Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Mikaelly Guimarães Sousa de Araújo

Sistemas de Coordenadas: Uma abordagem a problemas da Geometria Plana

Orientador:
Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva

Natal - RN
Agosto de 2025

Mikaelly Guimarães Sousa de Araújo

Sistemas de Coordenadas: Uma abordagem a problemas da Geometria Plana

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRN como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva.

Natal - RN
Agosto de 2025

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Araújo, Mikaelly Guimarães Sousa de.
Sistemas de coordenadas: uma abordagem a problemas da geometria plana / Mikaelly Guimarães Sousa de Araújo. - 2025.
37 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Natal, RN, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva.

1. Geometria analítica - Dissertação. 2. Ensino de matemática - Dissertação. 3. Coordenadas cartesianas - Dissertação. 4. Resolução de problemas - Dissertação. 5. Sequência didática - Dissertação. I. Silva, Esteban Pereira da. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 514.74(043.3)

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Mikaelly Guimarães Sousa de Araújo

Sistemas de Coordenadas: Uma abordagem a problemas da Geometria Plana

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva (UFRN - Orientador)
Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza (UFRPE - Membro externo)
Profa. Dra. Gersica Valesca Lima de Freitas (UFRPE - Membro externo)

Natal - RN
Agosto de 2025

Dedico a todos que me ajudaram direta ou indiretamente,
a minha mãe que sempre se orgulhou das minhas conquistas
e ao meu pai que me ensinou que a educação é
a melhor herança que se pode deixar para os filhos.

Agradecimentos

A todos que se fizeram presentes durante essa minha jornada, em especial aos Prof. Dr Fagner, Prof Dra Débora e Prof. Dra Viviane Simiole que estando a frente da coordenação se propuseram a auxiliar de todas as formas para que não ficassemos desamparados. Ao Prof. Dr Esteban que se disponibilizou a ser meu orientador e, com toda paciência, conseguimos colocar para frente esse trabalho. A turma do PROFMAT 2023.1, pois ninguém largou a mão de ninguém, sempre ajudando uns aos outros. E a todos os meus famíliares que não me deixaram desistir e me deram forças para continuar.

Resumo

O desenvolvimento da Geometria Analítica foi um acontecimento revolucionário que transformou profundamente a Matemática e, em consequência, toda a ciência, tecnologia e o pensamento humano. A Geometria Analítica constrói uma ponte entre Álgebra e Geometria - ao possibilitar: a representação de propriedades geométricas por meio de fórmulas algébricas e, consequentemente, que problemas geométricos sejam resolvidos com o uso de ferramentas algébricas; reciprocamente, que equações algébricas possam ser visualizadas e entendidas sob um viés geométrico. Destacamos também que a Geometria Analítica estabeleceu os alicerces para a construção de ferramentas matemáticas mais avançadas e essenciais para a Física, Engenharia e Economia, por exemplo, como o Cálculo e a Álgebra Linear, que transformaram nossa habilidade em construir modelos matemáticos. Neste trabalho, discutimos a construção de sistemas de coordenadas no plano, destacando o uso natural da Geometria Analítica na abordagem de problemas postos na linguagem da Geometria Euclidiana.
Palavras-chave: Geometria Analítica; Ensino de Matemática; Coordenadas Cartesianas; Resolução de Problemas; Sequência Didática.

Abstract

The development of Analytic Geometry was a revolutionary event that profoundly transformed mathematics and, consequently, all of science, technology, and human thought. Analytic Geometry builds a bridge between Algebra and Geometry by enabling the representation of geometric properties through algebraic formulas and, consequently, allowing geometric problems to be solved using algebraic tools; and conversely, allowing algebraic equations to be visualized and understood from a geometric perspective. We also emphasize that Analytic Geometry laid the foundations for the creation of more advanced mathematical tools essential to Physics, Engineering, and Economics, such as Calculus and Linear Algebra, which have transformed our ability to construct mathematical models. In this work, we discuss the construction of coordinate systems in the plane, highlighting the natural use of Analytic Geometry in addressing problems stated in the language of Euclidean Geometry.
Keywords: Analytic Geometry; Mathematics Teaching; Cartesian Coordinates; Problem Solving; Didactic Sequence.

Sumário

Lista de Figuras

INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática, especialmente no que se refere a resolução de problemas, demanda estratégias que permitam ao estudante compreender não apenas a aplicação de fórmulas, mas também o significado conceitual dos conteúdos. Nesse contexto, a Geometria Analítica, consolidada a partir dos trabalhos de René Descartes e Pierre de Fermat no século XVII, ocupa papel central ao estabelecer uma ponte entre a Álgebra e a Geometria, possibilitando a representação de figuras e relações espaciais por meio de equações (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012).

A criação do sistema de coordenadas cartesianas representou um marco na história da Matemática, pois permitiu traduzir problemas geométricos em linguagem algébrica e vice-versa, abrindo novas perspectivas para a análise e a modelagem de fenômenos. Conforme discutido por Roque e Pitombeira (2012), essa inovação não apenas transformou a forma de se fazer Matemática, mas também influenciou profundamente o desenvolvimento científico e tecnológico, tornando-se uma ferramenta indispensável em diversas áreas do conhecimento.

No âmbito educacional, a compreensão e o uso das coordenadas no plano cartesiano são essenciais para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de abstração dos alunos. Além disso, permitem a resolução de problemas contextualizados, conectando a Matemática a situações reais e a outras disciplinas. Assim, estudar o sistema de coordenadas não se limita à memorização de procedimentos, mas envolve compreender sua origem histórica, sua fundamentação teórica e suas aplicações práticas.

Considerando esse panorama, observa-se que, apesar da relevância do tema, muitos estudantes apresentam dificuldades em utilizar coordenadas cartesianas de forma autônoma na resolução de problemas. Essa lacuna sugere que o ensino, muitas vezes, permanece centrado na repetição de exercícios mecânicos, sem estabelecer conexões claras entre o conteúdo e seu significado. A partir dessa constatação, este trabalho propõe por meio de uma sequência didática, fundamentada em teorias construtivistas e apoiada em exemplos contextualizados, contribuir para superar tais dificuldades, promovendo uma aprendizagem mais significativa e alinhada ao papel histórico e conceitual das coordenadas na Matemática.

A presente dissertação está estruturada em três capítulos centrais. O **Capítulo 1 – Coordenadas** aborda os fundamentos teóricos da Geometria Analítica, partindo da representação de pontos na reta real e no plano cartesiano, e desenvolvendo conceitos essenciais como distância entre pontos, ponto médio, equações de retas, circunferências e condições de perpendicularidade e paralelismo, com base em referenciais clássicos da literatura matemática. O **Capítulo 2 – Desenvolvimento de Questões** dedica-se à aplicação desses conceitos em situações-problema de caráter contextualizado, selecionadas de exames e propostas didáticas, evidenciando a utilidade dos sistemas de coordenadas na resolução de problemas geométricos e na análise de configurações do cotidiano. O **Capítulo 3 – Sequência Didática** apresenta uma proposta pedagógica estruturada, fundamentada em pressupostos construtivistas e voltada ao ensino de coordenadas cartesianas, contemplando etapas de problematização, formalização teórica, atividades práticas, sistematização e avaliação, com vistas à promoção de uma aprendizagem significativa. Por fim, as Considerações Finais sintetizam os resultados alcançados, destacando a relevância do uso da Geometria Analítica como recurso metodológico para a articulação entre teoria e prática no ensino da Matemática, bem como para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da autonomia dos estudantes.

1 Coordenadas

Este capítulo traz uma apresentação sucinta dos conceitos da Geometria Analítica, desde a representação de um ponto em uma reta real, distância entre pontos e equações que conseguimos deduzir através desses conceitos. Utilizaremos Π como representação do plano euclidiano. Para a produção deste capítulo nos apoiaremos nas obras "A Matemática para o Ensino Médio", volume 1 e 3, assim como também "Coordenadas no Plano", todos de autoria de Elon Lages Lima.

A Geometria Analítica baseia-se na ideia de representar os pontos da reta por um número real, os pontos no plano por pares ordenados de números reais e os pontos no espaço por ternos ordenados de números reais.

1.1 Coordenadas na Reta

A cada reta do plano euclidiano associaremos uma orientação, isto é, um "sentido de percurso", chamado *positivo*; o sentido inverso chama-se *negativo*. Numa reta orientada, diz-se que o ponto B está à direita do ponto A, quando o sentido de percurso de A para B é positivo.

Admitamos fixadas uma unidade de comprimento ou sistema de coordenadas nesta reta. Dados os pontos A, B quaisquer, o comprimento do segmento de reta AB chama-se *distância* entre os pontos A e B. Escrevemos $\mathrm{d}(A, B)$ para indicar essa distância, que é um número real. Denotaremos por $\mathrm{d}(A, A) = 0$ e se $A \neq B$, tem-se $\mathrm{d}(A, B) > 0$. Além disso, vale

$$\mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(C, B) = \mathrm{d}(A, B)$$

se, e somente se, o ponto C pertence ao segmento de reta AB. Assim, também podemos afirmar que $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(B, A)$.

A ideia de distância possibilita a definição de coordenadas em uma reta, permitindo representar seus pontos por números reais. Para isso, é necessário orientar a reta e selecionar um de seus pontos como origem.

Um eixo é uma reta orientada na qual se fixou um ponto O, chamado de origem. Todo eixo E pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, do seguinte modo, a origem O do eixo faz-se corresponder o número zero e a cada ponto X de E situado a direita de O corresponde o número real positivo $x = \mathrm{d}(O, X)$, ou seja, um número real que representa a distância de X até a origem O. Os pontos situados a esquerda de O correspondem a um número real negativo, cujo valor absoluto é a medida da distância desse ponto até a origem O. Assim, a cada ponto X no eixo E corresponde o número $x = \mathrm{d}(O, X)$ se X está à direita de O e $x = -\mathrm{d}(O, X)$ se X está a esquerda de O.

Distância entre dois pontos na reta

Dados dois pontos A e B sobre um eixo E de coordenadas a e b, respectivamente, a distância do ponto A ao ponto B é:

$$\mathrm{d}(A, B) = |a - b| = |b - a|$$

isto é, tem-se $\mathrm{d}(A, B) = a - b$ se $a \geq b$ e $\mathrm{d}(A, B) = b - a$ se $a \leq b$
Podemos provar a afirmação acima, lembrando que a distância entre dois pontos sempre será maior ou igual a zero, e que $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(B, A)$, e se X é um ponto localizado entre A e B, então:

$$\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(A, X) + \mathrm{d}(X, B)$$

Se $A = B$, $A = 0$ ou $B = 0$, então não há o que provar. Supondo que A esteja a esquerda de B, ou seja, $a < b$, teremos três casos para considerar:

1. A e B estão a direita da origem, isto é, $0 < a < b$;

2. A e B estão a esquerda da origem, isto é, $a < b < 0$;

3. A está a esquerda e B está a direita da origem, isto é, $a < 0 < b$

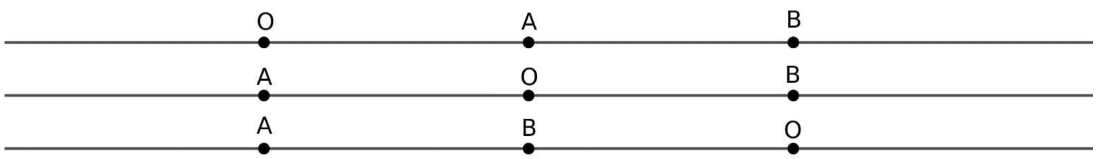

Figura 1.1: Retas com as três posibilidades de localização dos pontos A e B

No primeiro caso, A está entre O e B. Além disso, tem-se que $\mathrm{d}(O, A) = a$ e $\mathrm{d}(O, B) = b$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(O, B) &= \mathrm{d}(O, A) + \mathrm{d}(A, B) \\ \mathrm{d}(A, B) &= \mathrm{d}(O, B) - \mathrm{d}(O, A) \\ \mathrm{d}(A, B) &= b - a = |b - a| \end{aligned}$$

No segundo caso, B está entre A e O, sendo agora $\mathrm{d}(O, A) = -a$ e $\mathrm{d}(O, B) = -b$. Portanto:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(O, A) &= \mathrm{d}(O, B) + \mathrm{d}(B, A) \\ \mathrm{d}(B, A) &= \mathrm{d}(O, A) - \mathrm{d}(O, B) \\ \mathrm{d}(B, A) &= -a - (-b) = b - a = |b - a| \end{aligned}$$

No terceiro caso, O está entre A e B, sendo $\mathrm{d}(O, A) = -a$ e $\mathrm{d}(O, B) = b$, então temos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, B) &= \mathrm{d}(A, O) + \mathrm{d}(O, B) \\ \mathrm{d}(A, B) &= -a + b = b - a = |b - a| \end{aligned}$$

Se A e B são pontos do eixo E, com A a esquerda de B, e suas coordenadas são a e b, respectivamente, então a coordenada de um ponto arbitrário X pertencente ao segmento AB é um número x tal que $a \leq x \leq b$. Em outras palavras, ao segmento de reta $AB \subset E$ corresponde ao intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Para cada ponto X do segmento de reta AB, tem-se evidentemente, $\mathrm{d}(A, X) \leq \mathrm{d}(A, B)$, logo a razão $t = \mathrm{d}(A, X)/\mathrm{d}(A, B)$ é um número real compreendido entre 0 e 1. Quando $X = A$ tem-se $t = 0$ e quando $X = B$ tem-se $t = 1$. Assim, para cada $t \in [0, 1]$, chamamos de X, o ponto do segmeno AB tal que $\mathrm{d}(A, X)/\mathrm{d}(A, B) = t$, portanto a coordenada x_t do ponto X_t está relacionada com as coordenadas a e b dos pontos A e B pela igualdade $(x_t - a)/(b - a) = t$, ou seja,

$$x_t - a = t(b - a) \Rightarrow x_t = a + t(b - a)$$

Quando $t = \dfrac{1}{2}$, $X_t = X_{\frac{1}{2}}$ é o ponto médio do segmento AB e sua coordenada é

$$x_{1/2} = a + \frac{1}{2}(b - a) \Rightarrow x_{1/2} = a - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \Rightarrow x_{1/2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \Rightarrow x_{1/2} = \frac{a + b}{2}$$

sendo assim a média aritmética entre as coordenadas a e b dos pontos A e B, respectivamente.

1.2 Coordenadas no Plano

Dados (x, y) e $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, tem-se $(x, y) = (x', y')$ se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$. Denominamos o número de x como a primeira coordenada e o número de y como a segunda coordenada do par (x, y). Podemos observar que os pares ordenados $(3, 8)$ e $(8, 3)$, são diferentes, pois a primeira coordenada de $(3, 8)$ é 3 e a primeira coordenada de $(8, 3)$ é 8. Já os conjuntos $\{3, 8\}$ e $\{8, 3\}$ são iguais, pois os objetos que pertencem aos dois são os mesmos.

Um *sistema de eixos* ortogonais no plano Π é um par de eixos OX e $OY \in \Pi$, que são perpendiculares e têm a mesma origem O. A escolha de um sistema de eixos ortogonais num plano Π determina, de modo natural, uma correspondência biunivoca entre Π e $\mathbb{R}^2$. A bijeção $\Pi \to \mathbb{R}^2$, faz corresponder a cada ponto P no plano Π o par de números reais (x, y), obtidos do seguinte modo: a partir do ponto P traçam-se paralelas aos eixos OX e OY, de acordo com a Figura 1.3. O número x é a coordenada, no eixo OX, do ponto em que a paralela a OY traçada do ponto P encontra OX, enquanto y é a coordenada, no eixo OY, do ponto em que a paralela a OX traçada por P encontra OY. Chamamos os pontos (x, y) de coordenada do ponto P relativos ao sistema de eixo OXY, visto na Figura 1.2, onde x é chamado de *abscissa* do ponto P e y a *ordenada.*

Se P estiver sobre o eixo OX, o par ordenado que lhe corresponde é $(x, 0)$, onde x é a coordenada de P no eixo OX, assim como também, se P estiver no eixo OY a ele corresponde o par $(0, y)$, onde y é a coordenada de P nesse eixo. Já o ponto O, origem do sistema de coordenadas, tem abscissa e ordenada ambas iguais a zero, ou seja, ela corresponde ao par $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

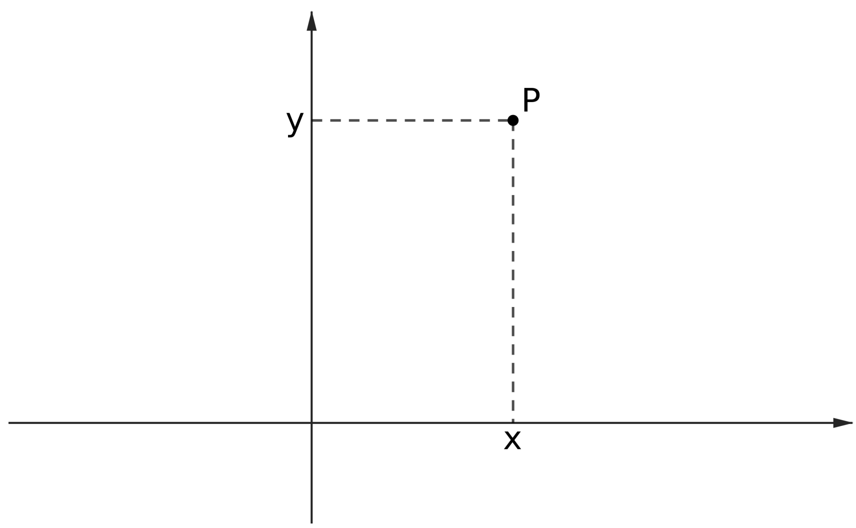

Figura 1.2: Gráfico com o ponto $P = (x, y)$

Em principio o plano Π, cujos os elementos são pontos, não é a mesma coisa que o conjunto $\mathbb{R}^2$, cujos elementos são pares ordenados de números reais. Entretanto, quando fixarmos um sistema de coordenadas em Π, usaremos a correspondência $\Pi \to \mathbb{R}^2$ para identificar cada ponto P do plano com o par ordenado (x, y) que lhe corresponde.

Os eixos ortogonais decompõem o plano Π em quatro regiões, como mostra a Figura 1.4, as quais chamamos de quadrante. Denominamos como primeiro quadrante a região formada pelos pontos que têm ambas as coordenadas positivas; no segundo quadrante temos a abscissa negativa e a ordenada positiva; no terceiro quadrante temos ambas as coordenadas negativas e no quarto quadrante temos a abscissa positiva e a ordenada negativa.

Fixado o sistema de coordenadas OXY no plano Π, o primeiro e o terceiro quadrante formam regiões angulares determinadas por ângulos retos, opostos pelo vértice.

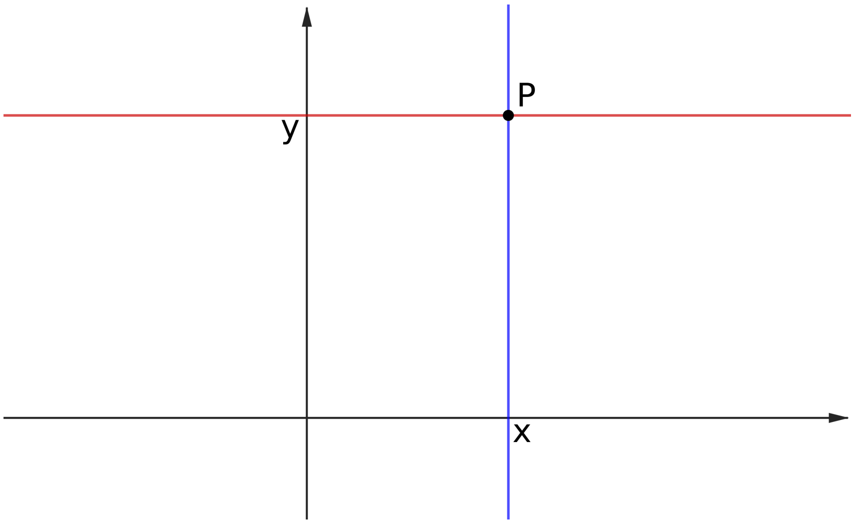

Figura 1.3: Retas paralelas aos eixos OX e OY que passam pelo ponto P

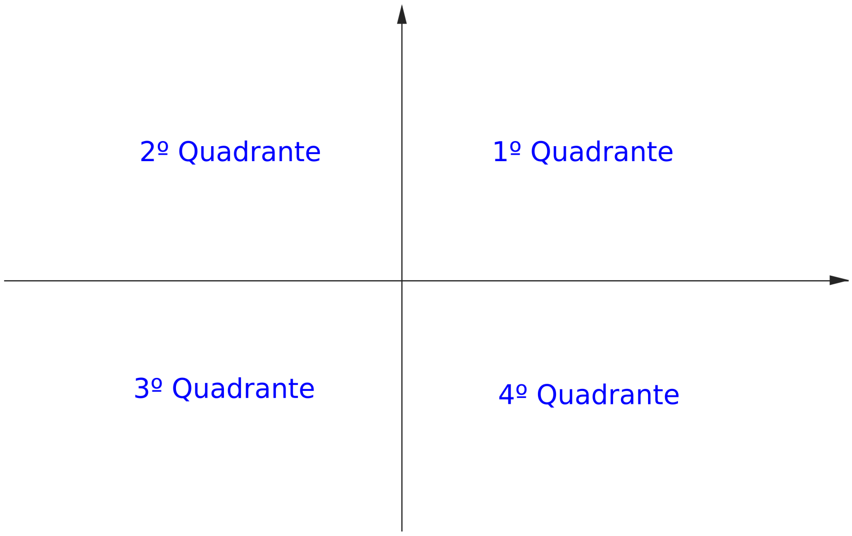

Figura 1.4: Plano cartesiano dividido nos quatro quadrantes

Os pontos $P = (x, y)$ das bissetrizes desses dois ângulos são equidistantes dos lados, como todos os pontos de uma bissetriz, logo tem abscissa e ordenada iguais. Esta reta r chama-se a diagonal do plano Π, relativo ao sistema OXY, tem-se $P = (x, y) \in r$ se, e somente se, $y = x$. Analogamente, um ponto $Q = (x, y)$ pertence as bissetrizes r' do segundo e quarto quadrante se, e somente se, $y = -x$, como podemos observar na Figura 1.5.

Exemplo 1.2.1. *Dados os pontos $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$, determinar as coordenadas do ponto médio $M = (x, y)$ do segmento AA'?*

Suponhamos inicialmente que $a \neq a'$ e $b \neq b'$, isto é, que o segmento AA' não é paralelo a nenhum dos eixos OX e OY, como podemos observar na Figura 1.6. Então, considerando os pontos $P = (a, y)$ e $Q = (x, b')$, vemos que APM e MQA' são triângulos retângulos cujas hipotenusas AM e MA' têm o mesmo comprimento, já que M é o ponto

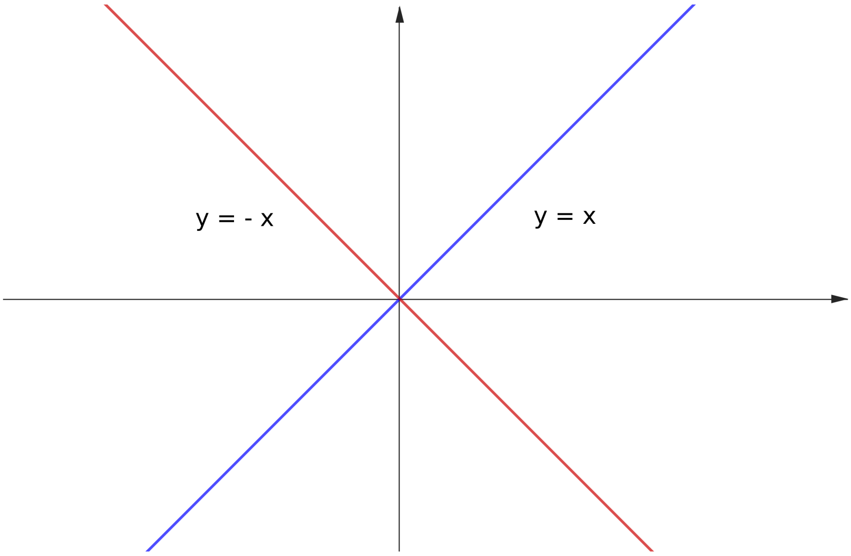

Figura 1.5: Bissetriz $y = x$ e bissetriz $y = -x$

médio de AA'. Além disso, os ângulos agudos $P\widehat{A}M$ e $Q\widehat{M}A'$ são congruentes porque os lados AP e MQ são paralelos. Portanto APM e MQA' são triângulos congruentes. Assim, resultando que os segmentos AP e MQ têm o mesmo comprimento. Logo, pondo $A_0 = (a, 0)$, $M_0 = (x, 0)$ e $A'_0 = (a', 0)$, concluimos que M_0 é o ponto médio do seguimento $A_0A'_0$ no eixo OX. Como vimos que o ponto médio é dado quando $t = \dfrac{1}{2}$, podemos afirmar que $x = \dfrac{a + a'}{2}$, analogamente temos que $y = \dfrac{b + b'}{2}$.

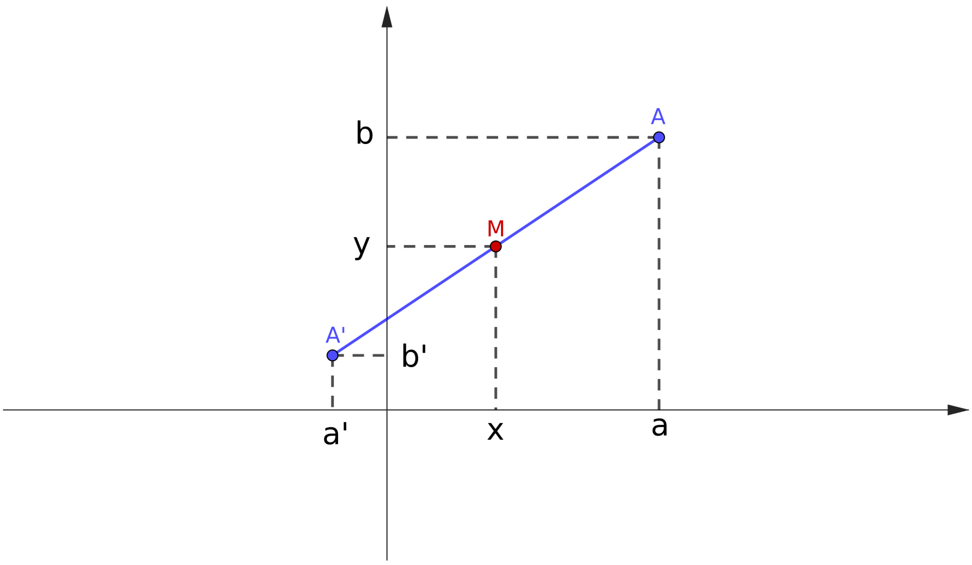

Figura 1.6: Representação dos pontos A, A' e M

Quando o segmento AA' é paralelo a um dos eixos, ou seja, esta na vertical ou horizontal, o argumento acima reduz imediatamente ao caso de ponto médio visto anteriormente.

Exemplo 1.2.2. *Dados os pontos $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$ e um número real t, com $O \leq t \leq 1$, quais as coordenadas do ponto $X_t = (x_t, y_t)$, situado sobre o segmento AA', de tal modo que $d(A, X_t)/d(A, A') = t$?*

No Exemplo 1.2.1, respondemos essa pergunta, porém os pontos A e A' estavam sobre um eixo, sendo assim sua resposta dada em relação a única coordenada que cada um desses pontos possuia naquele eixo. Pelo que foi visto, se $A = (a, 0)$ e $A' = (a', 0)$, pertencentes ao eixo OX, então $X_t = (x_t, 0)$, com $x_t = a + t(a' - a)$. Analogamente, se $A = (0, b)$ e $A' = (0, b')$ pertencem ao eixo OY, temos $X_t = (0, y_t)$, com $y_t = b + t(b' - b)$.

Quando temos $a = a'$ (AA' é paralela ao eixo OY) ou quando $b = b'$ (AA' é paralelo ao eixo OX) temos as coordenadas de X_t demonstradas pela explicação anterior. Já quando temos $a \neq a'$ e $b \neq b'$ (AA' não é paralelo a nenhum dos eixos), podemos aplicar um argumento parecido com o anterior, porém é mais conveniente comparar os triângulos retângulos APX_t e AQA', com $P = (x_t.b)$ e $Q = (a', b)$, representados na Figura 1.7. Estes triângulos são semelhantes, pois têm um ângulo agudo comum. A razão de semelhança é $d(A, X_t)/d(A, A') = t$, portanto temos, $d(A, P)/d(A, Q) = t$, ou seja, $(y_t - b)/(b' - b) = t$, chegando assim a $y_t = b + t(b' - b)$. Analogamente podemos obter $x_t = a + t(a' - a)$, com o mesmo valor de t. Portanto, dados os pontos $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$, as coordenadas do ponto $X_t = (x_t, y_t)$ localizado no segmento AA', de modo que $d(A, X_t)/d(A, A') = t$ são $x_t = a + t(a' - a)$ e $y_t = b + t(b' - b)$.

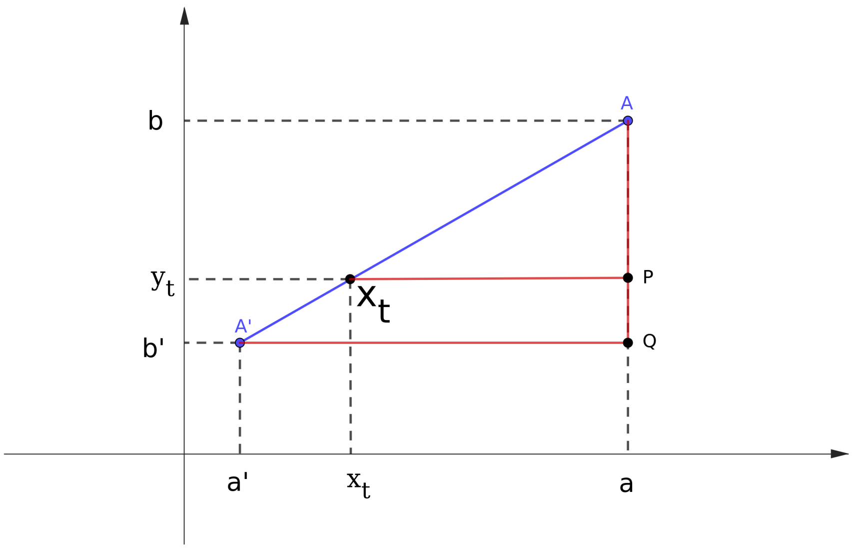

Figura 1.7: Representação dos Triângulos Retângulos

Em particular, quando $t = \dfrac{1}{2}$ reobtemos as coordenadas $x_t = \dfrac{a + a'}{2}$ e $y_t = \dfrac{b + b'}{2}$. Assim como, se $t = 0$, temos $X_0 = A$ e se $t = 1$, temos $X_1 = A'$.

A expressão $X_t = (a + t(a' - a), b + t(b' - b))$, quando t varia de 0 a 1, fornece todos os pontos do segmento de reta AA', onde $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$. A função $t \to X_t$, cujo o domínio é o intervalo $[0, 1]$ e o contra-domínio é o segmento AA', chama-se uma *parametrização* desse segmento e a variável t chama-se *parâmetro*.

Se, na expressão que fornece as coordenadas do ponto X_t, permitirmos que o parâmetro t assuma todos os valores reais, obteremos todos os pontos da reta AA', não apenas os do segmento. Quando $t \geq 0$, X_t percorre a semi-reta de origem A que contém o ponto A'. Quando $t < 0$, X_t percorre a semi-reta oposta. Portanto, t varia em $\mathbb{R}$, a função $t \to X_t$, de dominio $\mathbb{R}$, é uma parametrização da reta AA'.

Diz-se que um segmento de reta está orientado quando se escolheu um dos seus pontos extremos para ser o ponto inicial e o outro será o ponto final. Quando escrevemos "o segmento orientado AB" estamos querendo dizer que A é o ponto inicial e B é o ponto final do segmento. Do contrário, escrevemos "o segmento orientado BA".

São dados o segmento de reta orientado AA', com $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$, e o ponto $C = (c, d)$, não pertencente ao segmento AA'. Quer-se determinar as coordenadas dos pontos $C' = (x, y)$ de modo que CC' seja o segmeto orientado obtido quando se translada AA' paralelamente até fazer A coincidir com C, como mostra a Figura 1.8. Em termos mais precisos: dados os pontos A, A' e C, quer-se obter C' tal que AA' e CC' sejam os lados opostos de um paralelogramo cujos outros lados opostos são AC e $A'C'$. Com $C' = (x, y)$, iremos calcular o valor de x e y.

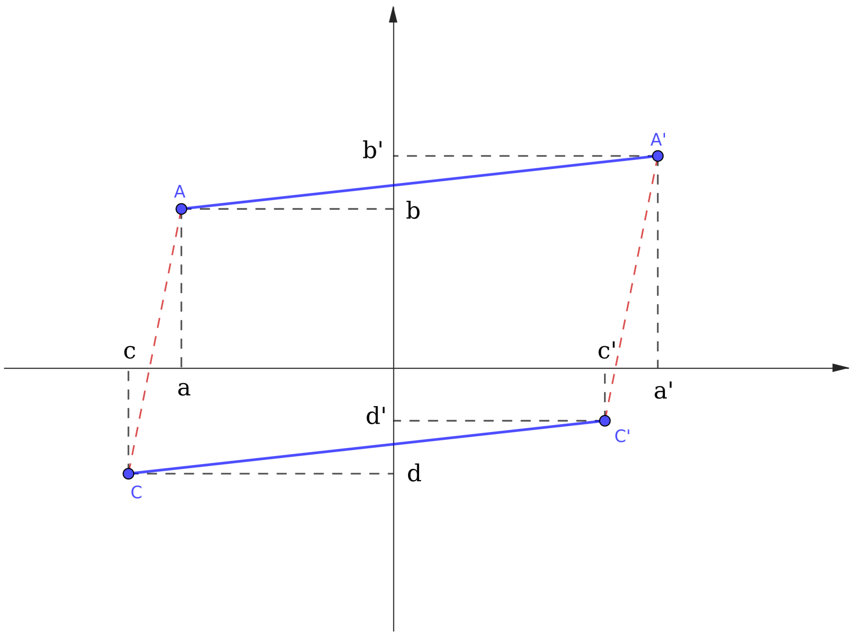

Figura 1.8: Segmento CC' paralelo ao segmento AA'

Sabemos que as diagonais de um paralelogramo intersectam-se mutuamente em seus respectivos pontos médios. Assim os segmentos AC' e $A'C$ têm o mesmo ponto médio, isto nos dá

$$\frac{a + x}{2} = \frac{a' + c}{2} \text{ e } \frac{b + y}{2} = \frac{b' + d}{2}$$

Daí, $x = c + (a' - a)$ e $y = d + (b' - b)$

Em particular, se transladarmos paralelamente o segmento AA' até fazer o ponto A coincidir com a origem $O = (0, 0)$ do sistema de coordenadas então o ponto A' cairá sobre $C' = (a' - a, b' - b)$, visto na Figura 1.9.

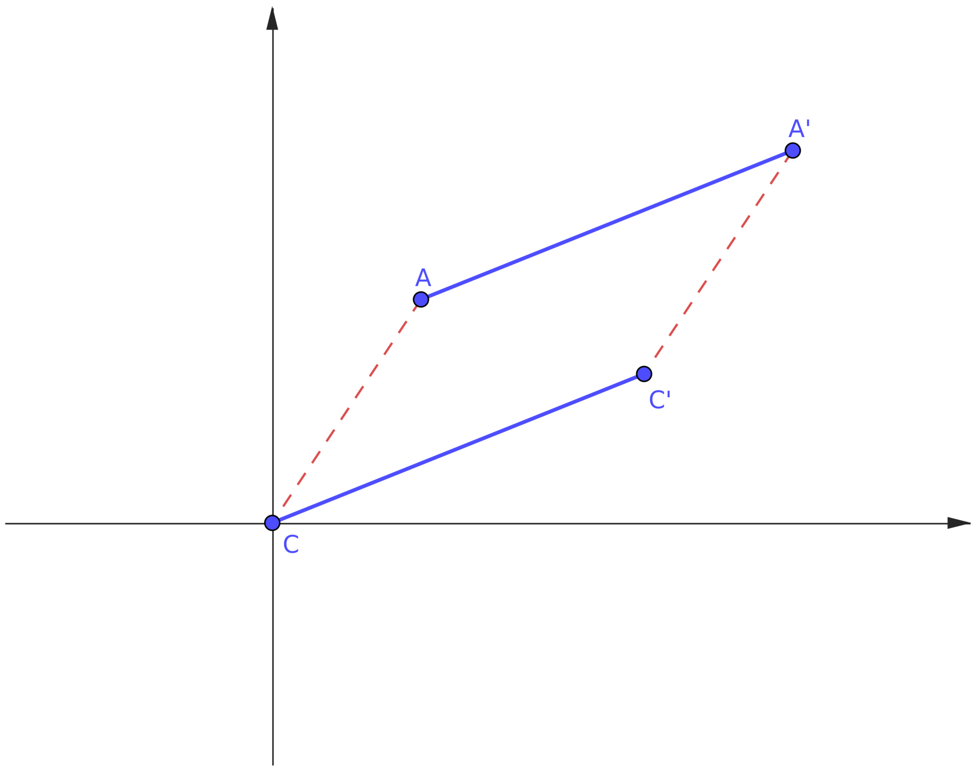

Figura 1.9: Transição de A até a Origem

Distância entre dois pontos no plano

Se os pontos $A = (a, b)$ e $B = (a', b)$ têm a mesma ordenada b, então a distância $\mathrm{d}(A, B)$ entre eles é igual a distância $|a' - a|$ entre suas projeções no eixo OX. Analogamente, se $A = (a, b)$ e $C = (a, b')$ têm a mesma abscissa a, então $\mathrm{d}(A, C) = |b' - b|$, ou seja, a distância entre suas projeções no eixo OY.

Dados os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, queremos obter a expressão da distância $\mathrm{d}(P_1, P_2)$ em termos das coordenadas de P_1 e P_2. Para isso, utilizaremos um ponto $Q = (x_2, y_1)$.

Como P_1 e Q têm a mesma ordenada, $\mathrm{d}(P_1, Q) = |x_2 - x_1|$, assim como P_2 e Q têm a mesma abscissa, $\mathrm{d}(P_2, Q) = |y_2 - y_1|$. Pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$\mathrm{d}(P_1, P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Portanto,

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y)$ a origem $O = (0, 0)$ é $\mathrm{d}(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$

No próximo exemplo iremos deduzir a equação da circunferência, através da fórmula que encontramos para calcular distância entre dois pontos.

Exemplo 1.2.3. *Dados o ponto $A = (a, b)$ e o número real $r > 0$, a circunferência C de centro A e raio r, exemplificado na Figura 1.10, é o conjunto dos pontos no plano situados a distância r do ponto A. Assim, o ponto $P = (x, y)$ pertence a C se, e somente se, $d(A, P) = r$, utilizando a fórmula de distância entre dois pontos no plano, podemos reescrever*

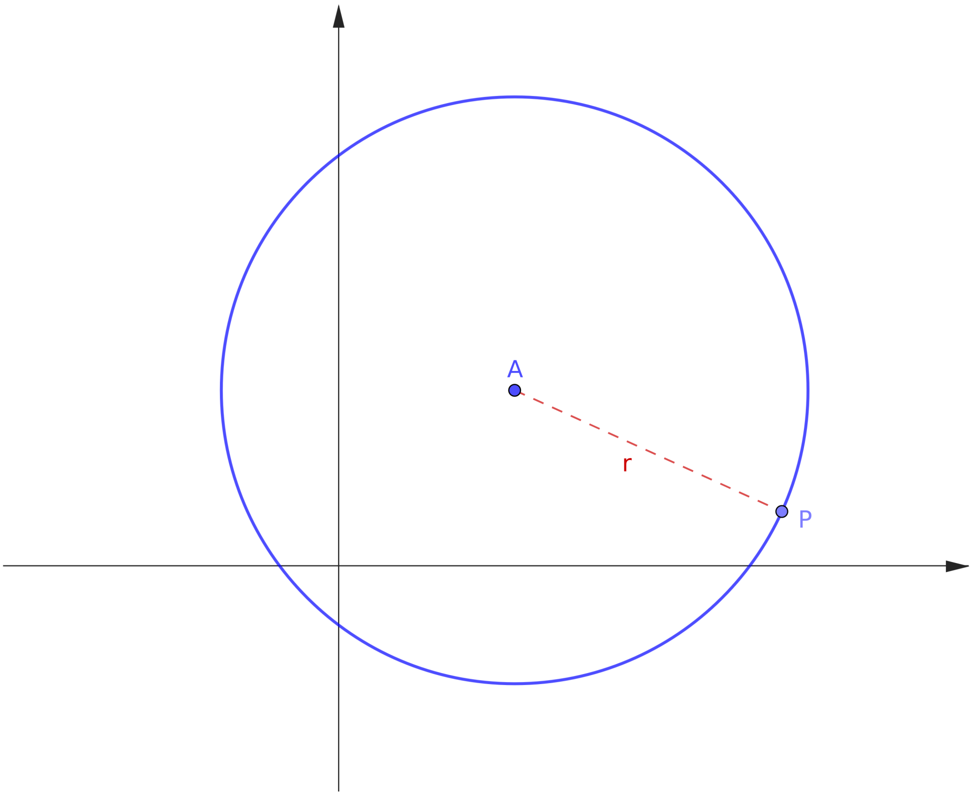

Figura 1.10: Circunferência de centro A e raio r

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r\}$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Como queriamos.

Utilizando os conceitos estudados até aqui, veremos como deduzir quando duas retas são perpendiculares através de suas representações algébricas.

Exemplo 1.2.4. *Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ qual é a condição, em termos dessas coordenadas, que assegura o perpendicularismo OP e OQ, onde $O = (0, 0)$ é a origem?*

Pelo Teorema de Pitágoras, os segmentos OP e OQ são perpendiculares se, e somente se,

$$\mathrm{d}(P,Q)^2 = \mathrm{d}(O,P)^2 + \mathrm{d}(O,Q)^2$$

Pela fórmula de distância entre dois pontos, podemos reescrever essa equação como

$$\begin{gathered}\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2+u^2+v^2}\\ u^2-2ux+x^2+v^2-2vy = x^2+y^2+u^2+v^2\\ -2ux-2vy = 0 \Rightarrow ux+vy = 0\end{gathered}$$

A igualdade $ux + vy = 0$ expressa portanto uma condição necessária e suficiente para que o segmento OP e OQ sejam perpendiculares, quando O é a origem, $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$.

Generalizando, dados $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$, $C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$, com $A \neq A'$ e $C \neq C'$, qual a condição em termos dessas coordenadas que assegura serem perpendiculares os segmentos de reta AA' e CC'?

Transladando paralelamente os segmentos AA' e CC' de modo a fazer os pontos A e C coincidirem com a origem $O = (0, 0)$, obtemos os pontos $A'' = (\alpha, \beta)$ e $C'' = (\gamma, \delta)$ tais que OA'' é paralelo a AA' e OC'' é paralelo a CC', como vimos na Figura 1.11. Como já sabemos, $\alpha = a' - a$, $\beta = b' - b$, $\gamma = c' - c$ e $\delta = d' - d$.

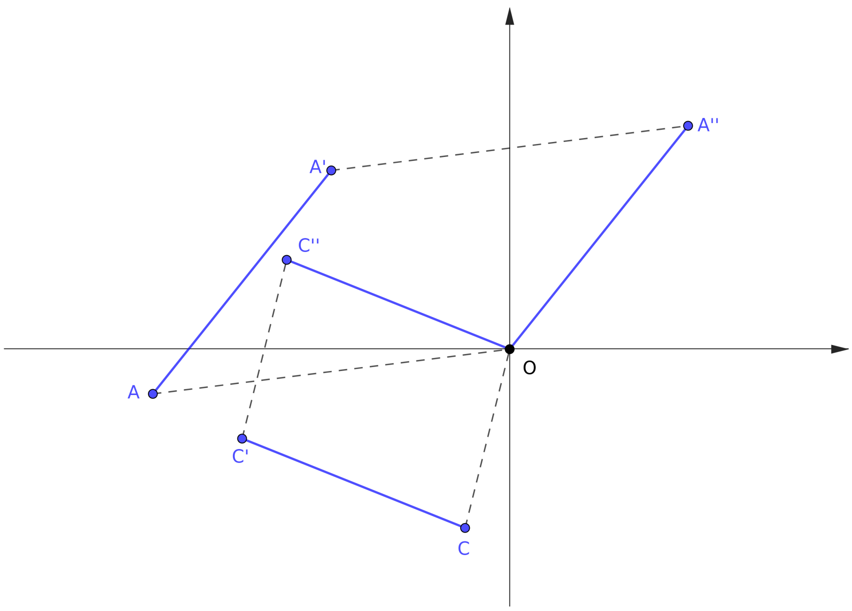

Figura 1.11: Perpendicularidade do segmento AA' e CC'

Além disso, os segmentos AA' e CC' são perpendiculares se, e somente se, $OA'' \perp OC''$, ou seja, $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

Assim, a condição de perpendicularidade dos segmentos AA' e CC' é determinada pelas suas coordenadas de seus extremos, de modo que

$$(a' - a)(c' - c) + (b' - b)(d' - d) = 0$$

A condição de perpendicularismo é um caso particular da fórmula que dá o cosseno do ângulo entre duas direções. Com efeito, duas retas são perpendiculares se, e somente se, o cosseno do ângulo entre elas é igual a zero. Sabendo disso, vamos observar a seguinte situação:

Sejam $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ pontos situados a distância 1 da origem $O = (0, 0)$. Então, se α e β são, respectivamentes, as medidas em radiano dos ângulos do eixo OX com os segmentos OP e OQ, tem-se $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, $u = \cos\beta$ e $v = \sin\beta$, assim como o ângulo do segmento OP com o segmento OQ mede $\theta = \beta - \alpha$ radianos. Assim temos

$$\cos\theta = \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = ux + vy$$

Se $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ forem pontos diferente de $O = (0, 0)$, mas os comprimentos dos segmentos OP e OQ forem diferentes de 1, podemos admitir

$$s = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } t = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Então os pontos $P' = (sx, sy)$ e $Q' = (tu, tv)$ estão sobre os segmentos OP e OQ, respectivamente, porém com $\mathrm{d}(O, P') = \mathrm{d}(O, Q') = 1$. O ângulo θ formado pelos segmentos OP e OQ é o mesmo formados pelos OP' e OQ'. Baseado no que acabamos de ver, temos que $\cos\theta = tu \cdot sx + tv \cdot sy = ts(ux + vy)$, ou seja,

$$\cos\theta = \frac{ux + vy}{\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Portanto, esta é a fórmula do cosseno do ângulo formado entre os segmentos OP e OQ, com $O = (0, 0)$, $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$.

Dados dois segmentos de reta AA' e CC', com extremidades distintas a fim de obter o cosseno do ângulo entre eles em função das coordenadas $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$, $C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$, transladamos esses segmentos de modo a fazer A e C caírem sobre O, obtendo assim os segmentos OA'' e OC'', paralelos a AA' e CC' respectivamente. O ângulo entre AA' e CC' será o mesmo que entre OA'' e OC''. Como já vimos anteriormente, tem-se $A'' = (a' - a, b' - b)$ e $C'' = (c' - c, d' - d)$. Portanto, se θ é o ângulo entre AA' e CC', tem-se

$$\cos\theta = \frac{(a' - a)(c' - c) + (b' - b)(d' - d)}{\sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2} \cdot \sqrt{(c' - c)^2 + (d' - d)^2}}$$

Podemos observar que os segmentos AA' e CC' têm extremidades distintas, o ângulo θ entre eles, só será bem definido quando os segmentos são orientados. No exemplo acima, definimos A e C como ponto inicial dos segmentos, caso mudássemos o ponto inicial de A para A', o ângulo entre eles seria o suplementar de θ e o cosseno mudaria o sinal. Portanto, a fórmula acima nos oferece o cosseno do ângulo formado entre dois segmentos orientados. Caso os segmentos dados tenham extremidade comum, naturalmente, utilizamos ela como ponto inicial. Algumas vezes temos um problema geométrico que não menciona coordenadas. Nesse caso temos a liberdade de introduzir no plano o sistema que acharmos conveniente.

Exemplo 1.2.5. *Seja ABC um triângulo retângulo cuja hipotenusa é BC. Seja M o ponto médio de BC, como mostra a Figura 1.12. Queremos mostrar que o comprimento da mediana AM é igual a metade do comprimento da hipotenusa.*

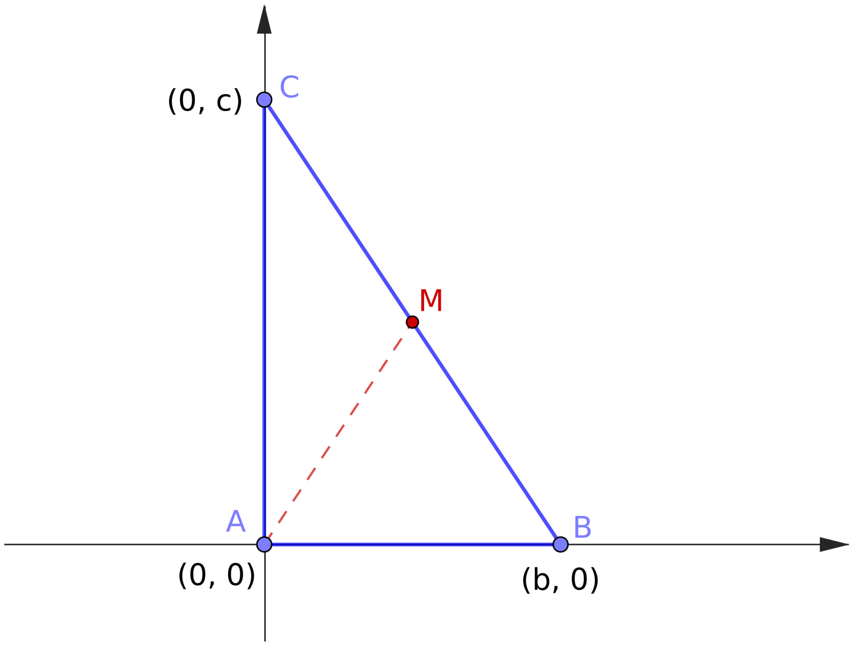

Figura 1.12: Representação do Triângulo Retângulo ABC

Um sistema de coordenadas conveniente para este problema é aquele em que as retas AB e AC são os eixos, portanto $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$ são as coordenadas dos vértices e $M = \left(\dfrac{b}{2}, \dfrac{c}{2}\right)$. Temos que o comprimento da hipotenusa é

$$\mathrm{d}(B, C) = \sqrt{b^2 + c^2}$$

e o comprimento da mediana é

$$\mathrm{d}(A, M) = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$$

O que prova a afirmação feita.

Outra situação que pode ser analisado com o auxílio de coordenadas é a seguinte: Dados os pontos A e B no plano, determinar o conjunto dos pontos X tais que $\mathrm{d}(X, A) = \mathrm{d}(X, B)$.

Para resolver este problema, iremos considerar um sistema de coordenadas no qual o eixo OX contém o segmento AB e a origem O é o ponto médio desse segmento. Assim, as coordenadas dos pontos dados são $A = (-a, 0)$ e $B = (a, 0)$, com $A > 0$. O ponto $X = (x, y)$ é equidistante de A e B se, e somente se, $\mathrm{d}(X, A)^2 = \mathrm{d}(X, B)^2$, isto é

$$(x+a)^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2 \Rightarrow 2ax = -2ax$$

Como temos $a > 0$, então $x = 0$.

Portanto, os pontos do plano que estão equidistantes dos pontos A e B, são os pontos pertencentes ao eixo OY no sistema que escolhemos. Como esse eixo é perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto médio, podemos concluir que os pontos equidistantes de A e B são os pontos pertencentes a sua mediatriz.

Exemplo 1.2.6. *Dado um triângulo ABC, vamos provar que as três alturas desse triângulo se encontram no mesmo ponto.*

Tomamos no plano o sistema de coordenadas no qual o eixo OX contém o lado AB e o eixo OY contém a altura baixada do vértice C sobre esse lado. Neste sistema, as coordenadas dos vértices A, B e C são $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$, onde $c \neq 0$. A altura baixada do ponto B encontra o eixo OY no ponto $P = (0, y)$. Os segmentos BP e AC são perpendiculares. Utilizamos da condição de perpendicularismo, temos

$$(a-0)(b-0) + (0-c)(0-y) = 0 \Rightarrow ab + cy = 0$$

Por sua vez, a altura baixada do ponto A encontra o eixo OY no ponto $Q = (0, z)$. Novamente os segmentos AQ e BC são perpendiculares e utilizando a mesma relação obtemos

$$(b-0)(a-0) + (0-c)(0-z) = 0 \Rightarrow ab + cz = 0$$

Vemos então que,

$$z = y = \frac{-ab}{c}$$

Portanto,

$$P = Q = \left(0, \frac{-ab}{c}\right)$$

é o ponto de encontro das três altura do triângulo ABC.

Exemplo 1.2.7. *Dado um retângulo $ABCD$, no qual o lado AB é o dobro do lado BC. Qual o menor ângulo formado pelas suas diagonais AC e DB?*

Nesse exemplo, iremos admitir o ponto A como origem, ficando o ponto B sobre o eixo OX e o ponto D sobre o eixo OY, assim teremos as coordenadas $A = (0, 0)$, $B = (2a, 0)$, $C = (2a, a)$ e $D = (0, a)$. Com essas coordenadas, podemos utilizar a fórmula:

$$\cos\theta = \frac{(a'-a)(c'-c) + (b'-b)(d'-d)}{\sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2} \cdot \sqrt{(c'-c)^2 + (d'-d)^2}}$$

já vista nesse trabalho, ficando:

$$\cos\theta = \frac{(2a-0)(2a-0) + (a-0)(0-a)}{\sqrt{(2a)^2 + a^2} \cdot \sqrt{(2a)^2 + (-a)^2}} = \frac{3a^2}{5a^2} = \frac{3}{5}$$

logo $\theta \approx 53°7'48''$

As equações da reta

Uma vez escolhido um sistema de coordenadas no plano, as curvas nesse plano passam a ser representados por equações. Chama-se equação de uma curva C a uma igualdade envolvendo as variáveis x, y a qual é satisfeita se, e somente se, o ponto $P = (x, y)$ pertence à curva C.
Há três tipos principais de equações que definem retas no plano.

A) A equação: $y = ax + b$
Dado o ponto $P = (x, y)$ no plano, tem-se $y = ax + b$ se, e somente se, P pertence à reta r que tem coeficiente angular a e corta o eixo OY no ponto $(0, b)$, de ordenada b. Esse tipo de equação só pode ser usada para representar retas que não são paralelas ao eixo OY, ou seja, retas não verticais.
Lembramos ainda que a inclinação de uma reta não vertical r é o número

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois ponto pertencentes a r com abscissas distintas $(x_1 \neq x_2)$. Este número a será o mesmo independente dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) que se utilize, pois ele é tangente trigonométrica do ângulo a que o eixo OX forma com a reta r.

Ao representar r pela equação $y = ax + b$ estamos dizendo que r é o conjunto de pontos $P = (x, y)$ tais que $y = ax + b$.

Por simplicidade, escrevemos "a reta $y = ax + b$" em vez de "A reta representada pela equação $y = ax + b$". A intersecção das retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ é o ponto $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem o sistema

$$\begin{cases} -ax + y = b \\ -a'x + y = b' \end{cases}$$

As retas dadas são paralelas quando não existe um ponto $P = (x, y)$ comum a ambas, ou seja, quando o sistema acima não possui solução. Este sistema é equivalente a

$$\begin{cases} -ax + y = b \\ -a'x + ax + b = b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ax + b \\ (a - a')x = b' - b \end{cases}$$

o qual não tem solução se, e somente se, $a = a'$ e $b \neq b'$.

Portanto, as retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ são paralelas se, e somente se, possuem a mesma inclinação a e comum o eixo OY em pontos distintos de ordenadas $b \neq b'$.

A equação $y = ax + b$ põe em evidência a ordenada b do ponto em que a reta corta o eixo OY, ou seja, do ponto da reta que tem abscissa zero. Às vezes a informação que dispomos diz respeito à outra abscissa x_1, neste caso, a equação da reta se escreverá mais rapidamente se não nos preocuparmos em calcular explicitamente o valor de b.

Por exemplo, a equação da reta que tem inclinação a e passa pelo ponto $P = (x_1, y_1)$ é

$$y = y_1 + a(x - x_1)$$

Esta equação tem um significado intuitivo bastante interessante: partindo do ponto de abscissa x_1 e ordenada y_1, obtemos um ponto (x, y) qualquer da reta somando à ordenada inicial y_1 o acréscimo $a(x - x_1)$.

Daí resulta imediatamente a equação da reta que passa pelos dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. Se $x_1 = x_2$, então $x = x_1$ $(x = x_2)$, logo a reta é vertical. Se $x_1 \neq x_2$, a reta PQ tem inclinação $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ logo sua equação é

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ou equivalentemente

$$y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

Os segundos membros dessas duas equações são iguais. Na primeira, estamos dizendo que a reta passa pelo ponto (x_1, y_1) com inclinação $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Na segunda, dizemos que a reta passa pelo ponto (x_2, y_2) com a mesma inclinação.

Agora vamos analisar quando $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ são perpendiculares. Isto equivale a perguntar quando as retas $y = ax$ e $y = a'x$, que passam pela origem, são perpendiculares, pois elas são paralelas às primeiras. Tomando os pontos $P = (1, a)$ e $Q = (1, a')$ sobre essas retas, a questão se resume a saber se os segmentos OP e OQ são perpendiculares. Como vimos anteriormente, isso ocorre se, e somente se, $a' = \dfrac{-1}{a}$.

Esta condição supõe que a e a' são diferentes de zero.

B) A equação: $ax + by = c$

Sempre que escrevemos a equação $ax + by = c$, estamos supondo $a^2 + b^2 \neq 0$, mesmo que isto não seja dito explicitamente.

O conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a equação $ax+by = c$ é uma reta. Com efeito, esta equação equivale a

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

quando $b \neq 0$ e $x = \dfrac{c}{a}$, temos $y = 0$.

Se as equações $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ definem a mesma reta então $a = a'$ e $b = b'$, por outro lado, para todo $k \neq 0$ as equações $ax + by = c$ e $kax + kby = kc$ definem a mesma reta, reciprocamente se as equações $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ definem a mesma reta, então existe um $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$.

As condições $a' = ka$ e $b' = kb$ equivalem a $\dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a}{b}$ *quando b e b' são diferentes de zero* e a $\dfrac{b'}{a'} = \dfrac{b}{a}$ *quando a e a' são diferentes de zero*. Logo podemos exprimí-las como $ab' = ba'$ ou $ab' - ba' = 0$.

Então podemos dizer que as retas $ax + by = c$ e $a'x + b'y = c'$ são concorrentes se, e somente se, $ab' - ba' \neq 0$.

Esta análise da posição relativa de duas retas com base nos coeficientes das equações que as definem, equivale ao estudo das soluções do sistema linear

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Podemos então dizer que este sistema possui uma única solução se, e somente se, $ab' - ba' \neq 0$, é indeterminado se, e somente se, para algum $k \neq 0$ tem-se $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$ e é impossível se, e somente se, $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' \neq kc$ para algum $k \neq 0$.

A reta definida pela equação $ax + by = c$ é perpendicular ao segmento de reta OA, onde $A = (a, b)$. Com efeito, considerando dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ sobre a reta, temos

$$ax_1 + by_1 = c \text{ e } ax_2 + by_2 = c$$

portanto

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

Esta igualdade significa que o segmento OA é perpendicular a PQ, portanto à reta $ax + by = c$, como vimos na Figura 1.13.

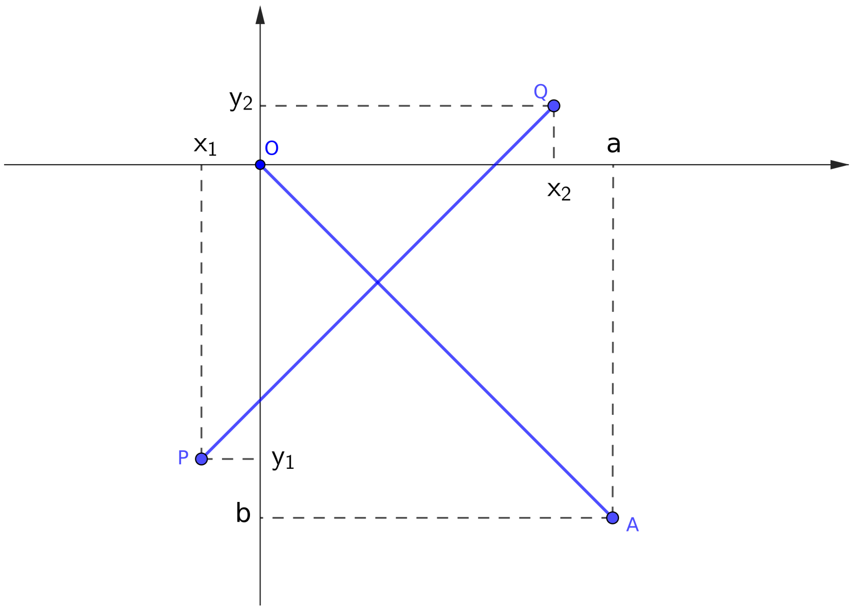

Figura 1.13: Gráfico com as retas perpendiculares OA e PQ

Mantendo a e b fixos e fazendo c variar, as diversas retas $ax + by = c$ assim obtidas são paralelas entre si, todas perpendiculares ao segmento OA, com $A = (a, b)$. Se, e somente se, $c = 0$, a reta $ax + by = 0$ passará pela origem.

Evidentemente, uma outra reta $a'x+b'y=c'$, com $A'=(a',b')$ será perpendicular à primeira se, e somente se, $OA \perp OA'$, isto é, $aa'+bb'=0$. Assim, $aa'+bb'=0$ é condição necessária e suficiente para que as retas $ax+by=c$ e $a'x+b'y=c'$ sejam perpendiculares.

C) Equação paramétrica:

Dados os pontos distintos $A=(a,b)$ e $C=(c,d)$, as equações.

$$\begin{cases} x=(1-t)a+tc=a+t(c-a) \\ y=(1-t)b+td=b+t(d-b) \end{cases}$$

onde t assume todos os valores reais, chamam-se as *equações paramétricas* da reta AC. Elas descrevem a trajetória do ponto (x,y), em função do parâmetro t, que pode ser pensado como o tempo. Para $t=0$ temos $(x,y)=(a,b)$. Para $t=1$, temos $(x,y)=(c,d)$. Se $a=c$ então x é constante e AC é vertical. Se $a \neq c$, então para todos os valores de t temos $t=\dfrac{x-a}{c-a}$, logo

$$y=b+\frac{d-b}{c-a}(x-a)$$

Portanto quando t assume todos os valores reais, o ponto (x,y) descreve realmente a reta que passa pelos pontos A e C.

Exemplo 1.2.8. *Dados $A=(0,1)$ e $B=(m,0)$, iremos determinar os pontos $P=(x,y)$ da reta AB situada a distância 1 da origem.*

As equações paramétricas da reta AB são:

$$\begin{cases} x=tm \\ y=1-t \end{cases}$$

Devemos determinar t de modo que se tenha $x^2+y^2=1$, ou seja,

$$t^2m^2+(1-t)^2=1 \Rightarrow t^2m^2+1-2t+t^2=1 \Rightarrow (m^2+1)t^2-2t=0$$

logo os valores de t procurados são $t=0$ e $t=\dfrac{2}{1+m^2}$. No primeiro caso, obtemos o ponto $(x,y)=(0,1)=A$, o que era obviamente esperado. O segundo valor de t nos dá

$$x=\frac{2m}{1+m^2} \text{ e } y=\frac{m^2-1}{m^2+1}.$$

Portanto o ponto

$$(\frac{2m}{1+m^2},\frac{m^2-1}{m^2+1})$$

é o único outro ponto além de A que está sobre a reta AB e sua distância à origem O é igual a um.

2 Desenvolvimento de Questões

Nesse capítulo trazemos um compilado de questões acompanhadas de uma sugestão de resposta obtida com a aplicação de ferramentas abordadas no capítulo anterior, para que possa se ter uma melhor compreensão de sua aplicabilidade.

Questão 01 - ENEM 2024

Uma microempresa pretende fabricar pipas para vender no próximo verão. Um modelo de pipa está representado pelo quadrilátero $ABCD$ na Figura 2.1.

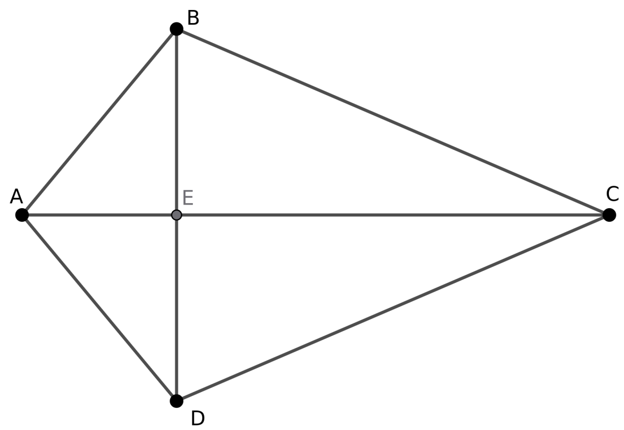

Figura 2.1: Modelo da pipa desenvolvida pela microempresa

Nessa representação, os segmentos AB, BC e CE medem, respectivamente, 20cm, 34cm e 30cm. Além disso, E pertence ao segmento AC e é ponto médio do segmento BD.

Qual a medida da área, em centímetros quadrado, desse modelo de pipa?

Resposta: Para calcular a área dessa figura, precisamos descobrir a medida das duas diagonais, para isso, utilizaremos um plano cartesiano com origem no ponto E, como representado na figura abaixo.

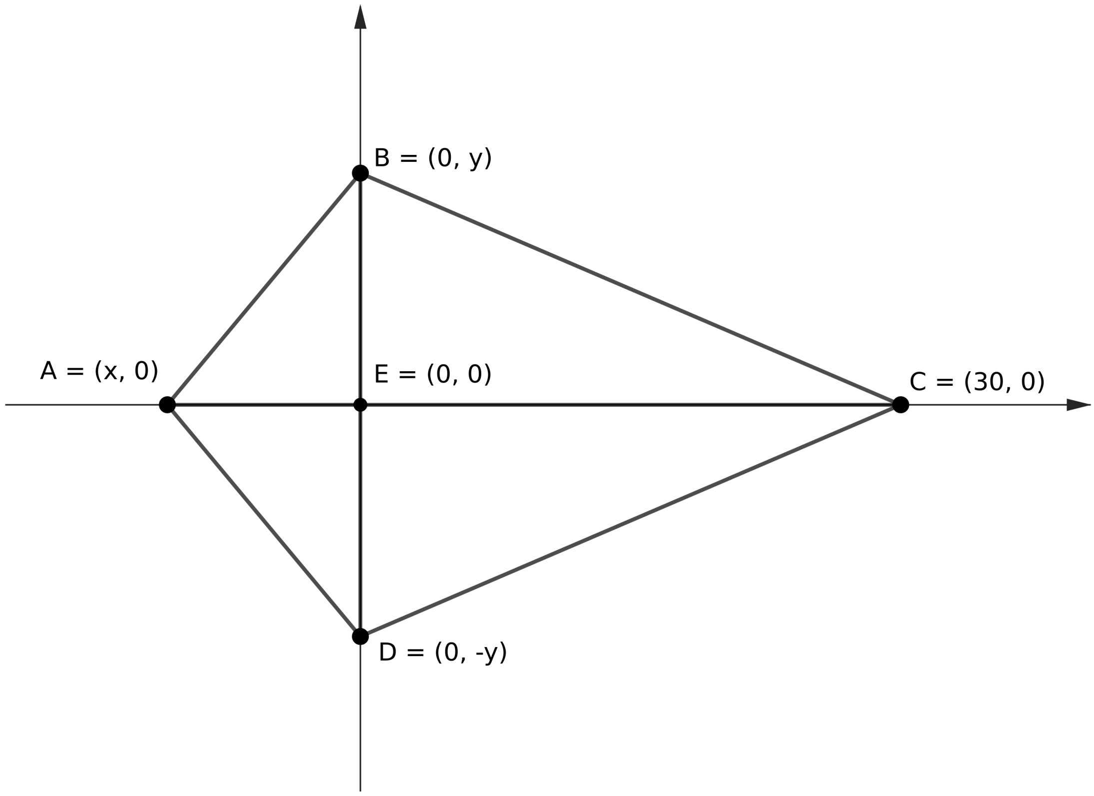

Figura 2.2: Desenho da pipa no plano cartesiano

Ficando os pontos representados da seguinte forma $A = (x, 0)$, $B = (0, y)$, $C = (30, 0)$, $D = (0, -y)$ e $E = (0, 0)$, assim como sabemos que $\mathrm{d}(A, B) = 20$ e $\mathrm{d}(B, C) = 34$, portanto

$$\mathrm{d}(B, C) = \sqrt{(30-0)^2 + (0-y)^2}$$

Substituindo $\mathrm{d}(B, C) = 34$, obtemos a seguinte equação

$$\sqrt{900 + y^2} = 34 \Rightarrow y = 16$$

chegando assim ao valor da $\mathrm{d}(B, E) = 16$. Como E é o ponto médio do segmento BD, temos $\mathrm{d}(B, D) = 32$, agora precisamos encontrar o valor de x para saber a medida do segmento AE, para isso utilizaremos a medida da $\mathrm{d}(A, B)$, assim

$$\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(0-x)^2 + (16-0)^2}$$

Substituindo $\mathrm{d}(A, B) = 20$, temos

$$\sqrt{x^2 + 256} = 20 \Rightarrow x = 12$$

Portanto a medida do segmento AC é igual a 42.

Agora que conseguimos calcular o valor da medida das duas diagonais, podemos facilmente calcular a área da pipa utilizando conhecimentos prévios sobre figuras planas, da seguinte maneira

$$\frac{\mathrm{d}(A,C)\cdot \mathrm{d}(B,D)}{2} = \frac{42\cdot 32}{2} = 672\mathrm{cm}^2$$

Nesta questão, o estudante deve representar a figura de uma pipa no plano cartesiano, identificando as coordenadas de seus vértices e utilizando as diagonais para calcular sua área. O trabalho com cálculo de áreas, já previsto no Ensino Fundamental pela habilidade **EF06MA20**, é aprofundado no Ensino Médio pela habilidade **EM13MAT301**, que exige a resolução de problemas geométricos envolvendo propriedades de figuras planas. A representação dos vértices no plano cartesiano mobiliza a habilidade **EF07MA15**, reforçada pela habilidade **EM13MAT102**, que trata da interpretação de localização e deslocamento em diferentes representações. Assim, o exercício articula conhecimentos fundamentais com sua aplicação em contexto algébrico e geométrico mais formal.

Questão 02 - ENEM 2019

A unidade de medida utilizada para anunciar o tamanho das telas de televisores no Brasil é a polegada, que corresponde a $2,54$cm. Diferentemente do que muitos imaginam, dizer que a tela de uma TV tem X polegadas significa que a diagonal do retângulo que representa sua tela mede X polegadas, conforme ilustração.

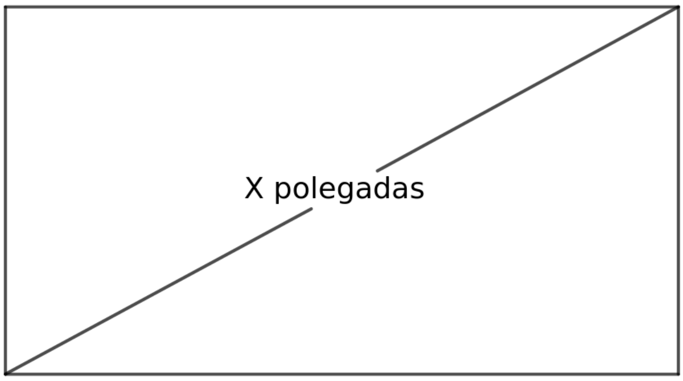

Figura 2.3: TV de X polegadas

O administrador de um museu recebeu uma TV convencional de 20 polegadas, que tem como razão do comprimento (C) pela altura (A) a proporção $4:3$, e precisa calcular o comprimento (C) dessa TV a fim de colocà-la em uma estante para exposição. A tela dessa TV tem medida do comprimento C, em centimentro, igual a

Resposta: Para resolver essa questão, iremos posicionar a TV no primeiro quadrante do plano cartesiano, ficando um dos cantos inferiores na origem, da seguinte maneira

Identificando $A=(0,0)$ e $B=(x,y)$, com $\mathrm{d}(A,B)=20$ polegadas, e sabendo que $\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$, podemos encontrar a medida do comprimento C que corresponde ao valor de x do ponto B.

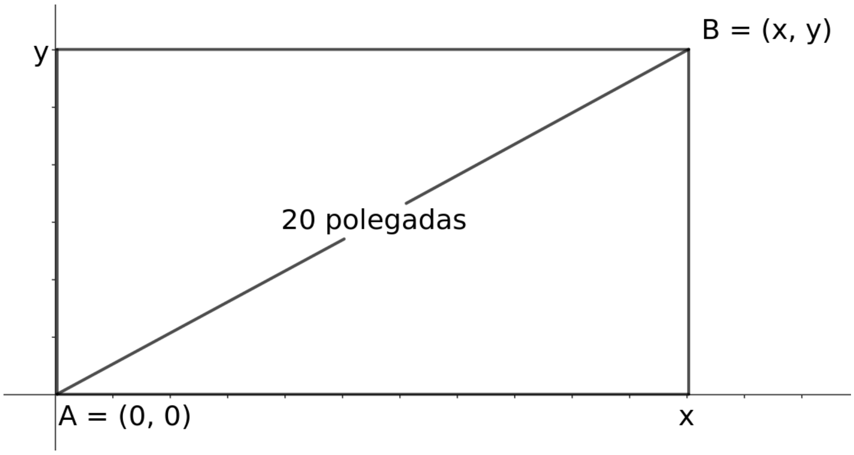

Figura 2.4: TV de 20 polegadas no plano cartesiano

Com a afirmação de $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, podemos concluir que $y = \frac{3x}{4}$, portanto podemos representar o ponto $B = \left(x, \frac{3x}{4}\right)$. Sabendo que 20 polegadas corresponde a $50,8$cm, utilizaremos a distância do ponto A ao ponto B para encontrar o valor de x.

$$\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{3x}{4} - 0\right)^2}$$

substituindo o valor de $\mathrm{d}(A, B) = 50,8$, temos

$$\sqrt{x^2 + \frac{9x}{16}^2} = 50,8 \quad \Rightarrow \quad x = 40,64$$

Logo, o comprimento C da TV é de $40,64$cm

O problema envolve calcular as dimensões de uma TV a partir de sua diagonal em polegadas, considerando a proporção 4:3 entre altura e comprimento. A resolução exige a conversão de unidades e a aplicação do Teorema de Pitágoras, integrando noções de proporção e relações métricas. No Ensino Fundamental, isso se relaciona à habilidade **EF07MA18**, que trata da aplicação de razões e proporções, e à habilidade **EF08MA16**, referente ao uso do Teorema de Pitágoras. Já no Ensino Médio, aparecem as habilidades **EM13MAT302**, que aborda relações métricas em triângulos em diferentes contextos, e **EM13MAT103**, que enfatiza a resolução de problemas práticos com grandezas e medidas. Dessa forma, a questão conecta um contexto cotidiano com conceitos matemáticos estruturantes.

Questão 03 - FGV 2025

A figura abaixo mostra uma linha poligonal na qual todos os ângulos são retos. A partir do ponto A, os comprimentos dos segmentos consecutivos são: $16m$, $12m$, 9m, 5m e 4m.

A distância em metros entre os pontos A e B é de, aproximadamente:

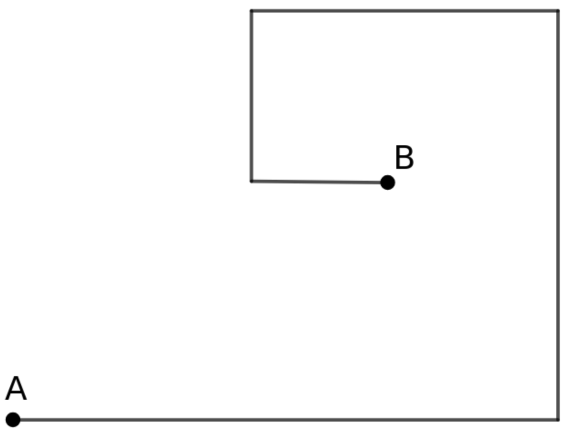

Figura 2.5: Esboço da linha poligonal

Resposta: Para responder essa questão iremos fixar um plano cartesiano com origem no ponto A, assim poderemos saber a coordenada de cada ponto, incluindo o do ponto B, para que possamos assim calcular a sua distância até o ponto A, ficando da seguinte maneira

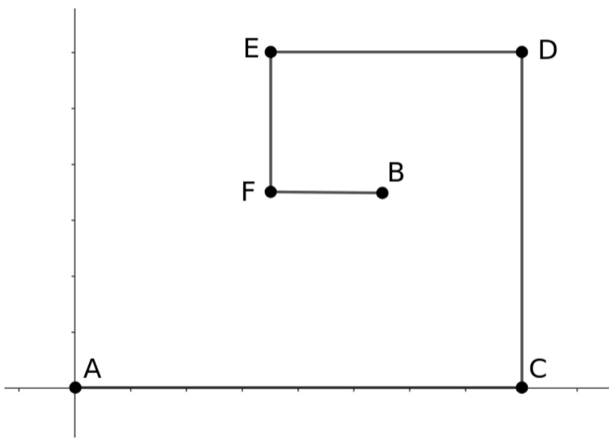

Figura 2.6: Linha poligonal no plano cartesiano com a representação dos pontos C, D, E e F

Assim seguimos o seguintes passos:

1. Iniciando com o ponto $A = (0, 0)$ e seguindo 16 unidades sobre a abscissa, chegamos no ponto $C = (16, 0)$.

2. Saindo do ponto $C = (16, 0)$ e subindo 12 unidades paralelo ao eixo da ordenada, chegamos ao ponto $D = (16, 12)$.

3. Saindo do ponto $D = (16, 12)$ e voltando 9 unidades paralelo ao eixo da abscissa, chegamos ao ponto $E = (7, 12)$.

4. Saindo do ponto $E = (7, 12)$ e diminuindo 5 unidades paralelo ao eixo da ordenada, chegamos ao ponto $F = (7, 7)$.

5. Saindo do ponto $F = (7, 7)$ e seguindo 4 unidades paralelo ao eixo da abcissa, chegamos no ponto $B = (11, 7)$

Assim obtermos os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (11, 7)$, agora basta calcular a distância entre eles.

$$\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(11 - 0)^2 + (7 - 0)^2} \Rightarrow \mathrm{d}(A, B) \approx 13$$

Portanto concluimos que a distância aproximada de A para B é de 13m.

Nesta atividade, o aluno deve interpretar uma sequência de deslocamentos que formam uma linha poligonal, representando-a no plano cartesiano e determinando as coordenadas dos pontos intermediários até calcular a distância final entre os pontos A e B. A localização de pontos e a representação de deslocamentos mobilizam a habilidade **EF07MA15**, enquanto a aplicação da fórmula da distância deriva do Teorema de Pitágoras, contemplado na habilidade **EF08MA16**. No Ensino Médio, destacam-se as habilidades **EM13MAT303**, que envolve o cálculo de distâncias no plano cartesiano, **EM13MAT301**, pela análise das propriedades geométricas da poligonal, e **EM13MAT102**, que exige a tradução de deslocamentos em sistemas de representação. Assim, a questão promove a articulação entre geometria, álgebra e representação espacial.

Questão 04

Determinar a equação ou descrição do lugar geométrico equidistantes aos pontos A e B.

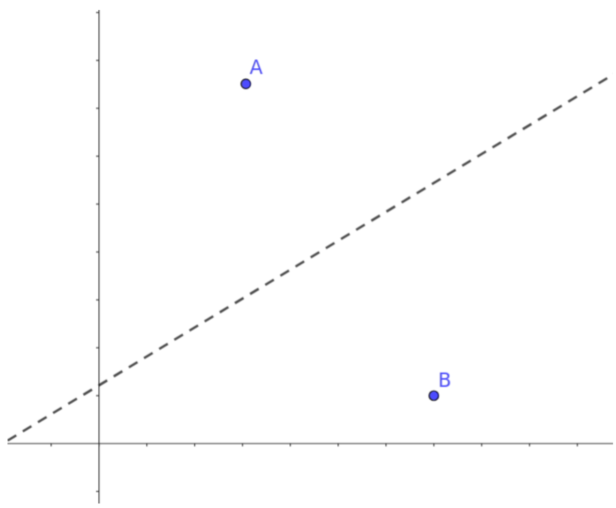

Figura 2.7: Lugar geométrico equidistante aos pontos A e B

Resposta: Para calcular a equação ou descrição do lugar dos pontos equidistantes a quaisquer dois pontos, podemos utilizar a fórmula de distância entre dois pontos obtida no capitulo anterior. Para isso, admita que $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e o ponto equidistante de A e B como $C = (x, y)$, Assim, temos:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

chegando assim a equação

$$y = \frac{x \cdot (x_2 - x_1) + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{y_1 - y_2}$$

Portanto a equação da reta que descreve o lugar geométrico equidistante aos pontos A e B é

$$y = \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2} \cdot x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{y_1 - y_2}$$

com $b \neq d$

O objetivo é determinar a equação da mediatriz entre dois pontos, entendida como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e B. Esse conceito já é explorado no Ensino Fundamental pela habilidade **EF08MA17**, que aborda a construção de mediatrizes, e pela **EF09MA14**, que relaciona equações algébricas a propriedades geométricas. No Ensino Médio, a questão corresponde à habilidade **EM13MAT305**, voltada para a aplicação de propriedades de lugares geométricos, e também à **EM13MAT301**, pela utilização de propriedades de figuras planas em problemas geométricos. Dessa forma, a atividade traduz uma propriedade clássica da geometria em linguagem algébrica, fortalecendo a conexão entre as duas áreas.

Questão 05

Determinar o centro $C = (x, y)$ da circunferência que passa pelos pontos $P_1 = (2, 8)$, $P_2 = (6, 1)$ e $P_3 = (11, 6)$.

Resposta: Sabemos que a distância de cada ponto até o centro é a mesma, logo

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 8)^2} = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 11)^2 + (y - 6)^2}$$

assim, conseguimos montar o seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 16y + 68 = x^2 + y^2 - 12x - 2y + 37 \\ x^2 + y^2 - 12x - 2y + 37 = x^2 + y^2 - 22x - 12y + 157 \end{cases}$$

Resolvendo ambas as equações e isolando o valor de x, temos

$$\begin{cases} x = \dfrac{14y - 31}{8} \\ x = 12 - y \end{cases}$$

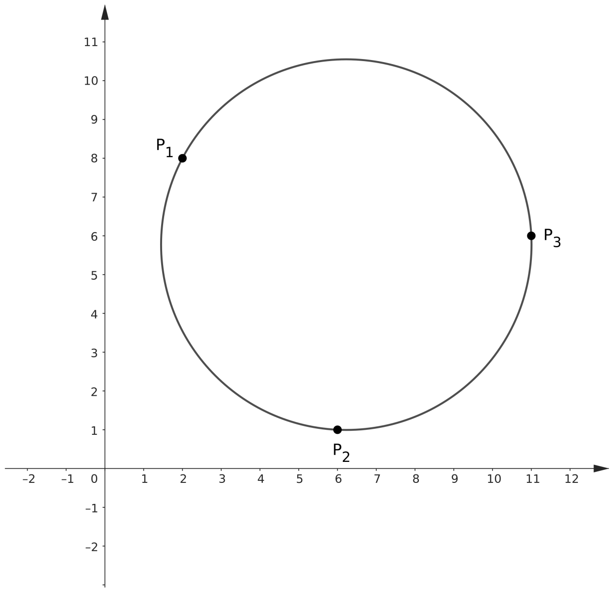

Figura 2.8: Representação da circunferência que passa pelos pontos P_1, P_2 e P_3

Terminado a resolução, concluimos que $C = \left(\dfrac{137}{22}, \dfrac{127}{22}\right)$.

Nesta questão, o estudante deve encontrar o centro de uma circunferência que passa por três pontos distintos, explorando a propriedade de equidistância do centro em relação a esses pontos. Tal propriedade pode ser abordada no Ensino Fundamental pelas habilidades **EF08MA17**, ligada à mediatriz, e **EF09MA14**, relacionada à representação algébrica de propriedades geométricas. No Ensino Médio, a habilidade **EM13MAT306** é diretamente contemplada, pois trata da determinação de equações de circunferências a partir de condições dadas, e a habilidade **EM13MAT305** também é mobilizada, pois envolve a aplicação de propriedades de lugares geométricos. Essa questão exemplifica a integração entre raciocínio geométrico e resolução algébrica.

Questão 06

Dados os pontos $A = (3, 8)$, $B = (6, 3)$, $C = (11, 6)$ e $D = (8, 11)$, determinar se eles pertencem a mesma circunferência.

Resposta: Iremos utlizar o Teorema de Ptolomeu para determinar se eles são cocíclicos. O Teorema de Ptolomeu diz que para os pontos serem cocíclicos o produto das diagonais é igual a soma do produto dos lados opostos do quadrilátero formado pelos quatro pontos, ou seja:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Substituindo os valores, temos:

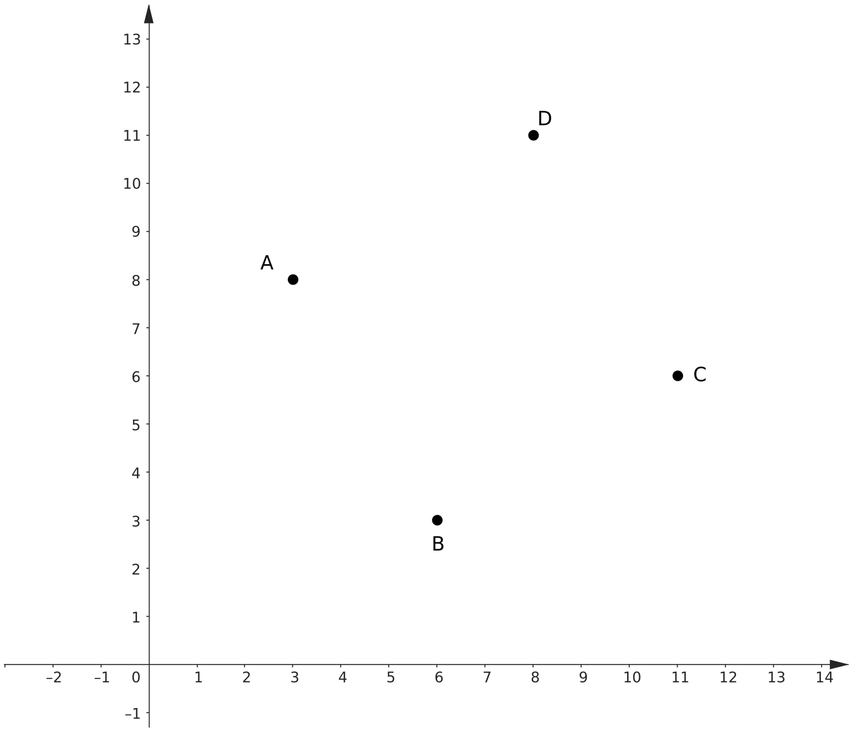

Figura 2.9: Representação dos pontos A, B, C e D

$$\sqrt{(11-3)^2+(6-8)^2}\cdot\sqrt{(8-6)^2+(11-3)^2} = \sqrt{(6-3)^2+(3-8)^2}\cdot$$
$$\sqrt{(8-11)^2+(11-6)^2}+\sqrt{(8-3)^2+(11-8)^2}\cdot\sqrt{(11-6)^2+(6-3)^2}$$

Assim,

$$\sqrt{68}\cdot\sqrt{68} = \sqrt{34}\cdot\sqrt{34}+\sqrt{34}\cdot\sqrt{34}$$

Portanto os pontos A, B, C e D são pontos cocíclicos, e, do mesmo jeito da questão anterior, podemos encontrar as coordenadas do centro dessa circunferência.

O exercício propõe verificar se quatro pontos pertencem a uma mesma circunferência, utilizando o Teorema de Ptolomeu como critério. No Ensino Fundamental, as habilidades **EF09MA13**, que envolve propriedades de quadriláteros e circunferências, e **EF09MA14**, que relaciona equações e propriedades geométricas, são contempladas. No Ensino Médio, a questão está diretamente ligada à habilidade **EM13MAT308**, que prevê a investigação e demonstração de propriedades geométricas em quadriláteros e circunferências, além de se relacionar à habilidade **EM13MAT301**, pela análise de propriedades geométricas no plano. A questão valoriza o raciocínio dedutivo e a aplicação de um teorema clássico em contexto de resolução de problemas.

Questão 07

Determinar se os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_c, y_c)$ são colineares.

Resposta: Os pontos A, B e C são colineares quando o seguinte determinante é igual a zero

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Assim, temos:

$$x_A \cdot (y_B - y_c) + x_B \cdot (y_C - y_A) + x_c \cdot (y_A - y_B) = 0$$

Agora que sabemos como verificar se os pontos são colineares, podemos realizar a análise dos seguintes pontos $A = (3, 4)$, $B = (5, 10)$ e $C = (6, 13)$, para saber se eles são colineares. Substituindo na equação obtida anteriormente, temos:

$$3 \cdot (10 - 13) + 5 \cdot (13 - 4) + 6 \cdot (4 - 10) = 0$$
$$-9 + 45 - 36 = 0$$

Portanto os pontos A, B e C são colineares. Já analisando os pontos $D = (2, 6)$, $E = (3, 8)$ e $F = (5, 9)$, temos:

$$2 \cdot (8 - 9) + 3 \cdot (9 - 6) + 5 \cdot (6 - 8) = 0$$
$$-2 + 9 - 10 = 0 \Rightarrow -3 = 0$$

Logo podemos afirmar que os pontos D, E e F não são colineares.

O problema consiste em verificar a colinearidade de três pontos utilizando o critério determinantal, traduzindo uma condição geométrica em uma relação algébrica. Essa articulação é prevista no Ensino Fundamental pela habilidade **EF09MA14**, que trata da relação entre expressões algébricas e propriedades geométricas no plano cartesiano. No Ensino Médio, a habilidade **EM13MAT309** é a principal, pois aborda a utilização de representações algébricas, como determinantes, para verificar condições de alinhamento, enquanto a habilidade **EM13MAT301** também é contemplada, por relacionar propriedades geométricas de figuras planas com representações algébricas. Assim, a questão ilustra a integração entre álgebra e geometria, desenvolvendo a capacidade de abstração do estudante.

3 Sequência Didática

A sequência didática surge como ferramenta essencial no planejamento do professor, pois permite estruturar o ensino de maneira progressiva, conectada e intencional. Com base em teorias construtivistas, como as de Piaget e Vygotsky, parte-se do princípio de que o saber não é simplesmente transmitido, mas ativamente construído pelo indivíduo ao interagir com o ambiente e outros (PIAGET, 1999; VYGOTSKY, 1991).

Segundo Dolz e Schneuwly (2004), a sequência didática é um conjunto de atividades organizadas de forma pedagógica, guiadas por objetivos claros e interligadas, visando o aprendizado de certos conteúdos ou habilidades. Essa organização evita que o ensino se torne fragmentado, garantindo coerência e continuidade ao trabalho em sala de aula. Para eles, é um meio de garantir que as práticas escolares sejam planejadas e tenham um propósito, permitindo que os alunos entendam a importância de cada fase no seu aprendizado.

Um ponto importante é o respeito ao ritmo de aprendizado dos alunos. Ao planejar usando sequências didáticas, o professor possibilita que o aluno avance aos poucos, firmando conhecimentos básicos antes de chegar a níveis mais complexos. Isso se relaciona com a ideia de zona de desenvolvimento proximal, de Vygotsky (1991), que diz que o aprendizado é mais eficaz quando o aluno é desafiado a fazer tarefas um pouco além do que já sabe, mas com apoio adequado.

Além disso, a sequência didática facilita a avaliação contínua e formativa, permitindo ao professor acompanhar o progresso dos alunos durante todo o processo, identificando seus pontos fortes e dificuldades e ajudando quando necessário. Essa característica reforça a ideia de que a avaliação faz parte do ensino e não é apenas um teste no final.

Por fim, destaca-se que o uso de sequências didáticas promove um aprendizado mais significativo. Como defende Ausubel (2003), o aprendizado significativo acontece quando o novo conhecimento se liga de forma importante e lógica ao que o aluno já sabe. Ao organizar o ensino em etapas conectadas, o professor aumenta essas conexões, ajudando o aluno a entender o que aprende.

Conclui-se, assim, que a sequência didática tem um papel fundamental no planejamento do professor, pois garante que o ensino seja lógico e pedagógico, ajuda no desenvolvimento gradual das habilidades dos alunos e fortalece a avaliação como parte do processo. Com base em teorias educacionais sólidas, é uma ferramenta essencial para promover um aprendizado que dure e faça sentido.

A estrutura de uma sequência didática é composta das seguintes partes:

- **Motivação Inicial** é onde o professor busca despertar o interesse dos alunos pelo tema e ao mesmo tempo investigar seus conhecimentos prévios, ou seja, o que já sabem e o que pensam sobre o assunto.

- **Objetivos** expressam o que se espera que o aluno aprenda ou desenvolva ao longo da sequência. Devem ser claros, mensuráveis e alinhados às competências e habilidades previstas no currículo.

- **Conteúdos** são os saberes que serão trabalhados, podendo ser conceituais, procedimentais ou atitudinais.

- **Desenvolvimento** é o coração da sequencia didática, ele consiste em um conjunto de atividades articuladas, que se encadeiam com crescente grau de complexidade, conduzindo o aluno dos conhecimentos prévios aos conhecimentos novos.

- **Sistematização** é o momento para organizar e consolidar o que foi aprendido, revisitando conceitos, elaborando esquemas, mapas mentais ou realizando sínteses coletivas, também pode ser o espaço para responder dúvidas e amarrar ideias que ficaram soltas ao longo do desenvolvimento.

- **Avaliação** deve ocorrer ao longo de toda a sequência (avaliação formativa), mas pode haver momentos específicos para diagnosticar o que foi aprendido (avaliação somativa). Ela pode incluir observações, produções dos alunos, listas de exercícios, autoavaliação ou outras estratégias.

- **Culminância** é o fechamento da sequência, que pode ser marcado por uma atividade final em que os alunos mostrem o que aprenderam.

- **Recursos Didáticos** são os materiais, ferramentas e instrumentos que o professor e os alunos vão utilizar ao longo da sequência.

- **Tempo Estimado** indica quanto tempo será necessário para cada etapa ou para toda a sequência. Pode ser em horas-aula ou dias/semana.

Uma sequência didática é muito mais do que um conjunto solto de atividades: é um roteiro estruturado que garante intencionalidade, continuidade e aprofundamento das aprendizagens. Baseado em tudo que vimos até o momento, aprensetaremos a seguir uma sequência didática para abordagem do tema dessa dissertação.

Motivação Inicial

Com a presente sequência didática buscamos promover a integração de conceitos de geometria analítica com situações-problema que possibilitam o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de modelagem matemática dos estudantes, fundamentado em teorias construtivistas, conforme Piaget (1999) e Vygotsky (1991), nas quais a aprendizagem ocorre pela ação do sujeito sobre o objeto de conhecimento, mediada por interações sociais e culturais. Nesse contexto, a sequência didática organiza o ensino em etapas inter-relacionadas, respeitando o ritmo do aluno e favorecendo a construção significativa do saber, como defende Ausubel (2003).

Objetivos

Geral

- Promover a compreensão do sistema de coordenadas cartesianas no plano, possibilitando sua aplicação em problemas geométricos contextualizados.

Específicos

- Representar pontos, segmentos e formas geométricas planas no sistema cartesiano.
- Calcular distâncias, pontos médios e verificar condições de perpendicularidade utilizando coordenadas.
- Determinar equações de retas e circunferências a partir de dados geométricos.
- Resolver problemas práticos que envolvam conceitos de geometria analítica.

Conteúdos

- Sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.
- Distância entre dois pontos no plano.
- Ponto médio e divisão de segmentos em razão.
- Condição de perpendicularidade entre segmentos.
- Equações gerais, explícitas e paramétricas da reta.
- Lugar geométrico: mediatriz e circunferência definida por três pontos.
- Aplicações em problemas contextualizados (área de formas geométricas planas, dimensões de objetos, verificação de cocircularidade e colinearidade).

Desenvolvimento

O professor introduzirá o tema apresentando problemas práticos extraídos do capítulo anterior desse trabalho, como o cálculo da área de uma pipa posicionada em um sistema cartesiano, o dimensionamento de uma televisão a partir de sua diagonal e a análise de percursos em linhas poligonais. Essa etapa visa despertar o interesse dos estudantes, além de identificar seus conhecimentos prévios sobre o plano cartesiano e as operações nele realizadas.

Para a construção teórica serão retomados os conceitos fundamentais do plano cartesiano, destacando a representação de pontos por pares ordenados e a divisão do plano em quadrantes. Em seguida, trabalhar-se-á o cálculo de distâncias entre pontos, pontos médios, condições para perpendicularidade, além da dedução das equações das retas e circunferências a partir dos dados geométricos.

Durante esta etapa, o professor poderá utilizar recursos visuais, como esquemas no quadro e o software GeoGebra, para ilustrar exemplos similares aos desenvolvidos aqui.

Os alunos, organizados individualmente ou em duplas, resolverão problemas que reproduzem os exemplos do trabalho acadêmico, tais como:

- Determinar a área do modelo de pipa representado por um quadrilátero cujos vértices têm coordenadas conhecidas.
- Calcular o comprimento da tela de uma TV a partir da medida de sua diagonal e razão entre lados.
- Identificar a equação do lugar geométrico de pontos equidistantes de dois dados (mediatriz).
- Determinar o centro de uma circunferência que passa por três pontos.
- Verificar, por meio do teorema de Ptolomeu, se quatro pontos são cocíclicos.
- Analisar a colinearidade de três pontos via determinante.

Sistematização

Será construída coletivamente, no quadro, uma síntese dos principais conceitos trabalhados, incluindo fórmulas para distância, ponto médio, condição de perpendicularidade e equações da reta. Em seguida, os alunos elaborarão um esquema-resumo (mapa mental) com esses tópicos.

Avaliação

A avaliação ocorrerá de forma processual e formativa, observando a participação nas discussões, a resolução dos problemas e a capacidade argumentativa ao justificar os procedimentos utilizados. Ao final, será proposto um exercício integrador no qual o aluno deverá escolher um dos problemas resolvidos e elaborar um texto explicativo detalhado do processo, as fórmulas aplicadas e a interpretação geométrica dos resultados.

Culminância

Para finalizar a sequência pode ser realizada algumas atividades como:

- **Atividade Final Integrada**
  Propor uma atividade-projeto, em que os alunos precisam aplicar todos os conceitos estudados ao longo da sequência para resolver um problema mais amplo ou elaborar uma produção final.
  Exemplo para esse conteúdo: Pedir que em grupos os alunos elaborem e apresentem um pequeno "portfólio geométrico", contendo:

  - Um problema proposto por eles próprios envolvendo o uso de coordenadas (pode ser a construção de uma figura, cálculo de áreas, distâncias ou mediatrizes).
  - O desenho no plano cartesiano feito à mão ou com o auxílio do GeoGebra.
  - A resolução completa, destacando as fórmulas usadas.
  - Uma reflexão sobre o porquê a geometria analítica é útil nesse contexto.

  Essa atividade promove a mobilização de todos os conhecimentos trabalhados e exige que eles articulem teoria e prática.

- **Momento de Socialização**
  Realizar uma exposição oral ou em formato de seminário, onde cada grupo apresenta seu trabalho à turma.
  Durante as apresentações:

  - Incentivar que todos argumentem e justifiquem seus procedimentos.
  - Deixar espaço para perguntas e comentários dos colegas, promovendo um diálogo crítico.

- **Reflexão Coletiva**
  Após as apresentações, conduzir uma roda de conversa orientada, com perguntas como:

- O que foi mais desafiador na resolução desses problemas?
- Como vocês percebem a importância de representar figuras e situações em um sistema de coordenadas?
- O que aprenderam de mais significativo nesta sequência?
- Como poderiam usar esse tipo de raciocínio em situações fora da sala de aula?

Isso ajuda a fazer uma avaliação qualitativa do processo, onde o professor observa o nível de compreensão, a evolução das estratégias e as percepções dos alunos.

- **Instrumento de Auto Avaliação**
Distribuir uma ficha de autoavaliação, com questões como:
  - Eu participei ativamente das atividades propostas?
  - Eu compreendo como calcular distâncias, pontos médios e equações no plano cartesiano?
  - Eu consegui explicar minhas ideias para os colegas?
  - O que eu ainda tenho dificuldade e gostaria de estudar mais?

  Isso permite ao professor obter dados para uma análise crítica do percurso e dos resultados.

Recursos Didáticos

- Quadro e pincéis.
- Folhas quadriculadas e esquadros.
- Computador com projetor ou quadro digital para apresentação do GeoGebra.
- Fichas com problemas adaptados da dissertação.

Tempo Estimado

Motivação Inicial	Uma aula
Construção Teórica	Duas aulas
Atividades Orientadas	Duas aulas
Sistematização e Avaliação	Uma aula
Culminância	Duas aulas
Total	**Oito aulas**

A sequência didática proposta está fundamentada em referenciais teóricos que valorizam o ensino ativo e a aprendizagem significativa, como Piaget (1999), Vygotsky (1991) e Ausubel (2003). Busca-se garantir que o conhecimento matemático não seja apenas memorizado, mas construído pelo aluno a partir da investigação e resolução de situações-problema contextualizadas. Dessa forma, favorece-se não apenas o domínio técnico da geometria analítica, mas também o desenvolvimento do raciocínio lógico, crítico e criativo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação teve como objetivo central ilustrar a importância e a aplicabilidade do uso das coordenadas no plano cartesiano como ferramenta didática para a resolução de problemas matemáticos no contexto do Ensino Básico. A partir de uma abordagem que integra fundamentos teóricos da Geometria Analítica com situações-problema contextualizadas, buscamos evidenciar como o ensino desse conteúdo pode ser potencializado por meio de estratégias significativas, envolvendo o raciocínio espacial, a visualização geométrica e a capacidade de modelagem matemática.

Os exemplos e questões selecionados, especialmente os extraídos de exames como o ENEM, mostraram-se eficazes em ilustrar a utilidade do sistema de coordenadas para resolver problemas que vão além da mera aplicação mecânica de fórmulas. Eles revelaram como esse conhecimento pode ser utilizado para interpretar e representar diferentes situações do cotidiano e da ciência, promovendo assim uma aprendizagem mais significativa e conectada à realidade dos estudantes.

A sequência didática elaborada neste trabalho, fundamentada nas teorias de aprendizagem de Piaget, Vygotsky e Ausubel, bem como nos estudos de Dolz e Schneuwly (2004), reforça a ideia de que o ensino estruturado, progressivo e com intencionalidade pedagógica é essencial para o desenvolvimento das competências matemáticas. Essa proposta permitiu não apenas a sistematização dos conteúdos, mas também a avaliação contínua e formativa dos alunos, favorecendo a construção do conhecimento de forma colaborativa e reflexiva.

Dessa forma, conclui-se que a utilização de coordenadas no plano cartesiano, associada a metodologias ativas e contextualizadas, representa uma estratégia eficaz para o ensino de Matemática. Além disso, reforça-se a importância do planejamento por meio de sequências didáticas bem estruturadas, que respeitem o ritmo de aprendizagem dos alunos e promovam a integração entre teoria e prática. Espera-se que este trabalho contribua com professores da educação básica na busca por práticas pedagógicas mais eficientes, dinâmicas e significativas.

Referências Bibliográficas

[1] AUSUBEL, David P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa, Plátano, 2003.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC, 2018.

[3] DOLZ, Joaquim; SCHNEUWLY, Bernard. **Gêneros orais e escritos na escola**. Campinas, Mercado de Letras, 2004.

[4] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado, **A Matemática do Ensino Médio - Volume 1**, 9^a Ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

[5] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado, **A Matemática do Ensino Médio - Volume 3**, 6^a Ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

[6] E. L. Lima, **Coordenadas no Plano**, 4^a Ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2007.

[7] PIAGET, Jean. **A psicologia da criança**. Rio de Janeiro, Bertrand Brasil, 1999.

[8] ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de história da matemática** Rio de Janeiro: UFRJ, 2012.

[9] VYGOTSKY, Lev S. **A formação social da mente**. São Paulo, Martins Fontes, 1991.