UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LEONARDO WROBEL

O ENSINO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA LÚDICA E TECNOLÓGICA

PONTA GROSSA
2025

LEONARDO WROBEL

O ENSINO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA LÚDICA E TECNOLÓGICA

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Matemática na Universidade Estadual de Ponta Grossa. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Scheila Valechenski Biehl
Coorientador: Prof.º Dr. José Trobia

PONTA GROSSA
2025

Wrobel, Leonardo

W957 O ensino das funções seno e cosseno por meio de uma sequência didática lúdica e tecnológica / Leonardo Wrobel. Ponta Grossa, 2025.

71 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Profa. Dra. Scheila Valechenski Biehl.

Coorientador: Prof. Dr. José Trobia.

1. Funções trigonométricas. 2. Sequência didática. 3. Jogos matemáticos. 4. Recursos digitais. I. Biehl, Scheila Valechenski. II. Trobia, José. III. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Matemática. IV.T.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Vera Lucia Braga da Silva- CRB9/1026

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 - Ponta Grossa - PR - https://uepg.br

TERMO

TERMO DE APROVAÇÃO

LEONARDO WROBEL

"O ENSINO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA LÚDICA E TECNOLÓGICA"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 19 de agosto de 2025.

Membros da Banca:

Documento assinado digitalmente
gov.br SCHEILA VALECHENSKI BIEHL
Data: 22/10/2025 15:08:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Scheila Valechenski Biehl - (UEPG)
Presidente

Documento assinado digitalmente
gov.br MARCOS TEIXEIRA ALVES
Data: 22/10/2025 15:15:28-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Marcos Teixeira Alves - (UEPG)
Membro Interno

Documento assinado digitalmente
gov.br LUIZ OTAVIO RODRIGUES MENDES
Data: 22/10/2025 15:33:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Luiz Otavio Rodrigues Mendes - (UNESPAR)
Membro Externo

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder forças e sabedoria ao longo desta caminhada.

À minha orientadora, Professora Scheila Valechenski Biehl, pela orientação atenta e pelos conselhos valiosos. Sua dedicação e paciência foram fundamentais para a construção desta dissertação.

Ao meu coorientador, Professor José Trobia, pelas orientações dadas durante a realização do trabalho.

Aos professores e professoras do programa de pós-graduação (PROFMAT), pela contribuição na minha formação acadêmica e profissional.

À minha família, pelo amor incondicional, apoio constante e compreensão durante todos os momentos desse percurso.

Aos colegas e amigos que compartilharam essa jornada comigo, pelas conversas, incentivos e companheirismo. Em especial ao colega Natã Mainardes Fernandes, que esteve presente ao longo de todo o curso, acompanhando-me durante o trajeto até a universidade e nos momentos de estudos.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, o meu sincero muito obrigado.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo desenvolver e aplicar uma sequência didática voltada para o ensino de funções trigonométricas no Ensino Médio, bem como analisar as suas contribuições para o processo de ensino desse conteúdo e verificar sua efetividade na prática pedagógica. Essa sequência explora os conceitos de arcos, ciclo trigonométrico e as funções seno e cosseno, utilizando jogos matemáticos e recursos digitais para tornar o aprendizado mais dinâmico e significativo. Além disso, são propostas atividades com questões de vestibulares e do ENEM, promovendo a contextualização dos conteúdos. A sequência foi aplicada em uma turma do 4º ano do Ensino Médio do técnico noturno em administração, no município de Castro, no estado do Paraná. Os resultados obtidos a partir da aplicação da sequência didática indicam que a proposta contribuiu positivamente na compreensão dos conteúdos abordados em aulas mais dinâmicas, favorecendo o engajamento dos estudantes e promovendo uma aprendizagem mais contextualizada. A utilização da sequência foi bem recebida pela turma, que demonstrou entusiasmo com as atividades propostas. Dentre os aspectos positivos destacados pelos estudantes estão a concentração efetiva na realização das atividades, o estímulo gerado pela competitividade e a percepção dos estudantes de maior facilidade na compreensão dos conteúdos. Embora os alunos não tenham destacado pontos a serem melhorados, ressaltaram que as aulas desenvolvidas se mostraram mais atrativas e eficazes com relação às práticas convencionais.

Palavras-chave: Funções trigonométricas; Sequência didática; Jogos matemáticos; Recursos digitais.

ABSTRACT

This study aims to develop and implement a didactic sequence focused on teaching trigonometric functions in high school, to analyze its contributions to the teaching process, and to evaluate its effectiveness in pedagogical practice. The sequence explores the concepts of arcs, the trigonometric circle, and the sine and cosine functions, using math games and digital resources to make learning more dynamic and meaningful. In addiction, activities are proposed involving questions from the university entrance exam and questions from ENEM, promoting contextualization of the content. The sequence was applied to a fourth-year high school class in a night technical administration course in the city of Castro, in the state of Paraná, Brazil. The results obtained from the implementation of the didactic sequence indicate that the proposal positively contributed to the students' understanding of the content through more dynamic lessons, encouraging student engagement, and promoting more contextualized learning. The use of sequence was well received by the class, which showed enthusiasm for the proposed activities. Among the positive aspects highlighted by the students were effective focus during activities, motivation generated by competitiveness, and the perception of greater ease in understanding the content. Although the students did not point out the aspects that needed improvement, they emphasized that the lessons were more engaging and effective compared to conventional practices.

Keywords: Trigonometric functions; Didactic sequence; Mathematical games; Digital resources;

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SBMAC	Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
DEMAT	Departamento de Matemática e Estatística
UEPG	Universidade Estadual de Ponta Grossa
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
MEC	Ministério da Educação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A preocupação com a melhoria do ensino e aprendizagem de Matemática, especialmente na Educação Básica, é um tema recorrente na área educacional. A busca por métodos e estratégias de ensino mais aprofundados e alinhados com a Base Nacional Comum Curricular é essencial para orientar o aprimoramento do processo educativo.

Foi possível observar, a partir da experiência com turmas do 3º ano do Ensino Médio, que a Trigonometria é um dos assuntos em que os alunos apresentam maior dificuldade na compreensão dos conceitos. No currículo do Estado do Paraná (Paraná, 2018), os conceitos básicos de trigonometria são introduzidos aos alunos desde o 9º ano do Ensino Fundamental, em que parte da dificuldade de aprendizagem se dá pela complexidade do assunto, que se apresenta com muitos conceitos e fórmulas e, ainda, requer o domínio de outros assuntos prévios, como o estudo da circunferência, ângulos, triângulos, entre outros, que, se não forem compreendidos, acabam se tornando um obstáculo no processo de compreensão e na aprendizagem desses estudantes.

Ademais, ao chegar ao Ensino Médio, os conceitos de Trigonometria são ampliados para o estudo de funções trigonométricas, tornando essa área ainda mais desafiadora e contribuindo para uma resistência negativa enraizada em relação ao assunto. Em sua pesquisa, Oliveira (2019) destaca que os alunos percebem o contéudo de funções trigonométricas como algo sem relação com a realidade do dia a dia, além de considera-lo de difícil compreensão.

Em frente a estes apontamentos, surge o seguinte problema de pesquisa: "Como podemos entender e sanar as dificuldades que alguns estudantes têm na compreensão dos conceitos de funções trigonométricas, em especial das funções seno e cosseno?"

Dentre os motivos que levam a esse questionamento, Pereira e Rêgo (2011) nos dizem que o ensino muitas vezes é levado de maneira muito tradicional, em que o professor é apenas o transmissor do conhecimento e o aluno um agente passivo. Ainda afirma que essa metodologia não leva em consideração os conhecimentos prévios do estudante, não trabalha de forma contextualizada o conteúdo e não considera a realidade vivida por ele.

Nesse cenário, o estudante se depara com um conteúdo que não faz sentido para ser estudado. Essa descontextualização leva o aluno a expressar frases bem conhecidas pelos professores, como: "porque eu preciso estudar isso?" ou ainda, "quando que irei usar isso na minha vida?". Tais questionamentos revelam a busca por significado no processo de aprendizagem, aspecto destacado por MOREIRA (2023), que descreve a aprendizagem significativa como o processo de atribuir sentido ao novo contéudo a partir de sua relação com os conhecimentos já existentes no repertório do estudante.

Levando em consideração essas concepções, o objetivo geral deste trabalho é: analisar o ensino das funções seno e cosseno a partir da aplicação de uma sequência didática com abordagem lúdica e tecnológica.

O desenvolvimento dessa ferramenta permitirá analisar esse processo compreensivo, visto que ela possibilita ao professor explorar diversos conteúdos em uma sequência de atividades que estão interligadas entre si, com um objetivo final em comum. Dentro de cada atividade, podem ser trabalhadas várias metodologias que contextualizam a trigonometria e tornam a aprendizagem mais atrativa e dinâmica para o estudante.

Dentre as metodologias escolhidas para a compreensão dos conteúdos estão o uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra e dos Jogos Matemáticos. Esses recursos têm suas especificidades, sendo o Geogebra responsável por facilitar a vizualização dos gráficos e suas propriedades, enquanto o uso de jogos matemáticos dinamizam a aula tornando a aprendizagem mais lúdica, trazendo o caráter competitivo para a sala de aula, um grande engajador do processo de ensino.

Segundo Grando (2000), os estudantes podem "experimentar uma forma diferente de adquirir conhecimento através de uma atividade que seja interessante, desafiadora, e prazerosa, como proporciona a atividade com jogos desencadeada adequadamente." Com base nisso, os jogos matemáticos se mostram uma alternativa para tornar a aprendizagem dos estudantes mais significativa. Essa perspectiva é reforçada por Kishimoto (1994), ao destacar que o jogo é uma ferramenta que desenvolve e educa de forma prazerosa.

Quanto ao uso de ferramentas digitais, Lopes (2013) destaca que o uso de *softwares* de geometria dinâmica oferecem diversas potencialidades, como a construção dos objetos geométricos, o dinamismo, a investigação, a vizualização e a argumentação. Esses recursos favorecem o engajamento do estudante no processo de aprendizagem com metodologias mais alinhadas aos seus interesses, especialmente em um contexto em que a tecnologia está cada vez mais presente no cotidiano.

No que diz respeito às dificuldades observadas pelo professor em sua prática docente, está a identificação e o cálculo das razões trigonométricas, além da dificuldade em estabelecer relações entre as propriedades do círculo trigonométrico e as funções seno e cosseno. Nesse sentido, a proposta de uma sequência didática possibilita o uso de jogos para a compreensão de conceitos fundamentais, como os valores de seno e cosseno de ângulos notáveis e a conversão entre diferentes unidades de medida de ângulos. Além disso, encaixar o uso de ferramentas digitais, como o GeoGebra, constribui para a visualização e o estudo dos gráficos das funções trigonométricas, uma vez que o esboço manual muitas vezes não proporciona uma representação precisa dos gráficos, dificultando a compreensão dos conceitos envolvidos.

A partir do Objetivo Geral, surgem os seguintes objetivos específicos:

- Discutir sobre as possibilidades de ensino de funções trigonométricas, em específico, seno e cosseno.
- Fundamentar matematicamente os conteúdos de base para o ensino das funções seno

e cosseno.

- Apresentar a sequência didática para o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno.
- Analisar o entendimento dos estudantes quanto à visualização dos gráficos de funções trigonométricas e o ciclo trigonométrico, por meio de recursos digitais.
- Apontar as contribuições da sequência didática elaborada e aplicada para o ensino de conceitos relacionados às funções trigonométricas.

Para o desenvolvimento dessa dissertação, iniciamos com a apresentação de alguns conceitos fundamentais de trigonometria e funções trigonométricas, com o intuito de assegurar que o professor tenha um bom domínio do conteúdo a ser ensinado aos estudantes. Em seguida, é apresentada a fundamentação teórica, no qual são discutidas as metodologias de ensino adotadas para alcançar os objetivos propostos. Por fim, são descritos os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa, bem como a sequência didática elaborada e a análise dos resultados obtidos a partir da sua aplicação em uma turma de 4º ano [1] do Ensino Médio com Técnico Integrado em Administração. O trabalho é encerrado com os apêndices que contém as atividades utilizadas no decorrer da sequência.

[1]Essa turma possui 4º ano por ser da grade do Ensino Médio com Técnico Integrado de 2021.

2 TRIGONOMETRIA: CONCEITOS FUNDAMENTAIS

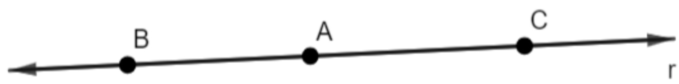
Este capítulo tem por objetivo apresentar os principais conceitos matemáticos que fundamentam o tema de pesquisa deste trabalho. São apresentados alguns conceitos essenciais para o ensino de funções trigonométricas, tais como ângulos, trigonometria no triângulo retângulo e ciclo trigonométrico. Além disso, são abordadas as relações trigonométricas em triângulos quaisquer, assim como as principais propriedades e características das funções trigonométricas.

2.1 ÂNGULOS

Nesta seção, abordamos o conceito de ângulos, juntamente com as propriedades relevantes para o estudo da trigonometria, com base nas obras de Iezzi (2013) e Neto (2022). Consideramos ponto, reta e plano como conceitos primitivos, isto é, que não precisam de definições formais. A partir desses elementos, prodemos definir outros, como a semirreta, conforme descrito a seguir:

Definição 2.1 *Um ponto A, pertencente a uma reta r, divide-a em duas partes. A cada parte dessa divisão é dado o nome de* ***semirreta****. À semirreta que tem origem no ponto A e passa pelo ponto B, representamos como $\overrightarrow{AB}$. Da mesma forma, à semirreta de origem em A passando pelo ponto C denotamos por $\overrightarrow{AC}$.*

Figura 2.1: Semirretas da reta r.

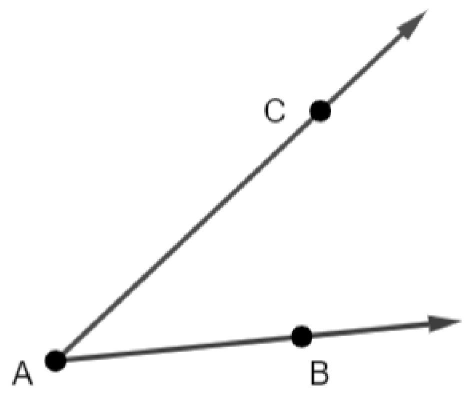


Fonte: Elaborado pelos autores.

A partir disso, podemos formalizar o que é um ângulo, como na definição abaixo.

Definição 2.2 *Um* ***ângulo*** *é uma das duas regiões formadas pela união de duas semirretas que possuem a mesma origem. À origem das duas semirretas damos o nome de vértice, e às semirretas que formam o ângulo damos o nome de lados.*

Figura 2.2: Ângulo de vértice A e lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



Fonte: Os autores.

Figura 2.3: Representação do ângulo raso e ângulo nulo.

(a) Ângulo raso $B\widehat{A}C$

(b) Ângulo nulo

Fonte: Os autores.

A fim de facilitar a representação de ângulos, usaremos a notação $B\widehat{A}C$, que indica o ângulo de vértice A e lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ (Figura 2.2). Em particular, se as duas semirretas forem opostas, dizemos que o ângulo é raso, ou seja, mede 180°. Já se as duas semirretas que formam o ângulo forem coincidentes, dizemos que o ângulos é nulo (Figura 2.3).

Dada a definição de ângulo, nosso próximo passo será definir uma maneira de determinar o tamanho da região que o ângulo ocupa no plano. Dado um ângulo raso $B\widehat{A}C$, iremos dividir uma das regiões formadas por esse ângulo em 180 partes de mesma medida, traçando semirretas com origem em A. Essa construção forma ângulos congruentes entre si, em que o espaço ocupado por cada uma dessas regiões é definido como sendo a unidade de medida de 1°(um grau).

Com essa unidade de medida construída, diremos que a medida de um ângulo em graus, corresponde a determinar a quantidade de regiões que cabem dentro do ângulo a ser medido. Por construção, vemos que um ângulo raso mede 180°. Definiremos também algumas nomenclaturas que serão utilizadas durante o trabalho, como segue:

Definição 2.3 *Um ângulo é dito*

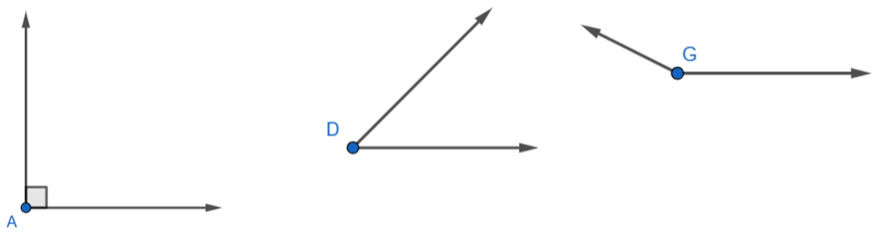
1. ***reto*** *quando sua medida é de 90°.*

2. ***agudo*** *quando sua medida é maior que 0°e menor que 90°.*

3. ***obtuso*** *quando sua medida é maior que 90°e menor que 180°.*

Figura 2.4: Exemplos de ângulos reto, agudo e obtuso.

(a) Ângulo reto (b) Ângulo agudo (c) Ângulo obtuso



Fonte: Os autores.

Para se referir a um determinado ângulo ou à sua medida, convencionalmente utilizamos letras minúsculas do alfabeto grego para padronizar a notação. Nesse sentido, segundo Iezzi (2013), temos a seguinte definição:

Definição 2.4 *Dois ângulos* α *e* β *são ditos* ***complementares*** *se* $\alpha + \beta = 90°$*. Além disso, serão ditos* ***suplementares*** *se* $\alpha + \beta = 180°$*.*

Com as definições e propriedades descritas, temos uma importante relação referente aos ângulos internos de um triângulo – região plana formada por três pontos não colineares (Iezzi, 2013, p. 3).

Proposição 2.1 *A soma dos ângulos internos de um triângulo é* $180°$*.*

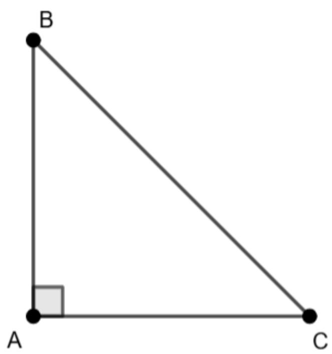
2.2 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM ÂNGULOS DE 30°, 45° OU 60°

Antes de definir propriamente as relações trigonométricas, apresentamos a definição de triângulo retângulo, as propriedades que podem ser deduzidas nele e o teorema relacionando seus lados.

Definição 2.5 *Chamamos de* ***triângulo retângulo*** *o triângulo ABC que possui um de seus ângulos internos medindo $90°$. Ao lado oposto ao ângulo de $90°$ damos o nome de hipotenusa. Aos outros dois lados nomeamos como catetos. Diremos também, se o ângulo de $90°$ tiver vértice no ponto A, que o triângulo ABC é retângulo em A.*

Na Figura 2.5, temos a representação visual do triângulo retângulo em A, que auxilia na introdução do Teorema de Pitágoras, um dos mais conhecidos da Geometria Euclidiana, e que possui diversas formas de demonstração – geométricas, algébricas e mesmo por raciocínio dedutivo ou visual – o que evidencia sua importância histórica e didática no ensino de matemática. O livro *The Pythagorean Proposition*, de Loomis (1968), reúne um total de 367 demonstrações do Teorema de Pitágoras, apresentando diferentes abordagens históricas e matemáticas.

Figura 2.5: Triângulo retângulo em A.



Fonte: Os autores.

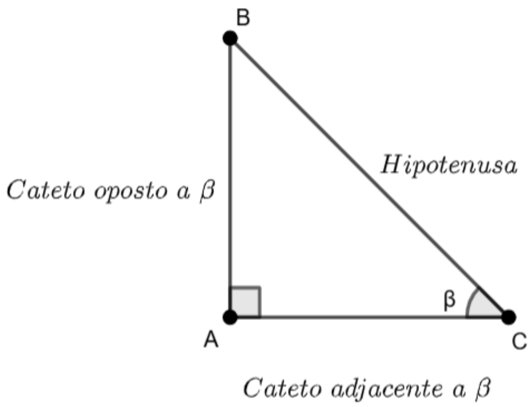
Teorema 2.1 (Teorema de Pitágoras) *Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Para distinguir os catetos, utilizamos um dos ângulos internos como base nomeando eles em cateto oposto ou cateto adjacente, como mostra a Definição 2.6 e sua representação visual na Figura 2.6

Definição 2.6 *Considere o ângulo $\beta < 90°$, interno ao triângulo ABC retângulo em A. Diremos que o* ***cateto oposto ao ângulo*** *β é o cateto que não é lado do ângulo β. De maneira análoga, diremos que o* ***cateto adjacente ao ângulo*** *β é o cateto que é lado do ângulo β.*

Vejamos agora dois triângulos retângulos ABC e ADE que possuem um ângulo α em comum, como na Figura 2.7. Esses dois triângulos são semelhantes, isto é, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais (Iezzi, 2013, p. 9). Logo, quando calculamos a razão entre os lados do triângulo ABC e comparamos

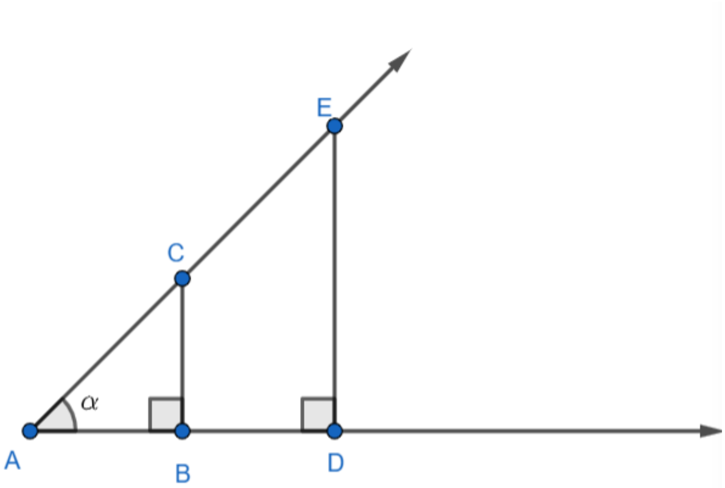
Figura 2.6: Lados do triângulo retângulo.



Fonte: Os autores.

com a razão entre os lados do triângulo ADE, os valores são invariáveis. Dessa forma, conseguimos definir as razões trigonométricas, que não depedem das medidas dos lados dos triângulos escolhidos, mas do valor do ângulo α que há em comum entre os triângulos retângulos, como segue na Definição 2.7, apresentada por Iezzi (2013).

Figura 2.7: Triângulo ABC semelhante ao triângulo ADE.



Fonte: Os autores.

Definição 2.7 *Dado um triângulo ABC retângulo em A, com um de seus ângulos $\alpha < 90°$, definiremos as razões seno, cosseno e tangente do ângulo α, respectivamente, como:*

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}.$$

As razões definidas acima são a base para o estudo das funções trigonométricas, pois os resultados independem do triângulo retângulo escolhido, e sim do ângulo. A partir destas definições, observam-se as seguintes propriedades, cujas demonstrações são apresentadas em Andrade (2019):

Proposição 2.2 *Valem as seguintes relações*

1. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$;
2. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

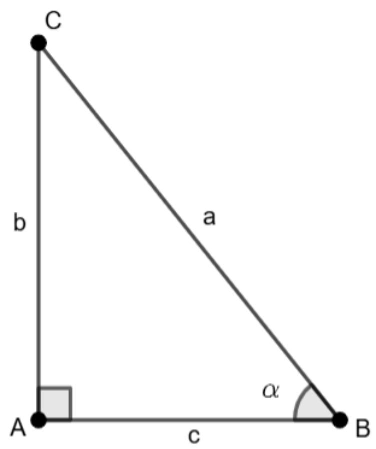
Demonstração:

Considere um triângulo retângulo de hipotenusa medindo a, cateto oposto à α medindo b e cateto adjacente a α medindo c, como ilustrado na Figura 2.8. Usando a definição 2.7, calculamos

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\alpha$$

Logo, vale a relação $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Figura 2.8: Demonstração Proposição 2.2.



Fonte: Os autores.

Analisemos agora, um triângulo retângulo em A, com hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c (Figura 2.8). Seja também $\alpha < 90°$ um ângulo desse triângulo. Segue, da definição 2.7 que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a} \text{ e } \cos\alpha = \frac{c}{a},$$

ou ainda,

$$a\,\mathrm{sen}(\alpha) = b \text{ e } a\cos(\alpha) = c.$$

Pelo teorema de pitágoras, calculamos:

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 &= (a\,\mathrm{sen}(\alpha))^2 + (a\cos(\alpha))^2 \\ \Rightarrow a^2 &= a^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha) + a^2\cos^2(\alpha). \end{aligned} \tag{1}$$

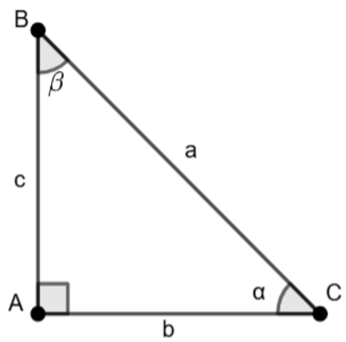
Dividindo ambos os membros da equação (1) por a^2, obtemos a relação

$$1 = \mathrm{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$$

□

Vale ainda citar que dados dois ângulos α e β, tais que $\alpha + \beta = 90°$, temos que $\mathrm{sen}\,\alpha = \cos\beta$, visto que os dois ângulos formam, juntamente com o ângulo de 90°, um triângulo retângulo, valendo assim as relações trigonométricas. Na Figura 2.9, vemos que $\mathrm{sen}\,\alpha = \dfrac{c}{a} = \cos\beta$, da mesma maneira que $\cos\alpha = \dfrac{b}{a} = \mathrm{sen}\,\beta$.

Figura 2.9: Triângulo retângulo de ângulos α e β.



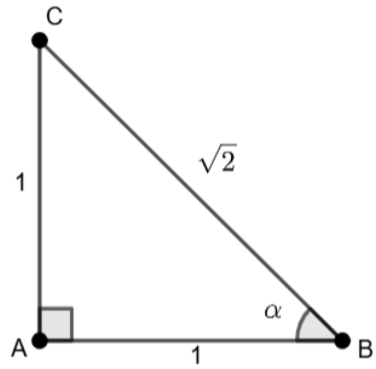
Fonte: Os autores.

A seguir, vamos analisar um triângulo isósceles retângulo em A, cujos catetos medem uma unidade de comprimento, como mostra a Figura 2.10. Pelo Teorema de Pitágoras, o terceiro lado, deverá medir $\sqrt{2}$, pois $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$. Além disso, como o triângulo é isósceles, os ângulos da base possuem a mesma medida, ou seja, ambos devem medir 45°. Assim, vemos que:

$$\mathrm{sen}(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \mathrm{tg}(45°) = \frac{1}{1} = 1.$$

Agora, analisemos um triângulo equilátero ABC, como dado na Figura 2.11, de lados medindo 2 unidades de comprimento. Pela Proposição 2.1, seus ângulos internos possuem

Figura 2.10: Triângulo retângulo isósceles.



Fonte: Os autores.

a mesma medida, isto é, todos medem 60°, visto que 60° + 60° + 60° = 180°, conforme Proposição 2.1.

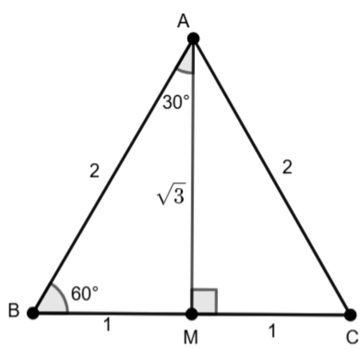
Como o triângulo é equilátero, ao traçarmos sua altura, a partir do vértice A, obtemos o ponto M, que é ponto médio de BC. Essa altura, por ser traçada em um triângulo equilátero, funciona como mediana, bissetriz e mediatriz. Assim, os segmentos BM e CM são congruentes, ou seja, $BM = CM = 1$.

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABM, em que AB é a hipotenusa e AM e BM são os catetos, podemos determinar a medida do segmento AM, como segue:

$$\begin{aligned}(AB)^2 = (AM)^2 + (BM)^2 &\Rightarrow 2^2 = (AM)^2 + 1^2\\ &\Rightarrow 4 - 1 = (AM)^2\\ &\Rightarrow AM = \sqrt{3}\end{aligned}$$

A altura AM, que também é bissetriz, separa o triângulo ABC em dois triângulos retângulos, com ângulos retos em M, e divide o ângulo $B\hat{A}C$ em dois ângulos congruentes, sendo $B\hat{A}M = C\hat{A}M = 30°$. Além disso, como já mencionado, $A\hat{B}M = 60°$.

Figura 2.11: Triângulo Equilátero.



Fonte: Os autores.

Usando novamente a Definição 2.7, calculamos:

$$\text{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(30°),$$

$$\cos(60°) = \frac{1}{2} = \text{sen}(30°).$$

$$\text{tg}(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e

$$\text{tg}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

A fim de organizar os dados apresentados, tabulamos os valores no Quadro 2.1, o qual é comumente utilizado para consulta das relações trigonométricas dos ângulos ditos notáveis ($30°, 45°$ e $60°$).

Quadro 2.1: Valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Os autores.

Além das relações trigonométricas seno, cosseno e tangente, há as relações inversas denominadas cossecante, secante e cotangente, respectivamente. As mesmas serão omitidas deste trabalho, pois não incluiremos esses conceitos na sequência didática.

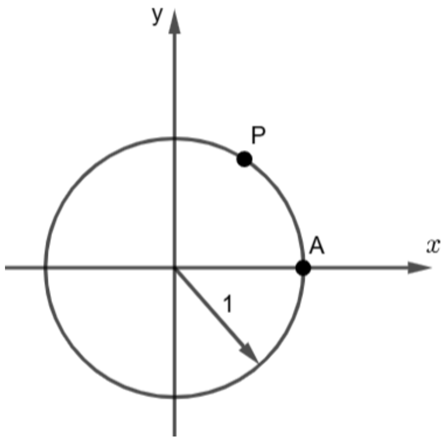
2.3 O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO UNITÁRIO

As funções trigonométricas seno e cosseno, bem como as suas propriedades, serão definidas posteriormente nas seções 2.4 e 2.5. Tais definições são baseadas no círculo trigonométrico, que permite calcular o seno e o cosseno de um arco sobre uma circunferência de raio 1. Todas as definições e demonstrações dessa seção são apresentadas em Neto (2022).

Definição 2.8 *Definimos o* ***círculo trigonométrico*** *ou* ***ciclo trigonométrico****, como sendo a circunferência de raio 1, centrada na origem do plano cartesiano.*

Dado um número real c, medimos sobre o círculo trigométrico, partindo do ponto A (vide Figura 2.12), um arco de circunferência $\overset{\frown}{AP}$. Se medirmos no sentido anti-horário, temos $c > 0$, caso contrário, $c < 0$. Considere um ponto P sobre a circunferência trigonométrica, que é a extremidade final do arco traçado. Definiremos **radianos** (rad), como sendo o tamanho do ângulo tal que a medida do arco $\overset{\frown}{AP}$ é 1.

Figura 2.12: Círculo trigonométrico e o arco $\overset{\frown}{AP}$.



Fonte: Os autores.

Com as definições apresentadas, podemos relacionar a unidade de medida de ângulos em graus, com o ciclo trigonométrico. Como o raio do círculo trigonométrico é 1, seu comprimento total é dado pela expressão $2\pi \cdot 1$, isto é, 2π radianos equivalem a 360°, ou ainda, uma volta completa na circunferência. Disso, temos que meia volta, ou seja 180°, equivalem a π radianos(rad). Para converter os demais ângulos para radiano, e vice-versa, podemos usar a relação abaixo:

$$\frac{\theta}{180} = \frac{c}{\pi},$$

em que θ (theta) é o ângulo em graus, e c é seu respectivo valor em radianos. Por exemplo, convertendo o ângulo de 30° para radianos, temos

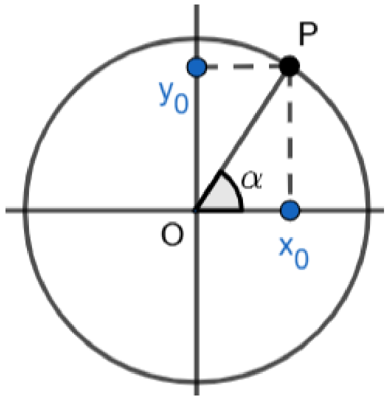
$$\frac{30}{180} = \frac{c}{\pi} \Rightarrow 30\pi = 180c \Rightarrow c = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}.$$

Isto significa que 30° equivalem a $\frac{\pi}{6}rad$. Da mesma forma, vemos que 45° equivalem a $\frac{\pi}{4}rad$, 60° equivalem a $\frac{\pi}{3}rad$ e 90° equivalem a $\frac{\pi}{2}rad$.

Considere agora a Figura 2.13, que mostra o ponto P sobre a circunferência, com coordenadas (x_0, y_0), formando um ângulo de $\alpha\, rad$.

Utilizando a Definição 2.7 e o fato do raio do círculo ser unitário, vemos que

Figura 2.13: Seno e cosseno do ângulo α.



Fonte: Os autores.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y_0}{1} = y_0 \text{ e } \cos\alpha = \frac{x_0}{1} = x_0.$$

Isso significa que, para determinarmos o cosseno e o seno de um ângulo α, no círculo trigonométrico, cujo arco tem extremidade no ponto P, basta olharmos os valores das coordenadas x_0 e y_0 de P, respectivamente. Logo, o ponto P pode ser reescrito como $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Para determinarmos a tangente, considere a reta t tangente ao círculo trigonométrico no ponto A, como mostrado na Figura 2.14. Considere também o prolongamento do segmento $\overline{OP}$, cuja intercessão com t é o ponto B. O triângulo AOB é retângulo em A. Logo, temos que:

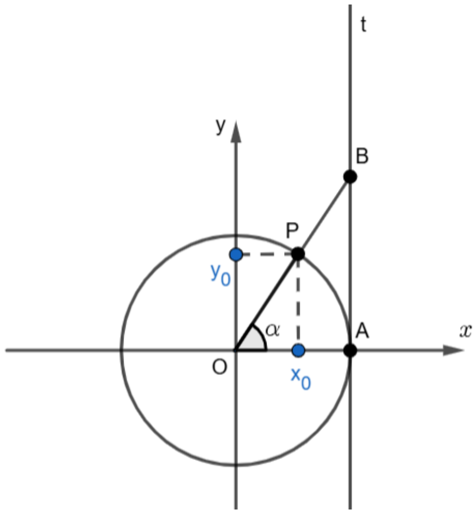
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB},$$

isto é, a representação geométrica da tangente no círculo trigonométrico equivale ao comprimento do segmento AB.

Ao traçarmos o círculo trigonométrico com centro na origem do plano, o dividimos em quatro partes iguais, todas com ângulos centrais medindo 90^0. Iniciando no ponto A da Figura 2.14, e caminhando no sentido anti-horário, denominamos cada seção de 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes, respectivamente. Os extremos de cada quadrante são 0°, 90°, 180°, 270° e 360°, cuja medida em radianos são, respectivamente, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π. Os valores do seno, cosseno e tangente, obtidos a partir das coordenadas desses pontos extremos no círculo trigonométrico, estão organizados no Quadro 2.2.

Notamos aqui que, embora uma volta completa no ciclo trigonométrico corresponda a 360°, é possível definir ângulos com medidas superiores a esse valor. Para utilizarmos esses arcos nos cálculos, consideraremos o ângulo formado entre a extremidade do arco sobre o círculo trigonométrico, a origem do plano cartesiano e o ponto de coordenadas $(1, 0)$.

Figura 2.14: Representação geométrica da tangente de α.



Fonte: Os autores.

Quadro 2.2: Seno, cosseno e tangente de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°.

	0°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	1	0	-1	0
Cosseno	1	0	-1	0	1
Tangente	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Fonte: Os autores.

Arcos que possuem a mesma extremidade são chamados de **côngruos**. Para exemplificar, dado um ângulo de 420°, seu arco côngruo é 60°, visto que $420° = 360° + 60°$. Essa correspondência pode ser vista na Figura 2.15.

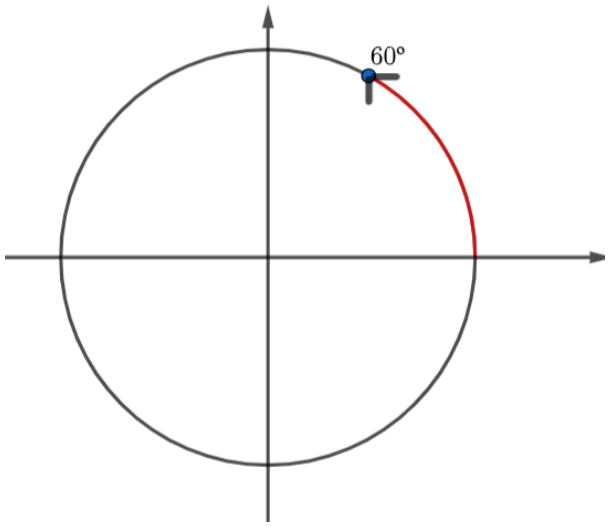
Geometricamente, o círculo trigonométrico, além de proporcionar outra maneira de calcular as razões trigonométricas, também facilita na determinação dos sinais dessas razões. Dado um ângulo α sobre a circunferência trigonométrica, percebemos que o valor de $\operatorname{sen}\alpha$, ou seja, a coordenada y do arco formado pelo ângulo α, é positivo no primeiro e segundo quadrantes e negativo nos demais.

Da mesma forma, vemos que $\cos\alpha$ (coordenada x) é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes. Por fim, a tangente é positiva no primeiro e terceiro quadrantes e negativa no segundo e quarto quadrantes. Esses sinais podem auxiliar na análise dos gráficos das funções trigonométricas, as quais serão apresentadas na próxima seção. No Quadro 2.3, vemos a organização dos sinais das razões trigonométricas por quadrante.

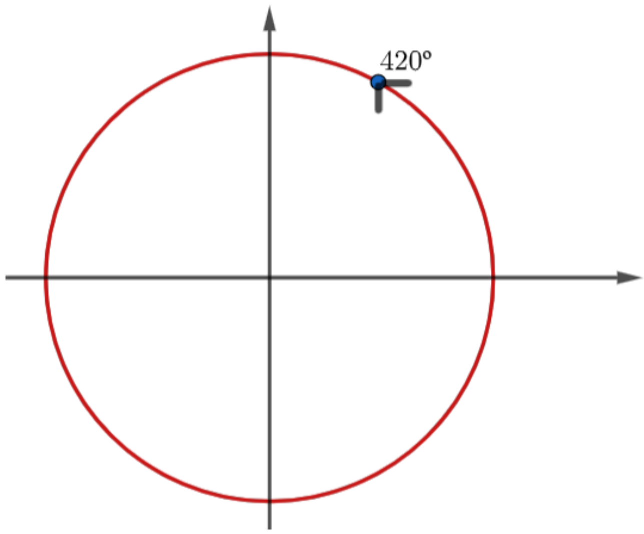
Sobre o cálculo do seno, cosseno e tangente, podemos relacionar um ângulo qualquer da circunferência trigonométrica com um ângulo do primeiro quadrante, chamando isso de redução ao primeiro quadrante. Essa redução está baseada na Proposição 2.3 e no Colorário 2.1, a seguir, cujas demonstrações se encontram em Neto (2022):

Figura 2.15: Representação do arco côngruo de 420°.

(a) Ângulo de 60°



(b) Ângulo de 420°



Fonte: Os autores.

Quadro 2.3: Sinais do seno, cosseno e tangente por quadrante.

	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
Seno	+	+	−	−
Cosseno	+	−	−	+
Tangente	+	−	+	−

Fonte: Os autores.

Proposição 2.3 *Para todo $c \in \mathbb{R}$ vale que*

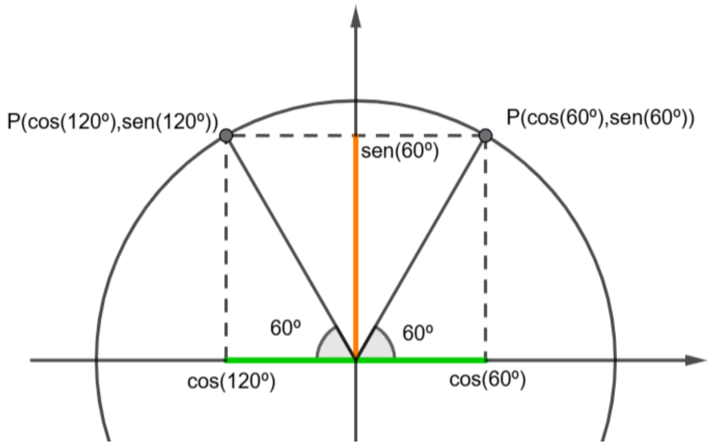
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cos c \ \ e \ \ \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \operatorname{sen} c.$$

Colorário 2.1 *Para todo $c \in \mathbb{R}$, temos*

$$\operatorname{sen}(\pi - c) = \operatorname{sen} c \ \text{ e } \cos(\pi - c) = -\cos c.$$

Por exemplo, o ângulo de 120°, que está localizado no 2º quadrante, possui o mesmo valor em módulo de seno, cosseno e tangente do ângulo de 60°, isto é $\operatorname{sen}(120°) = sen(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(120°) = -\cos(60°) = -\dfrac{1}{2}$ e $\operatorname{tg}(120°) = -\operatorname{tg}(60°) = -\sqrt{3}$. Na Figura 2.16, vemos uma ilustração que mostra as semelhanças que há no cálculo das relações trigonométricas dos ângulos de 60° e 120°.

Figura 2.16: Relação entre seno e cosseno de 60° e 120°.



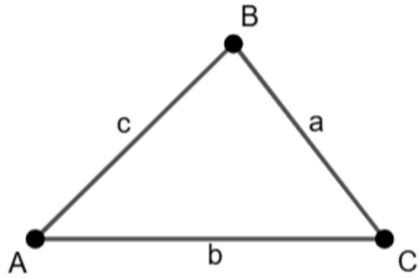
Fonte: Os autores.

Antes de estudarmos as funções trigonométricas de forma mais aprofundada, na seção seguinte, apresentaremos e discutiremos algumas propriedades trigonométricas importantes que se aplicam a triângulos quaisquer, com o objetivo de fornecer uma base sólida para o entendimento e aplicação desses conceitos nas situações mais complexas que podem ser encontradas ao longo do estudo.

2.4 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

Utilizando as razões definidas para triângulos retângulos, é possível generalizar, para triângulos quaisquer, relações que vinculam os lados de um triângulo com as medidas de seus ângulos. Para desenvolver esse conceito, considere um triângulo qualquer, como representado na Figura 2.17. Podemos enunciar duas relações fundamentais chamadas "Lei dos Cossenos" e "Lei dos Senos". Os enunciados das Proposições 2.4 e 2.5, bem como suas demonstrações, são apresentadas em Neto (2022).

Figura 2.17: Triângulo ABC qualquer.



Fonte: Os autores.

Proposição 2.4 (Lei dos Cossenos) *Se ABC é um triângulo de lados* $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b$ *e* $\overline{BC} = a$, *então*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\hat{A}.$$

Demonstração: Considere um triângulo ABC e H o pé da altura relativa ao lado AC, em que $\overline{AH} = h$. Iremos realizar a demonstração para três casos.

1º CASO: Considere $\hat{A} < 90°$. Neste caso (Figura 2.18), os pontos H e C estão sobre o lado AC. Então, usando as relações trigonométricas nos triângulos ABH e BHC (Figura 2.18), temos que:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overline{AH}}{c} \text{ e } \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h}{c}$$

isto é,

$$\overline{AH} = c \cdot cos\hat{A} \text{ e } h = c \cdot sen\hat{A}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCH, cuja hipotenusa é a, e fazendo as substituições para $\overline{AH}$ e h, temos que:

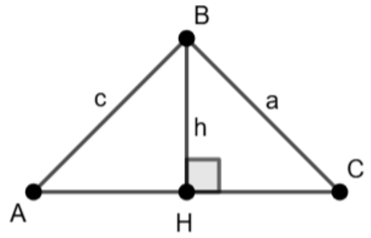
$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (\overline{CH})^2 \\ &= h^2 + (b - \overline{AH})^2 \\ &= (c \operatorname{sen}\hat{A})^2 + (b - c\cos\hat{A})^2 \\ &= c^2 \operatorname{sen}^2\hat{A} + b^2 - 2bc\cos\hat{A} + c^2\cos^2\hat{A} \\ &= b^2 + c^2(\operatorname{sen}^2\hat{A} + \cos^2\hat{A}) - 2b\cos\hat{A} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}. \end{aligned}$$

Logo, para $\hat{A} < 90^0$ a igualdade da proposição é satisfeita.

2º CASO: Considere agora o ângulo $\hat{A} = 90°$. Nesse caso, temos que $\cos 90° = 0$. Do Teorema de Pitágoras, temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

Figura 2.18: Caso em que $\hat{A} < 90°$no triângulo ABC.



Fonte: Os autores.

3º CASO: Considere agora $\hat{A} > 90°$. Então, a altura AH é externa ao triângulo ABC, sendo que H está sobre a reta suporte do lado AC. (Figura 2.19)

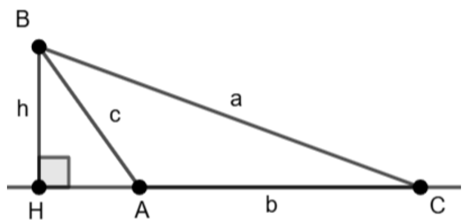
Usando o Colorário 2.1, temos que

$$\overline{AH} = c\cos(180° - \hat{A}) = -c\cos\hat{A} \text{ e } h = c\,\mathrm{sen}\,(180° - \hat{A}) = c\,\mathrm{sen}\,\hat{A}.$$

Aplicando novamento o Teorema de Pitágoras, no triângulo BHC, obtemos

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (b + \overline{AH})^2 \\ &= (c\,\mathrm{sen}\,\hat{A})^2 + (b - c\cos\hat{A})^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}. \end{aligned}$$

Figura 2.19: Caso em que $\hat{A} > 90°$ no triângulo ABC.



Fonte: Os autores.

□

Proposição 2.5 (Lei dos Senos) *Considere um triângulo ABC de lados quaisquer, tais que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Então vale que*

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,\hat{C}}.$$

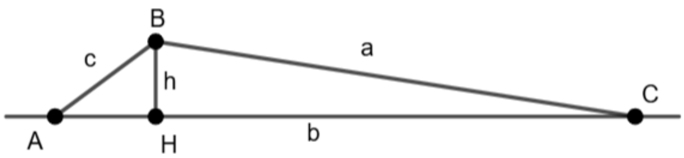
Demonstração: Considere um triângulo obtuso qualquer (os demais casos são análogos). Tracemos nesse triângulo a altura relativa ao lado AC (vide Figura 2.20) cujo pé baixado de B é H e $\overline{BH} = h$. Usando as razões trigonométricas nos triângulos BHC e ABH, respectivamente, temos que:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h}{a} \text{ e } \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h}{c}$$

Isto é, vale que $h = a\operatorname{sen}\hat{C}$ e $h = c\operatorname{sen}\hat{A}$. Igualando as equações, obtemos que $a\operatorname{sen}\hat{C} = c\operatorname{sen}\hat{A}$ e assim,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}.$$

Figura 2.20: A lei dos senos.



Fonte: Os autores.

Se traçarmos a altura l baixada com relação ao lado AB, obteremos, seguindo os mesmos passos acima, que $l = b\operatorname{sen}\hat{A}$ e $l = a\operatorname{sen}\hat{B}$. Igualando todas as equações, concluímos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}.$$

□

Essas leis permitem calcular com precisão os lados e ângulos de um triângulo qualquer, sendo não apenas importante para a trigonometria, mas também para a resolução de problemas em várias outras áreas, como na física, engenharia, etc.

2.5 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo definiremos as funções trigonométricas seno e cosseno e enunciaremos algumas de suas propriedades, dentre elas a periodicidade e a paridade. Para isso, iremos assumir como verdadeiras as proposições referentes às funções definidas no conjunto dos números reais. As funções trigonométricas seno e cosseno, segundo Lima (2021), são definidas como segue:

Definição 2.9 *As funções* $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, chamadas de função seno e função cosseno, respectivamente, são definidas por* $E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Esta definição nos diz que, para qualquer número real t associamos o ponto $E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ como a extremidade do arco de comprimento t, medido a partir do ponto

$(1, 0)$ no sentido anti-horário. Como visto nas seções anteriores, temos que se (x, y) é o par ordenado da extremidade do arco sobre o círculo trigonométrico, então $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$. De forma mais usual, denotaremos as funções seno e cosseno, respectivamente, por $f(x) = \operatorname{sen} x$ ou $f(x) = \cos x$.

As funções seno e cosseno compartilham diversas propriedades em comum. A primeira delas diz respeito aos seus valores possíveis: pela definição do círculo trigonométrico, temos $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$. Logo, a imagem das funções seno e cosseno corresponde ao intervalo fechado $[-1, 1]$. Além disso, como não há restrição quanto à medida de arcos considerados no ciclo trigonométrico, é possível calcular seno e cosseno para qualquer número real. Isso significa que essas funções estão bem definidas em todo o conjunto dos números reais, ou seja, seus domínios são: $Dom(\cos) = Dom(\operatorname{sen}) = \mathbb{R}$.

Para proseguirmos com o estudo das funções trigonométricas, apresentamos a definição de função periódica:

Definição 2.10 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. O menor número $T > 0$ tal que isso ocorra, é dito período da função f.*

As funções seno e cosseno são exemplos clássicos de funções periódicas. Conforme a Definição 2.10, para que uma função seja periódica, é necessário que ela repita seus valores em intervalos regulares. No caso das funções trigonométricas, essa periodicidade pode ser compreendida a partir do conceito de arcos côngruos na circunferência trigonométrica. Dessa forma, e pelo fato de uma volta completa no círculo trigonométrico corresponder a 2π rad , temos que todos os arcos côngruos de t "param" na mesma extremidade que o arco de medida t e podem ser expressos por $t + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Como arcos de mesma extremidade possuem o mesmo valor para o seno e para o cosseno, concluímos que $\operatorname{sen}(t + 2k\pi) = \operatorname{sen} t$ e $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$. Quanto ao período, precisamos determinar o menor valor positivo para $2k\pi$, ou ainda,

$$2k\pi > 0 \Leftrightarrow k > 0$$

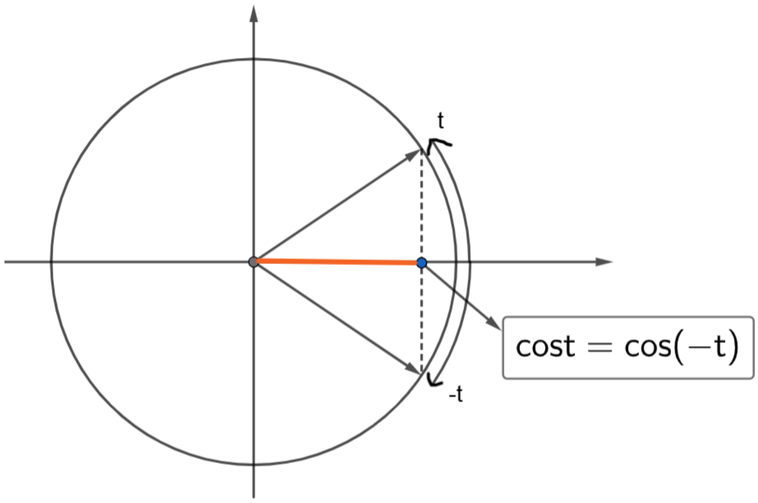
Como k é inteiro, o menor valor em que a desigualdade é satisfeita é $k = 1$. E dessa forma, o período as funções seno e cosseno é dado por $2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi$.

Além da periodicidade, outra importante característica das funções seno e cosseno diz respeito à sua paridade, ou seja, ao comportamento das funções em relação à simetria no plano cartesiano. Assim, para verificarmos a paridade dessas funções, usamos a seguinte definição:

Definição 2.11 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita par se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e é dita ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

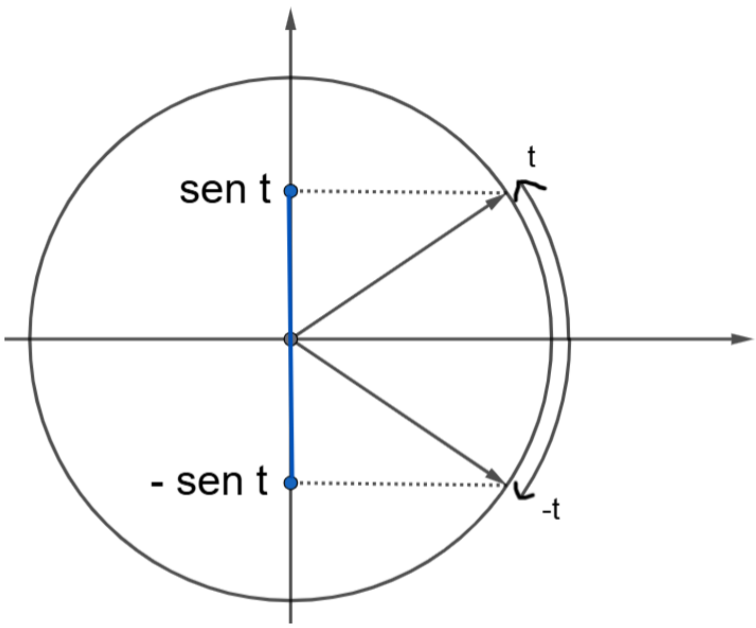
Usando a interpretação geométrica do ciclo trigonométrico (Figura 2.21), vemos que a função cosseno é uma função par. Quando representamos o arco t e o arco $-t$ sobre a circunferência trigonométrica, percebemos que $-t$ é uma reflexão de t em relação ao eixo x do plano cartesiano. Isto significa que a abscissa de $E(t)$ não será alterada. Logo, $\cos t = \cos(-t)$. Já a função seno é ímpar, pois quando refletimos o arco t sobre o eixo x, o sinal da ordenada de $E(t)$, é invertido. Logo $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, como vemos na Figura 2.22.

Figura 2.21: Paridade da função cosseno.



Fonte: Os autores

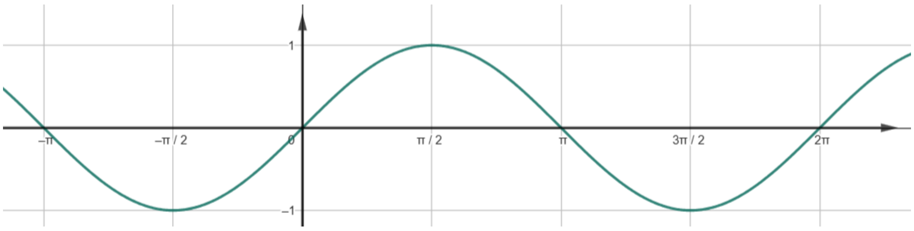
Figura 2.22: Paridade da função seno.



Fonte: Os autores

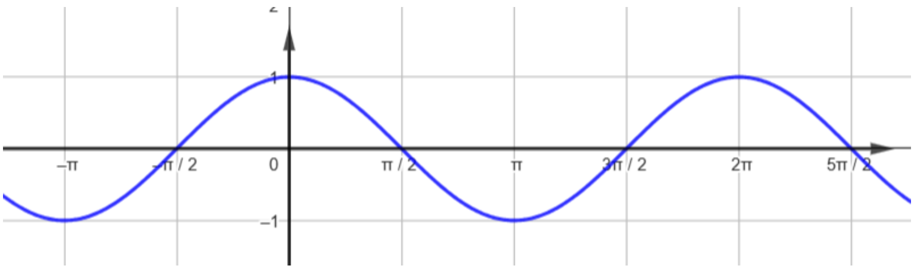
Dessa forma concluímos que a função seno é ímpar, enquanto a função cosseno é par, de acordo com as definições apresentadas. Para facilitar a vizualização dessas propriedades, apresentamos a seguir o gráfico das duas funções. Na Figura 2.23 está representado o gráfico da função seno, e na Figura 2.24 está representado o grafico da função cosseno.

Figura 2.23: Gráfico da função seno.



Fonte: Os autores.

Figura 2.24: Gráfico da função cosseno.



Fonte: Os autores.

Em ambos os gráficos, observamos visualmente que existe uma repetição do comportamento das funções seno em cosseno ao longo do eixo x, com um padrão que se repete em um intervalo de 2π. Além disso, também é possível perceber que o conjunto imagem das duas funções está contido no intervalo fechado $[-1, 1]$, como discutido anteriormente.

Outro aspecto importante que pode ser identificado graficamente é o conceito de zero (ou raiz) de uma função, o qual é dado pelos valores de x tais que $f(x) = 0$. No caso da função seno, é possível perceber que ela possui infinitos zeros, que ocorrem sempre que o ângulo x corresponde a um múltiplo de π, ou seja, $x = k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Da mesma forma, x é zero da função cosseno se, e somente se, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Como mencionado no início do capítulo, esta seção tem por objetivo apresentar e ilustrar os principais conceitos matemáticos que serão trabalhados na sequência didática proposta neste trabalho. Dentre as propriedades abordadas, serão explorados o gráfico, o conjunto imagem, o domínio e o período das funções seno e cosseno.

Tendo isso em vista, no próximo capítulo apresentaremos a fundamentação teórica sobre os conceitos de jogos matemáticos e recursos tecnológicos, que constituem as principais metodologias utilizadas nas atividades da sequência didática desenvolvida neste trabalho.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentaremos a fundamentação teórica que embasa as metodologias de ensino a serem exploradas na sequência didática deste trabalho. Na primeira seção, intitulada análise da Base Nacional Comum Curricular, é feito um estudo sobre esse documento normativo que define o conjunto de habilidades e competências que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas de ensino da Educação Básica. Nesta análise, buscamos identificar as habilidades referentes às funções trigonométricas propostas no documento, com a finalidade de nortear a sequência didática.

Nas duas seções seguintes, detalharemos sobre os jogos educacionais e os recursos tecnológicos, instrumentos que contribuem para o processo de ensino e aprendizagem. A primeira traz um caráter mais lúdico para o processo de ensino, já a segunda, é proposta como um auxílio visual para desenvolver os conceitos de gráficos de funções trigonométricas e suas relações com o ciclo trigonométrico.

3.1 ANÁLISE DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é um documento norteador que foi homologado no ano de 2017 para o Ensino Fundamental, e em 2018 para o Ensino Médio (Brasil, 2018). O objetivo do Ministério da Educação (MEC), ao criar esse documento, é unificar as habilidades e competências que os estudantes precisam desenvolver durante todo o processo da Educação Básica. Para explicar as competências e habilidades, a BNCC divide a educação básica em três etapas de ensino: Educação Infantil, Ensino Fundamental que vai do 1º ao 9º ano e Ensino Médio. O Ensino Fundamental ainda é divido em anos iniciais, que vão do 1º ao 5º ano e anos finais que vão do 6º ao 9º ano.

Neste documento, no campo da Matemática, são discutidos os motivos para o ensino desse componente curricular na educação, ressaltando que suas aplicações na sociedade contemporânea tornam imprescindível o estudo dessa área pelos estudantes. Além disso, A BNCC defende o compromisso com o letramento matemático – que pode ser entendido como a capacidade de formular, empregar e interpretar a matemática em diversos contextos (Brasil, 2018) – e com os processos matemáticos, que envolvem a resolução de problemas, o desenvolvimentos de projetos, a investigação e a modelagem matemática.

Considerando esses conceitos, a BNCC apresenta as competências específicas, definidas como um conjunto de capacidades que o estudante deve ser capaz de realizar. Por exemplo, a competência específica 5 estabelece: “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados." (Brasil, 2018, p. 267) Essa competência inicia a necessidade de capacitar os alunos a resolverem problemas em diferentes contextos, com o uso de ferramentas digitais ou não digitais. No âmbito da sequência didática, propomos desenvolver o processo de investigação por meio do uso do *software* Geogebra.

Para o desenvolvimento das competências, a BNCC organiza a matemática do ensino básico em áreas temáticas (grandes blocos de conhecimento), ou ainda, unidades temáticas (subdivisões específicas dentro dessas áreas). Cada área temática define os objetos de conhecimento, isto é, os conteúdos a serem trabalhados, além das habilidades a serem desenvolvidas a partir desses objetos. No Ensino Fundamental, as habilidades são divididas nas seguintes áreas temáticas: Aritmética, Álgebra, Geometria e Estatística e Probabilidade.

Para organizar todas as habilidades presentes nessa etapa da educação, utiliza-se um código padronizado. Por exemplo, a habilidade **EF09MAT13**, indica que se trata da décima terceira habilidade do 9º ano do Ensino Fundamental, no componente curricular de Matemática.

Ao analisar as áreas temáticas do Ensino Fundamental – anos finais, observa-se que não há um objeto de conhecimento ou uma habilidade que mencione diretamente a trigonometria. O que ocorre, na verdade, é a preparação dos estudantes por meio de conceitos prévios essenciais para o desenvolvimento dos conteúdos do Ensino Médio. Entre as habilidades que fundamentam o estudo da trigonometria, destacam-se:

> **(EF06MAT19):** Identificar características dos triângulos e classificá-los com relação às medidas dos lados e dos ângulos. (Brasil, 2018, p. 303)
>
> **(EF07MAT24):** Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência de triângulos quanto a medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. (Brasil, 2018, p. 309)
>
> **(EF08MAT15):** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz de ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. (Brasil, 2018, p. 315)
>
> **(EF09MAT13):** Demonstrar relações métricas no triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando inclusive, a semelhança de triângulos. (Brasil, 2018, p. 319)

No Ensino Médio, a BNCC propõe aprofundar os conhecimentos desenvolvidos ao longo do Ensino Fundamental. Para isso, os conteúdos são organizados em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Diferentemente do que ocorre no Ensino Fundamental, as habilidades não são distribuídas por ano, mas por competência específica ou por área temática.

Além disso, as habilidades seguem um padrão distinto em sua codificação. Por exemplo, a habilidade **EM13MAT308** refere-se ao Ensino Médio (EM), o número 13 indica que a habilidade pode ser desenvolvida da 1ª à 3ª série e o número 308 indica que se trata da oitava habilidade relacionada à competência específica de número 3. A seguir, citamos essa competência, a qual fundamenta as habilidades relacionadas à trigonometria, e que será central para o desenvolvimento deste trabalho:

> "Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente." (Brasil, 2018, p. 531)

As duas habilidades que abordam diretamente conteúdos da trigonometria estão listadas abaixo:

> **(EM13MAT306):** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. (Brasil, 2018, p. 536)
>
> **(EM13MAT308):** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em váriados contextos. (Brasil, 2018, p. 536)

Ambas as habilidades citadas permitem ao professor certa flexibilidade na escolha dos conteúdos a serem abordados no campo da trigonometria, desde que as habilidades previstas sejam realmente desenvolvidas. No entanto, cada Estado tem a autonomia para definir os objetos de conhecimento que deverão ser priorizados em sua proposta curricular.

No caso do Referencial Curricular do Paraná (2021), os conteúdos indicados para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306** são: funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente), gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente), plano cartesiano e *software* para representações gráficas. Já para a habilidade **EM13MAT308** os conteúdos sugeridos são: relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras, razões trigonométricas no triângulo retângulo, lei dos senos e dos cossenos e noções de congruência e semelhança.

É possível observar que a BNCC estabelece de forma clara e estruturada os objetivos de aprendizagem a serem desenvolvidos pelos estudantes. O referencial do Paraná, principalmente na etapa do Ensino Médio, apresenta uma gama de conteúdos que precisam ser assimilados pelos alunos e idealmente explorados em conceitos práticos, para que essa articulação entre teoria e prática possibilite alcançar as competências necessárias para que o discente tenha uma formação de qualidade.

Na sequência didática que será apresentada, são explorados recursos digitais para permitir que os estudantes compreendam as diferentes representações das funções seno e cosseno, bem como visualizem o ciclo trigonométrico. Além disso, uma das aulas da sequência será voltada ao desenvolvimento da habilidade de aplicar conteúdos aprendidos na resolução de problemas, com ênfase em questões de vestibulares. Todas as atividades propostas na sequência didática estão fundamentadas nas diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) garantindo sua relevância pedagógica.

3.2 JOGOS MATEMÁTICOS

O processo de ensino-aprendizagem da Matemática, conforme orienta a BNCC (Brasil, 2018), deve promover no estudante o desenvolvimento do raciocínio, da comunicação, da representação e da argumentação, possibilitando a construção progressiva de conceitos cada vez mais complexos. Nesse contexto, os jogos matemáticos destacam-se como recursos pedagógicos valiosos, pois, como afirmam Felippe e Macedo (2022), ativam habilidades já presentes no aluno, além de incentivar a participação, a capacidade de desenvolvimento de estratégias e ter um papel socializador. Desta forma, o uso de jogos matemáticos contribui de maneira positiva para o desenvolvimento das competências previstas pela BNCC, proporcionando uma aprendizagem mais dinâmica e interativa.

De acordo com Kishimoto (2001), o jogo não é facilmente definido, pois sua compreensão está intrinsecamente relacionada ao contexto social em que se insere, assumindo diferentes significados e funções conforme o ambiente que o envolve. Nessa perspectiva, iremos dizer que um Jogo Matemático é uma atividade lúdica que estimula o raciocínio lógico e a competição saudável entre os estudantes, ao mesmo tempo que desenvolve ou consolida algum conteúdo matemático pertinente ao processo de aprendizagem.

A prática de jogos matemáticos é uma estratégia didática extremamente importante, pois oferece uma série de benefícios tanto no desenvolvimento de habilidades cognitivas quanto no engajamento dos alunos com a matemática de forma prazerosa, como destacam estudos recentes de Gomes (2022) e Menezes (2020). Portanto, ao serem inseridas em sala de aula, promovem a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem. Para alcançar o sucesso no jogo, ele precisará não apenas compreender os conteúdos estudados, mas também desenvolver estratégias eficazes, o que favorece uma aprendizagem mais profunda e consolidada.

No entanto, para que essa experiência contribua de forma positiva, o jogo deve ter um propósito claro e ser significativo para os alunos, permitindo que compreendam por que aquela dinâmica foi escolhida. A seleção do jogo não deve ocorrer de forma aleatória ou apenas com foco no entretenimento, mas sim considerando os objetivos pedagógicos que ele pode trazer em relação ao conteúdo. Como destacam Fiorentini e Miorin (1990, p. 8), antes de optar por um material ou jogo, devemos refletir sobre nossa proposta político-pedagógica, sobre o papel histórico da escola, sobre o tipo de aluno que queremos formar, sobre qual matemática acreditamos ser importante para esse aluno.

Diante do exposto, este trabalho propõe explorar o uso de jogos didáticos como forma de tornar o ensino do conteúdo de Funções Trigonométricas do Ensino Médio mais atrativo e significativo para os estudantes, promovendo a compreensão dos conceitos de maneira mais envolvente e natural, em contraste com a prática repetitiva de exercícios, muitas vezes percebidas pelos alunos como monótona e desmotivadora. Além disso, os jogos usados na sequência didática proposta, estimulam a atenção, a competitividade e o desenvolvimento de estratégias, favorecendo o aprendizado ao mesmo tempo que fortalecem habilidades cognitivas importantes para o sucesso no jogo.

Entre os jogos utilizados na sequência didática estão o Conecta 4 e o Bingo Trigonométrico. O primeiro tem por objetivo auxiliar os alunos na compreensão dos ângulos em radianos, enquanto o segundo contribui para a visualização e o entendimento da localização dos arcos na circunferência trigonométrica. Ambos os jogos são dinâmicos e promovem um aprendizado mais significativo, facilitando a assimilação de conceitos que, muitas vezes, são desafiadores para os estudantes.

3.3 RECURSOS TECNOLÓGICOS

Atualmente, a tecnologia está fortemente presente no cotidiano da maioria dos estudantes, sendo acessada com facilidade e utilizada para diversas finalidades, como estudo, lazer e trabalho. No contexto educacional, os recursos tecnológicos têm se integrado cada vez mais ao processo de ensino, oferecendo novas possibilidades para dinamizar as aulas e torná-las mais próximas da realidade dos alunos.

Do ponto de vista prático, especialmente com os avanços da inteligência artificial, a tecnologia se mostra uma aliada no processo de ensino, permitindo ao professor explorar uma diversidade de materiais, tanto em formatos analógicos quanto virtuais, ampliando as possibilidades de aprendizagem.

Apesar desses benefícios mencionados, vale ressaltar, conforme alerta Pereira e Araújo (2020), que o uso excessivo de recursos tecnológicos pode trazer prejuízos à aprendizagem. Um dos riscos é a rejeição, por parte dos alunos, de abordagens tradicionais que ainda são úteis em determindados contextos. Além disso, a falta de preparo do professor pode levar ao uso inadequado dessas ferramentas. Outro aspecto negativo, é o excesso de informação que os estudantes têm acesso, incluindo conteúdos que não se relacionam com o que está sendo trabalhado. Assim, é importante um bom planejamento por parte do professor, garantindo que os estudantes estejam de fato fazendo bom proveito desses recursos.

Apesar dessas limitações, Pereira e Araújo (2020) também descrevem que os recursos digitais, quando bem estruturados e alinhados com a proposta pedagógica, se tornam facilitadores do processo de ensino aprendizagem dos estudantes, devido ao fato de estarem imersos no mundo tecnológico e demonstrarem familiaridade e interesse pelo uso da tecnologia. Assim, o professor pode direcionar o uso da internet e de ferramentas digitais para fins acadêmicos e não restrita apenas ao lazer e entretenimento.

Com o avanço das tecnologias digitais, torna-se imprescindível que o professor se mantenha atualizado com esses recursos, a fim de propiciar aos estudantes ferramentas que realmente contribuam para processo de ensino e aprendizagem. Como pontuado anteriormente, o estudante já está acostumado com o uso de celulares e outros dispositivos, e por isso, é essencial que o professor saiba integrar esses tecnologias de forma planejada, favorecendo a construção do conhecimento matemático. Como complementa Lima e Rocha (2022, p. 734): "(...) tanto para educadores, como para estudantes é necessária uma adaptação ao acesso e uso das novas tecnologias, para que os mesmos estejam conectados dentro desse novo paradigma educacional."

Cabe então ao professor atuar como mediador entre o aluno, os recursos digitais e os conhecimentos que precisam ser construídos. Como diz Miranda (2021), o uso de computadores na educação possibilita a realização de aulas mais criativas e dinâmicas, levando o estudante para novas descobertas e aprendizagens.

No ensino de funções trigonométricas, um recurso tecnológico de grande potencial é o GeoGebra. Trata-se de um software de geometria dinâmica que permite a construção e a manipulação de gráficos de funções e figuras geométricas. Com ele é possível visualizar ângulos, comprimentos, áreas e demais medidas, favorecendo a compreensão conceitual da trigonometria por meio da interação e da experimentação.

Tradicionalmente, sem o apoio de ferramentas digitais, o esboço de gráficos é realizado com papel, lápis ou materiais impressos. Embora esses recursos sejam úteis, apresentam limitações, como a impossibilidade de manipulação exploratória em tempo real, a dificuldade em realizar ajustes rápidos e a imprecisão na representação dos desenhos. Nesse contexto, o GeoGebra se destaca como uma alternativa facilitadora, pois permite a construção rápida e interativa de gráficos de diferentes funções, comparando-as de forma dinâmica, permitindo a exploração das propriedades inerentes a elas. É possível visualizar facilmente quais são o domínio, imagem, período e zeros das funções seno e cosseno, propriedades que não são acessíveis com desenhos feitos à mão.

Entre as vantagens desse recurso, está a possibilidade de baixar o aplicativo GeoGebra[1], o que permite seu uso offline, sem necessidade de conexão à internet. Além disso,

[1]Disponível em https://www.geogebra.org/.

com as múltiplas janelas que podem ser abertas simultaneamente, é possível explorar diversos conceitos de uma só vez, como por exemplo, verificar as propriedades das funções trigonométricas relacionando com as medidas do ciclo trigonométrico.

Na sequência didática apresentada neste trabalho, duas atividades tem como base o uso do GeoGebra. Ambas possuem o caráter investigativo, no qual o aluno utiliza a plataforma como ferramenta para visualizar os gráficos das funções seno e cosseno, bem como o ciclo trigonométrico, para responder as perguntas disponibilizadas pelo professor. Essas questões levarão o aluno à reflexão e à formulação de conclusões sobre as propriedades inerentes a esses gráficos.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com o objetivo de colocar em prática a teoria estudada e apresentada neste trabalho, bem como aplicar a sequência didática elaborada, o primeiro autor deste trabalho - professor de Matemática da rede estadual do Paraná - selecionou uma de suas turmas para a realização da intervenção pedagógica. A turma escolhida foi o 4º ano do Ensino Médio[1], do curso técnico integrado em Administração, composta por 21 alunos, no ano de 2024. As aulas ocorreram no período noturno, em um colégio público no município de Castro, Paraná.

Para analisar as contribuições da sequência didática no processo de ensino aprendizagem, foi utilizado uma pesquisa de natureza qualitativa. Esse tipo de abordagem permite uma análise mais detalhada e subjetiva das interações e dos impactos das atividades no aprendizado dos estudantes, como destaca González (2020, p. 160). A metodologia está alinhada com o objetivo de compreender como os alunos assimilam os conteúdos de trigonometria, ao mesmo tempo em que se busca apresentar conceitos complexos e abstratos de forma mais dinâmica e engajadora.

Em um primeiro momento, seguindo os conteúdos previstos pela mantenedora da educação pública do Estado do Paraná, o professor trabalhou com os estudantes os conceitos prévios necessários à compreensão das funções trigonométricas. Nesse contexto, foram abordadas as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente em triângulos retângulos, a fim de promover um nivelamento conceitual entre os alunos. Após essa etapa, iniciou-se a aplicação das atividades previstas na sequência didática.

Durante a realização das atividades, o professor atuou como mediador do processo de ensino aprendizagem, observando se os alunos compreendiam os conteúdos, por meio das respostas registradas nas folhas de atividades. Com a mediação do professor aplicador, também foi observado o nível de interesse demonstrado pelos estudantes diante das diferentes propostas apresentadas ao longo da sequência didática.

Ao final das aulas da sequência, foi aplicado um questionário com perguntas abertas, elencadas abaixo, com o intuito de obter a percepção do estudantes sobre a experiência vivida.

1 Qual das atividades propostas você mais gostou?

2 As atividades propostas ajudaram na compreensão dos conteúdos? Explique sua resposta.

3 Você sentiu dificuldades em algum momento? Qual(ais)?

[1] O ensino técnico tinha 4 anos de duração nessa escola

4 Conte sua experiência com as atividades. Quais os pontos positivos e o que precisa ser melhorado?

5 Qual a sua opinião sobre as aulas diferenciadas de Matemática?

Com base nas respostas fornecidas pelos estudantes ao questionário, foram organizadas e analisadas suas percepções sobre a eficácia da abordagem adotada, o nível de engajamento nas atividades propostas e os principais desafios enfrentados.

4.1 O QUE É SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segundo Zabala (1998), uma sequência didática consiste de uma série articulada e ordenada de atividades que buscam atingir um determinado objetivo pedagógico. Nesse sentido, tais atividades devem ser organizadas de maneira que cada unidade didática, que pode corresponder a uma aula ou mais, contribua para alcançar um objetivo de ensino mais amplo.

Ainda como explica Zabala (1998), a sequência didática deve estar fundamentada em um objetivo claro, para assegurar a intencionalidade pedagógica das atividades, orientando o processo de ensino-aprendizagem em direção à consolidação dos conteúdos. Dessa forma, a sequência pode ser desenvolvida com um objetivo geral, voltado ao que se espera que o estudante aprenda no final do percurso. Simultaneamente, cada atividade deve ter seu objetivo específico, que contribua de forma articulada no alcance do propósito geral.

Para estruturar a sequência didática elaborada, é possível optar por diversas metodologias que devem ser empregadas e aplicadas de tal forma a alcançar o objetivo proposto. O uso dessas abordagens permite tornar o ensino de Matemática mais significativo e proveitoso para os estudantes.

No ensino de Matemática, a sequência didática permite abordar conteúdos mais extensos e complexos, fragmentando-os em partes menores, a fim de explorar de forma mais aprofundada as características e propriedades específicas de cada parte do conteúdo. Isso funcionará como uma sequência didática desde que, segundo Costa *et al.* (2024), as atividades estejam entrelaçadas entre si, partindo de atividades mais intuitivas, passando por atividades de desenvolvimento, até chegar em atividades que consolidem os conhecimentos abordados. Essa progressão permite que os objetivos pedagógicos sejam alcançados.

Portanto, a sequência didática constitui-se como uma ferramenta pedagógica estruturada que possibilita o desenvolvimento gradual de conteúdos interligados. Nesse trabalho, apresenta-se uma sequência didática voltada ao ensino de funções trigonométricas. Para que o estudante se aproprie desse conteúdo, as atividades foram articuladas entre si de forma a trabalhar desde os conceitos iniciais, como ângulos e ciclo trigonométrico, até os conceitos de funções seno e cosseno. Essa fragmentação visa proporcionar uma compreensão mais sólida e progressiva das funções trigonométricas, permitindo ao estudante construir o conhecimento de maneira coerente e significativa.

4.2 ATIVIDADES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.2.1 Aula 1: convertendo medidas de arcos entre graus e radianos

Objetivo geral:

- Converter e aplicar a conversão entre medidas de arcos em graus e radianos.

Objetivos específicos:

- Compreender as definições de arcos em radianos.
- Realizar conversões de ângulos em graus para radianos e vice-versa.
- Visualizar a relação entre o comprimento do arco e o raio da circunferência.

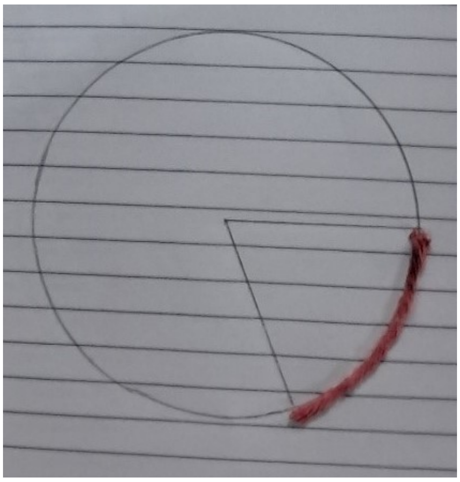
Desenvolvimento da aula:

A proposta desta aula é introduzir o conceito de radiano aos alunos por meio de uma atividade prática e visual. Para isso, o professor deverá preparar os seguintes materiais: compasso, barbante, tesoura e cola.

Inicialmente, pede-se que os alunos cortem um pedaço de barbante de medida qualquer. Em seguida, com o uso do compasso, os alunos deverão desenhar uma circunferência com raio igual ao comprimento do barbante, marcando o centro da figura. Após a construção da circunferência, os alunos deverão colar o barbante sobre o contorno da figura, ligando os pontos das extremidades do barbante ao centro do círculo. Vide exemplo na Figura 4.1. Essa construção permite visualizar, de forma concreta, a relação entre o comprimento do arco e o raio da circunferência, base para a definição de radiano.

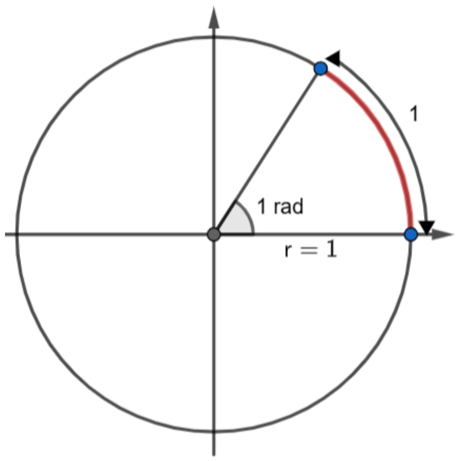
Posteriormente, ao considerar uma circunferência de raio igual a 1, é possível observar com mais clareza a definição de radiano, uma vez que o comprimento do arco será numericamente igual à medida do ângulo em radianos (Vide Figura 4.2). O professor deverá explicar aos estudantes essas relações para que compreendam os conceitos envolvidos na definição de radiano.

Figura 4.1: Construção do Radiano.



Fonte: Os autores.

Figura 4.2: Radiano em uma circunferência de raio 1.



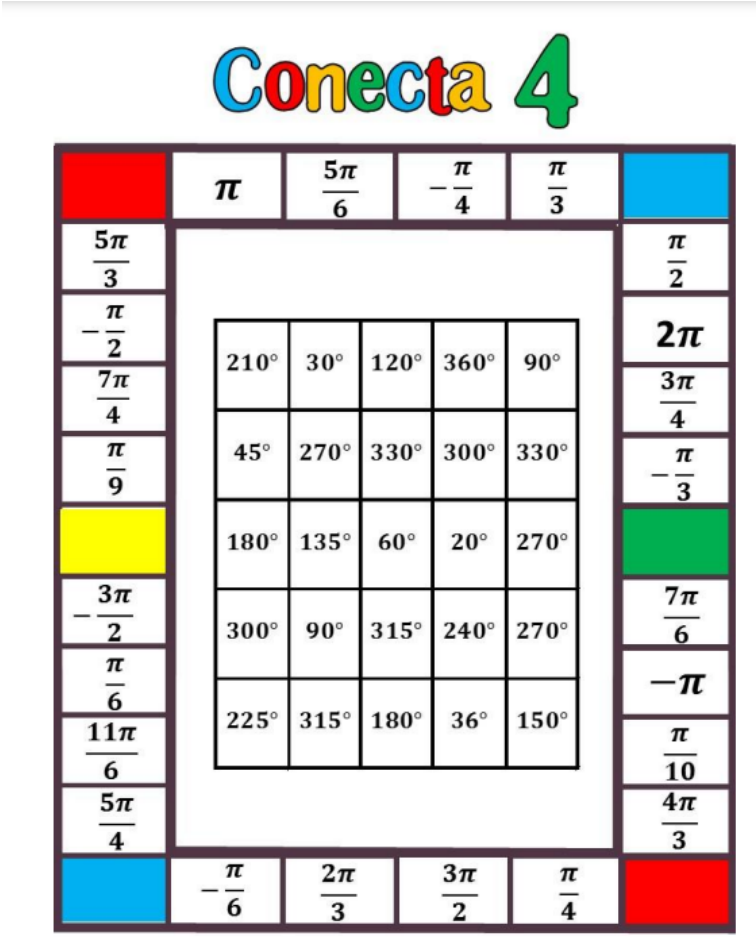
Fonte: Os autores.

Após a atividade prática, o professor deverá conduzir uma explicação expositiva-dialogada, para formalizar a definição de radiano e apresentar as fórmulas de conversão entre graus e radianos. Por meio de exemplos práticos, o professor ensinará como realizar a conversão entre arcos em graus e radianos, explicando de forma clara e didática esse processo de transformação.

Para consolidar os conteúdos abordados, os alunos participarão de uma dinâmica interativa com o jogo "Conecta 4", adaptado a partir do tradicional jogo da velha. Nessa atividade, a cada jogada, os alunos farão a conversão de arcos a cada movimento, reforçando os conceitos de maneira prática, e de fato, relacionando os valores dos ângulos em graus e em radianos.

Para o jogo, os alunos devem ser organizados em duplas, sendo necessário entregar impresso a cartela de números mostrada na Figura 4.3 para cada uma.

Figura 4.3: Jogo Conecta 4.



Fonte: https://www.ensinandomatematica.com/. Acessado em 04/03/2025.

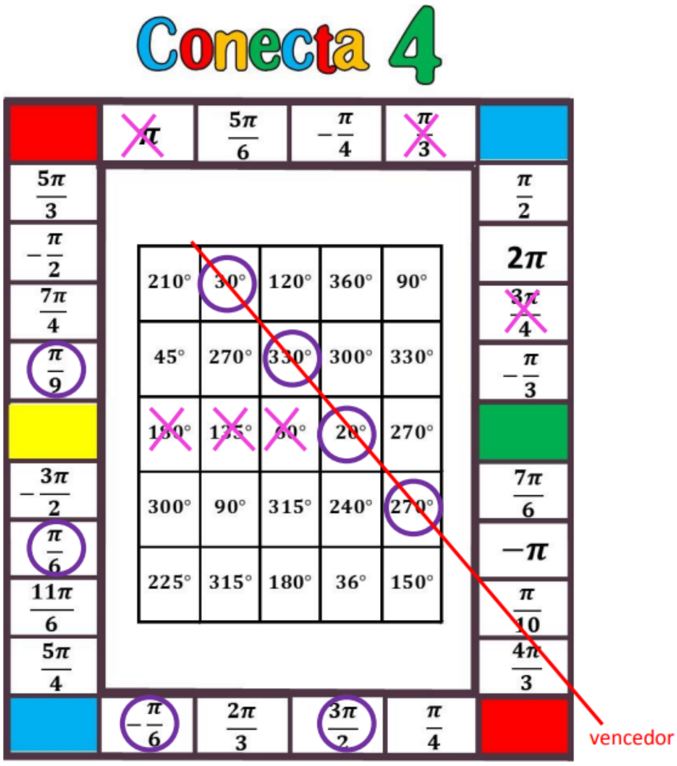
Os participantes devem decidir qual símbolo cada um vai usar – X ou O – além de decidir quem iniciará a partida. Os símbolos utilizados por cada jogador, são os mesmos do tradicional Jogo da Velha.

Feito isso, o primeiro jogador deverá escolher um ângulo, dado em radianos, localizado na borda da cartela, anunciar sua escolha em voz alta e realizar a conversão desse valor para graus. A resposta obtida deverá ser comunicada ao outro jogador que será responsável por realizar a conferência. Caso esteja correta, o valor correspondente deverá ser marcado no quadro central da cartela com o símbolo previamente escolhido.

Por exemplo, o jogador A (símbolo X) fala em voz alta: "$\frac{\pi}{6}$". Em seguida, informa que sua conversão é 30°. Como a transformação está correta, deve marcar no tabuleiro o número 30° com o símbolo que escolheu anteriormente.

Logo após, é a vez do jogador B (símbolo O), que realizará a mesma sequência de passos. Os jogadores deverão alternar as jogadas até que um deles forme uma linha com quatro símbolos iguais – em diagonal, vertical ou horizontal – no tabuleiro central, conforme mostrado na Figura 4.4.

Figura 4.4: Jogo Conecta 4 finalizado.



Fonte: https://www.ensinandomatematica.com/. Acessado em 04/03/2025.

Com essa aula, buscou-se aliar a visualização geométrica aos conceitos adquiridos, facilitando a compreensão do radiano na representação de medida angular e promovendo um aprendizado mais significativo através de uma atividade prática.

Recursos utilizados nessa aula:

- Jogo "Conecta 4" (impresso);
- Compasso, barbante, tesoura e cola.

4.2.2 Aula 2: conhecendo o ciclo trigonométrico

Objetivo geral:

- Reconhecer as propriedades do ciclo trigonométrico.

Objetivos específicos:

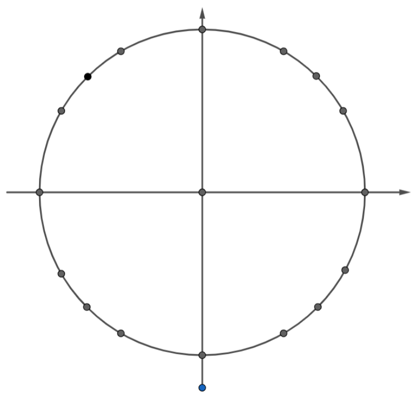
- Relacionar os pontos notáveis do ciclo trigonométrico com suas respectivas medidas em graus e radianos.
- Compreender que o ciclo trigonométrico é construído sobre uma circunferência de raio 1.
- Identificar e localizar os ângulos notáveis no ciclo trigonométrico.
- Reconhecer que os valores do seno e do cosseno correspondem às medidas dos catetos em um triângulos retângulo com hipotenusa igual a 1 unidade.

Desenvolvimento da aula:

A aula terá início com uma breve revisão oral dos conteúdos abordados na Aula 1. Essa retomada pode ocorrer por meio de perguntas problematizadoras, como: “Quais são as unidades de medida de arcos?”, “ O que é o radiano?” e “Como transformamos um arco de graus para radianos?”.

Em seguida, por meio de uma aula expositiva dialogada, o professor explicará o conceito de circunferência trigonométrica e demonstrará como localizar ângulos nela. Paralelamente, os alunos utilizarão um modelo impresso do ciclo (em branco) para marcar os ângulos à medida que forem apresentados pelo docente, conforme a Figura 4.5.

Figura 4.5: Pontos notáveis no ciclo trigonométrico.

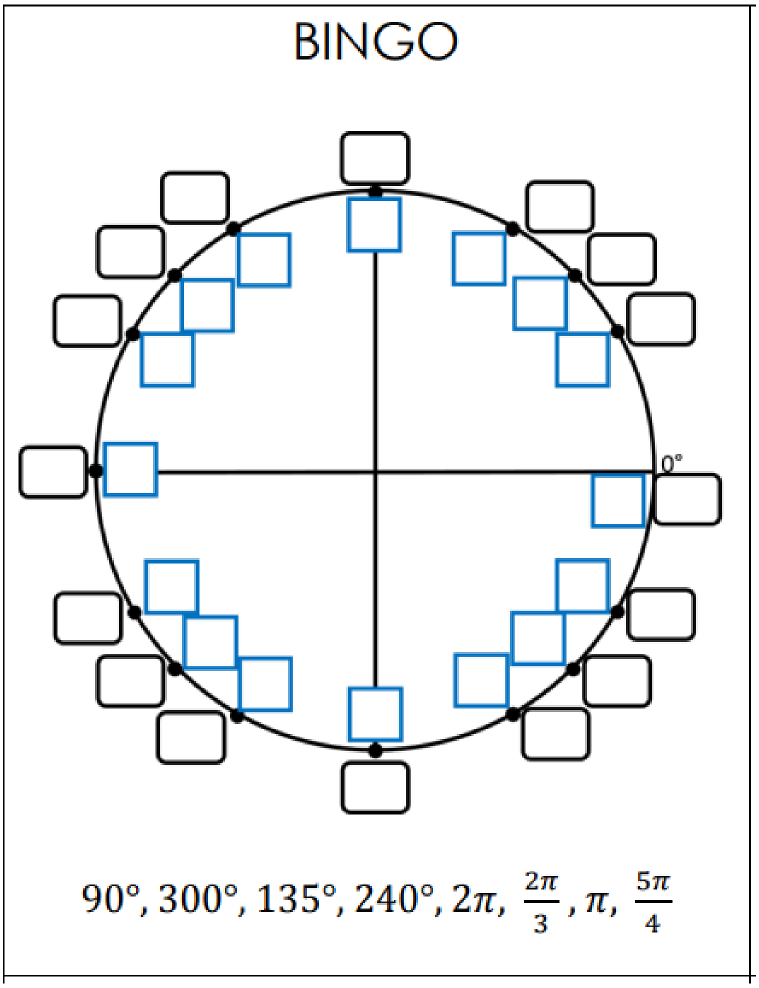


Fonte: Os autores.

Para reforçar o aprendizado, os alunos participarão do jogo “Bingo Trigonométrico”, cujo objetivo é praticar a localização e a conversão de medidas de ângulos notáveis no ciclo trigonométrico. O professor deverá distribuir uma cartela para cada estudante, conforme modelo apresentado na Figura 4.6. É importante que o professor confeccione diferentes cartelas para a turma, variando os valores de cada uma.

Além das cartelas, o professor precisará ter em mãos papéis com os ângulos a serem sorteados, tanto em graus quanto em radianos. Durante o jogo, o ângulo será sorteado e anunciado em voz alta. O aluno que encontrar esse valor em sua cartela deverá:

Figura 4.6: Cartela do Bingo trigonométrico.



Fonte: https://www.ensinandomatematica.com/. Acesso em 10/05/2024.

1. Identificar o valor correspondente na outra unidade (graus ou radianos);
2. Marcar a posição do ângulo corretamente no ciclo trigonométrico impresso.

O jogo termina quando um aluno marcar corretamente todos os ângulos de sua cartela, tanto em termos de conversão quanto de localização no ciclo. Caso o professor deseje, pode premiar os vencedores, como forma de motivação extra. Além disso, o número de rodadas fica a critério do professor, visto que o jogo é dinâmico e os alunos se engajam bastante.

Essa atividade promove o desenvolvimento da percepção espacial e da capacidade de conversão entre diferentes representações dos ângulos, fundamentais para o estudo das funções trigonométricas nas aulas seguintes.

Recursos utilizados nessa aula:

- Cartelas do jogo "Bingo Trigonométrico" (impressas).

- Folhas impressas com o ciclo trigonométrico em branco.
- Papéis impressos com ângulos em graus e radianos para sorteio.
- Quadro ou projetor para apoio visual, se necessário.

4.2.3 Aula 3: gráficos das funções seno e cosseno e o ciclo trigonométrico

Objetivo geral:

- Compreender a transição da trigonometria no triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico.

Objetivo específico:

- Identificar propriedades e relações dos valores do seno e cosseno de ângulos.
- Reconhecer que os segmentos associados aos valores do seno e do cosseno são perpendiculares.

Desenvolvimento da aula:

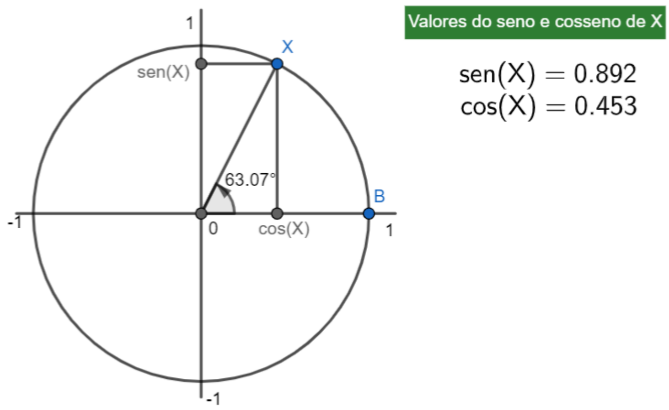
Essa aula será realizada no laboratório de informática, com o uso de computadores conectados à internet. O objetivo é promover a exploração visual e interativa das funções seno e cosseno a partir do ciclo trigonométrico, por meio do software GeoGebra.

No laboratório, os alunos serão orientados a acessar a plataforma Geogebra, onde foi disponibilizada uma atividade interativa criada pelo primeiro autor deste trabalho. A atividade pode ser acessada em https://www.geogebra.org/m/gdhw8c3m e apresenta um ciclo trigonométrico dinâmico que calcula os valores do seno e cosseno de ângulos da circunferência, como mostrado na Figura 4.7.

Para realização da atividade, os alunos utilizarão uma folha impressa com algumas orientações, contendo uma sequência de perguntas estruturadas que os levarão a deduzir e compreender as propriedades do seno e cosseno com base na observação e manipulação do modelo interativo. Esta folha de atividades, que orienta a investigação dos estudantes, está disponível no APÊNDICE A.

Ao final da atividade, o professor promoverá uma revisão dialogada dos conceitos explorados, destacando as relações entre os segmentos representativos do seno e do cosseno e sua projeção no plano cartesiano. O uso de ferramentas digitais favorece o envolvimento dos alunos e contribui para a visualização geométrica e interpretação gráfica.

Figura 4.7: Ciclo trigonométrico no *Geogebra*..



Fonte: Os autores.

Recursos utilizados nessa aula:

- Atividade interativa no GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/gdhw8c3m.
- Laboratório de Informática, com acesso à internet.
- Folha de atividades impressas com questões investigativas sobre o seno e cosseno (ver APÊNDICE A).

4.2.4 Aula 4: Funções seno e cosseno

Objetivo geral:

- Analisar o comportamento e as propriedades dos gráficos das funções seno e cosseno.

Objetivos específicos:

- Reconhecer a representação gráfica das funções seno e cosseno.
- Identificar as propriedades fundamentais das funções seno e cosseno com o auxílio do software Geogebra.
- Estabelecer a relação entre as propriedades do ciclo trigonométrico e o comportamento gráfico das funções seno e cosseno.

Desenvolvimento da aula:

Para o desenvolvimento dessa aula, é necessário o uso do laboratório de informática com acesso à internet ou alternativamente, o aplicativo GeoGebra instalado nos dispositivos disponíveis (tablets, computadores, celulares).

Os estudantes serão conduzidos ao estudo do comportamento das funções seno e cosseno por meio de uma folha de atividades, disponível no APÊNDICE B. Com o auxílio do professor, os alunos explorarão de forma autônoma o *software* GeoGebra, inserindo as leis de formação das funções, conforme indicado na folha de atividades.

Durante essa exploração, o professor assume o papel de mediador do conhecimento, permitindo que o estudante tire as suas próprias conclusões sobre o comportamento e as propriedades das funções trigonométricas seno e cosseno.

Ao final da aula, o professor poderá realizar a correção coletiva das atividades, a fim de esclarecer possíveis dúvidas e de evitar possíveis erros de interpretação. Recomenda-se, ainda, uma breve revisão dos conceitos abordados, enfatizando as propriedades mais importantes que os alunos devem compreender sobre as funções trigonométricas seno e cosseno.

Recursos utilizados nessa aula:

- Folha de atividades do APÊNDICE B.
- Laboratório de informática com acesso à internet ou dispositivos com o aplicativo GeoGebra instalado.

4.2.5 Aula 5: resolvendo questões de vestibulares e ENEM

Objetivo geral:

- Analisar e resolver questões de vestibulares e do ENEM que envolvam os conceitos de funções trigonométricas.

Objetivo específico:

- Resolver atividades que envolvam o cálculo de ângulos em circunferências.
- Interpretar e resolver situações-problema que abordam conceitos de funções trigonométricas.
- Desenvolver habilidades de síntese e tomada de decisões na resolução de problemas relacionados às funções trigonométricas.

Desenvolvimento da aula:

Para o desenvolvimento desta aula, foram previamente selecionadas cinco questões que contemplam os conteúdos trabalhados nas aulas anteriores. As questões estão disponíveis no APÊNDICE C e podem ser impressas e distribuídas aos alunos.

Essa aula foi planejada considerando o perfil da turma em que a sequência didática foi aplicada, composta por estudantes, em que sua maioria, tem a intenção de prestar vestibulares e o ENEM. Por esse motivo, optou-se por selecionar questões de vestibulares, com destaque para aquelas da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), visto que os alunos da região frequentemente realizam os vestibulares dessa universidade.

Ao final da aula, é recomendada a correção coletiva dos exercícios, seguida de uma revisão dos principais conceitos abordados ao longo da sequência didática. Essa etapa de consolidação é importante para reforçar o conteúdo e esclarecer eventuais dúvidas que podem persistirem.

Recursos utilizados nessa aula:

- Quadro para correção coletiva.
- Folha de atividades apresentada no APÊNDICE C.

No Quadro 4.1, apresenta-se um quadro-resumo com a organização das cinco aulas que compõem a sequência didática desenvolvida para o ensino de funções trigonométricas no Ensino Médio. O quadro sintetiza os principais elementos de cada aula, incluindo o tema abordado, os objetivos propostos, as atividades realizadas e os recursos utilizados, oferecendo uma visão geral da estrutura e da intencionalidade pedagógica de cada aula.

Quadro 4.1: Quadro-resumo da sequência didática

Aula	**Tema**	**Objetivos**	**Principais atividades**	**Recursos utilizados**
Aula 1	Convertendo medidas de arcos entre graus e radianos	Compreender a definição de radiano e realizar a conversão entre graus e radianos.	Atividade prática com barbante e compasso e Jogo Conecta 4.	Barbante, compasso, cola, tesoura e Jogo "Conecta 4" impresso.
Aula 2	Conhecendo o ciclo trigonométrico.	Localizar ângulos no ciclo trigonométrico.	Explicação dialogada sobre o ciclo trigonométrico e o Jogo Bingo Trigonométrico.	Ciclo trigonométrico em branco e Jogo Bingo Trigonométrico (impressos).
Aula 3	Gráficos das funções seno e cosseno e o ciclo trigonométrico	Identificar as propriedades de seno e cosseno no ciclo trigonométrico.	Exploração interativa no GeoGebra e folha com perguntas investigativas;	Laboratório de informática com internet e folha de atividades impressa (Apêndice A)
Aula 4	Funções seno e cosseno	Analisar o comportamento gráfico das funções e relacionar com o ciclo trigonométrico.	Uso do GeoGebra com folha de atividades investigativa	Laboratório de informática com o uso do GeoGebra (online ou app) e folha de atividades impressa (Apêndice B).
Aula 5	Resolvendo questões de vestibulares e ENEM	Resolver problemas envolvendo funções trigonométricas;	Resolução de 5 questões selecionadas de vestibulares e ENEM; Correção coletiva e revisão de conceitos.	Folha impressa com questões (Apêndice C) e lousa para correção coletiva.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Como base nas respostas dos estudantes ao questionário apresentado na Seção 4, apresentamos uma análise qualitativa das percepções dos alunos sobre as atividades desenvolvidas ao longo da sequência didática. A seguir, são discutidas as principais respostas dos estudantes e as considerações dos autores.

Questão 1 – Qual das atividades propostas você mais gostou?

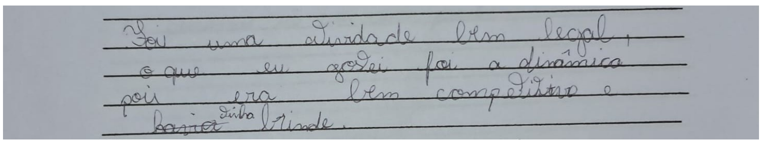
As respostas dos estudantes foram categorizadas em quatro atividades principais: bingo trigonométrico, jogo Conecta 4, uso do Geogebra e aulas expositivas dinâmicas. Fazendo uma análise das respostas, 15 dos estudantes demonstraram preferência pela atividade do bingo trigonométrico, evidenciando o potencial motivador de jogos no ensino de Matemática, tanto no engajamento quanto na aprendizagem.

Apenas um estudante indicou como atividade favorita a plataforma Khan Academy, que não foi utilizada durante a sequência didática. Considerando que essa é uma plataforma utilizada semanalmente pelos estudantes ao longo do ano letivo, é provável que tenha havido uma confusão por parte do aluno ao delimitar sua resposta apenas às atividades propostas na sequência.

De todo modo, o destaque dado ao jogo do Bingo Trigonométrico pode ser atribuído ao fato de ser um jogo conhecido e de regras simples. Além da dinâmica competitiva existente no jogo, o engajamento foi impulsionado pelos brindes que foram ofertados pelo professor durante a realização das atividades. Segundo o relato de um aluno:

Estudante 1: “ Foi uma atividade bem legal. O que eu gostei foi a dinâmica, pois era bem competitiva e tinha brinde.” (Figura 5.1)

Figura 5.1: Resposta 1.



Fonte: Os autores.

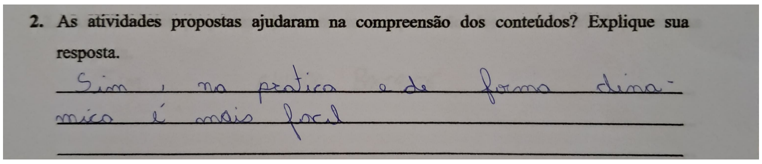
Embora o bingo tenha sido o mais citado, o professor observou também um alto engajamento dos estudantes durante a aplicação do jogo Conecta 4, especialmente no que diz respeito à conversão entre graus e radianos. Muitos alunos solicitaram novas cartelas para repetir o jogo com seus colegas, reforçando a eficácia do uso de jogos no ensino de conteúdos Matemáticos.

Questão 2 - As atividades propostas ajudaram na compreensão dos conteúdos? Explique sua resposta.

Os 21 estudantes que responderam ao questionário, afirmaram que as atividades contribuíram para a compreensão dos conteúdos. A palavra mais recorrente nas respostas foi "dinâmica" – aparecendo um total de 9 vezes– associada tanto ao afastamento do modelo tradicional de ensino quanto à natureza interativa dos jogos utilizados. Os relatos a seguir ilustram essas percepções:

Estudante 2: "Sim, na prática e de forma dinâmica é mais fácil." (Figura 5.2)

Figura 5.2: Resposta 2.

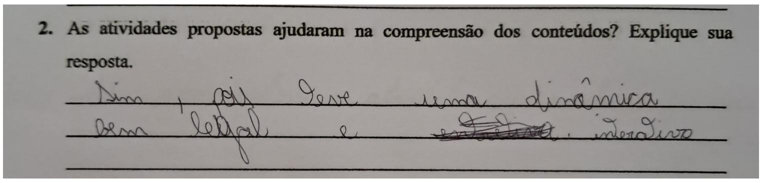

2. As atividades propostas ajudaram na compreensão dos conteúdos? Explique sua resposta.

Sim, na pratica e de forma dinamico é mais facil

Fonte: Os autores.

Estudante 3: "Sim, pois teve uma dinâmica bem legal e interativa." (Figura 5.3)

Figura 5.3: Resposta 3.


2. As atividades propostas ajudaram na compreensão dos conteúdos? Explique sua resposta.

Sim, pois teve uma dinâmica bem legal e interativo

Fonte: Os autores.

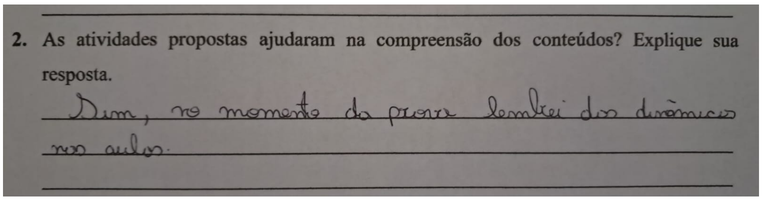
Além dos jogos, as atividades mais simples, como o caso de construir o radiano manualmente com barbante, também contribuíram para o engajamento dos estudantes. O ensino tradicional se apresenta menos proveitoso quando comparado às abordagens mais dinâmicas e interativas. Essa percepção é reforçada pelo relato de um estudante, que afirmou:

Estudante 3: "Sim, no momento da prova lembrei das dinâmicas das aulas." (Figura 5.4)

Questão 3: Você sentiu dificuldade em algum momento? Qual(ais)?

A escolha do conteúdo de funções trigonométricas para a sequência didática foi motivada pela complexidade que os estudantes possuem em compreendê-lo, visto que possui muitas propriedades e um alto grau de abstração. Assim, é completamente normal esperar

Figura 5.4: Resposta 4.



2. As atividades propostas ajudaram na compreensão dos conteúdos? Explique sua resposta.

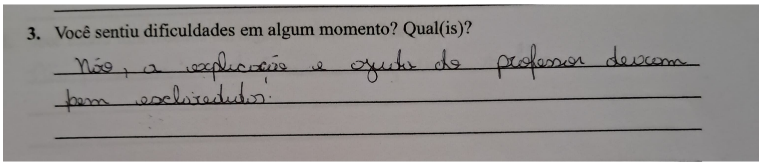
Sim, no momento da prova lembrei das dinâmicas nas aulas.

Fonte: Os autores.

que eles relatem dificuldades durante a realização das atividades, mesmo com o uso de metodologias diferenciadas.

No entanto, não foi possível identificar dificuldades específicas através do qeustionário dos estudantes, pois as respostas foram, em sua maioria, bem sucintas. Alguns estudantes afirmaram não ter tido dificuldades, como relatado pelo Estudante 3: “Não, a explicação e ajuda do professor deixam bem esclarecidas.” (Figura 5.5)

Figura 5.5: Resposta 5.



3. Você sentiu dificuldades em algum momento? Qual(is)?

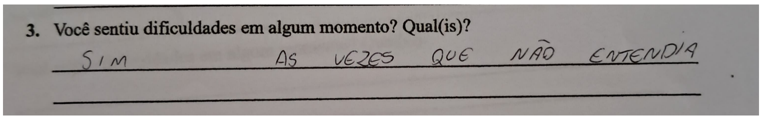
Não, a explicação e ajuda do professor deixam bem esclarecidas.

Fonte: Os autores.

Outros indicaram ter enfrentado desafios, mas não explicitaram quais:

Estudante 4: “Sim. As vezes que eu não entendia” (Figura 5.6)

Figura 5.6: Resposta 6.



3. Você sentiu dificuldades em algum momento? Qual(is)?

SIM AS VEZES QUE NÃO ENTENDIA

Fonte: Os autores.

A partir das observações em sala de aula, da análise das respostas dos estudantes nos materiais impressos e das dúvidas manifestadas na realização das atividades, o professor mediador identificou duas principais dificuldades:

1. **Análise dos gráficos das funções seno e cosseno com o GeoGebra:** mesmo o plano cartesiano estando com a escala de $\frac{\pi}{2}$ em seu eixo horizontal, os estudantes não estavam compreendendo a ideia de período e sua identificação no gráfico.

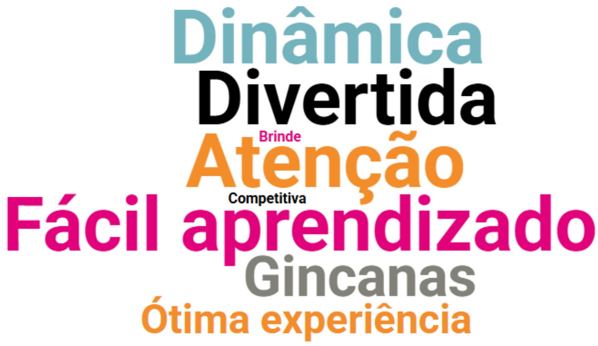
2. **Interpretação de questões de vestibulares, especialmente do ENEM:** por se tratar de problemas com longos textos para leitura e interpretação, além da

presença de vários conceitos em uma mesma questão, alguns estudantes tiveram dúvidas quanto à forma de iniciar a resolução. Nesses casos, o professor recorreu a dicas visuais, como sugestões de esboços, para auxiliar o estudante sem comprometer sua autonomia.

Questão 4: Conte sua experiência com as atividades. Quais os pontos positivos e o que precisa ser melhorado?

Para análise dessas respostas, foi elaborada uma nuvem de palavras com os principais aspectos mencionados pelos estudantes. Para sua produção, acessou-se o site https://infograph.venngage.com/infographics no qual foram inseridas as palavras-chave extraídas das respostas dos alunos. O resultado pode ser observado na Figura 5.7.

Figura 5.7: Nuvem de palavras dos pontos positivos da sequência didática.



Fonte: Os autores. Produzido em https://infograph.venngage.com/infographics.

O uso de aulas dinâmicas, em especial por meio de jogos, foi amplamente reconhecido como um ponto positivo. Os estudantes relataram que essas estratégias aumentaram sua participação em sala de aula, proporcionando maior facilidade na compreensão dos conteúdos.

Outro aspecto que vale ressaltar é a percepção dos próprios estudantes quanto à facilidade de aprendizagem proporcionada pelas atividades propostas. Eles demonstraram compreensão dos conteúdos, ao menos dos conceitos fundamentais, e conseguiram aplicar nos jogos desenvolvidos em sala e na resolução das questões de vestibulares.

O fato de colocar o estudante no centro do processo de ensino, por meio de uma participação ativa, apresenta bons resultados, pois favorece a concentração e o engajamento, diferentemente do que costuma ocorrer em aulas centradas na exposição tradicional. Entretando, nenhum estudante indicou pontos de melhoria, possivelmente por não estarem habituados a atividades tão diferenciadas em comparação ao modelo tradicional.

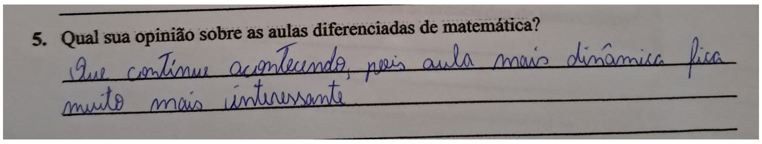
Questão 5: Qual a sua opinião sobre as aulas diferenciadas de Matemática?

Essa pergunta buscou compreender a percepção dos alunos sobre as metodologias adotadas nas aulas da sequência didática. Como professores comprometidos em fazer o aluno aprender, torna-se indispensável inovar e adotar metodologias que despertem o interesse dos alunos e favoreçam sua participação ativa no processo de ensino-aprendizagem.

Todos os alunos que responderam esse questionário apontaram que as aulas diferenciadas de matemática são boas ou que precisam acontecer de maneira mais frequente, pois facilitam a aprendizagem e tornam o processo mais divertido e dinâmico. Dentre os apontamentos registrados, segue o relato de um dos alunos:

Estudante 5: "Que continue acontecendo, pois aula mais dinâmica fica muito mais interessante." (Figura 5.8)

Figura 5.8: Resposta 7.

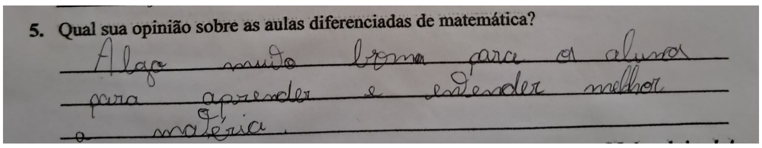


Fonte: Os autores.

Outro estudante também relata que:

Estudante 6: "É algo muito bom para os alunos para aprender e entender melhor a matéria." (Figura 5.9)

Figura 5.9: Resposta 8.



Fonte: Os autores.

De modo geral, os resultados obtidos indicam que as atividades diferenciadas propostas na sequência didática contribuíram significativamente para o aumento do interesse dos estudantes na realização das atividades e na compreensão dos conteúdos.

O uso de jogos como o bingo trigonométrico e o Conecta 4, aliado ao apoio tecnológico do GeoGebra, demonstram ser estratégias que facilitam a compreensão de conteúdos abstratos e na visualização dos gráficos de funções trigonométricas, que normalmente não são fáceis de serem esboçadas manualmente. Auxiliaram também na compreensão do conceito de medidas de arcos, evidenciada durante os jogos.

Apesar dos resultados positivos, algumas dificuldades observadas pelo professor durante a aplicação das atividades, especialmente aquelas relacionadas à análise de gráficos e à interpretação de questões de vestibulares, apontam para a necessidade de ajustes na abordagem pedagógica proposta. Seria interessante por exemplo, se possível, realizar um nivelamento prévio sobre conceitos como domínio, imagem e contradomínio, antes da exploração dos gráficos. Ainda, para uma análise do impacto da sequência didática, seria interessante realizar a aplicação do questionário por aula, permitindo uma avaliação mais detalhada das estratégias utilizadas.

Além disso, houve maior atenção à análise do comportamento e ao engajamento dos estudantes durante a realização das atividades, incluindo os jogos matemáticos e o uso do GeoGebra. A análise do desempenho, dos acertos e da compreensão não foi realizada de maneira tão assertiva, podendo constituir o foco de futuras discussões sobre a sequência didática.

De modo geral, a opinião dos estudantes confirmam que aulas diferenciadas tornam processo de ensino aprendizagem mais produtivo, envolvente e contextualizado com a realidade do aluno. Além disso, transforma a postura dos alunos de passiva para ativa, promovendo maior comprometimento com a aprendizagem dos conteúdos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo desta pesquisa foi investigar as contribuições da aplicação de uma sequência didática voltada ao ensino de funções trigonométricas, abordando conteúdos como medidas de arcos, o ciclo trigonométrico, os gráficos das funções seno e cosseno, suas propriedades e a resolução de questões contextualizadas e de vestibulares.

Embora um dos objetivos da pesquisa previsse a identificação das principais dificuldades dos estudantes na aprendizagem de funções trigonométricas, a análise do questionário final não possibilitou levantar tais informações de forma direta. No entanto, durante a observação das atividades, foi possível perceber algumas dificuldades recorrentes, especialmente relacionadas à interpretação de gráficos e à compreensão do comportamento das funções seno e cosseno. Esses aspectos, ainda que não declarados pelos alunos, indicam pontos de atenção para futuras intervenções pedagógicas.

A elaboração da sequência baseou-se na proposta de Zabala (1998), que defende a articulação de diferentes abordagens de ensino para um mesmo conteúdo. Como as atividade presentes na sequência didática foram planejadas de forma integrada, cada conceito pode ser trabalhado de uma maneira diferente, abrangendo mais formas de ensino, o que ampliou as possibilidades de aprendizagem e compreensão por parte dos estudantes. Essa organização contrasta com o modelo tradicional de ensino, que muitas vezes são desconexas entre si, ou não mostram ao estudante o objetivo principal de tudo que é proposto.

Para avaliar a percepção dos estudantes em relação à proposta, aplicou-se um questionário ao participantes da pesquisa, estudantes do 4º ano do Ensino Médio Técnico, procurando obter subsídios importantes sobre essa intervenção pedagógica. De maneira geral, os resultados indicaram que os estudantes compreenderam os conceitos abordados e foram capazes de aplicá-los na resolução das atividades propostas.

Os dados evidenciam que o uso de metodologias diferenciadas atua como um grande potencializador do processo de ensino e aprendizagem, especialmente no engajamento dos alunos no estudo da matemática – disciplina que, frequentemente, é vista como desmotivadora ou desconectada da realidade. Para além da aprendizagem, observou-se um aumento na frequência e na participação dos alunos nas aulas de matemática, principalmente nas atividades que envolveram jogos, o que reforça a importância do uso de estratégias de ensino mais interativas e inovadoras.

No campo de Educação Matemática, é notório que o uso de metodologias que colocam o estudante como o centro do processo de ensino, favorece uma aprendizagem mais significativa, mesmo em conteúdos tradicionalmente considerados abstratos ou de maior complexidade. A sequência desenvolvida nesta pesquisa demonstrou ser uma ferramenta valiosa para os professores que buscam tornar o ensino de aprendizagem de funções trigonométricas mais acessível, atrativo e dinâmico.

Apesar da participação dos estudantes durante a aplicação da sequência didática, alguns alunos acabaram faltando em uma ou duas aulas. Esse fato representa uma limitação, visto que as aulas da sequência são planejadas de forma articulada e sequencial, e a ausência em qualquer uma das etapas pode gerar lacunas na aprendizagem. Embora o professor possa auxiliar na recuperação dos tópicos abordados, esse apoio não substitui a participação ativa necessária para bons resultados.

Enfim, podemos concluir que em poucas aulas, a sequência didática se mostrou como uma valiosa intervenção didática no ensino das funções trigonométricas seno e cosseno. Como proposta de trabalhos futuros, sugere-se a ampliação da sequência didática para mais conteúdos de trigonometria previstos para o último ano do Ensino Médio do Estado do Paraná, como por exemplo, razões trigonométricas no triângulo retângulo, aprofundamento do ciclo trigonométrico e o estudo das transformações nos gráficos (translações e dilatações), de equações trigonométricas e de aplicações da trigonometria. Essa ampliação é plausível no sentido de oferecer aos estudantes uma visão mais completa e interligada dos conceitos trigonométricos, promovendo uma aprendizagem sólida e coerente com as exigências dos currículos oficiais dos exames externos, como o ENEM e os vestibulares.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. T. de. **Trigonometria: da teoria às aplicações**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: https://repositorio.ifpb.edu.br/handle/177683/870. Acesso em: 25 mai. 2025.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

COSTA, D. E.; GONÇALVES, T. O.; MARIANO, W. dos S. Construção e Desenvolvimento de Sequência Didática Investigativa (SDI): bases teóricas e metodológicas. **PARADIGMA**, p. e2024011-e2024011, 2024.

FELIPPE, A. C. .; MACEDO, S. da S. Contributions of Mathematical games and Mathematical modeling in teaching Mathematics. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 11, n. 1, p. e41411124886, 2022. DOI: 10.33448/rsd-v11i1.24886. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/24886. Acesso em: 23 out. 2024.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. Boletim da SBEM-SP, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

GOMES, M. C. D.; ALVES, D. R. S.; DETSCH, D. T. Jogos matemáticos como uma ferramenta de ensino. **Revista extensão em foco. Palotina**, n. 27, p. 172-191, 2022.

GONZÁLEZ, Fredy Enrique. Reflexões sobre alguns conceitos da pesquisa qualitativa. Revista Pesquisa Qualitativa, v. 8, n. 17, p. 155-183, 2020.

GRANDO, R. C. et al. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Campinas, SP, v. 224, 2000.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 2013.

KISHIMOTO, T. M. O jogo e a educação Infantil. **Perspectiva**, [S.L.], v. 12, n. 22, p. 105-128, 1994. DOI: 10.5007/%x. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/view/10745. Acesso em: 23 out. 2024.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2021.

LIMA, M. G.; DA ROCHA, A. A. S. As tecnologias digitais no ensino de matemática. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 8, n. 5, p. 729-739, 2022.

LOOMIS, Elisha Scott. *The Pythagorean Proposition.* 2. ed. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

LOPES, M. M. Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 27, p. 631-644, 2013.

MENEZES, Sérgio Brandão Defensor. Jogos Matemáticos: Estímulo e Aprendizagem. **Revista Psicologia & Saberes**, v. 9, n. 16, p. 4-21, 2020.

MIRANDA, R. S. O uso do Geogebra no estudo de trigonometria. 2021.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares. **Lf Editorial**, 2012. Disponível em : books.google.com.br. Acesso em 26/08/2025

NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

OLIVEIRA, F. P. D. **As dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de trigonometria no ensino médio.** 2019. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Pará , Castanhal, 2019.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular do Paraná: princípios, direitos e orientações**. Curitiba: SEED, 2018. Disponível em: https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-08/referencial_curricular_novoem_11082021.pdf. Acesso em: 13 mai. 2025.

PEREIRA, C. da S.; DO RÊGO, R. M. Aprendizagem em Trigonometria - Contribuições da teoria da aprendizagem significativa. **XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**, 2011. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/1307_1381_ID.pdf.. Acesso em: 21 Jan. 2025.

PEREIRA, N. V.; ARAÚJO, M. S. T. de. Use of technological resources in Education: paths and perspectives. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 9, n. 8, p. e447985421, 2020. DOI: 10.33448/rsd-v9i8.5421. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/5421. Acesso em: 13 mai. 2025.

ZABALLA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artemed, 1998.

APÊNDICE A - FOLHA DE ATIVIDADES DA AULA 03

O objetivo desta atividade é identificar as propriedades das funções seno e do cosseno, bem como compreender o cálculo dessas razões com o uso do ciclo trigonométrico. Para isso, acesse o link www.geogebra.org/m/gdhw8c3m que direciona a uma atividade de geometria dinâmica no software GeoGebra.

Para responder as questões a seguir, movimente o ponto X ao longo do ciclo trigonométrico de modo a descobrir os valores do seno e do cosseno dos ângulos solicitados na atividade.

1) Complete a tabela abaixo, usando as razões do seno e cosseno da trigonometria do triângulo retângulo, sem o auxílio do geogebra.

	30°	45°	60°
Seno			
Cosseno			

2) Realize as operações de radiciação e divisão indicadas na tabela do exercício 1) e registre, na tabela abaixo, os valores aproximados com três casas decimais.

	30°	45°	60°
Seno			
Cosseno			

3) Analisando a figura do ciclo trigonométrico no Geogebra, qual eixo cartesiano é utilizado para determinar o valor do seno? E qual é usado para o cosseno?

4) Deslize o ponto X até encontrar o ângulo de 35°. Quais são os valores do seno e do cosseno correspondentes a esse ângulo?

5) Utilizando o ponto X, complete a tabela a seguir, com os valores de seno e cosseno dos ângulos indicados.

6) Determine os valores do seno dos ângulos de 60°, 120°, 240° e 300°. A partir desses resultados, responda:

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Seno					
Cosseno					

a) Em quais quadrantes o seno é positivo?

b) Em quais quadrantes o seno é negativo?

7) Determine os valores do cosseno dos ângulos de 30°, 150°, 210° e 330°. Com base nesses valores, responda:

a) Em quais quadrantes o cosseno é positivo?

b) Em quais quadrantes o cosseno é negativo?

8) Com base nas respostas dos exercícios 6) e 7), quais conclusões podemos obter com relação aos sinais de seno e cosseno? Elabore uma tabela que indique os sinais do seno e do cosseno em cada quadrante do ciclo trigonométrico.

9) O que acontece com os valores do cosseno à medida que o ângulo X vai aumentando de 0° para 90°? E com os valores do seno?

10) O que acontece com os valores do cosseno quando o ângulo X aumenta de 90° para 180°? E com os valores do seno?

APÊNDICE B - FOLHA DE ATIVIDADES DA AULA 04

Para realizar esta atividade, acesse o site geogebra.org/calculator e abra um documento em branco. Em seguida, siga os passos abaixo:

i) Clique com o botão direito do mouse sobre a malha quadriculada e selecione a opção configurações.

ii) Acesse a aba "EixoX".

iii) Na opção unidade, selecione o valor π.

iv) Marque a caixa "Distância" e nela selecione o valor $\pi/2$.

Feito isso, responda às perguntas a seguir:

1) Digite o seguinte comando: $f(x) = \operatorname{sen} x$, para desenhar o gráfico da função seno. Analisaremos algumas propriedades desta função trigonométrica. Todas as repostas agora devem ser expressas em radianos.

   a) Em qual valor o gráfico da função intercepta o eixo y?

   b) Indique alguns valores em que a função intercepta o eixo x.

   c) Qual é o conjunto imagem dessa função?

   Observação 1 (Imagem): A Imagem de uma função corresponde ao conjunto de valores que a variável dependente (eixo y) pode assumir. No caso das funções trigonométricas seno e cosseno, os valores oscilam entre um valor mínimo e um valor máximo. Assim, o conjunto imagem dessas funções é representado da seguinte forma: $Im(f) = [\text{valor mínimo}, \text{valor máximo}]$

   d) Qual é o domínio da função seno?

   Observação 2 (Domínio): O domínio de uma função corresponde ao conjunto de valores de x para os quais a função está bem definida. Para determinar esse conjunto, é necessário analisar se existe alguma restrição na escolha dos valores de x.

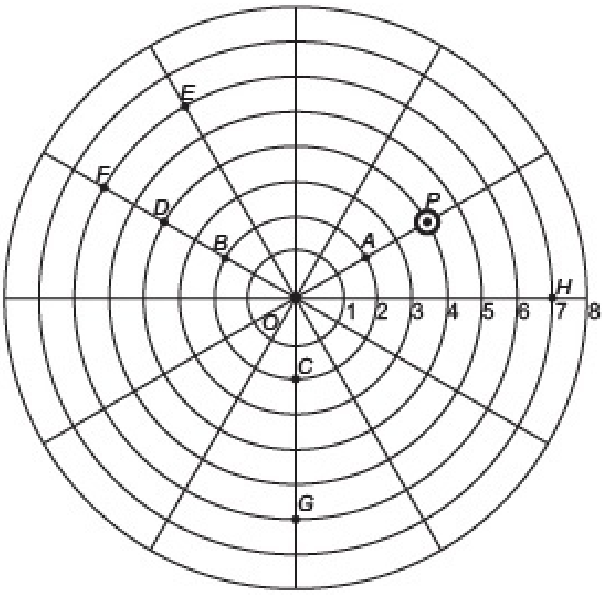
   e) O gráfico da função seno apresenta algum padrão de repetição? Se sim, qual é o seu período?

   Observação 3 (Período): Quando uma função apresenta um padrão que se repete em seu gráfico, dizemos que ela é periódica. Esse padrão de repetição ocorre a partir de um valor constante, chamado período da função. O período pode ser identificado observando o comportamento da função ao longo do eixo x.

2) Responda às mesmas questões do Exercício 1), mas agora analisando o gráfico da função $f(x) = \cos x$.

APÊNDICE C - QUESTÕES DE VESTIBULARES DA AULA 05

1) (ENEM) No jogo mostrado na figura, uma bolinha desloca-se somente de duas formas: ao longo de linhas retas ou por arcos de circunferências centradas no ponto O e raios variando de 1 a 8. Durante o jogo, a bolinha que estiver no ponto P deverá realizar a seguinte sequência de movimentos: 2 unidades no mesmo sentido utilizado para ir de O até o ponto A e, no sentido anti-horário, um arco de circunferência cujo ângulo central é 120°.



Após a sequência de movimentos descrita, a bolinha estará no ponto:

a) B

b) D

c) G

d) E

e) F

PROPOSTA DE SOLUÇÃO: Observe que a que a circunferência está dividida em 12 arcos iguais. Como uma volta completa possui um total de 360°, cada um desses arcos mede 30°. Transladando o ponto P duas unidades para a direita, pois é a mesma direção usada para ir de O até A, e, em seguida, deslocando-se 4 arcos no sentido anti-horário para completar 120°, chegamos no ponto F. Portanto, a alternativa correta é a e).

2) (UEPG/PR) Um relógio analógico marca duas horas e trinta minutos. Ao lado deste, um segundo relógio marca um fuso horário diferente: dez horas e trinta minutos. Considerando o menor ângulo formado entre o ponteiro dos minutos e o ponteiro das horas, em cada um dos relógios, assinale o que for correto:

(01) O ângulo no segundo relógio é maior que 140°.

(02) O módulo da diferença entre os ângulos dos dois relógios é 30°.

(04) O ângulo no primeiro relógio é menor que 120°.

(08) No primeiro relógio, o ângulo é maior que no segundo.

PROPOSTA DE SOLUÇÃO: O relógio pode ser dividido em 12 arcos de circunferência medindo $30°$ cada. Além disso, ao dividirmos cada hora em 12 partes, obtemos que a cada dez minutos o ponteiro das horas aponta para seu número correspondente mais $2.5°$.

Dessa forma, no primeiro relógio, o ponteiro dos minutos está sobre o número seis, significando que percorreu $180°$ com relação ao número 12. Já o ponteiro das horas percorreu $60°$ mais $2,5 \cdot 6 = 15°$. Logo o menor ângulo formado pelos ponteiros do primeiro relógio é $180° - 75° = 105°$.

Da mesma maneira, o ponteiro dos minutos do segundo relógio está apontando para o número 6, mostrando que ele percorreu um total de $180°$. Já o ponteiro das horas percorreu o equivalente a $10 \cdot 30°$ mais $2,5 \cdot 6 = 15°$, ou seja, $300° + 15° = 315°$. Assim, o menor ângulo formado entre os ponteiros do segundo relógio é $315° - 180° = 135°$.

(01) Falso, pois o menor ângulo formado pelos ponteiros do segundo relógio é $135°$, que não é menor que $140°$.

(02) Verdadeiro, pois $|135° - 105°| = |105° - 135°| = 30°$.

(04) Verdadeiro, pois o menor ângulo formado pelos ponteiros do primeiro relógio é $105°$, que é menor que $120°$.

(08) Falso, pois o ângulo do primeiro relógio é $115°$ enquanto no segundo é $135°$.

3) (UEPG/PR) Sobre os arcos e ângulos, assinale o que for correto.

(01) O menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que está marcando 1 hora e 40 minutos é $170°$.

(02) Um trem desloca-se na velocidade constante de $60km/h$ num trecho circular de raio igual a $500\,m$. Então em um minuto, ele percorre um arco de 2 rad.

(04) Uma pessoa caminhando em volta de uma praça circular descreve um arco de $160°$ ao percorrer $120\,m$. O diâmetro da praça é maior que $100\,m$.

(08) Em 50 minutos, o ponteiro dos minutos de um relógio percorre $\dfrac{5\pi}{3}$ rad.

PROPOSTA DE SOLUÇÃO:

(01) Verdadeiro. Utilizando a mesma estratégia do exercício 2, verificamos que o ponteiro dos minutos percorreu $30° \cdot 8 = 240°$, enquanto o ponteiro das horas percorreu $30° + 2,5 \cdot 8 = 50°$. Logo, um dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que marca 1 hora e 40 minutos é $240° - 50° = 190°$. Portanto o menor ângulo formado é $360° - 190° = 170°$.

(02) Verdadeiro. Se o raio da circunferência equivale a $500m$, então o comprimento total é dado por $C = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 500 = 1000\pi$ metros. Dessa forma, o tempo t que ele leva para percorrer uma volta completa pelo trajeto é dado pela expressão $\dfrac{60 \cdot 1000\text{m}}{60\text{min}} = \dfrac{1000\pi\text{m}}{t}$. Resolvendo a equação verificamos que $t = \pi$ minutos. Montando uma regra de três para descobrir o tempo x para percorrer 2 rad, verificamos que:

$$\frac{\pi\text{min}}{x} = \frac{2\pi\text{rad}}{2}$$

Resolvendo a equação verificamos que $x = 1$ minuto.

(04) Falso. Escrevendo uma regra de três, vemos que:

$$\frac{2\pi r}{120\text{m}} = \frac{360^\circ}{160^\circ}.$$

Resolvendo a equação verificamos que $r = \dfrac{135}{\pi}$. Dessa forma o diâmetro da circunferência é dado por $\dfrac{270}{\pi}$, que pode ser aproximado como $85,94$ metros.

(08) Verdadeiro. A cada cinco minutos o ponteiro do relógio percorre 30°. Montando uma regra de três, para descobrir o valor x do ângulo percorrido pelo ponteiro após 50 minutos, temos que:

$$\frac{5\text{min}}{50\text{min}} = \frac{30^\circ}{x}.$$

Assim, vemos que $x = 300^\circ$. Convertendo para radianos, vemos que o ângulo percorrido pelo ponteiro do relógio é $\dfrac{5\pi}{3}$.

4) (UECE/CEV) Se M e m são os valores máximos e mínimo que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3\,\text{sen}^2 x + 7\cos^2 x$ pode assumir, então o produto $M \cdot m$ é igual a:

a) 24

b) 15

c) 21

d) 18

PROPOSTA DE SOLUÇÃO: Alternativa c). O valor máximo da função é obtido quando $\cos^2 x = 1$, ou seja, se $x = 0$. Isso significa que $M = 3\,\text{sen}^2 0 + 7\cos^2 0 = 3 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 7$. Da mesma forma, o valor mínimo da função é obtido quando $\text{sen}^2 x = 1$, ou seja, $x = \dfrac{\pi}{2}$. Assim, $m = 3\,\text{sen}^2 \dfrac{\pi}{2} + 7\cos^2 \dfrac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 3$. Portanto $M \cdot m = 7 \cdot 3 = 21$.

5) (UECE/CE)Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = \text{sen}\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)\pi\right)$ e $g(x) = \text{sen}\left(\left(1-\frac{x}{2}\right)\pi\right)$. Se $k = f(9)\cdot g(9)$, então pode-se afirmar que o valor de k é igual a:

a) 1

b) -1

c) 0

d) -2

PROPOSTA DE SOLUÇÃO: Alternativa b). Calculando,

$$\begin{aligned} f(9) &= \text{sen}\left(\left(1+\frac{9}{2}\right)\pi\right) \\ &= \text{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right) \\ &= \text{sen}\,(990^\circ) \\ &= \text{sen}(270^\circ) \\ &= -1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(9) &= \text{sen}\left(\left(1-\frac{9}{2}\right)\pi\right) \\ &= \text{sen}\left(\frac{-7\pi}{2}\right) \\ &= \text{sen}\,(-630^\circ) \\ &= \text{sen}\,90^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, $k = -1\cdot 1 = -1$.