta de arame, são necessários exatos 80 metros de arame. Determine a área desse terreno onde a base é o triplo da altura.

11) (IEZZI et al., 2016 – adaptado) Analise a figura abaixo, que representa a planta de uma sala retangular. Calcule o perímetro total da sala e a área disponível para a colocação de um tapete que ocupará todo o piso.



12) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) A área de um retângulo é de 48 cm^2 . Se a base mede 8 cm , qual seria o novo perímetro se dobrássemos a medida da sua altura mantendo a base constante?

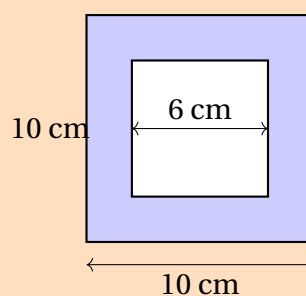
13) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Determine o perímetro de um quadrado cuja área é exatamente 144 cm^2 . (Dica: primeiro encontre a medida do lado l utilizando a operação inversa da potenciação).

14) (DOLCE; POMPEO, 2013 – adaptado) Um jardim quadrado possui um perímetro de 32 metros. Se dobrarmos a medida do lado desse quadrado, o que acontecerá com a sua área?

a) A área também dobrará?

b) Calcule os dois valores (área original e nova área) para justificar sua resposta.

15) (DANTE, 2018 – adaptado) Observe a figura abaixo, que representa uma moldura quadrada. Calcule a área da região colorida (em azul), sabendo que o lado do quadrado externo mede 10 cm e o lado do "buraco" interno quadrado mede 6 cm .



16) (DANTE, 2018 – adaptado) Um retângulo possui perímetro 30 cm . Sabendo que um dos lados mede x e o outro mede $15 - x$, determine a área do retângulo em função de x .

17) (DANTE, 2018 – adaptado) (Desafio) Se o perímetro de um quadrado é numericamente igual à sua área (em unidades correspondentes), qual é a medida do lado desse quadrado? Apresente o cálculo algébrico.

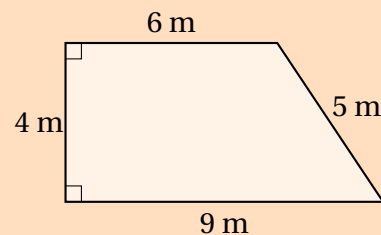
18) (DANTE, 2018 – adaptado) Um trapézio isósceles possui base maior medindo 12 cm, base menor medindo 8 cm e altura de 3 cm.

a) Calcule a área deste trapézio.

b) Sabendo que os lados não paralelos medem 5 cm cada, determine o perímetro total da figura.

19) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) A área de um trapézio é de 60 m^2 . Sabendo que a soma de suas bases ($B + b$) é igual a 20 metros, determine a medida da altura deste trapézio.

20) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Observe a figura abaixo, que representa um trapézio retângulo. Calcule o seu perímetro e a sua área total.



21) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Um trapézio tem base menor medindo $x + 2$, base maior $2x + 4$ e altura 10. Se a área desse trapézio é 120 u.a. (unidades de área), determine o valor de x e, conseqüentemente, as medidas das bases.

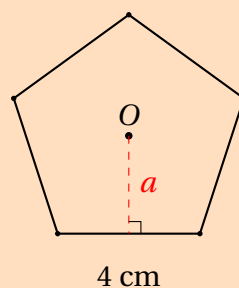
22) (DANTE, 2018 – adaptado) Um hexágono regular possui lado medindo 8 cm.

a) Determine o seu perímetro total.

b) Sabendo que a área de um hexágono regular de lado L é dada pela fórmula $A = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$, calcule a sua área aproximada (considere $\sqrt{3} \approx 1,73$).

23) (DANTE, 2018 – adaptado) O perímetro de um octógono regular é de 120 cm. Qual é a medida de cada um de seus lados? Se esse octógono fosse "esticado" para formar um quadrado com o mesmo perímetro, qual seria a medida do lado desse novo quadrado?

24) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Observe o pentágono regular na figura abaixo. Sabendo que a distância do centro até o ponto médio de um dos lados (apótema) é de aproximadamente 2,75 cm e que cada lado mede 4 cm, calcule o perímetro e a área total do polígono.



25) (elaborado pelo autor) Um triângulo equilátero e um quadrado possuem o mesmo perímetro. Se o lado do triângulo mede 12 cm, qual é a área do quadrado?

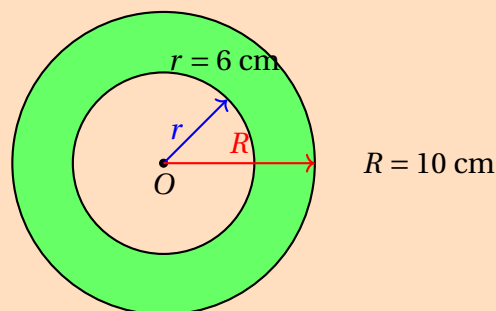
26) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Determine o comprimento da circunferência e a área de um círculo cujo raio mede 5 cm. (Utilize $\pi \approx 3,14$).

27) (TEIXEIRA, 2024 – adaptado) Uma pista de atletismo circular tem um diâmetro de 80 metros.

a) Se um atleta der 10 voltas completas nessa pista, quantos metros ele terá percorrido?

b) Qual é a área total da região interna delimitada por essa pista?

28) (DANTE, 2018 – adaptado) Observe a figura abaixo, que representa uma "coroa circular" (a região entre dois círculos concêntricos). Calcule a área da região sombreada, sabendo que o raio do círculo maior (R) é 10 cm e o raio do círculo menor (r) é 6 cm.



29) (elaborado pelo autor) O comprimento de uma circunferência é de 31,4 cm.

a) Determine a medida do raio desta circunferência.

b) Com o valor do raio encontrado, calcule a área do círculo correspondente.

Referências Bibliográficas

BISSOLOTTI, M. d. L. B.; TITON, F. P. Diagnóstico sobre as dificuldades de aprendizagem da geometria no ensino médio e os potenciais elementos facilitadores. *Contraponto: Discussões Científicas e Pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação*, Lages, v. 2, n. 1, p. 5–15, 2011.

BRAGA, T. *Desenho linear geométrico: problemas de desenho linear geométrico*. 14. ed. São Paulo: Ícone, 1997. ISBN 85-274-0497-4.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto Aplicações*. 4. ed. São Paulo: Ática, 2018. Volume único. Ensino Médio. ISBN 9788508190034.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. ISBN 978-85-357-1686-3.

FGV. *Prova para o Cargo de Professor de Matemática*. Rio de Janeiro, 2013. Concurso Público para a Secretaria de Estado de Educação.

HENRIQUE, M. P. *Caderno de Atividades Sobre Conceitos Geométricos em Ambientes de Geometria Dinâmica*. 1. ed.. ed. [S.l.]: Editora UFRJ, 2019.

IDECAN. *Prova para o Cargo de Professor de Matemática - SEEPB*. João Pessoa, 2025. Concurso Público da Secretaria de Estado da Educação da Paraíba.

IEZZI, G. *Matemática e Realidade*. São Paulo: Saraiva, 2022.

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3. Ensino Médio. ISBN 978-85-472-0539-3.

LIMA, E. L. O professor de matemática. *Sociedade Brasileira de Matemática*, Rio de Janeiro, 1999.

MALANGA, H. C. C. *Pré-Vestibular Matemática*. 1. ed.. ed. [S.l.]: Editora POLIEDRO, 2017.

Mini Mundi. *Miniatura Motoniveladora Volvo G940*. 2026. <<https://minimundi.com.br>>. Acessado em: 19 mai. 2026.

PASSOS, C. M. C.; SILVA, Z. A. I. da. *Matemática: 8º ano*. 3. ed. São Paulo: IBEP, 2013. (Caderno do futuro). Ensino Fundamental. ISBN 978-85-342-3538-9.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. 2. ed.. ed. [S.l.]: Universidade Stanford, 1977. v. 1. 1 p.

SANGIORGI, O. *Matemática Curso Moderno*. V Congresso de Ensino de Matemática: Companhia Editora Nacional, 1967.

SOUZA, J. R. d. *Matemática Realidade e Tecnologia: 6º Ano*. 1. ed.. ed. [S.l.]: Editora FTD, 2018.

TEIXEIRA, L. A. *Superação Matemática 8ºAno*. 1. ed.. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2024.